FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER:

SUBVARIEDADES ESPACIALES DE CODIMENSIÓN DOS EN EL ESPACIO-TIEMPO DE LORENTZ-MINKOWSKI

Trabajo realizado por Francisco Marín Sola

Dirigido por:
Luís José Alías Linares y
Verónica López Cánovas

Declaración de originalidad

Yo, Francisco Marín Sola, declaro ser el autor original del trabajo "Subvariedades espaciales de codimensión dos en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski" bajo la tutela del profesor Dr. Luís José Alías Linares y la Dra. Verónica López Cánovas, habiendo reflejado en la bibliografía y referenciado convenientemente todas las fuentes empleadas para su elaboración. [1]

[1]Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Introducción

Una de las grandes aspiraciones de las matemáticas es la de poder clasificar y caracterizar de manera precisa los objetos estudiados. Esta aspiración podría sonar modesta o sencilla en primer instancia, pero como sabemos los que hemos buceado entre teoremas y demostraciones, la realidad dista mucho de tales suposiciones. Sabiendo esto, es frecuente que en la búsqueda de tales resultados los esfuerzos se focalicen en temas concretos.

En esta senda, nuestro trabajo, ubicado dentro del estudio de la geometría de subvariedades, está dedicado a estudiar las subvariedades espaciales de codimensión dos contenidas en una hipersuperficie nula. Estas subvariedades, que denotaremos por Σ, vienen dadas por una inmersión

$$\psi : \Sigma^n \to M^{n+2}$$

cumpliendo que la métrica inducida en Σ vía ψ es riemanniana y que $\psi(\Sigma) \subset S$, donde S es un hipersuperficie nula del espacio-tiempo lorentziano M. Diremos en este caso que la subvariedad factoriza a través de la hipersuperficie nula S.

Con estos protagonistas, el objetivo de este trabajo es, por tanto, estudiar tales objetos a partir de su inmersión y obtener de esta forma, distintos resultados que nos permitan clasificar y caracterizar estas subvariedades.

Para alcanzar tal objetivo, comenzaremos desarrollando en el Capítulo 2 las herramientas necesarias para abordar los resultados buscados. A continuación, haciendo uso de lo obtenido en el capítulo anterior y centrándonos en el caso en el que el espacio ambiente es el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$, trataremos en el Capítulo 3 el estudio del caso en el que la hipersuperficie nula a través de la cual factoriza nuestra subvariedad es el cono de luz, distinguiendo los casos en los que la subvariedad es compacta, totalmente umbilical y atrapada. Finalmente, siguiendo un procedimiento análogo al seguido en el Capítulo 3, estudiaremos a lo largo del Capítulo 4 el caso en el que la hipersuperficie nula es un hiperplano nulo.

Antes de entrar en los objetivos expuestos anteriormente, empezaremos con un capítulo de preliminares dedicado a recordar algunos conceptos básicos de geometría lorentziana y geometría de subvariedades, haciendo en este último caso un especial énfasis en las subariedades inmersas en variedades lorentzianas.

Una vez establecidos estos preliminares, nos adentraremos con el Capítulo 2 en el estudio de las subvariedades espaciales de codimensión dos que factorizan a través de una hipersuperficie nula cualquiera. En este capítulo trataremos de dar un marco teórico general en el que desarrollaremos varias herramientas enfocadas al estudio de estas subvariedades. Así, en un primera aproximación, veremos cómo obtener una referencia normal globalmente definida para tales subvariedades para, a continuación, usando esta referencia, estudiar su geometría. De esta forma, obtendremos en términos de la citada referencia expresiones para la segunda forma fundamental, el campo curvatura media, el tensor de Ricci y la curvatura escalar de la subvariedad (Proposición 2.1.1).

Depués de esto, una vez establecido ese marco teórico buscado, nos centraremos en particularizar lo obtenido al caso en el que la hipersuperfice nula a través de la cual factoriza nuestra subvariedad es el cono de luz del espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski (Proposición 2.2.3). Visto esto, pasaremos a obtener los operadores forma asociados a las direcciones normales que componen la referencia normal (Proposición 2.2.4), disponiendo de esta forma de todo lo necesario para abordar los primeros resultados.

A continuación, aprovechando algunas de las herramientas desarrolladas, obtendremos de forma casi inmediata una caracterización para la curvatura escalar de las subvariedades espaciales de codimensión dos que factorizan a través del cono de luz (Corolario 2.3.2). Por otro lado, para finalizar el capítulo, introduciremos el tensor de Weyl con el objetivo de probar que toda subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través del cono de luz es conformemente llana (Teorema 2.3.7).

Una vez obtenidas las herramientas necesarias e ilustrados algunos resultados obtenidos haciendo uso de estas, continuaremos en el Capítulo 3 con el estudio de las subvariedades espaciales de codimensión dos compactas, totalmente umbilicales y atrapadas que factorizan a través del cono de luz. Con este objetivo, empezaremos el capítulo con una sección dedicada a las subvariedades totalmente umbilicales. En primer lugar, expondremos un importante ejemplo de estas subvariedades y adaptaremos las fórmulas obtenidas en el capítulo anterior al caso tratado. Así, haciendo uso de esto, obtendremos que todas las subvariedades espaciales de codimensión dos totalmente umbilicales que factorizan a través del cono de luz son como el citado ejemplo (Teorema 3.1.2 y Corolario 3.1.3).

Visto el primer caso, continuaremos en una nueva sección con las subvariedades compactas. De forma análoga a lo anterior, el objetivo será caracterizar las subvariedades espaciales de codimensión dos compactas que factorizan a través del cono de luz. Con esta meta, comenzaremos exponiendo un resultado técnico que nos permite obtener, a partir de una métrica riemanniana completa dada, una métrica conforme a esta que será también completa. A continuación, haciendo uso de este resultado, obtendremos que si se dan ciertas condiciones para la primera componente de la inmersión, entonces la subvariedad es compacta y conformemente difeomorfa a la esfera (Proposición 3.2.2). Finalmente, veremos como ejemplo una inmersión de la esfera en el cono de luz que nos permitirá, junto con el resto de resultados de la sección, deducir como corolario que toda subvariedad de codimensión dos compacta que factoriza a través del cono de luz es, salvo un difeomorfismo conforme, como en el ejemplo visto (Corolario 3.2.4).

Así, una vez obtenida esta caracterización, completaremos la sección dedicada al caso compacto abordando algunos de los resultados expuestos en [11] haciendo uso de nuestra notación. Fundamentalmente, veremos distintos resultados que nos permitirán caracterizar estas subvariedades como esferas totalmente umbilicales en función de desigualdades para la integral de la norma del campo curvatura media, la curvatura escalar y el primer valor propio del operador laplaciano de la esfera (Teorema 3.2.5 y Teorema 3.2.8).

Finalizado el caso compacto, terminaremos el Capítulo 3 estudiando las subvariedades atrapadas. Este tipo de subvariedad fue introducida en el contexto de la Relatividad General por Penrose en [13] para abordar el estudio de las singularidades espacio-temporales derivadas del colapso gravitacional. Por otro lado, estas subvariedades aparecen por primera vez en un contexto puramente metemático en la prueba de Schoen y Yau del teorema de la masa positiva dada en [15].

Como veremos en los preliminares, estas subvariedades pueden ser de tres tipos: atrapadas, marginalmente atrapadas o débilmente atrapadas. Así, comenzaremos viendo un resultado de no existencia basado en el teorema de la divergencia para el caso débilmente atrapado (Proposición 3.3.1). A continuación, deduciremos de forma directa a partir de la definición de estas subvariedades y las fórmulas desarrolladas para el campo curvatura media, una caracterización para los tres tipos de subvariedades atrapadas en función de una ecuación diferencial. Para finalizar, trataremos de obtener otros resultados de no existencia relajando las hipótesis del primer resultado visto (Proposición 3.4.2 y Teorema 3.4.4). Para esto, incorporaremos las variedades estocásticamente completas y el principio débil del máximo para el operador laplaciano junto con algunos resultados analíticos necesarios.

Como último capítulo, estudiaremos el caso en el que la hipersuperficie nula a través de la cual factoriza nuestra subvariedad es un hiperplano nulo del espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski. Al igual que hicimos en el caso del cono de luz, comenzaremos obteniendo una referencia normal globalmente definida a partir de la cual estudiaremos la geometría de estas subvariedades. A continuación, de forma análoga al procedimiento del Capítulo 3, trataremos de obtener distintos resultados de clasificación y caracterización. De esta forma, calcularemos en primer lugar los operadores forma asociados a las direcciones que componen nuestra referencia normal para, a partir de estos, obtener una expresión del campo curvatura media.

Una vez hemos obtenido esto, continuaremos deduciendo de forma inmediata a partir de la expresión del campo curvatura media que todo subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de un hiperplano nulo es marginalmente atrapada (Proposición 4.2.2). Por otro lado, añadiendo la hipótesis de completitud, veremos que este tipo de subvariedades son isométricas al espacio euclídeo. Visto esto, construiremos como ejemplo una inmersión del espacio euclídeo n-dimensional en un hiperplano nulo para a continuación, deducir como corolario que toda subvariedad espacial de codimensión dos completa que factoriza a través de un hiperplano nulo es salvo isometría como en el ejemplo (Corolario 4.2.5). Para finalizar, haciendo uso de los resultado vistos, deduciremos una clasificación de este tipo de subvariedades en minimales o marginalmente atrapadas en función del comportamiento de su inmersión cuando presentan campo curvatura media paralelo (Corolario 4.2.6).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Antes de entrar en los resultados centrales del trabajo, introduciremos algunos conceptos previos fundamentales. En primer lugar, veremos algunos elementos básicos de geometría lorentziana como la causalidad de un vector y los operadores asociados a la métrica. A continuación, recordaremos los fundamentos de la geometría de subvariedades para, finalmente, introducir los tipos de subvariedades que trataremos a lo largo del trabajo.

Como fuentes bibliográficas para este capítulo hemos usado principalmente [5, 6, 10].

1.1. Geometría lorentziana

El objetivo de esta sección es introducir las variedades lorentzianas, las cuales serán nuestro espacio ambiente a lo largo del trabajo. Empezaremos recordando las definiciones y propiedades de algunos conceptos fundamentales.

Definición 1.1.1. Una variedad m-dimensional lorentziana es un par $(M, \langle , \rangle)$ donde M es una variedad de dimensión $m \in \mathbb{N}$ y $\langle , \rangle$ es una métrica de índice $\nu = 1$.

Recordamos que el índice de una forma bilineal simétrica en un espacio vectorial real V es el mayor entero tal que es dimensión de un subespacio $W \subset V$ donde $\langle , \rangle_{|W}$ es definida negativa.

Por simplicidad, denotaremos una variedad lorentziana $(M, \langle , \rangle)$ solamente con M. En este contexto, debido al índice de la métrica podemos distinguir tres tipos de vectores en M.

Definición 1.1.2. Sea $\mathbf{v} \in T_pM$ un vector tangente en el punto $p \in M$. Decimos que $\mathbf{v}$ es

(I) espacial si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$ o $\mathbf{v} = 0$,

(II) temporal si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle < 0$,

(III) nulo (o luminoso) si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ y $\mathbf{v} \neq 0$, y

(IV) causal si $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq 0$ y $\mathbf{v} \neq 0$.

Esto es conocido como el carácter causal del vector $\mathbf{v}$.

Estas definiciones se pueden extender a un campo de vectores tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$ considerando que X es espacial (respectivamente temporal, nulo o causal) si $X_p := X(p)$ es un vector espacial (respectivamente temporal, nulo o causal) en todo punto $p \in M$.

Una vez visto esto, teniendo en cuenta que el subconjunto de vectores temporales tiene dos componentes conexas cada una de las cuales se denomina cono temporal, podemos definir el concepto de orientación temporal.

Definición 1.1.3. Una orientación temporal en una variedad lorentziana es una elección diferenciable de uno de los conos temporales. El cono elegido se conoce como cono futuro mientras que el otro se conoce como cono pasado.

Por tanto, decimos que un vector temporal apunta al futuro si está en el cono temporal futuro y que apunta al pasado si está en el cono temporal pasado.

Pasamos ahora a introducir algunos operadores asociados a la métrica los cuales serán fundamentales durante el desarrollo de los capítulos centrales.

Definición 1.1.4. El gradiente de una función $f \in C^\infty(M)$, denotado como ∇f, es el campo de vectores métricamente equivalente a la diferencial $df \in \mathfrak{X}^*(M)$. Así, viene dado por la relación

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f) = df(X)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

En términos de un sistema de coordenadas se tiene que $df = \sum_i (\partial f / \partial x^i) dx^i$ y por tanto,

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j,$$

donde $[g^{i,j}]$ es la matriz inversa de la matriz de la métrica de M.

A continuación veremos una propiedad del operador gradiente que nos será de gran utilidad.

Proposición 1.1.5. Sean $f : M \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables. Entonces el gradiente de la composición $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ viene dado por

$$\nabla(g \circ f) = g'(f)\nabla f.$$

Otro operador asociado a la métrica que usaremos será el de la divergencia de un campo.

Definición 1.1.6. La divergencia de un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotada como $\mathrm{div}(X)$, se define como

$$\mathrm{div}(X) = \mathrm{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X),$$

donde tr denota la traza con respecto a la métrica de M.

Además, se cumple que dada una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}$ y un campo de vectores $X \in \mathfrak{X}(M)$ se sigue que

$$\mathrm{div}(fX) = f\mathrm{div}(X) + \langle \nabla f, X \rangle.$$

Continuaremos con la definición del operador hessiano asociado a una función diferenciable.

Definición 1.1.7. El hessiano de una función $f \in C^\infty(M)$, denotado como $\nabla^2 f$, se define como la segunda derivada covariante de la función, es decir,

$$\nabla^2 f = \nabla(\nabla f).$$

Por otro lado, para cualquier función $f \in C^\infty(M)$ denotamos por Hess_f al tensor simétrico del tipo (0,2) en M métricamente equivalente al operador hessiano,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hess}_f : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\to \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \langle \nabla_X(\nabla f), Y \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, introducimos el operador laplaciano.

Definición 1.1.8. El operador laplaciano de una función $f \in C^\infty(M)$, denotado por Δf, se define como la divergencia de su gradiente, es decir,

$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Proposición 1.1.9. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : M \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables, entonces el operador laplaciano de la composición $g \circ f : M \to \mathbb{R}$ viene dado por

$$\Delta(g \circ f) = g'(f)\Delta f + g''(f)\|\nabla f\|^2.$$

1.2. Subvariedades espaciales en una variedad lorentziana

Una vez introducido el espacio ambiente en el que trabajaremos, pasamos a ver los objetos cuyo estudio ocupará buena parte del trabajo. Estos objetos serán las subvariedades espaciales y más concretamente, las subvariedades espaciales de codimensión dos en un espacio-tiempo lorentziano.

Definición 1.2.1. Una subvariedad n-dimensional Σ de una variedad lorentziana M de dimensión m ($m \geq n$) es una variedad n-dimensional para la cual existe una inmersión $\psi : \Sigma \to M$. El entero $m - n$ se denomina codimensión de la subvariedad.

