



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

MÁSTER EN MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

GRUPOS FINITOS Y DISCRETOS EN LAS GEOMETRÍAS EULÍDEA E HIPERBÓLICA

ENRIQUE MÁRMOL CAMPOS

DIRIGIDO POR
ALBERTO DEL VALLE ROBLES

Septiembre 2019

Declaración de originalidad. Yo, Enrique Mármol Campos, autor del Trabajo de Fin de Máster *Grupos de simetrías en geometrías euclídea e hiperbólica*, bajo la dirección de Alberto del Valle Robles, declaro que este trabajo es original en el sentido que he puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 6 de septiembre de 2019. Enrique Mármol Campos.

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Agradecimientos.

Este trabajo no hubiese sido posible sin la ayuda de:

- Mi tutor Alberto, por ayudarme en todo lo posible.
- Mi familia, por su apoyo constante.
- Mis compañeros de universidad Arturo, Giulia, Manu, María Jesús, Salva, y Sara, por hacer de los ratos en la universidad más llevaderos.
- Mis demás amigos, por animarme siempre que ha sido posible.

Índice general

Declaración de originalidad	2
Agradecimientos.	3
Introducción.	6
Prolegómenos.	11
Capítulo 1. Grupos de simetrías en espacios euclídeos.	12
1.1. Grupos de simetrías de frisos y mosaicos.	12
1.1.1. Frisos.	13
1.1.2. Mosaicos.	15
1.2. Grupos de simetrías en el espacio.	35
1.2.1. Comentario: Grupos cristalográficos en el espacio.	35
1.2.2. Simetrías de poliedros regulares.	35
1.2.3. Grupos de rotación finitos.	38
1.2.4. Aplicaciones a un problema de conteo.	43
Capítulo 2. Geometría hiperbólica.	46
2.1. Transformaciones de Möbius.	46
2.1.1. Proyección estereográfica y métrica cordal.	46
2.1.2. Transformaciones de Möbius. Propiedades básicas.	49
2.1.3. Clasificación por conjugación.	53
2.1.4. Clasificación por traza.	54
2.1.5. Aplicación geométrica.	56
2.1.6. Transformaciones que preservan “discos”.	61
2.1.7. Razón doble.	63
2.2. Métrica hiperbólica.	66
2.2.1. Densidades.	66
2.2.2. El modelo del semiplano.	68
2.2.3. El modelo del disco de Poincaré.	76
2.2.4. El grupo completo de isometrías.	78
2.3. Grupos discretos.	87
2.3.1. Grupos discontinuos.	87
2.3.2. Grupos discretos.	93

Índice general	5
2.3.3. Grupos Fuchsianos.	99
2.3.4. Conjunto límite de un grupo discreto.	104
2.4. Regiones fundamentales y teselaciones.	111
2.4.1. Regiones Fundamentales.	111
2.4.2. Construcción del polígono de Dirichlet.	114
2.4.3. Polígono de Ford.	123
2.4.4. Teselaciones hiperbólicas mediante grupos de simetrías.	129
Índice alfabético	132
Bibliografía	134

Introducción.

En esta memoria del Trabajo de Fin de Máster exploramos algunas de las muchas formas en las que la Teoría de Grupos conecta con otras ramas de las matemáticas para abordar problemas geométricos, tanto en el contexto euclídeo como en el hiperbólico.

En la primera parte trabajamos en la geometría euclídea, abordando algunos problemas clásicos como son la descripción de todos los grupos de simetrías de frisos y de mosaicos, la descripción de los grupos de simetría (y sus subgrupos de rotaciones) de los sólidos platónicos y la caracterización de los grupos finitos de rotaciones en el espacio, o sea los subgrupos finitos de SO_3 . En esta parte, los prerequisites y las herramientas teóricas que se necesitan corresponden básicamente a contenidos que se estudian en asignaturas de Álgebra del Grado en Matemáticas.

En la segunda parte trabajamos en el contexto de la geometría hiperbólica, con el objetivo final de estudiar las regiones fundamentales que dan lugar a las teselaciones regulares del plano; estas presentan una variedad mucho más amplia que en el caso euclídeo al relajarse mucho en este caso la restricción sobre la suma en los ángulos de un triángulo. Alcanzar este objetivo requiere una incursión en la geometría hiperbólica que obliga a desarrollar previamente nociones y herramientas más sofisticadas, algunas de las cuales no corresponden al Grado en Matemáticas y que requieren en cualquier caso interesantes conexiones entre conceptos que en el grado aparecen generalmente circunscritos a una de las áreas de estudio (álgebra, análisis, topología...). Básicamente se han desarrollado los modelos de Poincaré (disco y semiplano) que, al ser conformes, se adaptan bien al objetivo, y por tanto se ha llevado a cabo un estudio previo de las transformaciones de Möbius. También, el estudio de las teselaciones requiere un análisis previo de los grupos discretos que conservan la métrica.

Comentamos a continuación el desarrollo de los capítulos y secciones de la memoria.

En el primer capítulo, como hemos dicho, clasificamos los grupos de simetrías de frisos y de mosaicos en el plano euclídeo, describimos los grupos de simetría de los sólidos platónicos y caracterizamos los subgrupos finitos de SO_3 .

En la primera sección, cuya referencia principal es el libro *Groups and Symmetry* de Armstrong [1], analizamos los grupos de simetrías de frisos y mosaicos en el plano euclídeo.

En el caso más básico, los frisos (o cenefas) consisten en la repetición de un mismo patrón en la franja del plano delimitada por dos rectas paralelas. El grupo de simetrías G de tal figura (grupo de movimientos del plano que la llevan a sí misma) debe preservar su recta central l y sus

traslaciones deben estar generadas por una única traslación de vector paralelo a l . La preservación de l limita mucho las posibilidades para el *grupo puntual* J de G (su imagen por el homomorfismo que lleva un movimiento a la transformación ortogonal asociada) y un análisis de dichas opciones nos permite probar que hay exactamente 7 tipos de frisos.

Luego pasamos a los mosaicos, figuras obtenidas por repeticiones de un patrón que ocupan todo el plano “desarrollándose en dos dimensiones”. Esta condición se traduce en que el grupo G de simetrías de tal figura contiene un subgrupo de traslaciones H generado por dos traslaciones de vectores linealmente independientes. Estos vectores forman un paralelogramo “que se va repitiendo con el patrón” y que técnicamente tratamos como el retículo L de la órbita del origen por la acción de H . Dada la condición “discreta” de H , el par de vectores generadores se puede elegir con unas condiciones de minimalidad que limitan a 5 las posibilidades para el *paralelogramo fundamental* que se repite en el patrón. El grupo puntual J actúa en este retículo L , y esto a su vez limita también las opciones para J , lo que nos permite describir los 17 grupos de simetrías posibles para los mosaicos, a lo que añadimos argumentos que muestran que esas posibilidades son esencialmente distintas (grupos no isomorfos).

En la segunda sección, cuyas referencias principales son el mismo libro [1] de Armstrong y el *Algebra and Geometry* de Beardon [5], estudiamos grupos de simetrías de figuras tridimensionales. Por una parte describimos los grupos de simetrías de los cinco sólidos platónicos, que de hecho son solo tres por las dualidades entre parejas de sólidos. La estrategia consiste en describir los grupos de simetrías positivas (necesariamente rotaciones, al quedar fijo el baricentro) y a partir de ellos describir los grupos completos de simetrías.

Los grupos de rotaciones que aparecen son el simétrico S_4 y los alternados A_4 y A_5 , y se demuestra el notable resultado de que estos, junto con los cíclicos y los diédricos, son los únicos grupos finitos de rotaciones en el espacio.

La demostración de dicho resultado requiere un resultado muy útil de Burnside sobre el número de órbitas cuando un grupo actúa en un conjunto, y se ha aprovechado para incluir un breve apartado en el que se muestra una pincelada de cómo se puede usar esa idea para resolver determinados problemas de conteo.

En el segundo capítulo, cuya referencia principal es el libro *Una Introducción a la Geometría Hiperbólica Bidimensional* de Lascurain [13] y, en menor medida, *The geometry of discrete groups* de Beardon [6], se desarrollan los conceptos requeridos para poder estudiar las regiones fundamentales y las teselaciones regulares del plano hiperbólico, con un estudio previo de dos modelos clásicos de dicho plano (los del semiplano y del disco) y de los grupos discretos que actúan en él (grupos Fuchsianos).

La geometría hiperbólica nace en el siglo XIX por medio de Bolyai, Lobachevsky y Gauss como la primera geometría no euclidiana, en el sentido de que en el plano hiperbólico no se cumple la unicidad del quinto postulado de Euclides. Es decir, en este contexto, dadas una recta ℓ y un

punto exterior P , existe más de una recta que pasa por P y no corta a ℓ . La noción de recta ha de entenderse como línea geodésica (por la que se alcanza la menor longitud entre cualesquiera dos de sus puntos), y de hecho existe una infinidad de rectas por P que no cortan a ℓ .

Básicamente se han desarrollado los modelos de Poincaré (disco y semiplano) que, al ser conformes, se adaptan bien al objetivo, y por tanto se ha llevado a cabo un estudio previo de las transformaciones de Möbius.

De hecho, la existencia de una región fundamental para un grupo Γ que actúe isométricamente en el semiplano (subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$) obliga a que Γ sea discreto, por lo que se hace natural el estudio previo de esta condición, que constituye una parte importante de esta segunda parte de la memoria.

El plano hiperbólico admite diversos modelos, cada cual con sus ventajas y sus inconvenientes según el objetivo que se persiga. Los que mejor se adaptan al nuestro, por su naturaleza conforme son el disco y el semiplano de Poincaré, y para trabajar en ellos una herramienta fundamental son las transformaciones de Möbius en el plano complejo ampliado, a cuyo estudio dedicamos la primera sección del capítulo. Además de otras propiedades básicas (algunas de las cuales se estudian en el Grado), analizamos su clasificación por conjugación, que será esencial en todo el trabajo y que también se puede medir en términos de la traza. Y caracterizamos las que preservan el disco y el semiplano, destacando que estas últimas son “las que pueden expresarse con coeficientes reales”.

En la segunda sección del capítulo, tras definir la métrica inducida por una función de densidad, se presenta el modelo del semiplano para la geometría hiperbólica y, haciendo uso de los resultados de la sección anterior, se analizan diversas propiedades geométricas y en particular se describen fórmulas para la distancia y para las circunferencias y se determinan sus isometrías, sus geodésicas y las trayectorias de mínima distancia punto-recta.

Se traslada entonces la atención al modelo del disco de Poincaré. Ambos modelos son isométricos via la muy manejable función de Cayley, lo que nos permitirá trabajar en uno u otro modelo a conveniencia. En particular, resulta sencillo describir las isometrías del disco. Cabe señalar que existen otros modelos interesantes para el plano hiperbólico (todos isométricos), pero para este trabajo basta con analizar estos dos por tratarse de modelos conformes.

Finalmente, se define el grupo completo $GM(\hat{\mathbb{R}}^2)$ de isometrías de $\hat{\mathbb{R}}^2$ y se prueba que el subgrupo formado por los productos de un número par de reflexiones se puede identificar con el de las transformaciones de Möbius complejas. Usando esto, se prueba que la restricción al semiplano superior de reflexiones en círculos ortogonales al eje real son isometrías hiperbólicas y se caracterizan los círculos en \mathbb{R}^2 ortogonales al círculo unitario. Finalmente, se obtiene una fórmula explícita para la distancia hiperbólica en el disco y se muestra cómo expresar una transformación de Möbius (según su tipo) como composición de dos reflexiones en círculos.

Como ya hemos señalado al describir los grupos de mosaicos en el caso euclídeo, el carácter “discreto” de los subgrupos de traslaciones es esencial para establecer la clasificación, pues limita

mucho los tipos de retículos. En la tercera sección de este segundo capítulo se analizan cuestiones de esta naturaleza relativas a grupos de isometrías del plano hiperbólico.

Primero se analizan los grupos (subgrupos de $PSL(2, \mathbb{C})$) discontinuos, o sea aquellos para los que hay puntos de $\hat{\mathbb{C}}$ que no son “puntos límite” (puntos de acumulación de sus órbitas), se muestran algunos ejemplos y se demuestra que deben ser a lo sumo numerables. Se comparan entonces con los grupos discretos, o sea procedentes de grupos de matrices discretos, y se demuestra que coinciden con los discontinuos en el caso de subgrupos de $PSL(2, \mathbb{R})$, además de caracterizar los que son abelianos y los estabilizadores, y establecer algunas condiciones suficientes para que un grupo sea discreto.

Los subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan algún disco son precisamente los conjugados de subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{C})$ y se conocen como grupos fuchsianos. Por tanto, estos son los (conjugados de) grupos discretos de isometrías del plano hiperbólico. De entre ellos son especialmente importantes los que tienen como puntos límite precisamente a los puntos de $\hat{\mathbb{R}}$, llamados horocíclicos, de los que estudiamos sus subgrupos normales y normalizadores. Finalmente, vemos una curiosa condición suficiente para que un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ sea discreto, como es la de ser no abeliano y puramente hiperbólico.

En el último apartado de la sección se analizan propiedades del conjunto límite (conjunto de puntos límite), como la de ser un conjunto perfecto y nunca denso en el caso no elemental (o sea, cuando tiene más de dos puntos), y la de constar de puntos donde se acumulan todas las órbitas.

La memoria concluye con una sección en la que se analizan las teselaciones hiperbólicas del semiplano (o del disco) asociadas a un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ y los “bloques básicos” que las forman. En primer lugar se analiza la noción adecuada para trabajar con estos bloques, la de región fundamental, un conjunto tal que entre él y su clausura hay un conjunto completo e irredundante de representantes de las órbitas del grupo, y a continuación se abordan dos formas de construir tales regiones.

La primera de ellas es el polígono de Dirichlet que contiene a un punto, construido como la intersección de los semiplanos (que contienen al punto) determinados por las mediatrices de entre dicho punto y el resto de puntos de su órbita. Tras ver una serie de propiedades geométricas “naturales” que permiten hacer la construcción, se demuestra que tal polígono es en efecto una región fundamental abierta, se describen su frontera y su exterior en términos de comparación de distancias entre el punto y otros puntos de su órbita, y se dan ejemplos explícitos de la construcción en algunos casos sencillos. La segunda, útil en otras situaciones como la que se muestra en la memoria (aplicada al grupo clásico unimodular), es el polígono de Ford, que se define en términos del círculo isométrico $I(T)$ de una transformación de Möbius T (que no sea una traslación), consistente en los puntos para los que el factor de conformalidad es 1.

La memoria concluye con un breve apartado en el que se resalta, sin demostración, una notable diferencia entre el plano hiperbólico y el euclídeo, como es la posibilidad de teselar el plano con polígonos regulares de cualquier número de lados.

Finalmente, señalaremos que en la memoria se ha tratado de dar crédito a todas las fuentes, incluidas las de las imágenes (algunas de las cuales son de elaboración propia), y se ha generado un índice terminológico para facilitar la localización de las definiciones y notaciones que se usan.

Prolegómenos.

En el desarrollo de este trabajo se usarán nociones básicas de análisis, topología, que han desarrollado durante el grado, y teoría de grupos. En el caso de análisis se usan conceptos de continuidad, derivabilidad, integración, y resultados básicos de transformaciones de Möbius entre otros. Para el caso de las de topología, se usarán nociones de compacidad, conexidad y sucesiones en general. Todas ellas se usarán sin previa mención ni demostración de sus propiedades, ya que, como se ha mencionado al principio, al haber sido definidas en el grado y ser propiedades básicas, se dan por sabidas, y así no se alarga innecesariamente el trabajo.

En cuanto a la teoría de grupos, muchas de ellas son definiciones y resultados que se han visto en el grado. Otras, como nociones de acciones y órbitas, no se han visto en el grado. Algunas de sus propiedades se usan sin mencionar, pero otros resultados se enunciarán antes de usarse pero sin demostración. Sin embargo, todas ellas se pueden ver en [15].

Capítulo 1

Grupos de simetrías en espacios euclídeos.

En este capítulo describiremos los grupos de simetrías para el caso euclídeo. Empezaremos primero viendo los frisos, cuya descripción ha sido sacada de [2, 7, 18]. Describiremos qué movimientos dejan fija la franja y cuántos tipos de frisos hay. Luego pasaremos a detallar lo mismo pero en el caso de los mosaicos, viendo qué diferentes tipos de paralelogramo fundamental se pueden formar que dan pie a la forma del retículo y los correspondientes movimientos que lo fijan y veremos cuántos tipos de mosaicos hay.

1.1. Grupos de simetrías de frisos y mosaicos.

Sea E_2 el grupo euclídeo, es decir, el grupo de las isometrías de \mathbb{R}^2 . Tenemos que las simetrías de una figura plana se miden por un grupo, en este caso como un subgrupo de E_2 , cuyos elementos van a ser las isometrías del plano que envían dicha figura a sí misma. Clasificaremos los grupos que puedan ser obtenidos de esta manera como grupos de simetría de patrones en dos dimensiones, llamados patrones de mosaicos, cuando tengan un subgrupo de traslaciones generado por dos vectores linealmente independientes.

En esta sección denotaremos cada isometría en el plano como el par (\mathbf{v}, M) , donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ y $M \in O_2$, donde O_2 denota al grupo de las matrices ortogonales 2×2 . Con lo que si $g = (\mathbf{v}, M)$, entonces

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{v} + M\mathbf{x}$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Definimos $\pi : E_2 \rightarrow O_2$ mediante $\pi(\mathbf{v}, M) = M$. Se ve fácilmente que π es un homomorfismo y su núcleo consiste en las traslaciones (\mathbf{v}, I) . Ahora, si G es un subgrupo de E_2 , denotaremos H a $G \cap T$, donde T es el grupo de todas las traslaciones de \mathbb{R}^2 , y J a $\pi(G)$. Llamaremos a H el *subgrupo de traslaciones* y a J el *grupo puntual*. La restricción de π a G es un homomorfismo suprayectivo de G a J cuyo núcleo es H . Por lo tanto por el primer teorema de isomorfía tenemos que $J \cong G/H$. Con esta notación vamos a tener que si $h = (\mathbf{w}, N)$ y $g = (\mathbf{v}, M)$, entonces $gh(\mathbf{x}) = g(\mathbf{w} + N\mathbf{x}) = \mathbf{v} + M(\mathbf{w} + N\mathbf{x}) = (\mathbf{v} + M\mathbf{w}) + MN\mathbf{x}$, y entonces $gh = (\mathbf{v} + M\mathbf{w}, MN)$, es decir, van a formar un producto semidirecto.

Vamos a obtener que en general estos subgrupos de E_2 van a estar limitados en caso en el que sean finitos.

TEOREMA 1.1.1. *Un grupo finito de O_2 es o cíclico o diédrico.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo finito no trivial de O_2 . Supongamos que G esta dentro de SO_2 , donde SO_2 denota al grupo especial ortogonal, formado por las matrices ortogonales 2×2

con determinante igual a 1, por tanto cada elemento de G representa una rotación en el plano. Denotamos A_θ a la matriz de giro antihorario de ángulo θ en el origen, y tomamos $A_\varphi \in G$ donde φ es positivo y lo más pequeño posible, aquí es donde se necesita que G sea finito. Dado $A_\theta \in G$ dividimos θ entre φ para tener que $\theta = k\varphi + \psi$, donde k es entero y $0 \leq \psi < \varphi$, entonces $A_\theta = A_{k\varphi+\psi} = (A_\varphi)^k A_\psi$ y $A_\psi = (A_\varphi)^{-k} A_\theta$. Ya que A_θ y A_φ están en G , entonces A_ψ también está en G . Por la elección de φ nos da que $\psi = 0$. Luego G está generado por A_φ y por tanto es cíclico.

Si G no está totalmente contenido en SO_2 , definimos $H = G \cap SO_2$. Entonces H es un subgrupo de G de índice 2, y por la parte anterior va a ser cíclico por estar contenido en SO_2 . Tomamos r un generador de H y s un elemento de $G \setminus H$. Como s representa una reflexión tenemos que $s^2 = \text{id}$. Si r fuese el elemento neutro entonces G sería el grupo cíclico de orden 2. En otro caso, r va a tener orden entero $n \geq 2$. Por tanto, los elementos de G van a ser

$$\{e, r, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$$

y se va a cumplir que $rs = sr^{-1}$. Por lo tanto estamos ante el grupo diédrico. □

1.1.1. Frisos.

El contenido y dibujos de este apartado han sido sacados de [2, 7, 18]. Un friso consiste en repetir un determinado motivo, siguiendo determinados patrones, para rellenar una franja, o sea una superficie delimitada por dos rectas paralelas. Con lo cual un grupo de simetría de un friso va a ser un grupo de isometrías del plano que deja invariante la recta l equidistante de las rectas paralelas y cuyas únicas traslaciones son las del grupo generado por la traslación de un determinado vector u en la dirección de dicha recta l . Tomando un sistema de referencia adecuado, la invarianza de la franja lleva a que deja fijo el eje x , los únicos giros van a ser los de ángulos 0 y π , con matrices I y $A_\pi = -I$ respectivamente, las únicas posibles simetrías son aquellas cuyos ejes son la recta l y las rectas perpendiculares a esta, con matrices B_0 y B_π , donde

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. Tenemos que $J \leq \{I, A_\pi, B_0, B_\pi\} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, donde hay 5 posibles subgrupos más dos subcasos para los subgrupos que contienen a B_0 .

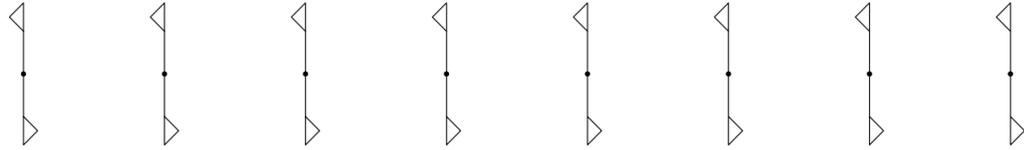
Por tanto los grupos de simetrías van a quedar determinados por el grupo J y por las simetrías que estén contenidas. Con lo que van a ser 7 casos:

- (a) $J = \{I\}$, es decir, el grupo sólo está compuesto por las traslaciones. Este caso correspondería al siguiente patrón, donde el vector de traslación es el que uno dos puntos consecutivos:

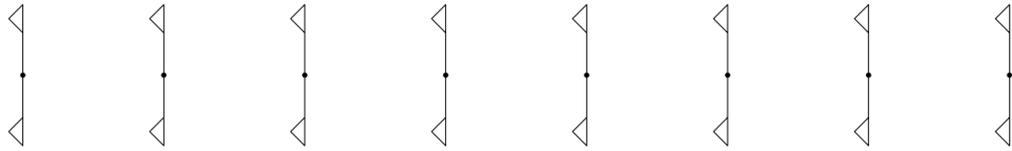


- (b) $J = \{I, A_\pi\}$. En este caso, además de las traslaciones existan giros de 180° . Al componer uno de los giros con la traslación de vector u se obtiene un giro con el centro desplazado

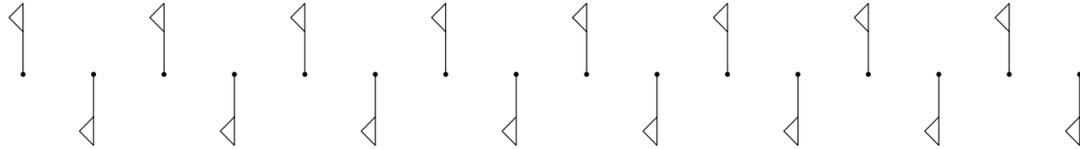
$\frac{1}{2}u$. El patrón quedaría reflejado de la siguiente manera, donde los centros de las rotaciones son los puntos marcados y los puntos medios de estos:



- (c) $J = \{I, B_0\}$, y suponemos que B_0 se realiza como una simetría, es decir, que G contiene a la simetría sobre l . Aquí tenemos además de las traslaciones las simetrías respecto a la recta l , y todas las simetrías con deslizamiento sobre l con vector un múltiplo entero de u .



- (d) $J = \{I, B_0\}$, pero en este caso B_0 no puede realizarse como una simetría, sino que tiene que proceder de una simetría con deslizamiento. Al aplicar dos veces esta simetría vamos a obtener una traslación de G cuyo vector es de la forma ku con $k \in \mathbb{Z}$, por lo que el vector de deslizamiento va a ser $\frac{k}{2}u$. Si $k = 2n$ es par, tenemos que si componemos la traslación de $-nu$ con la simetría con deslizamiento obtenemos la simetría del caso (c). Si $k = 2n - 1$ es impar, aplicando la misma composición obtenemos la simetría con deslizamiento de vector $\frac{1}{2}u$, y obtenemos el siguiente patrón, donde el vector entre dos puntos consecutivos es $\frac{1}{2}u$.



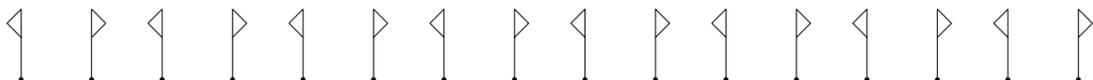
- (e) $J = \{I, B_\pi\}$, donde B_π es la simetría vertical. Sabemos que existe un vector $w = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ tal que $(w, B_\pi) \in G$, por lo que también va a estar el cuadrado

$$(w, B_\pi)^2 = (w + B_\pi w, B_\pi^2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu \end{pmatrix}, I \right)$$

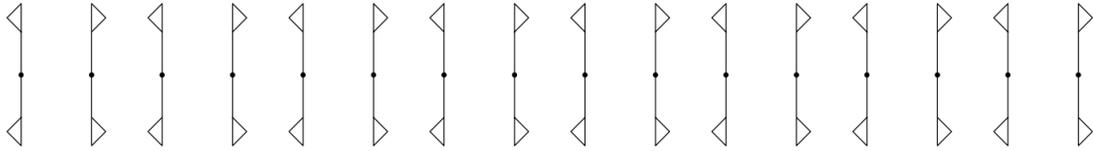
y como en G solamente hay traslaciones horizontales, $\mu = 0$. Por tanto, el sistema para ver los puntos fijos

$$(I - B_\pi|w)$$

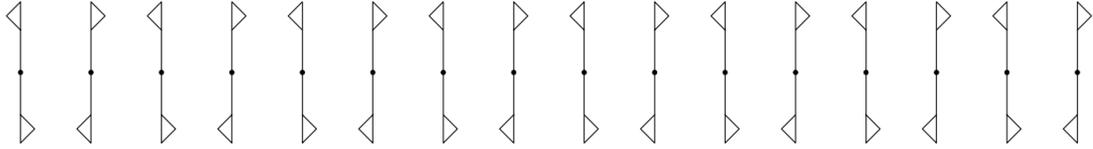
es compatible y B_π se realiza como simetría (de eje vertical). Cuando se compone esta simetría con la traslación (u, I) se obtiene una simetría con el eje desplazado $\frac{1}{2}u$, por lo que el patrón será de este tipo, donde el vector entre dos puntos es $\frac{1}{2}u$ y hay ejes verticales por los puntos medios de cada dos de los puntos marcados consecutivos:



- (f) $J = \{I, A_\pi, B_0, B_\pi\}$, y suponemos que B_0 se realiza como simetría sobre el eje l . Ya sabemos que B_π seguro que se realiza como simetría por el apartado (e), y por tanto también tenemos todas las simetrías con ejes verticales trasladados por $\frac{1}{2}u$ y sus múltiplos. Este patrón quedará reflejado de la siguiente manera, con los ejes verticales como en el caso anterior, y centros de giro en los puntos medios de cada dos puntos consecutivos, en particular, los centros de giro están en los ejes de las simetrías verticales:



- (g) $J = \{I, A_\pi, B_0, B_\pi\}$, pero B_0 no puede realizarse como simetría sin deslizamiento. De manera análoga al caso (d) y caso (f) vemos que el patrón quedaría así, donde ahora los centros de giro son los puntos marcados, y no están en los ejes de simetrías verticales:

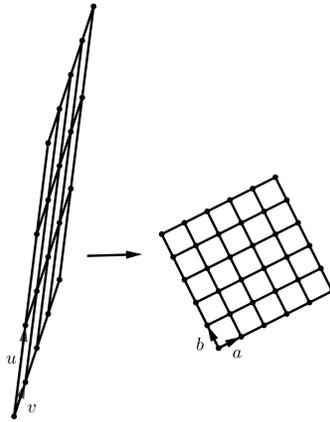


1.1.2. Mosaicos.

Aquí el contenido e imágenes han sido sacados principalmente de [1], otros dibujos son originales. En este caso estudiaremos las posibles formas de reproducir un mismo patrón que cubra infinitamente toda una superficie. Definimos a un subgrupo de E_2 como grupo (de simetría) de un mosaico si su subgrupo de traslaciones H está generado por dos vectores independientes y su grupo puntual J es finito.

Para clasificarlos, primero vamos a necesitar obtener información sobre el subgrupo de traslaciones y el grupo puntual.

A partir de ahora denotaremos como G a un grupo de un mosaico con subgrupo de traslaciones H generado por traslaciones de vectores independientes \mathbf{u} y \mathbf{v} , o sea, $H = G \cap T = \langle t_{\mathbf{u}}, t_{\mathbf{v}} \rangle = \{t_{n\mathbf{u}+m\mathbf{v}}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$, y grupo puntual J . Sea L la órbita del origen bajo la acción de H en \mathbb{R}^2 , o sea $L = \mathbb{Z}\mathbf{u} + \mathbb{Z}\mathbf{v} = \{n\mathbf{u} + m\mathbf{v}\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$. Entonces L consiste en las intersecciones de un enlosado hecho a base de repeticiones del rectángulo determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} . Pero estos vectores iniciales se pueden cambiar por otros. Por ejemplo, si $\mathbf{u} = (1, 3)$ y $\mathbf{v} = (1, 8)$ los puntos forman el retículo L .



En este caso, haciendo operaciones elementales con coeficientes enteros en la matriz , pasamos de

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Y por tanto, si llamamos $\mathbf{a} = (2, 1)$ y $\mathbf{b} = (-1, 2)$, tenemos que $L = \mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$. O sea, L se puede describir a partir de un enlosado de lados más cortos (aunque las losas tienen igual área). Además, en este ejemplo parece claro que las longitudes de \mathbf{a} y \mathbf{b} no son mejorables, en el sentido de que no podemos encontrar otros con longitudes menores. Cuando esto ocurra diremos que tenemos un *paralelogramo fundamental*.

Veamos que esto siempre se puede conseguir. Dado $L = \mathbb{Z}\mathbf{u} + \mathbb{Z}\mathbf{v}$ escogemos un vector no nulo \mathbf{a} de menor longitud en L (esto es posible porque L no tiene puntos de acumulación), y un segundo vector \mathbf{b} que no sea un múltiplo de \mathbf{a} de longitud lo más pequeña posible. Entonces:

TEOREMA 1.1.2. *El conjunto L es el retículo generado por \mathbf{a} y \mathbf{b} . Es decir, L consiste en las combinaciones lineales $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ donde $m, n \in \mathbb{Z}$, o sea $L = \mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$.*

DEMOSTRACIÓN. En primer lugar, la correspondencia $(\mathbf{v}, I) \rightarrow \mathbf{v}$ es un isomorfismo entre T y el grupo aditivo \mathbb{R}^2 que envía H a L . Por tanto, L es un subgrupo de \mathbb{R}^2 y cada punto de la forma $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$ pertenece a L .

Recíprocamente, supongamos en busca de una contradicción que existe $x \in L$ pero que no pertenece a $\mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$. Podemos dividir el plano en paralelogramos usando los puntos del retículo $\mathbb{Z}\mathbf{a} + \mathbb{Z}\mathbf{b}$. Escogemos la esquina \mathbf{c} más cercana a \mathbf{x} , $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ va a ser un vector distinto de cero, ya que \mathbf{x} no está en el retículo, tampoco va a ser igual a \mathbf{a} o a \mathbf{b} , \mathbf{x} estaría en el retículo, y su longitud va a ser menor que $\|\mathbf{b}\|$, ya que existiría otro \mathbf{c}' que estaría más cerca de \mathbf{x} . Como \mathbf{a} es de menor

longitud, en definitiva vamos a tener $\|\mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| < \|\mathbf{b}\|$, y además, $\mathbf{x} - \mathbf{c}$ está en L y no es múltiplo de \mathbf{a} , lo que nos da la contradicción buscada. \square

Vamos a clasificar los diferentes tipos de retículos que se pueden formar a partir del paralelogramo fundamental. Al final tendremos que vana ser 5 posibilidades. De propiedades del retículo de G y del grupo puntual de G vamos a construir información sobre G . Podemos reemplazar \mathbf{b} por $-\mathbf{b}$ si es necesario para asegurar que

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|.$$

Con esta suposición tenemos los cinco diferentes tipos de retículos:

- (a) Oblicuo $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
- (b) Rectangular $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
- (c) Rectangular centrado $\|\mathbf{a}\| < \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
- (d) Cuadrado $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$
- (e) Hexagonal $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$

Estos cinco casos quedan reflejados en la siguiente imagen:

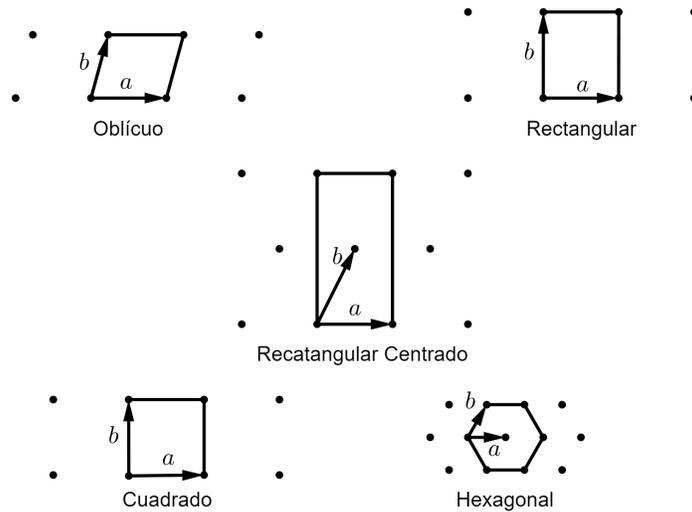


FIGURA 1.1.1. Tipos de retículos

En verdad nos quedaria un posible caso más en el que $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| < \|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|$ en el que el paralelogramo fundamental es un rombo, pero como sus diagonales se cortan en angulo recto tomando $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ los nuevos vectores que formen el paralelogramo fundamental tenemos el caso (c).

TEOREMA 1.1.3. *El grupo puntual J actúa en el retículo L .*

DEMOSTRACIÓN. El grupo puntual, al ser un subgrupo de O_2 , actúa en el plano de la manera usual. Si $M \in J$, y si $\mathbf{x} \in L$, tenemos que ver que $M\mathbf{x} \in L$. Supongamos que $\pi(g) = M$ donde $g = (\mathbf{v}, M)$ y sea τ la traslación (\mathbf{x}, I) . Como H es el núcleo del homomorfismo π , es un grupo normal de G , y por tanto $\tau^g = g\tau g^{-1}$ está en H . Pero

$$\begin{aligned} g\tau g^{-1} &= (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x}, I)(-M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1}) \\ &= (\mathbf{v}, M)(\mathbf{x} - M^{-1}\mathbf{v}, M^{-1}) \\ &= (\mathbf{v} + M(\mathbf{x} - M^{-1}\mathbf{v}), MM^{-1}) \\ &= (\mathbf{v} + M\mathbf{x} - \mathbf{v}, I) \\ &= (M\mathbf{x}, I) \end{aligned}$$

entonces $M\mathbf{x}$ va a pertenecer a L . □

TEOREMA 1.1.4. *El orden de una rotación en el grupo de un mosaico sólo puede ser 2, 3, 4, o 6.*

DEMOSTRACIÓN. Cada rotación va a tener orden finito ya que el grupo puntual es finito. Si tenemos una rotación de orden q en el grupo, también está en el grupo una rotación de ángulo $\theta = \frac{360}{q}$. Por tanto, la matriz de rotación

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

pertenece a J . Como antes, llamamos \mathbf{a} al vector no nulo de mínima longitud. Como J actúa en L , tenemos que $A\mathbf{a}$ está en L . Supongamos que $q > 6$, entonces θ es menor de 60° y $A\mathbf{a} - \mathbf{a}$ es un vector de L que va a ser menor que \mathbf{a} , lo cual es imposible. Ahora, si $q = 5$, tenemos que el ángulo entre $A^2\mathbf{a}$ y $-\mathbf{a}$ es 36° , y por tanto, $A^2\mathbf{a} + \mathbf{a}$ va a ser menor que \mathbf{a} . □

TEOREMA 1.1.5. *Un isomorfismo entre grupos de un mosaico lleva traslaciones a traslaciones, rotaciones a rotaciones, simetrías a simetrías, y simetrías con deslizamiento a simetrías con deslizamiento.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\phi : G \rightarrow G'$ un isomorfismo entre grupos de un mosaico, sea τ una traslación. Las traslaciones y simetrías con deslizamiento tienen orden infinito, mientras que las rotaciones y simetrías tienen orden finito. Por tanto, $\phi(\tau)$ debe ser otra traslación o una simetrías con deslizamiento. Supongamos que es una simetría con deslizamiento, cojamos una traslación $\tau' \in G'$ que no conmute con $\phi(\tau)$ (cualquiera cuya dirección no sea paralela al deslizamiento de $\phi(\tau)$). Si $\phi(g) = \tau'$, entonces g tiene que ser una traslación o una simetría con deslizamiento. Pero g^2 va a ser una traslación seguro, y por tanto va a conmutar con τ , contradiciendo que $\phi(g^2) = \tau'^2$ que no conmuta con $\phi(\tau)$. Con lo cual traslaciones van a traslaciones y simetrías con deslizamiento van a simetrías con deslizamiento.

Las simetrías tienen orden 2, por lo tanto su imagen va a ser o una simetría o una media vuelta. Sea $g \in G$ una simetría cuya imagen $\phi(g)$ es una media vuelta. Tomemos una traslación τ de G en una dirección que no es perpendicular al eje de simetría de g . Entonces τg es una simetría con

deslizamiento, pero $\phi(\tau g) = \phi(\tau)\phi(g)$ que es el producto de una traslación con un medio giro, que también es un medio giro. Luego, tenemos una contradicción, por lo que simetrías van a simetrías, y consecuentemente, rotaciones van a rotaciones. \square

COROLARIO 1.1.6. *Si dos grupos de un mosaico son isomorfos, entonces sus grupos puntuales también lo son.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G, G' grupos de un mosaico con grupos de traslaciones H y H' y grupos puntuales J, J' respectivamente. Si $\phi : G \rightarrow G'$ es el isomorfismo, tenemos por lo anterior que $\phi(H) = H'$. Luego ϕ induce un isomorfismo entre G/H y G'/H' . Y como los grupos puntuales son en efecto estos grupos cociente, tenemos el resultado. \square

Vamos ahora a hacer una clasificación de los distintos grupos de un mosaico que puede haber. Van a ser un total de 17, para obtenerlos todos vamos a examinar cada uno de los 5 posibles tipos del paralelogramo fundamental. Primero, dado un retículo L veremos qué transformaciones ortogonales preservan L . Estas transformaciones van a formar un grupo, y por 1.1.3 el grupo puntual de cualquier grupo de un mosaico que tenga a L como su retículo va a ser un subgrupo de este grupo. Esta limitación del grupo puntual va a ser suficiente para enumerar los diferentes grupos de mosaicos.

Antes de nada comenzaremos con la notación que vamos a usar. El nombre de cada grupo de un mosaico va a constar de letras (p, c, m, g) y números (1, 2, 3, 4, 6). La p viene de la palabra primitivo, que es cuando el retículo esta formado copias del paralelogramo fundamental sin que ningún punto quede en medio. En un caso, el retículo rectangular centrado, tomaremos copias no primitivas con su centro como estructura básica central, en este caso usaremos la c que viene de retículo centrado. Usaremos m para las simetrías (del inglés mirror) y g denotará a las simetrías con deslizamiento (en inglés glide). Y los numeros van a corresponder al orden de la rotaciones. Como aclaración de la notación, vamos a representar los giros de orden 2, 3, 4 y 6 como \circ , \blacktriangle , \square y \bullet respectivamente. Los mirrors serán líneas gruesas, mientras que los glides serán líneas discontinuas.

Vamos a proceder ahora a la clasificación. A modo de recordatorio A_θ va a ser la matriz de giro antihorario θ sobre el origen y B_ϕ va a ser la reflexión cuyo eje de simetría es la bisectriz del ángulo ϕ con respecto al eje x positivo. O sea,

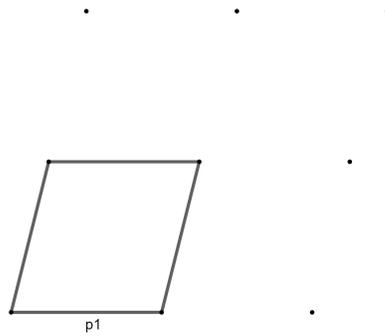
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \phi \end{pmatrix}$$

A los elementos del grupo G los denotaremos $\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, M \right)$, donde M es la matriz ortogonales y λ y μ son los coeficientes de la traslación $\lambda a + \mu b$, donde a y b son los vectores que generan el retículo.

Comenzamos la distinción de casos según la forma del retículo.

