

UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS



MÁSTER UNIVERSITARIO EN MATEMÁTICA AVANZADA

CURSO 2018-2019

DESIGUALDAD DE BRUNN-MINKOWSKI: RESULTADOS Y CONSECUENCIAS

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

Iván García Brao

DIRIGIDO POR:

María A. Hernández Cifre

Jesús Yepes Nicolás



ANEXO I – Declaración de originalidad y autorización para publicación

**UNIVERSIDAD DE MURCIA – FACULTAD DE MATEMÁTICAS
TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
MÁSTER EN MATEMÁTICA AVANZADA**

**DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD Y
AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN**

Título del trabajo: Desigualdad de Brunn-Minkowski: resultados y consecuencias

Estudiante (nombre y DNI): Iván García Brao 77837970-J

Tutorizado por: M^a Ángeles Hernández Cifre, Jesús Yepes Nicolás

El abajo firmante, autor del trabajo anterior, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que su obra no infringe el copyright de ninguna persona.

■ AUTORIZA a la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia a difundir y utilizar con fines académicos, no comerciales y mencionando expresamente a su autor, el trabajo mencionado. También autoriza a la Facultad de Matemáticas a que el trabajo sea depositado en acceso abierto en el repositorio institucional con el objeto de incrementar la difusión, uso e impacto del trabajo en Internet, y garantizar su preservación y acceso a largo plazo.

- SOLICITO que la publicación del trabajo se demore 12 meses desde su defensa y aprobación por el siguiente motivo:
- Se prevé publicar parte del trabajo en forma de artículo o libro.
 - Otros (indicar):

En Murcia, a 2 de septiembre de 2019

Firma del estudiante

A mi compañera de viaje.

Índice general

Introducción	IV
1. Preliminares	9
1.1. Primeras definiciones sobre cuerpos convexos	10
1.1.1. Conjuntos convexos	10
1.1.2. Hiperplanos soporte	12
1.1.3. Suma de Minkowski	12
1.1.4. Funciones convexas, función soporte y función radial	13
1.1.5. El volumen de un cuerpo convexo	15
1.2. Resultados relacionados con cuerpos convexos y funciones convexas . .	16
1.2.1. Desigualdad de Jensen	17
1.2.2. La fórmula de Steiner y los volúmenes intrínsecos	19
1.3. Resultados relacionados con la medida de un conjunto	21
2. Algunas desigualdades de tipo Brunn-Minkowski	25
2.1. Desigualdad de Brunn-Minkowski para cuerpos convexos	25
2.2. Desigualdad de Brunn-Minkowski para conjuntos compactos	32
2.3. Refinamientos de la desigualdad de Brunn-Minkowski	36
2.4. Versión funcional: desigualdad de Prékopa-Leindler	41
2.5. Desigualdades de tipo Brunn-Minkowski para la medida Gaussiana . .	45
3. Consecuencias de la desigualdad de Brunn-Minkowski	53
3.1. Desigualdad de Rogers-Shephard	53
3.2. Desigualdad Isoperimétrica	56

3.3. Concentración de la medida de la esfera	59
3.3.1. Cálculo del volumen de B_n	59
3.3.2. Distribución del volumen de la esfera	61
3.3.3. Concentración de la medida de la esfera	62
Índice Alfabético	67
Bibliografía	69

Introducción

Como queda reflejado en [12], la Teoría de Brunn-Minkowski es una de las piezas esenciales de la Geometría de los Cuerpos Convexos. Su origen se remonta a la Tesis de Hermann Brunn en 1887 siendo, en su parte más esencial, creación de Hermann Minkowski. Precisamente, el 10 de Diciembre de 1900, Minkowski escribió al ya famoso matemático David Hilbert, informándole de que su estudio sobre el área de superficie y el volumen en \mathbb{R}^3 estaba completo, siendo su avance más importante una idea asociada a tres cuerpos convexos que él denominó, provisionalmente, sus volúmenes mixtos.

La siguiente cita pertenece al obituario de Minkowski escrito por Hilbert en 1911, e ilustra el significado y la importancia de este nuevo concepto:

...Thus the concept of mixed volume appears as the simplest generalization which comprises the notions of volume, surface area, total mean curvature as special cases. In this way the latter notions are related much more closely to each other. Thus we may expect now to obtain a deeper understanding than was possible before, of the mutual relations of these notions...

Si queremos definir brevemente la Teoría de Brunn-Minkowski, podríamos decir que ésta es el resultado de asociar dos conceptos elementales para los conjuntos del espacio euclídeo: la suma vectorial y el volumen. La suma vectorial o suma de Minkowski, combinada con el volumen, nos conduce a la noción de volumen mixto y a la desigualdad fundamental de Brunn-Minkowski, quizá la desigualdad más conocida relacionada con el volumen de conjuntos convexos compactos.

Teorema 1. Sean K_0 y K_1 dos cuerpos convexos de \mathbb{R}^n no vacíos, y sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1)^{1/n} \geq (1 - \lambda)\text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda\text{vol}(K_1)^{1/n},$$

dándose la igualdad si, y sólo si, K_0 y K_1 están en hiperplanos paralelos (si tienen dimensión menor que n), o son homotéticos.

A la vista de un resultado tan «sencillo», parece difícil intuir las potentes extensiones que se pueden obtener de ella, así como su impacto en las Matemáticas, tanto en la Teoría de los Conjuntos Convexos como en el Análisis (su versión funcional).

La memoria tiene como principal objetivo el estudio de la citada desigualdad de Brunn-Minkowski, así como sus distintas versiones geométricas y funcionales: la desigualdad de Prékopa-Leindler y la desigualdad de Rogers-Shephard. Para ello, estructuramos la memoria en tres capítulos que detallamos a continuación.

El primer capítulo, está dedicado fundamentalmente a establecer unos preliminares necesarios para desarrollar el resto de la memoria. Comenzamos definiendo conceptos esenciales como lo son los cuerpos convexos, la función soporte de un conjunto, la suma de Minkowski o el funcional volumen, introduciendo a su vez distintas propiedades relacionadas con los mismos.

Por otro lado, establecemos unos resultados elementales como son la desigualdad de Jensen, un resultado clásico que adquiere una gran importancia en el desarrollo de la memoria, siendo fundamental en la prueba de otra desigualdad básica, la aritmético-geométrica. Recogemos la prueba de esta última desigualdad así como el de una desigualdad funcional, ya que dichos resultados auxiliares pueden verse como el paso inicial en las demostraciones de las desigualdades de Brunn-Minkowski y de Rogers-Shephard, respectivamente.

Otro resultado que introducimos en este capítulo es la fórmula de Steiner, la cual nos permite expresar el volumen de la suma de Minkowski de dos cuerpos convexos (donde uno es λB_n con $\lambda \geq 0$) como un polinomio cuyos coeficientes resultan ser las quermassintegrales. Además, recogemos ciertos resultados relacionados con la medida de un conjunto, los cuales serán fundamentales para el desarrollo del capítulo tres.

En el capítulo segundo se presenta la piedra angular de la memoria, la desigualdad de Brunn-Minkowski, planteando una primera prueba en el contexto de cuerpos convexos, en la que se caracteriza la igualdad y una segunda para el caso de conjuntos compactos, no necesariamente convexos.

Esta desigualdad se puede expresar de numerosas formas, todas ellas equivalentes entre sí, siendo la más conocida su versión multiplicativa:

Teorema 2. Sean K_0 y K_1 dos cuerpos convexos de \mathbb{R}^n no vacíos, y sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) \geq \text{vol}(K_0)^{1-\lambda} \text{vol}(K_1)^\lambda.$$

También se plantean en el segundo capítulo algunos refinamientos de la desigualdad de Brunn-Minkowski, los cuales están enfocados a eliminar el exponente $1/n$, siendo posible bajo la hipótesis de que exista un hiperplano H , tal que la proyección del cuerpo K en ese hiperplano coincida con la proyección de L en H . Concluimos la sección con la prueba de que un resultado análogo a éste no es válido si se asume la misma condición sobre un plano de dimensión arbitraria.

El capítulo continúa con la presentación de la desigualdad de Prékopa-Leindler y con la prueba de que ésta implica la desigualdad de Brunn-Minkowski clásica (a través de su versión multiplicativa, recogida en el teorema 2).

Para concluirlo, se desarrolla una sección enfocada a las desigualdades de tipo Brunn-Minkowski para la medida gaussiana, tomando como base el artículo de Gardner y Zvavitch [8].

Finalmente, en el tercer capítulo se abordan cuestiones relacionadas con consecuencias de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

La primera de estas es la desigualdad de Rogers-Shephard, la cual acota superiormente el volumen de la simetrización central de un cuerpo convexo K .

Teorema 3. Sea K un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n . Entonces

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}\left(\frac{1}{2}(K - K)\right) \leq \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \text{vol}(K).$$

La segunda de estas consecuencias es la desigualdad isoperimétrica, un problema clásico que establece su origen en la antigüedad. Dicha desigualdad relaciona el área de superficie de un cuerpo convexo K ($S(K)$), con su volumen ($\text{vol}(K)$).

Para terminar la memoria, se estudian fenómenos de concentración de la medida de la esfera, probando que independientemente de la dimensión, casi todo el volumen de $\overline{B_n}$, siendo $\overline{B_n}$ la bola de volumen 1, está concentrado en una banda alrededor del ecuador de ancho fijo.

Esto, junto con el hecho de que el radio de la bola de volumen 1 crece con la dimensión n , permite concluir que el volumen de la bola unidad B_n (y por consiguiente su área de superficie) se concentra en una banda (alrededor del ecuador) de anchura tan pequeña como se quiera, si la dimensión es suficientemente grande.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo estará dedicado principalmente a desarrollar las definiciones y resultados elementales que necesitaremos para el resto del texto. Estos se introducirán sin demostración, pues son bien conocidos y pueden encontrarse en cualquier libro básico de convexidad y/o de teoría de la medida (por ejemplo [2, 5, 6, 9, 18, 19]).

Por otro lado, en este capítulo presentaremos ciertos resultados auxiliares (lema 1.2.3, Teorema 1.2.5 y lema 1.3.4), los cuales constituyen ser una primera aproximación a dos de las desigualdades principales que estudiaremos en los capítulos posteriores. En efecto, la desigualdad aritmético-geométrica, y más generalmente la monotonía de las medias (lema 1.2.3 y teorema 1.2.5, respectivamente), es en cierto modo el primer paso natural para el desarrollo de la desigualdad de Brunn-Minkowski (así como el de alguno de sus posibles refinamientos, como se verá en el segundo capítulo); asimismo, el lema 1.3.4 será uno de los ingredientes principales en la prueba de la desigualdad de Rogers-Shephard, recogida en el tercer capítulo (teorema 3.1.2). Por ello, debido a que las desigualdades de Brunn-Minkowski y de Rogers-Shephard serán dos de los grandes objetos de estudio de esta memoria, y a fin de que sus pruebas sean (en la medida de lo posible) autocontenidas, recogeremos aquí una demostración de tales resultados previos.

A lo largo de este trabajo, usaremos la notación estándar para el espacio euclídeo n -dimensional y las nociones fundamentales asociadas al mismo. Así, denotaremos por \mathbb{R}^n el espacio euclídeo n -dimensional el cual está dotado con la métrica estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ del producto escalar, que da lugar a la norma euclídea, denotada por $\| \cdot \|$.

Asimismo, usaremos la notación de \mathbb{S}^{n-1} para referirnos a la esfera unidad. Además, como es usual, dado $x \in \mathbb{R}^n$, representaremos por x_i sus coordenadas (respecto a la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$), es decir, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

1.1. Primeras definiciones sobre cuerpos convexos

Nuestro ingrediente principal serán los cuerpos convexos y en consecuencia, esta sección se centrará en fijar unos conceptos previos sobre los mismos.

1.1.1. Conjuntos convexos

El estudio sistemático de los conjuntos convexos se inició a finales del siglo XIX, sin embargo, no es hasta mediados del siglo XX cuando este se establece como una rama de las matemáticas.

La convexidad se sirve de herramientas de la geometría, del análisis, del álgebra lineal y de la topología, jugando un papel indispensable en otras ramas de la matemática como en optimización, en la teoría de juegos, en la teoría de números o en la teoría de desigualdades.

Comenzamos con una definición básica, que nos permitirá posteriormente establecer la noción de conjunto convexo.

Definición 1.1.1: Combinación lineal, afín y convexa

Se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es una *combinación lineal* de los vectores v_1, \dots, v_k y se representa por $x \in \text{lin}\{v_1, \dots, v_k\}$, si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, tales que $x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$. Además:

- Si los λ_i verifican $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, entonces se dice que x es *combinación afín* de los v_i ($x \in \text{aff}\{v_1, \dots, v_k\}$).
- Si los λ_i verifican $\lambda_i \geq 0$ para todo i , entonces se dice que x es *combinación positiva* de los v_i ($x \in \text{pos}\{v_1, \dots, v_k\}$).
- Finalmente, si se verifican ambas condiciones para los λ_i , entonces se dice que x es una *combinación convexa* de los v_i ($x \in \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$).

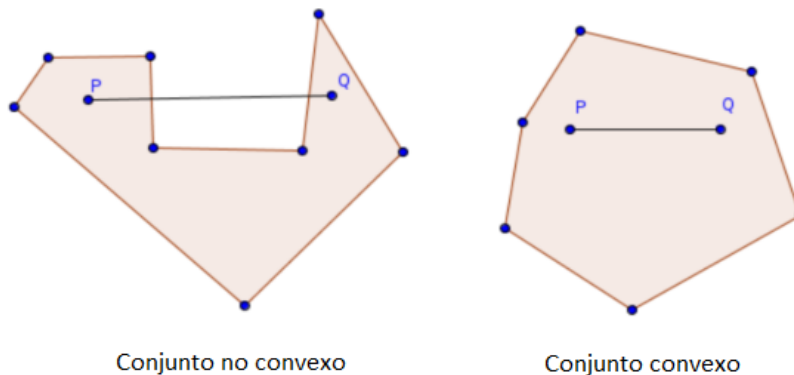
Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $x \neq y$, escribiremos $[x, y]$ para denotar el segmento determinado por x y y , es decir, el conjunto de todas las combinaciones convexas de x e y :

$$[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

A partir de esto, podemos definir la noción de conjunto convexo.

Definición 1.1.2: Conjunto convexo

Se dice que un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si, dados dos puntos cualesquiera de K , el segmento que los une está contenido en K . Es decir, si cualquier combinación convexa $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$, para todo $x, y \in K$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.



Además, diremos que un conjunto compacto K de \mathbb{R}^n es un cuerpo y denotaremos al conjunto de todos los cuerpos convexos de \mathbb{R}^n como \mathcal{K}^n .

Definición 1.1.3: Envoltura convexa y afín

Dado un conjunto arbitrario $A \subset \mathbb{R}^n$, se define la *envoltura convexa* de A , y se representa por $\text{conv}(A)$, como la intersección de todos los subconjuntos convexos que contienen a A .

Análogamente, se define la *envoltura afín* de A representada por $\text{aff}(A)$, a la intersección de todos los subespacios afines que contienen a A .

Veamos algunos ejemplos de conjuntos convexos que nos serán de utilidad.

Definición 1.1.4: Politopos, cajas y policajas

- Un politopo es la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos de \mathbb{R}^n .
- Se define una caja en \mathbb{R}^n como $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \leq x_i \leq \beta_i\}$, donde las longitudes de la caja vienen dadas por $\beta_i - \alpha_i, i = 1, \dots, n$.
- Llamamos policaja a la unión de cajas con lados paralelos a los ejes con interiores disjuntos.

1.1.2. Hiperplanos soporte

Otro de los elementos que serán de utilidad más adelante son los hiperplanos (afines) H de \mathbb{R}^n , que pueden expresarse de la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$, donde $u \neq 0$ (unitario) es el vector normal a H y c es un número real fijo. Representamos por H^+ y H^- los dos semiespacios cerrados determinados por H , esto es,

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq c\} \quad y \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq c\}.$$

Por otro lado, diremos que un hiperplano H soporta K en un punto $x \in K$, si $x \in K \cap H$ y K está contenido en uno de los dos semiespacios H^+ o H^- que dicho hiperplano determina.

Esta idea permite definir el concepto de hiperplano soporte a un conjunto.

Definición 1.1.5: Hiperplano soporte

Dado un conjunto convexo K de \mathbb{R}^n , se dice que H es un hiperplano soporte a K si H soporta K en algún punto x , el cual será, necesariamente, un punto de su frontera.

1.1.3. Suma de Minkowski

A continuación, definimos una herramienta fundamental, la suma de Minkowski.

Definición 1.1.6: Suma de Minkowski

La suma de Minkowski de dos conjuntos cualesquiera A y B de \mathbb{R}^n se define como

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

Este concepto cumple una serie de propiedades útiles que describimos a continuación.