La inmersión $\psi : \Sigma \to M$ nos da una métrica en Σ. Esta métrica se denomina métrica inducida y se define como

$$\langle X, Y\rangle = \psi^*(\langle X, Y\rangle_M) = \langle d\psi(X), d\psi(Y)\rangle_M$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\langle , \rangle_M$ denota la métrica de M. Dependiendo de la métrica inducida podemos distinguir tres tipos de subvariedades.

Definición 1.2.2. Sea Σ una subvariedad inmersa en una variedad lorentziana M. Decimos que:

(I) Σ es espacial si la métrica inducida tiene índice $\nu = 0$, es decir, si la métrica es riemanniana en Σ.

(II) Σ es temporal si la métrica inducida tiene índice $\nu = 1$, es decir, si la métrica es lorentziana.

(III) Σ es nula si la métrica inducida es degenerada en Σ.

Como sabemos, las subvariedades estudiadas a lo largo del trabajo serán espaciales lo cual significa que desde un punto de vista intrínseco no serán más que variedades riemannianas. De esta forma, podremos usar toda la amplia variedad de herramientas de la geometría riemanniana.

Así, sea $\psi : \Sigma \to M$ una subvariedad espacial. Denotaremos por $\overline{\nabla}$ y ∇ a las conexiones de Levi-Civita en M y Σ respectivamente y por $\nabla^\perp$ a la conexión normal de Σ en M. Entonces, la fórmulas de Gauss y Weingarten de ψ viene dadas por

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \mathrm{II}(X, Y) \tag{1.1}$$

y

$$\overline{\nabla}_X \zeta = A_\zeta X + \nabla^\perp_X \zeta, \tag{1.2}$$

para cualesquiera campos de vectores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y cualquier campo de vectores normal $\zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$.

Como podemos ver en la fórmula (1.1),

$$\mathrm{II} : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$$

denota la segunda fórmula fundamental de la subvariedad siguiendo la convención usada en relatividad. Además, para todo campo normal $\zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$, A_{ζ} denota el operador forma (o endomorfismo de Weingarten) asociado a ζ, esto es, el operador simétrico $A_{\zeta} : \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$ dado por

$$\langle A_{\zeta}X, Y\rangle = \langle \mathrm{II}(X, Y), \zeta\rangle.$$

Finalmente y como es usual, definimos el campo curvatura media de la subvariedad como

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\mathrm{II}) \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma),$$

donde tr denota la traza con respecto a la métrica inducida en Σ.

1.3. Algunos tipos de subvariedades

Como hemos dicho, el trabajo está enfocado a las subvariedades espaciales de codimensión dos. Así, hemos creído conveniente introducir algunos de los tipos de variedades y subvariedades que tienen gran interés y que aparecerán en algunos resultados que mostraremos posteriormente.

De esta forma, la sección constará de una breve introducción a las subvariedades atrapas, las variedades estocásticamente completas, las variedades conformemente llanas y para finalizar, expondremos otros tipos de inmersiones que usaremos en el trabajo.

1.3.1. Subvariedades atrapadas

Siguiendo las terminología usada en relatividad general, y dependiendo del carácter causal del campo curvatura media, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Sea $\psi : \Sigma^n \to M^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos. Decimos que Σ es

(I) atrapada futura (pasada) si $\mathbf{H}$ es temporal y apunta al futuro (pasado),

(II) marginalmente atrapada futura (pasada) si $\mathbf{H}$ es nulo y apunta al futuro (pasado), o

(III) débilmente atrapada futura (pasada) si $\mathbf{H}$ es causal y apunta al futuro (pasado).

La condición extrema $\mathbf{H} = 0$ corresponde a una subvariedad minimal.

Un caso particular ocurre cuando, trabajando con una subvariedad espacial de codimensión dos Σ, somos capaces de encontrar una referencia normal y global de campos de vectores nulos $\{\xi, \eta\}$, es decir, dos campos de vectores normales ξ y η los cuales están globalmente definidos y son nulos. Además, en este contexto podemos tomar ambos campos apuntando al futuro y cumpliendo que $\langle \xi, \eta \rangle = -1$.

De esta forma, podemos definir las expansiones nulas como sigue.

Definición 1.3.2. Las expansiones nulas asociadas a ξ y η son, respectivamente, las funciones

$$\theta_\xi = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\xi) \quad \text{y} \quad \theta_\eta = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta)$$

donde tr denota la traza con respecto a la métrica inducida en Σ.

Como $A_\zeta X = (\overline{\nabla}_X \zeta)^\top$ para todo campo normal $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$, se sigue que

$$\theta_\xi = \frac{1}{n}\mathrm{div}_\Sigma \xi \quad \text{y} \quad \theta_\eta = \frac{1}{n}\mathrm{div}_\Sigma \eta.$$

Esto significa, en términos físicos, que θ_ξ (resp., θ_η) mide la divergencia de los rayos de luz que emanan desde Σ en la dirección ξ (resp., η). En términos de estas expansiones nulas el campo curvatura media se escribe como

$$\mathbf{H} = -\theta_\eta \xi - \theta_\xi \eta$$

ya que

$$\mathbf{H} = -\langle \mathbf{H}, \eta \rangle \xi - \langle \mathbf{H}, \xi \rangle \eta,$$

con

$$\langle \mathbf{H}, \eta \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{II}(e_i, e_i), \eta \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle A_\eta e_i, e_i \rangle = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta),$$

y análogamente

$$\langle \mathbf{H}, \xi \rangle = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\xi),$$

donde $\{e_1, ..., e_n\}$ es una base ortonormal local de campos.

Así, la norma del campo curvatura media viene dada por la expresión

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = -2\theta_\xi \theta_\eta$$

y usando la Definición 1.3.1 se pueden distinguir los siguientes casos:

(I) Σ es atrapada si, y solo si, θ_ξ y θ_η son del mismo signo.

(II) Σ es marginalmente atrapada si, y solo si, $\theta_\xi = 0$ y $\theta_\eta \neq 0$ o $\theta_\xi \neq 0$ y $\theta_\eta = 0$.

(III) Σ es débilmente atrapada si, y solo si, $\theta_\xi \leq 0$ y $\theta_\eta \leq 0$ con $\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2 > 0$, o $\theta_\xi \geq 0$ y $\theta_\eta \geq 0$ con $\theta_\xi^2 + \theta_\eta^2 > 0$.

1.3.2. Variedades estocásticamente completas

En esta parte de la sección introduciremos las variedades estocásticamente completas y el principio débil del máximo para el operador laplaciano. Estos conceptos están ligados por el hecho de que en este tipo de variedades se cumple el principio débil del máximo, lo cual será esencial para algunos de los resultados que veremos en la Sección 3.4. Un mayor desarrollo sobre el tema que aquí se expone puede consultarse en [1, Section 2.3]. Dicho esto, empezaremos con la definición de variedad estocásticamente completa.

Definición 1.3.3. Una variedad riemanniana Σ es estocásticamente completa si para cualquier $(x,t) \in \Sigma \times (0,+\infty)$ se cumple que

$$\int_\Sigma p(x,y,t)\mathrm{d}y = 1,$$

donde $p(x,y,t)$ es el núcleo positivo del calor del operador laplaciano Δ, esto es, la solución fundamental positiva de la ecuación del calor

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta p \quad \text{en} \quad \Sigma,$$

en las variables (x,t) con datos iniciales

$$p(\cdot,y,t) \to \delta_y \quad \text{para} \quad t \to 0^+,$$

donde δ_y es la delta de Dirac centrada en y.

La razón de la terminología de *estocásticamente completa* está basada en el hecho de que para cualquier subconjunto abierto $\Omega \subset \Sigma$, la integral $\int_\Omega p(x,y,t)dy$ representa la probabilidad de que un camino aleatorio que sale de un punto $x \in \Sigma$ permanezca en Ω en el instante de tiempo t. Por lo tanto, $\int_\Sigma p(x,y,t)dy < 1$ significa que hay una probabilidad positiva de que un camino aleatorio se vaya al infinito en un tiempo finito t. Esto se interpreta como que en una variedad estocásticamente completa el movimiento browniano es estocásticamente completo, y de ahí la terminología usada. Esto resulta ser equivalente, entre otras condiciones, al hecho de que para todo $\lambda > 0$, la única solución no negativa y acotada de $\Delta u \geq \lambda u$ globalmente definida en todo Σ es la constante $u = 0$. En particular, toda variedad riemanniana parabólica (y no necesariamente completa) es estocásticamente completa.

No obstante, como veremos a continuación, a nosotros nos interesa una interpretación más analítica del concepto de completitud estocástica basada en la validez del principio del máximo. En este sentido, diremos que una variedad riemanniana Σ cumple el principio débil del máximo si para cualquier función diferenciable $u \in C^2(\Sigma)$ con $u^* = \sup_\Sigma u < +\infty$ existe una sucesión de puntos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ tal que

$$(i)\ u(p_k) > u^* - \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (ii)\ \Delta u(p_k) < \frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. De forma equivalente, el principio débil del máximo se cumple en Σ si para cualquier función $u \in C^2(\Sigma)$ con $u_* = \inf_\Sigma u > -\infty$ existe un sucesión de puntos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en Σ tal que

$$(i)\ u(p_k) < u_* + \frac{1}{k}, \quad \text{y} \quad (ii)\ \Delta u(p_k) > -\frac{1}{k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para finalizar esta parte de la sección, enunciaremos el teorema de equivalencia entre variedades estocásticamente completas y el principio débil de máximo probado por Pigola, Rigoli y Setti en [14].

Teorema 1.3.4 Sea $(\Sigma, \langle , \rangle)$ una variedad riemanniana, entonces Σ es estocásticamente completa si, y solo si, se cumple el principio débil del máximo en Σ.

1.3.3. Variedades conformemente llanas

A continuación, introduciremos de forma breve las variedades conformemente llanas junto con algún ejemplo sencillo.

Definición 1.3.5. Sea M una variedad riemanniana n-dimensional. Decimos que M es conformemente llana si para cada punto de la variedad existe un entorno de dicho punto conformemente difeomorfo a un abierto del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

En estos términos, dada una subvariedad espacial Σ^n de una variedad M^m ($m \geq n$). Diremos que Σ es una subvariedad conformemente llana si existe una inmersión $\psi : \Sigma \to M$ tal que Σ es conformemente llana con la métrica inducida.

Ejemplo 1.3.6.

(I) Toda superficie es conformemente llana ya que estas siempre admiten unas coordenadas locales isotermas (véase [4]).

(II) La esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es conformemente llana ya que, por ejemplo, la proyección estereográfica es un difeomorfismo conforme.

1.3.4. Algunos tipos de inmersiones

Para finalizar el capítulo, recordaremos la definición de algunos tipos de inmersiones que usaremos posteriormente.

Definición 1.3.7. Una subvariedad n-dimensional $\psi : \Sigma \to M$ es totalmente umbilical si es umbilical con respecto a todas las posibles direcciones normales $\zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$. Es decir, si para todo $\zeta \in \mathfrak{X}^{\perp}(\Sigma)$ existe una función diferenciable $\lambda_\zeta \in C^\infty(\Sigma)$ tal que

$$A_\zeta = \lambda_\zeta I,$$

donde A_ζ es el operador forma asociado a ζ.

Por otro lado, atendiendo a la métrica inducida podemos distinguir los siguientes tipos de inmersiones.

Definición 1.3.8. Sea $\psi : \Sigma \to M$ una inmersión entre las variedades $(\Sigma, \langle , \rangle_\Sigma)$ y $(M, \langle , \rangle_M)$. Decimos que Σ es una subvariedad conforme (y ψ es una inmersión conforme) si la métrica inducida satisface

$$\psi^*(\langle , \rangle_M) = \lambda^2 \langle , \rangle_\Sigma$$

para una función $\lambda \in C^\infty(\Sigma)$, $\lambda > 0$. Esta función positiva λ se denomina factor conforme.

Si $\psi : \Sigma \to M$ es una inmersión conforme con factor conforme λ, se tienen las siguientes relaciones para los operadores definidos en la Sección 1.1 con respecto a $\langle , \rangle_\Sigma$ y $\widetilde{\langle , \rangle} = \lambda^2 \langle , \rangle_\Sigma$.

$$\lambda^2 \widetilde{\nabla} f = \nabla f, \tag{1.3}$$

$$\widetilde{\nabla}^2 f = \nabla^2 f - \frac{1}{\lambda}(d\lambda \otimes df + df \otimes d\lambda) + \frac{1}{\lambda}\langle \nabla\lambda, \nabla f\rangle \langle , \rangle, \tag{1.4}$$

$$\widetilde{\mathrm{div}}(X) = \mathrm{div}(X) + n\frac{d\lambda}{\lambda} \tag{1.5}$$

y

$$\lambda \widetilde{\nabla} f = \nabla f + \frac{n-2}{\lambda}\langle \nabla\lambda, \nabla f\rangle, \tag{1.6}$$

donde f es una función $f \in C^\infty(\Sigma)$ y $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. En la definición previa, si λ es una constante c diremos que Σ es homotética a M con coeficiente c^2. En el caso en el que $c = 1$ tenemos el siguiente caso.

Definición 1.3.9. Sea $\psi : \Sigma \to M$ una inmersión entre dos variedades $(\Sigma, \langle , \rangle_\Sigma)$ y $(M, \langle , \rangle_M)$ con $\dim(\Sigma) = \dim(M)$. Entonces decimos que ψ es una isometría si la métrica inducida coincide con la métrica original de Σ, es decir, si

$$\psi^*(\langle , \rangle_M) = \langle , \rangle_\Sigma.$$

En este caso diremos que Σ y M son variedades isométricas.

Capítulo 2

Subvariedades espaciales de codimensión dos a través de una hipersuperficie nula

En este capítulo estudiaremos el caso en el que la subvariedad espacial de codimensión dos Σ está contenida en una hipersuperficie nula S de $\mathbb{L}^{n+2}$, es decir, cuando la inmersión $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+2}$ satisface que $\psi(\Sigma) \subset S \subset \mathbb{L}^{n+2}$. En esta situación diremos que Σ factoriza a través de la hipersuperficie nula S.

Así, nuestro espacio ambiente será el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^{n+2}$. Este está definido como el espacio vectorial real $\mathbb{R}^{n+2}$ junto con la métrica lorentziana

$$\langle , \rangle = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + ... + (dx_{n+2})^2,$$

donde $(x_1, x_2, ..., x_{n+2})$ son las coordenadas canónicas de $\mathbb{R}^{n+2}$. Además, consideraremos en este espacio la orientación temporal inducida por el campo de vectores temporal globalmente definido $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$.

El objetivo del capítulo será, en primer lugar, obtener para este tipo de subvariedades una referencia normal de campos de vectores nulos que esté globalmente definida. Posteriormente, estudiaremos la geometría de la subvariedad en términos de esta referencia normal obteniendo así expresiones para la segunda forma fundamental, el campo curvatura media y los tensores curvatura de Ricci y curvatura escalar. Para finalizar, aplicaremos lo obtenido en las dos primeras secciones del capítulo al caso en el que la hipersuperficie nula S es el cono de luz.

2.1. Existencia de una referencia normal globalmente definida

En primer lugar, construiremos la referencia normal buscada dando la expresión explícita.

