Categorías de módulos para anillos asociativos

José Pablo Rabadán Sánchez

Tutor: José Luis García Hernández

Facultad de Matemáticas

Universidad de Murcia

Septiembre 2019

“Llevo obteniendo resultados desde hace tiempo, pero aún no sé cómo llegué a ellos.”

— Carl Friedrich Gauss

“Dios hizo los números naturales, el resto es obra del hombre.”

— Leopold Kronecker

Agradecimientos

Quisiera agradecer a mi tutor, José Luis García Hernández, por su inestimable ayuda, consejos y enseñanzas, sin los cuales no hubiera sido posible la realización de este Trabajo de Fin de Máster. Por estar siempre dispuesto a dedicarme su tiempo y su conocimiento.

Al resto de profesores de la Facultad de Matemáticas, por su paciencia y su dedicación.

A mis amigos, quienes comparten conmigo los buenos y los malos momentos, estando a mi lado siempre que los necesito.

A mis padres, por aguantarme en esos días en los que nada sale y ayudarme en los momentos de dificultad, por su comprensión y por su cariño. Muchas gracias de todo corazón.

A mi abuela, por su cariño y atención, por cuidarme y educarme de la forma en la que lo ha hecho.

A mi hermana, simplemente, por que la quiero un montón.

Declaración de originalidad

José Pablo Rabadán Sánchez, autor del Trabajo de Fin de Máster Categorías de módulos para anillos asociativos, bajo la tutela del profesor José Luis García Hernández, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona. En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una de las técnicas más potentes que se utilizan para el estudio de los anillos con identidad, es la de asociar a cada anillo R sus categorías de R-módulos unitarios (por la derecha y por la izquierda, Mod-R y R-Mod, respectivamente) y relacionar propiedades del anillo con propiedades de dichas categorías. Por poner algún ejemplo:

1. Un anillo R es noetheriano por la izquierda si y solo si toda suma directa de R-módulos por la izquierda inyectivos es inyectivo.

2. Un anillo R es artiniano por la izquierda si y solo si todo R-módulo por la izquierda inyectivo es suma directa de envolturas inyectivas de R-módulos simples.

Sin embargo, extender este método a los anillos generales (es decir, a los anillos en los que no suponemos que haya identidad) presenta el problema de identificar las categorías de módulos adecuadas. La noción de módulo unitario del caso anterior (módulos en que $1 \cdot x = x$) no puede aplicarse ahora sin cambios. Desde luego, existen generalizaciones a este caso de la noción de módulo unitario, pero, salvo en casos especiales, las categorías de módulos unitarios resultantes están muy lejos de ofrecer las buenas propiedades de las correspondientes del caso de anillos con 1.

Existen diversas categorías de módulos propuestas en la literatura (véase [GAM]) pero normalmente los resultados son buenos solamente en casos particulares, especialmente si el anillo es idempotente. La elección más obvia, diferente de las anteriores, es la que figura en muchos textos de teoría de anillos para transmitir la idea de que los anillos generales pueden reducirse a los anillos con 1, así que no merecen un estudio serio independiente: se trata de sustituir el anillo R por el anillo $\widehat{R} = R \times \mathbb{Z}$ (**extensión de Dorroh**) formado por el conjunto $R \times \mathbb{Z}$ en el que la suma se define componente a componente y el producto $(r,n)\cdot(s,m) = (rs+mr+ns,nm)$ que es un anillo con identidad $(0,1)$. Pero los dos anillos son diferentes, aunque relacionados, y pueden tener diferentes propiedades. Desde el punto de vista de las categorías, la sustitución propuesta significa elegir la categoría Mod-$\widehat{R}$ de los módulos unitarios sobre la extensión de Dorroh, que se puede identificar con la categoría MOD-R de todos los módulos sobre el anillo R, unitarios o no, como se ve en el siguiente resultado:

Teorema 1.9 Sea R un anillo, y sea $R\times\mathbb{Z}$ la extensión de Dorroh de R. Entonces la categoría MOD-R es equivalente a la categoría Mod-$R\times\mathbb{Z}$ de R-módulos unitarios sobre el anillo con identidad $R\times\mathbb{Z}$.

Ciertamente, esta categoría MOD-R sería una buena elección si nos limitamos a considerar sus propiedades, ya que, por la identificación indicada, es una categoría de módulos unitarios sobre un anillo con 1, así que es abeliana y completa, con todas las buenas propiedades de esas categorías. Pero MOD-R es, en palabras de Quillen, "demasiado grande" para reflejar fielmente las propiedades del anillo R; en particular, contiene todos los grupos abelianos sobre los que se define un producto por escalares que es trivial, así que difícilmente puede haber una buena relación entre las propiedades del anillo R y las de la categoría MOD-R. Ya que R y $R\times\mathbb{Z}$ pueden llegar a ser bastante diferentes, incluso si R es un anillo unitario.

En [GAM] se presenta una solución al problema de la elección de las categorías para el anillo general R que combina las características de utilizar categorías con buenas propiedades intrínsecas (básicamente, se trata de categorías abelianas) con las de generalizar la teoría de módulos sobre anillos con 1 de manera bastante fiel, respetando muchos de los resultados elementales de la teoría; la excepción principal está en los resultados que se basan en la existencia de suficientes objetos finitamente presentados; en la situación general no es posible asegurar esta existencia.

La solución presentada elimina la simetría derecha-izquierda del caso de anillos con 1. Efectivamente, en este caso las categorías Mod-R y R^{op}-Mod son esencialmente la misma, siendo R^{op} el anillo opuesto del anillo R. Para restablecer en el ambiente de los anillos generales las propiedades de los módulos se hace preciso renunciar a esa simetría. Esto no es tan extraño como pudiera parecer a primera vista: en realidad, cuando estudiamos un anillo R a través de sus categorías de módulos lo hacemos utilizando las dos categorías Mod-R y R-Mod, las cuales pueden tener propiedades bastante diferentes. Así lo hacemos también en el caso general, resultando que la condición de que ambas categorías deban definirse del mismo modo no es imprescindible.

El propósito de este trabajo es el de presentar una versión del referido artículo [GAM] que sea accesible a cualquier lector con los conocimientos más básicos de teoría de anillos y módulos que se supone que se adquieren en el grado junto con la asignatura correspondiente del máster en Matemática Avanzada. Como es usual el artículo está lejos de ser autocontenido a partir del nivel que se ha descrito; incluye numerosas referencias a la literatura previa sobre el tema, con trabajos bastante especializados. Por tanto, nuestro objetivo ha sido desarrollar de modo independiente toda la teoría necesaria para llegar a presentar los resultados importantes de [GAM] en una forma asequible al lector no especializado.

Antes de introducirnos a fondo en el estudio de categorías de R-módulos para anillos asociativos, vamos a revisar una serie de conceptos básicos generales sobre álgebra que usaremos con frecuencia a lo largo de este trabajo.

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1 *Un* ***anillo unitario*** *es una terna $(R,+,\cdot)$ formada por un conjunto no vacío R y dos operaciones binarias en R, $+$ y $\cdot$, que cumple las propiedades siguientes.*

1. *$(R,+)$ es un grupo abeliano.*
2. *La operación $\cdot$ es asociativa.*
3. *La operación $\cdot$ es distributiva con respecto a $+$; es decir, dados $x,y,z \in R$ tenemos que $x\cdot(y+z) = x\cdot y+x\cdot z$ y $(y+z)\cdot x = y\cdot x+z\cdot x$*
4. *Existe un elemento $1 \in R$ tal que $1\cdot x = x\cdot 1 = x$ para todo elemento $x \in R$.*

Para hablar de un anillo, emplearemos la notación indicada, con $+$ y $\cdot$ representando las dos operaciones de la definición, a las que llamaremos suma y producto, respectivamente. Sin embargo, haremos una excepción con la notación para el producto: es más común utilizar xy para denotar $x\cdot y$, y así lo haremos en general.

Nota 1.2 *Llamaremos* ***anillo*** *a secas (o* ***anillo no unitario****) a la terna $(R,+,\cdot)$ que verifica las tres primeras propiedades de la Definición 1.1, pero puede no cumplir la cuarta, es decir, el anillo no tiene necesariamente elemento neutro para el producto.*

Definición 1.3 *Sea R un anillo unitario. Un* ***R-módulo*** *por la derecha unitario es una terna $(M,+,\cdot)$ donde $(M,+)$ es un grupo abeliano y $\cdot: M \times R \to M$ es una operación, de manera que se verifican las siguientes propiedades:*

1. $(x+y)r = xr+yr$
2. $x(r+s) = xr+xs$
3. $x(rs) = (xr)s$
4. $x \cdot 1 = x$

para todo $x,y \in M$ y $r,s \in R$.

Nota 1.4 *La definición de R-módulo por la izquierda es análoga, cambiando el lado.*

Nota 1.5 *Si en la definición anterior el anillo R es no unitario, entonces la definición R-módulo por la derecha es igual que la anterior salvo por que no se debe incluir la cuarta propiedad.*

A partir de aquí, R es un anillo (no necesariamente unitario).

Definición 1.6 *Sea M un R-módulo por la derecha, y sea $L \neq \emptyset$ tal que $L \subseteq M$. Diremos que L es* ***submódulo*** *de M cuando se cumple:*

1. $x,y \in L \Rightarrow x+y \in L$
2. $x \in L,\ r \in R \Rightarrow xr \in L$

Es decir, L es un submódulo cuando es no vacío y cerrado para sumas y productos por escalares. Escribiremos $L \leq M$ para indicar que L es un submódulo de M. Nótese que si $L \leq M$, entonces las operaciones de M se pueden restringir a L, de manera que L también es un R-módulo por la derecha.

Definición 1.7 *Sea R un anillo y sean M y N, R-módulos. Una aplicación $h: M \to N$ es un* ***homomorfismo de R-módulos*** *si $h(mr+ns) = h(m)r+h(n)s$ $\forall$ $m,n \in M$, $\forall$ $r,s \in R$.*

Los R-módulos por la derecha (izquierda) y los R-homomorfismos entre ellos forman una categoría, la categoría general de R-módulos por la derecha (izquierda), que denotaremos MOD-R (R-MOD).

Definición 1.8 *Dado un anillo R y dos R-módulos M y N, denotaremos por* $\boldsymbol{Hom_R(M,N)}$ *al conjunto de homomorfismos de R-módulos con dominio M y codominio N. En caso de querer destacar que $M,N \in$ MOD-R, escribiremos* $\boldsymbol{Hom_{MOD\text{-}R}(M,N)}$. *De forma análoga para el conjunto de homomorfismos entre M y N en las categorías R-MOD, Mod-R y R-Mod.*

El siguiente resultado es bien conocido y establece que esta categoría de R-módulos es precisamente una categoría de R-módulos para un anillo con identidad.