Proposición 1.1.7: Propiedades de la suma de Minkowski

- La suma de Minkowski conserva la convexidad y la compacidad.
- \mathcal{K}^n con la suma de Minkowski verifica la ley de la cancelación.
- Sean A, B, C subconjuntos de \mathbb{R}^n , no necesariamente convexos, y λ un número real positivos. Entonces

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) + C &= (A + C) \cup (B + C), \\
 (A \cap B) + C &\subset (A + C) \cap (B + C), \\
 (A \cup B) + (A \cap B) &\subset (A + B), \\
 \lambda A + \lambda B &= \lambda(A + B).
 \end{aligned}$$

Veamos un ejemplo gráfico de la suma de Minkowski de dos conjuntos:

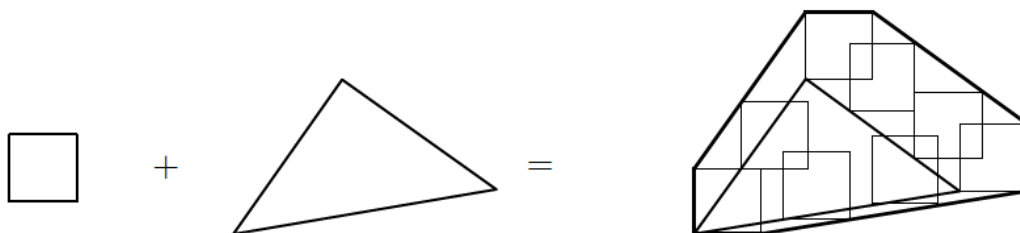


Figura 1.1: Suma de Minkowski de dos cuerpos convexos

1.1.4. Funciones convexas, función soporte y función radial

Introducimos ahora otro elemento relevante en la memoria, las funciones convexas.

Definición 1.1.8: Función convexa

Una función $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un conjunto convexo $D \subset \mathbb{R}^n$, se dice convexa en D , si para cualesquiera $x, y \in D$, y para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Además, se dice que f es estrictamente convexa si

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

para cualesquiera $x, y \in D$, $x \neq y$, y todo $\lambda \in (0, 1)$. Finalmente, una función f es cóncava si $-f$ es convexa.

Un resultado elemental que caracteriza a estas funciones (para funciones de una variable dos veces derivables) es el siguiente:

Proposición 1.1.9

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Entonces, se verifica que f es convexa (respectivamente cóncava) si, y sólo si, $f'' \geq 0$ (respectivamente $f'' \leq 0$) en I . Además, si $f'' > 0$ entonces f es estrictamente convexa.

En este punto, el siguiente paso es introducir un concepto fundamental, la función soporte. Esta permite describir los conjuntos convexos cerrados K a partir de la posición de sus hiperplanos soporte.

Definición 1.1.10: Función soporte

Si $K \in \mathcal{K}^n$ es un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n no vacío, se define la función soporte $h(K, \cdot) = h_K$ de K como

$$h(K, u) = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\},$$

para cada $u \in \mathbb{R}^n$.

Si K es un cuerpo convexo, el supremo en la definición de $h(K, u)$ se alcanza y es un valor finito para cada u . Además, a partir de dicha definición, es fácil ver que la función soporte $h(K, \cdot)$ de todo cuerpo convexo K es una función sublineal.

Recíprocamente, los cuerpos convexos quedan completamente caracterizados por medio de sus funciones soporte y, más aún, quedan determinados a través de una función sublineal dada, en el siguiente sentido:

Teorema 1.1.11

Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sublineal, entonces existe un único cuerpo convexo K en \mathbb{R}^n cuya función soporte es f .

Una propiedad fundamental de la función soporte es que ésta es aditiva en su primer argumento respecto a la suma de conjuntos, es decir, si K, L son dos cuerpos convexos de \mathbb{R}^n entonces

$$h(K + L, \cdot) = h(K, \cdot) + h(L, \cdot).$$

Otras funciones que nos serán de utilidad en el transcurso de la memoria son la función radial y la función característica.

Definición 1.1.12: Función radial y función característica

- Sea $K \subset \mathbb{R}^n$, definimos su función característica $\chi_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, 0\}$, de la siguiente forma:

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

- Sea $K \in \mathcal{K}^n$ un cuerpo convexo, con $0 \in K$. Para $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ definimos su función radial $\rho_K : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$, como

$$\rho_K(u) = \text{máx}\{\rho \geq 0 : \rho u \in K\}.$$

1.1.5. El volumen de un cuerpo convexo

El concepto de volumen tiene un largo recorrido, Malkevitch [14] señala tres “piedras angulares” relacionadas con el cálculo del volumen en la historia:

- La fórmula del volumen de una pirámide truncada que aparece en el Papiro de Moscú (1850 a.C.).
- El conocimiento de Demócrito (500 a.C.) de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de la base por la altura y la demostración de este hecho realizada por Eudoxo (409-356 a.C.).
- Las discusiones de Euclides acerca del volumen de los prismas y pirámides en el Libro XII de Los Elementos.

Posteriormente, Kepler escribe en 1615: “Nova Stereometria doliorum vinariorum”, un trabajo sistemático en el que se usan técnicas infinitesimales para calcular áreas y volúmenes. Está enfocado en los sólidos de revolución, incluyendo el cálculo (exacto o aproximado) de más de noventa sólidos.

Este concepto, volumen (en tres dimensiones), se formaliza (y se generaliza a dimensión arbitraria) mediante la noción de medida de Lebesgue.

Así, el volumen n -dimensional de un cuerpo convexo K en \mathbb{R}^n es su medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n , y lo denotaremos como $\text{vol}(K)$.

En los casos en los que sea necesario precisar la dimensión del espacio al que aplicamos el funcional volumen, lo incluiremos como subíndice, es decir, si K está contenido en un subespacio de dimensión j entonces su volumen se denotará como $\text{vol}_j(K)$.

Algunas propiedades que utilizaremos sobre el volumen de cuerpos convexos son las siguientes.

Proposición 1.1.13: Propiedades del funcional volumen

- $\text{vol}(K)$ se mantiene inalterado bajo movimientos (rígidos) de K .
- $\text{vol}(\mu K) = \mu^n \text{vol}(K)$, para $\mu \geq 0$.
- $\text{vol}(K) = 0$ si, y sólo si, K tiene dimensión menor o igual que $n - 1$.
- Si $K \subseteq K'$, entonces $\text{vol}(K) \leq \text{vol}(K')$. La igualdad se da si y sólo si $\text{vol}(K') = 0$ o $K = K'$.

Denotaremos al volumen de la bola unidad por κ_n .

Proposición 1.1.14

Sea K un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n , dado un vector unitario $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, representamos por $K_t = K \cap H_t(u)$, donde $H_t(u) = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = t\}$. Entonces,

$$\text{vol}(K) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{vol}_{n-1}(K_t) dt.$$

Para terminar la sección, definimos el área de superficie de un cuerpo convexo K , denotado por $S(K)$, como el límite de las áreas de superficie de cualquier sucesión de polítopos convexos que converjan a K . Si $n = 2$ entonces $S(K) = p(K)$, y se denomina el perímetro de K .

1.2. Resultados relacionados con cuerpos convexos y funciones convexas

A lo largo de esta sección indagaremos en algunos resultados relacionados con cuerpos convexos.

El área de superficie de un cuerpo convexo K , $S(K)$, se puede reescribir de varias formas, una de ellas es la fórmula de Minkowski, la cual relaciona el área de superficie, $S(K)$, con el límite de la diferencia de los volúmenes de los cuerpos $K + \lambda B_n$ y K .

Teorema 1.2.1: La fórmula de Minkowski, (1840-1901)

El área de superficie de un conjunto convexo K viene dado por

$$S(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

1.2.1. Desigualdad de Jensen

Un resultado interesante relacionado con las funciones convexas que nos será de utilidad es la desigualdad de Jensen.

Teorema 1.2.2: Desigualdad de Jensen

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y sean $w_1, \dots, w_n \in [0, 1]$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, cumpliendo $\sum_{i=1}^n w_i = 1$. Entonces, para $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$f(w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n) \leq w_1f(x_1) + w_2f(x_2) + \dots + w_nf(x_n).$$

Del mismo modo, si f es una función cóncava, la desigualdad obtenida es

$$f(w_1x_1 + w_2x_2 + \dots + w_nx_n) \geq w_1f(x_1) + w_2f(x_2) + \dots + w_nf(x_n).$$

Una aplicación de la desigualdad de Jensen: relaciones entre medias

Como consecuencia de la desigualdad de Jensen obtenemos lo que se conoce como la desigualdad de las medias aritmético-geométrica.

Lema 1.2.3: Desigualdad de medias aritmético-geométrica ([11])

Sean $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ con $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_i > 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ cumpliendo $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Entonces se cumple que

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

Demostración. Tomando $f(x) = \log(x)$ (función cóncava) y aplicando la Desigualdad de Jensen (teorema 1.2.2), tenemos que

$$f(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \dots + \alpha_nx_n) \geq \alpha_1f(x_1) + \alpha_2f(x_2) + \dots + \alpha_nf(x_n).$$

Esta última es equivalente a

$$\log(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) \geq \alpha_1 \log(x_1) + \alpha_2 \log(x_2) + \dots + \alpha_n \log(x_n).$$

Aplicando entonces las propiedades de los logaritmos tenemos que

$$\log\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq \log\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\right),$$

y finalmente

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

obteniendo el resultado. \square

El resultado anterior se puede generalizar para otras medias distintas. A este fin, primero recogemos la siguiente definición.

Definición 1.2.4: Media de orden p

Sean $a, b \geq 0$, $\lambda \in [0, 1]$ y $p > 0$. Definimos la media de orden p de a y b como

$$M_p(a, b, \lambda) := ((1 - \lambda)a^p + \lambda b^p)^{1/p}.$$

En esta definición estamos considerando $p > 0$, ya que es el caso que nos compete en este trabajo; sin embargo, se podría tomar $p \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (definiendo apropiadamente, a través de los valores que se obtendrían por continuidad, las medias asociadas a los parámetros $p = 0, \pm\infty$).

Como se ha comentado anteriormente, la desigualdad aritmético-geométrica se puede generalizar a otras medias distintas. De forma más concisa, dicho resultado se puede resumir diciendo que la media de orden p es creciente (en p), como muestra el resultado siguiente:

Teorema 1.2.5: [11]

Sean $a, b \geq 0$, $\lambda \in (0, 1)$ y $q, p > 0$. Si se cumple que $p < q$ entonces se verifica que

$$M_p(a, b, \lambda) \leq M_q(a, b, \lambda),$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $a = b$.

Demostración. Queremos probar que se cumple que

$$((1 - \lambda)a^p + \lambda b^p)^{1/p} \leq ((1 - \lambda)a^q + \lambda b^q)^{1/q},$$

y como p, q son positivos esto es equivalente a

$$(1 - \lambda)a^p + \lambda b^p \leq ((1 - \lambda)a^q + \lambda b^q)^{p/q}.$$

Definiendo ahora $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{p/q}$, la última desigualdad se puede expresar del siguiente modo:

$$(1 - \lambda)f(a^q) + \lambda f(b^q) \leq f((1 - \lambda)a^q + \lambda b^q).$$

Es claro que f es cóncava, pues

$$f''(x) = \frac{p}{q} \left(\frac{p}{q} - 1 \right) x^{p/q-2} < 0,$$

ya que $0 < p/q < 1$ y $x^{p/q-2} > 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

Estamos entonces en condiciones de aplicar la desigualdad de Jensen (teorema 1.2.2) para obtener así el resultado.

Finalmente, para ver el caso de igualdad es claro que si $a = b$ esta se da, mientras que el recíproco es consecuencia de que como $f'' < 0$ entonces f es estrictamente cóncava, implicando que $a = b$. \square

Nótese que la desigualdad aritmético-geométrica se desprende del resultado anterior para $p \rightarrow 0^+$, $q = 1$.

1.2.2. La fórmula de Steiner y los volúmenes intrínsecos

Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ dos cuerpos convexos de \mathbb{R}^n , de los cuales conocemos su volumen. ¿Qué se puede decir entonces del volumen del cuerpo suma de Minkowski $K + L$? ¿Puede expresarse éste en función de los volúmenes de los cuerpos originales?

La respuesta es afirmativa, existiendo una fórmula precisa que fue obtenida por Steiner en el caso en el que $L = \lambda B_n$, con $\lambda \geq 0$.

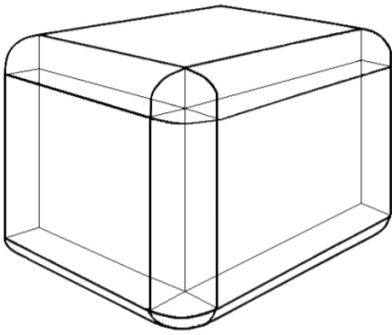
Sorprendentemente, el volumen buscado viene expresado por un sencillo polinomio, al cual se le conoce como polinomio de Steiner, y cuyos coeficientes resultan ser unas nuevas medidas asociadas al cuerpo original de gran importancia: las *quermassintegrales*.

Teorema 1.2.6: La fórmula de Steiner

Dado $K \in \mathcal{K}^n$, el volumen del conjunto $K + \lambda B_n$, se expresa como un polinomio de grado la dimensión del espacio en el parámetro λ , cuyos coeficientes son, salvo una constante lo que se denominan quermassintegrales de K , $W_i(K)$, para $0 \leq i \leq n$:

$$\text{vol}(K_\lambda) = \text{vol}(K + \lambda B_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} W_i(K) \lambda^i.$$

Veamos gráficamente el polinomio de Steiner en dimensión 3.



$$\text{vol}(K + \lambda B_3) = \text{vol}(K) + S(K)\lambda + M(K)\lambda^2 + \frac{4}{3}\pi\lambda^3$$

$\text{vol}(K)$ = volumen del conjunto original

$S(K)\lambda$ = volumen de los prismas adosados a las caras

$M(K)\lambda^2$ = volumen de los 3 cilindros adosados a los lados

$4/3\pi\lambda^3$ = volumen de la bola de radio λ

Figura 1.2: El polinomio de Steiner en dimensión 3

A continuación, definiremos los volúmenes intrínsecos de $K \in \mathcal{K}^n$.

Definición 1.2.7: i -ésimo volumen intrínseco

Se denomina i -ésimo volumen intrínseco del conjunto K , y se representa por $V_i(K)$, $0 \leq i \leq n$, a la quermassintegral normalizada de índice $n - i$, es decir,

$$V_i(K) = \binom{n}{i} \frac{W_{n-i}(K)}{\kappa_{n-i}}.$$

Cuando el cuerpo convexo K tiene dimensión $i \leq n$, entonces el i -ésimo volumen intrínseco de K coincide con su volumen i -dimensional. Algunas propiedades de estos últimos son las siguientes:

Proposición 1.2.8: Propiedades sobre los volúmenes intrínsecos

- $V_n(K) = W_0(K) = \text{vol}(K)$,
- $2V_{n-1}(K) = nW_1(K) = S(K)$,
- $\frac{2\pi}{n-1}V_{n-2}(K) = nW_2(K) = M(K)$ la curvatura media integral de K ,
- $\frac{2\kappa_{n-1}}{n\kappa_n}V_1(K) = \frac{2}{\kappa_n}W_{n-1}(K) = b(K)$ coincide con la anchura media de K ,
- $V_0(K) = \frac{1}{\kappa_n}W_n(K) = 1$ es la característica de Euler.

1.3. Resultados relacionados con la medida de un conjunto**Definición 1.3.1**

Sea $\sigma(u)$ la medida de área normalizada en la esfera de masa total 1. Para $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ escribimos

$$\mu_{n-1}(A) = \int_A d\sigma(u)$$

para denotar su volumen esférico normalizado.

Tres propiedades que nos serán de utilidad más adelante son las siguientes:

Proposición 1.3.2

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Entonces:

1.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} f(ru) du dr,$$

donde du denota la medida del área de la esfera de masa total $n\text{vol}(B_n)$.

2.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = n\text{vol}(B_n) \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} f(ru) d\sigma(u) dr.$$

3. Para todo $K \in \mathcal{K}^n$ con $0 \in K$ se tiene que

$$\text{vol}(K) = \text{vol}(B_n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(u)^n d\sigma(u).$$

Demostración. 1. Tomando un cambio a coordenadas polares se obtiene el resultado.

2. Por el primer apartado se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} f(ru) du dr = n \text{vol}(B_n) \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{r^{n-1} f(ru)}{n \text{vol}(B_n)} du dr \\ &= n \text{vol}(B_n) \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} f(ru) d\sigma(u) dr. \end{aligned}$$

3. Usando el segundo apartado se tiene que

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x) dx = n \text{vol}(B_n) \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^{n-1} \chi_K(ru) d\sigma(u) dr \\ &= n \text{vol}(B_n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_0^{\rho_K(u)} r^{n-1} dr \right) d\sigma(u) = \text{vol}(B_n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(u)^n d\sigma(u). \end{aligned}$$

Esto concluye la prueba. □

Dado un cuerpo convexo $K \in \mathcal{K}^n$, llamaremos a la integral

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(u)^n d\sigma(u)$$

el valor promedio de la función radial.

A continuación, veamos dos resultados que nos serán de utilidad en capítulos posteriores, el primero relaciona la medida de la intersección de conjuntos medibles con el límite de la medida de los conjuntos.

Lema 1.3.3

Sea μ una medida y sean $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ conjuntos medibles con $\mu(A_1) < \infty$. Entonces

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Mientras que el segundo lo utilizaremos posteriormente para demostrar la desigualdad de Rogers-Shephard.