Como hemos establecido, la orientación temporal de $\mathbb{L}^{n+2}$ viene dada por el vector temporal $\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0)$. En este caso, como veremos en la Sección 2.2, si la subvariedad está contenida en una hipersuperficie nula siempre existe un vector nulo, normal a la subvariedad y que apunta al futuro; este vector, que denotaremos por ξ, nos permitirá construir la referencia buscada. Así, considerando la siguiente descomposición ortogonal:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^\top + \mathbf{e}_1^\perp,$$

donde $\mathbf{e}_1^\top$ es tangente a Σ y $\mathbf{e}_1^\perp$ es normal a Σ se sigue que

$$\langle \mathbf{e}_1^\perp, \mathbf{e}_1^\perp \rangle = -1 - \|\mathbf{e}_1^\top\|^2 < 0$$

y tomando el vector ν como

$$\nu = \frac{\mathbf{e}_1^\perp}{\|\mathbf{e}_1^\perp\|} = \frac{\mathbf{e}_1^\perp}{\sqrt{1 + \|\mathbf{e}_1^\top\|^2}},$$

tenemos un campo de vectores a lo largo de la subvariedad globalmente definido, unitario y temporal que además es normal a Σ y apunta al futuro. En particular,

$$\langle \xi, \nu \rangle = \frac{\langle \xi, \mathbf{e}_1 \rangle}{\sqrt{1 + \|\mathbf{e}_1^\top\|^2}} < 0.$$

Ahora, a partir de ν y ξ podemos construir el siguiente campo de vectores que denotaremos por η:

$$\eta = -\frac{1}{2\langle \xi, \nu \rangle^2}\xi - \frac{1}{\langle \xi, \nu \rangle}\nu,$$

el cual, por como está construido, es un campo de vectores globalmente definido y nulo que es normal a Σ y apunta al futuro cumpliendo que $\langle \xi, \eta \rangle = -1$.

Una vez obenida la referencia normal $\{\xi, \eta\}$, haremos, a partir de esta, un estudio de la geometría de las subvariedades espaciales de codimensión dos que factorizan a través de una hipersuperficie nula.

En primer lugar, vamos a obtener una expresión para la segunda forma fundamental. Así, sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ campos tangentes cualesquiera tenemos que

$$\mathrm{II}(X, Y) = \alpha(X, Y)\xi + \beta(X, Y)\eta$$

con α, β tensores de tipo $(0,2)$. De esta forma, multiplicando por ξ y η respectivamente se sigue que

$$\langle \mathrm{II}(X,Y), \xi\rangle = \beta(X,Y)\langle \eta, \xi\rangle = -\beta(X,Y)$$

y

$$\langle \mathrm{II}(X,Y), \eta\rangle = \alpha(X,Y)\langle \xi, \eta\rangle = -\alpha(X,Y).$$

Usando ahora que $\langle \mathrm{II}(X,Y), \eta\rangle = \langle A_\eta X, Y\rangle$, obtenemos que

$$\beta(X,Y) = -\langle A_\xi X, Y\rangle$$

y

$$\alpha(X,Y) = -\langle A_\eta X, Y\rangle.$$

Por tanto, hemos obtenido que la segunda forma fundamental tiene la siguiente expresión:

$$\mathrm{II}\,(X,Y) = -\langle A_\eta X, Y\rangle\xi - \langle A_\xi X, Y\rangle\eta. \tag{2.1}$$

Ahora, dada una base local ortonormal de campos $\{e_1, ..., e_n\}$, tomando trazas podemos obtener para el campo curvatura media que

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\mathrm{II}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{II}(e_i, e_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\langle A_\eta e_i, e_i\rangle\xi - \langle A_\xi e_i, e_i\rangle\eta,$$

luego

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{n}(\mathrm{tr}(A_\eta)\xi + \mathrm{tr}(A_\xi)\eta)$$

y

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle = -\frac{2}{n^2}\mathrm{tr}(A_\eta)\mathrm{tr}(A_\xi).$$

Pasamos ahora a obtener expresiones para el tensor curvatura de Riemann, el tensor curvatura de Ricci y la curvatura escalar de Σ. Con este objetivo, si consideramos la ecuación de Gauss, teniendo en cuenta que la curvatura de Riemann de nuestro espacio ambiente es $\overline{R} = 0$ ya que este es $\mathbb{L}^{n+2}$, queda que

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)V, W\rangle &= \langle \mathrm{II}(X,V), \mathrm{II}(Y,W)\rangle - \langle \mathrm{II}(X,W), \mathrm{II}(Y,V)\rangle \\ &= \langle A_{\mathrm{II}(X,V)}Y, W\rangle - \langle A_{\mathrm{II}(Y,V)}X, W\rangle,\end{aligned}$$

donde $X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Por tanto,

$$R(X,Y)V = A_{\mathrm{II}(X,V)}Y - A_{\mathrm{II}(Y,V)}X,$$

y tomando trazas en esta expresión obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}(R) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,e_i)Y, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle A_{\mathrm{II}(X,Y)}e_i - A_{\mathrm{II}(e_i,Y)}X, e_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{II}((X,Y), \mathrm{II}(e_i,e_i)\rangle - \langle \mathrm{II}((Y,e_i), \mathrm{II}(X,e_i)\rangle .
\end{aligned}$$

Ahora, usando la expresión de la segunda forma fundamental que hemos obtenido en la fórmula (2.1), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \langle \mathrm{II}(X,Y), n\mathbf{H}\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{II}(Y,e_i), \mathrm{II}(X,e_i)\rangle \\
&= \langle \mathrm{II}(X,Y), n\mathbf{H}\rangle + 2\langle A_\eta X, A_\xi Y\rangle \\
&= \langle \mathrm{II}(X,Y), n\mathbf{H}\rangle + 2\langle (A_\xi \circ A_\eta)X, Y\rangle ,
\end{aligned}$$

donde hemos usado que el operador forma es autoadjunto.

Finalmente, tomando trazas en la expresión obtenida para el tensor curvatura de Ricci, queda

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal} = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i,e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{II}(e_i,e_i), n\mathbf{H}\rangle + 2\langle (A_\xi \circ A_\eta)e_i, e_i\rangle \\
&= n^2\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle + 2\mathrm{tr}(A_\xi \circ A_\eta).
\end{aligned}$$

Recapitulando todo lo obtenido tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. Sea $\psi : \Sigma^n \to S \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de una hipersuperficie nula S y $\{\xi, \eta\}$ una referencia normal y nula tal que $\langle \xi, \eta\rangle = -1$. Entonces, con la notación establecida, tenemos:

(I) la segunda forma fundamental

$$\mathrm{II}\,(X,Y) = -\langle A_\eta X, Y\rangle \xi - \langle A_\xi X, Y\rangle \eta, \tag{2.2}$$

(II) el campo curvatura media

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{n}(\mathrm{tr}(A_\eta)\xi + \mathrm{tr}(A_\xi)\eta), \tag{2.3}$$

(III) el tensor curvatura de Riemann

$$R(X,Y)V = A_{\text{II}(X,V)}Y - A_{\text{II}(Y,V)}X, \tag{2.4}$$

(IV) el tensor curvatura de Ricci

$$\text{Ric}(X,Y) = \langle \text{II}(X,Y), n\mathbf{H}\rangle + 2\langle (A_\xi \circ A_\eta)X, Y\rangle, \tag{2.5}$$

(V) y la curvatura escalar

$$\text{Scal} = n^2\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle + 2\text{tr}(A_\xi \circ A_\eta). \tag{2.6}$$

2.2. Obteniendo una referencia normal globalmente definida

Como adelantamos al inicio del capítulo, a lo largo de esta sección obtendremos una referencia normal globalmente definida para el caso en el que la inmersión $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+2}$ satisface que $\psi(\Sigma) \subset \Lambda$, donde denotamos por Λ al cono de luz de $\mathbb{L}^{n+2}$. Esta referencia normal, junto con los operadores forma asociados, serán algunas de las herramientas que nos permitirán realizar un estudio de este tipo de subvariedades.

Empezamos con la definición del cono de luz.

Definición 2.2.1. El cono de luz Λ de $\mathbb{L}^{n+2}$ (centrado en el origen) es el subconjunto formado por todos los puntos de $\mathbb{L}^{n+2}$ no nulos tales que su norma es cero, es decir,

$$\Lambda = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, x\rangle = 0, x \neq 0\}.$$

En otras palabras, el cono de luz está formado por todos los vectores nulos de $\mathbb{L}^{n+2}$.

El cono de luz corresponde a los puntos que pueden ser alcanzados desde el origen a través de una geodésica luminosa. Este tiene dos componentes conexas, una que llamaremos futura y otra que llamaremos pasada. Como las subvariedades consideradas serán siempre conexas, podemos suponer sin pérdida de generalidad que estarán contenidas en la componente conexa futura. La definición de dichas componentes es la que sigue.

Definición 2.2.2. Sea $\Lambda \subset \mathbb{L}^{n+2}$ el cono de luz. Definimos su componente conexa futura Λ^+ como el conjunto de vectores luminosos que apuntan al futuro, es decir,

$$\Lambda^+ = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, x\rangle = 0, x_1 > 0\}.$$

Respectivamente, la componente conexa pasada Λ^- se define como el conjunto

$$\Lambda^- = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, x\rangle = 0, x_1 < 0\}.$$

A continuación, de igual forma que hicimos en el sección anterior, vamos a obtener una referencia normal, nula y globalmente definida que nos permita estudiar la geometría de la subvariedad en términos de las fórmulas obtenidas en la Proposición 2.1.1.

Proposición 2.2.3. Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Entonces existe una referencia normal de campos de vectores nulos $\{\xi, \eta\}$ globalmente definida y que apunta al futuro con

$$\xi = \psi \quad \text{y} \quad \eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2}{2u^2}\xi + \frac{1}{u}\mathbf{e}_1^\perp \tag{2.7}$$

cumpliendo que $\langle \xi, \eta \rangle = -1$.

Demostración. Dada $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$, se tiene que

$$\langle \psi, \psi \rangle = 0 \quad y \quad \langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle < 0,$$

luego tomaremos como primer campo de vectores de la referencia buscada

$$\xi = \psi.$$

A partir de ahora, análogamente a lo desarrollado en la Sección 2.1, el objetivo será construir el segundo campo de la referencia a partir de ξ. Para ello, definimos la función $u : \Sigma \longrightarrow (0, +\infty)$ dada por

$$u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle > 0.$$

De esto se sigue que

$$\nabla u = -\mathbf{e}_1^\top, \tag{2.8}$$

ya que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}\langle X, \nabla u \rangle = X(u) = X(-\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle) &= -\langle \overline{\nabla}_X \psi, \mathbf{e}_1 \rangle - \langle \psi, \overline{\nabla}_X \mathbf{e}_1 \rangle \\ &= -\langle \overline{\nabla}_X \psi, \mathbf{e}_1 \rangle = -\langle X, \mathbf{e}_1 \rangle = -\langle X, \mathbf{e}_1^\top \rangle,\end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^\top + \mathbf{e}_1^\perp.$$

Por tanto, tenemos que

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1^\perp - \nabla u$$

y de aquí obtenemos que

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}(\mathbf{e}_1 + \nabla u)$$

y

$$\langle \xi, \nu \rangle = -\frac{u}{\sqrt{1+\|\nabla u\|^2}} < 0.$$

Así,

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{2\langle \xi, \nu \rangle^2}\xi - \frac{1}{\langle \xi, \nu \rangle}\nu \\ &= -\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}\xi + \frac{1}{u}\mathbf{e}_1^{\perp}. \end{aligned}$$

□

Una vez obtenida nuestra referencia normal $\{\xi, \eta\}$ pasamos a calcular los operadores forma asociados.

Proposición 2.2.4. Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Entonces los operadores forma asociados a la referencia normal (2.7) vienen dados por

$$A_\xi = I \quad \text{y} \quad A_\eta = -\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}I + \frac{1}{u}\nabla^2 u. \tag{2.9}$$

Además, se tiene que

$$\theta_\xi = 1 \quad y \quad \theta_\eta = \frac{2u\Delta u - n(1+\|\nabla u\|^2)}{2nu^2}, \tag{2.10}$$

donde denotamos por ∇^2 y Δ a los operadores hessiano y laplaciano de la subvariedad respectivamente.

Demostración. Usando la fórmula de Weingarten, se sigue que

$$\overline{\nabla}_X \xi = X = A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Por tanto, $A_\xi = I$ y $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$. Ahora, para obtener la expresión de A_η observamos que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se cumple que

$$\begin{aligned} \langle A_\eta X, Y \rangle = \langle \mathrm{II}(X,Y), \eta \rangle &= \langle \mathrm{II}(X,Y), -\tfrac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}\xi \rangle + \langle \mathrm{II}(X,Y), \tfrac{1}{u}\mathbf{e}_1^{\perp} \rangle \\ &= -\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}\langle \mathrm{II}(X,Y), \xi \rangle + \frac{1}{u}\langle \mathrm{II}(X,Y), \mathbf{e}_1^{\perp} \rangle \\ &= -\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}\langle A_\xi X, Y \rangle + \frac{1}{u}\langle A_{\mathbf{e}_1^{\perp}} X, Y \rangle, \end{aligned}$$

luego

$$A_\eta = -\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}A_\xi + \frac{1}{u}A_{\mathbf{e}_1^{\perp}}.$$

De esta forma, para calcular la expresión de A_η será suficiente con obtener la expresión de $A_{\mathbf{e}_1^\perp}$. Así, usando la fórmula (2.8) se tiene que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$0 = \overline{\nabla}_X \mathbf{e}_1 = \overline{\nabla}_X(\mathbf{e}_1^\perp - \nabla u) = \overline{\nabla}_X \mathbf{e}_1^\perp - \overline{\nabla}_X \nabla u. \tag{2.11}$$

Por otro lado, usando las fórmulas de Gauss y Weingarten se sigue que

$$\overline{\nabla}_X \mathbf{e}_1^\perp = A_{\mathbf{e}_1^\perp} X + \nabla_X^\perp \mathbf{e}_1^\perp$$

y

$$\overline{\nabla}_X \nabla u = \nabla_X \nabla u - \mathrm{II}(\nabla u, X).$$

Ahora, sustituyéndolo todo en la ecuación (2.11) tenemos que

$$0 = A_{\mathbf{e}_1^\perp} X - \nabla_X \nabla u + \nabla_X^\perp \mathbf{e}_1^\perp + \mathrm{II}(\nabla u, X),$$

y por tanto,

$$A_{\mathbf{e}_1^\perp} X = \nabla_X \nabla u$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Para finalizar, tomando trazas en las expresiones obtenidas para ambos operadores forma obtenemos que

$$\theta_\xi = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\xi) = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(I) = 1$$

y

$$\begin{aligned}\theta_\eta &= \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_\eta) = -\frac{1}{n}\frac{1 + \|\nabla u\|^2}{2u^2}\mathrm{tr}(I) + \frac{1}{n}\frac{1}{u}\mathrm{tr}(\nabla^2 u) \\ &= -\frac{1 + \|\nabla u\|^2}{2u^2} + \frac{1}{nu}\Delta u = \frac{2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2)}{2nu^2}.\end{aligned}$$

□

Nota 2.2.5. Teniendo en cuenta que $\langle \eta, \eta \rangle = 0$, se sigue que $\langle \nabla_X^\perp \eta, \eta \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \eta, \eta \rangle = 0$. Además, como $\langle \xi, \eta \rangle = -1$ obtenemos que $\langle \nabla_X^\perp \eta, \xi \rangle = 0$. Por tanto, $\nabla_X^\perp \eta = 0$ y como ya sabíamos, se cumple que $\nabla_X^\perp \xi = 0$. Esto implica que la referencia normal $\{\xi, \eta\}$ es paralela en el espacio normal y en particular la conexión normal es llana.