- (a) El retículo de G es oblicuo. Entonces solo va a haber dos transformaciones que van a mantener L , que son la identidad y el giro de ángulo π . Por lo que $J \leq \{\pm I\}$

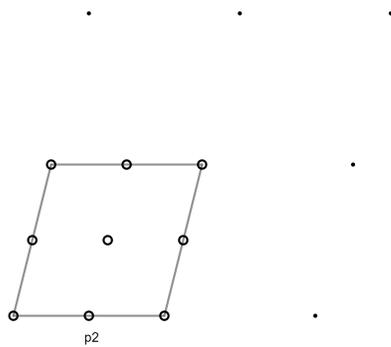
(p1) Si $J = \{I\}$. El grupo puntual solamente constaría de la matriz identidad, entonces el grupo de un mosaico G sería el generado por las traslaciones de los dos vectores independientes, es decir, los elementos $\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, I\right)$, donde m y n son enteros. En los esquemas que siguen se marcan siempre 9 puntos del retículo que determinan 4 “losas”, y en una de ellas se representan los centros de giro y los ejes de simetrías y de glides. Al final de la sección representaremos los diseños de los mosaicos.



(p2) Si $J = \{\pm I\}$. En este caso G contiene a los medios giros. Tomamos uno de los puntos fijos de estas rotaciones como origen, para que $(0, -I)$ pertenezca a G . La unión de estas dos clases laterales H y $H(0, -I)$ nos da el grupo G . Por una parte tenemos las traslaciones y por otro los elementos de la clase $H(0, -I)$ tienen la forma

$$\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, I\right)(0, -I) = \left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, -I\right).$$

Y resolviendo el sistema de puntos fijos obtendremos que sus centros van a ser los puntos $\frac{m}{2}\mathbf{a} + \frac{n}{2}\mathbf{b}$.



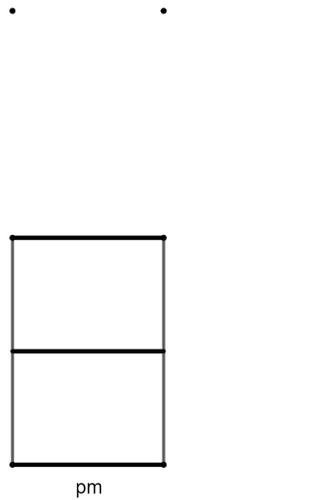
(b) El retículo de G es rectangular. En este caso tenemos que las transformaciones que van a preservar L son, aparte de la identidad, los medios giros, y las reflexiones sobre el eje horizontal y el vertical. Por lo tanto, el grupo puntual es un subgrupo de $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$.

Obviamente nos salen además los casos anteriores, pero aquí nos centraremos en los que no hemos visto.

(pm) Si $J = \{I, B_0\}$ y B_0 se realiza como un mirror. De manera similar al caso (p2), tomamos el origen en la base de ese mirror, para que $(0, B_0) \in G$. Por lo que tendremos las clases laterales H y $H(0, B_0)$. Y los elementos de este último van a ser de la forma

$$\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, I \right) (0, B_0) = \left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, B_0 \right).$$

Y de manera análoga resolvemos el sistema de puntos fijos para ver cuáles van a ser los ejes de estas simetrías, y son los de la forma $\frac{n}{2}\mathbf{a}$, es decir, rectas horizontales que pasan por el retículo y sus puntos medios.

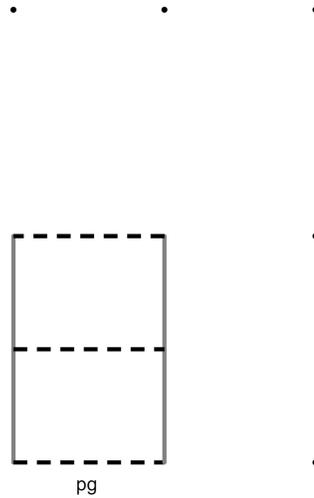


(pg) Si $J = \{I, B_0\}$. Pero en este caso en este caso la reflexión B_0 no puede realizarse como mirror sino como glide, es decir, que tiene que ser una simetría con deslizamiento obligatoriamente. Cualquier simetría con deslizamiento podemos representarla como otra simetría con deslizamiento en el que su vector es paralelo al eje de simetría. Como en los frisos, aplicando dos veces esta glide tenemos una traslación, por lo que nuestra glide será de la forma $(\frac{k}{2}\mathbf{a}, B_0)$. Si k es par, componiendo con $(\frac{k}{2}\mathbf{a}, I) \in G$ tendríamos que $(0, B_0)$ estaría en G , que es el caso anterior. Con lo cual, k es impar, y componiendo con $(\frac{1-k}{2}\mathbf{a}, I) \in G$, tenemos que $(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$ está en G . De igual manera G va a constar de las clases laterales H y $H(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$. Los elementos de este último van a ser

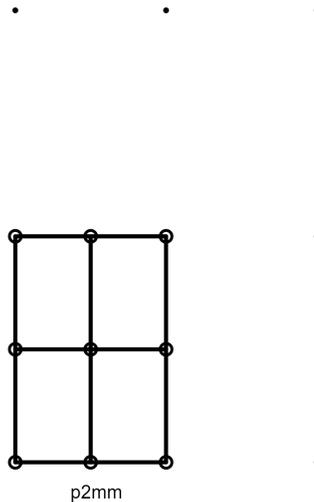
$$\left(\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}, I \right) \left(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0 \right) = \left(\begin{pmatrix} m + \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix}, B_0 \right).$$

Que de vector $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ nos dan los mismos ejes que el caso (pm) pero en este caso hay deslizamiento.

Si en vez de $\{I, B_0\}$ hubieramos cogido $\{I, B_\pi\}$, en este caso los papeles de horizontal y vertical se intercambiarían y saldría el mismo caso.



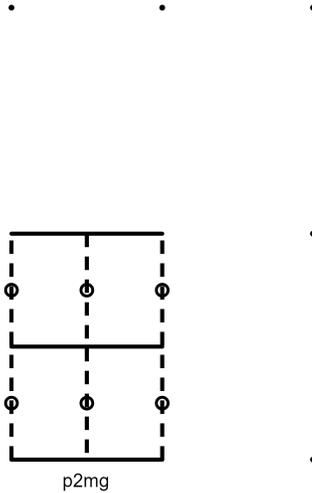
(p2mm) Si $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$, y B_0 y B_π se pueden realizar como simetrías. En este caso situamos el origen en el corte de las bases de $(0, B_0)$, $(0, B_\pi)$ y $(0, -I)$. Tenemos ahora que G va a ser la unión de las clases laterales $H, H(0, B_0), H(0, B_\pi)$ y $H(0, -I)$. Estas clases laterales nos darán los mismos ejes de simetrías de los casos anteriores y los centros de rotaciones en los puntos medios como en el caso (p2).



(p2mg) Si $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$, pero en este caso digamos que, por ejemplo, que B_π no puede realizarse como simetría. Siguiendo un procedimiento similar al de (pg) tenemos que $(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi) \in G$, como asumimos que $(0, B_0) \in G$, uniendo estos dos movimientos tenemos

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi\right)(0, B_0) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I\right) \in G.$$

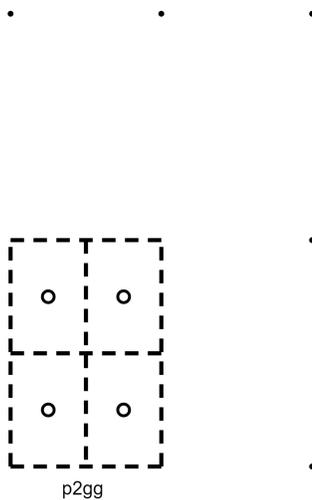
Con lo que tenemos que G va a ser la unión de las clases laterales H , $H(0, B_0)$, $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)$, y $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$. Todos menos el último nos han salido antes, el primero son las traslaciones, el segundo son los mirror horizontales, el tercero son los glides verticales, y el ultimo un rápido cálculo nos da que son los medios giros con centro en $\frac{1}{2}m\mathbf{a} + \frac{1}{2}(n + \frac{1}{2})\mathbf{b}$ para m y n enteros.



(p2gg) Si $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$, pero ahora no tenemos reflexiones sin deslizamiento. Ahora tenemos que $(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)$ y $(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$ están en G . Haciendo

$$\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi\right)\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0\right)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, -I\right).$$

Como en los casos anteriores G va a ser la unión de las clases laterales H , $H(\frac{1}{2}\mathbf{a}, B_0)$, $H(\frac{1}{2}\mathbf{b}, B_\pi)$, y $H(\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, -I)$, y los elementos de este último son las medias vueltas sobre los centros $\frac{1}{4}(2m + 1)\mathbf{a} + \frac{1}{4}(2n + 1)\mathbf{b}$.



(c) El retículo de G es rectangular centrado. En este caso las transformaciones ortogonales que preservan L son las mismas que en el rectangular, por lo que J un subgrupo de $\{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Sin embargo, en este caso tenemos dos nuevos grupos.

(cm) Suponemos que $J = \{I, B_0\}$ y que (v, B_0) realiza B_0 en G . Esta isometría va a ser o la simetrías en el eje horizontal o un glide sobre el eje horizontal. Tomamos un punto sobre una simetría o sobre el glide de la línea sobre el origen, así $2v$ va a ser un múltiplo de a . En este caso hay que tener en cuenta que $2b - a$ va a ser perpendicular a a .

Si $2v = ka$ y k es par, entonces la reflexión

$$(0, B_0) = (-\frac{1}{2}ka, I)(\frac{1}{2}ka, B_0)$$

va a pertenecer a G . Los elementos de G que no son traslaciones van a ser de la forma

$$(ma + nb, B_0) = ((m + \frac{1}{2}n)a + \frac{1}{2}n(2b - a), B_0)$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$. Tomando n par y $m = -\frac{1}{2}n$ van a producir todas las reflexiones en las simetrías horizontales que pasan por los puntos del retículo. Si n es par pero $m \neq -\frac{1}{2}n$, estas simetrías van a ser glides, donde la parte de traslación de estas glides va a ser un múltiplo de a . Finalmente, si n es impar, tenemos glides sobre líneas que pasan por los puntos medios de los puntos del retículo, y la parte de traslación va a ser um múltiplo impar de $\frac{1}{2}a$.

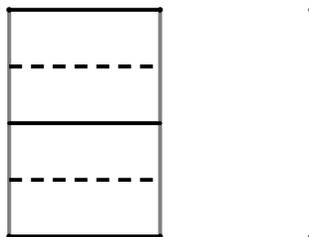
Si k es impar, entonces

$$(\frac{1}{2}(2b - a), B_0) = (-\frac{1}{2}(k + 1)a + b, I)(\frac{1}{2}ka, B_0)$$

está en G . Esto otra vez en una reflexión por ser $2b - a$ perpendicular a a y cambiando el punto de origen en la intersección de sus simetrías, tenemos el caso anterior.

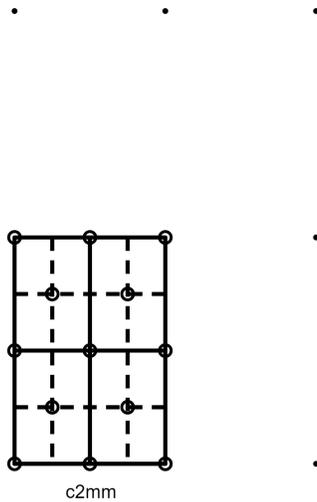
Y si consideramos que $J = \{I, B_\pi\}$, nos va a dar un grupo isomorfo, ya que en este caso los glides los perpendiculares a las del caso anterior anterior.

• • •



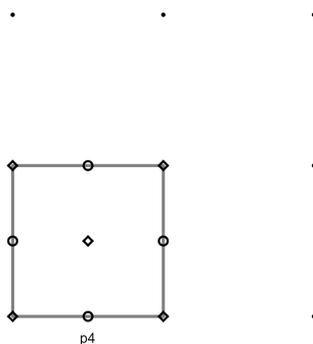
cm

(c2mm) Si $J = \{I, -I, B_0, B_\pi\}$. Haciendo los mismos cálculos del caso anterior, y uniendo los resultados de $\{I, B_0\}$ y de $\{I, B_\pi\}$, tenemos las reflexiones resultantes.



(d) El retículo de G es cuadrado. En este caso el grupo de transformaciones ortogonales que dejan fijo el retículo es el grupo diédrico de orden 8 generado por $A_{\frac{\pi}{2}}$ y B_0 . Por lo que el grupo puntual va a ser un subgrupo de este. Como el cuadrado puede ser considerado como un caso especial de un rectángulo o de un rectángulo centrado, luego si J es un subconjunto de $\{I, -I, B_0, B_\pi, B_{\frac{\pi}{2}}, B_{\frac{3\pi}{2}}\}$ va a ser un caso anteriormente expuesto. Para comprobar que es un caso especial del rectángulo centrado lo que tenemos que hacer es girar la rejilla $\frac{\pi}{4}$ y tomar como base del rectángulo el vector $a + b$, y como altura el vector $b - a$. Estos dos vectores son perpendiculares, y b y $a + b$ van a formar un triángulo isósceles. Y también $\langle a, b \rangle = \langle a + b, b \rangle$.

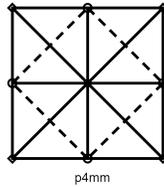
(p4) Si $J = \langle A_{\frac{\pi}{2}} \rangle$. Tenemos que G será la union de las clases laterales $H, H(0, A_{\frac{\pi}{2}}), H(0, -I)$ y $H(0, A_{-\frac{\pi}{2}})$. Como en los anteriores casos, los centros de los elementos de $H(0, A_{\frac{\pi}{2}})$ van a ser los puntos $\frac{m-n}{2}\mathbf{a} + \frac{m+n}{2}\mathbf{b}$, y van a tener orden 4. Los elementos de $H(0, A_\pi)$ ya los hemos obtenidos anteriormente, y para los elementos de $H(0, A_{-\frac{\pi}{2}})$ nos van a salir los mismos centros que de $H(0, A_{\frac{\pi}{2}})$.



(p4mm) Si $J = \langle A_{\frac{\pi}{2}}, B_0 \rangle$, en el caso en el que B_0 se pueda realizar como mirror. En este caso todas las clases laterales van a ser:

$$\begin{aligned} H & H(0, B_0) \\ H(0, A_{\frac{\pi}{2}}) & H(0, B_{\frac{\pi}{2}}) \\ H(0, -I) & H(0, B_{\pi}) \\ H(0, A_{\frac{3\pi}{2}}) & H(0, B_{\frac{3\pi}{2}}) \end{aligned}$$

Todas las tenemos analizadas menos $H(0, B_{\frac{\pi}{2}})$ y $H(0, B_{\frac{3\pi}{2}})$. La primera resolviendo el sistema de los puntos fijos, nos va a salir un mirror en la diagonal $m = -n$ cuando se tenga solución, y glides paralelos a este mirror que pasan por los puntos medios del retículo en otro caso. Para $H(0, B_{\frac{3\pi}{2}})$ unas cuentas análogas nos dan lo mismo pero esta vez la orientación es la otra diagonal.



(p4gm) Si $J = \langle A_{\frac{\pi}{2}}, B_0 \rangle$, pero ahora B_0 no puede realizarse como mirror. Cojamos como origen uno de los centros de rotación de orden 4, así tendremos $(0, A_{\frac{\pi}{2}}) \in G$. Como siempre, al aplicar dos veces el glide vamos a tener el elemento $(2ka, I)$, y $2k$ va a ser entero. Si $2k$ es par, combinando los movimientos

$$(-k\mathbf{a}, I)\left(\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}, -I\right) = (n\mathbf{b}, B_0)$$

y unos sencillos cálculos más nos llevarían a que $(0, B_0)$ estaría en G , lo cual es imposible. Por lo que $2k$ es impar, y por tanto

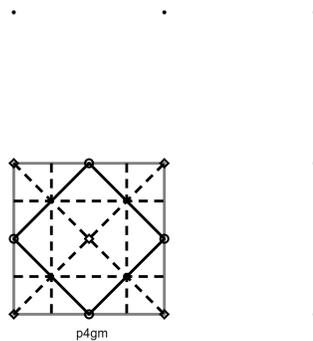
$$\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{pmatrix}, B_0\right) = \left(\left(\frac{1}{2} - k\right)\mathbf{a}, I\right)\left(\begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}, B_0\right) \in G$$

y una serie de cuentas análogas nos da que $(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_0) \in G$. Entonces, las clases laterales que forman G van a ser:

$$\begin{array}{cc} H & H(0, A_{\frac{\pi}{2}}) \\ H(0, -I) & H(0, A_{\frac{3\pi}{2}}) \\ H(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_0) & H(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_{\frac{\pi}{2}}) \\ H(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_{\pi}) & H(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_{\frac{3\pi}{2}}) \end{array}$$

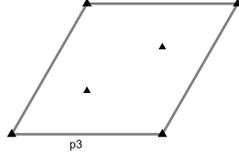
La mitad superior ya la conocemos, de la otra mitad la iremos analizando uno a uno. Los elementos de $H(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_0)$ van a ser de la forma $(\begin{pmatrix} m + \frac{1}{2} \\ n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_0)$, que calculando la solución del sistema nos va a dar que es imposible que sea mirror, por lo que solamente tendremos glides. Un rapido calculo para ver cual es su vector de deslizamiento y su eje, nos da que van a ser los glides en las rectas horizontales sobre $(\frac{n}{2} + \frac{1}{4})\mathbf{b}$. Para $(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_{\pi})$ nos saldrá lo mismo que en caso anterior sólo que con rectas verticales.

Los elementos de $H(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_{\frac{\pi}{2}})$ son de la forma $(\begin{pmatrix} m + \frac{1}{2} \\ n + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B_{\frac{\pi}{2}})$, que tendrá solución cuando $m + n + 1 = 0$, lo que nos dará un mirror sobre la recta $(m + \frac{1}{2})\mathbf{a} + (m + 1)\mathbf{b}$. Pero cuando no se cumpla la condición saldrá un glide en la diagonal con pendiente -1. Por otro lado, los elementos de el último va a ser lo mismo que en el anteriores, pero con sentido contrario.



- (e) El retículo de G es hexagonal. En este caso las transformaciones ortogonales que dejan fijo el retículo va a ser el grupo diédrico de orden 12. En el caso del rectangular centrado, los vectores \mathbf{a} y \mathbf{b} formaban un triángulo isósceles. Aquí, los vectores forman un triángulo equilátero, que es un caso particular, por lo que cuando el grupo puntual J sea un subgrupo de orden 2 o 4, obtendremos un caso del apartado (c). Entonces, nos fijaremos cuando J contiene rotaciones de orden 3 o 6.

(p3) Si $J = \langle A_{\frac{2\pi}{3}} \rangle$. Si tomamos como origen el centro de un giro tendremos que $(0, A_{\frac{2\pi}{3}}) \in G$, por lo que las clases laterales son $H, H(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$ y $(0, A_{\frac{4\pi}{3}})$. El primero son traslaciones. El segundo, resolviendo el sistema nos va a salir que son las rotaciones con centros en $(\frac{n-m}{3}, \frac{2m+n}{3})$. Y el último nos va a dar los mismos centros. En este caso, tenemos de nuevo que $2b - a$ es perpendicular a a .



(p3m1) Si $J = \langle A_{\frac{2\pi}{3}}, B_0 \rangle$. Si tomamos como origen cualquier centro de rotación tenemos que $(0, A_{\frac{2\pi}{3}}) \in G$ como siempre. En este caso vamos a ver que $(0, B_0) \in G$. En general

vamos a tener una simetría del tipo $(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, B_0)$ en G , y por tanto:

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, B_0\right)^2 = \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}, B_0\right) = \left(\begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, I\right)$$

por lo que λ es entero. Multiplicando por $(0, A_{\frac{2\pi}{3}})$ tenemos

$$(0, A_{\frac{2\pi}{3}})\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, B_0\right) = \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, B_{-\frac{2\pi}{3}}\right)$$

y

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}, B_{-\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \left(\begin{pmatrix} \lambda - \mu \\ \mu - \lambda \end{pmatrix}, B_{-\frac{2\pi}{3}}\right)$$

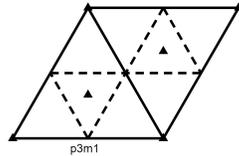
y como λ es entero, μ lo va a ser también. Componiendo con $(\begin{pmatrix} -\lambda \\ -\mu \end{pmatrix}, I)$, tenemos

$$(0, B_0) \in G$$

Cálculos análogos también nos van a llevar que las demás simetrías de J se realizan como mirrors. Por lo que vamos a tener las siguientes clases laterales:

$$\begin{array}{ll} H & H(0, A_{\frac{2\pi}{3}}) \\ H(0, A_{\frac{4\pi}{3}}) & H(0, B_0) \\ H(0, B_{-\frac{2\pi}{3}}) & H(0, B_{\frac{2\pi}{3}}) \end{array}$$

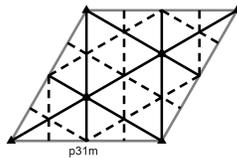
Las clases laterales de las rotaciones nos van a dar los mismos centros de rotación del caso anterior. Y las de las simetrías nos van a dar los ejes de simetría de ángulo $0, \frac{\pi}{3}$ y $\frac{2\pi}{3}$, con sus respectivos glides paralelos pasando por los puntos medios.



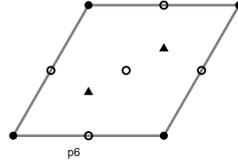
(p31m) Si $J = \langle A_{\frac{2\pi}{3}}, B_{\frac{\pi}{3}} \rangle$. Del mismo modo que el caso anterior, con una serie de cálculos elementales nos da que todas las simetrías tienen puntos fijos. Con lo que tenemos las clases laterales

$$\begin{array}{ll} H & H(0, A_{\frac{2\pi}{3}}) \\ H(0, A_{\frac{4\pi}{3}}) & H(0, B_{\pi}) \\ H(0, B_{\frac{\pi}{3}}) & H(0, B_{-\frac{\pi}{3}}) \end{array}$$

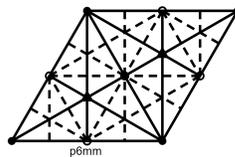
Que, análogamente, las clases laterales de las rotaciones nos darán los mismos centros que nos han dado antes, y las clases de las simetrías nos darán el eje que va en la diagonal del retículo, el que va de un punto medio de la base al vértice de arriba, y el que va del vértice de arriba al punto medio del lateral del retículo.



(p6) Si $J = \langle A_{\frac{\pi}{3}} \rangle$. En este caso tenemos que las clases laterales son H por todas las potencias de la rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$. Pero solamente deberemos centrarnos en la clase lateral $H(0, A_{\frac{\pi}{3}})$, ya que el caso $A_{\frac{2\pi}{3}}$ y $A_{\frac{4\pi}{3}}$ lo hemos descrito antes y dará los centros de rotación en los puntos $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ y $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, a parte de otros pero estos quedarán solapador con otros de mayor orden. El caso $A_{\frac{\pi}{2}} = -I$ ya ha sido descrito en multitud de ocasiones y nos da centros de rotación de orden 2 en los puntos medios del retículo y en el centro. Y el caso $A_{\frac{5\pi}{3}}$ va a dar los mismos centro que el caso $A_{\frac{\pi}{3}}$. Con lo cual, resolviendo el sistema para hallar los puntos fijos de la matriz de rotación $A_{\frac{\pi}{3}}$ nos sale que los centros van a ser los vértices del retículo, y van a tener orden 6.



(p6mm) Si $J = \langle A_{\frac{\pi}{3}}, B_0 \rangle$. Este caso es más bien simple, porque las clases laterales van a ser todas las de los anteriores casos, y como ya las hemos descrito, simplemente va a ser una combinación de todo lo anterior.



Y esta sería la descripción de los 17 grupos. Solamente queda por ver que de hecho todos estos 17 son distintos entre sí, como adelante, nos saldrá que lo son. Por el teorema 1.1.6, solamente tenemos que verlo para grupos que tienen el mismo grupo puntual.

Vamos a describir una tabla donde comparemos los grupos puntuales:

G	J	G	J
p1	trivial	p4	\mathbb{Z}_4
p2	\mathbb{Z}_2	p4mm	D_4
pm	\mathbb{Z}_2	p4gm	D_4
pg	\mathbb{Z}_2	p3	\mathbb{Z}_3
p2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	p3m1	D_3
p2mg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	p31m	D_3
p2gg	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	p6	\mathbb{Z}_6
cm	\mathbb{Z}_2	p6mm	D_6
c2mm	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$		

En esta tabla vemos que podemos formar varios grupos, quitando lo que están formados por un elemento, tenemos el grupo \mathbb{Z}_2 con p2, pm, pg y cm. Con $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ tenemos p2mm, p2mg, p2gg y c2mm. Con D_4 a p4mm y p4gm. Y con D_3 p3m1 y p31m. Ahora veamos una serie de teoremas que nos aseguran que los grupos de cada caso no son isomorfos entre ellos. Recordemos que si existieran estos isomorfismos tendrían que llevar traslaciones a traslaciones, rotaciones a rotaciones y demás.

TEOREMA 1.1.7. *Ninguno de los grupos $p2$, pm , pg y cm son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. De entre todos estos tenemos que $p2$ solo contiene rotaciones, por lo que no puede ser isomorfo a ninguno. Tenemos que pg no contiene simetrías, por lo que tampoco es isomorfo a ninguno de los otros. Ahora, en pm tenemos que cada glide está compuesto por una simetría y una traslación, y cada uno de estos movimientos pertenece a pm . Sin embargo, en cm no funciona así, ya que el glide

$$\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(2b - a), B_0\right) = \left(\frac{1}{2}a, I\right)\left(\frac{1}{2}(2b - a), B_0\right)$$

pero $\left(\frac{1}{2}a, I\right)$ no pertenece a cm . □

TEOREMA 1.1.8. *Ninguno de los grupos $p2mm$, $p2mg$, $p2gg$ y $c2mm$ son isomorfos.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $p2gg$ no contiene reflexiones, por lo que no será isomorfo a ninguno. De los otros tres, $p2mm$ solo contiene reflexiones, por lo que no es isomorfo a los otros. Respecto a $p2mg$ y $c2mm$, tenemos que las reflexiones en $p2mg$ son horizontales, por lo que la composición de dos será una traslación, mientras que en $c2mm$ tenemos reflexiones verticales y horizontales, y la composición de una vertical con otra horizontal va a ser una rotación de ángulo π , por lo que no son isomorfo entre ellos. □

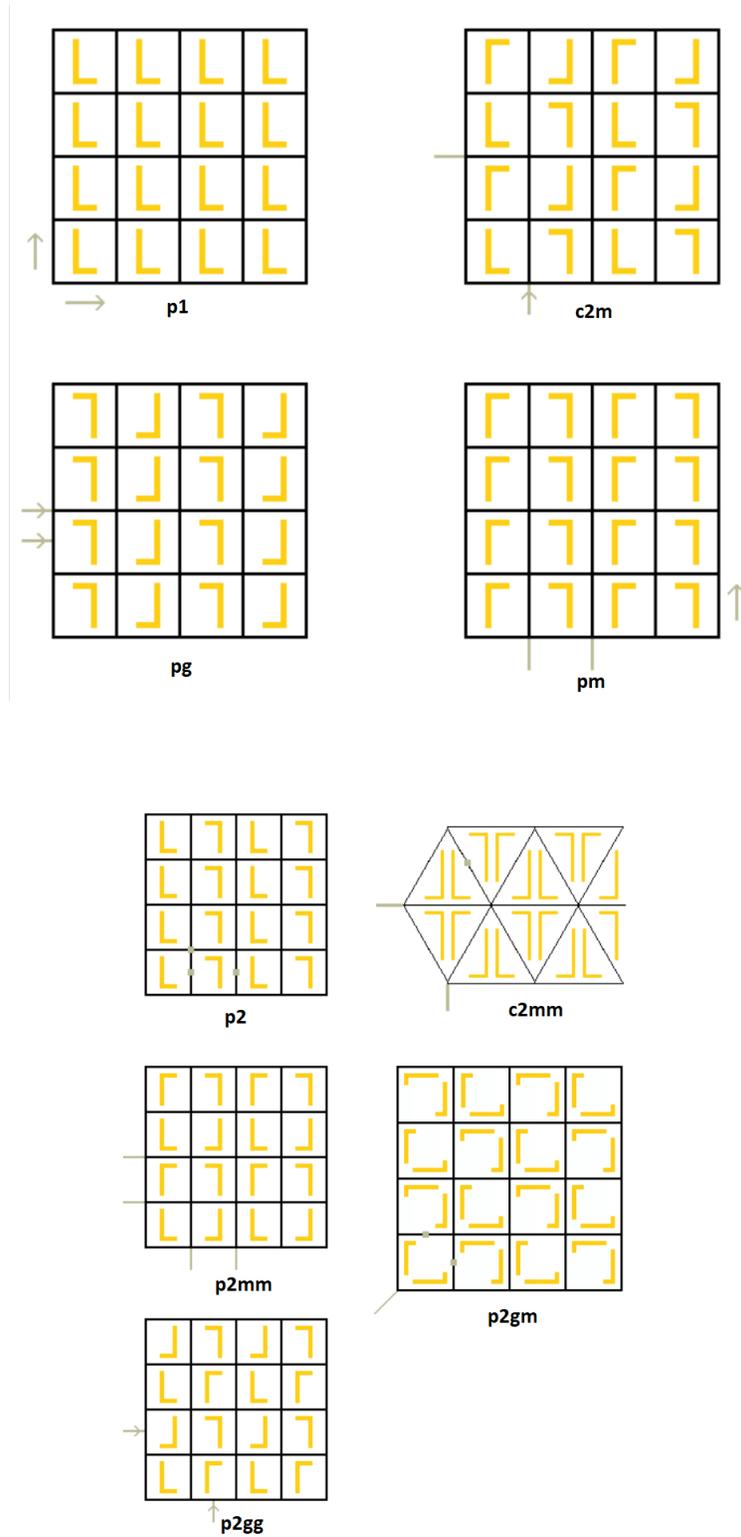
TEOREMA 1.1.9. *$p4mm$ no es isomorfo a $p4gm$.*

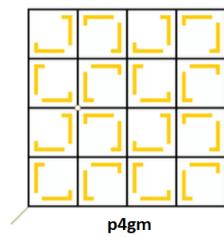
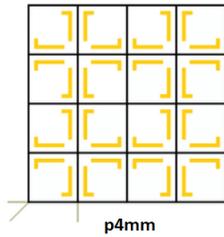
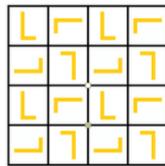
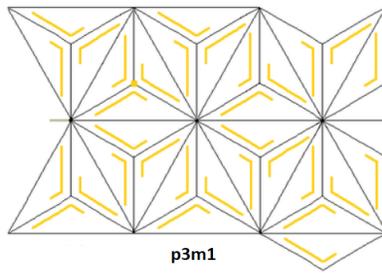
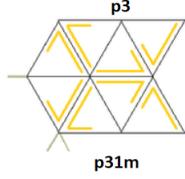
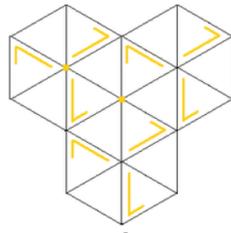
DEMOSTRACIÓN. Del grupo $p4mm$ cada rotación de orden 4 se puede poner como composición de dos simetrías que pertenezcan al grupo, mientras que en $p4gm$ no es así. Por ejemplo, tomamos la rotación de orden 4, y la centramos en el baricentro del polígono. Como el giro de $\frac{\pi}{2}$ se puede poner como la composición de una simetría con pendiente 0 y otra con pendiente $\frac{\pi}{4}$ que pasen por el baricentro. En el caso de $p4mm$ estas dos simetrías pertenecen al grupo, pero en el caso de $p4gm$ no se pueden obtener. Con lo cual no van a ser isomorfos. □

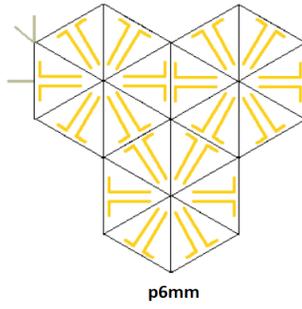
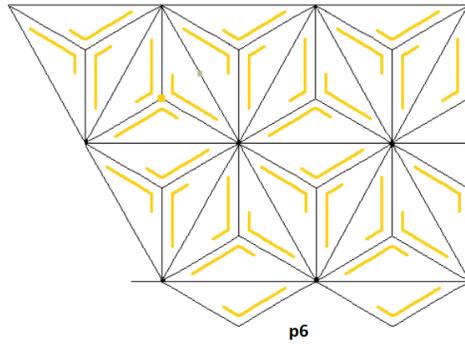
TEOREMA 1.1.10. *$p3m1$ no es isomorfo a $p31m$.*

DEMOSTRACIÓN. En $p31m$ cada rotación de orden 3 puede ser escrita como el producto de dos reflexiones del grupo, mientras que en $p3m1$ no es así. Un ejemplo de esto es el giro $(a, A_{\frac{2\pi}{3}})$, que mediante argumentos análogos al teorema de antes se tiene. □

Y con esto concluiría nuestra clasificación de los 17 grupos de un mosaico . Ahora damos un vistazo general de como serían los diseños, que han sido sacadas de [4]:







1.2. Grupos de simetrías en el espacio.

En esta sección hay un doble objetivo principal: describir los grupos de rotaciones de los poliedros regulares (que van a ser el grupo simétrico S_4 y los grupos alternados A_4 y A_5) y determinar todos los grupos de rotaciones del espacio que son finitos (que son los cíclicos, los diédricos y los tres anteriores). Además, al hilo de los argumentos que vamos a usar, vemos un ejemplo interesante (que es solo uno de muchos posibles ejemplos similares) de cómo se puede usar la idea de acción de un grupo en un conjunto para cierto tipo de problemas de conteo, y antes de eso incluimos un comentario sobre los grupos cristalográficos, que serían el análogo en 3 dimensiones de los mosaicos.

Recordemos que las isometrías del espacio euclídeo son:

- La identidad.
- Traslaciones.
- Rotaciones sobre una recta l .
- Rotaciones sobre una recta l seguido de una traslación paralela a l .
- Reflexiones sobre un plano Π .
- Reflexiones sobre un plano Π seguido de una traslación paralela a Π .
- Rotaciones sobre un eje l seguido de una reflexión en un plano perpendicular.

Los 4 primeros van a preservar la orientación, mientras que los tres restantes la invierten.

1.2.1. Comentario: Grupos cristalográficos en el espacio.

En esta apartado daremos un breve vistazo, sin atender mucho a los detalles, a los grupos de simetría en tres dimensiones. Al igual que los mosaicos y frisos, los grupos cristalográficos estarán caracterizados si su subgrupo puntual es finito y su subgrupo de las traslaciones está generado por 3 vectores independientes.

De manera análoga a los mosaicos, los tres vectores independientes van a formar un paralelepípedo fundamental, cuya unión con los otros formarán el retículo. Teniendo en cuenta la longitud de los vectores y de los ángulos que formen entre ellos va a haber 14 tipos de retículos distintos. Su grupo puntual va a tener 32 posibilidades. Y juntándolo todo hay un total de 230 posibles grupos. Cuya descripción más completa queda reflejada en [12].

1.2.2. Simetrías de poliedros regulares.

Un poliedro regular es aquel que está hecho uniendo un número finito de polígonos regulares que sean congruentes, cada polígono tiene p lados y van a concurrir q de ellos en cada vértice. Diremos que este poliedro es del tipo (p, q) . A estos poliedros los vamos a denominar como sólidos platónicos.

Si proyectamos un poliedro del tipo (p, q) en el plano, podemos ser capaces de colocar q de los polígonos juntos, en el plano sin que se superpongan unos con otros, cada uno teniendo un vértice en el origen. De hecho, la suma de sus ángulos van a ser menor estrictamente que 2π , por tanto p

y q deben satisfacer que

$$q\left(\pi - \frac{2\pi}{p}\right) < 2\pi.$$

Mediante cálculos elementales tenemos que implica que

$$(p-2)(q-2) < 4.$$

Asumimos que obviamente $p, q \geq 3$, por lo que los únicos tipos que lo van a cumplir son $(3,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(4,3)$ y $(5,3)$. Con lo cual tenemos 5 sólidos platónicos.

Consideremos un poliedro regular de tipo (p, q) y supongamos que tiene C caras, A aristas y V vértices. Por la fórmula de Euler, se tiene que cumplir que $C + V - A = 2$. Como por cada arista hay dos caras y cada cara tiene p aristas, entonces $2A = pC$. Y por cada arista hay dos vértices, y en cada vértice confluyen q arista, por lo que $2A = qV$. Juntando estas tres ecuaciones vamos a tener un sistema compatible determinado cuyas incógnitas son C , A , y V y su solución es

$$C = \frac{4q}{2p+2q-pq}, \quad A = \frac{2pq}{2p+2q-pq}, \quad V = \frac{4p}{2p+2q-pq}.$$

Por la propiedad de que $(p-2)(q-2) < 4$ se cumple que $2p+2q-pq > 0$.

Damos ahora una tabla resumiendo las posibilidades

	p	q	C	V	A
Tetraedro	3	3	4	4	6
Cubo	4	3	6	8	12
Octaedro	3	4	8	6	12
Dodecaedro	5	3	12	20	30
Icosaedro	3	5	20	12	30

Una vez determinados todos los poliedros regulares, para cada uno de ellos consideramos G^+ como el grupo de las rotaciones de \mathbb{R}^3 que dejan el poliedro invariante, lo que va a suponer que inducen una permutación de los vértices. En la siguiente demostración se asumirán ciertos resultados básicos geométricos como ciertos sin demostración.

TEOREMA 1.2.1. *El grupo de rotaciones G^+ de un poliedro regular con A aristas tiene orden $2A$.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que q p -ágonos confluyen en cada vértice v , por lo que va a existir una rotación de orden q que fija v y deja al poliedro invariante. Esta rotación permuta las q aristas que salen de v , por lo que el estabilizador de cada vértice es un grupo cíclico de orden q . Finalmente, como con sucesivas rotaciones podemos llevar un vértice a cualquier otro, la órbita de un vértice cualquiera v es el conjunto de todos los vértices. Si ahora aplicamos la ecuación de órbitas tenemos que G^+ tiene orden $qV = 2A$. \square

Si centramos cualquier sólido platónico en el origen, sea σ una simetría sobre algún plano en el origen que deje invariante el poliedro tendremos que el grupo completo de las isometrías G va a

ser la unión de los conjuntos G^+ y σG^+ , y con lo cual

$$|G| = |G^+| + |\sigma G^+| = 2|G^+|.$$

Pasemos ahora a un análisis más en profundidad de estos grupos. Antes de nada recordamos que dos poliedros son duales si cada uno puede obtenerse a partir del otro uniendo con segmentos los centros de cada dos caras contiguas. En este caso, si uno de ellos tiene V vértices, A aristas y C caras, el otro poliedro tiene C vértices, A aristas y V caras. En el caso de los sólidos platónicos tenemos que el tetraedro es dual a si mismo (autodual), el cubo y el octaedro son duales, y el dodecaedro y el icosaedro son duales.

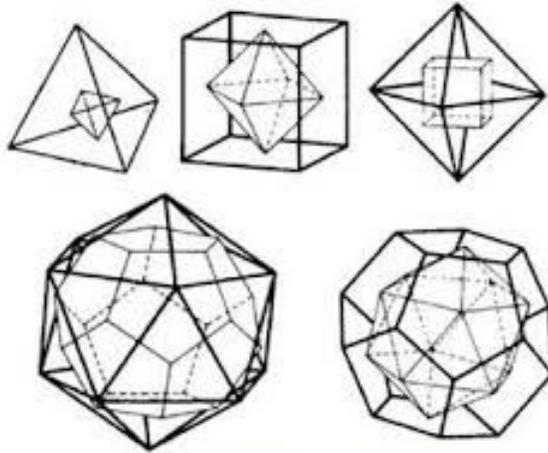


FIGURA 1.2.1. Dualidad de los sólidos platónicos

En cada poliedro regular, pensemos en la recta que une su baricentro con un vértice. En el caso del tetraedro, esta recta pasa por el punto medio de la cara opuesta y es el eje de una rotación ("de tipo V ") de orden $q = 3$ (número de caras que confluyen en el vértice) del tetraedro. Obsérvese que hay $V = 4$ de esos ejes y en cada uno hay $q - 1 = 2$ rotaciones no triviales. En los otros cuatro poliedros, esa recta pasa por el vértice opuesto y es el eje de una rotación de orden q del poliedro. Hay $V/2$ ejes así, y para cada uno tenemos $q - 1$ rotaciones no triviales del poliedro. Un argumento similar cambiando vértices por centros de caras nos da rotaciones "de tipo C " que coinciden con las de tipo V en el tetraedro, y en los demás sólidos nos dan $C/2$ ejes con $p - 1$ rotaciones no triviales sobre cada uno de ellos. Finalmente, en los 5 sólidos, las rectas que pasan por el baricentro y el punto medio de una arista siempre pasan por el punto medio de una arista opuesta (paralela a la original salvo en el tetraedro) y dan rotaciones "de tipo A " de orden 2, para un total de $A/2$ rotaciones no triviales en cada caso.

Esto nos da 12 rotaciones en el tetraedro: la identidad, $4 \times 2 = 8$ de tipo V (o C) y 3 de tipo A ; como sabemos que $|G^+| = 2A = 12$, esas son todas las rotaciones del tetraedro. Similarmente hemos descrito $1 + \frac{[(q-1)V + (p-1)C + A]}{2}$ rotaciones en los otros sólidos y en todos los casos ese número coincide con $2A$, por lo que han quedado descritas todas sus rotaciones.