Lema 1.3.4: [18]

Sean $K \in \mathcal{K}^n$, $x_0 \in K$, y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y cóncava en K . Si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente, entonces

$$\int_K h(f(x))dx \geq n\text{vol}(K) \int_0^1 h(tf(x_0))(1-t)^{n-1}dt.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_0 = 0$ ya que en caso de que $0 \notin K$, podemos trasladar K para que lo contenga. Para $x \in K \setminus \{0\}$, sea $y \in K$ con $x \in [0, y]$ de tal forma que $[0, y]$ sea maximal, es decir, $y = \rho_K(x)x$.

Definimos ahora $g(x) = f(0) \left(1 - \frac{|x|}{|y|}\right)$ la cual cumple $g(0) = f(0)$, además, por la forma en la que está definida $g(x)$ es decreciente, no negativa y además es afín, eso junto a que por hipótesis $f(x)$ es cóncava y no negativa implica que $f \geq g$, ya que si en algún punto se cumpliera que $f \leq g$, entonces como $g(y) = 0 \leq f(y)$, f no podría ser cóncava. Por lo tanto,

$$\int_K h(f(x))dx \geq \int_K h(g(x))dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\rho_K(x)} h\left(f(0) \left(1 - \frac{r}{\rho_K(x)}\right)\right) r^{n-1} dr du$$

donde la última igualdad viene de considerar el cambio de coordenadas a polares (véase el primer apartado de la proposición 1.3.2). Así, tomando el cambio de variable $t = r/\rho_K(x)$, llegamos a

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^{\rho_K(x)} h\left(f(0) \left(1 - \frac{r}{\rho_K(x)}\right)\right) r^{n-1} dr du = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(x)^n \int_0^1 h(tf(0))(1-t)^{n-1} dt du,$$

y finalmente usando el tercer apartado de la proposición 1.3.2,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_K(x)^n \int_0^1 h(tf(0))(1-t)^{n-1} dt du = n\text{vol}(K) \int_0^1 h(tf(0))(1-t)^{n-1} dt. \quad \square$$

Capítulo 2

Algunas desigualdades de tipo Brunn-Minkowski

En este segundo capítulo abordaremos cuestiones relacionadas con la Teoría de Brunn-Minkowski, la cual es una de las piezas fundamentales de la geometría de los cuerpos convexos.

Dentro de este campo de estudio, uno de los pilares fundamentales es la desigualdad de Brunn-Minkowski, la cual estudiaremos con profundidad, demostrándola en dos contextos distintos, abordando algunos refinamientos de la misma. Junto a esta, también presentaremos la desigualdad de Prékopa-Leindler, otra de las herramientas fundamentales en el estudio de los cuerpos convexos.

Para finalizar el capítulo investigaremos sobre la posibilidad de que exista una desigualdad de tipo Brunn-Minkowski para la medida gaussiana.

2.1. Desigualdad de Brunn-Minkowski para cuerpos convexos

En la desigualdad de Brunn-Minkowski, el volumen de la suma de Minkowski de dos cuerpos convexos C, D se estima en función de los volúmenes de C y D . A partir de esta desigualdad se inició una teoría muy rica con numerosas aplicaciones que se desarrollaron a lo largo del siglo XX.

En esta sección veremos una primera prueba de la desigualdad de Brunn-Minkowski en el contexto de cuerpos convexos, caracterizando asimismo la igualdad y una segunda para el caso de conjuntos compactos, no necesariamente convexos. Además, estudiaremos distintas versiones equivalentes de dicha desigualdad.

Comenzamos pues, enunciando y demostrando dicha versión de la desigualdad de Brunn-Minkowski para cuerpos convexos.

Teorema 2.1.1: Desigualdad de Brunn-Minkowski

Sean K_0 y K_1 dos cuerpos convexos de \mathbb{R}^n no vacíos, y sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1)^{1/n} \geq (1 - \lambda)\text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda\text{vol}(K_1)^{1/n}, \quad (2.1)$$

dándose la igualdad si, y sólo si, K_0 y K_1 están en hiperplanos paralelos (si tienen dimensión menor que n), o son homotéticos.

Notación. Dadas $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$, llamamos

$$K_\lambda := (1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1 \quad \text{para } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Observe que, para $\sigma, \tau \in [0, 1]$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, tenemos que

$$(1 - \lambda)K_\sigma + \lambda K_\tau = (1 - \alpha)K_0 + \alpha K_1,$$

con $\alpha = (1 - \lambda)\sigma + \lambda\tau$.

Demostración ([18]). Si K_0 y K_1 están contenidos en hiperplanos paralelos, entonces K_λ está contenido en un hiperplano y por lo tanto $\text{vol}(K_\lambda) = 0$ para $0 \leq \lambda \leq 1$, pues $\dim(K_\lambda) < n$. Se obtiene así la igualdad en el teorema ya que en el otro miembro también se cumple que $\text{vol}(K_0) = \text{vol}(K_1) = 0$.

Por otro lado, si K_0 y K_1 son homotéticos entonces existe $a > 0$ tal que $K_0 = aK_1$ (salvo traslaciones) y, por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1)^{1/n} &= \text{vol}((1 - \lambda)aK_1 + \lambda K_1)^{1/n} = \text{vol}(((1 - \lambda)a + \lambda)K_1)^{1/n} \\ &= ((1 - \lambda)a + \lambda)\text{vol}(K_1)^{1/n} = (1 - \lambda)\text{vol}(aK_1)^{1/n} + \lambda\text{vol}(K_1)^{1/n}, \end{aligned}$$

es decir, se da la igualdad.

Para probar la desigualdad, junto con la condición necesaria para que se dé la igualdad procederemos dividiendo la demostración en varios casos.

- Si $\dim(K_0) < n$ y $\dim(K_1) < n$, entonces se tiene que $\text{vol}(K_0) = \text{vol}(K_1) = 0$, y la desigualdad se reduce a probar que

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) \geq 0,$$

lo cual es trivial. La igualdad en este caso se da si $\text{vol}(K_\lambda) = 0$, es decir, cuando K_λ está contenido en un hiperplano y en consecuencia K_0, K_1 están contenidos en hiperplanos paralelos.

- Si $\dim(K_0) < n$ y $\dim(K_1) = n$, entonces la inclusión $(1 - \lambda)x + \lambda K_1 \subset K_\lambda$, para $x \in K_0$ arbitrario, implica, por las propiedades del volumen (proposición 1.1.13) que

$$\text{vol}(K_\lambda) \geq \text{vol}((1 - \lambda)x + \lambda K_1) = \lambda^n \text{vol}(K_1),$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $K_0 = \{x\}$ y en ese caso, K_0 y K_1 son homotéticos pues

$$x + 0K_1 = \{x\} = K_0.$$

- Finalmente, veamos el caso en el que $\dim(K_0) = \dim(K_1) = n$. Para simplificar podemos suponer que $\text{vol}(K_0) = \text{vol}(K_1) = 1$, ya que demostrando la desigualdad para ese caso podemos tomar las transformaciones $\bar{K}_i := \text{vol}(K_i)^{-1/n} K_i$ para $i = 0, 1$, y

$$\bar{\lambda} := \frac{\lambda \text{vol}(K_1)^{1/n}}{(1 - \lambda) \text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n}}. \quad (2.2)$$

Lo cual, junto con $\text{vol}((1 - \bar{\lambda})\bar{K}_0 + \bar{\lambda}\bar{K}_1)^{1/n} \geq 1$ nos daría el enunciado del teorema.

En efecto, se tiene que

$$\text{vol}((1 - \bar{\lambda})\bar{K}_0 + \bar{\lambda}\bar{K}_1)^{1/n} = \text{vol} \left(\frac{(1 - \lambda) \text{vol}(K_0) \bar{K}_0 + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n} \bar{K}_1}{(1 - \lambda) \text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n}} \right)^{1/n},$$

lo cual es consecuencia de sustituir el valor de $\bar{\lambda}$ y simplificar:

$$\begin{aligned} & \text{vol} \left(\frac{(1 - \lambda) \text{vol}(K_0) \bar{K}_0 + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n} \bar{K}_1}{(1 - \lambda) \text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n}} \right)^{1/n} = \\ & = \frac{1}{(1 - \lambda) \text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n}} \text{vol}((1 - \lambda) \text{vol}(K_0) \bar{K}_0 + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n} \bar{K}_1)^{1/n}. \end{aligned}$$

La equivalencia viene de utilizar las propiedades del volumen (proposición 1.1.13) y finalmente, sustituyendo $\bar{K}_i := \text{vol}(K_i)^{-1/n} K_i$, obtenemos que lo último es equivalente a

$$\frac{1}{(1 - \lambda) \text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n}} \text{vol}((1 - \lambda) K_0 + \lambda K_1)^{1/n} \geq 1,$$

y esto implica que

$$\text{vol}((1 - \lambda) K_0 + \lambda K_1)^{1/n} \geq (1 - \lambda) \text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda \text{vol}(K_1)^{1/n}.$$

Veamos entonces que $\text{vol}((1 - \bar{\lambda})\bar{K}_0 + \bar{\lambda}\bar{K}_1)^{1/n} \geq 1$. Para ello utilizamos inducción con respecto a n , siendo n la dimensión. A partir de ahora, escribiremos K_i en vez de \bar{K}_i .

El caso $n = 1$ es trivial, por lo que suponemos que $n \geq 2$ y que el teorema es cierto para dimensión $n - 1$. Tomamos $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ y escribimos $H_{u,\alpha} := H(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = \alpha\}$.

Además, denotaremos mediante $\alpha_i := -h(K_i, -u)$, $\beta_i := h(K_i, u)$, $i = 0, 1$ y del mismo modo $\alpha_\lambda := -h(K_\lambda, -u)$ y $\beta_\lambda := h(K_\lambda, u)$.

Para $\zeta \in \mathbb{R}$ e $i = 0, 1$, definimos

$$v_i(\zeta) := \text{vol}_{n-1}(K_i \cap H(\zeta)), \quad w_i(\zeta) := \text{vol}(K_i \cap H^-(\zeta)).$$

Estos $v_i(\zeta), w_i(\zeta)$ tienen dimensión $n - 1$ y n respectivamente, ya que $H(\zeta)$ tiene dimensión $n - 1$ y $H^-(\zeta)$ dimensión n . Por otro lado,

$$w_i(\zeta) := \int_{\alpha_i}^{\zeta} v_i(t) dt.$$

En (α_i, β_i) la función v_i es continua, por lo que w_i es diferenciable y

$$w'_i(\zeta) = v_i(\zeta) > 0 \quad \text{para } \alpha_i < \zeta < \beta_i.$$

Además, w_i es biyectiva ya que es estrictamente creciente. Sea entonces z_i la función inversa de w_i , la cual, por el Teorema de la función inversa, verifica

$$z'_i(\tau) = \frac{1}{v_i(z_i(\tau))} \quad \text{para } 0 < \tau < 1. \quad (2.3)$$

Asimismo, denotando por

$$k_i(\tau) := K_i \cap H(z_i(\tau)), \quad z_\lambda(\tau) := (1 - \lambda)z_0(\tau) + \lambda z_1(\tau),$$

se tiene que

$$(1 - \lambda)k_0(\tau) + \lambda k_1(\tau) \subset K_\lambda \cap H(z_\lambda(\tau)), \quad (2.4)$$

ya que

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)k_0(\tau) + \lambda k_1(\tau) &= (1 - \lambda)(K_0 \cap H(z_0(\tau))) + \lambda(K_1 \cap H(z_1(\tau))) \\ &\subset ((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) \cap ((1 - \lambda)H(z_0(\tau)) + \lambda H(z_1(\tau))) \\ &= K_\lambda \cap H(z_\lambda(\tau)). \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\text{vol}(K_\lambda) = \int_{\alpha_\lambda}^{\beta_\lambda} \text{vol}_{n-1}(K_\lambda \cap H(\zeta)) d\zeta = \int_0^1 \text{vol}_{n-1}(K_\lambda \cap H(z_\lambda(\tau))) z'_\lambda(\tau) d\tau,$$

donde la última igualdad se obtiene de realizar el cambio de variable $\zeta = z_\lambda(\tau)$. Así, usando (2.4) y la hipótesis de inducción, se tiene

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_\lambda) &= \int_0^1 \text{vol}_{n-1}(K_\lambda \cap H(z_\lambda(\tau))) z'_\lambda(\tau) d\tau \\ &\geq \int_0^1 \text{vol}_{n-1}((1 - \lambda)k_0(\tau) + \lambda k_1(\tau)) \left[\frac{1 - \lambda}{v_0(z_0(\tau))} + \frac{\lambda}{v_1(z_1(\tau))} \right] d\tau \\ &\geq \int_0^1 [(1 - \lambda)v_0(z_0(\tau))^{1/(n-1)} + \lambda v_1(z_1(\tau))^{1/(n-1)}]^{n-1} \left[\frac{1 - \lambda}{v_0(z_0(\tau))} + \frac{\lambda}{v_1(z_1(\tau))} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Veamos que (llamando $v_i = v_i(z_i(\tau))$) se cumple la desigualdad

$$[(1 - \lambda)v_0^p + \lambda v_1^p]^{1/p} \left[\frac{1 - \lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1} \right] \geq 1$$

para $v_0, v_1, p > 0$ y $0 < \lambda < 1$, lo cual concluiría la prueba. Para ello, si aplicamos logaritmos en la desigualdad llegamos a

$$\begin{aligned} \log \left([(1 - \lambda)v_0^p + \lambda v_1^p]^{1/p} \left[\frac{1 - \lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1} \right] \right) &= \frac{1}{p} \log((1 - \lambda)v_0^p + \lambda v_1^p) + \log \left(\frac{1 - \lambda}{v_0} + \frac{\lambda}{v_1} \right) \\ &\geq (1 - \lambda) \log(v_0) + \lambda \log(v_1) + (1 - \lambda) \log \left(\frac{1}{v_0} \right) + (1 - \lambda) \log \left(\frac{1}{v_1} \right) = 0 \end{aligned}$$

donde la última desigualdad utiliza la concavidad de la función logaritmo, dándose la igualdad si, y sólo si $v_0 = v_1$.

En consecuencia $\text{vol}(K_\lambda) \geq 1$ y esto completa la demostración de la desigualdad.

Ahora, para ver la igualdad suponemos que existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $\text{vol}(K_\lambda) = 1$. Entonces, volviendo a llamar $v_i = v_i(z_i(\tau))$, se tiene que $v_0(z_0(\tau)) = v_1(z_1(\tau))$ y, por (2.3), $z'_0(\tau) = z'_1(\tau)$ para $0 \leq \tau \leq 1$; es decir, $z_1(\tau) - z_0(\tau)$ es constante.

Podemos suponer (trasladando si fuera necesario) que K_0, K_1 tienen sus centroides en el origen. Así, para cada $i = 0, 1$, y llamando c_i al centroide de K_i , se tiene que

$$c_i = \left(\int_{K_i} \langle x, e_1 \rangle dx, \dots, \int_{K_i} \langle x, e_n \rangle dx \right) = 0.$$

Así, fijado $u \in \mathbb{R}^n$, y considerando $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $u = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, se cumple que

$$\int_{K_i} \langle x, u \rangle dx = \int_{K_i} \langle x, \sum_{i=1}^n a_i e_i \rangle dx = \sum_{i=1}^n a_i \int_{K_i} \langle x, e_i \rangle dx = 0,$$

y por tanto,

$$0 = \int_{K_i} \langle x, u \rangle dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_i(x)} \langle x, u \rangle dx = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \left(\int_{H(\zeta)} \chi_{K_i(x)} \zeta d\text{vol}_{n-1} \right) d\zeta,$$

donde la última igualdad viene de aplicar el Teorema de Fubini (proposición 1.1.14), siendo $\zeta = \langle x, u \rangle$ y $\chi_{K_i(x)}$ la función característica de $K_i(x)$ (definición 1.1.12). Además, haciendo el cambio de variable $\zeta = z(\tau)$,

$$\int_{\alpha_i}^{\beta_i} \zeta \left(\int_{H(\zeta)} \chi_{K_i(x)} d\text{vol}_{n-1} \right) d\zeta = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \text{vol}_{n-1}(K_i \cap H(\zeta)) \zeta d\zeta = \int_0^1 z_i(\tau) d\tau,$$

para $i = 0, 1$. Esto implica, por el valor de ζ cuando $\tau \rightarrow 1^-$ y por ser $z_0(\tau) - z_1(\tau)$ constante, que $\beta_0 = \beta_1$. Luego, usando la definición, $h(K_0, u) = h(K_1, u)$ para $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ arbitrario, y teniendo en cuenta que la función soporte de un conjunto lo caracteriza (teorema 1.1.11), tenemos que $K_0 = K_1$, concluyendo el caso de igualdad. \square

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es la siguiente (véase, por ejemplo, [18]):

Corolario 2.1.2

Sean $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$ no vacíos. Entonces la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \text{vol}((1-t)K_0 + tK_1)^{1/n},$$

es cóncava, y afín sólo en los casos de igualdad del teorema 2.1.1.