2.3. Fórmulas básicas para subvariedades que factorizan a través del cono de luz

El objetivo de esta sección será particularizar las fórmulas que obtuvimos en la Proposición 2.1.1 al caso en el que la hipersuperficie nula es el cono de luz. Como veremos en el desarrollo de capítulos posteriores, esto nos permitirá hacer un estudio en profundidad de la geometría de las subvariedades espaciales de codimensión dos a través de tal hipersuperficie.

Empezaremos calculando la expresión de la segunda forma fundamental. Así, usando la Proposición 2.1.1 y en particular (2.2) se sigue que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{II}(X,Y) &= -\langle A_\eta X, Y\rangle\xi - \langle A_\xi X, Y\rangle(-\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}\xi + \frac{1}{u}\mathbf{e}_1^\perp) \\
&= -\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}\langle X,Y\rangle\xi + \frac{1}{u}\langle\nabla_X\nabla u, Y\rangle\xi - \langle X,Y\rangle(-\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2}\xi + \frac{1}{u}\mathbf{e}_1^\perp) \\
&= \frac{1}{u}(\langle\nabla_X\nabla u, Y\rangle\xi - \langle X,Y\rangle\mathbf{e}_1^\perp).
\end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de (2.3) y usando la Proposición 2.2.4 se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= -\frac{1}{n}(\mathrm{tr}(A_\eta)\xi + \mathrm{tr}(A_\xi)\eta) = -\theta_\eta\xi - \theta_\xi\eta \\
&= -\frac{2u\Delta u - n(1+\|\nabla u\|^2)}{2nu^2}\xi - \eta
\end{aligned}$$

y

$$\langle\mathbf{H},\mathbf{H}\rangle = -\frac{2u\Delta u - n(1+\|\nabla u\|^2)}{nu^2}.$$

Pasamos ahora a calcular las expresiones del tensor curvatura de Ricci y de la curvatura escalar. Para ello, haciendo uso de la Proposición 2.1.1 nuevamente, obtenemos que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X,Y) &= \langle\mathrm{II}(X,Y), n\mathbf{H}\rangle + 2\langle(A_\xi\circ A_\eta)X, Y\rangle \\
&= \langle\mathrm{II}(X,Y), -\mathrm{tr}(A_\eta)\xi\rangle + \langle\mathrm{II}(X,Y), -\mathrm{tr}(A_\xi)\eta\rangle + 2\langle A_\eta X, Y\rangle \\
&= -\mathrm{tr}(A_\eta)\langle A_\xi X, Y\rangle - n\langle A_\eta X, Y\rangle + 2\langle A_\eta X, Y\rangle \\
&= \frac{2u\Delta u - n(1+\|\nabla u\|^2)}{2u^2}\langle X,Y\rangle - (n-2)(-\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2})\langle X,Y\rangle \\
&\quad - \frac{n-2}{u}\mathrm{Hess}_u(X,Y)
\end{aligned}$$

y simplificando,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = (n-1)\langle\mathbf{H},\mathbf{H}\rangle\langle X,Y\rangle + \frac{(n-2)}{nu}(\Delta u\langle X,Y\rangle - n\mathrm{Hess}_u(X,Y)).$$

Ahora, tomando trazas en esta expresión obtenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Scal} = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(e_i, e_i) \\
&= n(n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle + \frac{(n-2)}{u}\Delta u - \frac{(n-2)}{u}\mathrm{tr}(\mathrm{Hess}_u) \\
&= n(n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $\nabla^{\perp}\xi = \nabla^{\perp}\eta = 0$ y $A_\xi = I$, la ecuación de Codazzi se reduce a

$$(\nabla_X A_\eta)Y = (\nabla_Y A_\eta)X \tag{2.12}$$

para cualesquiera campos de vectores tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, y la ecuación de Ricci se cumple trivialmente ya que $R^{\perp} = 0$ y $[A_\xi, A_\eta] = 0$.

Reuniéndolo todo tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+ y $\{\xi, \eta\}$ la referencia normal y nula dada en la Proposición 2.2.3 tal que $\langle \xi, \eta\rangle = -1$. Entonces, se tiene lo siguiente.

1. El campo curvatura media de la subvariedad es

$$\mathbf{H} = -\frac{2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2)}{2nu^2}\xi - \eta, \tag{2.13}$$

2. la norma del campo curvatura media viene dada por

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle = -\frac{2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2)}{nu^2}, \tag{2.14}$$

3. el tensor curvatura de Ricci es

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X, Y) &= (n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle \langle X, Y\rangle \\
&\quad + \frac{(n-2)}{nu}(\Delta u\langle X, Y\rangle - n\mathrm{Hess}_u(X, Y)),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

4. y la curvatura escalar viene dada por

$$\mathrm{Scal} = n(n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle. \tag{2.16}$$

A continuación, veremos dos resultados que podemos obtener de forma casi inmediata a partir de la fórmula obtenida para la curvatura escalar en la proposición anterior. Estos resultados son fundamentalmente el Corolario 4.7 y la Proposición 4.8 de [11] en términos de nuestra notación.

Corolario 2.3.2. Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Entonces la curvatura escalar de Σ es constante si, y solo si, el campo curvatura media satisface que $\nabla^\perp \mathbf{H} = 0$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\mathrm{Scal} = c$ con c una constante. Como sabemos, $\mathrm{Scal} = n(n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle$ y por tanto, se sigue que

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle = \frac{c}{n(n-1)}$$

y atendiendo a la fórmula (2.13) tenemos que

$$\mathbf{H} = -\frac{\mathrm{Scal}}{2n(n-1)}\xi - \eta.$$

De esta forma, para cualquier $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\nabla^\perp_X \mathbf{H} = \nabla^\perp_X \left(-\frac{\mathrm{Scal}}{2n(n-1)}\xi - \eta\right)$$

$$= -\nabla^\perp_X \left(\frac{\mathrm{Scal}}{2n(n-1)}\xi\right) - \nabla^\perp_X \eta = X\left(\frac{\mathrm{Scal}}{2n(n-1)}\right)\xi = 0,$$

donde hemos usado que $\nabla^\perp \eta = 0$ y que $\nabla^\perp \xi = 0$.

Por otro lado, si suponemos que $\nabla^\perp_X \mathbf{H} = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, siguiendo el mismo razonamiento anterior tenemos que

$$X(\mathrm{Scal}) = 0$$

para cualquier campo de vectores X y en consecuencia Scal es constante. $\square$

Proposición 2.3.3. Sea $\Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Si $\mathrm{Scal} \leq 0$, entonces la función $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1\rangle$ no puede alcanzar una máximo local.

Demostración. Vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que existe un punto $p_0 \in \Sigma$ donde u alcanza un máximo local. De (2.14) y (2.16) se sigue que

$$\mathrm{Scal} = n(n-1)\frac{n(1 + \|\nabla u\|^2) - 2u\Delta u}{nu^2}.$$

Ahora, como p_0 es un máximo local, tenemos que $\nabla u(p_0) = 0$ y $\Delta u(p_0) \leq 0$ y así

$$\mathrm{Scal}(p_0) = n(n-1)\left(\frac{n - 2u(p_0)\Delta u(p_0)}{nu^2(p_0)}\right) = \frac{n^2(n-1)}{nu^2(p_0)} - \frac{2n(n-1)u(p_0)\Delta u(p_0)}{nu^2(p_0)}.$$

De esta forma, como u es una función positiva y $\Delta u(p_0) \leq 0$, se sigue que

$$\mathrm{Scal}(p_0) \geq \frac{n(n-1)}{u^2(p_0)} > 0,$$

obteniendo así una contracción con que Scal ≤ 0 en Σ. □

De esta proposición podemos obtener como corolario inmediato el siguiente resultado.

Corolario 2.3.4. Si Σ es compacta, entonces su curvatura escalar no puede ser menor o igual que cero en todo Σ.

Para finalizar el capítulo, vamos a ver como aplicación de las fórmulas desarrolladas que toda subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+ es conformemente llana. Este resultado, además de ser interesante por sí mismo, será usado en otros resultados de la Sección 3.2.

A continuación tenemos la definición del tensor de Weyl.

Definición 2.3.5. Sea M^n una variedad riemanniana. Definimos el tensor de Weyl C de M como

$$\begin{aligned}\langle C(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(X,Y)Z,W\rangle &- L(X,W)\langle Y,Z\rangle - L(Y,Z)\langle X,W\rangle \\ &+ L(X,Z)\langle Y,W\rangle + L(Y,W)\langle X,Z\rangle\end{aligned}$$

para $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, donde L es el tensor definido como

$$L(X,Y) = \frac{1}{n-2}(\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{1}{2(n-1)}\mathrm{Scal}\langle X,Y\rangle).$$

Antes de ver el mencionado teorema, necesitamos un resultado de caracterización de las variedades conformemente llanas obtenido por Schouten en [16]. La demostración de este resultados escapa a los objetivos de este trabajo y por tanto, en lugar de exponerla aquí, el lector interesado puede consultarla en [5].

Teorema 2.3.6 Sea M^n, $n \geq 3$ una variedad riemanniana. Entonces M es conformemente llana si, y solo si, se satisfacen:

1. El tensor de Weyl es cero, es decir, $C \equiv 0$.
2. El tensor L es de Codazzi, esto es,

$$(\nabla_X L)(Y,Z) = (\nabla_Y L)(X,Z).$$

Ahora, podemos ver dicho teorema.

Teorema 2.3.7 Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Entonces Σ es conformemente llana.

Demostración. Como el objetivo es usar el Teorema 2.3.6, en primer lugar calcularemos las expresiones del tensor de Weyl y del tensor L haciendo uso de las fórmulas desarrolladas a lo largo de la sección. Así, tenemos que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
L(X,Y) &= \frac{1}{(n-2)}(\mathrm{Ric}(X,Y) - \frac{1}{2(n-1)}\mathrm{Scal}\langle X,Y\rangle) \\
&= \frac{1}{(n-2)}((n-1)\langle \mathbf{H},\mathbf{H}\rangle\langle X,Y\rangle \\
&\quad + \frac{(n-2)}{nu}(\Delta u\langle X,Y\rangle - n\mathrm{Hess}_u(X,Y)) - \frac{1}{2}n\langle \mathbf{H},\mathbf{H}\rangle\langle X,Y\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\langle \mathbf{H},\mathbf{H}\rangle\langle X,Y\rangle + \frac{\Delta u}{nu}\langle X,Y\rangle - \frac{1}{u}\mathrm{Hess}_u(X,Y) \\
&= \left(-\frac{2u\Delta u - n(1+\|\nabla u\|^2)}{2nu^2} + \frac{\Delta u}{nu}\right)\langle X,Y\rangle - \frac{1}{u}\mathrm{Hess}_u(X,Y) \\
&= \frac{1}{2u^2}(1+\|\nabla u\|^2)\langle X,Y\rangle - \frac{1}{u}\mathrm{Hess}_u(X,Y) = -\langle A_\eta X, Y\rangle,
\end{aligned}$$

donde hemos usado las fórmulas (2.15), (2.14) y (2.16) y la Proposición 2.2.4.

Por tanto, para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$L(X,Y) = -\langle A_\eta X, Y\rangle$$

y, debido a que A_η es de Codazzi (2.12), se sigue que L es de Codazzi.

Por otro lado, dados $X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\langle C(X,Y)V,W\rangle &= \langle A_{\mathrm{II}(Y,V)}X,W\rangle - \langle A_{\mathrm{II}(X,V)}Y,W\rangle + \langle A_\eta X,W\rangle\langle Y,V\rangle \\
&\quad + \langle A_\eta Y,V\rangle\langle X,W\rangle - \langle A_\eta X,V\rangle\langle Y,W\rangle - \langle A_\eta Y,W\rangle\langle X,V\rangle \\
&= -\langle A_\eta Y,V\rangle\langle A_\xi X,W\rangle - \langle A_\xi Y,V\rangle\langle A_\eta X,W\rangle \\
&\quad + \langle A_\eta X,V\rangle\langle A_\xi Y,W\rangle + \langle A_\xi X,V\rangle\langle A_\eta X,W\rangle \\
&\quad + \langle A_\eta X,W\rangle\langle Y,V\rangle + \langle A_\eta Y,Z\rangle\langle X,W\rangle \\
&\quad - \langle A_\eta X,V\rangle\langle Y,W\rangle - \langle A_\eta Y,W\rangle\langle X,Z\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Entonces $C \equiv 0$ y por el Teorema 2.3.6 se tiene que Σ es conformemente llana. $\square$

Nota 2.3.8. El recíproco del teorema anterior también es cierto, es decir, Σ es conformemente llana si, y solo si, factoriza a través de Λ^+ (o Λ^-). La demostración del recíproco puede consultarse en [5].

Capítulo 3

Subvariedades espaciales de codimensión dos en el cono de luz

Este capítulo está dedicado al estudio de los casos en los que la subvariedad espacial $\psi : \Sigma \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ es totalmente umbilical, compacta o atrapada. El objetivo fundamental es obtener distintos resultados de existencia y caracterización de dicho tipo de subvariedades haciendo uso de algunos resultados que hemos desarrollado a lo largo de la Secciones 2.2 y 2.3.

3.1. Subvariedades totalmente umbilicales

En esta sección estudiaremos, haciendo uso de las herramientas desarrolladas, una clasificación de las subvariedades espaciales de codimensión dos, totalmente umbilicales y que factorizan a través del cono de luz. Antes de continuar, recordamos que una subvariedad n-dimensional Σ se dice totalmente umbilical si es umbilical con respecto a todas las direcciones normales $\zeta \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$.

Así, sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+ y consideramos $\{\xi, \eta\}$ la referencia normal obtenida en la Proposición 2.2.3. Sabemos por la Proposición 2.2.4 que $A_\xi = I$, luego Σ será totalmente umbilical si y solo si es umbilical con respecto a la dirección η.

Antes de presentar los resultados veamos un ejemplo de subvariedad espacial de codimensión dos, totalmente umbilical que factoriza a través de Λ^+.

Ejemplo 3.1.1. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{L}^{n+2}$ tal que $\mathbf{a} \neq 0$ y $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = c$ con $c \in \{-1, 0, 1\}$. Definimos

$$\Sigma(\mathbf{a}, \tau) = \{p \in \Lambda^+ : \langle p, \mathbf{a} \rangle = \tau\}$$

para un cierto $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$. Si consideramos

$$F_{\mathbf{a}} : \mathbb{L}^{n+2} \to \mathbb{R}^2$$

$$x \to (\langle x, x\rangle, \langle x, \mathbf{a}\rangle)$$

se tiene que $\Sigma(\mathbf{a}, \tau) = F_{\mathbf{a}}^{-1}(0, \tau)$.