Para el tetraedro, si numeramos sus 4 vértices hay un homomorfismo evidente $G^+ \rightarrow S_4$. Las imágenes de las rotaciones de tipo V (o C) son todos los 3-ciclos, mientras que las rotaciones de tipo A dan todas las permutaciones de tipo $[2, 2]$, lo que nos da el isomorfismo con A_4 .

Para el cubo, si numeramos sus 4 diagonales obtenemos un homomorfismo $G^+ \rightarrow S_4$. En este caso las imágenes de las rotaciones de tipo V y de tipo A son, respectivamente, todos los 3-ciclos y todos los 2-ciclos. Las rotaciones de tipo C de orden 4 van a los 4-ciclos, y las de orden 2 a las permutaciones de tipo $[2, 2]$, lo que nos da el isomorfismo con S_4 . Para el octaedro se obtiene el mismo grupo de rotaciones por dualidad, pues cada rotación del cubo genera una rotación del octaedro inscrito, y viceversa.

Finalmente, para el icosaedro (y, por dualidad, para el dodecaedro), sus 20 caras se dividen en 5 grupos, en cada uno de los cuales los centros de las 4 caras determinan un tetraedro. Con un poco más de dificultad que en los casos anteriores se puede ver que, para el correspondiente homomorfismo $G^+ \rightarrow S_5$, las rotaciones de tipo V y de tipo C dan, respectivamente, todos los 5-ciclos y todos los 3-ciclos, mientras que las de tipo A van a las permutaciones de tipo $[2, 2]$, lo que nos da el isomorfismo con A_5 .

En definitiva, hemos probado que el grupo de rotaciones del tetraedro es A_4 , los del cubo y el octaedro son S_4 , y los del dodecaedro y el icosaedro son A_5 .

En cuanto a los grupos completos de simetrías G de estos poliedros, sabemos que son de la forma $G = G^+ \cup \sigma G^+$, donde σ es una simetría especular sobre un plano que preserva el poliedro.

En cuanto al tetraedro, claramente hay un homomorfismo $G \rightarrow S_4$ cuya imagen contiene estrictamente a A_4 y por tanto es un isomorfismo $G \cong S_4$. Interpretándolo geoméricamente, en el tetraedro hay 6 simetrías especulares, que fijan los planos que contienen a cada arista y al punto medio de la opuesta, y que en el isomorfismo anterior van a parar a los 2-ciclos. Si fijamos una de ellas, sobre plano Π , y la componemos con las 6 rotaciones cuyo eje está contenido en Π (que son la identidad, 4 rotaciones de orden 3 y uno de orden 2) obtenemos estas 6 simetrías especulares, mientras que si la componemos con las otras 6 rotaciones (4 de orden 3 y 2 de orden 2) obtenemos 6 rotaciones con simetría que, en el isomorfismo, corresponden a los 4-ciclos.

En el cubo, si componemos la simetría especular sobre un plano paralelo a dos caras con la rotación de orden 2 de eje perpendicular a ese plano, obtenemos una rotación con simetría de orden 2 que manda cada vértice a su opuesto. Ese movimiento conmuta con todas las rotaciones del cubo, puesto que es $-I$. Esto permite establecer un isomorfismo entre G y $S_4 \times C_2$. Por dualidad, también el grupo completo de simetrías del octaedro es $S_4 \times C_2$.

Análogamente, en el icosaedro (y en el dodecaedro), si componemos la simetría especular sobre un plano que contiene a dos aristas opuestas con la rotación de orden 2 de eje perpendicular a ese plano, obtenemos una rotación con simetría de orden 2 que manda cada vértice a su opuesto y que permite establecer un isomorfismo entre G y $A_5 \times C_2$.

1.2.3. Grupos de rotación finitos.

Aparte de los grupos A_4 , S_4 y A_5 que acabamos de describir, tenemos que para otros poliedros aparecen los grupos cíclicos C_n , en el caso de una pirámide de base un n -ágono regular, y D_n en el caso de un prisma con bases un n -ágono regular. De hecho, estos grupos son los únicos de rotaciones finitos que hay en el espacio. Pero antes veamos un lema.

Si un grupo G actúa en un conjunto X , denotaremos por X^g al conjunto de puntos de X tales que son fijados por $g \in G$.

LEMA 1.2.2. (de Burnside) *El número de órbitas distintas es*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

En otras palabras, el número de órbitas es el número medio de puntos fijos.

DEMOSTRACIÓN. La idea de esta demostración es ver la cardinalidad del conjunto

$$M := \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$$

de dos maneras distintas.

Primero, dado un $x \in X$, los elementos $g \in G$ con $(g, x) \in M$ son exactamente los elementos del estabilizador G_x . Por lo tanto M es la unión disjunta de los conjuntos $G_x \times \{x\}$ ($x \in X$) y como $|Gx| = [G : G_x]$ y por el teorema de Lagrange $[G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|}$ tenemos que

$$|M| = \sum_{x \in X} |G_x| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{[G : G_x]} = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|}.$$

Ahora, si a X lo dividimos en las órbitas B_1, \dots, B_k vemos que esta última expresión va a ser igual a

$$(1.2.1) \quad \sum_{i=1}^k \sum_{x_i \in B_i} \frac{|G|}{|Gx_i|} = \sum_{i=1}^k \sum_{x \in B_i} \frac{|G|}{|B_i|} = \sum_{i=1}^k |G| = k|G|.$$

Por otro lado, dado $g \in G$, los elementos $x \in X$ con $(g, x) \in M$ son exactamente los puntos fijos de g , y hay $|X^g|$ de ellos. Por tanto,

$$(1.2.2) \quad |M| = \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Finalmente, comparando (1.2.1) con (1.2.2) obtenemos que el número de órbitas k es

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

□

Para aplicar este lema el siguiente resultado ahorra mucho trabajo.

PROPOSICIÓN 1.2.3. *Elementos conjugados de un grupo fijan el mismo número de puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos g y h son conjugados en G , tal que $ugu^{-1} = h$. Si g fija x , entonces h fija $u(x)$ ya que

$$h(u(x)) = ugu^{-1}(u(x)) = ug(x) = u(x).$$

Por tanto, u va a enviar el conjunto X^g en X^h . El mismo argumento, con los roles de g y h invertidos, se tiene que u^{-1} envía X^h a X^g . Esto significa que u es una biyección entre X^g y X^h , por lo que estos conjuntos tienen el mismo tamaño. \square

Vamos a ver que las posibilidades para los grupos de rotaciones están bastante acotados. En el que vamos a identificar SO_3 con el grupo de rotaciones.

TEOREMA 1.2.4. *Un subgrupo finito de SO_3 es isomorfo o a un grupo cíclico, un grupo diédrico, o a unos de los grupos de rotación de los sólidos platónicos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea G un grupo de rotación finito y no trivial. Entonces cada elemento $g \in G$ va a dejar la esfera invariante. Esta demostración la abordaremos de manera geométrica. A los dos puntos donde el eje de la rotación $g \in G$ interseca a la esfera los vamos a llamar polos de g . Denotamos por X al conjunto de todos los polos de todos los elementos de $G \setminus \{e\}$, donde e es la identidad. Supongamos que $x \in X$ y $g \in G$. Sea x un polo del elemento $h \in G$. Entonces $ghg^{-1}(g(x)) = g(h(x)) = g(x)$, lo que nos dice que $g(x)$ es un polo de ghg^{-1} y por tanto $g(x) \in X$. Lo que nos da que G actúa en X .

Sea N el número de órbitas distintas, tomamos un polo de cada órbita, y los llamamos x_1, \dots, x_N . cada elemento de $G \setminus \{e\}$ fija exactamente dos elementos, mientras que la identidad los fija todos. Por lo tanto, por el lema de Burnside tenemos que

$$N = \frac{1}{|G|} [2(|G| - 1) + |X|] = \frac{1}{|G|} [2(|G| - 1) + \sum_{i=1}^N |G(x_i)|],$$

donde $G(x_i)$ es la órbita de x_i . Haciendo una reorganización de los elementos tenemos que

$$\begin{aligned} 2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) &= N - \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^N |G(x_i)| = \\ &= N - \sum_{i=1}^N \frac{1}{|G_{x_i}|} = \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{|G_{x_i}|}\right). \end{aligned}$$

Si suponemos que G no es el grupo trivial, el miembro izquierdo de la ecuación está en el intervalo $[1, 2)$, y cada sumando del miembro derecho está en el intervalo $[\frac{1}{2}, 1)$. Con lo cual, N tiene que ser o bien es 2 o bien es 3.

Si $N = 2$, entonces la ecuación anterior da $2 = |G(x_1)| + |G(x_2)|$, esto quiere decir que las órbitas tienen tamaño 1, es decir, son estabilizadores, y por lo tanto x_1 y x_2 son polos. Estos polos van a determinar un eje L y cada elemento de $G \setminus \{e\}$ tiene que ser una rotación a través de este eje. El plano que pasa por el origen y es perpendicular a L va ser rotado por G . Luego, G va a ser isomorfo a un subgrupo de SO_2 y va a tener que ser cíclico por el teorema 1.1.1.

Si $N = 3$, escribimos x , y y z en lugar de x_1 , x_2 y x_3 . Tenemos por la ecuación de antes que

$$2\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = 3 - \left(\frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|}\right)$$

y, con lo cual,

$$1 + \frac{2}{|G|} = \frac{1}{|G_x|} + \frac{1}{|G_y|} + \frac{1}{|G_z|}.$$

Como los términos del miembro derecho tienen que ser mayores que 1. Entonces, si ordenamos los valores de G_x , G_y , y G_z , tenemos 4 posibilidades:

(a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{n}$ donde $n \geq 2$.

(b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$.

(c) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

(d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$.

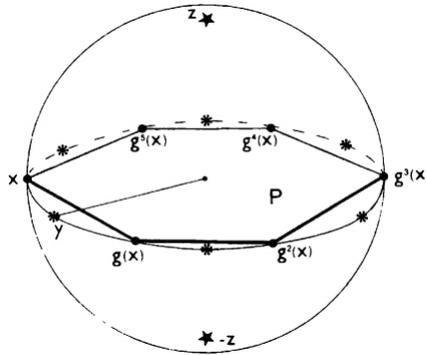
Ahora vamos a proceder al estudio de los casos.

- (a) Si $|G_x| = |G_y| = |G_z| = 2$, entonces G es un grupo de orden 4 en el que cada elemento tiene orden 2. luego G es isomorfo al grupo de Klein, pero en este contexto lo tomaremos como diédrico.

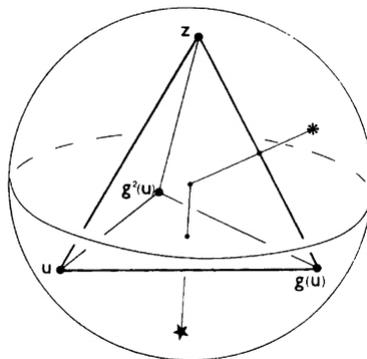
Si $|G_x| = |G_y| = 2$ y $|G_z| = n \geq 3$, entonces G es un subgrupo de orden $2n$. El eje a través de z es fijado por cada rotación del estabilizador G_z . Luego G_z es cíclico de orden n . Supongamos que g es la rotación de mínimo orden que genera G_z . Los puntos $x, g(x), \dots, g^{n-1}(x)$ son todos distintos, ya que si hubiera dos iguales, $g^r(x) = g^s(x)$ con $r > s$, entonces $g^{r-s}(x) = x$. Pero solamente z y $-z$ son los puntos fijados por g^{r-s} , y como x es distinto de $-z$, ya que $|G_x| = 2 \neq n = |G_z|$, entonces son distintos. Como g va a preservar la distancia, tenemos que

$$\|x - g(x)\| = \dots = \|g^{n-1}(x) - x\|.$$

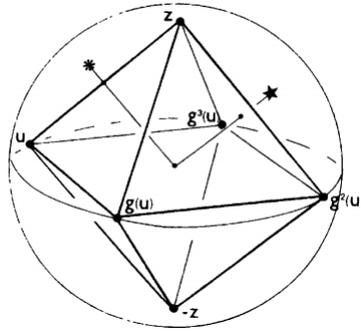
Por tanto, $x, g(x), \dots, g^{n-1}(x)$ son los vértices de un n -ágono regular P . Ya que G consiste en $2n$ rotaciones que envían P a sí mismo, G tiene que tener un grupo de rotaciones de P . Por tanto, G es diédrico. Obviamente, el polígono P es perpendicular al eje z y para por el origen.



(b) Si $|G_x| = 2$ y $|G_y| = |G_z| = 3$, entonces G es un grupo de orden 12. La órbita de z va a consistir en 4 puntos. Tomamos uno, digamos u , que satisface que $0 < \|u - z\| < 2$ y tomamos un generador g de G_z . Entonces $u, g(u)$ y $g^2(u)$ son todos distintos y están a la misma distancia de z , con lo que forman un triángulo equilátero. Tenemos también que $z, g(u)$ y $g^2(u)$ están a la misma distancia de u . Por lo tanto, $z, u, g(u)$ y $g^2(u)$ son los puntos de un tetraedro, que cada rotación lo manda a él mismo. Por lo tanto el grupo de rotaciones de G va a ser el mismo que el del tetraedro.



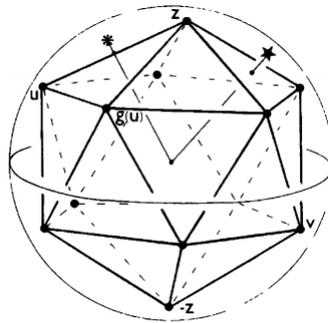
(c) Si $|G_x| = 2, |G_y| = 3$ y $|G_z| = 4$, entonces G es un grupo de orden 24. La órbita de z va a consistir en 6 puntos. Tomamos uno, u , que sea distinto de z y $-z$ y tomamos un generador g de G_z . Entonces $u, g(u), g^2(u)$ y $g^3(u)$ son todos distintos y equidistantes a z , con lo que forman un cuadrado. El punto que falta en la órbita de z va a ser $-z$. Como $G(u) = G(z)$ entonces $-u$ también está en $G(u)$, y va a ser $g^2(u)$, ya que cualquier otro punto estaría a distancia menor que 2. Por lo tanto todos estos puntos forman un octaedro, por lo que su grupo de rotaciones es el mismo que este.



(d) Si $|G_x| = 2$, $|G_y| = 3$ y $|G_z| = 5$, entonces G es un grupo de orden 60 y la órbita de z tiene 12 puntos. Tomemos 2, llamémoslos u y v , y van a satisfacer que

$$0 < \|z - u\| < \|z - v\| < 2,$$

ya que si $\|z - u\| = \|z - v\|$ estarían en la misma órbita y $|G_y| = 2$, pero esto es imposible. Si g es la rotación de mínimo orden que genera G_z , entonces son distintos $u, g(u), g^2(u), g^3(u)$ y $g^4(u)$, y equidistantes de z . Estos puntos van a formar un pentágono regular. Lo mismo tendremos para v y los $g^i(v)$, por lo que $-z$ es el punto que falta. Centrándonos ahora en u , tenemos que $-u \in G(u) = G(z)$, y como $-u$ está a distancia 2 de u , podemos suponer que $v = -u$, y entonces $-g^i(u) = g^i(v)$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Por último los 5 puntos más cercano a u van a ser equidistantes a u , y por tanto van a formar un dodecaedro. Con lo cual, el grupo de rotaciones de G va a ser el del dodecaedro.

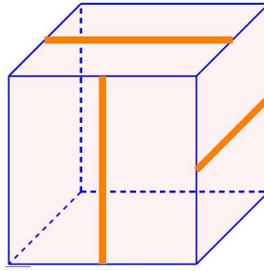


En las imágenes $*$ es el eje de la órbita de x y \star el de y .

□

1.2.4. Aplicaciones a un problema de conteo.

Consideremos que tenemos dos cubos, en uno de ellos vamos a pintar las caras utilizando dos colores distintos, rojo y verde. En otro cubo dibujamos en cada cara una línea que divida la cara en dos mitades y es paralela a dos de las aristas, y estas líneas no pueden tocarse, como en el siguiente dibujo.



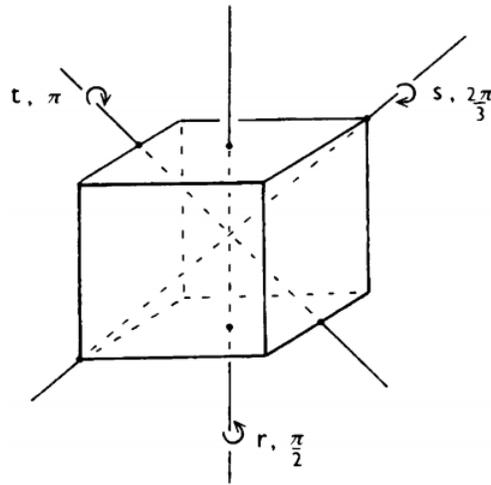
En el dibujo solo se han marcado las líneas visibles, faltan tres en las caras opuestas, paralelas a las dibujadas.

A estas líneas también las vamos a pintar con dos colores distintos. Queremos saber en qué cubo va a haber más maneras de pintarlo. El resultado, que para estos casos sencillos se puede obtener con argumentos muy elementales, es que el segundo cubo supera al primero 12 a 10. En el resultado se ha supuesto que dos coloraciones son iguales si se llega de una a otra mediante rotaciones del cubo.

El cubo tiene 6 caras, por lo que hay 2^6 coloraciones del cubo en total, a este conjunto lo llamaremos X . El grupo de rotaciones del cubo va a actuar en X , y dos coloraciones del cubo van a ser diferentes si no están en la misma órbita.

Con esto, pasemos ahora a hacer un estudio de los dos problemas.

Primero, empecemos por el primer cubo. Debemos tomar un elemento de cada clase de conjugación y ver qué elementos deja fijos. Llamamos r a la rotación de $\frac{\pi}{2}$ a través del eje que pasa por el punto medio de dos caras opuestas, t a la rotación de π sobre el punto medio de dos aristas opuestas, y s a la rotación de $\frac{2\pi}{3}$ sobre una diagonal principal. Los representantes de las clases de conjugación, en vista del isomorfismo que hemos establecido entre G^+ y S_4 , van a ser $1, r, r^2, t,$ y s . Tenemos que r fija a los cubos que tienen la cara superior de un color, la cara inferior de otro color y el resto del mismo. Por lo tanto tenemos 2^3 posibilidades distintas en este caso, es decir, $|X^r| = 2^3$. Mirando s tenemos que fija los cubos que tengan un mismo las 3 caras que hay en un vértice que pasa por el eje, y un mismo color para las otras 3 restantes, por lo que hay 2^2 de ellas. Y t va a fijar los cubos que tienen el mismo color en las caras que tienen una arista común que corta el eje de rotación, el mismo color en la otra arista, y que tienen el mismo color en las dos caras restantes, lo que da un total de 2^3 posibilidades. Y por último r^2 va a fijar los que tienen un color en la cara superior, cualquiera en la cara inferior, y en las restantes las que tienen el mismo en las caras opuestas. Y por último la identidad va a fijar las 2^6 posibilidades.



Juntando todo y que las clases de conjugación de r, r^2, s , y t tienen 6, 3, 8, y 6 elementos respectivamente, tenemos por el lema de Burnside que el número de formas distintas de pintar un cubo es

$$\begin{aligned} \frac{1}{24}[(6 \cdot 2^3) + (6 \cdot 2^3) + (3 \cdot 2^4) + (8 \cdot 2^2) + 2^6] &= \\ &= \frac{1}{3}[6 + 6 + 4 + 6 + 8] = 10. \end{aligned}$$

Para el caso del segundo cubo. Un rápido estudio nos da que en este caso el grupo de las rotaciones es A_4 . Y consecuentemente, los representantes las clases de conjugación van a ser r^2, s, s^2 , y la identidad, donde r y s son los mismos que el caso anterior. Haciendo una descripción análoga que en el caso anterior tenemos que el número de coloraciones distintas es

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}[(3 \cdot 2^4) + (4 \cdot 2^2) + (4 \cdot 2^2) + 2^6] &= \\ &= \frac{1}{3}[12 + 4 + 4 + 16] = 12. \end{aligned}$$

Y con esto quedarían descritos los dos problemas.

Más ejemplos del uso de esta técnica se puede ver en ([1], pag. 102).

Geometría hiperbólica.

En este capítulo damos una descripción de la geometría hiperbólica bidimensional, las funciones con las que se trabajan aquí, las clasificaremos en varios tipos, veremos como es su aplicación geométrica. Luego veremos como funciona esta geometría en general. Analizaremos un tipo de subgrupo especial que van a ser los fuchsianos, que son clave para las teselaciones. Y por último daremos un breve vistazo a cómo son estas teselaciones. Principalmente ha sido sacada de [13], aunque también de [5, 6]. La parte última de teselaciones está basada en [8, 10, 9, 14]. Los dibujos de este capítulo son todos originales hechos con la herramienta geogebra.

2.1. Transformaciones de Möbius.

2.1.1. Proyección estereográfica y métrica cordal.

Consideremos La esfera unitaria

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\},$$

a la que llamaremos esfera de Riemann. Vamos a ver que podemos relacionar el plano complejo extendido con esta esfera. Para ello, en \mathbb{R}^3 tomamos el plano $x_3 = 0$ como el plano complejo \mathbb{C} , y la recta que se forma al unir $e_3 = (0, 0, 1)$ con cualquier otro punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ de la esfera.

Esta recta corta al plano complejo en un único punto, para encontrarlo consideramos la parametrización

$$e_3 + t(x - e_3)$$

donde $t \in \mathbb{R}$. El punto que buscamos tiene que cumplir que

$$[e_3 + t(x - e_3)] \cdot e_3 = 0$$

$$1 + t(x - e_3) \cdot e_3 = 0 \iff t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Luego el punto x será

$$\begin{aligned} & e_3 + \frac{1}{1 - x_3}(x - e_3) = \\ & = e_3 + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3} \right) = \\ & = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right). \end{aligned}$$

Ahora, para encontrar esta relación, consideramos la función

$$\psi : \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\} \rightarrow \mathbb{C}$$

dada por $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$. Veamos que ψ es una biyección.

Primero probemos que ψ es inyectiva. Construimos la inversa. Para ello tomamos $z = \psi(x)$, vemos que

$$|z|^2 = \left| \frac{x_1 - ix_2}{1 - x_3} \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

despejando x_3 tenemos

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

También tenemos que

$$z + \bar{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3},$$

y

$$x_1 = \frac{(z + \bar{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{z + \bar{z}}{2} \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \right).$$

Luego

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}.$$

Análogamente, tenemos que

$$z - \bar{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3},$$

por lo que

$$x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}.$$

Con lo cual, tenemos la función

$$\pi(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right),$$

que es una inversa por la izquierda, por lo que es inyectiva. Y además, también es una inversa por la derecha, así que también es suprayectiva y por lo tanto biyectiva. Tomando límites y haciendo corresponder ∞ con e_3 tenemos una biyección entre \mathbb{S}^2 y $\widehat{\mathbb{C}}$. A ψ la vamos a llamar proyección estereográfica.

PROPOSICIÓN 2.1.1. *Bajo la proyección estereográfica, rectas en $\widehat{\mathbb{C}}$ y círculos en \mathbb{C} se transforman en círculos en \mathbb{S}^2 y viceversa.*

DEMOSTRACIÓN. Un círculo en \mathbb{S}^2 es la intersección de un plano con la esfera, por lo que los puntos van a satisfacer

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

Por lo tanto, este círculo es la preimagen de los puntos del plano por la proyección estereográfica que satisfacen

$$a \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} + b \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} + c \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = d.$$

Si escribimos $z = x + yi$, tenemos que

$$2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) = d(x^2 + y^2 + 1),$$

que de hecho es la ecuación de una recta o un círculo, dependiendo si $d = c$ o $d \neq c$.

Por otro lado, consideremos una recta en el plano definida por la ecuación

$$ax + by = c.$$

Estos puntos bajo la proyección estereográfica son llevados al conjunto de puntos de la esfera tales que

$$a \left(\frac{x_1}{1 - x_3} \right) + b \left(\frac{x_2}{1 - x_3} \right) = c$$

$$ax_1 + bx_2 = c(1 - x_3),$$

y de aquí sacamos que estos puntos van a pertenecer a un plano, es decir, son la intersección de un plano con la esfera, se trata de un círculo. Como $\pi(\infty) = (0, 0, 1)$, y este punto satisface la ecuación anterior tenemos que este círculo pasa por el polo norte.

Pasemos ahora a un círculo en el plano, estará definido por la ecuación

$$|z - a|^2 = r^2$$

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$$

$$|z|^2 - \bar{a}z - a\bar{z} + |a|^2 = r^2,$$

por lo que usando que $x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$ tenemos que

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2\operatorname{Re}(a\bar{z}) = r^2 - |a|^2.$$

Escribimos $a = a_1 + a_2i$ y $z = x + yi$. Luego

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2(a_1x + a_2y) = r^2 - |a|^2$$

$$\frac{1 + x_3}{1 - x_3} - 2a_1 \frac{x_1}{1 - x_3} - 2a_2 \frac{x_2}{1 - x_3} = r^2 - |a|^2$$

$$1 + x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 = (r^2 - |a|^2)(1 - x_3).$$

Despejando adecuadamente tenemos que estos puntos van a pertenecer a un plano, y por tanto va a ser un círculo en la esfera. \square

Se puede definir una distancia entre las proyecciones en la esfera de dos puntos del plano complejo. Mediante una serie de cálculos elementales podemos obtener la fórmula de esa distancia, que quedan reflejados en [13]. Esta distancia va a inducir la métrica buscada en $\widehat{\mathbb{C}}$.

DEFINICIÓN 2.1.2. Se define la métrica cordal en el plano complejo extendido de la siguiente manera

$$d_C(z_1, z_2) = \begin{cases} 2 \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \sqrt{1+|z_2|^2}}, & \text{si } z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & \text{si } z_2 = \infty. \end{cases}$$

Como \mathbb{S}^2 es un subespacio métrico de \mathbb{R}^3 , esta distancia define en efecto una métrica en $\widehat{\mathbb{C}}$.

PROPOSICIÓN 2.1.3. *Las métricas cordal y euclidiana inducen la misma topología en \mathbb{C} , es decir, definen los mismos abiertos en \mathbb{C} . Además*

$$d_C(z, \infty) \rightarrow 0 \iff |z_n| \rightarrow \infty.$$

DEMOSTRACIÓN. Para la primera parte, la de los abiertos, hay que probar que la función

$$Id : \mathbb{C}_E \rightarrow \mathbb{C}_C,$$

es bicontinua, donde \mathbb{C}_E y \mathbb{C}_C son los planos con métrica euclidiana y cordal respectivamente.

Si $|z_n - z| \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$, tenemos que por ser π continua entonces $|\pi(z_n) - \pi(z)| \rightarrow 0$, por lo que Id es continua. Ahora, por la continuidad de ψ , si $d_C(z, \infty) \rightarrow 0$, entonces $|\pi(z_n) - \pi(z)| \rightarrow 0$ y $|\psi(\pi(z_n)) - \psi(\pi(z))| = |z_n - z| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Para la segunda parte, sea z_n una sucesión en \mathbb{C} tal que $|z_n| \rightarrow \infty$. Por definición

$$d_C(z_n, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_n|^2}},$$

haciendo el límite obtenemos fácilmente que $d_C \rightarrow \infty$.

Supongamos ahora que $d_C(z_n, \infty) \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$. Tenemos que dado $\epsilon > 0$, existe un n_ϵ tal que si $n > n_\epsilon$, se tiene que

$$\frac{2}{\sqrt{1+|z_n|^2}} < \epsilon \quad \text{y por tanto} \quad |z_n| > \sqrt{\frac{4}{\epsilon^2} - 1}.$$

Por lo que, dado $M > 0$, tomando ϵ tal que

$$M = \sqrt{\frac{4}{\epsilon^2} - 1},$$

se tiene que $|z_n| > M$ y por lo tanto $|z_n| \rightarrow \infty$. □

2.1.2. Transformaciones de Möbius. Propiedades básicas.

Una transformación de Möbius es una función $T : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tal que $ad - bc \neq 0$, es decir, el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es no nulo, y además

- (i) Si $c = 0$, se define $T(\infty) = \infty$.
- (ii) Si $c \neq 0$, definimos $T(\infty) = a/c$ y $T(-d/c) = \infty$.

Dada una transformación $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, llamaremos su matriz asociada \bar{T} a la correspondiente matriz cuyas entradas son los coeficientes de la transformación, es decir

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

De hecho, se tiene trivialmente:

PROPOSICIÓN 2.1.4. *La composición de dos transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius, de hecho es la transformación que tiene como matriz asociada al producto de sus matrices asociadas.*

Las transformaciones de Möbius son biyectivas, y la inversa de una transformación de Möbius es la inversa de su matriz asociada. El conjunto de las transformaciones de Möbius es un grupo con la composición.

PROPOSICIÓN 2.1.5. *Dos transformaciones de Möbius*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{y} \quad S(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$$

son iguales si y solo si existe un $k \in \mathbb{C}$, tal que

$$a = ka', \quad b = kb' \quad c = kc' \quad d = kd'.$$

DEMOSTRACIÓN. La condición suficiente es inmediata, se saca factor común k y ya está. Para la condición necesaria tenemos que T y S coinciden en el 0 y en el ∞ , así que se tiene que si $a = 0$, entonces $a' = 0$ y viceversa, y con los demás coeficientes igual.

Probemos primero el caso $a, b, c, d \neq 0$, se tiene que

$$T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} = -\frac{d'}{c'}$$

y

$$T^{-1}(0) = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}.$$

De las ecuaciones anteriores ordenamos y tenemos $\frac{d}{c} = \frac{d'}{c'} = \lambda$, y $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} = \mu$, y se sigue que

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\mu a'z + \mu b'}{\lambda c'z + \lambda d'} = \frac{\mu(a'z+b')}{\lambda(c'z+d')} = \frac{\mu}{\lambda} S(z).$$

Con lo que si evaluamos las dos funciones en la preimagen de 1, tendremos que $\frac{\mu}{\lambda} = 1 \iff \lambda = \mu$. Para el caso de que algunos de los coeficientes sea 0, mediante argumentos análogos lo tendríamos. \square

Si k es una de las raíces cuadradas de $ad - bc$, podemos poner $a' = \frac{a}{k}$, etc. para obtener

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

con $a'd' - b'c' = 1$. Por lo tanto toda transformación de Möbius tiene asociada una matriz de $SL(2, \mathbb{C})$, el grupo especial lineal de matrices 2×2 con entradas en \mathbb{C} y determinante 1. De hecho, como $ad - bc$ tiene raíces $\pm k$, hay exactamente dos matrices asociadas.

Ciertamente, la proposición 2.1.4 nos dice que hay un homomorfismo de grupos suprayectivo de $SL(2, \mathbb{C})$ sobre el grupo de las transformaciones de Möbius, es $\{\pm I\}$ por la proposición 2.1.5.

En definitiva, por el primer teorema de isomorfía, el grupo de las transformaciones de Möbius es isomorfo al cociente

$$\frac{SL(2, \mathbb{C})}{\{\pm I\}},$$

que se conoce como el grupo especial lineal proyectivo sobre \mathbb{C} y se denota por $PSL(2, \mathbb{C})$.

Como ejemplos de transformaciones de Möbius tenemos:

- La identidad.
- Las traslaciones, $T(z) = z + b$, con $b \in \mathbb{C}$ y $b \neq 0$.
- Las rotaciones, $T(z) = az$, con $a = e^{i\theta} \neq 1$.
- Las homotecias, $T(z) = kz$, con $k \in \mathbb{R}^+$ y $k \neq 1$.
- Las composiciones de homotecias seguidas de rotaciones $T(z) = az$, donde $|a| \neq 1, 0, a \notin \mathbb{R}^+$.
- La composición de la reflexión en el círculo con la conjugación, $T(z) = \frac{1}{z}$.

De hecho, estos ejemplos y sus composiciones nos dan todas las transformaciones de Möbius.

LEMA 2.1.6. *Cualquier transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ se puede expresar como la composición de traslaciones, rotaciones, homotecias y la transformación $z \rightarrow \frac{1}{z}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso en el que una transformación de $PSL(2, \mathbb{C})$ fija el ∞ . Esta transformación va a ser de la forma

$$z \rightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

y esto se ve que es una composición de homotecias, rotaciones y traslaciones, dependiendo del valor de los coeficientes.

Si no fija el ∞ , se puede expresar de la forma

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} = \frac{az + b + \frac{ad}{c} - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}(cz + d) + b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}$$

y esta transformación es composición de todas las transformaciones del enunciado. □

Una propiedad importante de las transformaciones de Möbius es:

PROPOSICIÓN 2.1.7. *Las transformaciones de Möbius complejas son funciones continuas en $\widehat{\mathbb{C}}$ con la métrica cordal.*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que probar la continuidad en ∞ y en $-\frac{d}{c}$ (si $c \neq 0$), o en ∞ solo si $c = 0$.

Si $c \neq 0$, y tomamos una sucesión $z_n \rightarrow -\frac{d}{c}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Vamos a tener que

$$\frac{1}{z_n - \left(-\frac{d}{c}\right)} \rightarrow \infty$$

y por tanto

$$\frac{az_n + b}{cz_n + d} = \frac{az_n + b}{c(z_n - \left(-\frac{d}{c}\right))} = \frac{az_n + b}{c} \frac{1}{z_n - \left(-\frac{d}{c}\right)} \rightarrow \infty.$$

Luego, $d_C\left(\frac{az_n+b}{cz_n+d}, \infty\right) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Si $z_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $d_C\left(\frac{az_n+b}{cz_n+d}, \infty\right) \rightarrow \infty$. Y si $c = 0$, y $z_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $d_C\left(\frac{az_n+b}{cz_n+d}, \infty\right) \rightarrow 0$. \square

Otra propiedad geométrica interesante es la siguiente. Usaremos la palabra “círculos” (entre comillas) para denotar círculos y rectas, ya que se puede ver una recta como circunferencia de radio infinito.

TEOREMA 2.1.8. *Las funciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ transforman “círculos” en “círculos”.*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema anterior, al ser cada transformación composición de rotaciones, traslaciones, homotecias y la transformación $z \rightarrow \frac{1}{z}$, si vemos que cada una lleva “círculos” en “círculos” ya lo tendríamos. Se ve fácilmente que las tres primeras lo cumplen, con lo que solamente queda verlo para $z \rightarrow \frac{1}{z}$.

Consideremos la ecuación general del “círculo”

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy = D.$$

Escribiendo $z = x + yi$ y $\frac{1}{z} = u + vi$, despejando tendríamos que

$$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2},$$

y sustituyendo en la ecuación general del círculo obtenemos la ecuación

$$A\left(\frac{1}{u^2 + v^2}\right) + B\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) + C\left(\frac{-v}{u^2 + v^2}\right) = D$$

y se tiene que

$$-D(u^2 + v^2) + Bu - Cv = -A.$$

Y esta ecuación es de hecho la ecuación de una circunferencia. \square

PROPOSICIÓN 2.1.9. *Dados $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos y $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos también, existe una única transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que envía cada z_j al correspondiente w_j , para $j = 1, 2, 3$.*

Esta proposición nos dice que las transformaciones de Möbius complejas son transitivas en puntos de la esfera de Riemann. Y juntando con los resultados anteriores tenemos que las transformaciones de Möbius actúan transitivamente una la familia de todos los “círculos”.

COROLARIO 2.1.10. *Dados dos “círculos” A y B en $\widehat{\mathbb{C}}$ existe $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que $T(A) = B$, es decir, actúa transitivamente en los “círculos” de $\widehat{\mathbb{C}}$.*

DEMOSTRACIÓN. El “círculo” A estará determinado por tres puntos distintos z_j , así como el “círculo” B por tres puntos w_j . Y por la proposición anterior tendremos una transformación de Möbius T que envía los z_j a los w_j , y ya lo tendríamos. \square

2.1.3. Clasificación por conjugación.

En esta parte nos vamos a centrar en una clasificación de las transformaciones de Möbius según sus puntos fijos, y a partir de ahí lo relacionaremos con su conjugada.

Antes de nada, lo primero que podemos decir es que una transformación de Möbius fija a lo sumo 2 puntos. Si $T(\infty) \neq \infty$, al resolver la ecuación:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

al agrupar términos nos sale la ecuación de segundo grado

$$cz^2 + (d - a)z + b = 0$$

que tiene a lo sumo dos soluciones. Y si $T(\infty) = \infty$, tenemos que la ecuación

$$\frac{az + b}{d} = z$$

tiene una a lo sumo una.

DEFINICIÓN 2.1.11. Sea T una transformación de Möbius, si fija exactamente un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$, se dice que T es parabólica.

LEMA 2.1.12. *Sean T y φ transformaciones de Möbius, entonces T fija un punto w en $\widehat{\mathbb{C}}$ (o un subconjunto $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$) si y solo si $S = \varphi T \varphi^{-1}$ fija $\varphi(w)$ (o preserva $\varphi(A)$).*

DEMOSTRACIÓN.

$$T(w) = w \iff \varphi T(w) = \varphi(w) \iff \varphi T \varphi^{-1}(\varphi(w)) = \varphi(w).$$

Y análogamente se demuestra para el subconjunto A . \square

PROPOSICIÓN 2.1.13. *Sea T una transformación de Möbius. Entonces:*

- (i) *Si T es parabólica, entonces T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una traslación.*
- (ii) *Si T no es parabólica, entonces T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a una transformación de la forma $z \rightarrow \alpha z$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Primero, consideramos en caso en el que T es parabólica con punto fijo z_0 . Sea $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $\varphi(z_0) = \infty$, por ejemplo,

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - z_0}.$$

Por lema anterior va a existir una transformación S tal que fija ∞ . Por lo tanto va a ser de la forma:

$$S(z) = az + b.$$

De nuevo, por el lema anterior S solamente puede fijar un punto, y como ya fija ∞ , tenemos que $a = 1$. Y con lo cual es una traslación.

Para el segundo caso en el que T fije dos puntos, w_1 y w_2 , consideramos ahora

$$\varphi = \frac{z - w_1}{z - w_2},$$

en el caso que , tomaríamos $\varphi = z - w_1$. De nuevo, usamos el lema anterior y va a existir una función S tal que va a fijar 0 y ∞ . Luego si

$$S = \frac{az + b}{cz + d}$$

tendríamos que $b = c = 0$, y sería de la forma del enunciado. \square

Ahora veamos una clasificación más específica para estos últimos elementos.

DEFINICIÓN 2.1.14. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que T fija exactamente 2 puntos en $\widehat{\mathbb{C}}$, supongamos también que T es conjugada en $PSL(2, \mathbb{C})$ a la transformación $S = \alpha z$. Entonces:

- (i) Si $|\alpha| = 1$, a T se le llama elíptica.
- (ii) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, a T se le llama hiperbólica.
- (iii) Si $|\alpha| \neq 1$ y $\alpha \notin \mathbb{R}^+$, a T se le llama loxodrómica.

Hay que aclarar que estas definiciones dependen mucho de quién las defina ya que en unos textos a las transformaciones loxodrómicas o hiperbólicas se les llama simplemente hiperbólicas. O en cambio se considera a las hiperbólicas como una subclase de las loxodrómicas.

2.1.4. Clasificación por traza.

DEFINICIÓN 2.1.15. Sea f una transformación de Möbius, con matriz asociada A . Definimos como su traza a

$$tr^2(f) = \frac{\text{traza}(A)^2}{|A|}$$

En esta sección veremos otra forma de clasificar las transformaciones de Möbius dependiendo de esta traza que acabamos de definir. Esta clasificación va a ser invariante mediante conjugación ya que la traza aplicada en matrices es invariante por conjugación.

Antes de nada, sea $k \in \mathbb{C}$ no nulo, definimos m_k por

$$m_k(z) = kz \quad \text{si } k \neq 1$$

y para $k = 1$

$$m_1(z) = z + 1.$$

A estas funciones las vamos a llamar *formas estándar*. En este caso vamos a tener que

$$\operatorname{tr}^2(m_k) = k + \frac{1}{k} + 2.$$

Anteriormente que en caso de que una transformación f distinta de la identidad va a tener uno o dos puntos fijos, llamemoslos α y β (si se necesitase). Ahora usando argumentos del lema 2.1.12 podemos tomar una función φ tal que $\varphi(\alpha) = \infty$ y $\varphi(\beta) = 0$ para que $\varphi f \varphi^{-1}$ fije ∞ y el 0 (si β fuese punto fijo). Por tanto f va a ser conjugada a una de las funciones m_k , en caso de que no fije β se tiene que es conjugada a m_1 .

PROPOSICIÓN 2.1.16. *Sean f y g transformaciones de Möbius distintas de la identidad, entonces f y g son conjugadas si y solo si $\operatorname{tr}^2(f) = \operatorname{tr}^2(g)$.*

DEMOSTRACIÓN. La condición necesaria ya hemos dicho que la traza es invariante para la conjugación. Para la condición suficiente, si tenemos que $\operatorname{tr}^2(f) = \operatorname{tr}^2(g)$ como hemos visto antes que f va a ser conjugada a una m_p y g va a ser conjugada a una función m_q por ejemplo. Entonces tenemos por la primera parte que

$$\operatorname{tr}^2(m_p) = \operatorname{tr}^2(f) = \operatorname{tr}^2(g) = \operatorname{tr}^2(m_q)$$

por lo que $\operatorname{tr}^2(m_p) = \operatorname{tr}^2(m_q)$, lo que quiere decir que

$$p + \frac{1}{p} + 2 = q + \frac{1}{q} + 2,$$

y esto se va a tener si $p = q$ o $p = 1/q$. Para $p = 1$ se ve claramente que m_p es conjugada a $m_{\frac{1}{p}}$, y si $p \neq 1$, tomando la función $\varphi(z) = 1/z$ tenemos que $\varphi m_p \varphi^{-1} = m_{\frac{1}{p}}$, por tanto m_p es conjugada a $m_{\frac{1}{p}}$. Luego si f y g son conjugadas a m_p y $m_{\frac{1}{p}}$ respectivamente, y estas últimas acabamos de ver que son conjugadas, entonces f es conjugada a g . \square

Ahora vamos a volver a dar una clasificación de las transformaciones de Möbius, esta vez dependiendo de su traza.