Teorema 1.9 *Sea R un anillo, y sea $R\times\mathbb{Z}$ la extensión de Dorroh de R. Entonces la categoría MOD-R es equivalente a la categoría Mod-$R\times\mathbb{Z}$ de R-módulos unitarios sobre el anillo con identidad $R\times\mathbb{Z}$.*

Dem

Vamos a hacer únicamente un pequeño esquema de la prueba, este resultado es bien conocido y los cálculos son bastante mecánicos.

Recordemos la construcción del anillo $R\times\mathbb{Z}$. Este anillo está formado por el conjunto $R\times\mathbb{Z}$ con la suma definida componente a componente y el producto definido por $(r,n)\cdot(s,m) = (rs+mr+ns,nm)$. El anillo R puede ser identificado dentro de $R\times\mathbb{Z}$ como el ideal formado por los elementos de la forma $(r,0)$ con $r \in R$. La identidad del anillo $R\times\mathbb{Z}$ es el elemento $(0,1)$.

Vamos a ver que los R-módulos a derecha y los $R\times\mathbb{Z}$-módulos unitarios son la misma cosa. Supongamos que M es un R-módulo, la operación $m(r,n) = mr+mn$ dota a M de estructura de $R\times\mathbb{Z}$-módulo unitario.

Si M es un $R\times\mathbb{Z}$-módulo unitario, definimos $mr = m(r,0)$ y M adquiere estructura de R-módulo. Estas construcciones son inversas la una de la otra.

Si M y N son R-módulos a derecha, $Hom_{\text{MOD-}R}(M,N)$ y $Hom_{\text{MOD-}R\times\mathbb{Z}}(M,N)$ son la misma cosa puesto que todos los R-homomorfismos son en particular homomorfismos de grupos abelianos y por tanto se comportan bien con los elementos de $\mathbb{Z}$ que hemos añadido. Lo mismo sucede con el producto tensorial, $M\otimes_R N = \widehat{M}\otimes_{R\times\mathbb{Z}}\widehat{N}$ (donde $\widehat{M}$ y $\widehat{N}$ serían M y N vistos como $R\times\mathbb{Z}$-módulos). $\square$

Capítulo 2

La categoría Mod-$\boldsymbol{R}$

2.1. $\boldsymbol{R}$-módulos de torsión y libres de torsión

A continuación daremos algunas definiciones sobre R-módulos que usaremos en este trabajo. A lo largo de este capítulo, salvo que se indique expresamente lo contrario, todos los R-módulos son R-módulos por la derecha y R es un anillo general.

Durante esta sección, salvo que indiquemos expresamente lo contrario, $M \in \mathrm{Ob}(\text{MOD-}R)$.

Definición 2.1 *Definimos* ***T(M)*** *:= {m ∈ M: para toda sucesión* $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq R$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $mr_1r_2...r_{n_0} = 0\}$.

Veamos ahora que $\mathrm{T}(M)$ es un submódulo de M. Lo llamaremos **submódulo de torsión** de M. Los elementos de $\mathrm{T}(M)$ se llaman **elementos de torsión** de M.

Proposición 2.2 *T(M) es un submódulo de M.*

<u>*Dem*</u>

Veamos primero que $\mathrm{T}(M)$ es cerrado para sumas. Sean $x,y \in \mathrm{T}(M)$, tenemos que para toda $(r_\mathrm{n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ sucesión en R, tenemos que existen n_0, $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $xr_1...r_{n_0} = 0$ y que $yr_1...r_{n_1} = 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad que $n_0 \leq n_1$. Por lo tanto, $(x+y)r_1...r_{n_1} = 0 \cdot r_{n_0+1}...r_{n_1} + 0 = 0$. Luego $x+y \in \mathrm{T}(M)$.

Ahora, probaremos que $\mathrm{T}(M)$ es cerrado para productos por escalares. Sea $m \in \mathrm{T}(M)$ y $r \in R$. Dada la sucesión $(r_\mathrm{n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ en R, formamos ahora la sucesión $(r,r_1,r_2,...)$; como m es de torsión, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mrr_1...r_{n_0} = 0$, como queríamos probar. □

Definición 2.3 *Diremos que M es un* ***R-módulo de torsión*** *si M = T(M).*

Definición 2.4 *Diremos que M es un* ***R-módulo libre de torsión*** *si T(M) = 0.*

Veamos ahora unas propiedades básicas acerca de R-módulos de torsión y libres de torsión.

Proposición 2.5 *M es un R-módulo libre de torsión si y solo si dado $m \in M$, tenemos que $mR = 0$ implica que $m = 0$.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos primero que M es libre de torsión. Lo veremos por reducción al absurdo. Sea $m \in M$ con $m \neq 0$ tal que $mR = 0$, luego, para toda $(r_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ sucesión en R, nos queda que $\mathrm{m}r_1 = 0$, es decir, $m \in \mathrm{T}(M)$, contradiciendo que M es libre de torsión.

Veamos la otra condición por contrarrecíproco. Nuestra hipótesis es que si tomamos $m \in M$, donde $m \neq 0$, entonces $mR \neq 0$. Vamos a probar que $\mathrm{T}(M) = 0$. Para ello, tomaremos $m \in M$ con $m \neq 0$. Por hipótesis, sabemos que existe $r_1 \in R$ tal que $mr_1 \neq 0$, como $mr_1 \in M$ y $mr_1 \neq 0$, por hipótesis, tenemos que existe $r_2 \in R$ tal que $mr_1r_2 \neq 0$. Análogamente, existe $r_3 \in R$ tal que $mr_1r_2r_3 \neq 0$. Procediendo recurrentemente, podemos construir una sucesión $(r_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ en R tal que $mr_1...r_{\mathrm{k}} \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que tenemos que $m \notin \mathrm{T}(M)$. Por lo tanto, hemos probado que si $m \in \mathrm{T}(M)$, entonces $m = 0$, y de aquí se sigue que $\mathrm{T}(M) = 0$. $\square$

Proposición 2.6 *El R-módulo M/T(M) es libre de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Haremos la prueba por reducción al absurdo. Sea $m \in M$ y sea $\overline{m}$ la clase de m módulo $\mathrm{T}(M)$. Sea $\overline{m} \in M/\mathrm{T}(M)$, con $\overline{m} \neq 0$, y supongamos que para toda $(\mathrm{r_n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ sucesión en R existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{m}r_1...r_{n_0} = 0$. Lo que implica que $mr_1...r_{n_0} \in \mathrm{T}(M)$. Consideramos ahora la sucesión $r_{\mathrm{n_0}+1},...,r_{\mathrm{n_1}},...$ .Por ser $mr_1...r_{n_0} \in \mathrm{T}(M)$, nos queda que $mr_1...r_{n_0}r_{\mathrm{n_0}+1}...r_{\mathrm{n_1}} = 0$ para algún $n_1 \in \mathbb{N}$. Luego $m \in \mathrm{T}(M)$, por lo tanto $\overline{m} = 0$, llegando así a una contradicción. $\square$

Proposición 2.7 *Sea $N \leq M$ un submódulo, entonces $T(N) = N \cap T(M)$.*

<u>*Dem*</u>

Vamos a ver la igualdad por doble inclusión.

$\mathrm{T}(N) \subseteq N \cap \mathrm{T}(M)$, pues $\mathrm{T}(N) \subseteq N$ por la Definición 2.1 y que $\mathrm{T}(N) \subseteq \mathrm{T}(M)$ es claro por la misma definición.

Veamos ahora la otra inclusión. Sea $m \in N$ y $m \in \mathrm{T}(M)$. Vamos a probar que $m \in \mathrm{T}(N)$. Como $m \in \mathrm{T}(M)$, para toda sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en R, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1r_2...r_{n_0} = 0$, es decir, verifica la condición de la Definición 2.1. Además, $m \in N$, luego $m \in \mathrm{T}(N)$. □

Proposición 2.8 *Sean M y N, R-módulos, sea f: M → N homomorfismo de R-módulos, entonces f(T(M)) ⊆ T(N).*

<u>*Dem*</u>

Veremos que la imagen por f de cualquier elemento $m \in \mathrm{T}(M)$ está en $\mathrm{T}(N)$. Sea $m \in \mathrm{T}(M)$, tenemos por lo tanto que para toda sucesión $(\mathrm{r}_\mathrm{n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ en R, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1...r_{n_0} = 0$. Tenemos entonces que $f(m)r_1...r_{n_0} = f(mr_1...r_{n_0}) = f(0) = 0$, donde $f(m) \in N$, por tanto, $f(m) \in \mathrm{T}(N)$, como queríamos probar. □

Corolario 2.9 *Si M es de torsión y f: M → N es un epimorfismo, entonces N también es de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Por hipótesis, el R-módulo M es de torsión, luego $M = \mathrm{T}(M)$. Por la Proposición 2.8, tenemos que $f(\mathrm{T}(M)) \subseteq \mathrm{T}(N)$, o lo que es lo mismo, $f(M) \subseteq \mathrm{T}(N)$. Además, como por hipótesis f es un epimorfismo, nos queda $f(M) = N$, obteniendo entonces que $N \subseteq \mathrm{T}(N)$. Que $\mathrm{T}(N) \subseteq N$ es claro. Obtenemos entonces $N = \mathrm{T}(N)$, es decir, N es de torsión. □

Corolario 2.10 *Si M es libre de torsión y f: K → M es un monomorfismo, entonces K también es libre de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos que M es libre de torsión y f un monomorfismo, vamos a probar que $\mathrm{T}(K) = 0$. Por la Proposición 2.8, sabemos que $f(\mathrm{T}(K)) \subseteq \mathrm{T}(M)$. Como M es libre de torsión, tenemos que $\mathrm{T}(M) = 0$, por tanto, $f(\mathrm{T}(K)) \subseteq 0$, que es lo mismo que $f(\mathrm{T}(K)) = 0$. Además, al ser f un monomorfismo, nos queda que $\mathrm{T}(K) = 0$, es decir, K es libre de torsión. □

Corolario 2.11 *Si M es de torsión y f: K → M es un monomorfismo, entonces K también es de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Por hipótesis, M es de torsión y f es un monomorfismo, luego sabemos que $f(K) \leq M = \mathrm{T}(M)$. Por la Proposición 2.7, $\mathrm{T}(f(K)) = f(K) \cap \mathrm{T}(M) = f(K) \cap M = f(K)$. Llegando así a que $f(K)$ es de torsión, al ser f monomorfismo, $K \cong f(K)$, luego K también es de torsión. $\square$

Definición 2.12 *Sea $N \leq M$ un submódulo.*

- *Diremos que N es **saturado** en $M \iff M/N$ es libre de torsión.*
- *Diremos que N es **denso** en $M \iff M/N$ es de torsión.*

Proposición 2.13 *Sea $N \leq M$ un submódulo, si N es saturado en M, entonces $T(M) \subseteq N$.*

<u>*Dem*</u>

Lo veremos por reducción al absurdo, supongamos que existe $m \in \mathrm{T}(M)$ y $m \notin N$. Como $m \in \mathrm{T}(M)$, sabemos que para toda sucesión $(\mathrm{r_n})_{\mathrm{n} \in \mathbb{N}}$ en R, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1...r_{n_0} = 0$. Sea $\overline{m}$ la clase de m módulo N, es decir, $\overline{m} = m+N$, $\overline{m} \in M/N$. Luego, $\overline{m}r_1...r_{n_0} = (m+N)r_1...r_{n_0} = mr_1...r_{n_0}+N = 0+N \subseteq N$. Así, obtenemos $\overline{m} = 0$, por lo que $m \in N$, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 2.14 *Dados los submódulos $N \leq H \leq M$, diremos que H es la **saturación** de N en M si $T(M/N) = H/N$.*
Denotaremos como $\boldsymbol{N^c}$ a la saturación de N en M.