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} d(F_{\mathbf{a}})_x(\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (F_{\mathbf{a}}(\alpha(t))) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\langle \alpha(t), \alpha(t)\rangle, \langle \alpha(t), \mathbf{a}\rangle) \\ &= (2\langle \alpha'(0), \alpha(0)\rangle, \langle \alpha'(0), \mathbf{a}\rangle) = (2\langle \mathbf{v}, x\rangle, \langle \mathbf{v}, \mathbf{a}\rangle), \end{aligned}$$

donde $\alpha : I \to \Sigma$ es un curva tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = v$. De esta forma, $d(F_{\mathbf{a}})_x$ es sobreyectiva si, y solo si, x y $\mathbf{a}$ son linealmente independientes. Por tanto, $(0, \tau)$ será un valor regular de $F_{\mathbf{a}}$ si y solo si $\Sigma(\mathbf{a}, \tau) \neq \emptyset$ y x y $\mathbf{a}$ son linealmente independientes para todo $x \in \Sigma(\mathbf{a}, \tau)$.

Como $\tau \neq 0$, si x y $\mathbf{a}$ fuesen linealmente independientes tendríamos que $\tau = \langle \mathbf{a}, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = 0$. Luego, se sigue que x y $\mathbf{a}$ son linealmente independientes para todo $x \in \Sigma(\mathbf{a}, \tau)$. En consecuencia, tenemos que efectivamente $(0, \tau)$ es un valor regular y, a partir del criterio de los valores regulares, deducimos que $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ es una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+.

Ahora, definiendo

$$\xi(p) = p \qquad \text{y} \qquad \eta(p) = \frac{c}{2\tau^2}p - \frac{1}{\tau}\mathbf{a}$$

obtenemos una referencia normal de vectores nulos, globalmente definida y cumpliendo que $\langle \xi, \eta\rangle = -1$.

A continuación, vamos a obtener los operadores forma asociados a las direcciones normales $\{\xi, \eta\}$. Usando las fórmulas de Weingarten y Gauss se sigue que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$X = \overline{\nabla}_X \xi = A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \Rightarrow A_\xi X = X.$$

Por otro lado, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$A_\eta X = \frac{c}{2\tau^2}X + \frac{1}{\tau}A_{\mathbf{a}}X$$

y

$$0 = \overline{\nabla}_X \mathbf{a} = A_{\mathbf{a}}X + \nabla^\perp_X \mathbf{a},$$

luego $A_{\mathbf{a}} = 0$. De esto deducimos que $A_\eta = \frac{c}{2\tau^2} I$ obteniendo así que efectivamente $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ es totalmente umbilical y, en particular, si $\mathbf{a}$ es nulo entonces η es una dirección normal totalmente geodésica.

Para finalizar, deduciremos más información sobre este tipo de subvariedades usando las fórmulas obtenidas en la Proposición 2.1.1. En primer lugar, tenemos que

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{n}(\mathrm{tr}(A_\eta)\xi + \mathrm{tr}(A_\xi)\eta) = -\frac{c}{2\tau^2}\xi - \eta.$$

y

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 2\langle -\tfrac{c}{2\tau^2}\xi, -\eta \rangle = -\frac{c}{\tau^2}.$$

Esto implica que $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ es marginalmente atrapada si, y solo si, $\mathbf{a}$ es un vector nulo.

Por otro lado, usando la fórmulas (2.3) y (2.4) para la segunda forma fundamental y el tensor curvatura de Riemann, tenemos que para $X, Y, V \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}
R(X,Y)V &= A_{\mathrm{II}(X,V)}Y - A_{\mathrm{II}(Y,V)}X \\
&= -\langle A_\eta X, V \rangle A_\xi Y - \langle A_\xi X, V \rangle A_\eta Y \\
&\quad + \langle A_\eta Y, V \rangle A_\xi X + \langle A_\xi Y, V \rangle A_\eta X \\
&= -\langle \tfrac{c}{2\tau^2} X, V \rangle Y - \langle X, V \rangle \frac{c}{2\tau^2} Y \\
&\quad + \langle \tfrac{c}{2\tau^2} Y, V \rangle X + \langle Y, V \rangle \frac{c}{2\tau^2} X \\
&= -\frac{c}{\tau^2}\langle X, V \rangle Y + \frac{c}{\tau^2}\langle Y, V \rangle X \\
&= -\frac{c}{\tau^2}\left(\langle X, V \rangle Y - \langle Y, V \rangle X\right)
\end{aligned}$$

y en consecuencia $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ tiene curvatura seccional constante $-c/\tau^2$. Además,

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = (n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \langle X, Y \rangle = -(n-1)\frac{c}{\tau^2}$$

y

$$\mathrm{Scal} = n(n-1)\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = -n(n-1)\frac{c}{\tau^2},$$

de donde podemos deducir usando el teorema de clasificación de formas espaciales ([6, Theorem 4.1]) que

1. Si $c = 1$ ($\mathbf{a}$ es espacial), tenemos que $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ es isométrica al espacio hiperbólico $\mathbb{H}^n(\tau)$ con curvatura seccional constante $-1/\tau^2$.

2. Si $c = 0$ ($\mathbf{a}$ es nulo), tenemos que $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ es isométrica al espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

3. Si $c = -1$ ($\mathbf{a}$ es temporal), tenemos que $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ es isométrica a la esfera $\mathbb{S}^n(\tau)$ con curvatura seccional constante $1/\tau^2$.

La importancia de este ejemplo radica en que las subvariedades del tipo $\Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ son las únicas subvariedades espaciales de codimensión dos totalmente umbilicales que factorizan a través de Λ^+. De esta forma, tenemos los siguientes resultados de caracterización probados por Alías, Cánovas y Rigoli en [2].

Teorema 3.1.2 Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos, totalmente umbilical que factoriza a través de Λ^+. Entonces existe $\mathbf{a} \in \mathbb{L}^{n+2}$, $\mathbf{a} \neq 0$ y $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = c \in \{-1, 0, 1\}$, y $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$, tal que

$$\psi(\Sigma) \subset \Sigma(\mathbf{a}, \tau).$$

Corolario 3.1.3. Las únicas subvariedades espaciales de codimensión dos, completas, totalmente umbilicales y que factorizan a través de Λ^+ son las subvariedades de la forma

$$\Sigma(\mathbf{a}, \tau) = \{p \in \Lambda^+ : \langle p, \mathbf{a} \rangle = \tau\}$$

con $\mathbf{a} \in \mathbb{L}^{n+2}$, $\mathbf{a} \neq 0$ y $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = c \in \{-1, 0, 1\}$, y $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$.

Demostración. Sea $\psi : \Sigma^n \to \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos, totalmente umbilical que factoriza a través de Λ^+ y consideramos $\{\xi, \eta\}$ la referencia normal obtenida en la Proposición 2.2.3. Sabemos que Σ es totalmente umbilical si y solo si η es una dirección umbilical, es decir, si existe $\lambda \in C^\infty(\Sigma)$ tal que

$$A_\eta = \lambda I.$$

Por otro lado, si consideramos

$$\nabla A_\eta : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) \to \mathfrak{X}(\Sigma)$$
$$(X, Y) \mapsto (\nabla A_\eta)(X, Y) = (\nabla_X A_\eta)Y,$$

usando (2.12) se sigue que $(\nabla_X A_\eta)Y = (\nabla_Y A_\eta)X$ para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Ahora, teniendo en cuenta que η es una dirección umbilical

$$\begin{aligned}(\nabla A_\eta)(X, Y) &= (\nabla_X A_\eta)Y = (\nabla_Y A_\eta)X = \nabla_Y(\lambda X) - A_\eta(\nabla_Y X) \\ &= Y(\lambda)X + \lambda\nabla_Y X - \lambda\nabla_Y X = Y(\lambda)X = (\nabla A_\eta)(Y, X),\end{aligned}$$

luego para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ se tiene que $Y(\lambda)X = X(\lambda)Y$. Así, si elegimos X e Y linealmente independientes obtenemos que $X(\lambda) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ lo que implica que λ debe ser constante.

Una vez visto que λ es constante, definimos $Q = -\eta + \lambda\xi$. De esta forma, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X Q &= \overline{\nabla}_X(-\eta + \lambda\xi) = -\overline{\nabla}_X \eta + \lambda \overline{\nabla}_X \xi \\ &= -A_\eta X + \nabla^\perp_X \eta + \lambda X.\end{aligned}$$

Usando que $\nabla^\perp_X \eta = 0$ y y que $A_\eta = \lambda I$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, se sigue que

$$\overline{\nabla}_X Q = -\lambda X + \lambda X = 0,$$

y por tanto, el vector Q de $\mathbb{L}^{n+2}$ es constante y distinto de cero. Además, se cumple que

$$\langle Q, Q\rangle = 2\lambda, \quad \langle Q, \xi\rangle = 1 \quad \text{y} \quad \langle Q, \eta\rangle = -\lambda.$$

Finalmente, si $\lambda \neq 0$, tomando $\tau = 1/\sqrt{2|\lambda|} > 0$ y $\mathbf{a} = \tau Q$ tenemos que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = c = \pm 1$ y $\langle \psi, \mathbf{a}\rangle = \tau\langle \psi, Q\rangle = \tau > 0$, lo que implica que $\psi(\Sigma) \subset \Sigma(\mathbf{a}, \tau)$.

Por otro lado, si $\lambda = 0$ tomamos $\mathbf{a} = Q$ obteniendo de esta forma que $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle = 0$ y $\langle \psi, \mathbf{a}\rangle = \tau = 1$, luego $\psi(\Sigma) \subset \Sigma(\mathbf{a}, \tau)$ como queríamos ver. □

3.2. Subvariedades compactas

A la lo largo de esta sección estudiaremos en profundidad el caso en el que Σ es una subvariedad compacta. El objetivo será probar que Σ es difeomorfa a la esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$ bajo condiciones apropiadas de la función u, la cual hemos estado considerando a lo largo del capítulo. Además, veremos algunos de los resultados para subvariedades compactas expuestos en [11] y [12] haciendo uso de las herramientas que hemos desarrollado en las Secciones 2.2 y 2.3.

En primer lugar, vamos a ver un lema técnico necesario para posteriores resultados cuya demostración puede encontrarse en [2, Lemma 5.1].

Lema 3.2.1. Sea g una métrica completa en un variedad riemanniana Σ y r la función distancia riemanniana a un origen fijado $o \in \Sigma$. Si una función w satisface que

$$w^{2/(n-2)}(p) \geq \frac{C}{r(p)\log(r(p))}, \quad r(p) \gg 1, \tag{3.1}$$

con C una constante positiva, entonces la métrica conforme $\tilde{g} = w^{4/(n-2)} g$ es también una métrica completa.

Ahora, usando este resultado previo podemos ver la siguiente proposición obtenida por Alías, Cánovas y Rigoli en [2].

Proposición 3.2.2. Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Si Σ es completa y la función positivia $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$ satisface

$$u(p) \leq Cr(p)\log(r(p)), \quad r(p) \gg 1, \tag{3.2}$$

donde C es una constante positiva y r denota la función distancia riemanniana a un origen fijado $o \in \Sigma$. Entonces Σ es compacta y conformemente difeomorfa a la esfera $\mathbb{S}^n$.

Demostración. Para todo $p \in \Sigma$ se tiene que $\psi(p) = (u(p), \psi_2(p), ..., \psi_{n+2}(p))$ con

$$\sum_{i=2}^{n+2} \psi(p)^2 = u^2(p) > 0,$$

ya que $\psi(\Sigma) \in \Lambda^+$. De esta forma, podemos definir la función $\Psi : \Sigma^n \to \mathbb{S}^n$ como

$$\Psi(p) = \frac{1}{u(p)}(\psi_2(p), ..., \psi_{n+2}(p)).$$

Ahora, nuestro objetivo será probar que la métrica inducida por Ψ es conforme a la de Σ para poder usar el lema anterior. Así, tenemos que para todo punto $p \in \Sigma$ y $\mathbf{v} \in T_p\Sigma$

$$\begin{aligned} d\Psi_p(\mathbf{v}) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi(\alpha(t)) &= -\frac{\alpha'(0)(u)}{u^2(\alpha(0))}(\psi_2(\alpha(0)), ..., \psi_{n+2}(\alpha(0))) \\ &+ \frac{1}{u(\alpha(0))}(d\psi_2(\alpha'(0)), ..., d\psi_{n+2}(\alpha'(0))) \\ &= -\frac{\mathbf{v}(u)}{u^2(p)}(\psi_2(p), ..., \psi_{n+2}(p)) + \frac{1}{u(p)}(\mathbf{v}(\psi_2), ..., \mathbf{v}(\psi_{n+2})), \end{aligned}$$

donde $\alpha : I \to \Sigma$ es una curva diferenciables tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \mathbf{v}$.

Así, si denotamos por $\langle , \rangle_0$ la métrica estándar de $\mathbb{S}^n$, tenemos que para cualesquiera $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\Sigma$

$$\begin{aligned}
\langle d\Psi_p(\mathbf{v}), d\Psi_p(\mathbf{w})\rangle_0 &= \frac{\mathbf{v}(u)\mathbf{w}(u)}{u^4(p)} \sum_{i=2}^{n+2} \psi_i(p)^2 - \frac{\mathbf{v}(u)}{u^3(p)} \sum_{i=2}^{n+2} \psi_i(p)\mathbf{w}(\psi_i) \\
&\quad - \frac{\mathbf{w}(u)}{u^3(p)} \sum_{i=2}^{n+2} \psi_i(p)\mathbf{v}(\psi_i) + \frac{1}{u^2(p)} \sum_{i=2}^{n+2} \mathbf{v}(\psi_i)\mathbf{w}(\psi_i) \\
&= \frac{\mathbf{v}(u)\mathbf{w}(u)}{u^4(p)} \sum_{i=2}^{n+2} \psi_i(p)^2 + \frac{1}{u^2(p)} \sum_{i=2}^{n+2} \mathbf{v}(\psi_i)\mathbf{w}(\psi_i) \\
&\quad - \frac{\mathbf{v}(u)}{2u^3(p)}\mathbf{w}\left(\sum_{i=2}^{n+2} \psi_i^2\right) - \frac{\mathbf{w}(u)}{2u^3(p)}\mathbf{v}\left(\sum_{i=2}^{n+2} \psi_i^2\right) \\
&= \frac{1}{u^2(p)}\left(-\mathbf{v}(u)\mathbf{w}(u) + \sum_{i=2}^{n+2} \mathbf{v}(\psi_i)\mathbf{w}(\psi_i)\right) \\
&= \frac{1}{u^2(p)}\langle d\psi_p(\mathbf{v}), d\psi_p(\mathbf{w})\rangle = \frac{1}{u^2(p)}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\Psi^*(\langle , \rangle_0) = \frac{1}{u^2(p)}\langle , \rangle, \tag{3.3}$$

donde denotamos por $\langle , \rangle$ la métrica riemanniana inducida en Σ por la inmersión ψ.

De esta forma, por (3.3) se sigue que Ψ es un difeomorfismo local y, como Σ es completa y u satisface la condición (3.2), podemos aplicar el Lema 3.2.1 a la función $w = u^{-(n-2)/2}$ obteniendo que la métrica conforme

$$\hat{\langle , \rangle} = \frac{1}{u^2}\langle , \rangle$$

es también completa en Σ.

Así, de la ecuación (3.3) se sigue que la aplicación

$$\Psi : (\Sigma^n, \hat{\langle , \rangle}) \to (\mathbb{S}^n, \langle , \rangle_0)$$

es una isometría local entre variedades riemannianas completas. De esta forma, teniendo en cuenta que toda isometría local entre variedades riemannianas completas (y conexas) es una aplicación recubridora, se sigue que Ψ es una aplicación recubridora. Además, como $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexa, se tiene que Ψ es un difeomorfismo global entre Σ y $\mathbb{S}^n$. (véase por ejemplo [6, Chap.7 Lemma 3.3] o [8, Corollary 6.4]). $\square$

Pasamos a ver el siguiente ejemplo que será de gran importancia en resultados posteriores.