DEFINICIÓN 2.1.17. Sea f una transformación de Möbius, decimos que:

- (i) f es parabólica si y solo si f tiene solo un punto fijo, es decir, es conjugada a m_1 .
- (ii) f es hiperbólica si y solo si f es conjugada a m_k con $|k| \neq 1$ y $f(D) = D$ para algún disco (o semiplano) D en $\widehat{\mathbb{C}}$.
- (iii) f es loxodrómica si y solo si f es conjugada a m_k con $|k| \neq 1$ y pero no se tiene que $f(D) = D$ para algún disco (o semiplano) D en $\widehat{\mathbb{C}}$.
- (iv) f es elíptica si y solo si f es conjugada a m_k con $|k| = 1$ y $k \neq 1$.

PROPOSICIÓN 2.1.18. *Sea f una transformación de Möbius, se tiene que:*

- (i) f es parabólica si y solo si $\operatorname{tr}^2(f) = 4$.
- (ii) f es elíptica si y solo si $\operatorname{tr}^2(f) \in (0, 4]$.
- (iii) f es hiperbólica si y solo si $\operatorname{tr}^2(f) \in (4, +\infty)$.

(iv) f es loxodrómica si y solo si $tr^2(f) \notin (0, \infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos las tres primeras, ya que la última se va a satisfacer automáticamente al ver las otras. Recordamos que f va a ser conjugada a una forma estándar m_p donde su traza va a ser $p + \frac{1}{p} + 2$.

- (i) Si f es parabólica, va a ser conjugada a m_1 , y $tr^2(f) = tr^2(m_1) = 4$. Y recíprocamente es igual solo que siguiendo los pasos inversos
- (ii) f es elíptica, es conjugada a m_p con $|p| = 1$, supongamos $p = e^{i\theta}$, por lo que

$$tr^2(f) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2 = 2\cos(\theta) + 2.$$

Y por tanto $tr^2(f) \in [0, 4)$. Y recíprocamente, la única solución distinta de 1 es $e^{i\theta}$, y directamente se tiene que es elíptica.

- (iii) f es hiperbólica, va a ser conjugada a una transformación m_p . Tenemos que esta m_p va a mantener invariante a un disco D . Entonces, para cualquier $z \in D$, las imágenes iteradas de z por m_p son $p^n z$ donde $n \in \mathbb{Z}$. Estas imágenes van a estar contenidas en el disco D por hipótesis, al ser $|p| \neq 1$ se tiene que 0 y ∞ van a estar en la clausura de D , dependiendo si n tiende a $\pm\infty$. El mismo argumento se puede usar para puntos que están fuera de D . Por lo que $0, \infty \in \partial D$, lo que quiere decir que ∂D es una recta que pasa por el 0, luego D es un semiplano y $p > 0$ y por lo tanto $tr^2(f) > 4$.

Si $tr(f) \in (4, \infty)$, tenemos que para que m_p sea real tiene que darse o que $|p| = 1$ o que $p \in \mathbb{R}$. Si $|p| = 1$ tendríamos el caso elíptico y la traza no va a valer más de 4, por lo que p es real, y en particular $p > 0$. Con lo cual las soluciones a la ecuación son $p = k, \frac{1}{k}$ y necesariamente va a preservar el semiplano superior, por lo que m_p es hiperbólica y esto conlleva a que f también lo es.

□

Para cuando estamos en el caso $PSL(2, \mathbb{R})$, podemos decir cómo van a ser los puntos fijos de estas transformaciones.

PROPOSICIÓN 2.1.19. *Sea f una transformación de Möbius en $PSL(2, \mathbb{R})$, se tiene que:*

- (i) *Si f es parabólica entonces fija exactamente un elemento de $\widehat{\mathbb{R}}$.*
- (ii) *Si f es elíptica entonces fija dos elementos conjugados de $\widehat{\mathbb{C}}$.*
- (iii) *Si f es elíptica entonces fija dos elementos de $\widehat{\mathbb{R}}$.*

2.1.5. Aplicación geométrica.

Veamos ahora una acción geométrica de cómo actúan estas transformaciones. Para este caso es útil considerar ciertas familias de “círculos”. Vamos a tomar $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ distintos, y la función

$$(2.1.1) \quad \varphi(z) = \frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}.$$

Claramente φ es de Möbius, y en este caso va a transformar los “círculos” que pasan por α_1 y α_2 en rectas que pasan por el origen. Ahora si consideramos en la imagen los “círculos” concéntricos,

al ser φ^{-1} de Möbius, su preimagen también van a ser “círculos”, y de hecho van a ser los conjuntos cuya razón entre las distancias entre α_1 y α_2 es constante, es decir,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{|z - \alpha_1|}{|z - \alpha_2|} = r \right\}.$$

Estos “círculos” en particular se denominan de Apolonio. Con lo cual denotaremos como C_1 , o familia de “círculos” fijos, a la familia de “círculos” que pasan por α_1 y α_2 , y por C_2 a la familia de “círculos” de Apolonio. Esta configuración se va a llamar de Steiner.

Esta configuración va a tener las siguientes propiedades:

1. $\forall p \in \widehat{\mathbb{C}}, p \neq \alpha_1, \alpha_2$, se tiene que p está exactamente en un “círculo” de cada familia.
2. Cada “círculo” en C_1 interseca a cada “círculo” de C_2 ortogonalmente en dos puntos.
3. $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\alpha_1, \alpha_2\}$ es la unión disjunta de los “círculos” de la familia C_2 .

Estas propiedades pueden ser complicadas de comprobar en \mathbb{C} , pero cuando los consideramos en su imagen por φ , como las transformaciones de Möbius mantienen “círculos” y ángulos se comprueban fácilmente.

2.1.5.1. Transformaciones elípticas.

Sea T elíptica con puntos fijos α_1 y α_2 , y φ la función de 2.1.1, entonces, hemos visto anteriormente que

$$S(z) = \varphi T \varphi^{-1} = e^{i\theta} z,$$

con lo que S va a ser una rotación.

PROPOSICIÓN 2.1.20. *Si C es un “círculo” de Apolonio con puntos límite α_1 y α_2 , entonces $T(C) = C$.*

DEMOSTRACIÓN. Como φ preserva C , y S preserva $\varphi(C)$. Entonces $T = \varphi^{-1} S \varphi$, y $T(C) = \varphi^{-1} S \varphi(C) = \varphi^{-1} \varphi(C) = C$. \square

PROPOSICIÓN 2.1.21. *Si A es un “círculo” por α_1 y α_2 , entonces $T(A)$ es un “círculo” por α_1 y α_2 , que forma con A un ángulo θ en α_1 y α_2 .*

DEMOSTRACIÓN. Como $T = \varphi^{-1} S \varphi$, primero transformamos el “círculo” en recta por el origen, luego al aplicar S giramos la recta un ángulo θ , y por último volvemos al espacio inicial. Y al ser todas transformaciones de Möbius se van a conservar los ángulos. \square

En conclusión, las transformaciones elípticas giran los “círculos” de Apolonio, y mueve “círculos” que pasan por α_1 y α_2 a “círculos” que pasan por α_1 y α_2 con ángulo θ al original. También cabe destacar que estas transformaciones son las únicas que pueden tener orden finito, siempre que $\theta \notin \mathbb{Q}$.

Veamos ahora una representación gráfica.

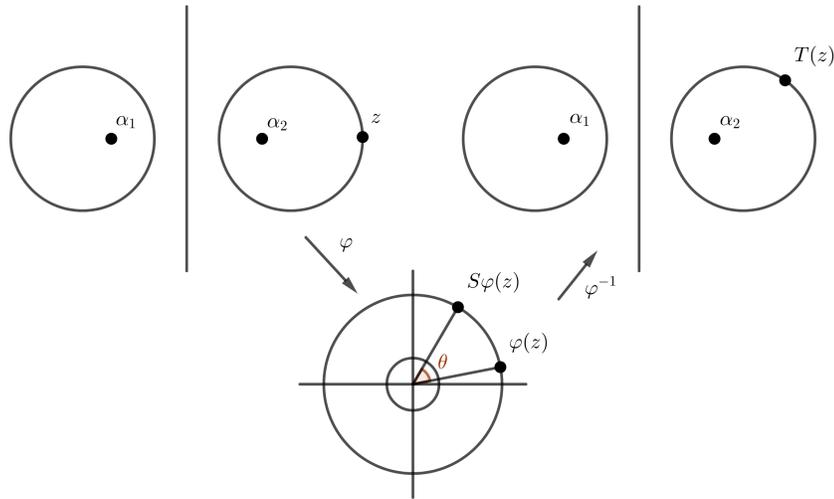


FIGURA 2.1.1. Transformación elíptica en círculos de Apolonio.

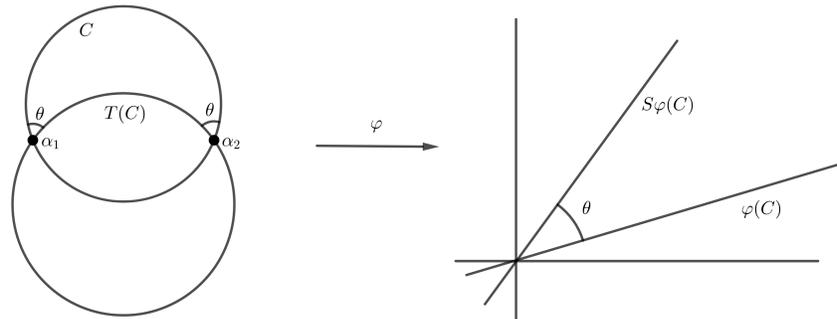


FIGURA 2.1.2. Transformación elíptica en círculos fijos.

Por último, vamos a tener que estas transformaciones son las únicas que van a tener orden finito, dependiendo del orden de la rotación en este caso, es decir, de si es un múltiplo racional de π o irracional.

2.1.5.2. Transformaciones hiperbólicas.

Sea T como en el anterior caso, y φ la función conjugante que hace que

$$S(z) = \varphi T \varphi^{-1} = kz, \quad k \in \mathbb{R}^+,$$

es una homotecia.

En este caso, siguiendo pasos análogos del caso anterior, tenemos que va a mantener los ‘círculos’ que pasan por α_1 y α_2 . Al hacer la imagen iterada de los puntos sus imágenes T^n las va a

mandar de α_1 hacia α_2 dentro del mismo “círculo”. En este caso α_1 se denomina repulsor, y a α_2 atractor.

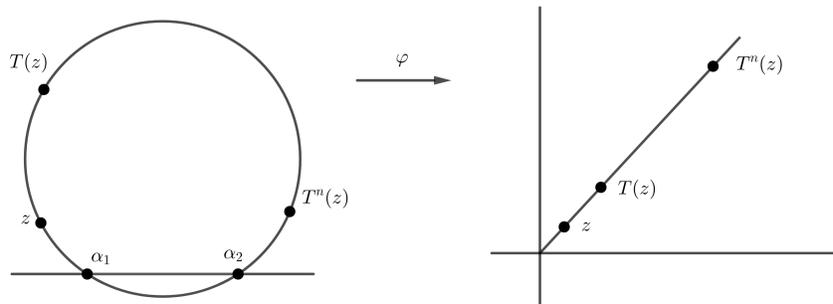


FIGURA 2.1.3. Transformación hiperbólica en círculos fijos.

Ahora, si C es un “círculo” de Apolonio, su imagen va a ser una circunferencia centrada en el origen, y la acción de S la va a dilatar. Tenemos que las circunferencias de radio menor que 1 son “círculos” de Apolonio respecto a α_1 , y los de radio mayor que 1 con “círculos” de Apolonio respecto a α_2 . Por tanto, T va a intercambiar “círculos” de Apolonio, y en algunos casos intercambiará los de α_1 y α_2 .

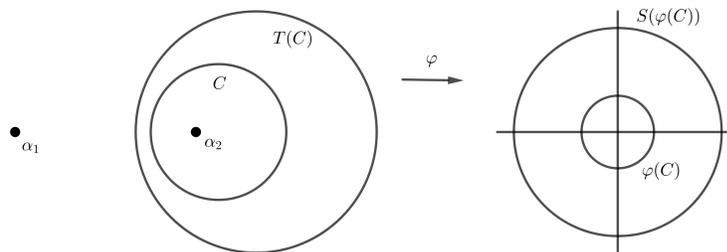


FIGURA 2.1.4. Transformación hiperbólica en círculos de Apolonio

2.1.5.3. *Transformaciones loxodrómicas.*

Las loxodrómicas son una composición de hiperbólicas y elípticas, por lo que su dinámica consiste de una rotación de los “círculos” de Apolonio, seguida de una traslación a lo largo de los “círculos” por α_1 y α_2 (o viceversa, ya que estas funciones conmutan). De manera análoga al caso hiperbólico,

uno de los puntos fijos es un atractor y el otro un repulsor. En este caso, no hay “círculos” fijos, sin embargo, estas transformaciones preservan espirales que se enrollan en los puntos fijos.

2.1.5.4. *Transformaciones parabólicas.*

Tenemos en este caso que la transformación de Möbius T va a ser conjugada a a una traslación $S(z) = z + b$ mediante la función

$$\varphi(z) = \frac{1}{z + \alpha}.$$

T nos va a dar una partición, es decir, se va a tener que la familia de “círculos” fijos cubren $\widehat{\mathbb{C}}$ y se intersecan solo en α . Al iterar T algunos puntos fluyen a lo largo de estos “círculos” hacia α , otros se van a alejar para posteriormente acercarse de nuevo a α .

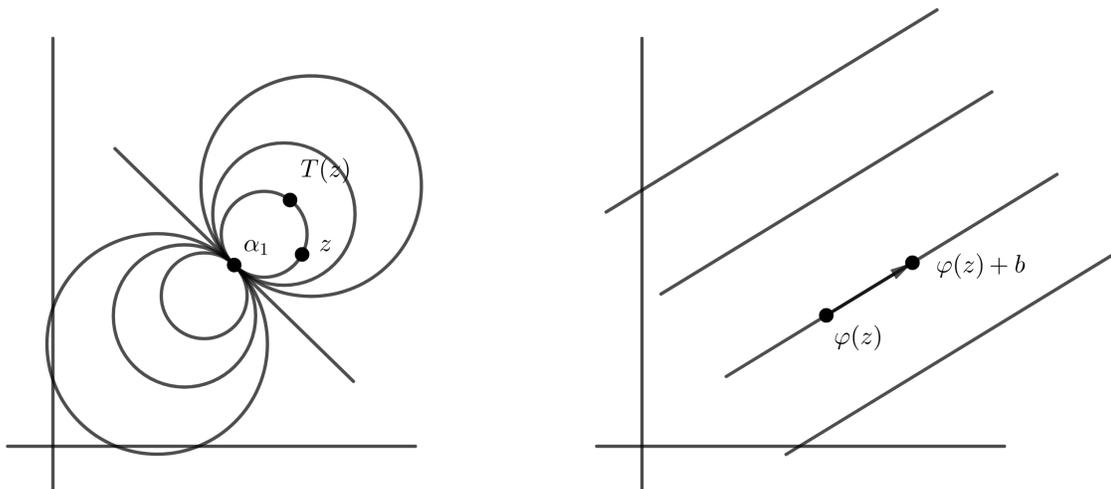


FIGURA 2.1.5. Transformación parabólica en círculos fijos

Si dada una transformación de Möbius parabólica de punto fijo α queremos saber cuáles van a ser esos “círculos” fijos tenemos que seguir varios pasos. Sea T de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{z + d},$$

sabemos que $\varphi T \varphi^{-1}$ es una traslación, por que su imagen en el 0 nos va a dar cual es su vector de desplazamiento. Nos va a dar que $\varphi T \varphi^{-1}(0) = \frac{2}{a+d}$, con lo cual si llamamos C al “círculo” que estamos buscando tenemos que

$$\begin{aligned} T \text{ fija } C &\iff S \text{ fija } \varphi(C) \\ &\iff \varphi(C) \text{ es recta de dirección } \frac{2}{a+d} \\ &\iff C = \varphi^{-1}(\text{recta}) \text{ es un "círculo"}. \end{aligned}$$

Por lo que vamos a considerar la recta más sencilla dada por

$$\varphi(C) = \left\{ \frac{2}{a+d}t \right\}_{t \in \mathbb{R}},$$

luego

$$C = \varphi^{-1}\left(\frac{2}{a+d}t\right) = \alpha + \frac{a+d}{2t} = \alpha + \lambda(a+d),$$

con lo que hemos obtenido la recta que pasa por α , que es un “círculo”, y por tanto los demás “círculos” fijos van a ser los perpendiculares a esta recta que pasen por α .

A esta configuración de los “círculos” podemos añadirle su familia ortogonal para tener las dos familias, los “círculos” fijos y los de Apolonio. Podemos considerar este caso como un caso degenerado o límite de las elípticas, en donde los puntos α_1 y α_2 son los mismos.

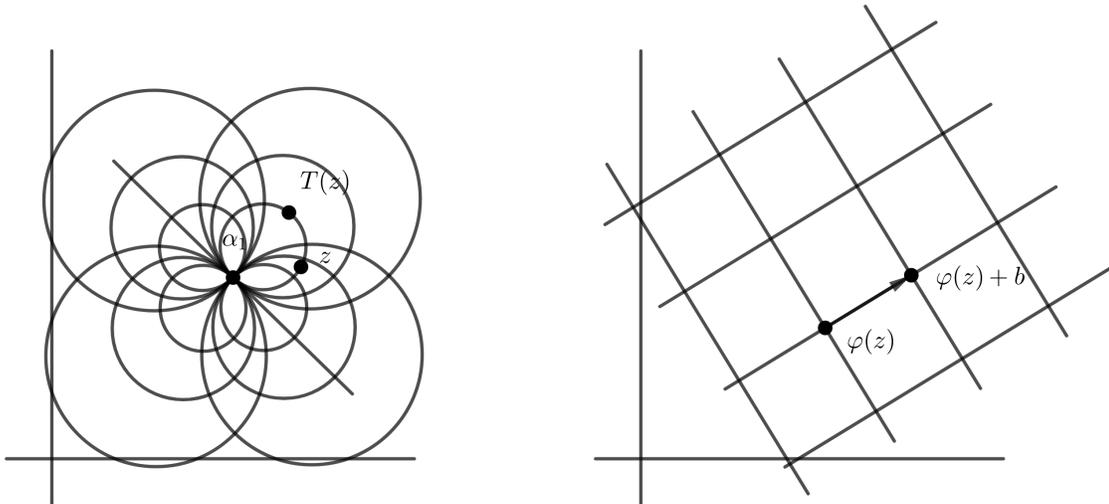


FIGURA 2.1.6. Transformación parabólica en círculos fijos y de Apolonio.

2.1.6. Transformaciones que preservan “discos”.

De igual manera denotaremos por “discos” a los discos o semiplanos en el plano complejo. Definimos el semiplano superior

$$\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} | \text{Im}(z) > 0\}.$$

TEOREMA 2.1.22. *Las transformaciones de Möbius que preservan \mathbb{H}^2 son las funciones definidas en $PSL(2, \mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Claramente $T(\widehat{\mathbb{R}}) = \widehat{\mathbb{R}}$. También tenemos que

$$T(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ac + db) + (ad - bc)i}{c^2 + d^2},$$

luego

$$\operatorname{Im}(T(i)) = \frac{1}{c^2 + d^2} > 0.$$

Como la imagen de un conexo es un conexo, se va a mantener que todos los puntos tienen parte imaginaria positiva no nula, por lo que va a preservar \mathbb{H}^2 .

Recíprocamente, sea una función en general de $PSL(2, \mathbb{C})$ de la forma

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc = 1$$

preserva \mathbb{H}^2 , entonces por la continuidad y biyectividad implican que T también preserva la recta real extendida.

Ahora, si consideramos

$$S(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

claramente T y S coinciden en $\widehat{\mathbb{R}}$. Y sabemos que si dos transformaciones coinciden en más de dos puntos, entonces $T = S$. Luego, los coeficientes de S son iguales a los de T o son todos sus opuestos, es decir, el vector $(a, b, c, d) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ o $(a, b, c, d) = -(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$. Pero si se tiene lo segundo entonces

$$T(i) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(-\bar{c}i + \bar{d})}{|cz + d|^2}$$

y

$$\operatorname{Im}(T(i)) = \frac{a\bar{d} - b\bar{c}}{|ci + d|^2} = -\frac{\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c}}{|ci + d|^2} < 0$$

por lo que no preservaría \mathbb{H}^2 , por tanto los coeficientes son iguales a sus conjugados, por lo que son reales. \square

Estas transformaciones son muy importantes, ya que en más tarde veremos que este modelo juega un fundamental en la geometría hiperbólica.

Otro modelo de notable importancia es el modelo del disco unitario, $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, llamado disco de Poincaré. Este modelo según el caso, resulta más cómodo que el del semiplano, ya que en este último hay que hacer una distinción especial en el ∞ . Mientras que en el disco de Poincaré todos los puntos de la frontera juegan el mismo papel.

Podemos encontrar una una función en $PSL(2, \mathbb{C})$ que transforme \mathbb{H}^2 en Δ . Una serie de cálculos elementales nos da que la función es

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Esta función manda la recta real a la circunferencia unitaria, y como $T(i) = 0$, por conexidad se va a tener que

$$T(\mathbb{H}^2) = \Delta.$$

Esta transformación es llamada de Cayley, y además es una rotación de orden 3 en la esfera de Riemann.

TEOREMA 2.1.23. *Las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{C})$ que preservan el disco unitario Δ son de la forma*

$$S(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}, \quad |a|^2 - |b|^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea S una función de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva Δ . Tomamos la transformación

$$T(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

que lleva de \mathbb{H}^2 a Δ . Luego la transformación U de la forma

$$U = T^{-1}ST$$

sera una función de \mathbb{H}^2 en \mathbb{H}^2 , y como S preserva Δ , entonces U va a preservar \mathbb{H}^2 , por lo que $U \in PSL(2, \mathbb{R})$ y

$$S = TUT^{-1}.$$

Consideramos ahora estas transformaciones T y U en su forma matricial

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{R}),$$

y calculamos TUT^{-1} .

Una serie de cálculos triviales nos lleva a que

$$S = TUT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d+i(b-c) & a-d-i(b+c) \\ a-d+i(b+c) & a+d+i(c+b) \end{pmatrix},$$

y con lo cual es de la forma del enunciado. □

Las transformaciones de Möbius que preservan Δ , que denotaremos como $M(\Delta)$, son conformes en Δ , ya que los únicos puntos donde una función en $PSL(2, \mathbb{C})$ puede no ser conforme son ∞ y su preimagen.

2.1.7. Razón doble.

Por el teorema 2.1.9 sabemos que dada una terna de puntos z_i existe una función f que lleve esta terna a otra terna de puntos w_i . Si ahora consideramos la cuádrupla (z_1, z_2, z_3, z_4) y queremos ver si existe una función tal que $f(z_i) = w_i$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. Para ver esto tenemos que definir lo que es la razón doble.

DEFINICIÓN 2.1.24. Para cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ llamamos razón doble a

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}.$$

Si cualquiera de las variables z_i tomase el valor ∞ se podría deducir la fórmula que se obtendría a partir de la anterior. Un caso bastante trivial es la razón doble de $(0, 1, z, \infty)$ que vale

$$[0, 1, z, \infty] = z.$$

Otros casos básicos son

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2},$$

y

$$[z_1, z_2, \infty, z_4] = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_2}.$$

Como en este caso la razón doble se obtiene directamente, sería muy útil poder transformar cualquier cuádrupla a una de la forma anterior.

TEOREMA 2.1.25. *Dado cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ y otros cuatro distintos $w_1, w_2, w_3, w_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$, la condición necesaria y suficiente para que exista una transformación de Möbius tal que $f(z_i) = w_i$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$ es que $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$.*

DEMOSTRACIÓN. (\Rightarrow) Supongamos que existe dicha función. De momento, asumamos que ninguno de estos puntos es ∞ . Si

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $cz - d \neq 0$, entonces

$$w_j - w_k = f(z_j) - f(z_k) = \frac{(ad - bc)(z_j - z_k)}{(cz_j - d)(cz_k + d)}.$$

Por tanto

$$\begin{aligned} [w_1, w_2, w_3, w_4] &= \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w_4)} = \\ &= \frac{\frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 - d)(cz_3 + d)} \frac{(ad - bc)(z_2 - z_4)}{(cz_2 - d)(cz_4 + d)}}{\frac{(ad - bc)(z_1 - z_2)}{(cz_1 - d)(cz_2 + d)} \frac{(ad - bc)(z_3 - z_4)}{(cz_3 - d)(cz_4 + d)}} = \\ &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} = [z_1, z_2, z_3, z_4]. \end{aligned}$$

El caso en el que alguno de los z_i y/o de los w_i sea ∞ , siguiendo las correspondientes definiciones para $f(\infty)$ y para la razón doble se tendría de manera similar.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$. Tomemos g y h transformaciones de Möbius tal que $g(z_1) = 0, g(z_2) = 1$ y $g(z_4) = \infty$, y $h(w_1) = 0, h(w_2) = 1$ y $h(w_4) = \infty$. Por la hipótesis y la invarianza de la razón doble, consecuencia de la implicación anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
g(z_3) &= [0, 1, g(z_3), \infty] \\
&= [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4] \\
&= [w_1, w_2, w_3, w_4] \\
&= [h(w_1), h(w_2), h(w_3), h(w_4)] \\
&= [0, 1, h(w_3), \infty] \\
&= h(w_3).
\end{aligned}$$

Ahora simplemente hacemos $f := h^{-1}g$ y ya tenemos que $f(z_i) = w_i$ para todo $i = 1, 2, 3, 4$. □

A los puntos z_1, \dots, z_n si están en la misma circunferencia se dice que son concíclicos. A partir de esto, sabemos que para 3 puntos siempre se cumple, pero que a partir de 4 ya no tiene por qué cumplirse. Vamos a ver la condición necesaria y suficiente para 4 puntos.

PROPOSICIÓN 2.1.26. *Cuatro puntos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ son concíclicos si y solo si $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ es real.*

DEMOSTRACIÓN. Cogemos 4 puntos cualesquiera z_i , y tomamos la circunferencia C que forman z_1, z_2 y z_4 . Tomamos la única transformación de Möbius tal que $g(z_1) = 0, g(z_2) = 1$ y $g(z_4) = \infty$. Entonces $g(C)$ es la recta real. Ahora por el teorema anterior:

$$\begin{aligned}
[z_1, z_2, z_3, z_4] &= [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] \\
&= [0, 1, g(z_3), \infty] \\
&= g(z_3).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ va a ser real si y solo si $g(z_3)$ lo es. Y si es real entonces pertenece a la recta real, y con lo cual $z_3 \in C$. □

2.2. Métrica hiperbólica.

Nosotros partimos de los 5 postulados de Euclides:

- Dos puntos cualquiera determinan un segmento de recta.
- Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.
- Se puede trazar una circunferencia dados un centro y un radio cualquiera.
- Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- Por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela.

En nuestra geometría en el plano descrita anteriormente, se satisfacen todas estas propiedades. Sin embargo, ahora consideremos un espacio donde la última propiedad no tiene por qué cumplirse. Gauss introdujo el término de geometría no Euclídea, este será el caso de la geometría hiperbólica.

En esta sección definiremos cómo es la métrica y cómo se calculan las distancias entre dos puntos cualesquiera. También veremos cuáles van a ser las geodésicas en esta métrica, que van a ser arcos de circunferencias, cuyo procedimiento para hallarlas variará dependiendo de si estamos en el modelo del semiplano o en el disco de Poincaré.

2.2.1. Densidades.

Vamos a introducir la métrica con la que vamos a trabajar a partir de ahora. Recordemos que si A es un abierto en \mathbb{R}^n y f es una función diferenciable de A en \mathbb{R}^n , se dice que f es conforme en $x_0 \in A$, si $Df(x_0)$ es el producto de una matriz ortogonal por la matriz kI , $k \in \mathbb{R}^+$. Al número k se le llama el factor de conformalidad y se le denota por $\mu_f(x_0)$, o simplemente por $\mu(x_0)$.

LEMA 2.2.1. *El factor de conformalidad de una función conforme T es $|T'|$.*

DEMOSTRACIÓN. Si escribimos T de la forma $T(z) = u(z) + iv(z)$, donde $z = x + yi$. Tenemos por las ecuaciones de Cauchy-Riemann que

$$DT(z) = \begin{pmatrix} u_x & v_x \\ -u_x & u_x \end{pmatrix}$$

y esta matriz es ortogonal si y solo si $u_x^2 + v_x^2 = 1$. Por tanto, haciendo

$$DT(z) = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} \begin{pmatrix} \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + v_x^2}} & \frac{v_x}{\sqrt{u_x^2 + v_x^2}} \\ \frac{-u_x}{\sqrt{u_x^2 + v_x^2}} & \frac{u_x}{\sqrt{u_x^2 + v_x^2}} \end{pmatrix}$$

ya se tendría que es ortogonal, y de hecho, por Cauchy-Riemann, tenemos que $T'(z) = u_x + iv_x$. por lo que $\mu_T = \sqrt{u_x^2 + v_x^2} = T'(z)$. \square

DEFINICIÓN 2.2.2. Sea A una región en \mathbb{R}^n , una densidad en A es una función continua $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Estas densidades nos permiten medir longitudes de curvas de distintas maneras. Dada una γ curva de clase C^1 en A , y ahora consideramos la densidad λ , se va a definir la λ -longitud γ como

$$l_\lambda(\gamma) = \int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow A$. Esta definición se puede extender al caso de curvas de clase C^1 a trozos.

DEFINICIÓN 2.2.3. Sea λ una densidad en una región Λ y $z_1, z_2 \in \Lambda$, se define como λ -distancia entre z_1 y z_2 como

$$\inf_{\gamma} l_\lambda(\gamma),$$

es decir, el ínfimo de todas las curvas γ de clase C^1 por tramos que unen z_1 y z_2 . A esta distancia la vamos a denotar como $\rho_\lambda(z_1, z_2)$, y la llamaremos distancia hiperbólica.

TEOREMA 2.2.4. Sea λ una densidad definida en una región A de \mathbb{R}^n , entonces la distancia ρ_λ define una métrica en A .

DEMOSTRACIÓN. Primero tenemos que ver que es simétrica. Tenemos que $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ de clase C^1 que une z_1 con z_2 , definimos ahora $-\gamma : [a, b] \rightarrow A$ como $-\gamma(t) = \gamma(a + b - t)$, que será una curva que une z_2 con z_1 . Y tendremos que

$$\begin{aligned} l_\lambda(-\gamma) &= \int_a^b \lambda(-\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \lambda(\gamma(a + b - t)) |\gamma'(a + b - t)| dt = \\ &= \int_a^b \lambda(\gamma(s)) |\gamma'(s)| ds = l_\lambda(\gamma). \end{aligned}$$

Claramente $\rho(x, x) = 0$. La desigualdad triangular se prueba fácilmente, ya que la norma cumple la desigualdad triangular y con la suma de integrales. Ahora solamente queda ver que si $x \neq y$ entonces $\rho(x, y) > 0$. Para ver esto, sea D un disco cerrado con centro en x , radio r y tal que $y \notin D$. Por compacidad y continuidad existe m tal que $\lambda(z) \geq m, \forall z \in D$. Ahora, sea $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ una curva que une x con y y $t_0 \in [a, b]$, tal que $\gamma(t_0)$ es el primer punto donde la curva sale del disco abierto D . En este caso se tiene

$$l_\lambda \geq \int_a^{t_0} \lambda(-\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \geq mr,$$

puesto que cualquier curva que une x con un punto en δD tiene una longitud mayor o igual a r . Por lo tanto $\rho(x, y) \geq mr > 0$. \square

Ahora queremos dar relaciones para obtener espacios isométricos, para por ejemplo, exhibir diferentes modelos del plano hiperbólico. Sean A y B dos regiones de \mathbb{R}^n y $f : A \rightarrow B$, una biyección conforme, supongamos que A está dotada con la métrica definida por la densidad λ . Entonces, se puede proveer a la región B con una densidad σ , de tal manera que f sea una isometría. Para que se cumpla esta condición, tenemos que definir σ como

$$(2.2.1) \quad \sigma(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)},$$

donde $\mu(x)$ es el factor de conformalidad de f en x . Con esto, se va a tener

$$\begin{aligned} l_\sigma(f(\gamma)) &= \int_a^b |(f\gamma)'(t)|\sigma(f(\gamma(t)))dt = \\ &= \int_a^b \mu(\gamma(t))|\gamma'(t)|\frac{\lambda(\gamma(t))}{\mu(\gamma(t))}dt = \int_a^b \lambda(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt = l_\lambda(\gamma). \end{aligned}$$

Luego es una isometría. También se puede probar para funciones C^1 a trozos. Además, hay que destacar que se cumple el recíproco, es decir, que dadas dos regiones A y B con métricas definidas por densidades λ y σ respectivamente y una biyección conforme entre ellas tales que se satisface 2.2.1, entonces A y B son regiones isométricas.

En particular, para el caso en el que busquemos una isometría en el mismo espacio, es decir, dada una una región A con métrica definida por densidad λ , si queremos que la biyección conforme $f : A \rightarrow A$ sea una isometría tiene que satisfacer

$$(2.2.2) \quad \lambda(f(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)}.$$

2.2.2. El modelo del semiplano.

Con lo descrito anteriormente sobre densidades podemos presentar el primer modelo de la geometría hiperbólica, el modelo del semiplano, en el que las distancias van a crecer según los puntos estén más cerca de la recta real.

DEFINICIÓN 2.2.5. El plano superior \mathbb{H}^2 provisto con la métrica definida por la densidad

$$\lambda(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)}$$

se le llama el plano hiperbólico y a esta métrica se le llama la métrica hiperbólica.

De las primeras cosas que podemos comentar de esta métrica es que dada una curva en C en \mathbb{H}^2 , tenemos que si la desplazamos horizontalmente su longitud no va a cambiar. En cambio, si la desplazamos verticalmente va a aumentar o reducir tanto como queramos, en contraposición con la métrica euclídea donde mediría lo mismo. Más tarde veremos que hay arcos de circunferencias que euclideanamente medirían lo mismo mientras que hiperbólicamente miden lo mismo.

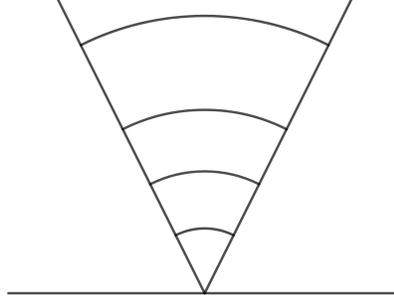


FIGURA 2.2.1. Curvas con misma longitud hiperbólica.

TEOREMA 2.2.6. *El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa como grupo de isometrías en \mathbb{H}^2 con la métrica hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea una transformación

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde su matriz asociada pertenece a $SL(2, \mathbb{R})$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \text{Im}(T(z)) &= \text{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \text{Im} \left(\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} \right) = \\ &= \text{Im} \left(\frac{adz + bc\bar{z}}{|cz + d|^2} \right) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}. \end{aligned}$$

Por el lema 2.2.1, tendremos que

$$\mu_T(z) = |T'(z)| = \frac{1}{|cz + d|^2}.$$

Y entonces vamos si se cumple la relación 2.2.2. Por un lado

$$\lambda(T(z)) = \frac{1}{\text{Im}(T(z))} = \frac{|cz + d|^2}{\text{Im}(z)},$$

y por otro lado

$$\frac{\lambda(z)}{\mu_T(z)} = \frac{\frac{1}{\text{Im}(z)}}{\frac{1}{|cz+d|^2}} = \frac{|cz + d|^2}{\text{Im}(z)}.$$

Y con lo cual son iguales, por lo que tenemos el resultado. \square

Vamos a establecer ahora cómo van a ser las curvas que minimizan las distancias en \mathbb{H}^2 . Para ello primero consideremos un caso sencillo. Tomamos los puntos i y ki con $k > 1$. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$ de clase C^1 , tal que $\gamma(a) = i$ y $\gamma(b) = ki$. Si $l_\lambda(\gamma)$ denota la longitud hiperbólica de

γ y $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$, vamos a tener que por la definición de $l_\lambda(\gamma)$ que

$$\begin{aligned} l_\lambda(\gamma) &= \int_a^b \frac{\sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \gamma_2'(t)^2}}{\gamma_2(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{\sqrt{(\gamma_2'(t)^2)}}{\gamma_2(t)} dt \geq \int_a^b \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_2(t)} dt = \log(\gamma_2(t)) \Big|_a^b = \\ &= \log \gamma_2(b) - \log \gamma_2(a) = \log k - \log 1 = \log k \end{aligned}$$

Por lo tanto, como definimos ρ como el ínfimo de estas distancias, y de hecho se alcanza con la curva donde $a = 1$ y $b = k$ dada por $\gamma(t) = ti$. Entonces

$$\rho(i, ki) = \log k.$$

En el caso de que $k < 1$, haciendo argumentos análogos se tiene que

$$\rho(ki, i) = -\log k.$$

Y ya por último, haciendo cálculos análogos, se va a tener en caso de que los puntos sean li y ki , con $l < k$, entonces

$$\rho(li, ki) = \log \frac{k}{l}$$

Si consideráramos el caso general de $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R} \mid x_n\}$, tomamos la densidad $\lambda(x) = \frac{1}{x_n}$, y las propiedades anteriores serán análogas.

Volvamos a proseguir en la búsqueda de las geodésicas en \mathbb{H}^2 .

PROPOSICIÓN 2.2.7. *El grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa transitivamente en la familia de “círculos” ortogonales al eje real.*

DEMOSTRACIÓN. Primero vimos que estas transformaciones van a preservar \mathbb{H}^2 . Ahora solamente hay que ver que dado cualquier “círculo” ortogonal al eje real va a existir una función en $PSL(2, \mathbb{R})$ que transforma este “círculo” en el eje real imaginario.

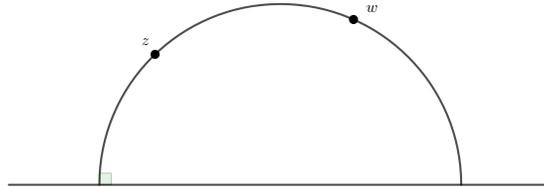
Primero, si este “círculo” es una recta paralela al eje imaginario una simple traslación nos lleva al eje imaginario. Si tenemos una circunferencia cualquiera que corta ortogonalmente al eje real, mediante una traslación y una homotecia la transformamos en la circunferencia unitaria, y como vimos anteriormente la aplicación que lleva la circunferencia unitaria al eje imaginario ya lo tendríamos. \square

Con esto ya podemos deducir cuáles van a ser las geodésicas.