Proposición 2.15 *Sea $T(M/N) = N^c/N$. Entonces $N^c \leq M$ es el único submódulo tal que $N \leq N^c \leq M$ con M/N^c libre de torsión y N^c/N de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Como $\mathrm{T}(M/N) = N^c/N$, nos queda que N^c/N es de torsión. Ver que M/N^c es libre de torsión es sencillo, pues $M/N^c \cong \frac{M/N}{N^c/N} = \frac{M/N}{T(M/N)}$. Pero, si X es un R-módulo, $X/\mathrm{T}(X)$ es libre de torsión, por la Proposición 2.6. Obteniendo así que M/N^c es libre de torsión.

Probaremos ahora la unicidad de N^c. Supongamos que existe N' que verifica lo mismo que N^c, luego N'$/N$ es de torsión, como $\mathrm{T}(M/N) = N^c/N$, nos queda que $N' \subseteq N^c$. N' también cumple que $M/N' \cong \frac{M/N}{N'/N}$, este último también es libre de torsión. Aplicando la Proposición 2.13, nos queda que $N^c/N = \mathrm{T}(M/N) \subseteq N'/N$, lo que implica que $N^c \subseteq N'$. Teniendo así la doble inclusión, y por ello que $N^c = N'$. $\square$

Proposición 2.16 *Si M es un R-módulo de torsión y N un R-módulo libre de torsión, entonces* $Hom_R(M,N) = 0$.

<u>*Dem*</u>

Dado f: $M \to N$, la inducida $M \to f(M)$ es un epimorfismo, luego $f(M)$ es de torsión (Corolario 2.9). Como $f(M) \leq N$ es de torsión, nos queda entonces que $f(M) \subseteq \mathrm{T}(N) = 0$, luego $f(M) = 0$. □

Nota 2.17 *De esto último podemos deducir que no hay R-módulos no nulos que sean de torsión y libres de torsión.*

Proposición 2.18 $Hom_R(Z,M) = 0$ *para todo R-módulo de torsión* $Z \Rightarrow M$ *es libre de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Sea i: $\mathrm{T}(M) \to M$ la inclusión, y por hipótesis, $i = 0$. Lo que implica que $\mathrm{T}(M) = 0$, es decir, M es libre de torsión. □

Proposición 2.19 $Hom_R(M,N) = 0$ *para todo R-módulo libre de torsión* $N \Rightarrow M$ *es de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Sea p: $M \to M/\mathrm{T}(M)$ la proyección habitual, por hipótesis, $p = 0$. Así que $\mathrm{Ker}(p) = M$, por lo que $\mathrm{T}(M) = M$, es decir, M es de torsión. □

Sea ahora la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Z \longrightarrow 0 \tag{1}$$

Proposición 2.20 *Dada la sucesión exacta corta (1), si N y Z son de torsión, entonces X también es de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Podemos suponer que $N \leq X$, $Z = X/N$, j es la inclusión y que f es la proyección canónica. Vamos a ver que para cualquier $x \in X$ y para toda sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en R, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $xr_1 ... r_{n_2} = 0$.

Sea $x \in X$ y sea (r_n) una sucesión en R. Como $f(x) \in Z$ y Z es de torsión por hipótesis, sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x)r_1...r_{n_0} = 0$. Por ser $f(x)r_1...r_{n_0} = f(xr_1...r_{n_0}) = 0$ y ser la sucesión exacta, $xr_1...r_{n_0} \in \mathrm{Im}(j)$. Pero j es un monomorfismo, así que podemos considerar $N = j(N)$, obteniendo así que $xr_1...r_{n_0} \in N$, que sabemos por hipótesis que es de torsión, por lo que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $xr_1...r_{n_0}r_{n_0+1}...r_{n_1} = 0$. Obteniendo así que X es de torsión, como queríamos probar. □

Proposición 2.21 *Sean $\{M_i\}_{i \in I}$ R-módulos libres de torsión donde I= $\{1,...,n\}$. Entonces $\prod_{i \in I} M_i$ es libre de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Sea Z un R-módulo de torsión. Tenemos entonces que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(Z,M_i) = 0$ para todo $i \in I$ (Proposición 2.16). Pero sabemos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(Z,\prod_{i \in I}M_i) \cong \prod_{i \in I}\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(Z,M_i)$, por lo que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(Z,\prod_{i \in I}M_i) = 0$, lo que implica que $\prod_{i \in I}M_i$ es libre de torsión (Proposición 2.18). □

Proposición 2.22 *Sean $\{M_i\}_{i \in I}$ R-módulos libres de torsión donde I= $\{1,...,n\}$. Entonces $\oplus_{i \in I} M_i$ es libre de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Sabemos que $\prod_{i \in I}M_i$ es libre de torsión (Proposición 2.21). Basta considerar la inclusión i: $\oplus_{i \in I} M_i \hookrightarrow \prod_{i \in I}M_i$ y utilizar el Corolario 2.10 para obtener que $\oplus_{i \in I} M_i$ es libre de torsión. □

Proposición 2.23 *Sean $\{M_i\}_{i \in I}$ R-módulos libres de torsión donde I= $\{1,...,n\}$. Tenemos entonces que $T(\oplus_{i \in I}M_i) = \oplus_{i \in I}T(M_i)$*

<u>*Dem*</u>

Vamos a probar la doble inclusión. Primeramente veamos que $\oplus_{i \in I}\mathrm{T}(M_i)$ es de torsión. Sea X un R-módulo libre de torsión, y consideremos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(\oplus_{i \in I}\mathrm{T}(M_i),X) \cong \prod_{i \in I}\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(\mathrm{T}(M_i),X) = 0$, por la Proposición 2.16. Quedándonos entonces que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(\oplus_{i \in I}\mathrm{T}(M_i),X) = 0$, por lo que, utilizando la Proposición 2.19, tenemos que $\oplus_{i \in I}\mathrm{T}(M_i)$ es de torsión, obteniendo así que $\oplus_{i \in I}\mathrm{T}(M_i) \subseteq \mathrm{T}(\oplus_{i \in I}M_i)$.

Veamos la otra inclusión. Tenemos que $M_i/\mathrm{T}(M_i)$ es libre de torsión para todo $i \in I$ (Proposición 2.6). Luego $\oplus_{i \in I} M_i/\mathrm{T}(M_i)$ es libre de torsión (Proposición 2.22). Como $\oplus_{i \in I} M_i/\mathrm{T}(M_i) \cong \oplus_{i \in I} M_i/\oplus_{i \in I} \mathrm{T}(M_i)$, tenemos que $\oplus_{i \in I}M_i/\oplus_{i \in I} \mathrm{T}(M_i)$ es también libre de torsión, o lo que es lo mismo, $\oplus_{i \in I} \mathrm{T}(M_i)$ es saturado en $\oplus_{i \in I} M_i$, lo que implica que $\mathrm{T}(\oplus_{i \in I}M_i) \subseteq \oplus_{i \in I}\mathrm{T}(M_i)$. □

Proposición 2.24 *Dada la sucesión exacta corta (1), si N y Z son libres de torsión, entonces X también es libre de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Podemos suponer que $N \leq X$ y que $Z = X/N$. Por ser N y Z libres de torsión, $\mathrm{T}(N) = \mathrm{T}(Z) = 0$. Usando esto y la Proposición 2.7, tenemos que $\mathrm{T}(N) = N \cap \mathrm{T}(X)$ $= 0$. Por ser la sucesión exacta corta, $\mathrm{Ker}(f) = N$. Como $\mathrm{Ker}(f) = N$ y $N \cap \mathrm{T}(X) =$ 0, tenemos que $\alpha := f|_{\mathrm{T(X)}}$: $\mathrm{T}(X) \to Z$ es un monomorfismo. Al ser $\mathrm{T}(X)$ de torsión y Z libre de torsión, basta usar la Proposición 2.16 para obtener que $\alpha = 0$. Lo que implica que $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{T}(X) = 0$, por lo que X es libre de torsión. □

Proposición 2.25 *Dada la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow M/N \longrightarrow 0$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow T(N) \longrightarrow T(M) \longrightarrow T(M/N)$$

es exacta.

<u>*Dem*</u>

Sean los homomorfismos f_{t} y g_{t} las restricciones de f sobre $\mathrm{T}(N)$ y g sobre $\mathrm{T}(M)$ respectivamente (Proposición 2.8) e i_{N}, i_{M}, $i_{\mathrm{M/N}}$ inclusiones. Nos queda entonces el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(N) \arrow[r, "f_{\mathrm{t}}"] \arrow[d, "i_{\mathrm{N}}"] & T(M) \arrow[r, "g_{\mathrm{t}}"] \arrow[d, "i_{\mathrm{M}}"] & T(M/N) \arrow[d, "i_{\mathrm{M/L}}"] & \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M/N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Para ver que la sucesión es exacta por la izquierda, tenemos que ver

- f_{t} es un monomorfismo.
- $\mathrm{Im}(f_{\mathrm{t}}) = \mathrm{Ker}(g_{\mathrm{t}})$.

Como $i_{\mathrm{M}} \circ f_{\mathrm{t}} = f \circ i_{\mathrm{N}}$ es un monomorfismo, pues f y i_{N} son monomorfismos, tenemos que f_{t} es un monomorfismo.

Veamos la igualdad por doble inclusión.

Vamos a ver primero $\mathrm{Im}(f_{\mathrm{t}}) \subseteq \mathrm{Ker}(g_{\mathrm{t}})$. Sabemos que $0 = g \circ f \circ i_{\mathrm{N}} = g \circ i_{\mathrm{M}} \circ f_{\mathrm{t}} =$

$i_{\mathrm{M/L}} \circ g_{\mathrm{t}} \circ f_{\mathrm{t}}$. Como $i_{\mathrm{M/L}}$ es un monomorfismo, nos queda que $g_{\mathrm{t}} \circ f_{\mathrm{t}} = 0$, por lo que $\mathrm{Im}(f_{\mathrm{t}}) \subseteq \mathrm{Ker}(g_{\mathrm{t}})$.