Ejemplo 3.2.3. Sea $f : \mathbb{S}^n \to (0, +\infty)$ una función diferenciable y definimos

$$\psi_f : \mathbb{S}^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$$

$$p \mapsto (f(p), f(p)p),$$

la cual está bien definida ya que para todo $p \in \mathbb{S}^n$

$$\langle \psi_f(p), \psi_f(p) \rangle = -f^2(p) + -f^2(p)\langle p, p \rangle = f^2(p)(-1 + \langle p, p \rangle) = 0.$$

Por otro lado, para todo $p \in \mathbb{S}^n$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathbb{S}^n$, si $\alpha : I \to \mathbb{S}^n$ es una curva diferenciable cumpliendo que $\alpha(0) = p$ y que $\alpha'(0) = \mathbf{v}$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(\psi_f)_p(\mathbf{v}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\psi_f(\alpha(t))) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f(\alpha(t)), f(\alpha(t))\alpha(t)) \\ &= (\mathbf{v}(f), f(p)\mathbf{v} + \mathbf{v}(f)p) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle d(\psi_f)_p(\mathbf{v}), d(\psi_f)_p(\mathbf{w}) \rangle &= -\mathbf{w}(f)\mathbf{v}(f) + \langle f(p)\mathbf{v} + (f)p, f(p)\mathbf{w} + \mathbf{w}(f)p \rangle_0 \\ &= -\mathbf{w}(f)\mathbf{v}(f) + f^2(p)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_0 + \mathbf{v}(\mathbf{f})\mathbf{w}(f)\langle p, p \rangle_0 \\ &= -\mathbf{w}(f)\mathbf{v}(f) + \mathbf{w}(f)\mathbf{v}(f) + f^2(p)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_0 = f^2(p)\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_0, \end{aligned}$$

luego

$$\psi_f^*(\langle , \rangle) = f^2 \langle , \rangle_0.$$

Por tanto, ψ_f determina una inmersión espacial de $\mathbb{S}^n$ en Λ^+ cuya métrica inducida es conforme a la métrica estándar de $\mathbb{S}^n$.

Ahora, tomando $u = -\langle \psi_f, \mathbf{e}_1 \rangle = f$ podemos usar la fórmulas obtenidas en la Proposición 2.2.4 para calcular la expresión de la segunda forma fundamental de ψ_f en términos de f, de su gradiente y de su Hessiano con respecto a la métrica $\langle , \rangle_0$.

En primer lugar, es evidente que $A_\xi = I$ y $\theta_\xi = 1$. Por otro lado, para calcular A_η denotaremos por $\| \cdot \|^2$, ∇^0 y Hess_0 a la norma, el gradiente y el operador hessiano en $\mathbb{S}^n$ con respecto a la métrica $\langle , \rangle_0$. De esta forma, usando la fórmula (1.3) se cumple que

$$\|\nabla f\|^2 = \frac{1}{f^2}\|\nabla^0 f\|_0^2$$

y

$$\frac{1 + \|\nabla f\|^2}{2f^2} = \frac{f^2 + \|\nabla^0 f\|^2}{2f^4}.$$

Así, usando ahora la fórmula (1.4) tenemos que para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess} f(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = f^2 \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle_0 \\
&= \langle \nabla^0_X \nabla^0 f, Y\rangle_0 - \frac{2}{f}\langle X, \nabla^0 f\rangle_0 \langle Y, \nabla^0 f\rangle_0 + \frac{1}{f}\|\nabla^0 f\|_0^2 \langle X, Y\rangle_0
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\nabla_X \nabla f = f^2 \nabla^0_X \nabla^0 f - \frac{2}{f^3}\langle X, \nabla^0 f\rangle_0 \nabla^0 f + \frac{1}{f^3}\|\nabla^0 f\|_0^2 X$$

para cualquier campo tangente $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. Por tanto, usando las fórmulas desarrolladas en la Proposición 2.2.4 obtenemos que para todo campo tangente $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$

$$A_\eta(X) = \frac{1}{f^3}\nabla^0_X \nabla^0 f - \frac{2}{f^4}\langle X, \nabla^0 f\rangle_0 \nabla^0 f + \frac{\|\nabla^0 f\|_0^2 - f^2}{2f^4} X$$

y tomando trazas con respecto a la métrica $\langle , \rangle_0$ se sigue que

$$\theta_\eta = \frac{2f\Delta^0 f + (n-4)\|\nabla^0 f\|_0^2 - nf^2}{2nf^4}.$$

Una vez visto este ejemplo, vamos a obtener como corolario de la Proposición 3.2.2 que toda subvariedad espacial de codimensión dos, compacta y que factoriza a través de Λ^+ es, salvo difeomorfismo conforme, como en el Ejemplo 3.2.3.

Corolario 3.2.4. Sea $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos, compacta y que factoriza a través de Λ^+. Entonces existe un difeomorfismo conforme $\Psi : (\Sigma^n, \langle , \rangle) \to (\mathbb{S}^n, \langle , \rangle_0)$ tal que

$$\Psi^*(\langle , \rangle_0)) = \frac{1}{u^2}\langle , \rangle$$

con $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1\rangle = \psi_1 > 0$, y $\psi = \psi_f \circ \Psi$ donde $f = u \circ \Psi^{-1}$ y $\psi_f : \mathbb{S}^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ es el embebimiento

$$\psi_f(p) = (f(p), f(p)p).$$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, shift left, "\Psi"] & (0,+\infty) \\
\mathbb{S}^n \arrow[u, shift left, "\Psi^{-1}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Sigma^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, shift left, "\Psi"] & \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2} \\
\mathbb{S}^n \arrow[u, shift left, "\Psi^{-1}"] \arrow[ur, "\psi_f"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que la función u cumple (3.2) y

$$\Psi(p) = \frac{1}{u(p)}(\psi_2(p), ..., \psi_{n+2}(p)).$$

Como vimos en la Proposición 3.2.2, Ψ es un difeomorfismo conforme que cumple

$$\Psi^*(\langle,\rangle_0) = \frac{1}{u^2}\langle,\rangle.$$

Sea ahora $\phi : \mathbb{S}^n \to \Sigma^n$ la aplicación inversa de Ψ. Tomando $f = u \circ \phi$, entonces $f : \mathbb{S}^n \to (0, +\infty)$ y $f \circ \Psi = u$. Por tanto, para todo $p \in \Sigma$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\psi_f \circ \Psi(p) &= (f(\Psi(p)), f(\Psi(p))\Psi(p)) \\
&= (u(p), u(p)\Psi(p)) \\
&= (u(p), u(p)\frac{1}{u(p)}(\psi_2(p), ..., \psi_{n+2}(p))) \\
&= (u(p), \psi_2(p), ..., \psi_{n+2}(p)) = \psi(p),
\end{aligned}$$

luego $\psi = \psi_f \circ \Psi$ como queríamos ver. □

3.2.1. Otros resultados

Como citamos al principio de la sección, vamos a ver algunos de los resultados para subvariedades espaciales compactas tratados en [11] y [12] aprovechando lo desarrollado en la Sección 2.3 y en particular en la Proposición 2.3.1.

Empezaremos con un teorema que se obtiene a partir de la versión tetradimensional del Teorema de Gauss-Bonnet, es decir, el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern-Avez expuesto en [3]. Este teorema es en esencia el Teorema 5.3 de [11] usando nuestra notación.

Teorema 3.2.5 Sea $\psi : \Sigma^4 \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^6$ una subvariedad espacial de codimensión dos, compacta y que factoriza a través de Λ^+. Entonces se cumple que

$$\int_{\Sigma^4} \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle^2 \, \mathrm{d}V \geq \mathrm{Vol}(\mathbb{S}^4)$$

y la igualdad se cumple si, y solo si, Σ es una esfera totalmente umbilical de $\mathbb{L}^6$.

Demostración. el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern-Avez establece que para una variedad riemanniana y compacta Σ^4 se cumple que

$$\mathcal{X}(\Sigma) = \frac{1}{8\pi^2}\int_\Sigma (|C|^2 - \frac{1}{2}|Z|^2 + \frac{1}{24}\mathrm{Scal}^2) \, \mathrm{d}V,$$

donde $\mathcal{X}(\Sigma)$ es la característica de Euler de Σ, C es el tensor de Weyl y $Z = \mathrm{Ric} - \frac{1}{4}\mathrm{Scal}\langle,\rangle$ es el tensor de Einstein.

En nuestro caso, como Σ factoriza a través de Λ^+, sabemos por el Teorema 2.3.7 que $C = 0$ y por (2.6) que $\mathrm{Scal} = 12\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle$. Además, por el Corolario 3.2.4 Σ es difeomorfa a $\mathbb{S}^4$ y en consecuencia $\mathcal{X}(\Sigma) = \mathcal{X}(\mathbb{S}^4) = 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{1}{8\pi^2} \int_\Sigma (\frac{1}{24}\mathrm{Scal}^2 - \frac{1}{2}|Z|^2)\, \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{8\pi^2} \int_\Sigma (6\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle^2 - \frac{1}{2}|Z|^2)\, \mathrm{d}V \end{aligned}$$

y

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle^2 \, \mathrm{d}V = \frac{8\pi^2}{3} + \frac{1}{12} \int_\Sigma |Z|^2 \, \mathrm{d}V \geq \frac{8\pi^2}{3} = \mathrm{vol}(\mathbb{S}^4),$$

obteniendo de esta forma la desigualdad que buscábamos.

Una vez visto esto, pasamos a probar la segunda afirmación del teorema. En primer lugar, supongamos se cumple la igualdad, es decir,

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle^2 \, \mathrm{d}V = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Entonces sustituyendo en la igualdad del Teorema de Gauss - Bonnet - Chern - Avez se sigue que

$$\frac{1}{8\pi^2} 16\pi^2 + \frac{1}{16\pi^2} \int_\Sigma |Z|^2 \, \mathrm{d}V = 2,$$

y por tanto

$$\int_{\Sigma^4} |Z|^2 \mathrm{d}V = 0,$$

de donde deducimos que $Z = 0$ y en consecuencia Σ es Einstein. Además, usando el Teorema de Schür (véase por ejemplo [1, pág. 21]) se sigue que Scal es constante.

Ahora, como $\mathrm{Ric} = \frac{1}{4}\mathrm{Scal}\, \langle , \rangle$, usando (2.5) tenemos que para cualquier $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\mathrm{Scal}\langle X, Y \rangle &= 3\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \langle X, Y \rangle = \mathrm{Ric}(X, Y) \\ &= 3\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \langle X, Y \rangle + \frac{2}{4u}(\Delta u \langle X, Y \rangle - \mathrm{Hess}_u(X, Y)) \end{aligned}$$

luego $\frac{2}{4u}(\Delta u \langle X, Y \rangle - \mathrm{Hess}_u(X, Y)) = 0$ y $\mathrm{Hess}_u(X, Y) = \frac{1}{4}\Delta u \langle X, Y \rangle$, es decir,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{u} \Delta u I.$$

Usando esto en (2.9) se sigue que

$$\begin{aligned} A_\eta &= -\frac{1+\|\nabla u\|^2}{2u^2} I + \frac{1}{4u}\Delta u I \\ &= \mu I, \end{aligned}$$

donde μ es una función diferenciable. Por tanto, η es una dirección umbilical y Σ es totalmente umbilical. Finalmente, como Σ es una subvariedad espacial de codimensión dos, compacta, totalmente umbilical y que factoriza a través de Λ^+, por el Corolario 3.1.3 se sigue Σ es una esfera.

Recíprocamente, si Σ es totalmente umbilical entonces, por el Corolario 3.1.3, Σ tiene curvatura seccional constante y en particular Σ es Einstein, es decir, $Z = 0$. De esta forma,

$$2 = \frac{1}{8\pi^2}\int_\Sigma 6|\langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle^2 \, \mathrm{d}V$$

y por tanto,

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle^2 \, \mathrm{d}V = \frac{8}{3}\pi^2$$

como queríamos ver. □

Como corolario del teorema tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.2.6. Sea $\psi : \Sigma^4 \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^6$ una subvariedad espacial de codimensión dos, compacta y que factoriza a través de Λ^+. Si $\nabla^\perp \mathbf{H} = 0$, entonces la curvatura escalar Scal de Σ es constante y

$$\mathrm{Scal} \geq \frac{8\sqrt{6}\pi}{\mathrm{Vol}(\Sigma)^{1/2}}. \tag{3.4}$$

Además, se da la igualdad si, y solo si, Σ es una esfera totalmente umbilical de $\mathbb{L}^6$.

Demostración. Si $\nabla^\perp \mathbf{H} = 0$ sabemos por el Corolario 2.3.2 que la curvatura escalar de Σ es constante. Además, por la Proposición 2.3.3 Scal es estrictamente positiva. Usando ahora el Teorema 3.2.5 se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2}{3} &\leq \int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle^2 \mathrm{d}V = \int_\Sigma \frac{\mathrm{Scal}^2}{144}\mathrm{d}V \\ &= \frac{\mathrm{Scal}^2}{144}\int_\Sigma \mathrm{d}V = \frac{\mathrm{Scal}^2}{144}\mathrm{Vol}(\Sigma), \end{aligned}$$

donde hemos usado que Scal es constante. De forma inmediata se sigue de aquí que

$$\mathrm{Scal} \geq \frac{8\sqrt{6}\pi}{\mathrm{Vol}(\Sigma)^{1/2}}.$$

Por otro lado, la igualdad se cumple si, y solo si,

$$\frac{\mathrm{Scal}^2}{144}\mathrm{Vol}(\Sigma) = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Ahora, usando esta igualdad en el Teorema 3.2.5 obtenemos que se da la igualdad en (3.4) si y solo si

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle^2 \mathrm{d}V = \frac{8\pi^2}{3},$$

lo cual es equivalente a que Σ sea una esfera totalmente umbilical de $\mathbb{L}^6$. □

Para finalizar la sección tenemos el siguiente corolario en el que se obtiene una cota para el primer valor propio λ_1 del operador laplaciano.

Corolario 3.2.7. Sea $\psi : \Sigma^4 \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^6$ una subvariedad espacial de codimensión dos, compacta y que factoriza a través de Λ^+. Entonces se cumple que

$$\lambda_1^2 \leq 16\frac{\int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle^2 \mathrm{d}V}{\mathrm{Vol}(\Sigma)} \tag{3.5}$$

y se da la igualdad si y solo si Σ es una esfera totalmente umbilical de $\mathbb{L}^6$.

Demostración. De nuevo, como Σ factoriza a través del cono de luz, se cumple que Σ es conformemente llana y por tanto $C = 0$. Ahora, usando la desigualdad de [9, Theorem 1] obtenemos que

$$\lambda_1 \mathrm{Vol}(\Sigma)^{1/2} \leq 4\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^4)^{1/2}$$

donde se da la igualdad si, y solo si, $(\Sigma, \langle , \rangle)$ es isométrica a una esfera tetradimensional.