Demostración. Vamos a aplicar la desigualdad de Brunn-Minkowski a K_σ y K_τ , donde $\sigma, \tau \in [0, 1]$ arbitrarios. Para $\lambda \in [0, 1]$, se tiene

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)\sigma + \lambda\tau) &= \text{vol}((1 - ((1-\lambda)\sigma + \lambda\tau))K_0 + ((1-\lambda)\sigma + \lambda\tau)K_1)^{1/n} \\ &= \text{vol}((1-\lambda)((1-\sigma)K_0 + \sigma K_1) + \lambda((1-\tau)K_0 + \tau K_1))^{1/n} \\ &= \text{vol}((1-\lambda)K_\sigma + \lambda K_\tau)^{1/n} \geq (1-\lambda)\text{vol}(K_\sigma)^{1/n} + \lambda\text{vol}(K_\tau)^{1/n} \\ &= (1-\lambda)f(\sigma) + \lambda f(\tau). \end{aligned}$$

Por supuesto, la igualdad se da sólo en los casos en los que se da en el teorema 2.1.1, es decir, cuando K_σ y K_τ son homotéticos o viven en hiperplanos paralelos. Por tanto, para el primer caso, existe $\lambda > 0$ tal que $K_\sigma = \lambda K_\tau$ (salvo traslaciones), es decir,

$$(1-\sigma)K_0 + \sigma K_1 = \lambda((1-\tau)K_0 + \tau K_1). \quad (2.5)$$

Faltaría comprobar que K_0 y K_1 son homotéticos. Para demostrarlo hay que distinguir casos, para lo cual comenzaremos suponiendo que $1-\sigma \geq \lambda(1-\tau)$ y que $\sigma \leq \lambda\tau$. Entonces, por un lado se cumple que

$$(1-\sigma)K_0 + \sigma K_1 = (\lambda(1-\tau) + ((1-\sigma) - \lambda(1-\tau)))K_0 + \sigma K_1,$$

y por otro, se tiene que

$$\lambda(1-\tau)K_0 + \lambda\tau K_1 = \lambda(1-\tau)K_0 + (\sigma + (\lambda\tau - \sigma))K_1.$$

Resulta entonces inmediato por la propiedad de cancelación de la suma de Minkowski (proposición 1.1.7) y por la igualdad de (2.5) que

$$((1-\sigma) - \lambda(1-\tau))K_0 = (\lambda\tau - \sigma)K_1.$$

Es decir, K_0 y K_1 son homotéticos. El resto de los casos se realizan de forma análoga.

Para el caso en el que K_σ y K_τ viven en hiperplanos paralelos faltaría ver que entonces K_0 y K_1 también están contenidos en hiperplanos paralelos, lo cual se comprueba de manera directa. \square

La desigualdad de Brunn-Minkowski se puede expresar de numerosas formas, todas equivalentes entre sí ([1]):

Proposición 2.1.3: Equivalencias de la desigualdad de Brunn-Minkowski

Los siguientes enunciados son equivalentes:

(1) Para todo $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$,

$$\text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n} \geq \text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}.$$

(2) Para todo $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$ y $s, t \geq 0$,

$$\text{vol}(sK_0 + tK_1)^{1/n} \geq s\text{vol}(K_0)^{1/n} + t\text{vol}(K_1)^{1/n}.$$

(3) Para todo $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1)^{1/n} \geq (1 - \lambda)\text{vol}(K_0)^{1/n} + \lambda\text{vol}(K_1)^{1/n}.$$

(4) Para todo $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) \geq \text{vol}(K_0)^{1-\lambda}\text{vol}(K_1)^\lambda.$$

(5) Para todo $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) \geq \min\{\text{vol}(K_0), \text{vol}(K_1)\}.$$

(6) Para todo $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$ tal que $\text{vol}(K_0) = \text{vol}(K_1) = 1$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) \geq 1.$$

Demostración. Comenzamos la demostración suponiendo que el punto (1) se cumple. En ese caso, gracias a la propiedad de homogeneidad del volumen (proposición 1.1.13), si tomamos los cuerpos sK_0 y tK_1 se obtiene el resultado.

Suponiendo ahora cierto el punto (2), el (3) se obtiene como consecuencia de tomar $s = 1 - \lambda$ y $t = \lambda$.

La prueba de que (3) implica (4) es consecuencia inmediata de aplicar la desigualdad de las medias aritmético-geométrica (lema 1.2.3).

Si el punto (4) es cierto es claro entonces que

$$\text{vol}((1 - \lambda)K_0 + \lambda K_1) \geq \text{vol}(K_0)^{1-\lambda}\text{vol}(K_1)^\lambda \geq \min\{\text{vol}(K_0), \text{vol}(K_1)\}.$$

Por otro lado, es inmediato que si (5) es cierto entonces, al suponer que $\text{vol}(K_0) = \text{vol}(K_1) = 1$, entonces $\min\{\text{vol}(K_0), \text{vol}(K_1)\} = 1$ y (6) es cierto.

Finalmente, la implicación de (1) suponiendo cierto (6) es consecuencia de las transformaciones de K_0, K_1 y λ siguientes:

$$\bar{K}_i := \text{vol}(K_i)^{-1/n} K_i \quad \text{para } i = 0, 1, \quad \bar{\lambda} := \frac{\text{vol}(K_1)^{1/n}}{\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}}.$$

Entonces,

$$\text{vol}((1 - \bar{\lambda})\bar{K}_0 + \bar{\lambda}\bar{K}_1) \geq 1,$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} \text{vol} \left(\frac{K_0}{\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}} + \frac{K_1}{\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}} \right)^{1/n} &= \\ &= \frac{1}{\text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n}} \text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n} \geq 1, \end{aligned}$$

obteniéndose

$$\text{vol}(K_0 + K_1)^{1/n} \geq \text{vol}(K_0)^{1/n} + \text{vol}(K_1)^{1/n},$$

lo que completa la demostración. \square

Observación 2.1.1. *La finalidad de mostrar las distintas versiones de la desigualdad es para hacer hincapié en la gran versatilidad del resultado. Entre todas las vistas, la del punto (4) destaca porque la dimensión n no aparece. A esa desigualdad se la conoce como la versión multiplicativa de la desigualdad de Brunn-Minkowski.*

2.2. Desigualdad de Brunn-Minkowski para conjuntos compactos

En vista de las posibles aplicaciones, tiene sentido intentar extender la desigualdad anterior de Brunn-Minkowski para cuerpos convexos al caso de conjuntos más generales, por ejemplo, conjuntos compactos en el espacio euclídeo n -dimensional.

Con ese objetivo en mente, el teorema que queremos demostrar es el siguiente:

Teorema 2.2.1: Brunn-Minkowski versión para compactos

Sean A y B dos conjuntos compactos no vacíos de \mathbb{R}^n , y sea $0 \leq \lambda \leq 1$. Entonces

$$\text{vol}((1 - \lambda)A + \lambda B)^{1/n} \geq (1 - \lambda)\text{vol}(A)^{1/n} + \lambda\text{vol}(B)^{1/n}.$$

A continuación vamos a reproducir la demostración de Hadwiger y Ohmann ([10]), recogida en [15].

Demostración. Por la homogeneidad del volumen (proposición 1.1.13), es suficiente demostrar que se cumple la siguiente desigualdad

$$\text{vol}(A + B)^{1/n} \geq \text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}. \quad (2.6)$$

Dividiremos la demostración en dos casos:

- Caso 1: A y B son policajas (definición 1.1.4). Lo demostraremos por inducción sobre k , el número total de cajas que forman A y B. Suponemos que $k = 2$, entonces
 - A es una caja con longitudes de lados x_1, x_2, \dots, x_n .
 - B es una caja con longitudes de lados y_1, y_2, \dots, y_n .

Por lo tanto, $A + B$ es una caja con longitudes de lados $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n$, y así, para demostrar la desigualdad (2.6), hay que probar que

$$\left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i) \right)^{1/n} \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{1/n}, \quad (2.7)$$

la cual, es equivalente a que

$$\frac{(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} + (\prod_{i=1}^n y_i)^{1/n}}{(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i))^{1/n}} \leq 1.$$

Para demostrar esta última, usando la desigualdad de medias aritmético-geométrica (lema 1.2.3) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{(\prod_{i=1}^n x_i)^{1/n} + (\prod_{i=1}^n y_i)^{1/n}}{(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i))^{1/n}} &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + y_i} + \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i + y_i} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i + y_i}{x_i + y_i} = 1. \end{aligned}$$

Por lo que (2.6) es cierta y el teorema se cumple para $k = 1$.

Sea ahora $k > 2$ y supongamos que el resultado cierto para $k - 1$. Como hay más de dos cajas y sólo tenemos dos conjuntos (A y B), al menos uno de ellos tiene dos cajas, el cual, sin pérdida de generalidad podemos suponer que es A.

Entonces, existe un hiperplano ortogonal a uno de los ejes de forma que divide el espacio en dos subespacios en los que queda contenida al menos una caja de A.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicho hiperplano es $\{x_1 = 0\}$. Trasladamos B en la dirección de x_1 de forma que

$$\frac{\text{vol}(A^+)}{\text{vol}(A)} = \frac{\text{vol}(B^+)}{\text{vol}(B)} = \rho \in [0, 1], \text{ donde } A^+ = A \cap \{x_1 \geq 0\} \text{ y } B^+ = B \cap \{x_1 \leq 0\}. \quad (2.8)$$

Para $A^- = A \cap \{x_1 \leq 0\}$ y $B^- = B \cap \{x_1 \geq 0\}$, se tiene que

$$\frac{\text{vol}(A^-)}{\text{vol}(A)} = \frac{\text{vol}(B^-)}{\text{vol}(B)} = 1 - \rho \in [0, 1]. \quad (2.9)$$

Además, se cumple lo siguiente:

- A^+ es una policaja, B^+ también es policaja y además, a lo sumo tienen $k - 1$ cajas entre ambas,
- De igual forma, A^- y B^- también son policajas, y a lo sumo tienen $k - 1$ cajas entre ambas.

Aplicando entonces la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned} \text{vol}(A^+ + B^+)^{1/n} &\geq \text{vol}(A^+)^{1/n} + \text{vol}(B^+)^{1/n}, \\ \text{vol}(A^- + B^-)^{1/n} &\geq \text{vol}(A^-)^{1/n} + \text{vol}(B^-)^{1/n}. \end{aligned}$$

Y esto, junto a

$$(A^+ + B^+) \cup (A^- + B^-) \subset A + B, \quad (2.10)$$

nos permite demostrar el primer paso de la prueba, pues

$$\begin{aligned} \text{vol}(A + B) &\geq \text{vol}((A^+ + B^+) \cup (A^- + B^-)) = \text{vol}(A^+ + B^+) + \text{vol}(A^- + B^-) \\ &\geq [\text{vol}(A^+)^{1/n} + \text{vol}(B^+)^{1/n}]^n + [\text{vol}(A^-)^{1/n} + \text{vol}(B^-)^{1/n}]^n, \end{aligned}$$

donde la última igualdad viene de aplicar la hipótesis de inducción, y usando (2.8) y (2.9), este miembro es igual a

$$\begin{aligned} &[\rho^{1/n} \text{vol}(A)^{1/n} + \rho^{1/n} \text{vol}(B)^{1/n}]^n + [(1 - \rho)^{1/n} \text{vol}(A)^{1/n} + (1 - \rho)^{1/n} \text{vol}(B)^{1/n}]^n \\ &= \rho^{1/n} [\text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}]^n + (1 - \rho)^{1/n} [\text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}]^n \\ &= [\text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n}]^n. \end{aligned}$$

- Caso 2: A y B compactos no vacíos cualesquiera.

Consideramos para cada $k \geq 1$, la familia de cubos de lado 2^{-k} (con lados paralelos a los ejes) y centrados en \mathbb{Z}^n .

Representamos por A_k a la unión de los cubos de lado 2^{-k} que cortan a A , y del mismo modo, representaremos por B_k a la unión de los cubos de lado 2^{-k} que cortan a B . Es claro que A_k, B_k son policajas, y además

$$A = \bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k, \quad B = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k.$$

Entonces, por el lema 1.3.3 y el Caso 1 anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{vol}(A)^{1/n} + \text{vol}(B)^{1/n} &= \text{vol} \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k \right)^{1/n} + \text{vol} \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k \right)^{1/n} \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (\text{vol}(A_k)^{1/n} + \text{vol}(B_k)^{1/n}) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \text{vol}(A_k + B_k)^{1/n} = \text{vol} \left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (A_k + B_k) \right)^{1/n}. \end{aligned}$$

La prueba se concluye si vemos que

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} (A_k + B_k) \subset A + B.$$

Para ello, sea $z \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} (A_k + B_k)$, y por tanto $z \in A_k + B_k$ para todo k , es decir, $z = a_k + b_k$ con $a_k \in A_k$ y $b_k \in B_k$ para todo k .

Consideramos entonces las sucesiones $(a_k)_{k=1}^{+\infty} \subset A$ y $(b_k)_{k=1}^{+\infty} \subset B$, las cuales, tomando subsucesiones si fuera necesario podemos suponer convergentes. Así, por la compacidad de los conjuntos.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = a \in A,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} b_k = b \in B,$$

y por tanto, $z = a + b \in A + B$, concluyendo así la prueba. \square

Observación 2.2.1. *Usando la regularidad de la medida de Lebesgue, la versión anterior de la desigualdad de Brunn-Minkowski puede extenderse a conjuntos medibles Lebesgue.*

Tras esta generalización, podemos plantearnos la posibilidad de refinar la desigualdad de Brunn-Minkowski de alguna forma.

2.3. Refinamientos de la desigualdad de Brunn-Minkowski

La primera pregunta que puede surgir de manera natural es si se puede mejorar el exponente $1/n$ en la desigualdad de Brunn-Minkowski, siendo no la respuesta, como veremos a continuación.

Para ello, usaremos el concepto definido en el capítulo uno de media de orden p (definición 1.2.4), ya que este concepto permite reescribir la desigualdad de Brunn-Minkowski para dos cuerpos convexos K y L de la siguiente forma

$$\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L) \geq M_{1/n}(\text{vol}(K), \text{vol}(L), \lambda),$$

lo cual nos da pie a probar el siguiente resultado.

Lema 2.3.1: [3]

No existe $q \in \mathbb{R}$ con $q > 1/n$ que verifique la desigualdad

$$\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L) \geq M_q(\text{vol}(K), \text{vol}(L), \lambda), \text{ para todo } K, L \in \mathcal{K}^n.$$

Demostración. Supongamos que existe $q > 1/n$ tal que se cumple la desigualdad del enunciado. Tomemos ahora $K \in \mathcal{K}^n$ arbitrario y $L = rK$ para cierto $r \in \mathbb{R}^+$, dándose así que

$$\text{vol}(L) = r^n \text{vol}(K).$$

Por otro lado, al ser K y L homotéticos, se da la igualdad en Brunn-Minkowski (teorema 2.1.1), es decir,

$$\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L) = M_{1/n}(\text{vol}(K), \text{vol}(L), \lambda).$$

Además, por el teorema 1.2.5, se tiene que

$$\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L) \geq M_q(\text{vol}(K), \text{vol}(L), \lambda) \geq M_{1/n}(\text{vol}(K), \text{vol}(L), \lambda),$$

y por la cadena de desigualdades, llegamos a que

$$M_q(\text{vol}(K), \text{vol}(L), \lambda) = M_{1/n}(\text{vol}(K), \text{vol}(L), \lambda).$$

Por el caso de igualdad del teorema 1.2.5 deducimos que $q = 1/n$, llegando a una contradicción. \square

En este punto, la siguiente cuestión que puede surgir de manera natural es:

¿Se puede eliminar el exponente $\frac{1}{n}$ añadiendo alguna hipótesis?

La respuesta es afirmativa, siendo una hipótesis que se puede asumir a tal fin que exista un hiperplano H tal que la proyección de K en ese hiperplano, que denotaremos por $K|H$, coincida con la proyección de L en H , de nuevo, denotada por $L|H$.

Teorema 2.3.2: [2]

Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ tales que exista H hiperplano $(n-1)$ cumpliendo $K|H = L|H$. Entonces, para todo $\lambda \in [0, 1]$,

$$\text{vol}((1-\lambda)K + \lambda L) \geq (1-\lambda)\text{vol}(K) + \lambda\text{vol}(L). \quad (2.11)$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el hiperplano H viene dado por $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. Adicionalmente, consideramos la siguiente notación:

$$U = K|H = L|H, \quad M_\lambda = (1-\lambda)K + \lambda L.$$

Y para cada $u \in U$, definimos $K(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x, u) \in K\}$.

Es claro que

$$M_\lambda|H = (1-\lambda)(K|H) + \lambda(L|H) = U, \quad \text{para todo } \lambda \in [0, 1].$$

Por otro lado, para todo $u \in U$ y cualesquiera $x \in K(u)$, $y \in L(u)$, se cumple

$$((1-\lambda)x + \lambda y, u) = (1-\lambda)(x, u) + \lambda(y, u) \in M_\lambda,$$

y por lo tanto $(1-\lambda)K(u) + \lambda L(u) \subset M_\lambda$. Usando la desigualdad de Brunn-Minkowski (teorema 2.1.1) y el Teorema de Fubini (proposición 1.1.14), tenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}((1-\lambda)K + \lambda L) &= \text{vol}(M_\lambda) = \int_U \text{vol}_1(M_\lambda(u)) du \\ &\geq \int_U \text{vol}_1((1-\lambda)K(u) + \lambda L(u)) du \\ &\geq \int_U (1-\lambda)\text{vol}_1(K(u)) + \lambda\text{vol}_1(L(u)) du \\ &= (1-\lambda) \int_U \text{vol}_1(K(u)) du + \lambda \int_U \text{vol}_1(L(u)) du \\ &= (1-\lambda)\text{vol}(K) + \lambda\text{vol}(L), \end{aligned}$$

obteniendo así el resultado. □

En la demostración del teorema anterior, al tener una misma proyección de K y de L en un plano H de dimensión $(n - 1)$ hemos podido utilizar la desigualdad de Brunn-Minkowski en su versión unidimensional.