COROLARIO 2.2.8. *Sean $z, w \in \mathbb{H}^2$, se tiene que $\rho(z, w)$ va a ser la longitud hiperbólica del tramo de “círculo” C que corta ortogonalmente a la recta real y une estos dos puntos.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la proposición anterior y del teorema 2.2.6, tenemos que podemos encontrar una función de $PSL(2, \mathbb{R})$ que transforme esta circunferencia C en el eje imaginario y además va a mantener las distancias por ser una isometría. Como después de hacer el cambio, en eje imaginario la geodésica que une z con w es el segmento de recta que los une, entonces segmento

de circunferencia va a ser la mínima distancia. Para ver que es único, supongamos por reducción al absurdo que existe otra curva de z a w con dicha propiedad, existiría otra geodésica, lo cual es imposible. \square

FIGURA 2.2.2. Geodésicas en \mathbb{H}^2

Una vez descrita cuales son las geodésicas en este modelo nos queda ver cuánto va a medir esa distancia. Para dos puntos cualesquiera z y w , consideramos la circunferencia ortogonal al eje real que las une, llamamos u y v a los puntos de la recta real que pertenecen a esa circunferencia. Sabemos que va a existir una transformación de Möbius f que lleve a esa circunferencia al eje imaginario tal que $f(u) = 0$ y $f(v) = \infty$, y entonces $f(z) = ai$ y $f(w) = bi$. Por tanto,

$$\rho(z, w) = \log \frac{b}{a}.$$

También podemos simplificar esta ecuación como

$$\rho(z, w) = \log[u, z, w, v].$$

Ahora veamos una propiedad de esta distancia

PROPOSICIÓN 2.2.9. Sean z, w, v tres puntos distintos en \mathbb{H}^2 , entonces

$$\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w) \iff v \in [z, w].$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que z, v, w están en la misma línea hiperbólica con u_1 y u_2 los puntos reales de esa circunferencia. Podemos considerar la aplicación f que lleva esos cinco puntos al eje imaginario tal que $f(z) = ai$, $f(v) = bi$ y $f(w) = ci$. Entonces,

$$\begin{aligned} \rho(z, v) + \rho(v, w) &= \log \frac{b}{a} + \log \frac{c}{b} \\ &= \log \frac{c}{a} \\ &= \rho(z, w). \end{aligned}$$

Ahora si z, v, w no estuviesen en la misma línea hiperbólica, consideramos las curvas entre $[z, v]$ y $[v, w]$, pero no formarían una curva simple, y por lo tanto $\rho(z, v) + \rho(v, w) > \rho(z, w)$ \square

LEMA 2.2.10. *La expresión*

$$\frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$$

es invariante bajo la acción de transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{|T(z) - T(w)|^2}{2\operatorname{Im}(T(z))\operatorname{Im}(T(w))} = \\ &= \frac{|cz + d|^2 |cw + d|^2 \left| \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} \right|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} = \\ &= \frac{|(az + b)(cw + d) - (aw + b)(cz + d)|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} = \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}. \end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 2.2.11. *Sean z y w dos puntos en \mathbb{H}^2 , entonces*

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que $z = i$ y $w = ki$, ya que para cualquier otro par de puntos podemos tomar una función que lleve z a i y w a ki tal que su distancia hiperbólica sea la misma. Con lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, w) \cosh \rho(i, ki) &= \cosh \log k = \frac{k + \frac{1}{k}}{2} = \\ &= \frac{k + \frac{1}{k} - 2}{2} + 1 = \frac{(k - 1)^2}{2k} + 1 = \\ &= \frac{|i + ki|^2}{2\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(ki)} + 1 = \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} + 1. \end{aligned}$$

Para afirmar el último paso usamos el lema anterior, ya que si llamamos f a esa función, tenemos $\frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$ es invariante. □

PROPOSICIÓN 2.2.12. *Sean z y w dos puntos en \mathbb{H}^2 , entonces*

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)},$$

$$\cosh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - \bar{w}|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como en la proposición anterior podemos suponer que hay una función que lleve z a i y w a ki . Entonces

$$\begin{aligned} \sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) &= \sinh^2 \frac{1}{2} \rho(i, ki) = \sinh^2 \log \sqrt{k} = \\ &= \frac{(k-1)^2}{4k} = \frac{|i-ki|^2}{4\operatorname{Im}(i)\operatorname{Im}(ki)} = \frac{|z-w|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}. \end{aligned}$$

Para $\cosh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w)$ simplemente usamos la relación $\cosh^2 = 1 + \sinh^2$. \square

Una de las aplicaciones de estas fórmulas es para determinar cómo son los círculos hiperbólicos. Veremos que van a ser círculos euclidianos en los que su centro está desviado hacia abajo.

TEOREMA 2.2.13. *El conjunto de puntos $z = x + yi$ en \mathbb{H}^2 , que equidistan hiperbólicamente una distancia r de un punto $z_0 = x_0 + y_0i$ están determinados por*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh^2 r)^2 = y_0^2 \sinh^2 r.$$

Que de hecho, constituye un círculo euclidiano.

DEMOSTRACIÓN. Sea $C = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, z_0) = r\}$, entonces

$$\cosh r = \cosh \rho(z, z_0) = 1 + \frac{|z - z_0|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z_0)} = \frac{(x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2}{2yy_0}.$$

Despejando y completando cuadrados vamos a tener que

$$2yy_0 \cosh r = (x - x_0)^2 + y^2 + y_0^2(\cosh^2 r - \sinh^2 r)$$

y

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh^2 r)^2 = y_0^2 \sinh^2 r.$$

\square

En conclusión, tenemos que un círculo hiperbólico de centro $z_0 = x_0 + y_0i$ y radio hiperbólico r es un círculo euclidiano de centro $x_0 + iy_0 \cosh r$ y radio $y_0 \sinh r$.

DEFINICIÓN 2.2.14. Un horociclo basado en un punto $\alpha \in \widehat{\mathbb{R}}$, si α es finito es un círculo en $\overline{\mathbb{H}^2}$, tangente en α a la recta real. Si $\alpha = \infty$ es cualquier recta en $\overline{\mathbb{H}^2}$ paralela a la recta real, y distinta.

DEFINICIÓN 2.2.15. Un hiperciclo por α y β puntos distintos $\widehat{\mathbb{R}}$ es la intersección de cualquier “círculo” por α y β con \mathbb{H}^2 .

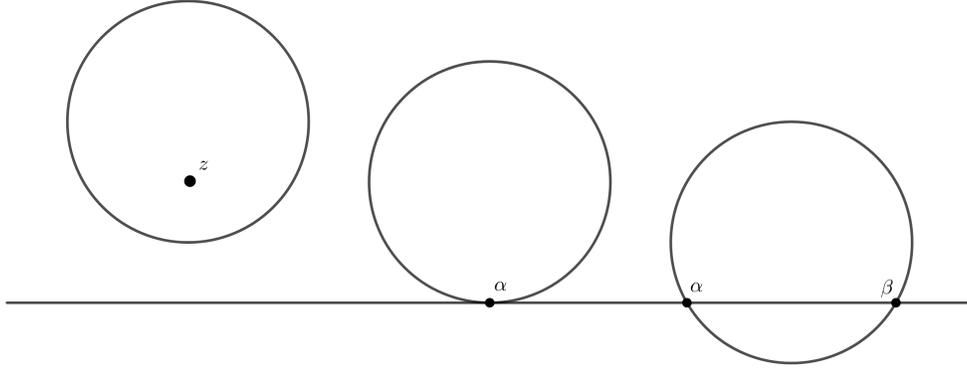


FIGURA 2.2.3. Ejemplo de círculo hiperbólico, horociclo e hiperciclo respectivamente

TEOREMA 2.2.16. *Cualquier isometría del plano hiperbólico \mathbb{H}^2 o es del tipo $T(z)$ o $T(-\bar{z})$, donde $T \in PSL(2, \mathbb{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea φ una isometría de \mathbb{H}^2 , podemos suponer que va a existir una función $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tal que $T\varphi$ fija el eje imaginario puntualmente.

Sea ahora $z \in \mathbb{H}^2$, de la forma $z = x + yi$ y $T\varphi(z) = a + bi$. Entonces tenemos que

$$\frac{|it - T\varphi(z)|^2}{2\text{Im}(it)\text{Im}(T\varphi(z))} = \frac{|T\varphi(it) - T\varphi(z)|^2}{2\text{Im}(T\varphi(it))\text{Im}(T\varphi(z))} = \frac{|it - z|^2}{2\text{Im}(it)\text{Im}(z)},$$

esto último se tiene gracias al lema 2.2.10, y con esto

$$\frac{a^2 + (b - t)^2}{b} = \frac{x^2 + (y - t)^2}{y}$$

y

$$y(a^2 + (b - t)^2) = b(x^2 + (y - t)^2).$$

Haciendo t tender a ∞ tenemos que $b = y$ y de aquí que $a = \pm x$.

Finalmente, como las isometrías son continuas, se tiene que los puntos en el primer cuadrante, donde $T\varphi$ es la función $z \rightarrow -z$ (o la identidad), es un conjunto abierto y cerrado, este argumento se aplica también al segundo cuadrante. Se sigue entonces por conexidad, y del hecho de que cualquier isometría es inyectiva, que

$$T\varphi = \text{Id} \quad \text{o} \quad T\varphi = -\bar{z}.$$

□

LEMA 2.2.17. *Sea λ una geodésica en \mathbb{H}^2 y $z \in \mathbb{H}^2 \setminus \lambda$, entonces $\rho(z, \lambda)$ se alcanza en $z_0 \in \lambda$, donde el segmento $[z, z_0]$ corta ortogonalmente a λ .*

DEMOSTRACIÓN. Como las las funciones de $PSL(2, \mathbb{R})$ van a mantener las distancias podemos suponer que λ es el eje imaginario, con lo que $\rho(z, \lambda) = \rho(z, |z|i)$. Vamos a tener que

$$\begin{aligned} \cosh \rho(z, it) &= 1 + \frac{|z - it|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(it)} = \frac{x^2 + y^2 + t^2}{2yt} = \\ &= \frac{|z|^2 + t^2}{2yt} = \frac{|z|}{2y} \left(\frac{|z|}{t} + \frac{t}{|z|} \right) \geq \frac{|z|}{y}. \end{aligned}$$

Esto último se obtiene ya que un numero real positivo más su inverso es siempre mayor que 2, y se cumple la igualdad cuando es 1, es decir, en este caso cuando $|z| = t$. \square

De este lema se puede deducir que para los triángulos hiperbólicos en el modelo del semiplano, y más tarde en el disco de Poincaré, que tienen un ángulo recto y dos puntos finitos que

$$\sin \alpha \cosh \rho(z, |z|i) = 1$$

donde α es el ángulo que forma z con la recta real.

Esto se tiene aplicando el lema anterior, en el caso cuando $t = |z|$, si $z = x + yi$ se tiene que

$$\sin \alpha \cosh \rho(z, |z|i) = \sin \alpha \frac{|z|}{y} = \frac{y}{|z|} \frac{|z|}{y} = 1.$$

A esta propiedad se le conoce como propiedad del paralelismo.

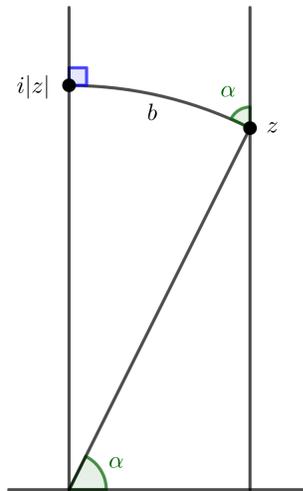


FIGURA 2.2.4. Ángulo del paralelismo

2.2.3. El modelo del disco de Poincaré.

En el apartado anterior vimos que podíamos transformar el semiplano \mathbb{H}^2 en el disco unitario mediante la transformación

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1},$$

y cuya función inversa es

$$f^{-1}(w) = \frac{iw+i}{-w+i}.$$

Para definir la métrica en este modelo primero tenemos que calcular su inversa, que ya la tenemos y su factor de conformalidad. Tenemos que

$$f'(z) = \frac{2i}{(z+i)^2},$$

y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que $\mu(z)$ está dado por $|f'(z)| = \frac{2}{|z+i|^2}$.

Para calcular ahora la métrica tenemos que hacer el cociente de la densidad y su factor de conformalidad. Como vimos anteriormente vamos a usar la métrica del semiplano y mediante el isomorfismo f obtendremos el del disco de Poincaré. Primero hacemos

$$Im(f^{-1}(z)) = Re\left(\frac{w+1}{1-w}\right) = Re\left(\frac{(w+1)(1-\bar{w})}{|1-w|^2}\right) = \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}.$$

Finalmente tenemos

$$\begin{aligned} \sigma(w) &= \frac{\lambda(f^{-1}(w))}{\mu(f^{-1}(w))} = \frac{1/Im(f^{-1}(w))}{2/|f^{-1}(w)+i|^2} = \\ &= \frac{|1-w|^2 \left| \frac{iw+i}{1-w} + i \right|^2}{2(1-|w|)^2} = \frac{2}{1-|w|^2}. \end{aligned}$$

DEFINICIÓN 2.2.18. El disco unitario $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ provisto de la métrica definida por la densidad

$$\sigma(w) = \frac{2}{1-|w|^2},$$

se le conoce como disco de Poincaré y a la métrica inducida se le llama hiperbólica.

A ambos modelos, el del disco de Poincaré y el del semiplano, se les conoce como plano hiperbólico. Este modelo es más homogéneo que el del semiplano, ya que todos los puntos en la recta al infinito $\partial\Delta$ similares, a diferencia del semiplano donde el ∞ es un punto distinguido. En cambio, como las transformaciones parabólicas e hiperbólicas son conjugadas a traslaciones y homotecias respectivamente, se comprenden mejor en el del semiplano. Por tanto dependiendo de lo que se vaya a tratar es mejor considerar un modelo u otro.

Por existir la isometría f entre ambos modelos casi todas las propiedades que se probaron para el semiplano son válidas para el modelo de Poincaré. Vamos a tener que esta función f va a transformar los “círculos” ortogonales a la recta real en “círculos” ortogonales al disco, y a parte de ser isometría también va a preservar la longitud de las curvas de clase C^1 a trozos, por lo

que las geodésicas van a ir a parar a geodésicas. Con esto tenemos que las geodésicas van a ser semicírculos ortogonales al círculo unitario, así como los diámetros.

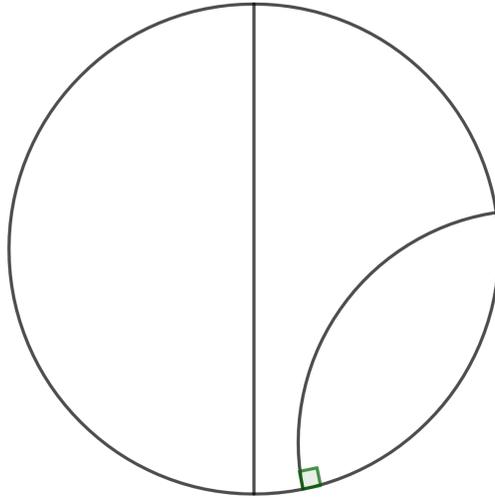


FIGURA 2.2.5. Geodésicas en el disco de Poincaré

Para saber cómo construir estas geodésicas en este modelo puede verse en detalle en [11].

Otra propiedad que tiene es que los grupos $PSL(2, \mathbb{R})$ y $M(\Delta)$ son conjugados bajo la transformación f , lo que lleva a que $M(\Delta)$ actúe como un grupo de isometrías en el disco de Poincaré, en particular, en este modelo las rotaciones van a ser isometrías hiperbólicas. También los círculos hiperbólicos van a ser círculos euclidianos. También vamos a tener una propiedad análoga al teorema 2.2.16.

TEOREMA 2.2.19. *Cualquier isometría hiperbólica del disco de Poincaré es un elemento de $M(\Delta)$, o de la forma $\frac{a\bar{z}+c}{c\bar{z}+a}$, donde $|a|^2 - |c|^2 = 1$.*

La demostración de este teorema se prueba ya que las funciones $z \rightarrow -\bar{z}$ y $z \rightarrow \bar{z}$ son conjugadas mediante f . Por lo que si partimos del disco, cambiamos al semiplano, usamos los mismos argumentos que en teorema y volvemos al disco, llegamos al resultado que queremos.

Vamos a ver un resultado que nos va a dar la longitud de las geodésicas.

LEMA 2.2.20. *La distancia hiperbólica del origen a un punto z en el disco de Poincaré es dada por*

$$\log \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $f(i) = 0$, podemos suponer que un punto es el 0 y el otro $|z|$, y para cualquier otro punto podemos tomar una función que lo lleve al 0 y el otro a $|z|$ respectivamente

y mantenga la distancia hiperbólica. Entonces para el segmento $[0, |z|]$, podemos parametrizarlo mediante la curva $\gamma : [0, |z|] \rightarrow \Delta$, $\gamma(t) = t$. Por lo cual

$$l_h(\gamma) = \int_0^{|z|} \frac{2}{1-t^2} dt = \int_0^{|z|} \frac{1}{1+t} dt + \int_0^{|z|} \frac{1}{1-t} dt = \log \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$

□

2.2.4. El grupo completo de isometrías.

Vamos ahora a describir las isometrías del plano hiperbólico, en sus dos modalidades. Antes de nada vamos a definir las reflexiones en círculos y rectas brevemente. Denotamos por z^* a $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$, y por $C(a, r)$ al círculo de centro en a y radio r .

DEFINICIÓN 2.2.21. Se define la reflexión en $C(a, r)$ como

$$\varphi(z) = \begin{cases} a + r^2(z - a)^*, & \text{si } z \in \mathbb{C}, z \neq a, \\ \infty, & \text{si } z = a, \\ a, & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Esta misma definición se puede aplicar a esferas de cualquier dimensión.

DEFINICIÓN 2.2.22. Se define la reflexión en la recta $R(a, t)$ como la función $\varphi : \widehat{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^2$ dada por

$$\begin{cases} z - 2(z \cdot a - t)a & \text{si } z \in \mathbb{R} \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

donde $z \cdot a$ denota el producto escalar de z por a , y

$$R(a, t) = \{z \in \mathbb{R}^2 | z \cdot a = t, a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}, t \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$$

.

Vamos a tener que en general que estas funciones, las traslaciones y las transformaciones ortogonales son continuas con la métrica cordal. Con esto, podemos definir el grupo general de Möbius.

DEFINICIÓN 2.2.23. El grupo general de Möbius actuando en $\widehat{\mathbb{R}}^2$, denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^2)$, consiste en todas las funciones que son una composición finita de reflexiones en círculos.

Vamos a denotar por $M(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ al subgrupo formado por aquellas funciones que están compuestas por un número par de reflexiones.

Este grupo $M(\widehat{\mathbb{R}}^2)$ se dice que preserva la orientación, es decir, que el determinante de su matriz jacobiana en cualquier punto con valor finito es positivo.

PROPOSICIÓN 2.2.24. Sea $\psi(z) = \bar{z}$, $S(z) = e^{i\theta} z$ y φ la reflexión en la recta L que pasa por el origen y por $e^{i\theta}$, donde $0 < \theta \leq \pi$, entonces

$$\varphi = S\psi S^{-1}.$$

DEMOSTRACIÓN. Un vector normal unitario a L está dado por $ie^{i\theta}$. Escribiendo $a = a_1 + ia_2$ y $z = x + yi$, se tiene que $Re(za) = a_1x + a_2y$, por lo cual

$$\varphi(z) = z - 2Re(z\bar{a})a = z - (z\bar{a} + a\bar{z})a = -a^2\bar{z}.$$

Y por tanto,

$$\varphi S(z) = \varphi(e^{i\theta}z) = e^{i2\theta}(e^{-i\theta}\bar{z}) = e^{i\theta}\bar{z} = S(\bar{z}) = S\psi(z).$$

□

En primer lugar, podemos ver que las homotecias y las traslaciones pertenecen a $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

LEMA 2.2.25. *La homotecia $z \rightarrow kz$ es la composición de una reflexión en el círculo unitario, seguida de la reflexión en el círculo $C(0, \sqrt{k})$.*

DEMOSTRACIÓN. Llamemos φ y ψ a sendas reflexiones, entonces

$$\psi(\varphi(z)) = \psi(z^*) = k(z^*)^* = kz.$$

□

LEMA 2.2.26. *La traslación $z \rightarrow z + b$ es la composición de la reflexión en la recta $R(b/|b|, 0)$, seguida de la reflexión en la recta $R(b/|b|, |b|/2)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean φ y ψ dichas reflexiones respectivamente, y llamemos $a = \frac{b}{|b|}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi(\varphi(z)) &= \psi(z - 2(a \cdot z)a) = \\ &= z - 2(a \cdot z)a - \left[2[z - 2(a \cdot z)a] \cdot a - \frac{|b|}{2} \right] a = z + b. \end{aligned}$$

□

LEMA 2.2.27. *La rotación $z \rightarrow e^{i\theta}z$ es la composición de las rectas que pasar por el origen que pendientes $e^{i\frac{\theta}{2}}$ y 0 respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. De la proposición 2.2.24 tenemos que la reflexión en la recta por el origen y que pasa por $e^{i\frac{\theta}{2}}$ es $\varphi(z) = e^{i\theta}\bar{z}$, por lo tanto, si lo componemos con la reflexión $\psi(z) = \bar{z}$ tenemos que $\varphi(\psi(z)) = e^{i\theta}z$, es decir, una rotación. Luego las rotaciones pertenecen a $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$. □

Una consecuencia directa de estos dos lemas es que las transformaciones parabólica e hiperbólicas van a pertenecer a $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

Primero veamos las transformaciones hiperbólicas. Tomemos el ejemplo en el que la transformación conjugante es

$$\varphi = \frac{z - i}{z + i},$$

y consideramos el espacio dado por la imagen de φ , las circunferencias donde hacemos las reflexiones van a ser los círculos de Apolonio L_1 y L_2 . Y tomamos el eje imaginario para ver su dirección, como es una homotecia, mantendrá la recta y por lo tanto al deshacer φ nos mantendremos en el mismo círculo fijo y en el mismo sentido. Gráficamente sería

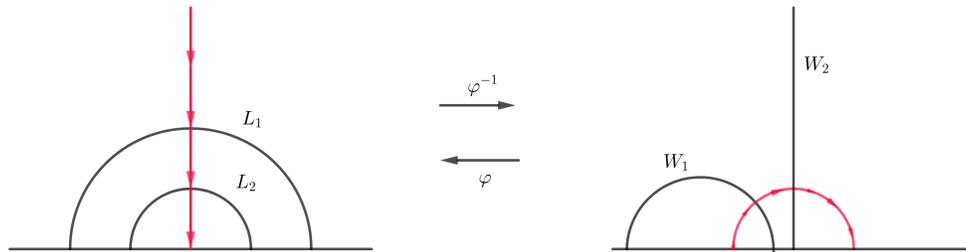


FIGURA 2.2.6. Representación gráfica de las transformaciones hiperbólicas como dos reflexiones en círculos

Ahora veámoslo con las parabólicas. Partimos de dos rectas L_1 y L_2 de separación $\frac{b}{2}$, perpendiculares a la recta real, por lo que al aplicar φ^{-1} nos van a dar “círculos” perpendiculares a la recta real. Tomamos dos rectas perpendiculares a L_1 y L_2 que se forman al ir aplicando la traslación $z + b$, al aplicar φ^{-1} sabemos que van a ser circunferencias ortogonales a las anteriores que pasan por el punto fijo. Y vemos que va a preservar la orientación.

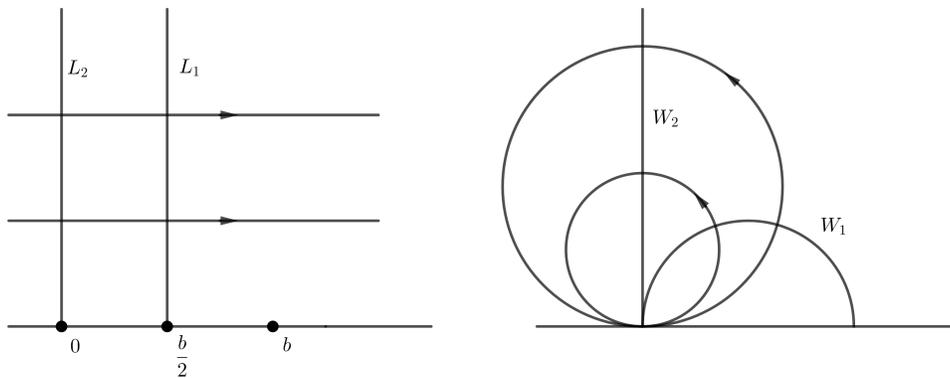


FIGURA 2.2.7. Representación gráfica de las transformaciones parabólicas como dos reflexiones de dos rectas paralelas.

Por último veamos las rotaciones. En este caso, como estamos restringidos a \mathbb{H}^2 , en el espacio al aplicar φ nos tenemos que restringir a dentro del círculo unidad. Tomamos dos rectas L_1 y L_2 , donde L_2 no tiene pendiente y L_1 tiene pendiente $e^{i\theta/2}$. Al coger una circunferencia en el espacio φ

lo rotamos mediante la reflexión de estas rectas. Como va a mantener la circunferencia, al aplicar φ^{-1} será el mismo círculo de Apolonio.

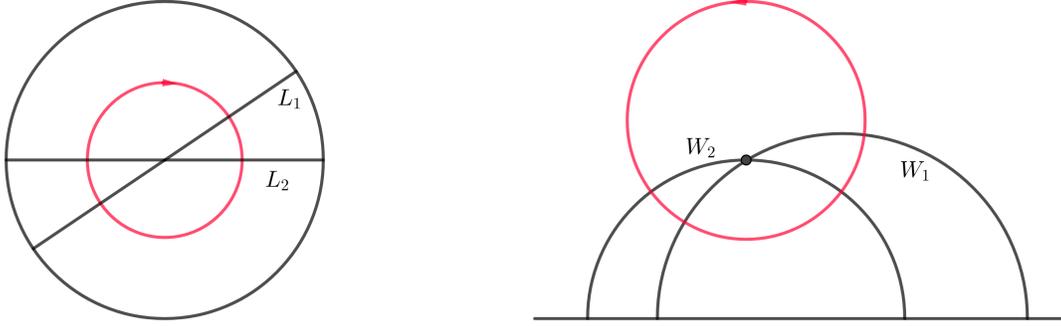


FIGURA 2.2.8. Representación gráfica de las transformaciones elípticas como dos reflexiones de dos rectas.

Veamos ahora un teorema bastante importante que nos va a identificar las transformaciones de Möbius complejas con $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

TEOREMA 2.2.28. $PSL(2, \mathbb{C}) = M(\widehat{\mathbb{R}^2})$.

DEMOSTRACIÓN. Primero probemos que $M(\widehat{\mathbb{R}^2}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$. Primero veremos que las reflexiones sobre círculos y recta van a ser de la forma

$$z \rightarrow \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

con $ad - bc \neq 0$. Esta forma también es válida, ya que cambiar z por \bar{z} mantiene las condiciones.

En primer lugar, tenemos que la reflexión en el círculo $C(a, r)$ está definida por

$$\begin{aligned} a + r^2 \frac{(z - a)}{|z - a|^2} &= a + r^2 \frac{1}{\bar{z} - \bar{a}} = \\ &= \frac{a(\bar{z} - \bar{a}) + r^2}{\bar{z} - \bar{a}} = \frac{a\bar{z} + r^2 - |a|^2}{\bar{z} - \bar{a}} \end{aligned}$$

y haciendo un renombramiento de los coeficientes lo tenemos de la forma que queremos.

Por otra parte, junto con la proposición 2.2.24 tenemos que la reflexión en la recta $R(a, t)$ es a composición $T^{-1}\psi T$, donde $T(z) = z - ta$, es decir, la traslación de la recta al origen, y ψ es la reflexión en la recta $R(a, 0)$, y vimos que $\psi(z) = -a^2\bar{z}$. Con lo cual tenemos que

$$T^{-1}\psi T(z) = T^{-1}\psi(z - ta) = T^{-1}(-a^2(\bar{z} - t\bar{a})) = -a^2\bar{z} + 2ta,$$

y haciendo otra vez un renombrado de los coeficientes vemos que es de la forma del principio que buscamos.

Por tanto, también tendremos que cualquier composición de estas transformaciones va a ser una función de $PSL(2, \mathbb{C})$. Simplemente porque calculamos sus matrices asociadas, y la composición de estas va a ser la multiplicación de estas matrices, por lo que nos dará otra matriz que pertenezca a $PSL(2, \mathbb{C})$. Luego $M(\widehat{\mathbb{R}^2}) \subset PSL(2, \mathbb{C})$.

Veamos ahora la otra implicación, que las transformaciones de Möbius complejas preservan la orientación, $PSL(2, \mathbb{C}) \subset M(\widehat{\mathbb{R}^2})$. Basta verlo para homotecias, traslaciones, rotaciones y la función $\frac{1}{z}$. Hemos visto que las homotecias, traslaciones y rotaciones pertenecen a $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$ por los lemas 2.2.25, 2.2.26 y 2.2.27 respectivamente. La función $\frac{1}{z}$ es una reflexión en el círculo unitario más la conjugación \bar{w} , por lo que pertenece a $M(\widehat{\mathbb{R}^2})$. Luego $PSL(2, \mathbb{C}) \subset M(\widehat{\mathbb{R}^2})$. \square

De este teorema se pueden sacar varias conclusiones. Pero antes definamos unos conceptos.

DEFINICIÓN 2.2.29. Sea W un “círculo”, se dice que z y w son puntos inversos con respecto a W , si $\sigma(z) = w$, donde σ es la reflexión en W .

COROLARIO 2.2.30. Sea φ una transformación en el grupo general de Möbius, tal que fija puntualmente un “círculo” W , entonces φ es la reflexión en W , o es la identidad.

DEMOSTRACIÓN. Distingamos dos casos. Si $\varphi \in M(\widehat{\mathbb{R}^2})$, entonces es la identidad ya que fija más de tres puntos. Si $\varphi \notin M(\widehat{\mathbb{R}^2})$, si consideramos σ la reflexión en W , entonces $\sigma\varphi \in M(\widehat{\mathbb{R}^2})$, y aplicando el caso anterior, $\sigma\varphi = \text{Id}$, y entonces $\varphi = \sigma$ ya que σ es de orden 2. \square

COROLARIO 2.2.31. Sean σ_1 y σ_2 la reflexiones en los “círculos” W_1 y W_2 , respectivamente, entonces σ_1 y σ_2 son conjugadas en $GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$, en particular, la transformación conjugante se puede tomar en $PSL(2, \mathbb{C})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, tal que $T(W_1) = W_2$, entonces como $T^{-1}\sigma_2T$ fija puntualmente W_1 , y aplicando el corolario anterior tenemos que o es la identidad o es σ_1 , y como la identidad no podría ser, entonces

$$T^{-1}\sigma_2T = \sigma_1.$$

\square

COROLARIO 2.2.32. Sea $\varphi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$ y W_1, W_2 “círculos”. en la esfera de Riemann, tales que $\varphi(W_1) = W_2$, entonces φ manda puntos inversos con respecto a W_1 a puntos inversos con respecto a W_2 .

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de los resultados anteriores que si σ_1 y σ_2 denotan las reflexiones en las circunferencias W_1 y W_2 respectivamente, entonces

$$\varphi^{-1}\sigma_2\varphi = \sigma_1$$

por lo cual

$$\sigma_2\varphi = \varphi\sigma_1.$$

Ahora, si z y w son puntos inversos con respecto a W_1 se tiene que

$$\sigma_2\varphi(z) = \varphi\sigma_1(z) = \varphi(w).$$

□

COROLARIO 2.2.33. *Sea σ la reflexión en un “círculo” W ortogonal al eje real, entonces la restricción de σ a \mathbb{H}^2 es una isometría hiperbólica.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ la transformación del “círculo” W al eje imaginario. Si llamamos ψ la reflexión en el eje imaginario, entonces

$$\sigma = T^{-1}\psi T,$$

y como cada una preserva \mathbb{H}^2 , entonces σ preserva \mathbb{H}^2 . □

Mediante la transformación de Cayley este último resultado se puede afirmar para el disco de Poincaré. De hecho, podemos dar el siguiente resultado, que se puede considerar como un análogo al teorema de Cartán-dieudonné.

PROPOSICIÓN 2.2.34. *Las reflexiones en “círculos” ortogonales a la recta real (o al círculo unitario) generan el grupo completo de las isometrías en \mathbb{H}^2 (o Δ).*

DEMOSTRACIÓN. Tenemos por el teorema 2.2.16 que las isometrías de \mathbb{H}^2 están formadas por elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ o por $z \rightarrow -\bar{z}$. Este último es claramente una reflexión en el eje imaginario. Respecto a los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ sabemos que está generado por homotecias, traslaciones paralelas al eje real, y $z \rightarrow -\frac{1}{z}$. Y todas ellas son reflexiones de “círculos” ortogonales al eje real, por lo que se tiene el resultado. □

PROPOSICIÓN 2.2.35. *Sea $S(a, r)$ la esfera de centro a y radio r en \mathbb{R}^n , es decir,*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - a| = r\},$$

y sea φ la reflexión en $S(a, r)$, entonces si, $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$, se tiene

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = r^2 \frac{|x - y|}{|x - a||y - a|}.$$

DEMOSTRACIÓN. Usando el producto escalar estándar en \mathbb{R}^n , se sigue directamente de la definición de reflexión que

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)|^2 &= r^4 |(x - a)^* - (y - a)^*|^2 \\ &= r^4 \left(\frac{1}{|x - a|^2} + \frac{1}{|y - a|^2} - 2 \frac{(x - a) \cdot (y - a)}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= r^4 \left(\frac{|y - a|^2 + |x - a|^2 - 2(x - a) \cdot (y - a)}{|x - a|^2 |y - a|^2} \right) \\ &= r^4 \frac{|x - y|^2}{|x - a|^2 |y - a|^2} \end{aligned}$$

□

Enunciamos ahora un teorema que caracteriza aquellas isometrías del disco de Poincaré que son reflexiones en círculos ortogonales al círculo unitario. De este resultado se derivan expresiones de estas reflexiones, que junto con la proposición anterior, permiten encontrar una fórmula explícita de la distancia en este modelo del plano hiperbólico.

TEOREMA 2.2.36. *Sea $C(a, r)$ un círculo en \mathbb{R}^2 y φ la reflexión en este círculo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (i) *El círculo $C(a, r)$ es ortogonal al círculo unitario.*
- (ii) *$\varphi(0) = a^*$.*
- (iii) *$|a|^2 = 1 + r^2$.*
- (iv) *la reflexión φ preserva Δ .*

DEMOSTRACIÓN. Primero veremos que las tres primeras son equivalente, y luego que ellas tres implican la cuarta y viceversa.

Del teorema de pitágoras tenemos que el círculo $C(a, r)$ es ortogonal al círculo unitario si y solo si $|a|^2 = 1 + r^2$. Tenemos también que

$$\varphi(0) = a - r^2 a^* = (|a|^2 - r^2) a^*$$

de donde se saca que

$$(|a|^2 - r^2) a^* = a^* \iff |a|^2 = 1 + r^2$$

Veamos ahora que (iv) implica (ii), lo que lleva a que implica las demás. Como φ va a preservar el disco unitario, vemos que φ va a mandar puntos inversos de uno a puntos inversos, por lo que si $\varphi(\infty) = a$, entonces $\varphi(0) = a^*$.

Por lo cual, queda ver que las primeras afirmaciones implican esta última, usando la fórmula de la proposición 2.2.35 se tiene que

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &= |\varphi(z) - \varphi(a^*)| = r^2 \frac{|z - a^*|}{|z - a||a - a^*|} = \\ &= \frac{(|a|^2 - 1)}{|a| \left(1 - \frac{1}{|a|^2}\right)} \frac{|z - a^*|}{|z - a|} = |a| \frac{|z - a^*|}{|z - a|}. \end{aligned}$$

Luego

$$1 - |\varphi(z)|^2 = \frac{|z - a|^2 - |a|^2 |z - a^*|^2}{|z - a|^2}.$$

Fijándonos en el numerador tendremos

$$\begin{aligned} |z - a|^2 - |a|^2 \left|z - \frac{a}{|a|}\right|^2 &= |z|^2 + |a|^2 - |z|^2 |a|^2 - 1 \\ &= -|z|^2 (|a|^2 - 1) + |a|^2 - 1 = r^2 (1 - |z|^2). \end{aligned}$$

Y en consecuencia

$$(2.2.3) \quad 1 - |\varphi(z)|^2 = r^2 \frac{(1 - |z|^2)}{|z - a|^2}.$$

Y se sigue que φ preserva el disco unitario ya que si $|z| < 1$, entonces $|\varphi(z)| < 1$. \square

TEOREMA 2.2.37. *La expresión*

$$\frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)},$$

con $z, w \in \Delta$, es invariante bajo isometrías del disco de Poincaré.

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que es invariante para las reflexiones en “círculos” ortogonales al círculo unitario, ya que estos generan el grupo completo de las isometrías. Si φ es una reflexión en una recta por el origen, entonces φ es una función lineal ortogonal y por lo tanto es una isometría euclidiana, y es evidente que preserva la expresión del enunciado. Ahora, si φ es la reflexión en el círculo $C(a, r)$, se sigue de la proposición 2.2.35 y de la ecuación 2.2.3, entonces

$$\begin{aligned} \frac{|\varphi(z) - \varphi(w)|^2}{|1 - |\varphi(z)|^2||1 - |\varphi(w)|^2|} &= \left(\frac{|z - a|^2}{r^2(1 - |z|^2)} \frac{|w - a|^2}{r^2(1 - |w|^2)} \right) (|\varphi(z) - \varphi(w)|^2) = \\ &= \left(\frac{|z - a|^2}{r^2(1 - |z|^2)} \frac{|w - a|^2}{r^2(1 - |w|^2)} \right) \left(r^4 \frac{|z - w|^2}{|z - a|^2|w - a|^2} \right) = \\ &= \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}. \end{aligned}$$

\square

TEOREMA 2.2.38. *Sean z, w puntos en el disco hiperbólico de Poincaré, entonces*

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como ambas funciones son invariantes bajo isometrías, podemos considerar el caso en el que $z = 0$ y $w = t \in (0, 1)$, ya que para cualquier otro par de puntos consideramos la función que los lleve a estos, y la distancia seguirá siendo la misma. Llamaremos $u = \log \frac{1+t}{1-t}$, entonces

$$\begin{aligned} \sinh^2 \frac{1}{2} \rho(z, w) &= \left(\frac{e^{\frac{u}{2}} - e^{-\frac{u}{2}}}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{(1+t)^2 - 2(1-t^2) + (1-t)^2}{1-t^2} \right) = \frac{t^2}{1-t^2} \end{aligned}$$

que es a lo que queríamos llegar. \square

Vamos a ver ahora los haces de geodésicas en el plano hiperbólico que describen de una manera geométrica las distintas isometrías en $PSL(2, \mathbb{R})$ o en $M(\Delta)$.

TEOREMA 2.2.39. *Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ parabólica, hiperbólica o elíptica, entonces T se puede expresar como $\sigma_2 \sigma_1$, donde σ_j son reflexiones en “círculos” W_1 y W_2 respectivamente para $j = 1, 2$. Además:*

- (i) *Si T es parabólica, entonces W_1 y W_2 se intersecan en el punto fijo de T , es decir, son tangentes.*

(ii) Si T es elíptica, entonces W_1 y W_2 se intersecan en los puntos fijos de T .

(iii) Si T es hiperbólica, entonces W_1 y W_2 no se intersecan.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este teorema es similar a la segunda parte del teorema 2.2.28.

Si T es parabólica con punto fijo, va a ser conjugada a una traslación mediante una transformación S , y vimos que las traslaciones son la composición $\sigma_2\sigma_1$ de dos reflexiones en dos rectas paralelas, llamémoslas L_1 y L_2 . Por consiguiente, $S(L_j) = W_j$ para $j = 1, 2$. Y se sigue del corolario 2.2.30 que $S\sigma_jS^{-1}$ es la reflexión en W_j , para $j = 1, 2$. Tenemos que

$$S^{-1}TS = \sigma_2\sigma_1 \iff T = S\sigma_2S^{-1}S\sigma_1S^{-1}.$$

Y como L_1 y L_2 se intersecan en ∞ , entonces W_1 y W_2 se intersecan en el punto fijo.

Si T es elíptica, de manera análoga, es conjugada a una rotación, que vimos que era conjugada a una rotación, por lo que es la reflexión de dos rectas, una de ellas con pendiente cero. De nuevo $S(L_j) = W_j$ para $j = 1, 2$. Y lo demás es idéntico.

Y si T es hiperbólica siguen los mismos pasos se llega al resultado análogo. \square

Este resultado se aplica a todas las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ o de $M(\Delta)$, y en estos casos, la descripción es particularmente importante, ya que las reflexiones se hacen sobre “círculos” cuya intersección con el plano hiperbólico, ya sea \mathbb{H}^2 o Δ , son geodésicas. A su vez, estas geodésicas son también “semicírculos” en las familias de “círculos” de la configuración de Steiner y su caso degenerado (que se describieron en el capítulo anterior). Dichas configuraciones son muy útiles para entender otros aspectos importantes de la geometría de las isometrías del plano hiperbólico. A continuación describimos los tres casos relevantes.

- (i) Elíptico: los puntos límite son conjugados, o inversos si es el caso Δ .
- (ii) Hiperbólico: los dos puntos límite están en $\widehat{\mathbb{R}}$, o en $\partial\Delta$.
- (iii) Parabólico: en el caso degenerado con un solo punto en $\widehat{\mathbb{R}}$, o en $\partial\Delta$, de manera que $\widehat{\mathbb{R}}$, o en $\partial\Delta$, es un “círculo” de la familia de los círculos de Apolonio degenerados

Vamos a considerar la restricción de estos “círculos” en la clausura de del semiplano superior $\overline{\mathbb{H}^2}$, o del disco de Poincaré $\bar{\Delta}$. La restricción quedaría: [poner imágenes]

Esta descripción refina los resultados del teorema 2.2.39, si $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, o $T \in M(\Delta)$, entonces

$$T \in \sigma_2\sigma_1,$$

donde σ_j , $j = 1, 2$, son reflexiones en geodésicas de la familia de los “círculos” de Apolonio. Tenemos también que si L_1 y L_2 son dos geodésicas cualesquiera, tenemos un único haz de geodésicas que pasa por ellas. Y si L_1 y L_2 no se intersecan, entonces existe otra geodésica L tal que corta ortogonalmente a L_1 y L_2 . Distinguiremos tres tipos de haces:

- (i) Elíptico: si L_1 y L_2 se intersecan.
- (ii) Hiperbólico: si L_1 y L_2 son disjuntos.
- (iii) Parabólico: si L_1 y L_2 son tangentes.

2.3. Grupos discretos.

En esta sección vamos a ver algunas propiedades ciertos subgrupos de las transformaciones de Möbius en $PSL(2, \mathbb{R})$, algunas propiedades en $PSL(2, \mathbb{C})$. Con esta descripción, más adelante podremos describir las teselaciones en el plano hiperbólico.

2.3.1. Grupos discontinuos.

Tenemos que en general las transformaciones de Möbius no conmutan, pero en $PSL(2, \mathbb{R})$ vamos a tener que conmutan si y solo si coinciden en sus puntos fijos, a los que al conjunto de puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$ de una transformación T llamaremos F_T .

LEMA 2.3.1. *Sean T y S transformaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$ distintas de la identidad que conmutan, entonces T preserva el conjunto de los puntos fijos de S y S preserva los de T .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha \in F_T$, se tiene que

$$TS(\alpha) = ST(\alpha) = S(\alpha),$$

con lo cual $S(\alpha) \in F_T$, por lo que S deja invariante a F_T . Y si $\alpha \in F_S$ análogamente se tiene el mismo resultado. \square

En el caso $PSL(2, \mathbb{R})$, tenemos un resultado más fuerte.