De esta forma, usando la desigualdad del Teorema 3.2.5 se sigue que

$$\lambda_1^2 \mathrm{Vol}(\Sigma) \leq 16\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^4) \leq 16 \int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle^2 \mathrm{d}V,$$

de donde obtenemos de forma inmediata que

$$\lambda_1^2 \leq \frac{16 \int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H}\rangle^2 \mathrm{d}V}{\mathrm{Vol}(\Sigma^4)}.$$

Además, se da la igualdad si, y solo si, se da la igualdad en la desigualdad del Teorema 3.2.5, es decir, si y solo si Σ es una esfera totalmente umbilical. □

Una vez visto estos casos en dimensión cuatro, vamos a ver dos casos análogos en dimensión dos. La principal ventaja que tenemos en este caso es que podemos hacer uso de una herramienta teórica muy poderosa, el teorema de Gauss-Bonnet.

Teorema 3.2.8 Sea $\psi : \Sigma^2 \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^4$ una superficie espacial de codimensión dos, compacta y que factoriza a través de Λ^+. Entonces se cumple que

$$\int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \mathrm{d}V = 4\pi.$$

Demostración. Como Σ es un superficie compacta, por el Teorema de Gauss-Bonnet (véase por ejemplo [**?**, pág. 278]) tenemos que

$$\int_\Sigma K \mathrm{d}V = 2\pi \mathcal{X}(\Sigma).$$

Además, usando el Corolario 3.2.4 se sigue que $\Sigma \approx \mathbb{S}^4$ y por tanto,

$$\int_\Sigma K \mathrm{d}V = 2\pi \mathcal{X}(\Sigma) = 4\pi.$$

Ahora, como Σ factoriza a través de Λ^+,

$$K = \frac{1}{2}\mathrm{Scal} = \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle$$

y en consecuencia

$$4\pi = \int_\Sigma K \mathrm{d}A = \int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \mathrm{d}A$$

como queríamos ver. $\square$

Usando este teorema y la desigualdad de Hersch de [7], podemos obtener la siguiente acotación para el primer valor propio del operador laplaciano.

Corolario 3.2.9. Sea $\psi : \Sigma^2 \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^4$ una superficie espacial de codimensión dos, compacta y que factoriza a través de Λ^+. Entonces se cumple que

$$\lambda_1 \leq 2\frac{\int_\Sigma \langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle \mathrm{d}A}{\text{área}(\Sigma, \langle , \rangle)},$$

donde se da la igualdad si, y solo si, $(\Sigma, \langle , \rangle)$ tiene curvatura de Gauss constante.

Demostración. La desigualdad de Hersch de [7] establece que para una métrica riemanniana g se cumple que

$$\lambda_1 \leq \frac{8\pi}{\text{área}(\Sigma, g)}$$

y se da la igualdad si, y solo si, (Σ, g) tiene curvatura de Gauss constante.

Por tanto, usando el teorema anterior se deduce de forma inmediata la desigualdad y que se da la igualdad si y solo si $(\Sigma, \langle , \rangle)$ tiene curvatura de Gauss constante. $\square$

3.3. Subvariedades atrapadas a través del cono de luz

A lo largo de esta sección nos centraremos en el caso en la que la subvariedad Σ es atrapada. En primer lugar, estudiaremos un resultado de no existencia basado fundamentalmente en el teorema de la divergencia. Por otro lado, veremos dos resultados de clasificación en función de una ecuación diferencial aprovechando los elementos teóricos desarrollados a lo largo del capítulo.

Empezaremos viendo el citado resultado de no existencia.

Proposición 3.3.1. No existen subvariedades espaciales compactas de codimensión dos débilmente atrapadas en $\mathbb{L}^{n+2}$.

Demostración. Sea $\psi : \Sigma \to \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial n-dimensional, compacta y débilmente atrapada. Consideremos la función $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$, cuyo gradiente viene dado, como vimos en la Proposición 2.2.3, por $\nabla u = -\mathbf{e}_1^\top = \mathbf{e}_1^\perp - \mathbf{e}_1$. Por otro lado, sabemos por la Proposición 2.2.4 que

$$A_{\mathbf{e}_1^\perp} X = \nabla_X \nabla u$$

y tomando trazas obtenemos que

$$\Delta u = \mathrm{tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla u)) = \mathrm{tr}(A_{\mathbf{e}_1^\perp}) = n\langle \mathbf{H}, \mathbf{e}_1^\perp \rangle = n\langle \mathbf{H}, \mathbf{e}_1 \rangle.$$

Así, como el campo curvatura media $\mathbf{H}$ no es espacial, satisface que $n\langle \mathbf{H}, \mathbf{e}_1 \rangle < 0$ o $n\langle \mathbf{H}, \mathbf{e}_1 \rangle > 0$ en Σ y, suponiendo que $n\langle \mathbf{H}, \mathbf{e}_1 \rangle < 0$, entonces

$$\Delta u = n\langle \mathbf{H}, \mathbf{e}_1 \rangle < 0.$$

Ahora, usando el teorema de la divergencia tenemos que

$$\int_\Sigma \Delta u \, \mathrm{d}\Sigma = 0$$

lo que implica que $\Delta u \equiv 0$ obteniendo así una contradicción. La prueba para el caso en el que $n\langle \mathbf{H}, \mathbf{e}_1 \rangle > 0$ es totalmente análoga. □

Una vez vista esta proposición, pasamos a ver los dos resultados mencionados anteriormente que obtendremos de forma directa a partir de la Proposición 2.3.1.

Corolario 3.3.2. Sea $\psi : \Sigma \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Considerando la función $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$ se satisface que

1. Σ es débilmente atrapada si, y solo si, u satisface la ecuación diferencial

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2) \geq 0 \quad \text{en} \quad \Sigma. \tag{3.6}$$

2. Σ es marginalmente atrapada si, y solo si, u satisface la ecuación diferencial

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma. \tag{3.7}$$

3. Σ es atrapada si, y solo si, u satisface la ecuación diferencial

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2) > 0 \quad \text{en} \quad \Sigma. \tag{3.8}$$

Demostración. Usando la Proposición 2.3.1 y en particular, por la ecuación (2.14) sabemos que

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = -\frac{2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2)}{nu^2}.$$

Por tanto, usando la definición de subvariedad atrapada (Definición 1.3.1) se sigue el resultado de forma inmediata. □

Finalmente, usando el Corolario 3.3.2 y la caracterización de la curvatura escalar obtenida en la Proposición 2.3.1 obtenemos de forma inmediata el siguiente corolario.

Corolario 3.3.3. Sea $\psi : \Sigma \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de Λ^+. Considerando la función $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. Σ es marginalmente atrapada.

2. u satisface la ecuación diferencial $2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2) = 0 \quad \text{en} \quad \Sigma$

3. Σ tiene curvatura escalar $\mathrm{Scal} = 0$.

Para finalizar la sección veremos un ejemplo de subvariedad atrapada que factoriza a través de Λ^+.

Ejemplo 3.3.4. Sea $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{L}^{n+2}$ la aplicación dada por

$$\psi(p) = (\frac{\|p\|^2 + 1}{2}, \frac{\|p\|^2 - 1}{2}, p).$$

Se sigue que

$$\langle \psi(p), \psi(p) \rangle = \frac{-(\|p\|^2 + 1)^2 + (\|p\|^2 - 1)^2}{4} + \|p\|^2 = 0$$

y

$$u(p) = -\langle \psi(p), \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{\|p\|^2 + 1}{2} > 0.$$

Por tanto, $\psi(\mathbb{R}^n)$ factoriza a través de Λ^+.

Por otro lado, para todo punto $p \in \mathbb{R}^n$ y vectores $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathbb{R}^n$ obtenemos que

$$\begin{aligned} d\psi_p(\mathbf{v}) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \psi(\alpha(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left(\frac{\|\alpha(t)\|^2 + 1}{2}, \frac{\|\alpha(t)\|^2 - 1}{2}, \alpha(t)\right) = (\mathbf{v}\|p\|, \mathbf{v}\|p\|, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \psi^*(\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle) &= \langle (\mathbf{v}\|p\|, \mathbf{v}\|p\|, \mathbf{v}), (\mathbf{w}\|p\|, \mathbf{w}\|p\|, \mathbf{w}) \rangle \\ &= -\|p\|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{R}^n} + \|p\|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{R}^n} \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_{\mathbb{R}^n}. \end{aligned}$$

De esta forma, ψ es una inmersión isométrica de $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$ a través de $\Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ y, en particular, los operadores laplaciano y gradiente de u son respectivamente

$$\nabla u(p) = \nabla^{\mathbb{R}^n} u(p) = p$$

y

$$\Delta u(p) = \Delta_{\mathbb{R}^n} u(p) = n.$$

Así, la función u satisface la ecuación diferencial (3.7),

$$2u\Delta u - n(1 + \|\nabla u\|^2) = n(\|p\|^2 + 1) - n(1 + \|p\|^2) = 0$$

y por el Corolario 3.3.2, ψ es una inmersión marginalmente atrapada de $\mathbb{R}^n$ en $\Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$.

3.4. No existencia de subvariedades débilmente atrapadas

Como vimos en la Proposición 3.3.1, no existen subvariedades espaciales débilmente atrapadas y compactas que factoricen a través del cono de luz. El objetivo de esta sección será estudiar resultados que nos garanticen la no existencia de estas subvariedades sin asumir su compacidad.

Así, tenemos en primer lugar el siguiente corolario que se deduce directamente de las Proposicones 3.2.2 y 3.3.1.

Corolario 3.4.1. No existen subvariedades espaciales $\psi : \Sigma \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$, completas y débilmente atrapadas de codimensión dos para las cuales la función $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$ satisface
$$u \leq Cr\log r, \quad r \gg 1, \quad C > 0.$$

En particular, no existe ninguna subvariedad espacial débilmente atrapada de codimensión dos e inmersa en la componente conexa futura del cono de luz para la cual la función positiva u esté acotada superiormente.

A continuación, veremos un resultado de no existencia que extiende al visto en la Sección 3.2.

Proposición 3.4.2. No existen subvariedades espaciales de codimensión dos, estocásticamente completas y débilmente atrapadas que factoricen a través de Λ^+ para las cuales la función $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$ esté acotada superiormente.

Demostración. Sea $\psi : \Sigma \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos, estocásticamente completa y débilmente atrapada. Por ser débilmente atrapada, se sigue del Corolario 3.3.2 que

$$n(1 + \|\nabla u\|^2) \leq 2u\Delta u. \tag{3.9}$$

Supongamos que u está acotada superiormente, esto es, $u^* = \sup_\Sigma u < +\infty$. Como Σ es estocásticamente completa, por el Teorema 1.3.4 se cumple el principio débil del máximo para el operador laplaciano y por tanto, existe una sucesión $\{p_k\}$ en Σ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$
$$\Delta u(p_k) < 1/k$$
y
$$\lim_{k\to+\infty} u(p_k) = u^*.$$

Por tanto, usando esto en la desigualdad (3.9) obtenemos que

$$n \leq n(1 + \|\nabla u(p_k)\|^2) \leq 2u(p_k)\Delta u(p_k) < \frac{2u(p_k)}{k}$$

y finalmente, tomando limite en k

$$n \leq \lim_{k\to\infty} \frac{2u(p_k)}{k} = 0$$

lo cual es una contradicción. □

Antes de continuar, necesitamos un resultado analítico cuya demostración puede consultarse en [2].

Teorema 3.4.3 Sea $(\Sigma, \langle , \rangle)$ una variedad riemanniana, completa y $v \geq 0$ una solución de

$$v\Delta v + av^2 - bv \geq -A\|\nabla v\|^2 \tag{3.10}$$

en Σ, con $a \leq 0$, $b > 0$ y $A \in \mathbb{R}$. Si se cumple que para ciertos $\alpha > 1$, $\beta > -1$, $\beta \geq A$

$$v \in L^{\alpha(\beta+1)}(\Sigma), \tag{3.11}$$

entonces $v \equiv 0$.

Ahora, como consecuencia del teorema anterior podemos obtener el siguiente resultado probado por Alías, Cánovas y Rigoli en [2].

Teorema 3.4.4 Dado $q > 0$, no existe ninguna subvariedad espacial de codimensión dos, completa y débilmente atrapada $\psi : \Sigma^n \to \Lambda^+ \subset \mathbb{L}^{n+2}$ para la cual la función positiva $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$ satisface que

$$u \in L^q(\Sigma).$$

Demostración. Vamos a proceder por reducción al absurdo. Sea Σ una subvariedad espacial de codimensión dos completa, débilmente atrapada y que factoriza a través de Λ^+ tal que $u \in L^q(\Sigma)$ para algún $q > 0$. Si definimos $v = u^2 > 0$, por las propiedades del operador laplaciano y el gradiente vistas en la Proposiciones 1.1.9 y 1.1.5 respectivamente, se sigue que

$$\Delta v = \Delta u^2 = 2u\Delta u + 2\|\nabla u\|^2 \tag{3.12}$$

y

$$\nabla v = 2u\nabla u. \tag{3.13}$$

Así, por ser Σ débilmente atrapada tenemos que

$$n(1 + \|\nabla u\|^2) \leq 2u\Delta u,$$

de donde se deduce usando (3.12) que

$$n(1 + \|\nabla u\|^2) \leq \Delta v - 2\|\nabla u\|^2.$$

Ahora, a partir de (3.13) y usando lo anterior obtenemos que

$$n + (n+2)\|\frac{\nabla v}{2u}\|^2 \leq \Delta v,$$

y por tanto,

$$v\Delta v - nv \geq \frac{(n+2)}{4}\|\nabla v\|^2.$$

De esta forma, si tomamos $a = 0$, $b = n$ y $A = -\frac{(n+2)}{4}$ junto con $\alpha = 2$ y $\beta = -1 + q/4$ tenemos que

$$\alpha(\beta + 2) = q/2$$

y

$$v \in L^{\alpha(\beta+2)}(\Sigma) = L^{q/2}(\Sigma).$$

Finalmente, usando el Teorema 3.4.3 se cumple que $v \equiv 0$ lo cual es una contradicción. $\square$

Capítulo 4

Subvariedades espaciales de codimensión dos en un hiperplano nulo.

Durante el desarrollo de este capítulo estudiaremos el caso en el que la subvariedad $\psi : \Sigma \to \mathbb{L}^{n+2}$ factoriza a través de un hiperplano nulo de $\mathbb{L}^{n+2}$. De forma análoga a lo realizado en los capítulos anteriores, el objetivo será, en primer lugar, desarrollar unas herramientas que nos permitan estudiar este tipo de subvariedades y a continuación, hacer uso de estas para obtener diferentes propiedades y caracterizaciones sobre el tipo de subvariedades que nos ocupan.

Empezaremos con la definición de hiperplano nulo.

Definición 4.0.1. Sea $\mathbf{a} \in \mathbb{L}^{n+2}$ un vector nulo. El subconjunto

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}} = \{x \in \mathbb{L}^{n+2} : \langle x, \mathbf{a} \rangle = 0,\ x \neq \mathbf{a}\}$$

es un hiperplano nulo en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski.

4.1. Obteniendo una referencia normal

Como hicimos en capítulos anteriores, el primer objetivo será obtener una referencia normal de campos de vectores nulos y globalmente definidos que nos permita estudiar la geometría de este tipo de subvariedades.

En primer lugar, supongamos que $\mathbf{a}$ es un vector que apunta al futuro y que $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ es una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través del hiperplano nulo $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$. En este caso el campo de vectores

$$\xi = \mathbf{a}$$

es un campo normal, globalmente definido y que apunta al futuro. Por tanto, este será el primer campo de vectores de la referencia buscada.