Es natural entonces conjeturar que si tuviéramos la proyección de K y de L en un plano H de dimensión $(n - k)$ con $k \in \{1, \dots, n\}$ habría de cumplirse el siguiente resultado.

Conjetura 2.3.3

Sean $k \in \{1, \dots, n\}$ y sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ cuerpos convexos tales que exista H plano de dimensión $n - k$ con $K|H = L|H$. Entonces, para todo $\lambda \in [0, 1]$, se cumple

$$\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L)^{1/k} \geq (1 - \lambda)\text{vol}(K)^{1/k} + \lambda\text{vol}(L)^{1/k}.$$

En el artículo [13], Hernández y Yepes (2014) probaron que la conjetura era falsa, incluso para $n = 3$:

Teorema 2.3.4: Contraejemplo a la conjetura 2.3.3

Existen cuerpos convexos $K, L \in \mathcal{K}^3$ con proyección 1-dimensional común $K|H = L|H$, siendo H una recta, tal que para cada $\lambda \in (0, 1)$,

$$\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L)^{1/2} < (1 - \lambda)\text{vol}(K)^{1/2} + \lambda\text{vol}(L)^{1/2}.$$

Demostración. Primero definimos $g(\lambda) = \text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L)$ y $f(\lambda) = g(\lambda)^{1/2}$. Podemos observar que la desigualdad inversa a la del enunciado

$$\text{vol}((1 - \lambda)K + \lambda L)^{1/2} \geq (1 - \lambda)\text{vol}(K)^{1/2} + \lambda\text{vol}(L)^{1/2},$$

para cuerpos convexos $K, L \in \mathcal{K}^n$ con proyección común 1-dimensional, se cumple si, y sólo si, $f(\lambda)$ es una función cóncava en $[0, 1]$. En efecto, al tener que $K|H = L|H$, entonces

$$(1 - \lambda_1)K|H + \lambda_1 L|H = (1 - \lambda_2)K|H + \lambda_2 L|H \quad \text{para todo } \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1],$$

y por lo tanto, la desigualdad anterior la podemos reescribir usando f (aplicándola a los cuerpos convexos $(1 - \lambda_1)K + \lambda_1 L, (1 - \lambda_2)K + \lambda_2 L$) de la siguiente forma:

$$f((1 - t)\lambda_1 + t\lambda_2) \geq (1 - t)f(\lambda_1) + tf(\lambda_2),$$

para todo $t \in [0, 1]$. Y recíprocamente, si f es una función cóncava en $[0, 1]$ entonces en particular tenemos que

$$f(t) \geq (1 - t)f(0) + tf(1),$$

la cual es equivalente a la vista anteriormente

$$\text{vol}((1-t)K + tL)^{1/2} \geq (1-t)\text{vol}(K)^{1/2} + t\text{vol}(L)^{1/2}.$$

Continuando entonces con la demostración, aplicando la proposición 1.1.9 sabemos que $f(\lambda)$ es cóncava si, y sólo si $f''(\lambda) \leq 0$.

Puesto que f'' viene dada por la siguiente expresión

$$f''(\lambda) = \frac{1}{2}g(\lambda)^{-3/2} \left[g(\lambda)g''(\lambda) - \frac{1}{2}g'(\lambda)^2 \right],$$

es claro que $f''(\lambda) \leq 0$ si, y sólo si, $F(\lambda) = g(\lambda)g''(\lambda) - \frac{1}{2}g'(\lambda)^2 \leq 0$, ya que $\frac{1}{2}g(\lambda)^{-3/2} \geq 0$.

Por lo tanto, si encontramos dos cuerpos convexos $K, L \in \mathcal{K}^3$ con proyección común 1-dimensional que cumplan que $F(\lambda) > 0$ para todo $\lambda \in (0, 1)$, entonces se cumplirá la desigualdad del enunciado para todo $\lambda \in (0, 1)$, y la conjetura será falsa.

Sean $L = B_3$ y $K = M + B_3$, donde $M \in \mathcal{K}^2$ es un cuerpo convexo de dimensión 2. Sea ahora $H = (\text{lin}(M))^\perp$ el complemento ortogonal de $\text{lin}(M)$, donde $\text{lin}(M)$ denota su envoltura lineal (definición 1.1.1). Entonces se cumple que $K|H = (M + B_3)|H = M|H + B_3|H = B_3|H$.

Por otro lado, la fórmula de Steiner (teorema 1.2.6), nos permite escribir $g(\lambda)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \text{vol}((1-\lambda)(M + B_3) + \lambda B_3) = \text{vol}((1-\lambda)M + B_3) \\ &= \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} W_i((1-\lambda)M) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} W_i(M)(1-\lambda)^{3-i} \\ &= W_0(M)(1-\lambda)^3 + 3W_1(M)(1-\lambda)^2 + 3W_2(M)(1-\lambda) + W_3(M). \end{aligned}$$

Aquí, denotamos por $W_i^{(m)}(M)$ a la i -ésima quermassintegral calculada en \mathbb{R}^m y por $W_i(M)$ a la i -ésima quermassintegral calculada en el espacio ambiente \mathbb{R}^n , (\mathbb{R}^3 en nuestro caso).

Además, recordemos que los volúmenes intrínsecos se pueden escribir en función de las quermasintegrales de la siguiente forma (definición 1.2.7).

$$V_i(M) = \binom{n}{i} \frac{W_{n-i}(M)}{\kappa_{n-i}}.$$

Por otro lado, podemos calcular $W_i(M)$ para $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, teniendo en cuenta que estos volúmenes intrínsecos $V_j(M)$ no dependen de la dimensión del espacio en el que se embeba M para todo $j \in \{0, 1, 2\}$, pues $\text{dim}(M) = 2$. Por tanto,

$$W_0^{(2)}(M) = A(M), \quad W_1^{(2)}(M) = \frac{p(M)}{2}, \quad W_2^{(2)}(M) = \text{vol}_2(B_2) = \pi,$$

donde $A(M)$ es el área de M y $p(M)$ su perímetro. Además, por las propiedades de estos (proposición 1.2.8), como $n = 3$ solo tenemos que calcular V_0, V_1, V_2 :

$$\begin{aligned} V_0(M) &= \binom{2}{2} \frac{W_2^{(2)}}{\kappa_2} = 1, \\ V_1(M) &= \binom{2}{1} \frac{W_1^{(2)}}{\kappa_1} = \frac{p(M)}{2}, \\ V_2(M) &= \binom{2}{2} \frac{W_0^{(2)}}{\kappa_2} = A(M). \end{aligned}$$

Así, para calcular las quermassintegrales de M (de dimensión m) en \mathbb{R}^n hay que tener en cuenta que para todo $i \in \{0, \dots, n - m - 1\}$ se tiene que $W_i(M) = 0$.

En el caso que nos compete $n - m - 1 = 0$, pues $n = 3$ y $m = 2$, luego $W_0(M) = 0$ (además $W_3(M) = \text{vol}(B_3) = \kappa_3$).

Es decir, nos quedaría calcular el valor de $W_1(M), W_2(M)$. Para ello haremos uso de la propiedad mencionada antes de los volúmenes intrínsecos V_i :

$$\begin{aligned} \frac{p(M)}{2} = V_1(M) &= \binom{3}{1} \frac{W_2(M)}{\kappa_2}, \\ A(M) = V_2(M) &= \binom{3}{2} \frac{W_1(M)}{\kappa_1}, \end{aligned}$$

así,

$$3W_2(M) = \frac{\kappa_2 p(M)}{2}, \quad 3W_1(M) = \kappa_1 A(M).$$

Es decir, podemos reescribir $g(\lambda)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= 3W_1(M)(1 - \lambda)^2 + 3W_2(M)(1 - \lambda) + \kappa_3 \\ &= \kappa_1 A(M)(1 - \lambda)^2 + \frac{\kappa_2}{2} p(M)(1 - \lambda) + \kappa_3. \end{aligned}$$

Y esto implica que podemos reescribir $F(\lambda)$

$$F(\lambda) = g(\lambda)g''(\lambda) - \frac{1}{2}g'(\lambda)^2 = \frac{1}{8} [16\kappa_3\kappa_1 A(M) - \kappa_2^2 p(M)^2],$$

la cual como se puede observar, no depende de λ . Así, $F(\lambda) > 0$ si, y sólo si existe un cuerpo convexo M plano que verifique que

$$p(M)^2 < 16 \frac{\kappa_3 \kappa_1}{\kappa_2^2} A(M) = 16 \frac{4\pi \cdot 2}{3\pi^2} A(M) = \frac{128}{3\pi} A(M), \quad (2.12)$$

o equivalentemente

$$\frac{p(M)^2}{A(M)} < \frac{128}{3\pi}.$$

Si tomamos $M = B_2$, se tiene que

$$\frac{p(B_2)^2}{A(B_2)} = 4\pi < \frac{128}{3\pi}.$$

Por lo tanto, la bola unitaria plana B_2 satisface (2.12), lo que concluye la prueba. \square

Observación 2.3.1. *El objetivo de la demostración ha sido encontrar un cuerpo plano M que cumpliera la desigualdad (2.12), y aunque hemos utilizado $M = B_2$, existen otros muchos cuerpos convexos planos que cumplen la desigualdad buscada.*

Muestra de ello es que si tomamos un polígono regular de n lados de longitud l al que llamaremos C_{nl} , es claro que

$$p(C_{nl}) = nl \quad \text{y} \quad A(C_{nl}) = \frac{p(C_{nl}) \cdot ap}{2},$$

esto implica, utilizando resultados elementales de trigonometría que

$$\frac{p(C_{nl})^2}{A(C_{nl})} = 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Si tomamos por ejemplo $n = 9$ obtenemos que $36 \tan\left(\frac{\pi}{9}\right) < \frac{128}{3\pi}$, es decir, C_{9l} también cumple (2.12).

2.4. Versión funcional: desigualdad de Prékopa-Leindler

A mitad del siglo XX, diversos matemáticos (Lusternik, Hadwiger...) extendieron la desigualdad de Brunn-Minkowski a contextos mucho más generales, incluyendo a los conjuntos medibles Lebesgue.

La versión integral de la desigualdad de Brunn-Minkowski se conoce como la desigualdad de Prékopa-Leindler, la cual además es la inversa de la conocida desigualdad de Hölder.

Como veremos, esta implica la versión multiplicativa de la desigualdad de Brunn-Minkowski (4 en proposición 2.1.3).

Introducimos ahora un concepto que será de utilidad más adelante.

Definición 2.4.1: Conjunto de nivel

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no negativa y $t > 0$. Se define el conjunto de nivel a altura t , denotado por $L(f, t)$, como

$$L(f, t) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq t\}.$$

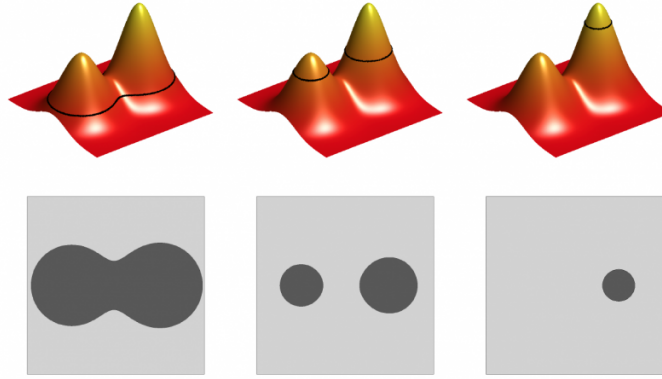


Figura 2.1: Conjuntos de nivel de una función de dos variables

Además, usando el Teorema de Fubini, se cumple lo siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{f(x)} 1 dt dx = \int_0^{+\infty} \int_{L(f, t)} 1 dx dt = \int_0^{+\infty} \text{vol}(L(f, t)) dt, \quad (2.13)$$

y en particular, si f es acotada, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)} \text{vol}(L(f, t)) dt.$$

Teorema 2.4.2: Desigualdad de Prékopa-Leindler

Si $\lambda \in (0, 1)$ y $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles no negativas tales que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda, \quad (2.14)$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \right)^\lambda. \quad (2.15)$$

La prueba que recogemos aquí se puede extraer de [7].

Demostración. La demostración la realizamos por inducción sobre n , donde n es la dimensión.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que f y g están acotadas ya que la definición de la integral de Lebesgue para funciones no negativas se obtiene del supremo de las integrales de funciones simples, que son menores o iguales -punto a punto- que la función en cuestión; así, como las funciones simples son acotadas, basta probarlo para éstas y tomar supremos para obtener la desigualdad deseada.

Además, podemos “normalizarlas” (dividiendo entre su supremo) para que se cumpla que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 1.$$

Si $t \geq 0$, $f(x) \geq t$, y $g(y) \geq t$, entonces por (2.14),

$$h((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^\lambda \geq t.$$

Es decir, se tiene el siguiente contenido

$$(1 - \lambda)L(f, t) + \lambda L(g, t) \subset L(h, t) \text{ para } t, \lambda \in [0, 1],$$

Utilizando lo visto en (2.13), junto con la desigualdad de Brunn-Minkowski en \mathbb{R} y el lema 1.2.3, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} h(x) dx &\geq \int_0^1 \text{vol}_1(L(h, t)) dt \\ &\geq \int_0^1 \text{vol}_1((1 - \lambda)L(f, t) + \lambda L(g, t)) dt \\ &\geq (1 - \lambda) \int_0^1 \text{vol}_1(L(f, t)) dt + \lambda \int_0^1 \text{vol}_1(L(g, t)) dt \\ &= (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} f(x) dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} g(x) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x) dx \right)^\lambda. \end{aligned}$$

Y queda demostrado el teorema para el caso $n = 1$.

Ahora sea $n > 1$ y asumimos que la afirmación del enunciado se cumple en espacios de dimensión menor que n . Para $s \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{R}^{n-1}$ escribimos $h_s(z) := h(z, s)$ y definimos de la misma forma f_s, g_s .

Sean ahora $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a, b \in \mathbb{R}$ y $c := (1 - \lambda)a + \lambda b$. Entonces

$$\begin{aligned} h_c((1 - \lambda)x + \lambda y) &= h((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \lambda)a + \lambda b) \\ &= h((1 - \lambda)(x, a) + \lambda(y, b)) \geq f(x, a)^{1-\lambda} g(y, b)^\lambda \\ &= f_a(x)^{1-\lambda} f_b(y)^\lambda. \end{aligned}$$

y por la hipótesis de inducción,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(x) dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(x) dx \right)^\lambda.$$

Si llamamos

$$H(c) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(x) dx, \quad F(a) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_a(x) dx, \quad G(b) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_b(x) dx,$$

entonces la desigualdad anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$H((1-\lambda)a + \lambda b) \geq F(a)^{1-\lambda} G(b)^\lambda.$$

Y finalmente, usando el Teorema de Fubini y el caso visto de $n = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_c(z) dz dc = \int_{\mathbb{R}} H(c) dc \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} F(a) da \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G(b) db \right)^\lambda = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dx \right)^\lambda, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

El siguiente resultado puede consultarse, por ejemplo, en [1, 7].

Proposición 2.4.3

La desigualdad de Prékopa-Leindler implica la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Demostración. Sean $K_0, K_1 \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda \in (0, 1)$. Además, consideremos las funciones características de los conjuntos K_0, K_1 y $((1-\lambda)K_0 + \lambda K_1)$, denotadas por χ_{K_0}, χ_{K_1} y $\chi_{(1-\lambda)K_0 + \lambda K_1}$ respectivamente. Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\chi_{K_0}(x)^{1-\lambda} \chi_{K_1}(y)^\lambda = 1, \quad \text{si, y sólo si,} \quad \chi_{(1-\lambda)K_0 + \lambda K_1}((1-\lambda)x + \lambda y) = 1.$$

Por tanto, se verifica la hipótesis (2.14) para las funciones $f = \chi_{K_0}, g = \chi_{K_1}$ y $h = \chi_{(1-\lambda)K_0 + \lambda K_1}$, y así, usando la desigualdad de Prékopa-Leindler (teorema 2.4.2) obtenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}((1-\lambda)K_0 + \lambda K_1) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(1-\lambda)K_0 + \lambda K_1}(x) dx \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_0} \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{K_1} \right)^\lambda = \text{vol}(K_0)^{1-\lambda} \text{vol}(K_1)^\lambda. \end{aligned}$$

Llegando a la versión multiplicativa de la desigualdad de Brunn-Minkowski, la cual, como hemos visto en la proposición 2.1.3, es equivalente a la versión general. \square

2.5. Desigualdades de tipo Brunn-Minkowski para la medida Gaussiana

En esta sección se relacionan dos de los ingredientes fundamentales en la matemática: la medida de Gauss, la cual resulta ser la medida de probabilidad más importante en \mathbb{R}^n , y la desigualdad de Brunn-Minkowski, una de las desigualdades más potentes, no solo en el análisis y en la geometría sino en un amplio abanico de campos como la probabilidad, la estadística o la cristalografía. Todos los resultados que recogemos en esta sección han sido extraídos del trabajo [8].