Para la otra inclusión, basta tomar $x \in \mathrm{T}(M)$ tal que $x \in \mathrm{Ker}(g_{\mathrm{t}})$, por lo que $g_{\mathrm{t}}(x) = 0$, lo que implica que $g(x) = 0$ y $x \in N = f(N)$. Usando ahora la Proposición 2.7, tenemos que $x \in \mathrm{T}(N) = \mathrm{Im}(f_t)$. Así que $x = f_{\mathrm{t}}(u)$ para algún $u \in \mathrm{T}(N)$, es decir, $x \in \mathrm{Im}(f_{\mathrm{t}})$. $\square$

El funtor T: MOD-R $\rightarrow$ MOD-R, que actúa de la siguiente forma

$$MOD - R \xrightarrow{T} MOD - R$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, squiggly] & T(M) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "f"'] \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow" near end, shift right=6ex] & T(M) \arrow[d, "T(f)"] \\ N & T(N) \end{tikzcd}$$

conserva núcleos (donde $\mathrm{T}(f)$ es la restricción de f a $\mathrm{T}(M)$), como podemos deducir de la proposición anterior.

2.2. Envolturas inyectivas

Definición 2.26 *Se dice que un submódulo $M \leq E$ es* ***esencial*** *en E, si para todo submódulo $N \leq E$ tal que $M \cap N = 0$, tenemos que $N = 0$.*

Definición 2.27 *Se dice que el monomorfismo g: $N \rightarrow M$ es un* ***monomorfismo esencial*** *si para todo homomorfismo f: $M \rightarrow X$ se tiene que $f \circ g$ monomorfismo implica que f es monomorfismo.*

Proposición 2.28 *Sea $N \leq M$ un submódulo, i: $N \rightarrow M$ la inclusión. N es esencial en M $\Longleftrightarrow$ i es un monomorfismo esencial.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos que el submódulo $N \leq M$ es esencial y sea el diagrama conmutativo con $f \circ i$ monomorfismo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & M \arrow[d, "f"] \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

Veamos que f es también un monomorfismo. Tenemos que $\mathrm{Ker}(f \circ i) = \mathrm{Ker}(f) \cap N = 0$. Por ser N esencial, $\mathrm{Ker}(f) = 0$, es decir, f es un monomorfismo.

Supongamos ahora que i es un monomorfismo esencial, veamos que el submódulo $N \leq M$ es esencial. Sea el siguiente diagrama, donde $K \leq M$ y p es la proyección habitual

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & M \arrow[d, "p"] \\
 & & M/K
\end{tikzcd}$$

Supongamos que $N \cap K = 0$. Sabemos que $\mathrm{Ker}(p \circ i) = \mathrm{Ker}(p) \cap N = K \cap N = 0$, lo que implica que $p \circ i$ es un monomorfismo, lo que implica por hipótesis que p es un monomorfismo. Pero p monomorfismo implica que $\mathrm{Ker}(p) = K = 0$. Por lo que N es esencial. $\square$

Sabemos que todo R-módulo M tiene una inmersión en un R-módulo inyectivo [ANF, Proposition 18.6]. Esto nos lleva a definir el concepto de una inmersión "minimal" de M en un R-módulo inyectivo.

Definición 2.29 *Sea M un R-módulo, diremos que el par (E,i) es una* ***envoltura inyectiva*** *de M si E es inyectivo y el homomorfismo i: $M \to E$ es un monomorfismo esencial. Denotaremos* ***E(M)*** *a cualquier envoltura inyectiva de M.*

Proposición 2.30 *Sea $M \in$ MOD-R. Se tiene:*

1. *La envoltura inyectiva de M existe.*
2. *Si (E_1,j_1) y (E_2,j_2) son envolturas inyectivas de M, existe un isomorfismo g que hace conmutar el diagrama.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & E_1 \arrow[dl, "g"] \\ E_2 & \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>

Dicha prueba se puede encontrar en [ANF, Proposition 18.10] para anillos con 1, la equivalencia de categorías vista en el Teorema 1.9 permite trasladar la propiedad a la categoría MOD-R. $\square$

Notemos ahora que para cada R-módulo M, existe un homomorfismo canónico de R-módulos $\lambda_{\mathbf{M}}$: $M \to Hom_R(R,M)$. Este homomorfismo lleva $m \in M$ al homomorfismo $\lambda_{\mathrm{M}}(m)$: $R \to M$ dado por $\lambda_{\mathrm{M}}(m)(r) := mr$ (es decir, $\lambda_{\mathrm{M}}(m)$ es precisamente la multiplicación por la izquierda por m).

Veamos que el homomorfismo λ_{M} que acabamos de definir es efectivamente un homomorfismo de MOD-R.

Proposición 2.31 *Sea $\lambda_M : M \to Hom_{MOD\text{-}R}(R,M)$ que lleva $m \in M$ al homomorfismo $\lambda_M(m)$: $R \to M$ dado por $\lambda_M(m)(r) := mr$.*

1. *Cada $\lambda_M(m)$ es un homomorfismo de R-módulos (por la derecha).*

2. *$Hom_{MOD\text{-}R}(R,M)$ es un R-módulo por la derecha con la operación $(f \cdot r)(s) = f(rs)$, entonces cada λ_M es un homomorfismo de R-módulos (por la derecha).*

<u>Dem</u>

Veamos 1. Sea $m \in M$ y $r,s \in R$.

$\lambda_{\mathrm{M}}(m)(r + s) = m(r + s) = mr + ms = \lambda_{\mathrm{M}}(m)(r) + \lambda_{\mathrm{M}}(m)(s)$.

$\lambda_{\mathrm{M}}(m)(rs) = m(rs) = (mr)s = \lambda_{\mathrm{M}}(m)(r)\cdot s$.

Veamos 2. Sean $m,n \in M$ y $r,s \in R$.

$\lambda_{\mathrm{M}}(m + n)(r) = (m + n)r = mr + nr = \lambda_{\mathrm{M}}(m)(r) + \lambda_{\mathrm{M}}(n)(r)$.

Como $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD}\text{-}R}(R,M)$ es un R-módulo por la derecha, tenemos que $\lambda_{\mathrm{M}}(m)(rs) = (\lambda_{\mathrm{M}}(m)\cdot r)(s)$, por lo que $\lambda_{\mathrm{M}}(mr) = \lambda_{\mathrm{M}}(m)\cdot r$. $\square$

Definición 2.32 *Un R-módulo M es* ***T-inyectivo*** *cuando para toda sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} X \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

con Z de torsión y para todo homomorfismo f: $N \to M$, existe g: $X \to M$ tal que $g \circ i = f$.

A continuación, vamos a ver una serie de resultados acerca de R-módulos libres de torsión y T-inyectivos, que nos servirán para probar el Teorema 2.38, mediante el cual podemos introducir la categoría Mod-R como los objetos de la categoría MOD-R que son libres de torsión y T-inyectivos.

Proposición 2.33 *Sea M un R-módulo. Entonces: M es libre de torsión $\Longleftrightarrow$ el homomorfismo λ_M es inyectivo.*

<u>Dem</u>

Supongamos que M es libre de torsión, veamos que λ_{M} es inyectivo. Sea $m \in M$ tal que $\lambda_{\mathrm{M}}(m) = 0$. Pero $\lambda_{\mathrm{M}}(m) = 0$ si y solo si $mR = 0$. Por hipótesis, M es libre de torsión, y por la Proposición 2.5, $mR = 0 \Rightarrow m = 0$. Luego, $\lambda_{\mathrm{M}}(m) = 0$ implica que $m = 0$, por lo que λ_{M} es inyectivo.

Supongamos ahora que λ_{M} es inyectivo. Por lo tanto, $\lambda_{\mathrm{M}}(m) = 0 \Rightarrow m = 0$. Pero $mR = 0 \Rightarrow \lambda_{\mathrm{M}}(m) = 0 \Rightarrow m = 0$. Basta usar la Proposición 2.5 para obtener que M es libre de torsión. $\square$

Proposición 2.34 *Sea M un R-módulo. Si M es libre de torsión y T-inyectivo, entonces λ_M es un isomorfismo.*

<u>Dem</u>

Vamos a ver primero que λ_{M} es sobreyectiva. Supongamos que M es T-inyectivo y sea f: $R \to M$ un homomorfismo. Queremos probar que $f = \lambda_{\mathrm{M}}(m)$ para algún $m \in M$. Para ello, consideraremos el anillo $\widehat{R} := R \times \mathbb{Z}$ como R-módulo por la derecha (extensión de Dorroh de R) y su submódulo R, identificando los elementos $r \in R$ con los elementos de la forma $(r,0) \in \widehat{R}$. Está claro que el cociente $\widehat{R}/R$ es un R-módulo de torsión (ya que, dado $\overline{(r,n)} \in \widehat{R}/R$ y $r_1 \in R$, nos queda que $\overline{(r,n)}r_1 = \overline{(rr_1 + nr_1, 0)} = \overline{0}$, porque $rr_1 + nr_1 \in R$); entonces, puesto que M es T-inyectivo, existe g: $\widehat{R} \to M$ extendiendo a f. Sea $m = g(0,1) \in M$, para cada $r \in R$ se tiene que $f(r) = g((r,0)) =$

$g((0,1)r) = mr$, de donde deducimos que $f = \lambda_{\mathrm{M}}(m)$.

Para ver la inyectividad de λ_{M} basta usar la Proposición 2.33. $\square$

Proposición 2.35 *Sea M un R-módulo libre de torsión, E = E(M) una envoltura inyectiva y M^c la saturación de M en E. Entonces:*

- *E es libre de torsión.*
- *M^c es libre de torsión y es T-inyectivo.*

<u>*Dem*</u>

Por la Proposición 2.7, tenemos que $\mathrm{T}(M) = \mathrm{T}(E) \cap M$. Como M es libre de torsión, $\mathrm{T}(M) = 0$ y como M es esencial en E (Proposición 2.28), nos queda que $\mathrm{T}(E) = 0$, es decir, E es libre de torsión.