Por otro lado, de forma análoga a lo desarrollado en la Sección 2.2 definimos la función $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ como $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1 \rangle$. Así, procediendo de igual forma que en la Proposición 2.2.3 tenemos que

$$\nu = \frac{\mathbf{e}_1 + \nabla u}{\sqrt{1 + \|\nabla u\|^2}}$$

y

$$\eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2}{2\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} - \frac{1}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle}(\mathbf{e}_1 + \nabla u)$$

De esta forma, el campo de vectores ν está globalmente definido, es un campo de vectores nulos y además, apunta al futuro satisfaciendo que $\langle \xi, \eta \rangle = -1$.

Reuniendo lo desarrollado tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. Sea $\psi : \Sigma \to \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$. Entonces,

$$\xi = \mathbf{a} \quad \text{y} \quad \eta = -\frac{1 + \|\nabla u\|^2}{2\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle}\mathbf{a} - \frac{1}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle}(\mathbf{e}_1 + \nabla u).$$

son dos campos de vectores normales, globalmente definidos y nulos cumpliendo que $\langle \xi, \eta \rangle = -1$.

4.2. Caracterización y clasificación

Siguiendo la dinámica de anteriores capítulos, a lo largo de la sección aprovecharemos la referencia normal obtenida en la Proposición 4.1.1 para estudiar la geometría de las subvariedades que nos ocupan y obtener distintos resultados de clasificación y caracterización.

Empezaremos calculando los operadores forma asociados a la referencia normal $\{\xi, \eta\}$ obtenida en la sección anterior.

Proposición 4.2.1. Sea $\psi : \Sigma \to \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$. Entonces los operadores forma asociados a la referencia normal $\{\xi, \eta\}$ son

$$A_\xi = 0 \quad \text{y} \quad A_\eta = -\frac{1}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle}\nabla^2 u. \tag{4.1}$$

En particular,

$$\theta_\xi = 0 \quad \text{y} \quad \theta_\eta = -\frac{1}{n\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle}\Delta u.$$

Demostración. Usando la fórmula de Weingarten tenemos que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$0 = \overline{\nabla}_X \xi = A_\xi X + \nabla^\perp_X \mathbf{a},$$

luego $A_\xi X = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y en consecuencia $A_\xi = 0$.

Así, como $A_\xi = 0$, se sigue que

$$A_\eta = -\frac{1}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle} A_{\mathbf{e}_1^\perp}$$

y por tanto, necesitaremos calcular $A_{\mathbf{e}_1^\perp}$. En primer lugar, tenemos que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$0 = \overline{\nabla}_X \mathbf{e}_1 = \overline{\nabla}_X (\mathbf{e}_1^\perp - \nabla u) = \overline{\nabla}_X \mathbf{e}_1^\perp - \overline{\nabla}_X \nabla u \tag{4.2}$$

y usando las fórmulas de Gauss y Weingarten

$$\overline{\nabla}_X \mathbf{e}_1^\perp = A_{\mathbf{e}_1^\perp} X + \nabla^\perp_X \mathbf{e}_1,$$

$$\overline{\nabla}_X \nabla u = \nabla_X \nabla u - \mathrm{II}(X, \nabla u).$$

Ahora, reuniéndolo todo en (4.2)

$$0 = A_{\mathbf{e}_1^\perp} X - \nabla_X \nabla u + \nabla^\perp_X \mathbf{e}_1 - \mathrm{II}(X, \nabla u)$$

y en consecuencia, $A_{\mathbf{e}_1^\perp} X = \nabla_X \nabla u$ para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Obteniendo de esta forma que

$$A_\eta = -\frac{1}{\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle} \nabla^2 u.$$

Finalmente,

$$\theta_\xi = \frac{1}{n} \mathrm{tr}(A_\xi) = 0$$

y

$$\theta_\eta = -\frac{1}{n\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle} \mathrm{tr}(\nabla^2 u) = -\frac{1}{n\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle} \Delta u.$$

□

Por otro lado, como sabemos por (2.3), el campo curvatura media viene dado por

$$\mathbf{H} = -\theta_\eta \xi - \theta_\xi \eta$$

luego por la proposición anterior

$$\mathbf{H} = \frac{\Delta u}{n\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a} \tag{4.3}$$

y en consecuencia, por ser $\mathbf{a}$ nulo

$$\langle \mathbf{H}, \mathbf{H} \rangle = 0.$$

Así, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. Sea $\psi : \Sigma \to \mathcal{L}_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$. Entonces Σ es marginalmente atrapada excepto en los puntos donde $\Delta u = 0$ en Σ (en los que es minimal).

En lo que sigue, asumiremos sin pérdida de generalidad que el vector nulo $\mathbf{a} = (1, 0, ..., 0, 1)$ y denotaremos el hiperplano nulo $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$ como $\mathcal{L}$. Veamos el siguiente resultado que se corresponde con la Proposición 3.2.2.

Proposición 4.2.3. Sea $\psi : \Sigma \to \mathcal{L} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de $\mathcal{L}$. Si Σ es completa, entonces es isométrica al espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$.

Demostración. Debido a que $\psi(\Sigma) \subset \mathcal{L}$ para cada punto $p \in \Sigma$

$$\psi(p) = (u(p), \psi_2(p), ..., \psi_{n+1}(p), u(p))$$

ya que $0 = \langle \psi(p), \mathbf{a} \rangle = -\psi_1(p) + \psi_{n+2}(p)$. Así, definimos la función

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma^n &\to \mathbb{R}^n \\ p &\mapsto (\psi_2(p), ..., \psi_{n+1}(p)) \end{aligned}$$

de forma que para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\Sigma$

$$\begin{aligned} d\Psi_p(\mathbf{v}) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Psi(\alpha(t)) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\psi_2(\alpha(t)), ..., \psi_{n+1}(\alpha(t))) \\ &= (\mathbf{v}(\psi_2), ..., \mathbf{v}(\psi_{n+1})) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \langle d\Psi_p(\mathbf{v}), d\Psi_p(\mathbf{w}) \rangle_{\mathbb{R}^n} &= \sum_{i=2}^{n+1} \mathbf{v}(\psi_i)\mathbf{w}(\psi_i) \\ &= -\mathbf{v}(u)\mathbf{w}(u) + \mathbf{v}(u)\mathbf{w}(u) + \sum_{i=2}^{n+1} \mathbf{v}(\psi_i)\mathbf{w}(\psi_i) \\ &= \langle d\psi_p(\mathbf{v}), d\psi_p(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

Por tanto, $\Psi^*(\langle , \rangle_{\mathbb{R}^n}) = \langle , \rangle$ y en consecuencia Ψ es una isometría local. Además, siguiendo un razonamiento análogo al de la Proposición 3.2.2 tenemos que Ψ es una aplicación recubridora y, por ser $\mathbb{R}^n$ simplemente conexo, Ψ es un difeomorfismo global. $\square$

A continuación, veremos un ejemplo en el que construiremos, a partir de una función diferenciable en $\mathbb{R}^n$, un embebimiento de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{L}^{n+2}$ que factoriza a través de $\mathcal{L}$.

Ejemplo 4.2.4. Sea $f : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Definimos la aplicación $\phi_f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ dada por

$$\phi_f(p) = (f(p), p, f(p)).$$

Así, para todo $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p\mathbb{R}$ tenemos que

$$d(\phi_f)_p(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}(f), \mathbf{v}, \mathbf{v}(f))$$

y

$$\langle d(\phi_f)_p(\mathbf{v}), d(\phi_f)_p(\mathbf{w})\rangle = -\mathbf{v}(f)\mathbf{w}(f) + \mathbf{v}(f)\mathbf{w}(f) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Esto es, $\phi_f^*(\langle , \rangle) = \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n}$ y ϕ_f determina una inmersión espacial e isométrica del espacio euclídeo que factoriza a través de $\mathcal{L}$. Además, la imersión es marginalmente atrapada excepto en la puntos donde $\Delta f = 0$ en $\mathbb{R}^n$ ya que

$$\mathbf{H} = \frac{1}{n}(-\Delta f, 0, ..., 0, -\Delta f),$$

donde hemos usado (4.3).

Una vez visto este ejemplo, podemos obtener como corolario de la Proposición 4.2.3 que toda subvariedad espacial de codimensión dos que factoriza a través de $\mathcal{L}$ es, salvo isometría, como en el Ejemplo 4.2.4.

Corolario 4.2.5. Sea $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{L} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos, completa y que factoriza a través de $\mathcal{L}$. Entonces existe una isometría $\Psi : (\Sigma^n, \langle , \rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ tal que $\psi = \phi_f \circ \Psi$, donde $f = u \circ \Psi^{-1}$ con $u = -\langle \psi, \mathbf{e}_1\rangle$ y $\phi_f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ es el embebimiento

$$\phi_f(p) = (f(p), p, f(p)).$$

$$\begin{tikzcd} \Sigma^n \arrow[r, "u"] \arrow[d, shift left, "\Psi"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left, "\Psi^{-1}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Sigma^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, shift left, "\Psi"] & \mathcal{L} \subset \mathbb{L}^{n+2} \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left, "\Psi^{-1}"] \arrow[ur, "\phi_f"'] & \end{tikzcd}$$

En particular, la inmersión ψ es un embebimiento y es marginalmente atrapada excepto en los puntos donde $\Delta u = 0$ en Σ.

Demostración. Por un lado, sabemos por la Proposición 4.2.3 que existe una isometría $\Psi : (\Sigma^n, \langle , \rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ definida como

$$\Psi(p) = (\psi_2(p), ..., \psi_{n+1}(p)),$$

para todo $p \in \Sigma$. Ahora, si $f = u \circ \Psi^{-1}$ y ϕ_f es el embebimiento descrito en el Ejemplo 4.2.4, entonces para todo punto $p \in \Sigma$ se tiene que

$$\begin{aligned}\phi_f(\Psi(p)) &= (f(\Psi(p)), \Psi(p), f(\Psi(p))) = (u(\Psi^{-1} \circ \Psi)(p), \Psi(p), u(\Psi^{-1} \circ \Psi)(p)) \\ &= (u(p), \psi_2(p), ..., \psi_{n+1}(p), u(p)) = \psi(p).\end{aligned}$$

Finalmente, como ϕ_f y Ψ son inyectivas, entonces $\psi = \phi_f \circ \Psi$ es inyectiva y por tanto un embebimiento. □

Como consecuencia, podemos caracterizar las subvariedades espaciales de codimensión dos que factorizan a través de $\mathcal{L}$ con curvatura media paralela de la siguiente forma.

Corolario 4.2.6. Sea $\psi : \Sigma^n \to \mathcal{L} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ una subvariedad espacial de codimensión dos, completa que factoriza a través de $\mathcal{L}$ y tiene campo curvatura media paralelo. Entonces existe una isometría $\Psi : (\Sigma^n, \langle , \rangle) \to (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$ tal que $\psi = \phi_{\beta,c} \circ \Psi$, donde $\phi_{\beta,c} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L} \subset \mathbb{L}^{n+2}$ es el embebimiento

$$\phi_{\beta,c}(p) = (\beta(p) + c\|p\|^2, p, \beta(p) + c\|p\|^2)$$

para una función armónica β en $\mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Además:

(I) Σ es minimal si, y solo si, $c = 0$.

(II) Σ es marginalmente atrapada (futura) si, y solo si, $c < 0$.

(III) Σ es marginalmente atrapada (pasada) si, y solo si, $c > 0$.

Demostración. Como $\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_1 \rangle = -1$, se sigue de (4.3) que

$$\mathbf{H} = -\frac{\Delta u}{n}\mathbf{a}. \tag{4.4}$$

Por tanto, $\mathbf{H}$ es paralelo si, y solo si, Δu es constante en $(\Sigma, \langle , \rangle)$ ya que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$$\overline{\nabla}_X \mathbf{H} = \overline{\nabla}_X(-\frac{\Delta u}{n}\mathbf{a}) = -X(\frac{\Delta u}{n})\mathbf{a}.$$

Además, como $u = f \circ \Psi$ con Ψ una isometría entre $(\Sigma, \langle , \rangle)$ y $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$, que Δu sea constante es equivalente a que $\Delta_{\mathbb{R}^n} f$ sea constante en $(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{\mathbb{R}^n})$.

Ahora, consideremos la función

$$g(p) = \frac{\Delta_{\mathbb{R}^n} f}{2n}\|p\|^2$$

para todo punto $p \in \mathbb{R}^n$. Esta satisface que

$$\nabla^{\mathbb{R}^n} g = \frac{\Delta_{\mathbb{R}^n} f}{n} p \quad \text{y} \quad \Delta_{\mathbb{R}^n} g = \Delta_{\mathbb{R}^n} f.$$

Entonces, definiendo $\beta(p) = f(p) - g(p)$ tenemos que $\Delta_{\mathbb{R}^n}\beta = 0$, es decir, la función β es armónica en $\mathbb{R}^n$ y $f(p) = \beta(p) + c\|p\|^2$ donde $c = \frac{\Delta_{\mathbb{R}^n} f}{2n} \in \mathbb{R}$. Así, por (4.4) tenemos que

$$\mathbf{H} = -2c\mathbf{a},$$

de donde se deducen de forma directa (I), (II) y (III). $\square$

Bibliografía

[1] L. J. Alías, P. Mastrolia and M. Rigoli. *Maximum principles and geometric applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham, 2016.

[2] L. J. Alías, V. L. Cánovas and M. Rigoli. *Codimension two spacelike submanifolds of the Lorentz-Minkowski spacetime into the light cone*. Publicado online en Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 1-31. doi:10.1017/prm.2018.132.

[3] A. Avez. Applications de la formule de Gauss - Bonnet - Chern aux variétés à quatre dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris. **256** (1963), 5488-5490.

[4] S-S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 771-782.

[5] M. Dajczer. *Submanifolds and isometric inmersions*. Mathematics Lecture Series, 13. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990.

[6] M. P. Do Carmo. *Riemannian geometry*. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[7] J. Hersch. Quatre propriétrés isopérimétriques de membranes sphériques homogénes. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. **270** (1970), 1645-1648.

[8] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry Vol. I*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15. Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[9] J. -G. Ma and Z. -D. Wu. *On a theorem of J. Hersch*. Chinese Q. J. Math. **14** (1999), 32 - 36.

[10] B. O'Neill. *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York, 1983.

[11] O. Palmas, F. J. Palomo and A. Romero. *On the total mean curvature of a compact space-like submanifold in Lorentz-Minkowski spacetime*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **148** (2018), 199–210.

[12] F. J. Palomo and A. Romero. *On spacelike surfaces in four-dimensional Lorentz-Minkowski spacetime through a light cone*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **143** (2013), 881–892.

[13] R. Penrose. *Gravitacional collapse and space-time singularities*. Phys. Rev. Lett. **14** (1965), 57-59.

[14] S. Pigola, M. Rigoli and and A. G. Setti. *A remark on the maximum principle and stochastic completeness*. Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 1283 - 1288.

[15] R. Schoen and S-T Yau. *Proof of the positive mass theorem II*. Commun. Math. Phys. **79** (1981), 231-250.

[16] J. A. Schouten. Konforme Abbildung n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Z. **11** (1921), 58-88.

Índice alfabético