Comenzamos la sección definiendo la medida de Gauss o medida gaussiana.

Definición 2.5.1: Medida de Gauss

Dado $E \subset \mathbb{R}^n$ medible Borel (medible a partir de ahora), definimos su medida de Gauss γ_n como

$$\gamma_n(E) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_E e^{-\|x\|^2/2} dx.$$

La función de densidad de γ_1 describe la famosa “campana de Gauss”,

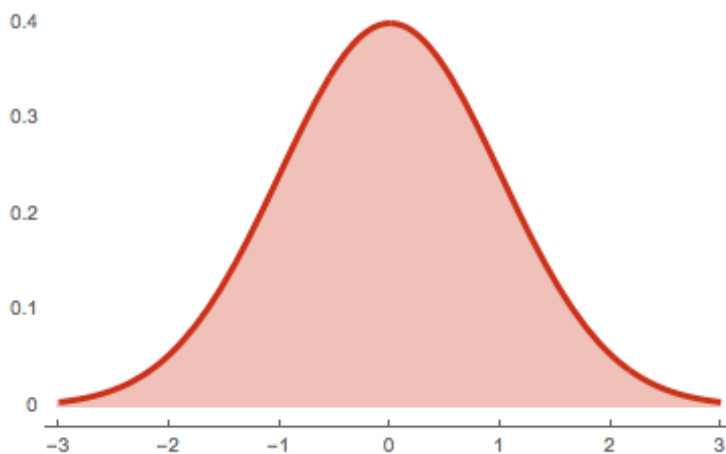


Figura 2.2: Gráfica de la densidad de γ_1

Una observación elemental sobre la medida de Gauss que es fundamental para nuestro estudio es la siguiente.

Observación 2.5.1. γ_n no es invariante por translaciones.

Para verlo, tomamos por ejemplo $E = [0, 1]$ y $E' = [1, 2]$, ambos en \mathbb{R} . Es claro que E' es una translación de E , y se tiene que

$$\gamma_1(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-t^2/2} dt \approx 0,3413,$$

mientras que

$$\gamma_1(E') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^2 e^{-t^2/2} dt \approx 0,1359.$$

Llamaremos función gaussiana a la función $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\|x\|^2/2}.$$

Una de las propiedades elementales de ϕ es que para todo $s \in [0, 1]$ se tiene que $\phi(sx) \geq \phi(x)$. Usando esto, se puede probar de manera inmediata la siguiente proposición.

Proposición 2.5.2

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ medible. Entonces

1. $\gamma_n(sE)^{1/n} \geq s\gamma_n(E)^{1/n}$ si $0 \leq s \leq 1$.
2. $\gamma_n(sE)^{1/n} \leq s\gamma_n(E)^{1/n}$ si $s \geq 1$.

La igualdad se da, en cada una de ellas, si, y sólo si, $s = 1$ o $\gamma_n(E) = 0$.

Demostración. Demostraremos la primera ya que la segunda se obtiene de forma análoga. Para ello utilizaremos la propiedad de que para todo $s \in [0, 1]$ se tiene que $\phi(sx) \geq \phi(x)$ (siendo esta desigualdad estricta excepto en los casos $s = 1$ o $x = 0$).

Por lo tanto, haciendo el cambio de variable $sx = y$ y aplicando la propiedad anterior llegamos a que

$$\begin{aligned} \gamma_n(sE) &= \int_{sE} \phi(x) dx = \int_E s^n \phi(sy) dy \\ &\geq s^n \int_E \phi(y) dy = s^n \gamma_n(E), \end{aligned}$$

lo que completa la prueba. □

Nuestro objetivo es encontrar una posible desigualdad para la medida gaussiana que se parezca en la medida de lo posible a la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Un primer paso es que gracias a la desigualdad de Prékopa-Leindler (teorema 2.4.2), γ_n verifica una desigualdad idéntica a la versión multiplicativa de la desigualdad de Brunn-Minkowski (punto 4 de la proposición 2.1.3). Este resultado puede consultarse en [1, 7, 8].

Proposición 2.5.3

Sean $0 < \lambda < 1$ y $K, L \in \mathcal{K}^n$ cuerpos convexos. Entonces

$$\gamma_n((1 - \lambda)K + \lambda L) \geq \gamma_n(K)^{1-\lambda} \gamma_n(L)^\lambda.$$

Demostración. La función gaussiana ϕ es log-cóncava, es decir $\log(\phi(x))$ es cóncava, para verlo, es claro que

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y\|^2 \leq ((1 - \lambda)\|x\| + \lambda\|y\|)^2 \leq (1 - \lambda)\|x\|^2 + \lambda\|y\|^2.$$

Por lo tanto, es inmediato entonces que

$$\frac{-\|(1 - \lambda)x + \lambda y\|^2}{2} \geq \frac{-(1 - \lambda)\|x\|^2}{2} + \frac{-\lambda\|y\|^2}{2},$$

y finalmente, aplicando exponenciales a ambos lados y multiplicando por $1/(\sqrt{2\pi})^n$ obtenemos

$$\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\|(1-\lambda)x+\lambda y\|^2/2} \geq \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-(1-\lambda)\|x\|^2/2} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\lambda\|y\|^2/2}.$$

Es decir,

$$\phi((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq \phi(x)^{1-\lambda} \phi(y)^\lambda.$$

Vistas entonces estas consideraciones tomemos las siguientes funciones

$$h(x) = \chi_{(1-\lambda)K+\lambda L}(x)\phi(x),$$

$$f(x) = \chi_K(x)\phi(x),$$

$$g(x) = \chi_L(x)\phi(x).$$

Es claro que verifican las hipótesis de la desigualdad de Prékopa-Leindler (teorema 2.4.2), pues el hecho de que $\phi(x)$ sea log-cóncava, junto con la indicación ya vista en la proposición 2.4.3, de que

$$\chi_{K_0}(x)^{1-\lambda} \chi_{K_1}(y)^\lambda = 1, \quad \text{si, y sólo si,} \quad \chi_{(1-\lambda)K_0+\lambda K_1}((1 - \lambda)x + \lambda y) = 1,$$

implican que

$$\begin{aligned} h((1-\lambda)x + \lambda y) &= \chi_{(1-\lambda)K + \lambda L}((1-\lambda)x + \lambda y)\phi((1-\lambda)x + \lambda y) \\ &\geq \chi_K(x)^{1-\lambda}\phi(x)^{1-\lambda} \cdot \chi_L(y)^\lambda\phi(y)^\lambda = f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda. \end{aligned}$$

Y esto a su vez implica, por la desigualdad de Prékopa-Leindler, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \right)^\lambda,$$

o lo que es lo mismo,

$$\gamma_n((1-\lambda)K + \lambda L) \geq \gamma_n(K)^{1-\lambda}\gamma_n(L)^\lambda,$$

lo que concluye la demostración. □

Teniendo claro nuestro objetivo, es natural hacerse la siguiente pregunta:

Sean $0 < \lambda < 1$ y K, L conjuntos cerrados y convexos en \mathbb{R}^n .

Pregunta A: ¿Es cierto que $\gamma_n((1-\lambda)K + \lambda L)^{1/n} \geq (1-\lambda)\gamma_n(K)^{1/n} + \lambda\gamma_n(L)^{1/n}$? (2.16)

En general la respuesta a la pregunta es negativa, ya que como ya hemos mencionado anteriormente γ_n no es invariante por translaciones por lo que es necesario alguna restricción en la posición de los conjuntos.

Para ver esto, sean $\lambda \in [0, 1]$, $K = B_n$ y $L = B_n + x_1e_1$, donde $x_1 > 0$.

Es claro entonces que $(1-\lambda)K + \lambda L = B_n + \lambda x_1e_1$, y por lo tanto la desigualdad (2.16) se reescribiría de la siguiente forma:

$$\gamma_n(B_n + \lambda x_1e_1)^{1/n} \geq (1-\lambda)\gamma_n(B_n)^{1/n} + \lambda\gamma_n(B_n + x_1e_1)^{1/n}.$$

- El lado izquierdo de la desigualdad, $\gamma_n(B_n + \lambda x_1e_1)^{1/n}$, tiende a 0 a medida de $x_1 \rightarrow +\infty$, por las propiedades de γ_n .
- Sin embargo, en el lado derecho, aunque el segundo término $\lambda\gamma_n(B_n + x_1e_1)^{1/n}$ también tiende a 0 a medida que $x_1 \rightarrow +\infty$, no lo hace el primero, $(1-\lambda)\gamma_n(B_n)^{1/n}$, el cual se mantiene constante y con valor superior a 0.

Es decir, la desigualdad (2.16) no se cumple, para x_1 suficientemente grande.

Teniendo en cuenta que la medida gaussiana está concentrada alrededor del origen, tiene sentido añadir la hipótesis de que los conjuntos K y L contengan a este, entonces la conjetura quedaría de la siguiente forma:

Sean $0 < \lambda < 1$ y K, L conjuntos cerrados y convexos conteniendo al origen en \mathbb{R}^n .

Pregunta B: ¿Es cierto que $\gamma_n((1 - \lambda)K + \lambda L)^{1/n} \geq (1 - \lambda)\gamma_n(K)^{1/n} + \lambda\gamma_n(L)^{1/n}$?

Gardner y Zvavitch demostraron ([8]) que la pregunta anterior tiene respuesta afirmativa en ciertos casos que desarrollaremos a continuación.

Teorema 2.5.4

La Pregunta B tiene respuesta afirmativa si $n = 1$.

Demostración. Tomamos $0 < \lambda < 1$ y K, L intervalos cerrados en \mathbb{R} de forma que $0 \in A \cap B$. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned} f(x) &= \chi_K(x)\phi(x), \\ g(x) &= \chi_L(x)\phi(x), \\ h(x) &= \chi_{(1-\lambda)K+\lambda L}(x)\phi(x). \end{aligned}$$

Por un lado, gracias a lo visto en la prueba de la proposición 2.5.3 sabemos que $\phi(x)$ es log-cóncava, y por otro, sabemos que

$$\chi_K(x)^{1-\lambda}\chi_L(y)^\lambda = 1, \text{ si, y sólo si, } \chi_{(1-\lambda)K+\lambda L}((1-\lambda)x + \lambda y) = 1.$$

Así, se verifica que

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda}g(y)^\lambda,$$

y esto, como vimos en la demostración de la desigualdad de Prékopa-Leindler (teorema 2.4.2) implica que

$$(1-\lambda)L(f, t) + \lambda L(g, t) \subset L(h, t) \text{ para todo } t \in [0, 1/\sqrt{2\pi}]. \quad (2.17)$$

Finalmente, teniendo en cuenta (2.13) y el contenido de (2.17), tenemos que para todo $t \in (0, 1)$,

$$\begin{aligned} \gamma_1((1-\lambda)K + \lambda L) &= \int_0^{1/\sqrt{2\pi}} \text{vol}_1(\{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq t\})dt = \int_0^{1/\sqrt{2\pi}} \text{vol}_1(L(h, t))dt \\ &\geq \int_0^{1/\sqrt{2\pi}} \text{vol}_1((1-\lambda)L(f, t) + \lambda L(g, t))dt. \end{aligned}$$

Además, aplicando la desigualdad de Brunn-Minkowski (caso unidimensional) llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2\pi}} \text{vol}_1((1-\lambda)L(f, t) + \lambda L(g, t))dt &\geq (1-\lambda) \int_0^{1/\sqrt{2\pi}} \text{vol}_1(L(f, t))dt \\ &\quad + \lambda \int_0^{1/\sqrt{2\pi}} \text{vol}_1(L(g, t))dt = (1-\lambda)\gamma_1(K) + \lambda\gamma_1(L), \end{aligned}$$

concluyendo la prueba. □

Observación 2.5.2. *Una de las hipótesis que puede parecer de primeras que no hemos utilizado es que $0 \in A \cup B$, sin embargo, sí se ha usado de manera sutil, pues el contenido*

$$(1 - \lambda)L(f, t) + \lambda L(g, t) \subset L(h, t) \text{ para todo } t \in [0, 1/\sqrt{2\pi}),$$

podría no tener sentido ya que si no estuviera el origen contenido (punto donde se alcanza el máximo de la función $\phi(x)$), podría pasar que $L(f, t), L(g, t) = \emptyset$ y entonces la suma de Minkowski $(1 - \lambda)L(f, t) + \lambda L(g, t)$ no estaría bien definida.

Tras este resultado, una primera generalización que podemos plantearnos es tomar cajas coordenadas conteniendo al origen en vez de intervalos de dimensión 1.

Teorema 2.5.5

La Pregunta B tiene respuesta afirmativa si K y L son cajas coordenadas conteniendo al origen en \mathbb{R}^n .

Demostración. Sean $0 < t < 1$, $K = \prod_{i=1}^n I_i$ y $L = \prod_{i=1}^n J_i$, donde I_i, J_i son intervalos cerrados en \mathbb{R} conteniendo el origen, para todo $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$(1 - t)K + tL = \prod_{i=1}^n ((1 - t)I_i + tJ_i).$$

Para poder demostrar el resultado tenemos que hacer uso de la siguiente desigualdad, la cual afirma que para números reales no negativos x_i, y_i , con $1 \leq i \leq n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n (x_i + y_i) \right)^{1/n} \geq \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^{1/n}.$$

Por lo tanto, haciendo uso del hecho de que la medida de Gauss es una medida producto, del teorema anterior y de la desigualdad anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_n((1 - t)K + tL)^{1/n} &= \left(\prod_{i=1}^n \gamma_1((1 - t)I_i + tJ_i) \right)^{1/n} \\ &\geq \left(\prod_{i=1}^n ((1 - t)\gamma_1(I_i) + t\gamma_1(J_i)) \right)^{1/n} \\ &\geq \left(\prod_{i=1}^n (1 - t)\gamma_1(I_i) \right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n t\gamma_1(J_i) \right)^{1/n} \\ &= (1 - t)\gamma_n(K)^{1/n} + t\gamma_n(L)^{1/n}, \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. □

El siguiente paso en la búsqueda de conjuntos que responden de forma afirmativa a la Pregunta B es suponer que uno de los conjuntos es de la forma $L = [-a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$ con $a, b \geq 0$.

Corolario 2.5.6

La pregunta B tiene respuesta afirmativa si uno de los conjuntos es de la forma $L = [-a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$, con $a, b \geq 0$.

Demostración. Sea $K_S = [-c, d] \times \mathbb{R}^{n-1}$, con $c, d \geq 0$, de forma que los hiperplanos $x_1 = -c$ y $x_1 = d$ soportan K .

En ese caso es claro que $K \subset K_S$ y además se cumple que $(1-t)K + tL = (1-t)K_S + tL$, pues al ser L de la forma mencionada, la suma de Minkowski entre el conjunto $(1-t)K$ y tL es la misma que la que obtenemos al tomar el conjunto K_S .

Por lo tanto, utilizando el resultado anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_n((1-t)K + tL)^{1/n} &= \gamma_n((1-t)K_S + tL)^{1/n} \\ &\geq (1-t)\gamma_n(K_S)^{1/n} + t\gamma(L)^{1/n} \\ &\geq (1-t)\gamma_n(K)^{1/n} + t\gamma(L)^{1/n}, \end{aligned}$$

obteniendo entonces el resultado. □

Aunque en el artículo de Gardner y Zvavitch [8] se prueban algunos casos adicionales, la respuesta a la pregunta B es en general falsa, como quedó probado recientemente (por Nayar y Tkocz [16]).

En dicho trabajo, los autores consideraron los conjuntos A y B que se precisan a continuación, dependiendo de los parámetros $\alpha \in (0, 2\pi)$ y $\varepsilon > 0$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x| \tan(\alpha)\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > |x| \tan(\alpha) - \varepsilon\} = A - (0, \varepsilon).$$

Para tales conjuntos probaron (calculando explícitamente la medida gaussiana de A , B y $(1-\lambda)A + \lambda B$) que, con valores de α suficientemente próximos a $\pi/2$ (y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño), se daba la desigualdad opuesta a la conjeturada por Gardner y Zvavitch.

No incluimos aquí dicho cómputo específico por cuestiones de extensión de la memoria.

Capítulo 3

Consecuencias de la desigualdad de Brunn-Minkowski

En capítulos anteriores hemos mencionado las numerosas aplicaciones de la desigualdad de Brunn-Minkowski a diversas ramas de las matemáticas. Para dar una idea a este respecto, recogemos las siguientes palabras de Richard Gardner [7]:

...In a sea of Mathematics, the Brunn-Minkowski inequality appears like an octopus, tentacles reaching far and wide, its shape and color changing as it roams from one area to the next.

R.Gardner

A lo largo de este capítulo final nos detendremos en una serie de consecuencias de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Para comenzar, abordaremos el estudio de la desigualdad de Rogers-Shephard, posteriormente la desigualdad isoperimétrica y finalmente los fenómenos de concentración de medida de la esfera.