Ver que M^c es libre de torsión es sencillo por el Corolario 2.10, pues $M^c \leq E$ y acabamos de ver que E es libre de torsión en la primera parte de esta demostración. Veamos ahora que M^c es T-inyectivo. Dadas las dos sucesiones exactas cortas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "p"] & Z \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^c \arrow[r, "ker(\pi)"] & E \arrow[r, "\pi"] & E/M^c \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde π: $E \to E/M^c$ es la proyección, f es un homomorfismo cualquiera y Z es de torsión. Sabemos que, por ser E un R-módulo inyectivo y ser i un monomorfismo, existe g: $X \to E$ que verifica que $ker(\pi) \circ f = g \circ i$. Por esto, tenemos que $\pi \circ \mathrm{g} \circ i = \pi \circ \mathrm{ker}(\pi) \circ f = 0$ (ya que $\pi \circ \mathrm{ker}(\pi) = 0$). Además, p es conúcleo de i, (pues la sucesión de arriba es exacta corta por hipótesis), ya hemos dicho que $\pi \circ \mathrm{g} \circ i = 0$, es decir, $\pi \circ g$ anula a i, por ello, $\pi \circ g$ se factoriza por el conúcleo, lo que nos da la existencia de un homomorfismo h: $Z \to E/M^c$ tal que $\pi \circ g = h \circ p$. Quedándonos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M^c \arrow[r, "ker(\pi)"] & E \arrow[r, "\pi"] & E/M^c \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Pero, hemos dicho que h tiene dominio Z (que por hipótesis es de torsión) y codominio E/M^c (que sabemos que es libre de torsión, por la Proposición 2.15). Por la Proposición 2.16, tenemos que $h = 0$. Así que $\pi \circ g = h \circ p = 0$. Como $\pi \circ g = 0$, g anula a π, lo que implica que g se factoriza a través de $\ker(\pi)$, quedándonos que existe α: $X \to M^c$ tal que $g = \ker(\pi) \circ \alpha$. Por lo tanto, $g \circ i = \ker(\pi) \circ \alpha \circ i = \ker(\pi) \circ f$, como $\ker(\pi)$ es un monomorfismo, podemos cancelar a la izquierda quedándonos $\alpha \circ i = f$. La existencia de tal α implica que M^c es T-inyectivo, como queríamos probar. $\square$

Corolario 2.36 *Sea M libre de torsión, si E(M)/M es libre de torsión, entonces M es T-inyectivo.*

Dem

Como $E(M)/M$ es libre de torsión, por la unicidad de M^c (Proposición 2.15), nos queda que $M = M^c$, basta aplicar la Proposición 2.35 para obtener que M es T-inyectivo. $\square$

Proposición 2.37 *Sea M libre de torsión. Si λ_M es sobreyectiva, entonces M es T-inyectivo.*

Dem

Dadas las dos filas exactas, donde (E,j) es una envoltura inyectiva de M.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\lambda_M"] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\lambda_E"] & E/M \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom_{\mathrm{R}}(R, M) \arrow[r, "j_*"] & Hom_{\mathrm{R}}(R, E) \arrow[r, "p_*"] & Hom_{\mathrm{R}}(R, E/M) &
\end{tikzcd}$$

Sea $x \in E/M$ con $\lambda(x) = 0$, al ser p epimorfismo, sabemos que existe $u \in E$ tal que $p(u) = x$. Así que $\lambda_E(u) \in \mathrm{Hom_R}(R,E)$, como E es libre de torsión y T-inyectivo, por la Proposición 2.34, λ_E es un isomorfismo. Además, $p_*(\lambda_E(u)) = \lambda(p(u)) = \lambda(x) = 0$, luego $\lambda_E(u) \in Ker(p_*) = Im(j_*)$. Como λ_M es sobreyectiva, existe $a \in M$ tal que $j_*(\lambda_M(a)) = \lambda_E(u)$. Es decir, $\lambda_E(u) = \mathrm{j}_*(\lambda_M(a)) = \lambda_E(\mathrm{j}(a))$ para algún $a \in M$. Al ser λ_E un isomorfismo, nos queda que $u = j(a)$, pero $x = p(u) = p(j(a)) = 0$. Por lo que λ es un monomorfismo. Por la Proposición 2.33, E/M es libre de torsión, y aplicando el Corolario 2.36, obtenemos que M es T-inyectivo. $\square$

Con todos los resultados anteriores, estamos en condiciones de probar el siguiente Teorema, que nos permite identificar los R-módulos M libres de torsión y T-inyectivos con los isomorfismos λ_M.

Teorema 2.38 *Dado un R-módulo M, λ_M es un isomorfismo $\Longleftrightarrow$ M es libre de torsión y T-inyectivo.*

<u>*Dem*</u>
La implicación hacia la izquierda es la Proposición 2.34.
El recíproco es consecuencia de las Proposiciones 2.33 y 2.37. □

2.3. Los funtores de inclusión y de localización

Vamos a definir los funtores de inclusión y de localización, que nos llevan de Mod-R a MOD-R y de MOD-R a Mod-R respectivamente. Donde Mod-R es la categoría de R-módulos por la derecha cuyos objetos son los R-módulos de MOD-R que son libres de torsión y T-inyectivos, y cuyos homomorfismos son los homomorfismos de R-módulos por la derecha de MOD-R entre R-módulos libres de torsión y T-inyectivos.

Salvo que se indique expresamente lo contrario, durante este trabajo consideraremos todos los objetos de Mod-R como R-módulos por la derecha.

Definición 2.39 *Por definición, $M \in Ob(Mod\text{-}R) \Longleftrightarrow \lambda_M$ es un isomorfismo. Diremos entonces que M es un R-módulo* ***cerrado****.*

Proposición 2.40 *M es un R-módulo por la derecha cerrado $\Longleftrightarrow$ M es libre de torsión y T-inyectivo.*

<u>*Dem*</u>
Se deduce de la Definición 2.39 y del Teorema 2.38. □

2.3.1. El funtor de inclusión

Pasamos a continuación a definir **j**, el **funtor de inclusión**.

El funtor de inclusión, j: Mod-R $\rightarrow$ MOD-R actúa siendo la identidad en objetos, es decir, dado $M \in$ Ob(Mod-R), tenemos que j(M):= M. En homomorfismos, tenemos que, dado $N \in$ Ob(Mod-R), nos queda que $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-R}}(M,N) = \mathrm{Hom}_{\text{MOD-R}}(M,N)$. Por lo tanto, si $f \in \mathrm{Hom}_{\text{Mod-R}}(M,N)$, entonces j($f$):= f.

2.3.2. El funtor de localización

Vamos a definir ahora **L**, el **funtor de localización**. Antes de ello, observemos que:

Dado un R-módulo $M \in$ Ob(MOD-R)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] & \overline{M} \arrow[r] \arrow[d] & E \\ & \overline{M^c} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

donde $\overline{M} = M/\mathrm{T}(M)$, p es la proyección canónica, E la envoltura inyectiva de $\overline{M}$, es decir, $E = E(\overline{M})$ y $\overline{M^c}$ es la saturación de $\overline{M}$ en E. (Por cuestiones tipográficas, denotaremos la saturación de $\overline{M}$ en E, $\overline{M}^c$, como $\overline{M^c}$).

En la Proposición 2.35, hemos visto que $\overline{M^c}$ es libre de torsión y T-inyectivo, y por la Proposición 2.40, tenemos que $\overline{M^c} \in$ Ob(Mod-R).

Definimos entonces L(M):= $\overline{M^c}$. Aunque la envoltura inyectiva de un R-módulo no es única, esta asignación sí lo es, por el axioma fuerte de elección.

Lema 2.41 *Dado un homomorfismo $f \in Hom_{MOD\text{-}R}(M,N)$, existe un único homomorfismo $\overline{f}$: $\overline{M} \to \overline{N}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f"] & \overline{M} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ N \arrow[r, "p_2"] & \overline{N} \end{tikzcd}$$

donde los p_i son las proyecciones canónicas habituales.

<u>*Dem*</u>

Basta observar el siguiente diagrama, donde i_1 e i_2 son inclusiones y f' es la restricción de f a T(M), la cuál está bien definida por la Proposición 2.8.

$$\begin{tikzcd} T(M) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f"] & \overline{M} \arrow[d, "\overline{f}"] \\ T(N) \arrow[r, "i_2"] & N \arrow[r, "p_2"] & \overline{N} \end{tikzcd}$$

La existencia y unicidad de $\overline{f}$ viene dada porque p_1 y p_2 son los conúcleos de i_1 e i_2, respectivamente. □

Lema 2.42 *Dado un homomorfismo* $f \in Hom_{MOD\text{-}R}(M,N)$*, existe un homomorfismo* $g\colon E_1 \to E_2$ *tal que en el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f"] & \overline{M} \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "\overline{f}"] & \overline{M^c} \arrow[r, "j_1"] & E_1 \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "p_2"] & \overline{N} \arrow[r, "u_2"] & \overline{N^c} \arrow[r, "j_2"] & E_2 \end{tikzcd}$$

$g \circ h_1 \circ p_1 = h_2 \circ p_2 \circ f$, *donde* $h_i = j_i \circ u_i$ *para* $i = 1,2$. $E_1 = E(\overline{M})$, $\overline{M^c}$ *es la saturación de* $\overline{M}$ *en* E_1, $E_2 = E(\overline{N})$ *y* $\overline{N^c}$ *es la saturación de* $\overline{N}$ *en* E_2.

<u>Dem</u>

Tenemos que $j_1 \circ u_1$ es un monomorfismo y que E_2 es inyectivo, por la definición de R-módulo inyectivo, y por la existencia del homomorfismo $j_2 \circ u_2 \circ \overline{f}\colon \overline{M} \to E_2$, tenemos la existencia del homomorfismo $g\colon E_1 \to E_2$ que verifica la condición $g \circ h_1 = h_2 \circ \overline{f}$, que da lo que queríamos probar. □

Lema 2.43 *Dado un homomorfismo* $f \in Hom_{MOD\text{-}R}(M,N)$*, existe un homomorfismo* $g'\colon \overline{M^c} \to \overline{N^c}$ *que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "f"] & \overline{M} \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "\overline{f}"] & \overline{M^c} \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "g'"] & E_1 \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "p_2"] & \overline{N} \arrow[r, "u_2"] & \overline{N^c} \arrow[r, "j_2"] & E_2 \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>

Comenzaremos observando el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \overline{M} \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "\overline{f}"] & \overline{M^c} \arrow[r, "j_1"] & E_1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "g"] & E_1/\overline{M} \arrow[d, "\overline{g}"] \\ \overline{N} \arrow[r, "u_2"] & \overline{N^c} \arrow[r, "j_2"] & E_2 \arrow[r, "\pi_2"] & E_2/\overline{N} \end{tikzcd}$$

donde la existencia de g viene dada por el Lema 2.42, y la existencia de $\overline{g}$ que hace conmutar este diagrama viene dada porque π_1 y π_2 (proyecciones canónicas) son los conúcleos de $j_1 \circ u_1$ y $j_2 \circ u_2$, respectivamente.

Como sabemos que $\mathrm{T}(E_1/\overline{M}) = \overline{M}^c/\overline{M}$ y $\mathrm{T}(E_2/\overline{N}) = \overline{N}^c/\overline{N}$, y por la Proposición 2.8, $\overline{g}(\mathrm{T}(E_1/\overline{M})) \subseteq \mathrm{T}(E_2/\overline{N})$, nos queda que $\overline{g}(\overline{M}^c/\overline{M}) \subseteq \overline{N}^c/\overline{N}$, lo cuál implica que $g(\overline{M}^c) \subseteq \overline{N}^c$, teniendo así que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \overline{M^c} \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "g'"] & E_1 \arrow[d, "g"] \\ \overline{N^c} \arrow[r, "j_2"] & E_2 \end{tikzcd}$$

conmuta, donde g': $\overline{M^c} \to \overline{N^c}$ es la restricción de g sobre $\overline{M}^c$.