TEOREMA 2.3.2. *Dos transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ distintas de la identidad conmutan si y solo si fijan los mismos puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que si S y T fijan los mismos puntos. Como conmutar y fijar los mismos puntos fijos son propiedades invariantes bajo conjugación, podemos suponer que S y T o son ambas traslaciones o son ambas de la forma $z \rightarrow az$, y claramente van a conmutar.

Ahora si T y S conmutan, vamos a considerar dos casos.

- (i) Si T y S son parabólicos. Entonces por el lema anterior preservan los puntos fijos el uno del otro, y como tienen uno entonces son iguales, es decir, $F_T = F_S$.
- (ii) Si, por ejemplo, T no es parabólico. Si $F_T \neq F_S$ se sigue del lema anterior S intercambia los puntos fijos de T , que van a ser 2, y por lo tanto S^2 va a fijar los puntos de F_T y los de F_S , por lo que va a fijar 3 o más puntos, por lo que es la identidad, así que S es una transformación elíptica de orden 2, y al ser $PSL(2, \mathbb{R})$, los puntos van a ser conjugados entre sí. Aplicando el lema anterior otra vez, tenemos que T va a intercambiar los puntos fijos de S , pero como $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, preserva el semiplano superior y no puede mandar el punto fijo de S a su conjugado. Luego $F_T = F_S$.

\square

También tenemos un resultado parecido a este último relacionado con transformaciones no parabólicas, donde $[T, S] = TST^{-1}S^{-1}$ va a denotar al conmutador de T y S .

PROPOSICIÓN 2.3.3. (i) Dos transformaciones de Möbius T y S tienen un punto común en $\widehat{\mathbb{C}}$ si y solo si $\text{tr}([T, S]) = 2$.

(ii) Si T y S son distintas de la identidad y tienen un punto común en $\widehat{\mathbb{C}}$ entonces se tiene una de las dos condiciones siguientes:

(a) $[T, S] = 1$ y $F_T = F_S$.

(b) $[T, S]$ es parabólico y $F_T \neq F_S$.

DEMOSTRACIÓN. Para el caso (i) las condiciones son invariantes para la conjugación, podemos suponer que

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$\text{tr}([T, S]) = 2 + b^2g^2 + b(a-d)g(e-h) - (a-d)^2gf.$$

Suponemos también que el punto que tienen en común es ∞ , por lo que $g = 0$, lo que lleva a que $\text{tr}([T, S]) = 2$. Recíprocamente, si $\text{tr}([T, S]) = 2$, si T es parabólica podemos tomar $a = d = 1$ y $b \neq 0$, entonces $g = 0$ y ambos fijan ∞ . Si T no es parabólica podemos tomar $b = 0$, por lo que $ad = 1$ y $a \neq d$, entonces $gf = 0$ para que se cumpla la ecuación, por lo que S va a fijar 0 o ∞ , con lo que va a tener un punto en común con T .

Para ver (ii), suponemos que T y S son de la forma de arriba, pero como $[T, S]$ es parabólico podemos suponer $g = 0$. Entonces $[T, S] = I$ si y solo si

$$f(a-d) = b(e-h)$$

y mediante la ecuación para obtener los puntos fijos vemos que esto último implica $F_T = F_S$. \square

A continuación, vamos a ver las definiciones de conjunto límite y ordinario.

DEFINICIÓN 2.3.4. Se dice que un punto $\alpha \in \widehat{\mathbb{C}}$ es un punto límite con respecto a un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$, si existen $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y transformaciones distintas $T_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$T_n(z) \rightarrow \alpha$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Al conjunto de estos puntos límite lo vamos a denotar por $\mathbb{L}(\Gamma)$ o \mathbb{L} .

DEFINICIÓN 2.3.5. Dado $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, al conjunto $\mathbb{O}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{L}$ se le llama el conjunto ordinario.

Como resultados que podemos remarcar, sin demostrar, es que si el conjunto límite es finito entonces va a consistir en uno o dos puntos, de otra manera va a ser un “círculo”, la esfera de Riemann o un fractal. Por otra parte vamos que el grupo actúa de manera menos caótica en el conjunto ordinario, lo cual da lugar a las teselaciones, que veremos más adelante.

DEFINICIÓN 2.3.6. Se dice que el subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discontinuo, si el conjunto ordinario $\mathbb{O}(\Gamma)$ no es vacío, equivalentemente, que $\mathbb{L}(\Gamma) \neq \widehat{\mathbb{C}}$.

TEOREMA 2.3.7. *Los conjuntos límite $\mathbb{L}(\Gamma)$ y ordinario $\mathbb{O}(\Gamma)$ definidos por un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ son invariantes bajo la acción de Γ .*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que para toda transformación $T \in \Gamma$ se tenga que $T(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. Como T es biyectiva, se tendrá también que $T(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$.

Si $\alpha \in \mathbb{L}$, existen T_n distintas en Γ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, tal que

$$T_n \rightarrow \alpha.$$

Ahora si $T \in \Gamma$, se sigue que entonces por continuidad que

$$TT_n \rightarrow T(\alpha),$$

y como las TT_n son distintas, se tiene que $T(\alpha) \in \mathbb{L}$, por lo cual $T(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$, para toda $T \in \Gamma$. Tomando en particular T^{-1} , entonces $T^{-1}(\mathbb{L}) \subset \mathbb{L}$. Luego $\mathbb{L} \subset T(\mathbb{L})$ y se tiene el resultado. \square

Podemos hacer dos observaciones rápidas. La primera es que si $G < \Gamma$, donde $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, entonces es evidente que

$$\mathbb{L}(G) \subset \mathbb{L}(\Gamma),$$

y consecuentemente

$$\mathbb{O}(\Gamma) \subset \mathbb{O}(G).$$

Lo que lleva a que subgrupos de grupos discontinuos son discontinuos.

TEOREMA 2.3.8. *Sean $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ y G un subgrupo de índice finito respecto de Γ , entonces*

$$\mathbb{L}(G) = \mathbb{L}(\Gamma)$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos descomponer al grupo Γ en la unión disjunta de las clases laterales derechas

$$\Gamma = \cup_{j=1}^m GT_j, \quad T_j \in \Gamma.$$

Si el punto $\alpha \in \mathbb{L}(\Gamma)$, existen transformaciones distintas $S_n \in \Gamma$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, tales que $S_n(z) \rightarrow \alpha$, por lo que usando la descomposición anterior, se puede escribir

$$S_n = V_n T_{j_n}, \quad V_n \in G \quad j_n \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

Se tiene entonces que necesariamente alguna T_{j_n} acontece un numero infinito de veces en la sucesión S_n , digamos T_k . Seleccionando la correspondiente infinita y renombrando se sigue que

$$U_n T_k(z) \rightarrow \alpha,$$

donde $U_n \in G$. Escribiendo $T_k(z) = w$, tenemos que $U_n(w) \rightarrow \alpha$ y como las transformaciones $U_n \in G$ son todas distintas. Por lo tanto $\alpha \in \mathbb{L}(G)$. \square

PROPOSICIÓN 2.3.9. *Sean $\varphi \in PSL(2, \mathbb{C})$ y $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ entonces*

$$\mathbb{L}(\varphi\Gamma\varphi^{-1}) = \varphi(\mathbb{L}(\Gamma)) \quad y \quad \mathbb{O}(\varphi\Gamma\varphi^{-1}) = \varphi(\mathbb{O}(\Gamma)).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, como φ es biyectiva, si demostramos lo primero se tendrá directamente que

$$\mathbb{O}(\varphi\Gamma\varphi^{-1}) = \varphi(\mathbb{O}(\Gamma)).$$

Sea $\varphi(z) \in \varphi(\mathbb{L}(\Gamma))$, por lo que existen $T_n \in \Gamma$ distintas y $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, tales que $T_n(w) \rightarrow z$, se sigue que entonces por continuidad que

$$\varphi T_n \varphi^{-1}(\varphi(w)) \rightarrow \varphi(z).$$

Luego, $\varphi(z) \in \mathbb{L}(\varphi\Gamma\varphi^{-1})$. Recíprocamente, dado

$$\varphi(z) \in \mathbb{L}(\varphi\Gamma\varphi^{-1}),$$

existen $\varphi T_n \varphi^{-1}$ distintas y $w \in \widehat{\mathbb{C}}$, tales que $\varphi T_n \varphi^{-1}(w) \rightarrow \varphi(z)$. Por lo que $T_n(\varphi^{-1}(w)) \rightarrow z$ y se tiene que $\varphi(z) \in \varphi(\mathbb{L}(\Gamma))$. \square

LEMA 2.3.10. *Sea T una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$, que no es elíptica supóngase también que existe $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ y una sucesión creciente de naturales n_k , $k \in \mathbb{N}$, tales que*

$$T^{n_k}(w) \rightarrow z_0,$$

entonces z_0 es un punto fijo.

DEMOSTRACIÓN. Si T es la identidad se tiene inmediatamente el resultado.

(i) Si T es parabólica tiene su punto fijo finito α , tomando

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - \alpha},$$

se tiene que

$$\varphi T^{n_k} \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \varphi(z) + n_k b$$

con $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Pero también tenemos que por la proposición anterior

$$\varphi T^{n_k} \varphi^{-1}(\varphi(w)) = \varphi(z_0),$$

luego si tomamos $w = z_0$ e igualamos las ecuaciones tenemos que $\varphi(z_0) = \infty$ y $z_0 = \alpha$.

(ii) Si T es hiperbólica o loxodrómica con puntos fijos α y β , tomando

$$\varphi(z) = \frac{z - \beta}{z - \alpha},$$

se tiene de la misma manera que en el caso anterior que

$$\varphi T^{n_k} \varphi^{-1}(\varphi(z)) = t^{n_k} \varphi(z)$$

con $t \in \mathbb{C}$, $|t| \neq 0, 1$. Además,

$$\varphi T^{n_k} \varphi^{-1}(\varphi(w)) = \varphi(z_0)$$

cuando $k \rightarrow \infty$. De la misma manera, igualando ecuaciones se tiene que $\varphi(z_0) = 0, \infty$ y $z_0 = \alpha, \beta$

□

EJEMPLO 2.3.11. Demos ahora una serie de ejemplos.

- (1) Si Γ es finito, se obtiene directamente que Γ es discontinuo y que $\mathbb{O}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}}$ claramente ya que no podremos obtener una sucesión infinita de elementos distintos para que se cumpla la definición.
- (2) Si Γ es cíclico, tenemos tres casos:
- (a) Si Γ es cíclico finito, tenemos por el primer caso que va a ser discontinuo.
- (b) Si Γ es cíclico infinito elíptico. Al conjugar Γ para tenerlo que esté generado por la transformación de la forma $T(z) = e^{i\theta}z$. Claramente, θ no es de la forma $2\pi t$ con $t \in \mathbb{Q}$, ya que fácilmente se obtiene que sería finito. Por lo tanto tenemos que para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \neq m$, se tiene que

$$e^{in\theta} \neq e^{im\theta}$$

es decir, los números $e^{in\theta}$ con $n \in \mathbb{Z}$ son todos distintos. Ahora, como $\partial\Delta$ es compacto, estos números tienen un punto de acumulación en, por ejemplo, $e^{i\psi}$. Con lo cual existe una subsucesión creciente de números naturales m_j , $j \in \mathbb{N}$, tales que

$$e^{im_j\theta} \rightarrow e^{i\psi},$$

cuando $j \rightarrow \infty$.

Con lo cual, si denotamos por $S(z) = e^{-i\psi}z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$T^{m_j}S(z) = e^{i(m_j\theta - \psi)}z \rightarrow z,$$

cuando $j \rightarrow \infty$. Por lo cual, esto es válido para cualquier punto y Γ no es discontinuo.

- (c) Γ cíclico no elíptico. Llamamos T al generador, y si T_n es una sucesión de transformaciones distintas de Γ , entonces existe una subsucesión T_{n_k} de tal manera que son todas potencias positivas crecientes T , o T^{-1} . Si T es parabólica, denotamos su punto fijo como α . Claramente $\alpha \in \mathbb{L}(\Gamma)$ por ser α un punto atractor. Y si T es hiperbólica o loxodrómica, llamamos α y β sus puntos fijos, de igual manera que antes $\alpha, \beta \in \mathbb{L}(\Gamma)$. Si tuviéramos otro z_0 tal que perteneciera a $\mathbb{L}(\Gamma)$, por la forma de T_{n_k} y el lema anterior se tendía que z_0 sería un punto fijo, por que en el caso parabólico $\mathbb{L}(\Gamma) = \{\alpha\}$ y para el caso hiperbólico o loxodrómico $\mathbb{L}(\Gamma) = \{\alpha, \beta\}$.

DEFINICIÓN 2.3.12. Sean

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrices en $SL(2, \mathbb{C})$, o en $GL(2, \mathbb{C})$, se dice que $T_n \rightarrow T$, si $a_n \rightarrow a, \dots, d_n \rightarrow d$ cuando $n \rightarrow \infty$.

LEMA 2.3.13. Sean A, B, A_n, B_n , $n \in \mathbb{N}$, matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ tales que $A_n \rightarrow A$, $B_n \rightarrow B$, entonces

$$A_n B_n \rightarrow AB.$$

DEMOSTRACIÓN. Con cálculos elementales se obtiene fácilmente. \square

LEMA 2.3.14. Sean T y T_n , $n \in \mathbb{N}$, matrices en $SL(2, \mathbb{C})$, tales que $T_n \rightarrow T$, entonces

$$T_n(z) \rightarrow T(z)$$

para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos a

$$T^{-1}T_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Se sigue del lema anterior que $T^{-1}T_n \rightarrow T^{-1}T = Id$, por lo que $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \rightarrow z,$$

con $z \neq -\frac{d_n}{c_n}$. En el caso en el que $z = \infty$ se tiene que

$$T^{-1}T(\infty) = \frac{a_n}{c_n} \rightarrow z = \infty$$

si $c_n \neq 0$. Y si $c_n = 0$, $T^{-1}T_n(\infty) = \infty$ de nuevo. Luego,

$$T^{-1}T_n(z) \rightarrow z \quad \forall z \in \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{y} \quad T_n(z) \rightarrow T(z) \quad \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

\square

LEMA 2.3.15. Sea M un subconjunto no numerable de \mathbb{R}^n , entonces existe un punto de \mathbb{R}^n que es un punto de acumulación de M .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el conjunto M no se acumula en ningún punto. Sean x_j , con $j \in I$, los elementos de M , entonces para toda x_j existe δ_j tal que

$$B(x_j, \delta_j) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x_j| < \delta_j\}$$

interseca a M solamente en x_j . Ahora, se puede tomar $y_j \in B(x_j, \frac{\delta_j}{2})$, tal que y_j tiene coordenadas racionales. Y esto va a llevar a que existe una biyección entre las x_j y las y_j , lo que contradice que M es no numerable. \square

TEOREMA 2.3.16. Un grupo discontinuo en $PSL(2, \mathbb{C})$ es a lo sumo numerable.

DEMOSTRACIÓN. Sea Γ un grupo discontinuo en $PSL(2, \mathbb{C})$ y $\bar{\Gamma}$ un grupo de las matrices asociadas de Γ en $SL(2, \mathbb{C})$. A cada matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$$

podemos asociarle el punto $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$, denotamos por M al subconjunto de \mathbb{C}^4 asociado a $\bar{\Gamma}$. Afirmamos que M es a lo sumo numerable, de otra manera por el lema anterior, existen

$(a_n, b_n, c_n, d_n) \in M$ distintos, tales que

$$(a_n, b_n, c_n, d_n) \rightarrow (a, b, c, d)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Como el determinante es una función continua, se sigue que $ad - bc = 1$.

Ahora, escribiendo

$$T_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} \quad \text{y} \quad T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

entonces por el lema 2.3.14 tenemos que

$$T_n(z) \rightarrow T(z) \quad \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}$$

y $\mathbb{L}(\bar{\Gamma}) = \widehat{\mathbb{C}}$, contradiciendo que $\bar{\Gamma}$ es discontinuo. Por último nos hacia falta verificar que los (a_n, b_n, c_n, d_n) son distintos entre sí. Si tomamos n suficiente grande, se pueden tomar entornos disjuntos y simétricas de los puntos (a, b, c, d) y $(-a, -b, -c, -d)$ respectivamente. \square

2.3.2. Grupos discretos.

DEFINICIÓN 2.3.17. Sea $\bar{\Gamma} < SL(2, \mathbb{C})$, se dice que $\bar{\Gamma}$ es discreto si no existe una sucesión de matrices distintas $T_n \in \bar{\Gamma}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $T_n \rightarrow T$, cuando $n \rightarrow \infty$. Con T una matriz cualesquiera con coeficientes complejos.

Una cosa que podemos sacar fácilmente de esta definición, es que a partir del lema 2.3.13 podemos sacar que cualquier grupo conjugado a un grupo discreto también va a ser discreto.

DEFINICIÓN 2.3.18. Se dice que un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ es discreto si está determinado por un subgrupo discreto $\bar{\Gamma}$ de $SL(2, \mathbb{C})$.

LEMA 2.3.19. *Un subgrupo $\bar{\Gamma}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ es discreto si y solo si no existe una sucesión $T_n \in \bar{\Gamma}$, $n \in \mathbb{N}$, matrices distintas, tales que $T_n \rightarrow Id$.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar la suficiencia, ya que la otra implicación es directa por definición. Si $\bar{\Gamma}$ no fuera discreto, existen matrices $S_n \in \bar{\Gamma}$ distintas tales que $S_n \rightarrow S$. Se sigue también que entonces del lema 2.3.13 tenemos

$$S_{n+1} S_n^{-1} \rightarrow I.$$

Finalmente, si hubiera una cantidad de estas matrices se tendría a partir de un k que $S_{n+1} S_n^{-1} = Id$ para todo $n > k$, y esto contradice que las matrices $S_{n+1} S_n^{-1}$ son distintas. Por tanto, dicha sucesión es infinita y podemos tomar una subsucesión convergente, lo que contradice la hipótesis de que $\bar{\Gamma}$ no es discreto. \square

TEOREMA 2.3.20. *Sea Γ subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ discontinuo, entonces Γ es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\bar{\Gamma}$, el grupo preimagen o de las matrices asociadas de Γ , no es discreto, por el lema anterior existen matrices distintas $T_n \in \bar{\Gamma}$, tales que $T_n \rightarrow I$, lo cual implica que $T_n(z) \rightarrow z$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ y $\bar{\Gamma}$ no sería discontinuo. \square

TEOREMA 2.3.21. *Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ discreto, entonces Γ es discontinuo.*

DEMOSTRACIÓN. Con esta hipótesis es lo mismo demostrar que los puntos del semiplano superior son ordinarios. Suponemos que esto no se cumple, entonces existe un punto $z_0 \in \mathbb{H}^2 \cap \mathbb{L}(\Gamma)$ y transformaciones $T_n(z) \rightarrow z_0$, donde $z \in \mathbb{H}^2$, ya que $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$.

Tomando $S \in PSL(2, \mathbb{R})$, tal que $S(i) = z$, se tiene que $T_n S(i) \rightarrow z_0$ y

$$S^{-1} T_n S(i) \rightarrow S^{-1}(z_0).$$

Ahora, el grupo Γ esta determinado por un grupo de matrices $\bar{\Gamma}$ en $SL(2, \mathbb{R})$, denotamos

$$S^{-1} T_n S = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

donde la matrices $S \in SL(2, \mathbb{R})$ y $T_n \in \Gamma$ definen \bar{S} y $\bar{T}_n \in \bar{\Gamma}$ definen S y T_n respectivamente.

Bajo estas hipótesis, se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(S^{-1} T_n S(i)) &= \operatorname{Im} \left(\frac{a_n i + b_n}{c_n i + d_n} \right) = \\ \operatorname{Im} \left(\frac{(a_n i + b_n)(-c_n i + d_n)}{c_n^2 + d_n^2} \right) &= \frac{1}{c_n^2 + d_n^2} \end{aligned}$$

y también que

$$|S^{-1} T_n S(i)|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2}.$$

Luego

$$\frac{1}{c_n^2 + d_n^2} \rightarrow \operatorname{Im}(S^{-1}(z_0)) > 0$$

y

$$\frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2} \rightarrow |S^{-1}(z_0)|^2 > 0.$$

Se sigue que entonces las sucesiones $\{c_n\}$ y $\{d_n\}$ están acotadas superiormente. También, las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ están acotadas superiormente, ya que existe un real positivo k tal que

$$\frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2} \geq \frac{a_n^2 + b_n^2}{k}.$$

Esto va a suponer una contradicción ya que se podría tomar una subsucesión convergente de

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

y el grupo $\bar{S}^{-1} \bar{\Gamma} \bar{S}$ no sería discreto, y por tanto el grupo $\bar{\Gamma}$ tampoco. Por lo tanto, los puntos del semiplano superior son ordinarios y Γ es discontinuo. \square

COROLARIO 2.3.22. *Sea $\bar{\Gamma} < SL(2, \mathbb{R})$ discreto, entonces $\mathbb{L}(\Gamma) \subset \widehat{\mathbb{R}}$.*

DEMOSTRACIÓN. En este caso seguimos los pasos del caso anterior y tendremos el resultado para los puntos del semiplano superior e inferior, lo cual nos deja la intersección en $\widehat{\mathbb{R}}$. \square

En los casos anteriores nos hemos fijado en $PSL(2, \mathbb{R})$, ya que en el caso de $PSL(2, \mathbb{C})$, llamados kleinianos, no siempre se va a tener. Tomemos por ejemplo, el grupo de Picard, es decir, el determinado por las matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid a, b, c, d \text{ son enteros Gaussianos} \right\},$$

donde entero gaussiano significa ser de la forma $a_1 + a_2i$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$. Este grupo va a ser discreto, pero no discontinuo. La prueba de esta afirmación se encuentra en ([6], pag. 96).

DEFINICIÓN 2.3.23. Sea G un grupo actuando en un espacio métrico X y Y un subespacio invariante bajo G de X , se dice que G actúa discontinuamente en Y , si dado cualquier compacto $K \subset Y$, se tiene que

$$g(K) \cap K \neq \emptyset$$

solamente para un número finito de transformaciones en G .

Recordemos que denotamos a $M(\Delta)$ como el grupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva el disco de Poincaré. Observamos que si Γ es un subgrupo discreto de $M(\Delta)$, entonces $\mathbb{L}(\Gamma) \subset \partial\Delta$. Esto debe ya que si tomamos la función de Cayley

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i},$$

se tiene que $f^{-1}\Gamma f$ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, ya que preserva el semiplano, y por la proposición 2.3.9 y el corolario 2.3.22 se tiene que

$$f^{-1}(\mathbb{L}(\Gamma)) = \mathbb{L}(f^{-1}\Gamma f) \subset \widehat{\mathbb{R}},$$

y por tanto

$$\mathbb{L}(\Gamma) \subset f(\widehat{\mathbb{R}}) = \partial\Delta.$$

Vamos a recordar cuál es la definición de estabilizador.

DEFINICIÓN 2.3.24. Dado $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, se define el subgrupo estabilizador de z , denotado por Γ_z , como

$$\{T \in \Gamma \mid T(z) = z\}.$$

PROPOSICIÓN 2.3.25. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ y T cualquier transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$, entonces

$$\Gamma_{T(z)} = T\Gamma_z T^{-1}.$$

TEOREMA 2.3.26. Sea Γ un subgrupo abeliano discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ entonces Γ es cíclico.

DEMOSTRACIÓN. Como Γ es abeliano, se sigue del teorema 2.3.2 que todas las transformaciones de Γ fijan los mismos puntos. Si Γ fija dos puntos, entonces Γ es puramente hiperbólico o elíptico, o sea, solo contiene elementos de uno de esos tipos, ya que en un caso los puntos fijos son reales y en el otro complejos conjugados.

- (i) Si Γ es puramente parabólico. Como las propiedades de conmutar o de ser discreto son invariantes bajo conjugación, podemos suponer que Γ es un grupo de traslaciones de la forma

$$\Gamma = \{T|T(z) = z + \lambda, \lambda \in M \subset \mathbb{R}\}.$$

El conjunto M tiene un elemento positivo mínimo μ . De otra manera, si existe una sucesión $\mu_n \geq 0$, tal que $\mu_n \rightarrow 0$. Al tomar el subgrupo preimagen de matrices Γ es $SL(2, \mathbb{R})$, se tendría que

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y Γ no sería discreto.

Ahora, tendremos que

$$M = \{n\mu, n \in \mathbb{Z}\}$$

lo cual probaría que $\Gamma = \langle z \rightarrow z + \mu \rangle$. Esto se afirma ya que para un $\lambda \in M$, se tiene que $\lambda = q\mu + r$, donde $0 \leq r < \mu$ con $q \in \mathbb{Z}$ y necesariamente $r = 0$. En caso contrario, se tendría que $r > 0$, y si hacemos la operación

$$T_\lambda(T_\mu^{-1})^q(z) = z + r$$

donde $T_\lambda(z) = z + \lambda$ y $T_\mu(z) = z + \mu$, pero esto contradice que la elección de μ .

- (ii) Si Γ es puramente hiperbólico. Conjugando podemos suponer que Γ es el grupo de las homotecias

$$\Gamma = \{T|T(z) = kz, k \in M \subset \mathbb{R}\}.$$

Ahora, M no contiene una sucesión k_n , tal que $k_n \rightarrow 1$, ya que en tal caso

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k_n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{k_n}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y Γ no sería discreto. Por consiguiente, podemos tomar $\mu \in M$, $\mu > 1$, tal que $\forall \lambda \in M$, se tiene $\lambda \geq \mu$. Afirmamos que ahora el conjunto M es

$$M = \{\mu^n | n \in \mathbb{Z}\}$$

lo cual probaría el caso, y se tendría que $\Gamma = \langle z \rightarrow \mu z \rangle$.

De nuevo, para afirmar esto, tomamos $\lambda \in M$, con $\lambda > 1$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $\mu^n \leq \lambda < \mu^{n+1}$. Si la primera desigualdad es estricta se tendría que

$$1 < \frac{\lambda}{\mu^n} < \mu$$

lo que contradice la elección de μ . Ahora tomamos la transformación

$$T_\lambda(T_\mu^{-n})(z) = \frac{\lambda}{\mu^n} z,$$

donde $T_a(z) = az$ y esto también contradice la elección de μ .

(iii) Si Γ es puramente elíptico. Conjugando tenemos que Γ es el grupo de las rotaciones $M(\Delta)$ de la forma

$$\Gamma = \{T | T(z) = e^{i\theta}z, \theta \in M \subset \mathbb{R}\}.$$

En este caso, no puede existir una sucesión $\theta_n \in M$, donde $M = \{\theta n, n \in \mathbb{Z}\}$ tal que $\theta_n \rightarrow 0$, ya que se tendría que

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{i\theta_n}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\theta_n}{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y Γ no sería discreto. Finalmente, va a existir un elemento ψ mínimo en M , y de esta forma $\Gamma = \langle z \rightarrow e^{i\psi}z \rangle$. La prueba de esto es análoga a las anteriores, buscando la contradicción en la elección de ψ . Con lo que $\Gamma = \langle e^{i\theta}z \rangle$. □

El teorema anterior no va a ser valido para $PSL(2, \mathbb{C})$ ya que existen subgrupos discretos abelianos que no van a ser cíclicos. Como ejemplo tomamos la matriz el grupo formado por las matrices de la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a+bi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}_{a,b \in \mathbb{Z}}.$$

Este grupo es un caso particular del grupo de Picard, con lo que va a ser discreto, claramente es abeliano, y no va a ser cíclico ya que la matriz identidad no va a ser potencia de ninguna matriz. Es decir, si $a, b \neq 0$ entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & a+bi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n(a+bi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para todo $n \geq 1$.

Veamos que tampoco el teorema se cumple si estamos en $SL(2, \mathbb{R})$.

PROPOSICIÓN 2.3.27. *El grupo generado por las matrices*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es abeliano pero no es cíclico.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediato ver que es abeliano y que no pertenece a $PSL(2, \mathbb{R})$. Sea Γ es grupo generado por estas matrices. Tenemos que cualquier elemento de este grupo que no sea $-I$ va a ser de la forma $\pm T^n$ donde

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, tenemos que los únicos posibles generadores de este grupo son o $\pm T$ o $\pm T^{-1}$. Sin embargo, ninguno de los grupos cíclicos generados por estos elementos va a contener a la matriz $-I$. □

TEOREMA 2.3.28. Sean T y S funciones de un subgrupo Γ en $PSL(2, \mathbb{C})$, tal que T es hiperbólica o loxodrómica. Supóngase también que $F_S \cap F_T$ consiste en exactamente un punto, entonces Γ no es discreto.

DEMOSTRACIÓN. Como las propiedades y de la conclusión del teorema son invariantes por conjugación, se puede suponer que

$$F_T = \{0, \infty\} \quad \text{y} \quad F_S \cap F_T = \{\infty\}.$$

Ahora, las transformaciones T y S están definidas por matrices en $SL(2, \mathbb{C})$ de la forma

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}, \quad \bar{S} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix},$$

donde b es distinto de 0 y $|k| \neq 1$.

Calculamos

$$\begin{aligned} \bar{S}\bar{T}^n\bar{S}^{-1}\bar{T}^{-n} &= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{k^n} & 0 \\ 0 & k^n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ak^n & \frac{b}{k^n} \\ 0 & \frac{1}{ak^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{ak^n} & -bk^n \\ 0 & ak^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & ab(1 - k^{2n}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Reemplazando \bar{T}^{-1} por \bar{T} si es necesario, se puede suponer que $|k| < 1$. Luego, si $n \rightarrow \infty$

$$\bar{S}\bar{T}^n\bar{S}^{-1}\bar{T}^{-n} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como $ab \neq 0$, las potencias de k son distintas, se sigue que las transformaciones $\bar{S}\bar{T}^n\bar{S}^{-1}\bar{T}^{-n}$ también son distintas y por lo tanto Γ es discreto. \square

Este resultado nos va a decir además que en un grupo discreto un punto fijo de una transformación hiperbólica (o loxodrómica) no es un punto fijo de una parabólica y que los puntos fijos de dos transformaciones hiperbólicas o loxodrómicas son iguales o disjuntos.

TEOREMA 2.3.29. Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ discreto. Entonces:

- (i) Si $z \in \mathbb{H}^2$, Γ_z es la identidad o cíclico finito.
- (ii) Si $z \in \widehat{\mathbb{R}}$, Γ_z es la identidad o cíclico infinito.

DEMOSTRACIÓN. En el caso (i), Γ va a consistir en funciones elípticas que son de orden finito, ya que Γ es discreto, y los puntos que no son reales son ordinarios. Ahora, se sigue que de la ecuación de los puntos fijos, que todas las transformaciones en Γ_z fijan también \bar{z} . Por consiguiente, vamos a tener que es abeliano por el teorema 2.3.2, y con lo cual, por el teorema 2.3.26 también va a ser cíclico.

En el caso (ii), si z es un punto fijo de una transformación parabólica, se sigue del teorema 2.3.28 que Γ_z consiste en elementos parabólicos que fijan z , con lo cual de nuevo por el teorema

2.3.2 Γ_z es abeliano y cíclico. Estos mismos argumentos se siguen para el caso hiperbólico, que en este caso de nuevo tendrían los dos mismos puntos fijos. \square

PROPOSICIÓN 2.3.30. *Sea Γ un subgrupo estabilizador discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, entonces $\mathbb{L}(\Gamma)$ tiene a lo mas dos puntos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Gamma = \Gamma_z$, si $z \in \mathbb{H}^2$, esto se sigue del teorema anterior que este grupo cíclico es elíptico y finito, por lo que $\mathbb{L}(\Gamma) = \emptyset$.

Si $z \in \widehat{\mathbb{R}}$, se sigue del teorema anterior que Γ es cíclico infinito. Más aún, en virtud del lema 2.3.10 se tiene que $\mathbb{L}(\Gamma)$ consiste en uno o dos puntos, dependiendo de si el generador es parabólico o hiperbólico. \square

De nuevo se tiene que este argumento no es cierto si Γ no es discreto, ya que si tomamos una transformación T que sea elíptica de orden infinito con puntos fijos z y w , y $\Gamma = \langle T \rangle$, se tiene $\Gamma = \Gamma_z$ y $\mathbb{L}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{C}}$.

2.3.3. Grupos Fuchsianos.

DEFINICIÓN 2.3.31. Un grupo fuchsiano es un grupo discreto de $PSL(2, \mathbb{C})$ que preserva un “disco”, es decir, es un grupo que es conjugado a un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$.

PROPOSICIÓN 2.3.32. *Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, tal que $\mathbb{L}(\Gamma) = \{z_0\}$, Γ es cíclico parabólico.*

DEMOSTRACIÓN. Sean T_n transformaciones distintas en Γ , y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, tal que $T_n(z) \rightarrow z_0$. Se tiene que si $T \in \Gamma$, entonces $T(z_0) = z_0$, de otra manera $TT_n(z) \rightarrow T(z_0)$ y $T(z_0)$ sería otro punto límite. Por lo que

$$\Gamma = \Gamma_{z_0}.$$

Ahora, como z_0 es el único punto límite, el grupo Γ no contiene transformaciones hiperbólicas y por lo tanto es puramente parabólico. Finalmente, como Γ es discontinuo, también es discreto y por lo tanto es cíclico, por ser abeliano. \square

Tenemos que bajo las mismas hipótesis de este teorema en $PSL(2, \mathbb{C})$ tendremos que estos grupos van a ser discretos, pero pueden tener transformaciones elípticas, y el subgrupo de las parabólicas puede ser doblemente parabólico.

DEFINICIÓN 2.3.33. Se dice que un grupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ es horocíclico, o de primera clase, si

$$\mathbb{L}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{R}}.$$

LEMA 2.3.34. *Sea Γ fuchsiano infinito, entonces $\mathbb{L}(\Gamma) \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\Gamma < M(\Delta)$. Como Γ es discreto, Γ es numerable, por lo que existe $z_0 \in \Delta$, tal que z_0 no es un punto fijo. Se sigue entonces que $\Gamma(z_0)$ es un conjunto infinito en Δ , y como $\bar{\Delta}$ es compacto, necesariamente Γ tiene un punto de acumulación en $\partial\Delta$. Luego, $\mathbb{L}(\Gamma) \neq \emptyset$. \square

PROPOSICIÓN 2.3.35. *Sea Γ un subgrupo normal de un grupo horocíclico G , entonces $\mathbb{L}(\Gamma) \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Si tuviéramos que $\mathbb{L}(\Gamma) = \emptyset$, por el lema anterior tendríamos que no podría ser infinito, por lo que el índice $[G : \Gamma]$ es infinito por el teorema 2.3.8, porque si fuera finito tendrían que tener los mismos conjuntos límite. Ahora, si $T \in \Gamma$ es distinta de la identidad, se tiene que T es necesariamente elíptica y que si z_0 es un punto de T , entonces $[G : G_{z_0}] = \infty$, ya que G_{z_0} es finito.

Finalmente, si S_j , $j \in \mathbb{N}$, denotan representantes de las clases laterales derechas de G_{z_0} en G , se sigue que $S_i(z_0) \neq S_j(z_0)$, si $i \neq j$. Por lo cual

$$S_j T S_j^{-1}$$

es una colección infinita de transformaciones distintas en Γ , ya que sus puntos fijos están dados por la colección $S_j(z_0)$. Esta contradicción implica que Γ debe ser de orden infinito y tener al menos un punto límite. \square

Usando los resultados anteriores se puede refinar un poco más la última proposición.

PROPOSICIÓN 2.3.36. *Sea Γ un subgrupo normal de un grupo horocíclico G , entonces el conjunto límite $\mathbb{L}(\Gamma)$ consiste en más de un punto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathbb{L}(\Gamma)$ consistiera en un punto z_0 , se sigue de la proposición 2.3.32 que Γ es un grupo estabilizador cíclico parabólico. Ahora, la proposición 2.3.30 implica que no toda transformación de G fija z_0 , ya que este grupo es horocíclico. Sea $T \in G$ tal que $T(z_0) \neq z_0$ y S el generador de Γ , se tiene entonces que la función TST^{-1} pertenece al grupo Γ . Sin embargo, el punto fijo de TST^{-1} es $T(z_0)$, lo cual contradice que Γ es un grupo estabilizador. Por consiguiente, la cardinalidad de $\mathbb{L}(\Gamma)$ es mayor a uno. \square

DEFINICIÓN 2.3.37. Se dice que $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ es elemental, si $\mathbb{L}(\Gamma)$ tiene a lo más dos puntos. En caso contrario se dice que Γ se dice que no es elemental.

Recordemos ahora la noción de normalizador.

DEFINICIÓN 2.3.38. Sea G un grupo cualesquiera, y Γ un subconjunto de G , se define normalizador de Γ en G , denotado por $N_G(\Gamma)$, como el subgrupo

$$\{g \in G \mid g\Gamma g^{-1} = \Gamma\}.$$

PROPOSICIÓN 2.3.39. *Sea T una transformación parabólica o elíptica en un grupo fuchsiano G , entonces si $\Gamma = \langle T \rangle$, se tiene que*

$$N_G(\Gamma) = G_{z_0},$$

donde z_0 es un punto fijo.

DEMOSTRACIÓN. Si T es parabólica con punto fijo z_0 . Tomamos $S \in N_G(\Gamma)$, entonces $ST^n S^{-1} = T^n$ por definición y unos sencillos cálculos nos dan que $S(z_0) = z_0$. Por ser G discreto, S es parabólica y vamos a tener también que $N_G(\Gamma) = G_{z_0}$.

Si T es elíptica con $T(z_0) = z_0$ para $z_0 \in PSL(2, \mathbb{R})$. Si $S \in N_G(\Gamma)$, se tiene que $ST^nS^{-1} = T^m$ y como $S \in PSL(2, \mathbb{R})$, en caso contrario la conjugación no preservaría el hiperplano superior, se tiene que $z_0 = S(z_0)$. Consecuentemente, $N_G(\Gamma)$ consiste en todas las transformaciones elípticas en G que fijan z_0 y \bar{z}_0 , es decir, $N_G(\Gamma) = G_{z_0}$. \square

Para ver el caso hiperbólico veremos antes un resultado que necesitaremos.

LEMA 2.3.40. *Sea Γ un subconjunto de un subgrupo G de un grupo K , y $\varphi \in K$, entonces*

$$\varphi N_G(\Gamma) \varphi^{-1} = N_{\varphi G \varphi^{-1}}(\varphi \Gamma \varphi^{-1}).$$

PROPOSICIÓN 2.3.41. *Sea T una transformación hiperbólica en un grupo fuchsiano G . Supongamos que los puntos fijos de T son a y b , y que $\Gamma = \langle T \rangle$. Entonces:*

- (i) $N_G(\Gamma) = \Gamma_a$, si G no contiene elementos de orden 2 que intercambian a y b .
- (ii) $N_G(\Gamma) = \langle \Gamma_a, S \rangle$, si existe $S \in G$, tal que $S(a) = b$.

DEMOSTRACIÓN. Como siempre, podemos suponer que T fija 0 y ∞ , por lo que $T(z) = kz$, con $k \in \mathbb{R}^+$ y $k \neq 1$.

Si $\varphi \in N_G(\Gamma)$, entonces $\varphi T^n \varphi^{-1} = T^m$ y preserva $\{0, \infty\}$. Por lo tanto, si G no contiene elementos elípticos de orden, que intercambien 0 y ∞ , se tiene que $N_G(\Gamma) = G_0$, ya que todos los elementos de G que fijan 0 , también fijan ∞ .

En cambio, si existiera un elemento elíptico $S \in G$ de orden 2 tal que $S(0) = \infty$, entonces como S es una función de la forma $z \rightarrow \frac{a}{z}$, se sigue que

$$ST^nS^{-1}(z) = ST^m\left(\frac{a}{z}\right) = S\left(\frac{k^m a}{z}\right) = \frac{z}{k^m} = T^{-m}(z),$$

y se tiene que la transformación S pertenece también al grupo normalizador $N_G(\Gamma)$. Finalmente, si S_1 y S_2 intercambian 0 y ∞ , entonces $S_1 S_2$ los fija, y en consecuencia

$$N_G(\Gamma) = \langle G_0, S \rangle.$$

\square

LEMA 2.3.42. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ puramente hiperbólico, tal que*

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

con $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$. Supóngase también que existe una sucesión de matrices distintas $T_n \in \Gamma$, tal que $T_n \rightarrow Id$, entonces

$$\bar{T}_n = \begin{pmatrix} \rho_n & 0 \\ 0 & \rho_n^{-1} \end{pmatrix}$$

cuando $n \rightarrow \infty$, con $\rho_n^2 \neq 1$.

DEMOSTRACIÓN. Denotamos a las matrices \bar{T}_n por

$$\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix},$$

se tiene entonces con $a_n d_n \rightarrow 1$ y $b_n c_n \rightarrow 0$, en particular, si n es suficientemente grande $a_n d_n > 0$. Vamos a usar las trazas de ciertos conmutadores para encontrar condiciones en las entradas de las matrices T_n .