3.1. Desigualdad de Rogers-Shephard

Dado un cuerpo convexo K , existen numerosas posibilidades para asignar a K un cuerpo convexo que sea centralmente simétrico con respecto a algún punto. Podemos considerar la siguiente posibilidad: el *cuerpo diferencia* de K , el cual viene dado por

$$K - K = \{x - y : x, y \in K\}.$$

Es fácil ver que $K - K$ es convexo y, además, es simétrico respecto al origen. Esto nos lleva de forma natural a la siguiente definición.

Definición 3.1.1: Simetrización central

Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Definimos la simetrización central de K como $\frac{1}{2}(K - K)$.

En esta sección, veremos las cotas inferior y superior para el volumen de la simetrización central de un cuerpo dado en función del volumen del cuerpo original. La cota inferior es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Brunn-Minkowski, mientras que la cota superior es lo que se conoce como desigualdad de Rogers-Shephard (probada originalmente en [17]).

Teorema 3.1.2: Desigualdad de Rogers-Shephard ([17])

Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Entonces

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}\left(\frac{1}{2}(K - K)\right) \leq \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n} \text{vol}(K).$$

Para demostrar el teorema vamos a necesitar el lema 1.3.4, visto en el capítulo primero.

Demostración. Como hemos mencionado anteriormente, la cota inferior es una consecuencia inmediata de la desigualdad de Brunn-Minkowski pues

$$\text{vol}\left(\frac{K - K}{2}\right) \geq \left(\frac{1}{2}\text{vol}(K)^{1/n} + \frac{1}{2}\text{vol}(-K)^{1/n}\right)^n = (\text{vol}(K)^{1/n})^n = \text{vol}(K).$$

Veamos ahora la cota superior. Por un lado, $y - x \in K$ si, y sólo si $x \in y - K$, y por lo tanto, usando el Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y - x) \chi_K(y) dy \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y - x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{y-K}(x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y) \text{vol}(y - K) dy = \text{vol}(K)^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

La última igualdad es consecuencia de que el volumen es invariante por traslaciones.

Además, $\chi_K(y - x) \chi_K(y) = 1$ si, y sólo si, $y, y - x \in K$, y en ese caso $x = y - (y - x) \in K - K$. Así, definiendo $f : K - K \rightarrow \mathbb{R}$ mediante,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y - x) \chi_K(y) dy,$$

esta se puede reescribir teniendo en cuenta que $y - x \in K$ si, y sólo si, $y \in x + K$, y por tanto

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y-x)\chi_K(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{x+K}(y)\chi_K(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{(x+K)\cap K}(y)dy = \text{vol}((x+K)\cap K). \end{aligned}$$

Por otro lado, llamando $D(K, x) = K \cap (K + x)$ para $x \in K - K$, se puede reescribir f como $f(x) = \text{vol}(D(K, x))$.

Tomando ahora $x, y \in K - K$ y $\lambda \in [0, 1]$, si demostramos que se cumple el contenido

$$(1 - \lambda)D(K, x) + \lambda D(K, y) \subset D(K, (1 - \lambda)x + \lambda y), \quad (3.2)$$

entonces, usando la desigualdad de Brunn-Minkowski (teorema 2.1.1) y (3.2) obtendremos que f es $(1/n)$ -cóncava, ya que

$$\begin{aligned} f((1 - \lambda)x + \lambda y)^{1/n} &= \text{vol}(D(K, (1 - \lambda)x + \lambda y))^{1/n} \\ &\geq \text{vol}((1 - \lambda)D(K, x) + \lambda D(K, y))^{1/n} \\ &\geq (1 - \lambda)\text{vol}(D(K, x))^{1/n} + \lambda\text{vol}(D(K, y))^{1/n}. \end{aligned}$$

Veamos ahora que se cumple (3.2).

Sean $x_1, x_2 \in K - K$ y $\lambda \in [0, 1]$, tomamos $a \in (1 - \lambda)D(K, x_1) + \lambda D(K, x_2)$. Entonces $a = (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2$ con $a_i \in D(K, x_i)$ y por la definición de $D(K, x_i) = K \cap (K + x_i)$, es claro entonces que $a_i \in K$ y que existe $b_i \in K$ tal que $a_i = b_i + x_i$ para $i = 1, 2$.

Así,

$$\begin{aligned} a &= (1 - \lambda)a_1 + \lambda a_2 = (1 - \lambda)(b_1 + x_1) + \lambda(b_2 + x_2) \\ &= (1 - \lambda)b_1 + \lambda b_2 + (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2. \end{aligned}$$

Es decir, $a \in K + (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$, ya que $(1 - \lambda)b_1 + \lambda b_2 \in K$, lo que implica que $a \in D(K, (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2)$ y está probado el contenido.

Ahora, aplicando el lema 1.3.4 a la función $f^{1/n}$, $K - K$, $x_0 = 0$ y $h(x) = x^n$ (la cual es estrictamente creciente para $n \geq 1$) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{K-K} h(f(x)^{1/n})dx &= \int_{K-K} \text{vol}(D(K, x)) \geq n\text{vol}(K - K) \int_0^1 h(tf(0)^{1/n})(1 - t)^{n-1}dt \\ &= n\text{vol}(K - K) \int_0^1 (t\text{vol}(K)^{1/n})^n(1 - t)^{n-1}dt \\ &= n\text{vol}(K - K)\text{vol}(K) \int_0^1 t^n(1 - t)^{n-1}dt, \end{aligned}$$

y usando la definición de la función beta $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$, se obtiene que

$$n\text{vol}(K - K)\text{vol}(K) \int_0^1 t^n(1-t)^{n-1}dt = n\text{vol}(K - K)\text{vol}(K)B(n+1, n).$$

Es decir,

$$\begin{aligned} \int_{K-K} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y-x)\chi_K(y)dy \right) dx &= \int_{K-K} \text{vol}(D(K, x))dx \\ &\geq n\text{vol}(K - K)\text{vol}(K)B(n+1, n), \end{aligned}$$

Por otro lado, habíamos llegado en (3.1) a que

$$\text{vol}(K)^2 = \int_{K-K} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y-x)\chi_K(y)dy \right) dx. \quad (3.3)$$

Esto último, junto a

$$B(n+1, n) = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{(n-1)! \cdot n!}{2n!},$$

nos permite concluir que

$$\text{vol}(K)^2 \geq n\text{vol}(K - K)\text{vol}(K) \frac{(n-1)! \cdot n!}{2n!},$$

y finalmente,

$$\frac{\text{vol}(K - K)}{\text{vol}(K)} \leq \frac{1}{n} \frac{2n!}{(n-1)! \cdot n!} = \frac{2n!}{n! \cdot n!} = \binom{2n}{n},$$

lo que concluye la demostración. \square

Para continuar con el capítulo abordaremos el estudio del problema de la desigualdad Isoperimétrica.

3.2. Desigualdad Isoperimétrica

El problema isoperimétrico tiene comienzo en la antigüedad. Su belleza matemática se une a la leyenda de la reina Dido y a la fundación de la ciudad de Carthago.

Son varias las fuentes que proporcionan información sobre la leyenda de la reina Dido, pero sin duda la más conocida es la que recoge Virgilio en La Eneida [4].

*De Dido el esposo era Siqueo, el hombre más rico en oro
de los fenicios, y lo amó la infeliz sin medida,
desde que su padre la entregara sin mancha y la uniera a él en primeros*

*auspicios. Pero el poder de Tiro lo ostentaba su hermano
 Pigmalión, terrible más que todos los otros por sus crímenes
 Y vino a ponerse entre ambos la locura. Este a Siqueo,
 impió ante las aras y ciego de pasión por el oro,
 sorprende a escondidas con su espada, sin cuidarse
 del amor de su hermana (...)
 (...) Pero en sueños se le apareció
 el propio fantasma de su insepulto esposo, (...)
 (...) La anima luego a disponer la huida y salir de su patria,
 y saca de la tierra antiguos tesoros escondidos (...)
 Se van por el mar las riquezas del avaro Pigmalión;
 Llegaron a estos lugares, donde ahora ves enormes murallas
 y nace el alcázar de una joven Carthago,
 y compraron el suelo, que por esto llamaron Birsa,
 cuanto pudieron rodear con una piel de toro...*

Virgilio. La Eneida, libro IV ([4])

La leyenda cuenta que Dido huyó de su hermano Pigmalión junto con unos cuantos fieles por la costa del norte de África, hasta llegar a un lugar donde habitaban los gétulos. Dido pidió a Jarbas, rey de los gétulos, asilo y un trozo de tierra donde establecerse.

Jarbas accedió a la petición y le propuso quedarse con la extensión de tierra que pudiera ser abarcada con la piel de un buey. A Dido se le ocurrió cortar la piel en finas tiras que unió por sus extremos, de modo que se planteó encontrar la figura que debía formar con la ristra de tiras de piel, es decir el perímetro está fijo, para encerrar la mayor área posible.

La leyenda dice que Dido resolvió de alguna manera el problema isoperimétrico: una semicircunferencia con la costa como frontera fija.

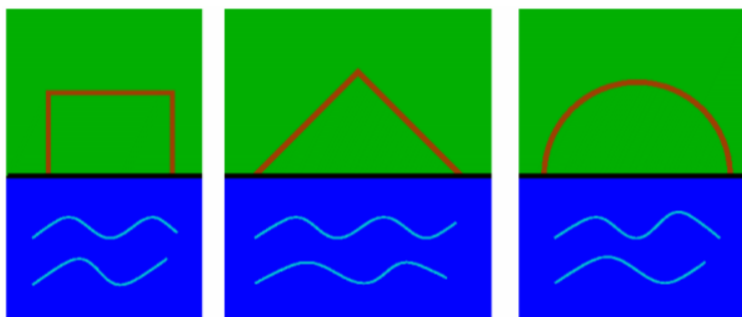


Figura 3.1: Representación de áreas acotadas por formas comunes con el mismo perímetro. El semicírculo (la respuesta al problema de Dido) es la que contiene mayor área.

Dejando a un lado la leyenda, desde los primeros planteamientos conocidos en la Grecia clásica, hasta lo que se llama su solución completa en el s. XIX, han transcurrido más de dos mil años. En su versión general, la desigualdad es de la siguiente forma (véase [1]):

Teorema 3.2.1: Desigualdad isoperimétrica

Para todo $K \in \mathcal{K}^n$ cuerpo convexo, se verifica la siguiente desigualdad:

$$S(K)^n \geq \frac{S(B_n)^n}{\text{vol}(B_n)^{n-1}} \text{vol}(K)^{n-1}.$$

Demostración. Para la demostración, es necesario el uso de la fórmula de Minkowski (teorema 1.2.1), la cual reescribe el área de superficie de un conjunto convexo K de la siguiente forma:

$$S(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

Esto, junto con la desigualdad de Brunn-Minkowski (teorema 2.1.1), nos permite obtener la siguiente cadena de desigualdades

$$S(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda} \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\text{vol}(K)^{1/n} + \lambda \text{vol}(B_n)^{1/n})^n - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

Además, usando el binomio de Newton, se tiene que

$$(\text{vol}(K)^{1/n} + \lambda \text{vol}(B_n)^{1/n})^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^i \text{vol}(K)^{(n-i)/n} \text{vol}(B_n)^{i/n}.$$

Sin embargo, al hacer el límite cuando $\lambda \rightarrow 0$ la mayoría de términos serán $o(\lambda)$ y desaparecerán, es decir, tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} S(K) &\geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K) + n\lambda \text{vol}(K)^{(n-1)/n} \text{vol}(B_n)^{1/n} - \text{vol}(K) + o(\lambda)}{\lambda} \\ &= n \text{vol}(K)^{(n-1)/n} \text{vol}(B_n)^{1/n} + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{o(\lambda)}{\lambda} = n \text{vol}(K)^{(n-1)/n} \text{vol}(B_n)^{1/n}, \end{aligned}$$

y por tanto,

$$S(K)^n \geq n^n \text{vol}(K)^{n-1} \text{vol}(B_n) = \frac{n^n \text{vol}(B_n)^n}{\text{vol}(B_n)^{n-1}} \text{vol}(K)^{n-1}.$$

Finalmente, el hecho de que $S(B_n)^n = n^n \text{vol}(B_n)^n$ nos permite concluir que

$$S(K)^n \geq \frac{S(B_n)^n}{\text{vol}(B_n)^{n-1}} \text{vol}(K)^{n-1},$$

lo que completa la prueba. □

Como se puede observar, uno de los principales ingredientes necesarios en la prueba del teorema ha sido la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Observación 3.2.1. *La desigualdad isoperimétrica clásica se obtiene cuando $n = 2$:*

$$p(K)^2 \geq 4\pi A(K).$$

3.3. Concentración de la medida de la esfera

Otra interesante aplicación de la desigualdad de Brunn-Minkowski aparece al intentar concebir la distribución del volumen o la superficie de la esfera en dimensión grande.

La primera pregunta que podemos plantearnos es:

¿Qué puede uno observar de una esfera, en dimensiones más allá de la tercera?

He ahí el propósito de esta sección, en la que describiremos un fenómeno que se conoce como *Concentración de la medida de la esfera*. Los resultados que presentamos aquí aparecen recogidos en [1, 15].

Las primeras ideas de los fenómenos en dimensiones altas que discutiremos tienen origen en Carl Gauss (1777-1855) y, aunque el estudio de estos, se inicia a principios del siglo XX con figuras como Paul Lévy (1886-1971) o Robert Deltheil (1890-1872), en la actualidad el estudio de estos fenómenos es toda un área de investigación, conocida como *fenómenos de concentración de medida*, no necesariamente en la esfera.

3.3.1. Cálculo del volumen de B_n

Veamos una forma de calcular el volumen de B_n .

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-(1/2)\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(1/2)\sum_{i=1}^n x_i^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^n e^{-x_i^2/2} \right) dx = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_i^2/2} dx_i \\ &= 2^n \prod_{i=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-x_i^2/2} dx_i = 2^n \prod_{i=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{2t}} dt, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es consecuencia de realizar el cambio de variable $t = x_i^2/2$,

$$\begin{aligned} 2^n \prod_{i=1}^n \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{\sqrt{2t}} dt &= (\sqrt{2})^n \left(\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \right)^n \\ &= (\sqrt{2})^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

La última identidad viene de aplicar la definición de $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt$, y finalmente

$$(\sqrt{2})^n \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n = (\sqrt{2\pi})^n,$$

ya que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Así, aplicando la proposición 1.3.2 y haciendo el cambio de variable $t = r^2/2$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx &= n \operatorname{vol}(B_n) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-r^2/2} r^{n-1} d\sigma(u) dr \\ &= n \operatorname{vol}(B_n) \int_0^{+\infty} e^{-r^2/2} r^{n-1} dr = n \operatorname{vol}(B_n) \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sqrt{2t})^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2t}} dt \\ &= n \operatorname{vol}(B_n) (\sqrt{2})^{n-2} \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sqrt{t})^{n-2} dt = \frac{n}{2} \operatorname{vol}(B_n) 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\ &= \operatorname{vol}(B_n) 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right), \end{aligned}$$

siendo la última igualdad consecuencia de la propiedad $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$.

Finalmente, igualando, tenemos que

$$\operatorname{vol}(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma((n/2) + 1)}.$$

Por otro lado, la Fórmula de Stirling nos da una aproximación de la función gamma:

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \approx \sqrt{2\pi} e^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Aplicándola, obtenemos

$$\operatorname{vol}(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \approx \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{n}{2}} \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}} = \left(\frac{2\pi e}{n}\right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Es decir,

$$\operatorname{vol}(B_n)^{1/n} \approx \sqrt{\frac{2\pi e}{n}}.$$

Así, para valores grandes de n , tenemos una fórmula simple y algebraicamente manejable.

A partir de esto, podemos observar que se cumple lo siguiente

$$\operatorname{vol}(B_1) = 2 < \operatorname{vol}(B_2) = \pi < \operatorname{vol}(B_3) = \frac{4\pi}{3} < \operatorname{vol}(B_4) = \frac{\pi^2}{2} < \operatorname{vol}(B_5) = \frac{8\pi^2}{15}.$$

Sin embargo, a partir de $n = 6$ el volumen de B_n comienza a disminuir, ($\text{vol}(B_5) > \text{vol}(B_6) = \frac{\pi^3}{6}$). De hecho, $\text{vol}(B_n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow +\infty$.

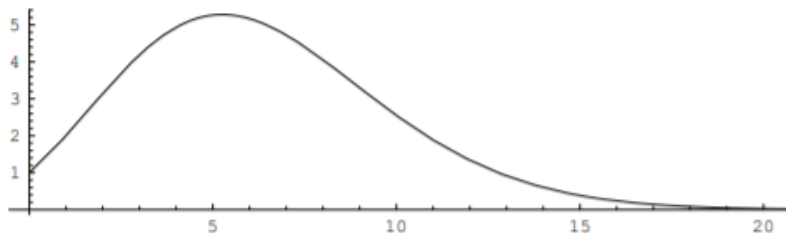


Figura 3.2: El volumen de la bola unidad como una función de la dimensión.

Además, si tomamos una bola de radio uno B_n inscrita en $C = [-1, 1]^n$ es claro que esta toca a C en e_i para $i = \{1, \dots, n\}$.