Para terminar la prueba, necesitamos ver que $g' \circ u_1 = u_2 \circ \overline{f}$. Ya hemos visto en el Lema 2.42 que $j_2 \circ g' \circ u_1 = j_2 \circ u_2 \circ \overline{f}$, al ser j_2 un monomorfismo, nos queda que $g' \circ u_1 = u_2 \circ \overline{f}$, como queríamos probar. □

Lema 2.44 *Dado un homomorfismo $f \in Hom_{MOD\text{-}R}(M,N)$, el homomorfismo g' que hace conmutar el siguiente diagrama es único.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u_1 \circ p_1"] \arrow[d, "f"] & \overline{M^c} \arrow[d, "g'"] \\ N \arrow[r, "u_2 \circ p_2"] & \overline{N^c} \end{tikzcd}$$

<u>Dem</u>

En el Lema 2.43, hemos definido g' como la restricción de g sobre $\overline{M^c}$, pero el homomorfismo g no tiene por qué ser único. Vamos a ver que, dado f: $M \to N$, el homomorfismo g' que hace conmutar el diagrama de la hipótesis no depende del homorfismo g.

Supongamos que existen dos homomorfismos, g', g": $\overline{M^c} \to \overline{N^c}$ que hacen conmutar el diagrama del enunciado, es decir,

$$g' \circ u_1 \circ p_1 = u_2 \circ p_2 \circ f$$
$$g'' \circ u_1 \circ p_1 = u_2 \circ p_2 \circ f$$

Restando ambas igualdades, nos queda el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u_1\circ p_1"] \arrow[d, "0"] & \overline{M^c} \arrow[r, "c_1"] \arrow[d, "g'-g''"'] & \overline{M^c}/\overline{M} \arrow[dl, "\alpha"] \\ N \arrow[r, "u_2\circ p_2"] & \overline{N^c} & \end{tikzcd}$$

donde c_1 es la proyección canónica. Tenemos por tanto que c_1 es el conúcleo de u_1. Por esto último sabemos de la existencia de un homomorfismo α: $\overline{M^c}/\overline{M} \to \overline{N^c}$ que hace conmutativo el anterior diagrama. Pero, $\overline{M^c}/\overline{M}$ es de torsión, por la Proposición 2.15, y $\overline{N^c}$ es libre de torsión. Sabemos que dicho homomorfismo ha de ser 0, por la Proposición 2.16, y como g' - g" = $\alpha\circ c_1$ = $0\circ c_1$, también tenemos que g' - g" = 0. Obteniendo por tanto que g' = g".

Con todo esto hemos probado que, dada f como la de la hipótesis, aunque "elijamos" homomorfismos distintos que verifiquen la condición del Lema 2.42, al restringirlos a $\overline{M^c}$ obtenemos el mismo homomorfismo g' que cumple las condiciones del Lema 2.43, por tanto, obtenemos que este homomorfismo g' es único. □

Después de todo esto, podemos definir como actúa el funtor L: MOD-R → Mod-R en homomorfismos. Sean M,N ∈ Ob(MOD-R), sea f: $M \to N$, sabemos que L(M) = $\overline{M}^c$ y L(N) = $\overline{N}^c$, definimos L(f): $\overline{M}^c \to \overline{N}^c$ como el único homomorfismo que hace conmutativo al siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \overline{M^c} \arrow[d, "L(f)"] \\ N \arrow[r] & \overline{N^c} \end{tikzcd}$$

Veamos que L es efectivamente un funtor.

Proposición 2.45 *Dados $f \in Hom_{MOD\text{-}R}(M,N)$, $g \in Hom_{MOD\text{-}R}(N,H)$, se verifica:*

1. *$L(g\circ f) = L(g)\circ L(f)$.*
2. *$L(1_M) = 1_{L(M)}$.*

<u>*Dem*</u>

1.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "g\circ f"] & \overline{M^c} \arrow[d, "L(g\circ f)"] \\ H \arrow[r] & \overline{H^c} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \overline{M^c} \arrow[d, "L(f)"] \\ N \arrow[r] & \overline{N^c} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \overline{N^c} \arrow[d, "L(g)"] \\ H \arrow[r] & \overline{H^c} \end{tikzcd}$$

Por definición, L($g\circ f$), L(f) y L(g) son los únicos homomorfismos que hacen conmutar los diagramas anteriores. Pero, componiendo los dos diagramas de la derecha, nos queda:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & \overline{M^c} \arrow[d, "L(f)"] \\ N \arrow[r] \arrow[d, "g"] & \overline{N^c} \arrow[d, "L(g)"] \\ H \arrow[r] & \overline{H^c} \end{tikzcd}$$

donde claramente este último diagrama es conmutativo al ser los diagramas de L(f) y L(g) conmutativos. Comparando este diagrama con el de L($g\circ f$), por la unicidad de L($g\circ f$), nos queda que L($g\circ f$) = L(g)∘L(f).

2.

Basta observar los siguientes diagramas, el de la izquierda es conmutativo por definición, y el de la derecha es obvio que es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathrm{M}}"] & \overline{M^c} \arrow[d, "L(1_{\mathrm{M}})"] \\ M \arrow[r] & \overline{M^c} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathrm{M}}"] & \overline{M^c} \arrow[d, "1_{\mathrm{L(M)}}"] \\ M \arrow[r] & \overline{M^c} \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de la definición de L, nos queda que L(1_{M}) = $1_{\mathrm{L(M)}}$. □

Vamos a ver ahora que L es un funtor aditivo.

Proposición 2.46 *Sean f_1,f_2 ∈ $Hom_{MOD\text{-}R}$(M,N), entonces L(f_1+f_2) = L(f_1) + L(f_2).*

<u>*Dem*</u>

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "f_1"] & \overline{M}^c \arrow[d, "L(f_1)"] \\ N \arrow[r, "\mu_2"] & \overline{N}^c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "f_2"] & \overline{M}^c \arrow[d, "L(f_2)"] \\ N \arrow[r, "\mu_2"] & \overline{N}^c \end{tikzcd}$$

Por la definición de L(f_1) y L(f_2), nos queda que son los únicos homomorfismos que hacen conmutar los diagramas anteriores, es decir, nos queda que:

$$\mathrm{L}(f_1)\circ\mu_1 = \mu_2\circ f_1 \qquad\qquad \mathrm{L}(f_2)\circ\mu_1 = \mu_2\circ f_2$$

Sumando las dos igualdades anteriores, obtenemos:
$(\mathrm{L}(f_1)+\mathrm{L}(f_2))\circ\mu_1 = \mu_2\circ f_1+\mu_2\circ f_2 = \mu_2\circ(f_1+f_2)$, pero, por la definición de L(f_1+f_2), sabemos que es la única que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "f_1+f_2"] & \overline{M}^c \arrow[d, "L(f_1+f_2)"] \\ N \arrow[r, "\mu_2"] & \overline{N}^c \end{tikzcd}$$

Por tanto nos queda que $\mathrm{L}(f_1+f_2) = \mathrm{L}(f_1)+ \mathrm{L}(f_2)$, como queríamos probar. □

Veamos ahora una propiedad sobre el funtor L que nos será de utilidad posteriormente.

Proposición 2.47 *Sea un R-módulo M, entonces L(M) = 0 si y solo si M es de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos primero que L(M) = 0, vamos a ver que M es de torsión. Como L(M) $= \overline{M}^c = 0$, al ser $\overline{M}$ un submódulo de $\overline{M}^c$, nos queda que $\overline{M} = 0$. Como $0 = \overline{M} = M/\mathrm{T}(M)$, resulta que $M = \mathrm{T}(M)$, es decir, M es de torsión.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que M es de torsión, vamos a ver que L(M) = 0. Como M es de torsión, $\overline{M} = M/\mathrm{T}(M) = 0$. Como, por la Proposición 2.15, $\overline{M}^c/\overline{M}$ es de torsión, nos queda que $\overline{M}^c/0 = \overline{M}^c$ es de torsión. Además, por la Proposición 2.35, $\overline{M}^c$ es libre de torsión. Obteniendo entonces que $\overline{M}^c$ es de torsión y libre de torsión. Pero el único módulo que puede ser simultáneamente de torsión y libre de torsión es el módulo 0. Luego $\overline{M}^c = 0$, o lo que es lo mismo L(M) = 0. □

2.3.3. Algunas propiedades sobre *R*-módulos cerrados

Dado $X \in \mathrm{Ob}(\text{MOD-}R)$, sabemos que $\mathrm{L}(X) = \overline{X}^c$ (la saturación de $\overline{X}$ en su envoltura inyectiva). Llamaremos el **homomorfismo canónico de $\boldsymbol{X}$** a la composición de la proyección $X \to \overline{X} = X/\mathrm{T}(X)$ seguido de la inmersión $\overline{X} \to \overline{X}^c$. Denotaremos el homomorfismo canónico de X como $\epsilon_{\mathbf{X}}\colon X \to \mathrm{L}(X)$.

Proposición 2.48 *Dado $X \in$ MOD-R, el homomorfismo canónico ϵ_X tiene núcleo y conúcleo de torsión (en MOD-R). Además, $\overline{X}$ es esencial en L(X).*

<u>*Dem*</u>

Por ser MOD-R una categoría abeliana, tenemos que todo homomorfismo (en particular ϵ_{X}) tiene núcleo y conúcleo. Veamos ahora que son de torsión.

Veamos primero que el núcleo de ϵ_{X} es de torsión. Sabemos que ϵ_{X} tiene núcleo. Hemos visto antes de esta Proposición que $\epsilon_{\mathrm{X}}\colon X \xrightarrow{p} \overline{X} = X/\mathrm{T}(X) \xrightarrow{i} \overline{X}^c$, donde p es la proyección habitual e i es la inclusión. Tenemos entonces que $\mathrm{Ker}(i \circ p) = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{T}(X)$, el cual es de torsión, obteniendo así lo que queríamos probar.

Vamos a ver ahora que el conúcleo de ϵ_{X} es de torsión. Sabemos que ϵ_{X} tiene conúcleo. Recordemos que $\epsilon_{\mathrm{X}}\colon X \xrightarrow{p} \overline{X} = X/\mathrm{T}(X) \xrightarrow{i} \overline{X}^c = \mathrm{L}(X)$, donde p es la proyección habitual e i es la inclusión. Por tanto, nos queda que $\mathrm{Im}(\epsilon_{\mathrm{X}}) = \mathrm{Im}(p) = \overline{X}$, pues la proyección es sobreyectiva. Además, sabemos que $\mathrm{Coker}(\epsilon_{\mathrm{X}}) = \overline{X}^c/\mathrm{Im}(\epsilon_{\mathrm{X}})$, o lo que es lo mismo, $\mathrm{Coker}(\epsilon_{\mathrm{X}}) = \overline{X}^c/\overline{X}$, que por la Proposición 2.15, tenemos que es de torsión.