Si $C_n = \bar{T}_n \bar{T}_n \bar{T}_n^{-1} \bar{T}_n^{-1}$, entonces

$$\begin{aligned} C_n &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_n & \lambda b_n \\ \lambda^{-1} c_n & \lambda^{-1} d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} d_n & -\lambda^{-1} b_n \\ -\lambda c_n & \lambda a_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_n d_n - \lambda^2 b_n c_n & -a_n b_n + \lambda^2 a_n b_n \\ \lambda^{-2} d_n c_n - d_n c_n & -\lambda^{-2} b_n c_n + a_n d_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

por lo cual la traza de C_n está dada por

$$\begin{aligned} 2a_n d_n - b_n c_n (\lambda^2 + \lambda^{-2}) &= 2(1 + b_n c_n) - b_n c_n (\lambda^2 + \lambda^{-2}) = \\ &= 2 - b_n c_n (\lambda - \lambda^{-1})^2. \end{aligned}$$

Ahora, calculamos las trazas de las matrices $D_n = T C_n T^{-1} C_n^{-1}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{T} C_n &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n d_n - \lambda^2 b_n c_n & -a_n b_n + \lambda^2 a_n b_n \\ \lambda^{-2} d_n c_n - d_n c_n & -\lambda^{-2} b_n c_n + a_n d_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - b_n c_n (\lambda^2 - 1) & a_n b_n (-1 + \lambda^2) \\ c_n d_n (-1 + \lambda^{-2}) & 1 - b_n c_n (\lambda^{-2} - 1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda [1 - b_n c_n (\lambda^2 - 1)] & \lambda a_n b_n (-1 + \lambda^2) \\ \lambda^{-1} c_n d_n (-1 + \lambda^{-2}) & \lambda^{-1} [1 - b_n c_n (\lambda^{-2} - 1)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \bar{T}^{-1} C_n^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - b_n c_n (\lambda^{-2} - 1) & -a_n b_n (-1 + \lambda^2) \\ -c_n d_n (-1 + \lambda^{-2}) & 1 - b_n c_n (\lambda^2 - 1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} [1 - b_n c_n (\lambda^{-2} - 1)] & -\lambda^{-1} a_n b_n (-1 + \lambda^2) \\ -\lambda c_n d_n (-1 + \lambda^{-2}) & \lambda [1 - b_n c_n (\lambda^2 - 1)] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo cual la entrada superior derecha de D_n está dada por

$$[1 - b_n c_n (\lambda^2 - 1)][1 - b_n c_n (\lambda^{-2} - 1)] - \lambda^2 a_n b_n c_n d_n (\lambda^2 - 1)(\lambda^{-2} - 1)$$

y la inferior derecha por

$$-\lambda^{-2} a_n b_n c_n d_n (\lambda^2 - 1)(\lambda^{-2} - 1) + [1 - b_n c_n (\lambda^{-2} - 1)][1 - b_n c_n (\lambda^2 - 1)].$$

En consecuencia, la traza de D_n es

$$\begin{aligned}
& -a_n b_n c_n d_n (\lambda^2 - 1)(\lambda^{-2} - 1)(\lambda^2 - \lambda^{-2}) + 2[1 - b_n c_n (\lambda^2 - 1)][1 - b_n c_n (\lambda^{-2} - 1)] = \\
& = a_n b_n c_n d_n (\lambda^2 - 2 + \lambda^{-2})(\lambda^2 + \lambda^{-2}) + 2 + 2b_n^2 c_n^2 (\lambda^2 - 1)(\lambda^{-2} - 1) - \\
& \quad - 2b_n c_n (\lambda^2 - 1 + \lambda^{-2} - 1) = \\
& = a_n b_n c_n d_n (\lambda - \lambda^{-1})^2 (\lambda^2 + \lambda^{-2}) + 2a_n b_n c_n d_n (2 - \lambda^2 - \lambda^{-2}) - 2b_n c_n (2 - \lambda^2 - \lambda^{-2}) + \\
& \quad + 2 - 2b_n c_n (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) = \\
& = 2 + a_n b_n c_n d_n (\lambda - \lambda^{-1})^2 (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) = 2 + a_n b_n c_n d_n (\lambda - \lambda^{-1})^4
\end{aligned}$$

Ahora, como $|tr(C_n)| \geq 2$ y $b_n c_n \rightarrow 0$, entonces la traza de C_n es mayor que 2, $tr(C_n) \geq 2$, si n es suficientemente grande. En particular, existe un número natural N_1 , tal que si $n > N_1$, se tiene que $b_n c_n \leq 0$.

También como $|tr(D_n)| \geq 2$ y $a_n b_n c_n d_n \rightarrow 0$, se sigue que $tr(D_n) \geq 2$, si n es suficientemente grande. De igual manera, existe N_2 tal que si $n > N_2$ entonces $a_n b_n c_n d_n \geq 0$. Más aún, ya que $a_n d_n \rightarrow 1$, entonces existe un N_3 tal que si $n > N_3$ entonces $a_n d_n > 0$.

Por consiguiente, tomando $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ y $n > N$, se tiene que $b_n c_n \leq 0$ y que $b_n c_n \geq 0$, por lo que $b_n c_n = 0$. Entonces $tr(C_n) = 2$ y que $C_n = Id$, ya que el grupo es puramente hiperbólico, por que si no por la proposición 2.1.18 se tendría que sería parabólica. Esto ultimo da que \bar{T} y \bar{T}_n conmutan, y entonces \bar{T}_n fija 0 y ∞ , y \bar{T}_n van a ser de la forma del enunciado. \square

TEOREMA 2.3.43. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ no abeliano y puramente hiperbólico, entonces Γ es discreto.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

con $\lambda > 0$ y $\lambda \neq 1$. Si Γ no fuera discreto, existe una sucesión de matrices distintas $\bar{S}_n \in \bar{\Gamma}$, tales que $S_n \rightarrow Id$. Se sigue entonces del lema anterior que si $n > N$, entonces

$$\bar{S}_n = \begin{pmatrix} \rho_n & 0 \\ 0 & \rho_n^{-1} \end{pmatrix}, \rho_n^2 \neq 1.$$

Ahora como Γ no es abeliano, existe S en Γ , tal que no fija 0 y ∞ , ya que si fijase uno de los dos, por la proposición 2.3.3, se tendría que el conmutador es parabólico, pero estamos en el caso puramente hiperbólico. Por lo que la transformación está dada por la matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma, b, c \neq 0.$$

Calculamos ahora

$$\bar{T}_n = \bar{S}_n \bar{S} \bar{S}_n^{-1} \bar{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_n & 0 \\ 0 & \rho_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^{-1} & 0 \\ 0 & \rho_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \rho_n a & \rho_n b \\ \rho_n^{-1} c & \rho_n^{-1} d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^{-1} d & -\rho_n^{-1} b \\ -\rho_n c & \rho_n a \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \star & (\rho_n^2 - 1)ab \\ (\rho_n^{-2} - 1)cd & \star \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ahora, por el lema 2.3.14 $\bar{T}_n \rightarrow Id$, por lo que aplicando de nuevo el lema anterior tenemos que

$$\bar{T}_n = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix},$$

si $n > N' > N$. Por consiguiente, esto implica que $ab = 0$ y que $cd = 0$. Pero como habíamos supuesto que c y b eran distintos de 0, entonces $a = d = 0$, pero eso contradice que

$$|ts(\bar{S})| = |a + d| > 2$$

□

2.3.4. Conjunto límite de un grupo discreto.

PROPOSICIÓN 2.3.44. *Sea Γ fuchsiano y $\lambda \in \mathbb{L}(\Gamma)$ punto fijo de alguna transformación de Γ , entonces existe $\lambda' \in \mathbb{L}(\Gamma)$, tal que $\forall z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda, \lambda^{-1}\}$, λ es punto de acumulación de la órbita $\Gamma(z)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea T la transformación en Γ que fija λ , se tienen dos casos, que sea parabólica o hiperbólica.

Si T es parabólica. En este caso ya describimos cuando vimos en la aplicación geométrica de las transformaciones parabólicas que la para todo $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda\}$ tenemos que $T_n(z) \rightarrow \lambda$ si $n \rightarrow \infty$. Es decir, la órbita de z se acumula en λ , y estas órbitas son de hecho los horocírculos.

Si T es hiperbólica. Análogamente, vimos que va a ver un punto atractor λ , el punto de acumulación, y λ' el repulsor. □

Como las hipótesis y las conclusiones son invariantes bajo conjugación, basta probar el resultado para subgrupos discretos de $M(\Delta)$. En este caso tenemos que $\mathbb{L}(\Gamma) \subset \partial\Delta$, y solo existe un numero finito de transformaciones en Γ determinadas por matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix},$$

ya que las correspondientes transformaciones fijan 0 y ∞ , y estos son puntos ordinarios, porque si existiera un numero infinito, existiría una subsucesión hacia ellos. Por el teorema 2.1.23 teníamos que

$$\bar{M}(\Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \mid |a|^2 - |c|^2 = 1 \right\}.$$

LEMA 2.3.45. Dado $\Gamma \in M(\Delta)$ discreto, no existe una sucesión de matrices distintas de Γ

$$\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ \bar{c}_n & \bar{a}_n \end{pmatrix},$$

tales que $a_n \rightarrow a \in \mathbb{C}$, o tales que $c_n \rightarrow c \in \mathbb{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $a_n \rightarrow a$, $|a_n|^2 \rightarrow |a|^2$ y $|c_n|^2 \rightarrow |a|^2 - 1$. Pero entonces las sucesiones a_n y c_n están acotadas y se puede extraer una subsucesión convergente de

$$\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ \bar{c}_n & \bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

Lo que contradice que Γ es un grupo discreto. El caso $c_n \rightarrow c$ es análogo. \square

Obsérvese que en el contexto del lema anterior, dada cualquier sucesión de matrices distintas de la forma del lema, se va a tener que $c_n \rightarrow \infty$.

COROLARIO 2.3.46. Para todo subgrupo fuchsiano Γ de $M(\Delta)$ existe un número positivo m con la siguiente propiedad: si

$$\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ \bar{c}_n & \bar{a}_n \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$$

entonces $c_n = 0$ o $|c_n| > m$.

DEFINICIÓN 2.3.47. Sean Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, se define $\Lambda_\Gamma(z)$ como el conjunto de los puntos $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ tales que existen transformaciones distintas $T_n \in \Gamma$ para las cuales $T_n(z) \rightarrow w$.

En general, los puntos de $\Lambda_\Gamma(z)$ son los puntos de acumulación de la órbita de z y el mismo punto z , cuando este es un punto fijo de una transformación de orden infinito. Evidentemente se tiene también que para todo z , $\Lambda_\Gamma(z) \subset \mathbb{L}(\Gamma)$. Hay veces que simplemente lo denotaremos como $\Lambda(z)$.

LEMA 2.3.48. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Entonces:

- (i) $T(\Lambda(z)) = \Lambda(z)$, $\forall T \in \Gamma$.
- (ii) $\Lambda(z)$ es cerrado.

DEMOSTRACIÓN. La prueba de (i) es idéntica a la del teorema 2.3.7.

Para probar (ii) sea λ_k , $k \in \mathbb{N}$, una sucesión en $\Lambda(z)$ tal que $\lambda_k \rightarrow \lambda$, tomando subsucesiones se puede suponer que $|\lambda_k - \lambda| < \frac{1}{k}$. Se puede tomar transformaciones distintas T_{n_k} en Γ , tales que

$$|T_{n_k}(z) - \lambda_k| < \frac{1}{k}.$$

Como las λ_k son puntos distintos, las T_{n_k} se pueden tomar distintas también. En el caso de que $\lambda = \infty$ se debe usar la métrica cordal. Luego

$$|T_{n_k} - \lambda| = |T_{n_k} - \lambda_k| + |\lambda_k - \lambda| \leq \frac{2}{k}$$

y $\lambda \in \Lambda(z)$, con lo cual es cerrado. \square

TEOREMA 2.3.49. *Sea $\Gamma < M(\Delta)$ discreto, entonces $\mathbb{L}(\Gamma) = \Lambda(\infty)$.*

DEMOSTRACIÓN. Hay que probar que $\mathbb{L}(\Gamma) \subset \Lambda(\infty)$. Sea $\lambda \in \mathbb{L}(\Gamma)$, entonces

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(z), \quad \text{donde} \quad \bar{T}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

son matrices distintas en $\bar{\Gamma}$ y $z \in \mathbb{C}$, el caso cuando $z = \infty$ no hada que probar ya que por definición se tendría. Como ya se mencionó, se tiene que $c_n = 0$ solamente para un número finito de transformaciones, por lo que podemos suponer que $c_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces dos posibilidades:

- (i) $|\bar{c}_n z + \bar{a}_n| \geq 1$, si $n > N$.
- (ii) $|\bar{c}_n z + \bar{a}_n| < 1$ en una subsucesión $n_k, k \in \mathbb{N}$.

En el primer caso, tenemos que

$$\begin{aligned} |T_n(z) - T_n(\infty)| &= \left| \frac{a_n z + c_n}{\bar{c}_n z + \bar{a}_n} - \frac{\bar{a}_n}{\bar{c}_n} \right| = \\ &= \left| -\frac{1}{\bar{c}_n(\bar{c}_n z + \bar{a}_n)} \right| \leq \frac{1}{|\bar{c}_n|} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $n > N$. Esto último se tiene porque vimos en el lema 2.3.45 que $|c_n|$ no está acotado. Luego

$$|T_n(z) - T_n(\infty)| \rightarrow 0.$$

Por definición tenemos que

$$|\lambda - T_n(z)| \rightarrow 0,$$

así que uniendo todo tenemos que

$$|\lambda - T_n(\infty)| \leq |\lambda - T_n(z)| + |T_n(z) - T_n(\infty)| \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\lambda \in \Lambda(\infty)$.

Para el segundo caso, se sigue de nuevo que del lema 2.3.45 que

$$|z - T_n^{-1}(\infty)| = \left| z - \left(-\frac{\bar{a}_n}{\bar{c}_n} \right) \right| < \frac{1}{|c_n|} \rightarrow 0$$

y $z \in \Lambda(\infty)$. Por la invariabilidad del lema anterior tenemos que $T_{n_k}(k) \in \Lambda(\infty)$, y por ser cerrado tomando el límite tenemos que $\lambda \in \Lambda(\infty)$. \square

COROLARIO 2.3.50. *Sea Γ fuchsiano, entonces $\mathbb{L}(\Gamma)$ es cerrado y por lo tanto $\mathbb{O}(\Gamma)$ es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\Gamma < M(\Delta)$, el resultado se sigue directamente del teorema anterior. Y para el caso general podemos tomar y a función conjugante que envíe ese Γ al disco unitario y por la proposición 2.3.9 se tiene el resultado. \square

Para un resultado algo más general tenemos:

TEOREMA 2.3.51. Si Γ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ es no elemental y discreto, entonces para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, se tiene que

$$\mathbb{L}(\Gamma) = \Lambda(z).$$

La prueba de este hecho se tiene en ([6], pag. 98) cuya demostración no veremos ya que su prueba alargaría el trabajo y no nos hace mucha falta este resultado.

Probamos ahora un resultado complementario a la proposición 2.3.44.

LEMA 2.3.52. Sea Γ fuchsiano y λ un punto límite de Γ , que no es un punto fijo, entonces $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}}$, $z \neq \lambda'$, se tiene que la órbita de z se acumula en λ , donde λ' es un punto en $\widehat{\mathbb{C}}$ que solamente depende de λ y Γ .

DEMOSTRACIÓN. Sin perder generalidad podemos suponer $\Gamma < M(\Delta)$. Se sigue del teorema 2.3.49 que $\lambda \in \Lambda(\infty)$, por lo que existen $T_n \in \Gamma$ distintos, tales que $T_n(\infty) \rightarrow \lambda$,

$$\bar{T}_n = \begin{pmatrix} a_n & c_n \\ \bar{c}_n & \bar{a}_n \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}.$$

El mismo cálculo de la demostración del teorema 2.3.49 muestra que

$$|T(z) - T_n(\infty)| = \frac{1}{|\bar{c}_n(\bar{c}_n z + \bar{a}_n)|} = \frac{1}{|\bar{c}_n|^2} \frac{1}{|z - (-\bar{a}_n/\bar{c}_n)|}.$$

Además, el conjunto

$$-\frac{\bar{a}_n}{\bar{c}_n} = T_n^{-1}(\infty)$$

está acotado, ya que no puede acumularse en el punto ordinario ∞ , ya que si no $c_n \rightarrow 0$ y vimos que no está acotado. Por lo que existe un punto de acumulación λ' y una subsucesión T_{n_k} para la cual $T_{n_k}^{-1}(\infty) \rightarrow \infty$.

Ahora si $z \in \mathbb{C}$, con $z \neq \lambda'$, entonces el conjunto $T_{n_k}^{-1}(\infty)$ no se acumula en z por lo que

$$\left| z - \left(-\frac{\bar{a}_{n_k}}{\bar{c}_{n_k}} \right) \right| \geq \epsilon > 0$$

si $k > N$. Más aún, se sigue de la observación descrita después del lema 2.3.45 que $|c_n| \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$. En consecuencia, tenemos que

$$|T(z) - T_n(\infty)| \leq \frac{1}{\epsilon |\bar{c}_n|^2} \rightarrow 0,$$

por lo que $T_{n_k}(z) \rightarrow \lambda$, $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda'\}$, ya que $T_{n_k}(\infty) \rightarrow \lambda$.

Finalmente, T_{n_k} , es un conjunto infinito, de otra manera $T_{n_k}(z) = \lambda$, si $k > N$, pero entonces $T_{n_k} T_{n_k}^{-1}(\lambda) = \lambda$, contradiciendo que λ no es un punto fijo. Por lo tanto, $\forall z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\lambda'\}$ $\Gamma(z)$ se acumula en λ . \square

DEFINICIÓN 2.3.53. Dado $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, se define el conjunto derivado de z , denotado por $d(\Gamma(z))$, como el conjunto de puntos de acumulación de la órbita de z .

Claramente se tiene que $d(\Gamma(z)) \subset \Lambda(z)$.

TEOREMA 2.3.54. *Sea Γ fuchsiano. Entonces:*

- (i) $\mathbb{L}(\Gamma) = d(\Gamma(z)) \forall z \in \mathbb{O}$.
- (ii) *Si Γ no es elemental, entonces $\mathbb{L}(\Gamma) = d(\Gamma(z)) \forall z \in \widehat{\mathbb{C}}$.*

DEMOSTRACIÓN. El primer resultado es inmediato por la proposición 2.3.44 y el lema anterior, ya que $\lambda' \in \mathbb{L}$.

Para probar (ii), nótese que bajo estas hipótesis toda órbita contiene al menos tres puntos. Para probar esta afirmación, observamos primero que si es una órbita de un solo punto, se tendría que Γ sería un grupo estabilizador y $\mathbb{L}(\Gamma)$ tendría a lo más dos puntos por la proposición 2.3.30. Por otra parte, si el conjunto $\{z_1, z_2\}$ es una órbita, entonces todo elemento de Γ preserva $\{z_1, z_2\}$ y se tienen dos posibilidades.

- (a) Γ es de orden 2, lo cual no es posible, ya que el grupo es no elemental.
- (ii) Γ contiene como subgrupo de índice 2 a un grupo estabilizador y $\mathbb{L}(\Gamma)$ tendría a lo más dos puntos por el teorema 2.3.8, y la proposición 2.3.30 de nuevo.

Habiendo probado la afirmación, el resultado del teorema es inmediato. Sea $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ fijo y $w \in \mathbb{L}(\Gamma)$, basta probar que la órbita de z se acumula en w . Se sigue de la afirmación, que existen otros dos puntos, u y v , distintos entre sí y distintos a z , de tal manera que $z, u, y v$ pertenecen a la misma órbita. Finalmente, usando la proposición 2.3.44 y del lema anterior se tiene que esta órbita se acumula en w . \square

TEOREMA 2.3.55. *Sea Γ fuchsiano no elemental y λ un punto límite de Γ , entonces todas las órbitas se acumulan en λ . En particular,*

$$\Lambda(z) = \mathbb{L}(\Gamma)$$

La demostración de este hecho se puede encontrar en ([6], pag. 97).

TEOREMA 2.3.56. *Sea Γ fuchsiano no elemental, entonces $\mathbb{L}(\Gamma)$ es perfecto, es decir, cerrado y sin puntos aislados.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathbb{L}(\Gamma)$ es cerrado, basta probar que no hay puntos aislados. Sea $\lambda \in \mathbb{L}(\Gamma)$, por ser Γ no elemental, existe otro punto límite λ_1 distinto a λ . Ahora, que sigue del teorema anterior que la órbita de λ_1 se acumula en λ . Finalmente, una órbita de puntos límite consiste en puntos límite, porque λ no está aislado en Γ . \square

DEFINICIÓN 2.3.57. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, se dice que A nunca es denso si $Int(\bar{A}) = \emptyset$, es decir, si \bar{A} no contiene ninguna bola abierta. Donde \bar{A} denota la clausura de A .

TEOREMA 2.3.58. *Sea Γ un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, entonces el conjunto límite de Γ es toda la recta real extendida, o es un conjunto nunca denso en $\widehat{\mathbb{R}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si Γ no es horocíclico, sea $\lambda \in \mathbb{L}(\Gamma)$ y $\alpha \in \mathbb{O}(\Gamma) \cap \widehat{\mathbb{R}}$. Se sigue entonces del teorema 2.3.54 que la órbita de α se acumula en λ . Luego, cualquier intervalo alrededor de λ contiene puntos ordinarios, es decir, $\mathbb{L}(\Gamma)$ es nunca denso. \square

Este resultado se generaliza a otros grupos fuchsianos, interpretando intervalos como segmentos de “círculos”. Además, el teorema 2.3.54 es cierto para subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{C})$, puede verse en ([6], pag. 98), por lo que se puede aplicar un argumento parecido en la demostración del teorema anterior y ver que si un grupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ no es elemental y discontinuo, entonces su conjunto límite es nunca denso en $\widehat{\mathbb{C}}$. El siguiente resultado muestra que, en general, los conjuntos límites son los menos conjuntos invariantes y cerrados.

TEOREMA 2.3.59. *Sea Γ fuchsiano y $W \subset \widehat{\mathbb{C}}$ y Γ -invariante con cardinalidad mayor que 1, entonces*

$$\mathbb{L}(\Gamma) \subset W.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\mathbb{L}(\Gamma)$ es vacío no hay nada que probar. Supongamos por reducción al absurdo que existe $\lambda \in \mathbb{L}(\Gamma)$, tal que $\lambda \notin W$. Como W es cerrado, existe un entorno N de λ , tal que $N \cap W = \emptyset$. Ahora, si λ_1, λ_2 son dos puntos distintos en W , se sigue de la proposición 2.3.44 y del lema 2.3.52 que la órbita de alguno de ellos se acumula en λ , es decir, interseca N , lo que contradice que $N \cap W = \emptyset$, ya que W es Γ invariante. Luego $\mathbb{L}(\Gamma) \subset W$. \square

TEOREMA 2.3.60. *Sea G un grupo normal de un grupo horocíclico Γ en $PSL(2, \mathbb{R})$, entonces G es horocíclico.*

DEMOSTRACIÓN. Usando las proposiciones 2.3.35 y 2.3.36 se puede suponer que $\mathbb{L}(G)$ consiste en al menos dos puntos. Basta probar que el conjunto $\mathbb{L}(G)$ es Γ -invariante, ya que en este caso, como es cerrado, se seguiría del teorema anterior y del teorema 2.3.9 que

$$\mathbb{L}(G) = \mathbb{L}(\Gamma) = \widehat{\mathbb{R}}.$$

Para probar que $\mathbb{L}(G)$ es Γ -invariante, sean $T \in \Gamma$ y $\lambda \in \mathbb{L}(G)$, entonces existen transformaciones distintas $T_n \in G$ y $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, tales que $T_n(z) \rightarrow \lambda$, cuando $n \rightarrow \infty$. Ahora, como T es continua, se sigue

$$TT_nT^{-1}(w) \rightarrow T(\lambda),$$

donde $w = T(z)$. Finalmente, como $TT_nT^{-1}(w)$ son transformaciones distintas en G , se sigue que $T(\lambda) \in \mathbb{L}(G)$, y por tanto la afirmación. \square

Usando la proposición 2.3.9 se puede generalizar este resultado para cualquier grupo fuchsiano.

PROPOSICIÓN 2.3.61. *Sea Γ un grupo fuchsiano y F_T el conjunto de los puntos fijos de las transformaciones distintas de la identidad en Γ , entonces*

$$\mathbb{L}(\Gamma) \subset \bar{F}_T$$

donde \bar{F}_T denota la clausura de F_T en $\widehat{\mathbb{C}}$.

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese primero que si $\Gamma \neq Id$, entonces F_T tiene cardinalidad mayor o igual a uno. Para el caso en el que F_T consta solamente de un punto, es claro que Γ es un grupo cíclico parabólico y el resulta se tiene de forma inmediata.

En el otro caso, tenemos que F_T es Γ -invariante. Esto se cumple, ya que para toda transformación S en Γ , se tiene que T fija z_0 si y solo si STS^{-1} fija $S(z_0)$. También \bar{F}_T es Γ -invariante, ya que dada z_n , una sucesión de puntos fijos tales que $z_n \rightarrow z_0$, y una función $S \in \Gamma$, entonces $S(z_n) \rightarrow S(z_0)$ y $S(z_0) \in \bar{F}_T$. Por consiguiente, si \bar{F}_T consta más de un punto, el resultado se sigue del teorema 2.3.59. \square

TEOREMA 2.3.62. *Sea Γ fuchsiano con transformaciones hiperbólicas y Λ la clausura del conjunto de puntos fijos de los elementos hiperbólicos, entonces*

$$\mathbb{L}(\Gamma) = \Lambda.$$

DEMOSTRACIÓN. Se pueden aplicar los mismos argumentos de la prueba de la proposición anterior, por ejemplo, si T es hiperbólica y fija z_0 , entonces STS^{-1} es hiperbólica y fija $S(z_0)$, etcétera. Por consecuencia, $\mathbb{L}(\Gamma) \subset \Lambda$, el otro contenido es inmediato, ya que el conjunto límite es cerrado. \square

TEOREMA 2.3.63. *Sea Γ fuchsiano con elementos parabólicos y P la clausura del conjunto de puntos fijos parabólicos, entonces*

$$\mathbb{L}(\Gamma) = P.$$

DEMOSTRACIÓN. Si P consta de un solo punto z_0 , donde $S(z_0) = z_0$, entonces Γ es el grupo estabilizador Γ_{z_0} . Esto se va a tener ya que si para alguna transformación T en Γ , $T(z_0) \neq z_0$, se seguiría que TST^{-1} es parabólica y fija $T(z_0)$, pero P es solamente un punto. Luego, Γ es un grupo cíclico por el teorema 2.3.29, lo cual prueba que $\mathbb{L}(\Gamma) = \{z_0\}$.

Si P consta de más de un punto, el resultado se sigue de manera análoga a la prueba del teorema anterior. \square

2.4. Regiones fundamentales y teselaciones.

En esta sección, al igual que en caso euclídeo tenemos los paralelogramos fundamentales, aquí tendremos su análogo al que llamaremos región fundamental, que va a ser el conjunto clave para la teselación. Veremos cómo se definen, cómo obtenerlos mediante dos formas, y por último su aplicación.

2.4.1. Regiones Fundamentales.

DEFINICIÓN 2.4.1. Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, un conjunto fundamental F para la acción de Γ en \mathbb{H}^2 (o en $\widehat{\mathbb{C}}$) es cualquier conjunto que contiene uno y solamente un elemento en \mathbb{H}^2 (o en $\widehat{\mathbb{C}}$) por cada órbita, es decir,

- (i) Si $z_1, z_2 \in F$, no existe $T \in \Gamma$, tal que $T(z_1) = z_2$.
- (ii) $\forall z \in \mathbb{H}^2$ (o en $\widehat{\mathbb{C}}$) existe $T \in \Gamma$, tal que $T(z) \in F$.

El axioma de elección establece que si $X_i, i \in I$, es una familia de conjuntos, entonces existe una colección de elementos $x_i, i \in I$, de tal manera que $x_i \in X_i \forall i$. Este principio nos permite asegurar la existencia de conjuntos fundamentales.

Estos conjuntos no son de ninguna manera únicos. Por ejemplo, si F es uno de ellos, A es un subconjunto de \mathbb{H}^2 y T es una transformación en Γ , entonces

$$(F \setminus A) \cup T(F \cap A)$$

también lo va a ser.

A modo de ejemplo, una visualización del conjunto fundamental del grupo $\Gamma = z \rightarrow \langle z + \lambda \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}^+, \lambda \neq 0, 1$ sería el siguiente.

Un conjunto fundamental F no puede ser abierto. Ahora, como es más sencillo trabajar con conjuntos abiertos (o cerrados), se establece una definición más adecuada para estudiar estos conjuntos de representantes de órbitas, que conllevan a las teselaciones hiperbólicas.

DEFINICIÓN 2.4.2. Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$, se dice que una región R es un dominio (región) fundamental en \mathbb{H}^2 para Γ , si se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) Cualesquiera dos puntos $z_1, z_2 \in R$ no son Γ -invariantes.
- (ii) dado $w \in \mathbb{H}^2$, existe $z \in \bar{R}$ y $T \in \Gamma$, tal que $T(z) = w$, donde \bar{R} denota la clausura de R en \mathbb{H}^2 .
- (iii) ∂R tiene medida bidimensional de Lebesgue cero.

Obsérvese también que se sigue del axioma de elección que si R es una región fundamental para Γ , entonces existe un conjunto fundamental F , tal que $R \subset F \subset \bar{R}$. Además, si Γ es un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{R})$, para el cual se puede construir una región fundamental, entonces Γ es discontinuo y por lo tanto es discreto.

DEFINICIÓN 2.4.3. Sea A una región en \mathbb{H}^2 , se define su área hiperbólica como la integral de Lebesgue

$$\int_A \frac{1}{(\operatorname{Im}(z))^2} d\mu.$$

Se puede tomar también, en muchos casos, la de Riemann (o la de Riemann impropia, si la región no es acotada).

TEOREMA 2.4.4. *El área hiperbólica es invariante bajo transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$, es decir, si A es una región en \mathbb{H}^2 y $T \in PSL(2, \mathbb{R})$, entonces*

$$\int_A \frac{1}{(\operatorname{Im}(z))^2} d\mu = \int_{T(A)} \frac{1}{(\operatorname{Im}(z))^2} d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN. El teorema de cambio de variable para integrales de Riemann también es válido para las de Lebesgue. Probamos primero el caso con área finita. Sea

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

$ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{Im}(T(z)) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

y

$$|T'(z)| = \frac{1}{|cz + d|^4}$$

es el determinante del Jacobiano de T . Se sigue entonces del teorema de cambio de variable que

$$\int_A \frac{1}{(\operatorname{Im}(z))^2} d\mu = \int_A \frac{1}{(\operatorname{Im}(T(z)))^2} \frac{1}{|cz + d|^4} d\mu = \int_{T(A)} \frac{1}{(\operatorname{Im}(z))^2} d\mu.$$

Si el área es infinita, se puede probar el teorema calculando primero el área de $A \cap H_n \cap R_n$, $n \in \mathbb{N}$, donde

$$H_n = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \operatorname{Im}(z) > \frac{1}{n}\}$$

y

$$R_n = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -n < \operatorname{Re}(z) < n\}.$$

□

DEFINICIÓN 2.4.5. Dados $z, w \in \mathbb{H}^2$, se define h-bisector perpendicular, o mediatriz hiperbólica, al segmento de geodésica $[z, w]$, como la única geodésica ortogonal a $[z, w]$ que pasa por el punto medio hiperbólico entre z y w .

Llamaremos al h-bisector perpendicular simplemente bisector perpendicular. Obsérvese que dada una geodésica λ en \mathbb{H}^2 y $z, w \in \lambda$, existe una transformación hiperbólica que preserva λ y manda z en w .

PROPOSICIÓN 2.4.6. Sean $z, w \in \mathbb{H}^2$, entonces el bisector perpendicular a $[z, w]$ consiste en los puntos en \mathbb{H}^2 que equidistan hiperbólicamente de z y w , es decir, consiste en

$$\{u \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(u, z) = \rho(u, w)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $z, w \in \mathbb{H}^2$, como las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías conformes, se puede suponer que están en la frontera del disco unidad, es decir, $z, w \in \partial\Delta$. Usando lo comentado el no anterior a esta proposición, podemos suponer también que $w = -\bar{z}$. Ahora como la reflexión en eje imaginario, $z \rightarrow -\bar{z}$ es una isometría de \mathbb{H}^2 , el punto medio de $[z, w]$ es i , por lo que el bisector perpendicular a $[z, w]$ es el eje imaginario positivo. Más aún, como esta reflexión fija el eje imaginario e intercambia z con w , los puntos del eje imaginario positivo equidistan hiperbólicamente de z y w .

Ahora solo queda ver que no quedan más puntos con esta propiedad. Si u equidista de z y w , sea C_1 un círculo con centro en z y radio $\rho(z, u)$, y sea C_2 la imagen de C_1 por la reflexión anterior. Finalmente, como los puntos de intersección de estos dos círculos son los puntos equidistantes, se sigue que $Re(u) = 0$. y es la semirrecta que ya teníamos. \square

DEFINICIÓN 2.4.7. Sea $A \subset \mathbb{H}^2$, se dice que A es h-convexo, si $\forall z, w \in A$ se tiene que $[z, w] \subset A$, donde $[z, w]$ denota el segmento de geodésica que une z con w .

Obsérvese que un conjunto h-convexo es conexo y que la intersección de conjuntos h-convexos es h-convexo. Además, si l es una geodésica, entonces $\mathbb{H}^2 \setminus l$ consiste en dos semiplanos que son h-convexos; esto es evidente si l es el eje imaginario, el caso general se sigue, ya que $PSL(2, \mathbb{R})$ es transitivo en geodésicas. Más aún, estas observaciones implican también que la región comprendida entre dos rectas verticales (o dos geodésicas tangentes) es h-convexa.

PROPOSICIÓN 2.4.8. Sea A una región h-convexa, entonces \bar{A} es h-convexa.

DEMOSTRACIÓN. Si \bar{A} no fuera h-convexa, existen $z, w \in \bar{A}$, tal que

$$[z, w] \not\subset \bar{A}.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $[z, w]$ es un segmento en el eje imaginario. Bajo estas hipótesis, existe $z_0 \in [z, w]$, tal que $z_0 \notin \bar{A}$. Ahora, como $(\bar{A})^c$ es abierto, se puede construir un cuadrado R de lado ϵ con centro en z_0 , tal que $R \subset (\bar{A})^c$.

Finalmente, nótese que los rectángulos infinitos de la forma

$$P_\delta = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid -\delta < Re(z) < \delta\}$$

son h-convexos, por lo que tomando subsucesiones z_n y w_n en A , tales que converjan a z y a w respectivamente, se tendría que A no es h-convexa, ya que tomando $\delta^* < \frac{\epsilon}{2}$ y n suficientemente grande para que

$$-\delta < Re(z), Re(w) < \delta,$$

implicaría que $[z_n, w_n] \subset P_{\delta^*}$, por ser h-convexo, y $[z_n, w_n] \cap R \neq \emptyset$. Y esto contradice la hipótesis.

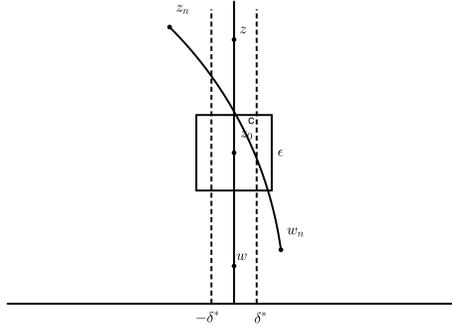


FIGURA 2.4.1. Representación \bar{A} es h-convexa.

□

PROPOSICIÓN 2.4.9. *Sea A una región h-convexa, $\alpha \in A$ y l un segmento de geodésica que surge de α , entonces l interseca ∂A en a lo más un punto.*

DEMOSTRACIÓN. Se puede suponer, sin perder generalidad, mediante transformaciones, que l va a estar contenida en el eje imaginario. Si l interseca ∂A en dos puntos distintos w_1 y w_2 , y aplicando la función $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ si fuera necesario, se puede suponer también que $\alpha = iy_0$, $w_1 = iy_1$, $w_2 = iy_2$, donde $y_0 < y_1 < y_2$.

Ahora, sean α_1 y α_2 en A , tales que $Re(\alpha_1) < 0 < Re(\alpha_2)$ y tales que $[\alpha_1, \alpha_2]$ interseca el eje imaginario por debajo de w_1 . Esto se logra tomando $\alpha_1, \alpha_2 \in D(0, r) \cap A$, donde $y_0 < r < y_1$.

También, existe una sucesión

$$w_n = x_n + y_n i \in A,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, tal que $w_n \rightarrow w_2$. Se puede suponer también que $x_n > 0$ (el caso < 0 es análogo). Nótese que las ordenadas en el origen de las rectas euclidianas que pasan por α_1 y w_n están dadas por

$$y_n - \frac{(y_n - v)}{(x_n - u)} x_n,$$

donde $\alpha_1 = u + vi$. Finalmente, si $n \rightarrow \infty$, estos números convergen a y_2 , por lo que si n es suficientemente grande, estas rectas intersecan el eje imaginario arriba de w_1 . En consecuencia, w_1 está en el interior del triángulo hiperbólico determinado por α_1 , w_n y α_2 , el cual está contenido en A , ya que A es h-convexa, lo cual contradice la existencia de dichos puntos, w_1 y w_2 . □

2.4.2. Construcción del polígono de Dirichlet.

TEOREMA 2.4.10. *Sea $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ discreto y $w_0 \in \mathbb{H}^2$ un punto no fijo, es decir, $T(z_0) \neq z_0 \forall T \in \Gamma \setminus I$, entonces existe un entorno abierto D de w_0 que no contiene puntos Γ -equivalentes, es decir, cada punto de D representa una órbita distinta.*

DEMOSTRACIÓN. La órbita de w_0 no se acumula en w_0 ya que este es un punto ordinario, por ser Γ discreto, por lo que existe un disco hiperbólico

$$D_h(w_0, \delta) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, w_0) < \delta\},$$

tal que no contiene puntos Γ -equivalentes a w_0 (distintos de w_0).

Se afirma que el disco hiperbólico

$$D = D_h(w_0, \frac{\delta}{2}) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, w_0) < \frac{\delta}{2}\}$$

tiene la misma propiedad. De otra manera, si existe $T \in \Gamma$, distinta de la identidad, tal que $w, T(w) \in D_h(w, \frac{\delta}{2})$, entonces se sigue de la invariabilidad de la métrica hiperbólica que $\rho(T(w), T(w_0)) \leq \frac{\delta}{2}$, lo cual a su vez implica

$$\rho(w_0, T(w_0)) \leq \rho(w_0, T(w)) + \rho(T(w), T(w_0)) \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2}$$

lo cual contradice la elección de δ , y habría un punto de la órbita en el disco. \square

DEFINICIÓN 2.4.11. Dado un punto $w \in \mathbb{H}^2$, un entorno N_w se dice estable si para cualquier transformación $T \in \Gamma$ se tiene

$$\begin{aligned} T(N_w) \cap N_w &= \emptyset & \text{si } T(w) \neq w \\ T(N_w) &= N_w & \text{si } T(w) = w. \end{aligned}$$

El teorema 2.4.10 implica la existencia de entornos estables, con respecto a la acción de Γ , para cualquier punto en \mathbb{H}^2 .

En la siguiente discusión se tomará a Γ como un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, $w_0 \in \mathbb{H}^2$ no fijo, y llamaremos a su órbita

$$T_n(w_0) = w_n,$$

donde $n \in \mathbb{N}$, con lo que T_n será una enumeración de los elementos de Γ . Nótese que $w_n \neq w_m$ si $n \neq m$, ya que $T_m^{-1}T_n$ fijaría wz . Denotaremos por λ_i , al bisector perpendicular del segmento $[w_0, w_i]$. Obsérvese que $\mathbb{H}^2 \setminus \{\lambda_i\}$ consiste en 2 semiplanos hiperbólicos, uno que contiene a w_0 , que denotaremos por L_i , y otro que contiene a w_i , al cual nos referimos por L'_i .

LEMA 2.4.12. *Sea Γ un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, $w_0 \in \mathbb{H}^2$ no fijo, con órbita $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ y*

$$\begin{aligned} A_i &= \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i)\} \\ A'_i &= \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, w_i) < \rho(z, w_0)\}, \end{aligned}$$

entonces $L_i = A_i$ y $L'_i = A'_i$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la proposición 2.4.6 que \mathbb{H}^2 es la unión disjunta de $A_i \cup \lambda_i \cup A'_i$. También lo va a ser $L_i \cup \lambda_i \cup L'_i$. Luego, basta probar que

$$L_i \subset A_i$$

y que

$$L'_i \subset A'_i.$$

Ahora, si $z \in L_i$, al trazar una geodésica de z a w_i , esta interseca λ_i en un punto z' y se tiene que

$$\rho(z, w_0) \leq \rho(z, z') + \rho(z', w_0) = \rho(z, z') + \rho(z', w_i) = \rho(z, w_i),$$

ya que z' equidista de w_0 y w_i , lo que quiere decir que $z \in A_i$. Finalmente, se hace el mismo argumento para los puntos de L'_i . \square

DEFINICIÓN 2.4.13. Sean Γ , w_0 , y L_i , con $i \in \mathbb{N}$, como en el lema 2.4.12, se define polígono de Dirichlet para Γ con centro en w_0 como

$$D_{w_0} = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Algunas veces escribiremos D_0 , o simplemente D , por D_{w_0} . Nótese que el Lema 2.4.12 implica que D consiste en los puntos en \mathbb{H}^2 que están estrictamente más cerca de w_0 que de cualquier otra de sus imágenes, es decir,

$$D = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, w_0) < \rho(z, w_i) \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

Obsérvese que D es no vacío ya que w_0 siempre estará en D . El polígono de Dirichlet D es también h-convexo, esto es porque es la intersección de conjuntos h-convexos. Ahora vamos a probar que D es una región fundamental para Γ .