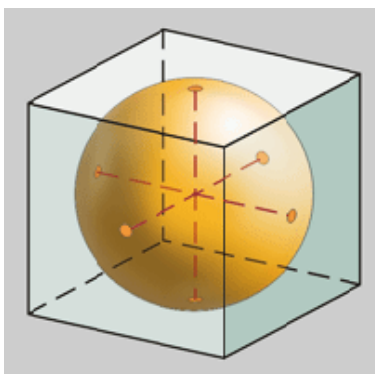


Figura 3.3: Esfera inscrita en un cubo en \mathbb{R}^3

Sin embargo el volumen de C es el siguiente

$$\text{vol}(C) = \text{vol}([-1, 1]^n) = 2^n.$$

Es decir, aunque $\text{vol}(B_n)$ decrece y $\text{vol}(C)$ crece a medida que la dimensión aumenta, B_n sigue tocando a C en e_i con $i \in \{1, \dots, n\}$, un suceso que es totalmente contrario a la intuición, ya que B_n y C no dejan de ser cuerpos convexos.

3.3.2. Distribución del volumen de la esfera

Supongamos ahora una bola de dimensión n a la que fijamos su volumen en 1.

Si calculamos su radio r , obtenemos que es tan grande como

$$r = \frac{1}{\text{vol}(B_n)^{1/n}} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}.$$

Es decir, en dimensión arbitraria, para reunir una unidad de volumen necesitamos una bola de radio casi tan grande como \sqrt{n} .

Pero, entonces, es natural preguntarnos:

¿Cómo está distribuido tan poco volumen en una bola de radio tan grande?

Contestaremos esta pregunta a lo largo de la siguiente sección, donde estudiaremos la concentración de la medida en la esfera (así como el volumen de la bola unidad)

3.3.3. Concentración de la medida de la esfera

Comenzaremos esta sección probando un resultado auxiliar que nos permitirá abordar el estudio del fenómeno de la concentración de la medida de la esfera.

Lema 3.3.1: [15]

Sean $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$, $t \in [0, 2]$ y $B = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : |u - a| \geq t, \forall a \in A\}$. Entonces

$$\mu_{n-1}(B)\mu_{n-1}(A) \leq e^{-nt^2/4}.$$

Demostración. Definimos el conjunto $\bar{A} = \{\alpha x : \alpha \in [0, 1], x \in A\}$ y del mismo modo $\bar{B} = \{\alpha x : \alpha \in [0, 1], x \in B\}$. Se cumple que $\mu_{n-1}(A) = \text{vol}(\bar{A})/\text{vol}(B_n)$ pues por la proposición 1.3.2 y la propia definición de \bar{A}

$$\text{vol}(\bar{A}) = \text{vol}(B_n) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \rho_{\bar{A}}(u)^n d\sigma(u) = \text{vol}(B_n) \int_{\bar{A}} d\sigma(u) = \text{vol}(B_n)\mu_{n-1}(\bar{A}),$$

donde recordemos que $\rho_{\bar{A}}$ es la función radial de \bar{A} (definición 1.1.12).

A continuación, queremos probar que

$$\frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B}) \subseteq \left(1 - \frac{t^2}{8}\right) B_n, \quad (3.4)$$

ya que, teniendo ese contenido y usando la desigualdad de Brunn-Minkowski en su versión multiplicativa (proposición 2.1.3, punto 4) tendremos que

$$\left(1 - \frac{t^2}{8}\right)^n \text{vol}(B_n) \geq \text{vol}\left(\frac{1}{2}(\bar{A} + \bar{B})\right) \geq \sqrt{\text{vol}(\bar{A})\text{vol}(\bar{B})},$$

y finalmente obtendríamos que

$$\mu_{n-1}(B)\mu_{n-1}(A) = \frac{\text{vol}(\bar{B})}{\text{vol}(B_n)} \frac{\text{vol}(\bar{A})}{\text{vol}(B_n)} \leq \left(1 - \frac{t^2}{8}\right)^{2n} \leq e^{-2nt^2/8} = e^{-nt^2/4},$$

lo que nos daría el resultado.

Solo queda probar que se da el contenido en (3.4).

Sea $\bar{a} = \alpha a \in \bar{A}$ y $\bar{b} = \beta b \in \bar{B}$, con $a \in A$, $b \in B$ y $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Entonces

$$\left| \frac{1}{2}(a+b) \right|^2 = \frac{1}{4}(|a|^2 + |b|^2 + 2\langle a, b \rangle) = \frac{1}{4}(2|a|^2 + 2|b|^2 - |a-b|^2), \quad (3.5)$$

donde la última igualdad es consecuencia de que $|a-b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\langle a, b \rangle$,

$$\frac{1}{4}(2|a|^2 + 2|b|^2 - |a-b|^2) \leq \frac{1}{4}(4-t^2) = 1 - \frac{t^2}{4} \leq \left(1 - \frac{t^2}{8}\right)^2. \quad (3.6)$$

La primera desigualdad es consecuencia de la definición del conjunto B .

Podemos suponer que $\alpha \leq \beta$, si $\alpha \geq \beta$ se haría de la misma manera. Entonces escribimos $\gamma = \alpha/\beta \leq 1$ y obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}) \right|^2 &= \left| \frac{1}{2}(\alpha a + \beta b) \right|^2 = \left| \frac{\beta}{2}(\gamma a + b) \right|^2 \\ &= \beta^2 \left| \gamma \frac{a+b}{2} + (1-\gamma) \frac{b}{2} \right|^2 \leq \beta^2 \left(\gamma \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + (1-\gamma) \left| \frac{b}{2} \right|^2 \right), \end{aligned}$$

siendo la última desigualdad consecuencia de la desigualdad triangular y, teniendo en cuenta lo obtenido en (3.6), que $|b| = 1$, $\beta \leq 1$ y que $1 - t^2/8 \geq 1/2$ ya que $t \leq 2$,

$$\beta \left(\gamma \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + (1-\gamma) \left| \frac{b}{2} \right|^2 \right) \leq \gamma \left(1 - \frac{t^2}{8}\right) + (1-\gamma) \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{t^2}{8}.$$

Por lo que tenemos el contenido (3.4) y concluye la demostración. \square

Tras el resultado previo ya estamos en condiciones de demostrar el teorema sobre concentración de la medida de la esfera, el cual nos da información sobre la medida del conjunto

$$A_t = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \exists a \in A \text{ con } |u - a| \leq t\},$$

donde $A \subset \mathbb{S}^{n-1}$.

Teorema 3.3.2: Concentración de la medida de la esfera ([15])

Sea $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$ con $\mu_{n-1}(A) > 0$, sea $t \in [0, 2]$ y sea $A_t = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \exists a \in A \text{ con } |u - a| \leq t\}$, entonces

$$\mu_{n-1}(A_t) \geq 1 - \frac{1}{\mu_{n-1}(A)} e^{-nt^2/4}.$$

Demostración. Sea $B = \mathbb{S}^{n-1} \setminus A_t = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : |u - a| > t \text{ para todo } a \in A\}$. Aplicando el lema 3.3.1 a los conjuntos $A, B \subset \mathbb{S}^{n-1}$, obtenemos que

$$1 - \mu_{n-1}(A_t) = \mu_{n-1}(B) \leq \frac{1}{\mu_{n-1}(A)} e^{-nt^2/4},$$

lo que concluye la demostración. \square

Corolario 3.3.3: [15]

Sean $A \subseteq \mathbb{S}^{n-1}$, $t \in [0, 1]$ y sea $U = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : |\langle v, u \rangle| \leq t\}$. Entonces $\mu_{n-1}(U) \geq 1 - 4e^{-nt^2/4}$, y en particular, para $t \geq 4/\sqrt{n}$ se tiene que

$$\mu_{n-1}(U) \geq 0,9.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $v = e_n$. Por lo tanto $\langle u, e_n \rangle = u_n$, y podemos considerar el conjunto $A = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : u_n \geq 0\}$.

Claramente $\mu_{n-1}(A) = 1/2$ pues es la mitad de la esfera de medida 1, y, por el teorema 3.3.2 tenemos que $\mu_{n-1}(A_t) \geq 1 - 2e^{-nt^2/4}$. Así,

$$\begin{aligned} \mu_{n-1}(\{u \in \mathbb{S}^{n-1} : 0 \leq u_n \leq t\}) &\geq \frac{1}{2} - \mu_{n-1}(A_t^c) = \frac{1}{2} - (1 - \mu_{n-1}(A_t)) \\ &\geq \frac{1}{2} - 2e^{-nt^2/4}, \end{aligned}$$

y esto implica que $\mu_{n-1}(U) = 2\mu_{n-1}(\{u \in \mathbb{S}^{n-1} : 0 \leq u_n \leq t\}) \geq 1 - 4e^{-nt^2/4}$.

Finalmente, $\mu_{n-1}(U) \geq 0,9$ si

$$0,1 \geq 4e^{-nt^2/4},$$

simplificando y aplicando logaritmos,

$$\log\left(\frac{1}{40}\right) \geq \frac{-nt^2}{4},$$

y así, despejando t ,

$$t^2 \geq -(4/n) \log\left(\frac{1}{40}\right).$$

Es decir, si $t \geq 4/\sqrt{n}$ tenemos que $\mu_{n-1}(U) \geq 0,9$. \square

Finalmente acabamos la sección con un resultado que nos explica la distribución del volumen de la bola unidad.

Proposición 3.3.4: [1]

Denotamos por \overline{B}_n a la bola de volumen 1. Entonces

- Una sección de \overline{B}_n por el origen tiene volumen $(n-1)$ -dimensional aproximadamente \sqrt{e} .
- Cualquier sección paralela a la anterior, a distancia x del centro, tiene volumen $(n-1)$ -dimensional aproximadamente $f(x) = \sqrt{e}e^{-\pi x^2}$.

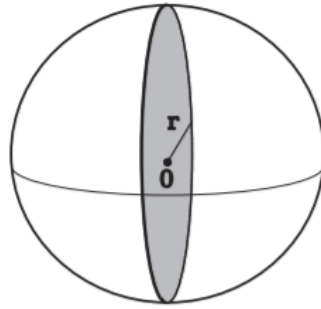


Figura 3.4: Sección transversal por el origen

Demostración. Por un lado, en la sección 3.3.1 hemos obtenido la siguiente aproximación para el volumen de B_n ; $\text{vol}(B_n)^{1/n} \approx \sqrt{2\pi e/n}$. Por otro lado, tenemos que el radio r de \overline{B}_n viene dado por

$$r = \frac{1}{\text{vol}(B_n)^{1/n}} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi e}}. \quad (3.7)$$

Una sección de \overline{B}_n pasando por el centro puede identificarse por rB_{n-1} . Entonces, por las propiedades del volumen (proposición 1.1.13), tenemos que

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(rB_{n-1}) &= r^{n-1} \text{vol}_{n-1}(B_{n-1}) = \frac{1}{\text{vol}(B_n)^{(n-1)/n}} \text{vol}_{n-1}(B_{n-1}) \\ &\approx \left(\sqrt{\frac{2\pi e}{n-1}} \right)^{n-1} \left(\sqrt{\frac{n}{2\pi e}} \right)^{(n-1)} = \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^{n-1} \approx \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Obsérvese que, la última aproximación se obtiene de que

$$\log \left(\sqrt{\frac{n}{n-1}} \right)^{n-1} = \frac{n-1}{2} \log \left(\frac{n}{n-1} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Para ver el segundo apartado de la proposición observamos que una sección paralela a la anterior a distancia x del origen (denotada por $\overline{B_{n-1}^x}$), es una bola $(n-1)$ -dimensional cuyo radio es $\sqrt{r^2 - x^2}$. Luego su volumen viene dado por

$$\text{vol}_{n-1}(\overline{B_{n-1}^x}) = (\sqrt{r^2 - x^2})^{n-1} \text{vol}_{n-1}(B_{n-1}).$$

Por otro lado, del apartado anterior de la proposición, tenemos que $\text{vol}_{n-1}(rB_{n-1}) \approx \sqrt{e}$, es decir, $\text{vol}_{n-1}(B_{n-1}) \approx \sqrt{e}/r^{n-1}$. Esto, junto con (3.7) y la aproximación $e^{-t} \approx 1 - t$, implica que

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(\overline{B_{n-1}^x}) &= (\sqrt{r^2 - x^2})^{n-1} \text{vol}_{n-1}(B_{n-1}) \approx \sqrt{e} \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \right)^{n-1} \\ &= \sqrt{e} \left(1 - \frac{x^2}{r^2} \right)^{(n-1)/2} \approx \sqrt{e} \left(1 - \frac{2\pi e x^2}{n} \right)^{(n-1)/2} \\ &\approx \sqrt{e} \left(e^{-\frac{2\pi e x^2}{n}} \right)^{(n-1)/2} = \sqrt{e} e^{-\pi e x^2 \frac{n-1}{n}} \approx \sqrt{e} e^{-\pi e x^2}, \end{aligned}$$

concluyendo así la prueba. \square

Observación 3.3.1. $f(x)$ es la función de densidad de una distribución normal de media $\mu = 0$ y varianza $\sigma^2 = 1/(2\pi e)$, la cual no depende de n .

Es decir, independientemente de la dimensión, casi todo el volumen de $\overline{B_n}$ está concentrado en una banda de ancho fijo, teniendo en cuenta el hecho de que el radio de $\overline{B_n}$ crece con la dimensión.

La siguiente figura, muestra el tamaño de la bola en relación con la banda alrededor de ecuador que contienen el 96 % de la medida, para valores distintos de la dimensión

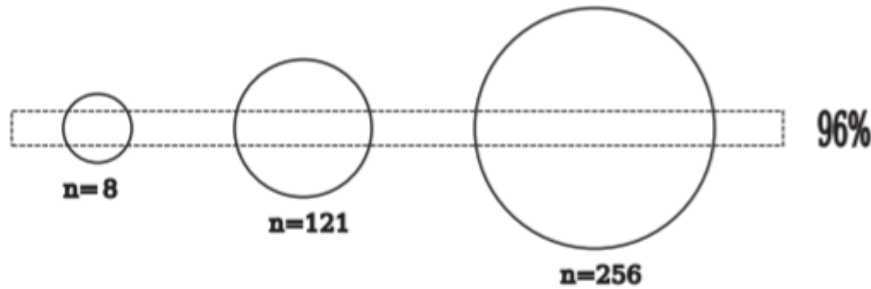


Figura 3.5: Franja con 96 % del volumen total de la esfera de dimensión n

Índice alfabético

Área de superficie, 16

Caja, 11

Combinación

afín, 10

convexa, 10

lineal, 10

positiva, 10

Conjunto

convexo, 11

de nivel, 42

Cuerpo, 11

diferencia, 53

Envoltura

afín, 11

convexa, 11

Función

cóncava, 13

característica, 15

convexa, 13

estrictamente convexa, 13

soporte, 14

Hiperplano soporte, 12

Media de orden p , 18

Medida de Gauss, 45

Policaja, 11

Polinomio de Steiner, 19

Politopo, 11

Quermassintegrales, 20

Simetrización central, 54

Suma de Minkowski, 12

Volumen

esférico normalizado, 21

intrínseco, 20

Bibliografía

- [1] K. Ball, *An elementary introduction to modern Convex Geometry*, Flavors of geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 1–58.
- [2] T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theory of convex bodies (Theorie der konvexen Körper)*, BCS Associates, Moscow, ID, 1987, Translated from the German and edited by L. Boron, C. Christenson and B. Smith (original 1934).
- [3] C. Borell, *Convex set functions in d -space*, Period. Math. Hungar. **6** (1975), no. 2, 111–136.
- [4] M. Castillo, *Virgilio: La Eneida. Traducción de Egidio Poblete*, Byzantion nea hellás (2011), no. 30, 388–389.
- [5] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 47, Cambridge University Press, New York, 1958.
- [6] H. Federer, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [7] R. J. Gardner, *The Brunn-Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), no. 3, 355–405 (electronic).
- [8] R. J. Gardner and A. Zvavitch, *Gaussian Brunn-Minkowski inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 10, 5333–5353.
- [9] P. M. Gruber, *Convex and Discrete Geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 336, Springer, Berlin, 2007.
- [10] H. Hadwiger and D. Ohmann, *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie*, Math. Z. **66** (1956), 1–8. MR 18,595c
- [11] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, Reprint of the 1952 edition.

-
- [12] M. A. Hernández Cifre, *The hidden geometry in the zeroes of the Steiner polynomial*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. **13** (2010), no. 2, 265–281.
- [13] M. A. Hernández Cifre and J. Yepes Nicolás, *Refinements of the Brunn-Minkowski inequality*, J. Convex Anal. **21** (2014), no. 3, 727–743.
- [14] J. Malkevitch, *Milestones in the history of polyhedra*, Shaping Space, Springer, 2013, pp. 53–63.
- [15] J. Matoušek, *Lectures on discrete geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 212, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [16] P. Nayar and T. Tkocz, *A note on a Brunn-Minkowski inequality for the Gaussian measure*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 11, 4027–4030.
- [17] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. **8** (1957), 220–233.
- [18] R. Schneider, *Convex bodies: the brunn-minkowski theory*, second expanded edition ed., Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [19] R. Webster, *Convexity*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994.