Para probar que $\overline{X}$ es esencial en $\mathrm{L}(X)$, basta observar que $\overline{X} \leq \overline{X^c} \leq E$, donde E es una envoltura inyectiva de $\overline{X}$. Por ser E una envoltura inyectiva de $\overline{X}$, nos queda que $\overline{X}$ es esencial en E, por lo que para todo submódulo $N \leq E$, nos queda que si $\overline{X} \cap N = 0$, entonces $N = 0$. Además, como $\overline{X^c} \leq E$, nos queda que si tenemos un submódulo $Y \leq \overline{X^c}$, entonces $Y \leq E$, por lo que, al ser $\overline{X}$ esencial en E, nos queda que si $\overline{X} \cap Y = 0$, entonces $Y = 0$. Obteniendo así que $\overline{X}$ es esencial en $\overline{X^c} = \mathrm{L}(X)$. □

Como ya se ha visto, los objetos de la categoría Mod-R son los R-módulos por la derecha que son libres de torsión y T-inyectivos. Los conjuntos de homomorfismos $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-R}}(M,N)$ son exactamente los mismos conjuntos de homomorfismos $\mathrm{Hom}_{\text{MOD-R}}(M,N)$ de la categoría MOD-R.

Proposición 2.49 *Sea $N \in$ MOD-R y sea f: $N \to M$ un homomorfismo con M cerrado, de manera que f tiene núcleo y conúcleo de torsión. Entonces existe un isomorfismo Φ: $M \to L(N)$ que cumple $\Phi \circ f = \epsilon_N$.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos dados M,N, f como en el enunciado, y llamemos $C = \mathrm{Im}(f) \leq M$, de modo que f se factoriza como $f = i \circ f_1$ donde i: $C \to M$ es la inclusión y f_1: $N \to \mathrm{Im}(f)$ es la restricción de f en el codominio. Por hipótesis, $K = \mathrm{Ker}(f)$ es de torsión de modo que $\epsilon_{\mathrm{N}}(K) = 0$, ya que $\mathrm{L}(N)$ es libre de torsión (Proposición 2.16). Esto implica que existe h: $\mathrm{Im}(f) \to \mathrm{L}(N)$ que cumple $h \circ f_1 = \epsilon_{\mathrm{N}}$. Por ser $\mathrm{L}(N)$ T-inyectivo obtenemos a partir de h un homomorfismo ϕ: $M \to \mathrm{L}(N)$ tal que $\phi \circ i = h$, de donde se sigue que $\phi \circ f = \phi \circ i \circ f_1 = h \circ f_1 = \epsilon_{\mathrm{N}}$. Debemos ver que ϕ es isomorfismo.

Un razonamiento enteramente simétrico del anterior, usando ϵ_{N} en lugar de f e intercambiando los papeles de M y $\mathrm{L}(N)$ prueba que existe ψ: $\mathrm{L}(N) \to M$ con la propiedad $\psi \circ \epsilon_{\mathrm{N}} = f$. Se deduce pues $(1 - \phi \circ \psi) \circ \epsilon_{\mathrm{N}} = 0$. Esto implica que $(1 - \phi \circ \psi)$ se factoriza a través del conúcleo de ϵ_{N}. Pero como dicho conúcleo es de torsión por la Proposición 2.48, resultará $1 - \phi \circ \psi = 0$ y así $\phi \circ \psi = 1$. Repitiendo ahora el razonamiento a partir de la igualdad $(1 - \psi \circ \phi) \circ f = 0$ obtenemos $1 = \psi \circ \phi$, de modo que ϕ es un isomorfismo como se trataba de ver. □

Proposición 2.50 *Sea $N \leq M$ un submódulo con M cerrado. Se tiene que N es cerrado si y solo si es saturado en M. Así $L(M) = M$ si y solo si M es cerrado.*

<u>*Dem*</u>

Suponemos que N es cerrado. Su saturación en M será N^c, que es necesariamente libre de torsión, mientras que N^c/N es de torsión. En la sucesión exacta corta $0 \to N \xrightarrow{i} N^c \to N^c/N \to 0$ el tercer R-módulo es de torsión. Por eso, el homomorfismo 1_{N}: $N \to N$ se extiende a un homomorfismo h: $N^c \to N$ tal que $h \circ i = 1_{\mathrm{N}}$. Es decir, la sucesión exacta dada es escindida y $N^c \cong N \oplus N^c/N$. Pero como N^c es libre de torsión ha de ser $N^c/N = 0$, luego $N = N^c$.

Para ver el recíproco, supongamos que N es saturado en M. Sea N^c la saturación de N en M. Al ser M/N libre de torsión por hipótesis, y, por la unicidad de N^c (N^c es el único submódulo de M que verifica que M/N^c es libre de torsión, Proposición 2.15), nos queda que $N = N^c$. Por la Proposición 2.35, obtenemos que N es libre de torsión y T-inyectivo, como queríamos probar. □

2.3.4. La adjunción L $\dashv$ j

Vamos a ver a continuación que el funtor L es adjunto por la izquierda del funtor j. (L $\dashv$ j).

Proposición 2.51 *El funtor L es adjunto por la izquierda del funtor j.*

<u>*Dem*</u>

$$\begin{tikzcd} MOD-R \arrow[r, bend left, "L"] & Mod-R \arrow[l, bend left, "j"] \end{tikzcd}$$

Sean $M \in$ MOD-R y $N \in$ Mod-R.

$$Hom_{\text{Mod-}R}(L(M),N) \xrightarrow{\Phi} Hom_{\text{MOD-}R}(M, j(N))$$

$$f \rightsquigarrow f \circ \epsilon_{\mathrm{M}}$$

es decir, $\Phi(f) = f{\circ}\epsilon_{\mathrm{M}}$, donde ϵ_{M}: $M \to$ L(M) en MOD-R. La distributividad de la composición respecto de la suma prueba que cada Φ es un homomorfismo.

Veamos que Φ es biyectiva y que es natural en las dos variables.

<u>Φ es inyectiva</u>
Sean g,$h \in$ Hom$_{\text{Mod-}R}$(L(M),N), sabemos que $\Phi(g) = \Phi(h) \iff g{\circ}\epsilon_{\mathrm{M}} = h{\circ}\epsilon_{\mathrm{M}}$. Como N es cerrado, sabemos que L$(N) = N$, por la Proposición 2.50 y $\epsilon_{\mathrm{N}} = 1_{\mathrm{N}}$. Observemos los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "g\circ\epsilon_{\mathrm{M}}"'] & L(M) \arrow[d, "g"] \\ N \arrow[r, "1_{\mathrm{N}}"] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "h\circ\epsilon_{\mathrm{M}}"'] & L(M) \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "1_{\mathrm{N}}"] & N \end{tikzcd}$$

Como $g{\circ}\epsilon_{\mathrm{M}} = h{\circ}\epsilon_{\mathrm{M}}$, y el homomorfismo que hace conmutar el diagrama sabemos que es único, tenemos que $g = h$, luego Φ es inyectiva.

<u>Φ es sobreyectiva</u>
Sea f: $M \to \mathrm{j}(N)$ cualquiera y sea el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "f"'] & L(M) \arrow[d, "L(f)"] \\ N \arrow[r, "1_{\mathrm{N}}"] & N \end{tikzcd}$$

Por la definición de L, sabemos que el homomorfismo $h = \mathrm{L}(f)$ que hace conmutativo el diagrama existe y es único. Nos queda entonces que $\Phi(h) = h \circ \epsilon_{\mathrm{M}} = 1_{\mathrm{N}} \circ f = f$. Obteniendo así la sobreyectividad de Φ.

<u>Naturalidad en la 1ªvariable</u>
Si fijamos $N \Rightarrow$ Tenemos 2 funtores MOD-$R \to$ Sets.

$\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(?,\mathrm{j(N)})$: MOD-$R \to$ Sets

$$Hom_{\text{MOD-}R}(?, j(N)) : MOD - R \longrightarrow Sets$$

$$M \rightsquigarrow Hom_{\text{MOD-}R}(M, j(N))$$

$$MOD - R \xrightarrow{L} Mod - R \xrightarrow{Hom_{\text{Mod-}R}(L(?),N)} Sets$$

$$M \rightsquigarrow L(M) \rightsquigarrow Hom_{\text{Mod-}R}(L(M), N)$$

y tenemos una colección de homomorfismos en Sets.

Sea $\Phi_{\mathrm{N}} := (\Phi_{\mathrm{M,N}}: \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(\mathrm{L}(M),N) \to \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(M,\mathrm{j}(N))_{\mathrm{M} \in \mathrm{Ob(MOD\text{-}}R)}$

Sabemos que, naturalidad en la 1ª variable $\Longleftrightarrow \Phi_{\mathrm{N}}$ es una transformación natural.

Veamos que $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(\mathrm{L}(?),N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(?,\mathrm{j}(N))$.

Sea φ: $M_1 \to M_2$ homomorfismo en MOD-R.

Queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\text{Mod-}R}(L(M_1), N) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{M_1,N}}"] & Hom_{\text{MOD-}R}(M_1, j(N)) \\
Hom_{\text{Mod-}R}(L(M_2), N) \arrow[r, "\Phi_{\mathrm{M_2,N}}"] \arrow[u, "Hom_{\text{Mod-}R}(L(\varphi),N)"] & Hom_{\text{MOD-}R}(M_2, j(N)) \arrow[u, "Hom_{\text{MOD-}R}(\varphi,j(N))"']
\end{tikzcd}$$

Para verlo, debemos ver que el siguiente diagrama es conmutativo para cualquier f: $\mathrm{L(M_2)} \to N$

$$\begin{tikzcd}
f \circ L(\varphi) \arrow[r, rightsquigarrow] & f \circ L(\varphi) \circ \epsilon_{\mathrm{M_1}} \arrow[d, equal, "?"'] \\
 & f \circ \epsilon_{\mathrm{M_2}} \circ \varphi \\
f \arrow[uu, rightsquigarrow] \arrow[r, rightsquigarrow] & f \circ \epsilon_{\mathrm{M_2}} \arrow[u, rightsquigarrow]
\end{tikzcd}$$

Para ver que se da esa igualdad, basta comprobar que $\mathrm{L}(\varphi)\circ\epsilon_{\mathrm{M_1}} = \epsilon_{\mathrm{M_2}}\circ\varphi$. Pero, es obvio que esto se da mirando el siguiente diagrama (Por la definición de L).

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{M_1}}"] & M_2 \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{M_2}}"] \\
L(M_1) \arrow[r, "L(\varphi)"] & L(M_2)
\end{tikzcd}$$

Luego, hemos probado que el diagrama es conmutativo, y por tanto también lo son los anteriores. Nos queda entonces que Φ_{N} es una transformación natural. Ver la naturalidad en la segunda variable es análogo a lo que acabamos de ver. Con todo esto, queda probado que L es un funtor adjunto por la izquierda de j. □

2.4. La categoría Mod-*R* es abeliana

Como indica el título, en esta sección veremos una serie de resultados con el fin de probar que la categoría Mod-R es abeliana.