LEMA 2.4.14. *Sea D el polígono de Dirichlet descrito en la definición 2.4.13 y K un subconjunto compacto en \mathbb{H}^2 , entonces K interseca solamente a un número finito de bisectores λ_i .*

DEMOSTRACIÓN. Como los subconjuntos compactos de los espacios métricos son acotados, existe un número r , tal que $K \subset D_h(w_0, r)$. Ahora, si z es un punto en $\lambda_i \cap K$, se tiene

$$\rho(w_0, w_i) \leq \rho(w_0, z) + \rho(z, w_i) = 2\rho(w_0, z) < 2r.$$

En consecuencia, si λ_i interseca K , necesariamente

$$w_i \in D_h(w_0, 2r).$$

Finalmente, la órbita de w_0 no se puede acumular en el compacto

$$\overline{D_h(w_0, 2r)}$$

ya que los puntos de este disco son ordinarios. \square

LEMA 2.4.15. *Sea D el polígono de Dirichlet descrito en la definición 2.4.13, entonces D es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in D$ y N un disco hiperbólico cerrado alrededor de z . Se sigue entonces del lema anterior que N interseca solamente a un número finito de bisectores, pongamos $\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}$. Es claro que $z \in L_{j_i} \forall i$, ya que $z \in D$, y como D está formado por desigualdades estrictas se puede tomar un disco alrededor de z de tal manera que no interseque ningún biselector. La existencia de dicho disco se puede deducir, ya que la función distancia

$$w \rightarrow \rho(w, z)$$

del conjunto cerrado λ_i en \mathbb{R}^+ es continua, donde λ_i hereda la métrica hiperbólica. \square

Denotaremos $T_n(D)$ por D_n . D_n va a consistir en los puntos de \mathbb{H}^2 que están estrictamente más cerca de w_n que de cualquier otro punto en la órbita de w_0 . También, D_n es h-convexo y la familia ortogonal de polígonos D_n es invariante Γ . La unión de todos los polígonos \bar{D}_n determina una subdivisión de \mathbb{H}^2 , que se le va a llamar *teselación*.

LEMA 2.4.16. *Sea D el polígono de Dirichlet descrito en la definición 2.4.13, y D_i, D_j dos de sus imágenes bajo funciones en Γ . Entonces*

- (i) $D_i \cap D_j = \emptyset, i \neq j$.
- (ii) $\forall z, w \in D_j, z$ no es Γ -equivalente a w .

DEMOSTRACIÓN. Si la primera afirmación no fuera cierta, existiría $z \in D_i \cap D_j$, donde $i \neq j$. Bajo esta hipótesis se tendría simultanea mente que

$$\rho(z, w_j) < \rho(z, w_i) \quad \text{y} \quad \rho(z, w_i) < \rho(z, w_j) ,$$

lo cual es contradictorio.

Por otra parte, si existen $z, w \in D_j, z \neq w$ y $T(z) = w, T \in \Gamma$, entonces como T transforma D_j en alguna D_i , y se tendría que $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, lo cual contradice la primera afirmación. Por consiguiente, se sigue también la segunda parte del lema. \square

LEMA 2.4.17. *Sea D el polígono de Dirichlet descrito en la definición 2.4.13, entonces la frontera de $D, \partial D$, consiste en los puntos z en \mathbb{H}^2 que satisfacen las siguientes dos condiciones:*

- (i) $\rho(z, w_0) \leq \rho(z, w_i) \forall i$.
- (ii) $\rho(z, w_0) = \rho(z, w_j)$, para al menos una j .

DEMOSTRACIÓN. Sea A el subconjunto de \mathbb{H}^2 determinado por las condiciones (i) y (ii), probamos que A es un subconjunto de ∂D . Si $z \in A$ y N es cualquier entorno de z , hay que probar que N interseca D . Se puede tomar N como un disco abierto y usando el lema 2.4.14, como \bar{N} es compacto, se puede suponer también que hay un número finito de bisectores que intersecan N y que todos estos paran por z .

Es claro que $z \in \bar{L}_i$ para todo i , por lo que $[w_0, z]$ es un arco de \bar{L}_i para todo i , porque L_i es h-convexa. También, usando la proposición 2.4.9 tenemos que el segmento de geodésica abierto en $[w_0, z]$ está contenido en L_i para todo i .

Luego

$$\{[w_0, z] - \{z\}\} \subset D.$$

Como también $\{[w_0, z] - \{z\}\} \cap N \neq \emptyset$, se sigue que

$$D \cap N \neq \emptyset$$

y los puntos en el conjunto A pertenecen a la frontera.

Recíprocamente, si $z \in \partial D$, como $z \notin \text{Ext}(D)$ se debe cumplir que

$$\rho(z, w_0) \leq \rho(z, w_i) \forall i.$$

De otra manera, si $\rho(z, w_0) > \rho(z, w_i)$, entonces $z \in L'_i$, y existe un entorno de z contenido en L'_i , por lo que $z \notin \partial D$.

Finalmente, si la desigualdad $\rho(z, w_0) \leq \rho(z, w_i)$ es estricta para todo i , entonces $z \in D$, por lo que $\rho(z, w_0) = \rho(z, w_i)$, para al menos alguna i . \square

COROLARIO 2.4.18. *Sea D el polígono de Dirichlet descrito en la definición 2.4.13, entonces*

$$\text{Ext}(D) = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \rho(z, w_i) < \rho(z, w_0), \text{ para al menos alguna } i\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Se tiene que

$$\rho(z, w_0) \leq \rho(z, w_i) \forall i$$

si y solo si

$$z \in D \cup \partial D.$$

\square

TEOREMA 2.4.19. *Sea Γ subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$, entonces su polígono de Dirichlet es una región fundamental para Γ .*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del lema 2.4.16 que cualesquiera dos puntos en D no son Γ -equivalentes. Siguiendo su definición tenemos que probar también que

$$\mathbb{H}^2 = \cup_{n \in \mathbb{N}} T_n(\bar{D}) = \cup_{n \in \mathbb{N}} \bar{D}_n.$$

Para esto, sea $z \in \mathbb{H}^2$, como la órbita de w_0 no se acumula en \mathbb{H}^2 , existe un punto w_j cuya distancia a z es menor o igual a la distancia de cualquier otro punto en la órbita a z es menor o igual a la distancia de cualquier otro punto en la órbita a z , es decir,

$$\rho(z, w_j) \leq \rho(z, w_i) \forall i.$$

Ahora, si $T_j(w_0) = w_j$ y $T_j^{-1}(z) = z'$, se sigue de la invariabilidad de la métrica que

$$\rho(z', w_0) \leq \rho(z', w_k) \forall k$$

lo cual significa, en virtud del lema 2.4.17, que $z' \in D$, y que $z \in T_j(D)$ para algún j . Y por tanto su unión da todo \mathbb{H}^2 .

Finalmente, las geodésicas en \mathbb{H}^2 tienen medida bidimensional cero, y como ∂D está contenida en una unión numerable de geodésicas se sigue que tiene medida cero. \square

Recordemos de la sección de métrica hiperbólica que la distancia de un punto z a una geodésica λ se alcanza trazando una segunda geodésica que para z y es ortogonal a λ . Usando esto, para el caso particular descrito en la definición 2.4.13, si λ_j es el bisector perpendicular de $[w_0, w_j]$, se tiene que

$$\rho(w_0, \lambda_j) = \frac{1}{2} \rho(w_0, w_j).$$

A continuación, vamos a ver una propiedad de los polígonos de Dirichlet. Y a los dominios fundamentales que cumplen esta propiedad se les llama *localmente finitos*.

PROPOSICIÓN 2.4.20. *Sea D el polígono de Dirichlet de un subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ y K un compacto en \mathbb{H}^2 , entonces K interseca solamente un número finito de imágenes de \bar{D} .*

DEMOSTRACIÓN. Usamos la notación del lema 2.4.16. Podemos suponer que el compacto es un disco hiperbólico con centro en w_0 , que denotamos por $D_h(w_0, r)$. Esto se sigue, ya que si r es suficientemente grande, $K \subset D_h(w_0, r)$, y si $D_h(w_0, r)$ interseca un número finito de polígonos, también K tiene esa propiedad.

Ahora, como

$$\frac{1}{2}\rho(w_0, w_j) = \rho(w_0, \lambda_j) \leq \rho(w_0, \bar{D}_j),$$

si $z \in \bar{D}_j \cup D_h(w_0, r)$, entonces el punto medio de $[w_0, w_j]$ está en $D_h(w_0, r)$. En consecuencia, $w_j \in D_h(w_0, 2r)$. Finalmente, como la órbita de w_0 no se acumula en $D_h(w_0, 2r)$ se sigue que el resultado. \square

A continuación, describimos los polígonos de Dirichlet de los grupos cíclicos. Nótese que todos los resultados que se han probado anteriormente son referentes a los polígonos de Dirichlet para subgrupos discretos de $PSL(2, \mathbb{R})$, también se aplican a subgrupos discretos de $M(\Delta)$, por lo que se puede usar un modelo u otro.

2.4.2.1. Polígonos de Dirichlet de grupos cíclicos elípticos.

En este caso consideraremos que estamos trabajando en $M(\Delta)$. Tomamos primero el caso de un grupo Γ generado por la transformación T definida por

$$z \rightarrow ze^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Se puede tomar como centro el punto $w_0 = \frac{1}{2}$ y denotamos sus imágenes por $w_k = T_k(w_0)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Observamos que $0 \in \lambda_k \forall k$, ya que equidista hiperbólicamente de w_0 y w_k .

Ahora, como la reflexión en la recta que pasa por el origen y por $e^{\frac{\pi ki}{m}}$ es una isometría hiperbólica, se sigue que si $1 < k < m$, entonces $\frac{1}{2}e^{\frac{\pi ki}{m}}$ equidista hiperbólicamente $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}e^{\frac{2\pi ki}{m}}$. Luego, el conjunto de bisectores consiste en los diámetros por el origen

$$\left\{ te^{\frac{\pi ki}{m}} \right\}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad 0 < k < m.$$

Por lo tanto, D es el sector delimitado por los radios

$$te^{\frac{\pi i}{m}}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{y} \quad te^{\frac{\pi i(m-1)}{m}}, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Esto se debe ya que

$$\pi \left(\frac{m-1}{m} \right) + \pi \equiv -\frac{\pi}{m} \pmod{2\pi},$$

y si $1 < k < m$, entonces

$$\pi \left(\frac{m-k}{m} \right) + \pi \equiv -\frac{k\pi}{m} \pmod{2\pi}.$$

Lo que implica que ningún bisector λ_k interseca dicha región D .

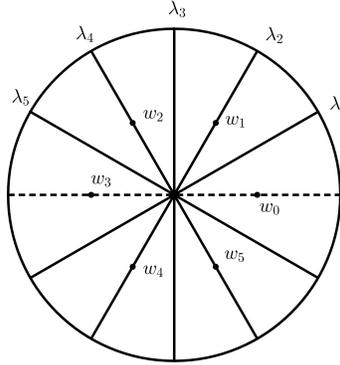


FIGURA 2.4.2. Polígono de Dirichlet para un grupo cíclico de orden 6.

Mediante la función de Cayley podemos trasladar esta descripción al caso \mathbb{H}^2 . En este caso vemos que todos los círculos se van a cortar en i ya que todos los bisectores cortan a cero, y vemos que al aplicar la imagen inversa seguimos teniendo 6 caras.

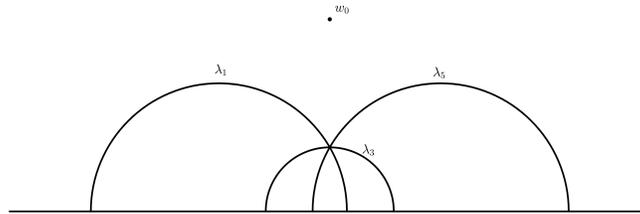


FIGURA 2.4.3. Polígono de Dirichlet para un grupo cíclico de orden 6 en \mathbb{H}^2 .

PROPOSICIÓN 2.4.21. *Sea Γ un subgrupo de $PSL(2, \mathbb{C})$ actuando en un subconjunto P de la esfera de Riemann y F un conjunto fundamental para esta acción, supóngase también que φ es una transformación compleja de Möbius, entonces el conjunto $\varphi(F)$ es fundamental para la acción del grupo $\Gamma' = \varphi\Gamma\varphi^{-1}$ actuando en $\varphi(P)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $\varphi(z)$ y $\varphi(w)$ son puntos Γ' -equivalentes en $\varphi(F)$, entonces existe $\varphi T \varphi^{-1} \in \Gamma'$, tal que

$$\varphi T \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \varphi(w).$$

En este caso $T(z) = w$, lo cual implica $z = w$, ya que implica F es fundamental.

Por último, sea $\varphi(w) \in \varphi(P)$. Como F es fundamental, se tiene que hay un punto $z \in F$, tal que $T(z) = w$, donde $T \in \Gamma$. Por lo tanto

$$\varphi T \varphi^{-1}(\varphi(z)) = \varphi(w)$$

y $\varphi(z)$ es Γ' -equivalente a $\varphi(w)$. □

Por tanto, para el caso general se va a obtener que mediante conjugación, ya que los conjuntos de Dirichlet se van a mantener invariantes. Esto se tiene por el resultado anterior restringido a $PSL(2, \mathbb{R})$ y por el teorema 2.4.19.

2.4.2.2. Polígonos de Dirichlet de grupos cíclicos parabólicos.

Consideremos el caso del grupo de traslaciones

$$\Gamma = \langle T \rangle, \quad T(z) = z + 1.$$

Se puede tomar en este caso como centro del polígono el punto $w_0 = i + \frac{1}{2}$. Ahora, el bisector perpendicular a w_0 y

$$w_k = i + \frac{1}{2} + k$$

para $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$, es la recta que para por

$$m = i + \frac{k+1}{2},$$

el punto medio euclidiano entre w_0 y w_k . Esto se sigue, ya que como la reflexión en la recta $Re(z) = m$ es una isometría hiperbólica, se tiene que los puntos de dicha recta equidistan hiperbólicamente de w_0 y de w_k .

Entonces el polígono de Dirichlet con centro en $i + \frac{1}{2}$ consiste en el rectángulo infinito R_∞ de base el segmento $[0, 1]$ y altura ∞ . Esto es porque los bisectores son las rectas verticales

$$\lambda_k = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) = \frac{k+1}{2} \right\},$$

se tiene que $\lambda_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) = 1\}$ y $\lambda_{-1} = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid Re(z) = 0\}$. Nótese que los bisectores λ_k , $k \neq \pm 1$, no se intersecan en R_∞ .

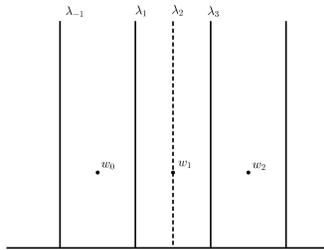
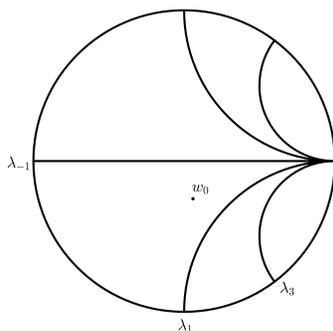


FIGURA 2.4.4. Polígono de Dirichlet para un grupo de traslaciones en \mathbb{H}^2 .

De nuevo, aplicando la transformación de Cayley tenemos como sería este grupo en el disco de Poincaré.

FIGURA 2.4.5. Polígono de Dirichlet para un grupo de traslaciones en \mathbb{H}^2 .

Cada bisector es ortogonal a todos los horocírculos. Conjugando, el caso general se sigue de manera análoga al caso elíptico.

2.4.2.3. Polígonos de Dirichlet de grupos hiperbólicos.

Consideremos el grupo de las homotecias generado por $T(z) = 2z$. Se puede tomar $w_0 = i$ como el centro del polígono de Dirichlet. Ahora, el punto medio hiperbólico del segmento $[i, 2i]$ es

$$\frac{1}{2}\rho(i, 2i) = \frac{1}{2} \log 2 = \log \sqrt{2}.$$

Esto muestra que

$$\lambda_1 = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = \sqrt{2}\}.$$

También, como $z \rightarrow -\frac{1}{z}$ es una isometría, se sigue que

$$\lambda_{-1} = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Estos argumentos muestran también que los demás bisectores son semicírculos con centro en el origen que no intersecan el medio anillo

$$D = \left\{ z \in \mathbb{H}^2 \mid \frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < \sqrt{2} \right\},$$

que es por consiguiente el polígono de Dirichlet D_i para este grupo de homotecias. Esto se debe a que todos los bisectores son ortogonales al eje imaginario.

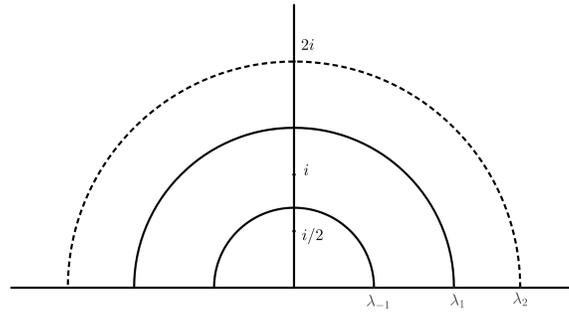


FIGURA 2.4.6. Polígono de Dirichlet para un grupo de homotecias en \mathbb{H}^2 .

Su correspondiente representación en el disco de Poincaré sería:

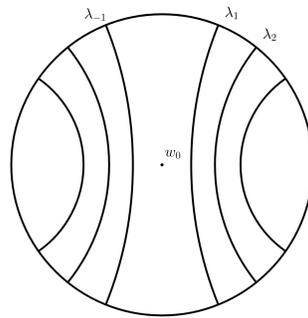


FIGURA 2.4.7. Polígono de Dirichlet para un grupo de homotecias en el disco.

Y conjugando vamos a obtener el caso general como en los casos anteriores.

2.4.3. Polígono de Ford.

En casos menos canónicos es difícil construir polígonos de Dirichlet, ya que es difícil detectar la familia de todos los bisectores. Vamos a mostrar otra construcción atribuida a Ford que establece otras técnicas para construir regiones fundamentales.

LEMA 2.4.22. *Sea $\bar{\Gamma}$ un grupo discreto de $SL(2, \mathbb{R})$ que contiene matrices que definen traslaciones. Entonces no existe ninguna sucesión de matrices distintas*

$$\bar{T}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$$

donde $n \in \mathbb{N}$, de tal manera que $c_n \rightarrow \alpha$, con α finito.

DEMOSTRACIÓN. Como Γ_∞ , el estabilizador de ∞ , por el teorema 2.3.29 va a ser cíclico, existe una matriz

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$$

tal que su correspondiente transformación T genera Γ_∞ .

Si suponemos que el lema no se cumple, existe una sucesión

$$\bar{T}_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$$

tal que $c_n \rightarrow \alpha$. Reemplazando $-T_n$ por T_n , si fuera necesario, se puede suponer que $\alpha \geq 0$, y que los números c_n son todos distintos entre sí y son todos positivos. Ahora, sean p_n y q_n enteros, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{T}^{p_n} \bar{T}_n \bar{T}^{q_n} &= \begin{pmatrix} 1 & p_n \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_n \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_n + p_n(\lambda c_n) & b_n + p_n(\lambda d_n) \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q_n \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_n + p_n(\lambda c_n) & * \\ c_n & d_n + q_n(\lambda c_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Resulta que para cada $n \in \mathbb{N}$ se puede elegir $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$, de tal manera que

$$1 \leq a_n + p_n(\lambda c_n) < 1 + \lambda c_n \quad \text{y} \quad 1 \leq d_n + q_n(\lambda c_n) < 1 + \lambda c_n.$$

Esto se prueba fácilmente tomando p_n y q_n más grande que a_n y c_n respectivamente para cada n . Habiendo elegido para cada n dichos p_n y q_n que cumplen esas desigualdades, se obtiene una sucesión de matrices que denotamos por

$$\bar{B}_n = \begin{pmatrix} a'_n & b'_n \\ c'_n & d'_n \end{pmatrix} = \bar{T}^{p_n} \bar{T}_n \bar{T}^{q_n}.$$

Observamos que todas las matrices son distintas, ya que las entradas c_n lo son. Bajo esta nueva notación se tiene

$$(2.4.1) \quad 1 \leq a'_n < 1 + \lambda c_n \quad \text{y} \quad 1 \leq d'_n < 1 + \lambda c_n.$$

Finalmente, estas desigualdades implican que

$$1 \leq a'_n d'_n \leq 1 + 2\lambda c_n + \lambda^2 c_n^2$$

y

$$0 \leq b'_n = \frac{a'_n d'_n - 1}{c_n} \leq 2\lambda + \lambda^2 c_n.$$

Sin embargo, esta última desigualdad junto con la de 2.4.1 implica que las matrices \bar{B}_n están acotadas, lo que contradice que $\bar{\Gamma}$ sea discreto. \square

Este lema va a implicar que existe un $m > 0$, tal que para toda

$$\bar{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma},$$

se tiene que $|c| > m$ o que $c = 0$.

DEFINICIÓN 2.4.23. Sea

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc = 1$ y $c \neq 0$, una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$, se define el círculo isométrico de T , denotado por $I(T)$, como

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |T'(z)| = \left| \frac{1}{(cz + d)^2} \right| = 1\}.$$

Este círculo isométrico va a consistir en los puntos donde el factor de conformalidad es 1. Y también se puede definir de la siguiente manera

$$I(T) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z - \left(-\frac{d}{c} \right) \right| = \frac{1}{|c|} \right\}.$$

PROPOSICIÓN 2.4.24. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, con $ad - bc = 1$ y $c \neq 0$, entonces T actúa euclidianamente en $I(T)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $z, w \in I(T)$, entonces

$$\begin{aligned} |T(z) - T(w)| &= \left| \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} \right| \\ &= \left| \frac{(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)}{(cz+d)(cw+d)} \right| \\ &= |azd + bcw - awd - bcz| \\ &= |z - w| \end{aligned}$$

□

Resulta también que el círculo isométrico es el único círculo donde una transformación de Möbius compleja (que no fija ∞) actúa euclidianamente. Esto se sigue, ya que si

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

con $ad - bc = 1$ y $c \neq 0$, actúa euclidianamente en otro círculo K , tomando un punto $z \in K \setminus I(T)$, y una sucesión de puntos $w_n \in K$, tales que convergen a z , se tendría que

$$\lim_{w_n \rightarrow z} \left| \frac{T(z) - T(w_n)}{z - w_n} \right| = 1$$

y entonces $|T'(z)| = 1$, lo que implica que $z \in I(T)$.

TEOREMA 2.4.25. *Sea T una transformación en $PSL(2, \mathbb{C})$ que no fija a ∞ . Entonces,*

- (i) $T(I(T)) = I(T^{-1})$.
- (ii) $T(Int(I(T))) = Ext(I(T^{-1}))$.
- (iii) $T(Ext(I(T))) = Int(I(T^{-1}))$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $z \in \mathbb{C}$, $/z = -\frac{d}{c}$, se sigue de la fórmula de la derivada de la función inversa que

$$(2.4.2) \quad (T^{-1})'(T(z))T'(z) = 1.$$

Ahora como

$$T'(z) = \frac{1}{(cz + d)^2},$$

se tiene por conexidad que

$$z \in Ext(I(T)) \iff |T'(z)| < 1.$$

En consecuencia, se sigue de 2.4.2 que

$$z \in Int(I(T)) \iff T(z) \in Ext(I(T^{-1}))$$

y que

$$z \in I(T) \iff T(z) \in I(T^{-1}).$$

□

Ahora mostraremos la construcción del polígono de Ford para grupos con traslaciones. Ambos polígonos, el de Dirichlet y el de Ford, se pueden considerar como distintos casos de la misma construcción, el polígono de Dirichlet generalizado, que se puede ver en [6].

DEFINICIÓN 2.4.26. Sea Γ un subgrupo discreto de $PSL(2, \mathbb{R})$ con traslaciones, se define el polígono de Ford para Γ , determinado por Γ , como

$$R = R_\infty \cap (\cap_{T \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty} Ext(I(T)))$$

donde

$$R_\infty = \{z \in \mathbb{H}^2 \mid \lambda < Re(z) < \lambda + \mu\}$$

y $z \rightarrow z + \mu$ es un generador de Γ_∞ .

Bajo estas hipótesis de la definición anterior, el lema 2.4.22 implica que los radios de los círculos isométricos, de las transformaciones del grupo que no son traslaciones convergen a 0. Una demostración breve de esto es que dado $m > 0$, solo existe un número finito de transformaciones $T \in \Gamma \setminus \Gamma_\infty$,

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

tales que $|c| \leq \frac{1}{m}$, o $\frac{1}{|c|} \geq m$. Por consiguiente, el conjunto R es no vacío.

TEOREMA 2.4.27. *Sean R y Γ como en la definición anterior, entonces R es una región fundamental para Γ .*

DEMOSTRACIÓN. Probamos primero que no hay puntos Γ -equivalentes en R . Para esto, sea $z \in R$ y $T \in \Gamma$. Si $T \in \Gamma_\infty$, $T \neq Id$, entonces T traslada z fuera de R_∞ , y por lo tanto $T(z) \notin R$. Por otra parte, si T no fija ∞ , como $z \in Ext(I(T))$, se sigue que

$$T(z) \in Int(I(T^{-1})),$$

esto es, $T(z) \notin R$.

Observamos que si

$$w \in \partial R \quad y \quad Re(w) \neq \lambda, \lambda + \mu,$$

y ya que $w \in Int(I(T))$ para alguna T , entonces existe un entorno de w ajeno a R , entonces w esta contenido en la clausura del exterior de cualquier círculo isométrico. También como los radios de los círculos isométricos convergen a 0, solamente hay un número finito de círculos isométricos que pasan por w .

Probamos ahora que cualquier $z_0 \in \mathbb{H}^2$ es equivalente a un punto en \bar{R} . Si $z_0 \in R_\infty$, escribimos $z_1 = z_0$, de otra manera, trasladamos z_0 a un punto $z_1 \in \bar{R}_\infty$. Ahora, si $z_1 \notin \bar{R}$, entonces $z_1 \in Int(I(T_1))$, donde esta transformación T_1 está definida por una matriz

$$T_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

El punto $z_2 = T_1(z_1)$ satisface

$$Im(z_2) = \frac{Im(z_1)}{|c_1 z_1 + d_1|^2} > Im(z_1)$$

porque $|T_1'(z_1)| < 1$. Por otra parte, si $z_1 \in \bar{R}$ se sigue el teorema, de otra manera, el siguiente paso es trasladar z_2 a un punto $z_3 \in \bar{R}_\infty$, y si $z_2 \in \bar{R}_\infty$, se toma $z_2 = z_3$, y si z_3 no está en \bar{R} entonces $z_3 \in Int(I(T_2))$, y etcétera.

De este modo, se obtiene una sucesión de puntos Γ -equivalentes z_0, \dots, z_n , tales que los números de la forma z_{2n+1} , $n \in \mathbb{N}$, están en R_∞ y

$$Im(z_0) = Im(z_1) < Im(z_2) = Im(z_3) < \dots$$

Finalmente, esta sucesión es necesariamente finita. Esto se sigue, ya que el lema 2.4.22 implica que existe una cota superior a los radios de los círculos isométricos, digamos s . Por lo tanto, si $z \in R_\infty$ y $Im(z) > s$, necesariamente $z \in \bar{R}$. Luego, como el rectángulo

$$\bar{R}_\infty \cap \{z \in \mathbb{H}^2 | Im(z_0) \leq Im(z) \leq s\}$$

contiene solamente puntos ordinarios, la sucesión z_{2n+1} , no se puede acumular en dicho rectángulo compacto, por lo que necesariamente existe n , tal que $z_{2n+1} \in \bar{R}$ y z_0 es Γ -equivalente a un punto en $\bar{\Gamma}$. \square

Para ilustrar estas ideas exhibimos una región de Ford para el grupo clásico modular $PSL(2, \mathbb{Z})$, denotaremos a este grupo por Γ . El elemento

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

genera Γ_∞ . Podemos tomar el rectángulo R_∞ como

$$\{z \in \mathbb{H}^2 \mid \frac{1}{2} < \operatorname{Re}(z) < \frac{1}{2}\}.$$

Tenemos que $\forall d \in \mathbb{Z}$ existe

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

De estos círculos euclidianamente mayores, solamente los que tienen centros en -1 , 0 , y 1 intersecan a R_∞ .

Ahora, la intersección de los círculos $|z - 1| = 1$ y $|z| = 1$ en \mathbb{H}^2 es un punto que denotaremos por ρ . Este punto del círculo unitario satisface la ecuación $(\rho - 1)(\bar{\rho} - 1) = 1$, por lo que $\operatorname{Re}(\rho) = \frac{1}{2}$ y

$$\rho = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

Reflejando en el eje imaginario se obtiene el otro vértice

$$-\bar{\rho} = -e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

En consecuencia, los otros círculos isométricos de radio menor que 1 no intersecan la región delimitada por las rectas $\operatorname{Re}(z) = \pm \frac{1}{2}$, que es el exterior al círculo $|z| = 1$. Es decir, esta región, que denotaremos por R es un polígono de Ford para el grupo modular. Esto se sigue, ya que los radios de estos círculos para el grupo modular. Esto se debe ya que los radios de estos círculos $\frac{1}{n}$, para $n \geq 2$.

Resulta que el polígono de Ford que acabamos de describir, es también polígono de Dirichlet con centro en $2i$. Para probar esta afirmación, observamos primero que $2i$ no es un punto fijo. Una manera de probar esta afirmación es usando la fórmula de los puntos fijos, dado que la parte imaginaria y de un punto fijo elíptico está dada por

$$\frac{\sqrt{4 - tr^2}}{2|c|}.$$

Además, $tr^2 \geq 0$ y c es un entero nulo, por lo que

$$y \leq \frac{2}{2|c|} \leq 1.$$

Alternativamente, los puntos de una región fundamental no pueden ser puntos fijos, ya que al tomar círculos hiperbólicos suficientemente pequeños habría puntos Γ -equivalentes en dichos círculos.

Ahora, como ya se mostró las rectas $Re(z) = \pm \frac{1}{2}$ son los bisectores perpendiculares de $2i$ y $2i \pm 1$, también

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$$

y $S(2i) = \frac{i}{2}$, por lo que el bisector entre $2i$ y $\frac{i}{2}$ es el círculo unitario. En consecuencia,

$$D_{2i} \subset R.$$

Por consiguiente, basta probar que la inclusión no es propia. De otra manera, si $R \setminus D \neq \emptyset$, donde $D = D_{2i}$, entonces también $R \setminus \bar{D}$ se puede tomar un disco hiperbólico B con centro en z , totalmente contenido en R , de tal manera que los bisectores que intersequen a B , pasen todos por z , que van a ser un número finito. Bajo estas hipótesis, se tiene que estos bisectores dividen a \mathbb{H}^2 en un número finito de regiones, una de las cuales va a contener a D . Entonces se puede encontrar $w \in R \setminus \bar{D}$. Por lo cual, existe un punto de R no puede ser Γ -equivalente a w . Esto es una contradicción, ya que un punto de R no puede ser Γ -equivalente a otro punto de R y tampoco a un punto de la frontera de R .

2.4.4. Teselaciones hiperbólicas mediante grupos de simetrías.

En esta sección vamos a dar un breve vistazo a la construcción de las teselaciones en el plano hiperbólico mediante un grupo de simetrías. Antes de nada, en esta sección no se entrara demasiado en detalles con el fin de no extender demasiado el trabajo, pero se intentará ser lo más preciso posible.

La gran diferencia con el plano euclídeo es que en el plano hiperbólico se puede hacer teselaciones con cualquier polígono regular. Dado el disco de Poincaré, vamos a partir de de un triángulo con vértices A , B y C , con ángulos α , β y γ respectivamente. Los lados de este triángulo van a estar formador por la geodésicas que unen tales puntos. Supongamos también que A está en el centro del disco. Tenemos que en este caso

$$\alpha + \beta + \gamma < 1.$$

Pero pero nos centraremos en el caso que estos ángulos sean divisores de π , y en concreto $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Con lo cual nuestra ecuación quedará

$$\frac{\pi}{p} + \frac{\pi}{q} + \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}.$$

Un par de cálculos elementales nos dan que la última ecuación es equivalente a

$$(p-2)(q-2) > 4.$$

Con esta notación, vamos a tener que p va a representar el número de lados del polígono, y q va a ser en número de polígonos que confluyen en cada vértice. Con esto, vamos a considerar $[p, q]$

como el grupo generado por las reflexiones en sus lados, este grupo va a ser fuchsiano, y gracias a la condición de que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$, va a ser infinito. Para el caso general tenemos el resultado siguiente:

TEOREMA 2.4.28. *Sean L , M , y N las reflexiones en los lados del triángulo Δ_0 con ángulos $\frac{\pi}{p}$, $\frac{\pi}{q}$, $\frac{\pi}{r}$ respectivamente. La clausura de las imágenes de Δ_0 bajo la acción de los distintos elementos del grupo $T^*(p, q, r)$ generado por L , M , y N llenan el plano hiperbólico sin huecos ni superposiciones.*

Las indicaciones de esta demostración están en ([14], pag. 81), pero esto lo podíamos intuir de los resultados anteriores, el teorema 2.2.36 nos dice que las reflexiones en las geodésicas no nos van a llevar fuera del círculo, y al considerar Δ_0 como la región fundamental, los resultados de de las secciones anteriores nos dicen que estas imágenes llenan todo el plano y no hay superposiciones, además de que todas las áreas van a medir lo mismo.

A modo de ejemplo, si consideramos el caso $p = 5$ y $q = 4$, tenemos que $(5 - 2)(4 - 2) = 6 > 4$, por lo que va a existir teselación. Para construir el triangulo hiperbólico que va a hacer de región fundamental, si llamamos A , B y C a los vértices y a sus respectivos ángulos α , β y γ , tenemos que los segmentos AB y BC van a ser líneas rectas, mientras que el segmento AC va a ser un arco de circunferencia que corta ortogonalmente al segmento AB y al disco unitario, supongamos que va a ver una circunferencia de centro O en la recta que une A y B . Al punto de corte de esta circunferencia con el disco unitario lo llamaremos P . Llamamos

$$PO = r \quad \text{y} \quad AO = d.$$

Y aplicando el teorema del seno al triángulo euclidiano ACO donde $\widehat{ACO} = \gamma + \frac{\pi}{2}$ obtenemos

$$\frac{d}{\cos \gamma} = \frac{r}{\sin \alpha},$$

y aplicando el teorema de pitágoras al triángulo euclidiano PAO y a P tenemos que

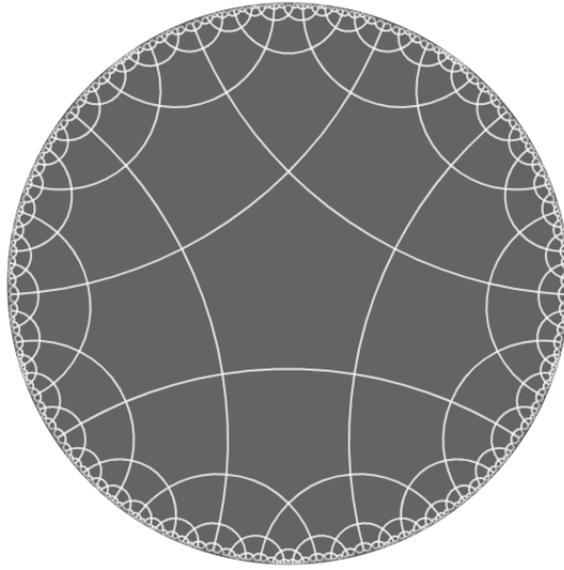
$$d^2 - r^2 = 1,$$

y se llega a que

$$d = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{s}{c})^2}} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{\sqrt{(\frac{c}{s})^2 - 1}}.$$

Donde $s = \sin \frac{\pi}{p}$ y $c = \cos \frac{\pi}{q}$.

Una vez hecho este triángulo, ya solo queda ir haciendo las simetrías hasta completar el polígono, y luego hacer las reflexiones en los lados del polígono. Y queda como en la imagen siguiente:

FIGURA 2.4.8. Ejemplo de teselación con $p = 5$ y $q = 4$.

Índice alfabético

A

Apolonio, 57

C

Cayley, 83, 95, 120

Círculo isométrico, 125

Conjunto

derivado, 107

fundamental, 111

límite $L(\Gamma)$, 88

ordinario $\mathcal{O}(\Gamma)$, 88

Conmutador, 87

D

Δ , Disco de Poincaré, 62

Densidad, 66

Discontinuo, 88

Distancia hiperbólica, 67

Dominio fundamental, 111

E

Elíptica, 54

Estable, 115

G

Grupo

de un mosaico, 15

fuchsiano, 99

general de Möbius ($GM(\widehat{\mathbb{R}^2})$), 78

puntual, 12

H

\mathbb{H}^2 , semiplano superior, 61

Hiperbólica, 54

hiperciclo, 73

Horocíclico, 99

horociclo, 73

L

$\Lambda_\Gamma(z)$, 105

Lema de Burnside, 39

Localmente finitos, 118

Loxodrómica, 54

M

$M(\Delta)$, 63, 78

Métrica cordal, 49

P

$PSL(2, \mathbb{C})$, 51

Parabólica, 53

Paralelogramo fundamental, 16

Perfecto, 108

Polígono

de Dirichlet, 116

de Ford, 126

Primera clase, 99

Proyección estereográfica, 47

Punto

límite, 88

Puramente

elíptico, 95

hiperbólico, 95

parabólico, 96

R

Razón doble, 63

Realizar como simetría, 14

Región fundamental, 111

S

Steiner, 57

Subgrupo de traslaciones, 12

T

- Transformación
 - de Cayley, 63
 - de Möbius, 49
 - elíptica, 54
 - hiperbólica, 54
 - loxodrómica, 54
 - parabólica, 53
- Traza, 54

Bibliografía

- [1] Armstrong, M.A., *Groups and symmetry* (1988). Springer. New York. Recuperado de <https://superoles.files.wordpress.com/2014/10/lluvia.pdf> 6, 7, 15, 45
- [2] Asensio Mayor, José, *Notas sobre Simetrías. Rosetones, frisos, mosaicos y poliedros*. Notas de la asignatura “Matemáticas, Sociedad y Cultura” del Máster Universitario en Formación del Profesorado de la Universidad de Murcia. 12, 13
- [3] Asensio Mayor, José, y del Valle Robles, Alberto. Apuntes de la asignatura *Geometría Afín y Euclídea* del Grado en Matemáticas de la Universidad de Murcia.
- [4] Blog de Tumblr. <https://baldosasycanguros.tumblr.com/post/49669311444/grupos-cristalograficos-planos-o-cuantos-tipos-de>. 32
- [5] Beardon, Alan F., *Algebra and geometry* (2005). Cambridge. University press, Cambridge. 7, 46
- [6] Beardon, Alan F., *The geometry of discrete groups* (1983). Springer. New York. 7, 46, 95, 107, 108, 109, 126
- [7] Carne, T.K., *Geometry and Groups* (2012). Cambridge. <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~tkc/GeometryandGroups/GeometryandGroups.pdf> 12, 13
- [8] Carrión Rebellato, María Teresita, *Teselaciones en el plano hiperbólico* (2016). Uruguay. Trabajo Final del Diploma en Matemáticas. <http://www.cmat.edu.uy/~rpotrie/documentos/tesis/tesinateresita.pdf> 46
- [9] Christersson, Malin, *Non-Euclidean Geometry (Interactive Hyperbolic Tiling in the Poincaré Disc)*. <http://www.malinc.se/noneuclidean/en/poincaretiling.php> 46
- [10] Coxeter, W., *The trigonometry of hyperbolic tessellations* (1997). Canad. Math. Bull. Vol. 40 (2), 158-168. Recuperado de la página de Cambridge 46

- [11] Goodman-Strauss, Chain, *Compass and straightedge in the Poincaré disk* (2001). The American Mathematical Monthly, Vol. 108, No. 1 (Jan., 2001), pp. 38-49. <https://www.jstor.org/stable/2695674>. 77
- [12] Henry, N.F.M., y Lonsdale, K., *International tables for X-ray crystallography Vol 1.* (1952). Kinoch Press. Birmingham. <https://archive.org/details/InternationalTablesForX-rayCrystallographyVol1/page/n535>
- [13] Lascurain Orive, Antonio, *Una Introduccion a la Geometria Hiperbolica Bidimensional* (2005). Prensas de ciencias, UNAM . ISBN 9703226493, 9789703226498 Disponible en <https://pdfs.semanticscholar.org/1893/0f81b4f7cc117265603d064ae6305f8461c7.pdf> 7, 46, 48
- [14] Magnus, W., *Non-euclidean Tesselations and Their Groups* (1974). Academic Press. New York. 46, 130
- [15] Mármol Campos, Enrique, Clasicación de grupos finitos de orden bajo (2018). Trabajo de Fin de Grado UMU. 11
- [16] Mathematics Stack Exchange. URL <https://math.stackexchange.com>
- [17] Spindler, K., *Abstract algebra with applications vol. 1* (1994). Marcel Dekker, New York.
- [18] Yale, Paul B., *Geometry and Simmetry* (1968). Holden-Day. San Francisco. 12, 13