Para ello, veamos primero que es una categoría aditiva.

Proposición 2.52 *La categoría Mod-R es preaditiva.*

<u>*Dem*</u>

Dados $X, Y \in \mathrm{Ob}(\text{Mod-}R)$, vamos a ver que $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(X, Y)$ es un grupo abeliano. Para ello, basta ver los homomorfismos de X a Y de Mod-R como los mismos homomorfismos de X a Y en MOD-R (donde vemos X, Y como objetos de MOD-R), los cuales sabemos que forman un grupo abeliano con la suma, por ser MOD-R una categoría abeliana (en particular preaditiva).

Probaremos ahora que la composición de homomorfismos

$$A\colon \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(X,Z)$$
$$A(g,f) \rightsquigarrow g{\circ}f$$

es R-bilineal.

- $A(g_1{+}g_2,f) = (g_1{+}g_2){\circ}f = g_1{\circ}f + g_2{\circ}f = A(g_1,f) + A(g_2,f)$.
- $A(g,f_1{+}f_2) = g{\circ}(f_1{+}f_2) = g{\circ}f_1 + g{\circ}f_2 = A(g,f_1) + A(g,f_2)$.

□

Proposición 2.53 *La categoría Mod-R es aditiva.*

<u>*Dem*</u>

El R-módulo nulo 0 es objeto cero de la categoría.

Vamos a probar primero que la suma directa (finita) de R-módulos cerrados es cerrada.

La suma directa de R-módulos libres de torsión es libre de torsión, como hemos visto en la Proposición 2.22.

Veamos que la suma directa (finita) de R-módulos T-inyectivos es T-inyectiva. Sean M_j R-módulos T-inyectivos para todo $j \in J$, donde $J = \{1,\dots,n\}$. Sea la sucesión exacta corta $0 \to N \xrightarrow{i} X \to Z \to 0$, donde Z es un R-módulo de torsión, y sea $f\colon N \to \oplus_{j\in J} M_j$ un homomorfismo de R-módulos cualquiera.
Definimos los homomorfismos f_j con $j \in J$, de forma que, dado $\tilde{n} \in N$, $f(\tilde{n}) =$

$(f_1(\tilde{n}),f_2(\tilde{n}),...,f_n(\tilde{n}))$. Como cada M_j es T-inyectivo, sabemos que existe un homomorfismo de R-módulos g_j tal que $g_j \circ i = f_j$ para cada $j \in J$. Basta definir entonces el homomorfismo g: $X \to \oplus_{j \in J} M_j$ de la forma $g(x) := (g_1(x),g_2(x),...,g_n(x))$, obteniendo así que el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & X \arrow[r] \arrow[dl, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \\ & \oplus_{j \in J} M_j & & & \end{tikzcd}$$

Obteniendo así que la suma directa (finita) de R-módulos cerrados es un R-módulo cerrado.

Por lo que, dados $M_1,...,M_n \in$ Mod-R, como Mod-R es una subcategoría (que además es plena) de MOD-R, tenemos que $M_1,...,M_n \in$ MOD-R. Como sabemos que MOD-R es abeliana, (en particular aditiva) tenemos que MOD-R tiene coproductos finitos, luego, tomando un R-módulo $C \in$ Mod-$R \subseteq$ MOD-R, tenemos que existe un único homomorfismo φ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_1 \oplus ... \oplus M_n \arrow[dr, "\varphi"'] & M_k \arrow[l, "j_k"'] \arrow[d, "f_k"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Como M_k, $C \in$ Mod-R por hipótesis, hemos probado antes que la suma directa (finita) de R-módulos cerrados es cerrada y Mod-R es una subcategoría plena de MOD-R, nos queda que coproductos finitos en MOD-R implica que hay coproductos finitos en Mod-R, como queríamos probar. $\square$

Una categoría aditiva es abeliana cuando cumple las condiciones siguientes:

- Cada conjunto finito de objetos de la categoría tiene un producto y un coproducto.
- Cada homomorfismo de la categoría tiene un núcleo y un conúcleo (morfismos de la categoría).
- Cada monomorfismo es un núcleo y cada epimorfismo es un conúcleo.

Veremos cada una de estas propiedades para la categoría Mod-R.

Proposición 2.54 *Todo homomorfismo de Mod-R tiene núcleo. Concretamente, el núcleo en Mod-R de f: $M \to N$ es h: L(K) $\to M$, siendo i: $K \to M$ el núcleo en MOD-R y $h \circ \epsilon_K = i$.*

<u>*Dem*</u>

Sea f: $M \to N$ un homomorfismo con M,$N \in$ Mod-R. Considerando f como un homomorfismo de MOD-R, habrá un núcleo $K = \mathrm{Ker}(f)$ en el sentido usual. Consideremos el diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{K}}"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ & L(K) & & \end{tikzcd}$$

Usando la adjunción $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-R}}(\mathrm{L}(K),M) \cong \mathrm{Hom}_{\text{MOD-R}}(K,M)$, obtenemos un homomorfismo de Mod-R, h: $\mathrm{L}(K) \to M$ tal que $h \circ \epsilon_{\mathrm{K}} = i$. Como $0 = f \circ i = f \circ h \circ \epsilon_{\mathrm{K}} = (f \circ h) \circ \epsilon_{\mathrm{K}}$, tenemos que $f \circ h$ se factoriza a través del conúcleo de ϵ_{K}, digamos (C, q: $\mathrm{L}(K) \to C$). Es decir, existe g: $C \to N$ tal que $g \circ q = f \circ h$. Quedándonos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{K}}"] & M \arrow[r, "f"] & N \\ & L(K) \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "q"] & C \arrow[ur, "g"] & \end{tikzcd}$$

Pero C es de torsión por la Proposición 2.48, y N es libre de torsión, ya que $N \in$ Mod-R. Por la Proposición 2.16 , nos queda que $g = 0$. Por tanto, $f \circ h = 0$.

Para ver que h es núcleo de f falta ver que si t: $X \to M$ es un homomorfismo de Mod-R que verifica $f \circ t = 0$, entonces t se factoriza de modo único a través de h. Pero si $f \circ t = 0$ y considerando los homomorfismos en MOD-R, t se factoriza a través de K, por la definición de núcleo. Así, existe w: $X \to K$ de modo que $i \circ w = t$. Entonces $h \circ \epsilon_{\mathrm{K}} \circ w = t$, así que t se factoriza a través de h, como se trataba de ver.

La condición de que la factorización sea única se puede sustituir por ser h monomorfismo. Para ver que h es monomorfismo, basta usar la ecuación $h \circ \epsilon_{\mathrm{K}} = i$ y ser K esencial en $\mathrm{L}(K)$. Por la Proposición 2.28, nos queda que ϵ_{K} es un monomorfismo esencial y por tanto, h es monomorfismo en MOD-R, luego es inyectivo y monomorfismo en Mod-R. □

Veamos a continuación cuáles son los monomorfismos y los epimorfismos en la categoría Mod-R.

Proposición 2.55 *Sea f: $M \to N$ en Mod-R. f es monomorfismo si y solo si es monomorfismo considerado en MOD-R. f es epimorfismo si y solo si su conúcleo en MOD-R es de torsión.*

<u>*Dem*</u>

Vamos a probar primero que f es un monomorfismo si y solo si es un monomorfismo considerado en MOD-R.

Si f es monomorfismo en MOD-R es también monomorfismo en Mod-R, porque si es cancelativo por la izquierda en la categoría grande también será cancelativo por la izquierda cuando hay menos homomorfismos.

Veamos ahora el recíproco. Supongamos que f es un monomorfismo en Mod-R. Sabemos que f se puede descomponer de la siguiente forma como morfismos de MOD-R: $M \xrightarrow{f_1} N' \xrightarrow{f_2} N$, donde f_1 es un epimorfismo, f_2 es un monomorfismo, $K = \mathrm{Ker}(f)$ en MOD-R y $N' \cong M/K$. Por el Corolario 2.10, nos queda que M/K es libre de torsión. Al ser K saturado en M, que sabemos que es cerrado, nos queda que K es también cerrado (Proposición 2.50).

Por tanto, la inclusión i: $K \to M$ es un morfismo de Mod-R, al ser f monomorfismo en Mod-R, nos queda que $f \circ i = 0$ implica que $i = 0$. Por lo que nos queda que $0 = K = \mathrm{Ker}(f)$ (en MOD-R).

Veamos ahora que f es un epimorfismo si y solo si su conúcleo en MOD-R es de torsión.

Comenzaremos suponiendo que el conúcleo de un homomorfismo f en MOD-R es de torsión. Vamos a probar que f es un epimorfismo en Mod-R. Supongamos que tenemos p: $N \to C$ es el conúcleo de f en MOD-R y que C es de torsión. Dado g: $N \to Y$ en Mod-R tal que $g \circ f = 0$, se tiene que g ha de factorizarse a través de C, dando h: $C \to Y$ con $h \circ p = g$. Pero, por hipótesis, C es de torsión e Y es libre de torsión por ser $Y \in \mathrm{Ob}(\text{Mod-}R)$, por la Proposición 2.16, nos queda que $h = 0$, lo que implica que

$g = 0$. Esto prueba que $g \circ f = 0$ implica que $g = 0$, luego f es un epimorfismo en Mod-R.

Finalmente, veremos el recíproco por reducción al absurdo. Supongamos que $\epsilon_{\mathrm{C}} \neq 0$. Sabemos que $\epsilon_{\mathrm{C}} \circ p \circ f = 0$ y que $\epsilon_{\mathrm{C}} \circ p \neq 0$ (pues si $\epsilon_{\mathrm{C}} \circ p = 0$ entonces $\epsilon_{\mathrm{C}} = 0$). Obteniendo así que f no es cancelativo por la derecha, por lo que no es epimorfismo en Mod-R. □

Proposición 2.56 *Todo homomorfismo de Mod-R tiene conúcleo.*

Dem

Sea f: $M \to N$ un homomorfismo de Mod-R. Si lo consideramos en MOD-R, habrá un conúcleo c: $N \to C$. Tomemos ahora $h = \epsilon_{\mathrm{C}} \circ c$: $N \to \mathrm{L}(C)$, de modo que $h \circ f = \epsilon_{\mathrm{C}} \circ c \circ f = 0$.

Para ver que h es conúcleo de f falta ver que si t: $N \to X$ cumple $t \circ f = 0$, entonces t se factoriza de modo único a través de h. Sea, pues, t: $N \to X$ con $t \circ f = 0$. Considerando los homomorfismos en MOD-R, t se factoriza por c, así que tenemos u: $C \to X$ tal que $u \circ c = t$. Aplicando el funtor L obtenemos entonces $\mathrm{L}(u)$: $\mathrm{L}(C) \to \mathrm{L}(X) = X$ (al ser X cerrado, podemos suponer que $\epsilon_{\mathrm{X}} = 1_{\mathrm{X}}$) con $\mathrm{L}(u) \circ \epsilon_{\mathrm{C}} = \epsilon_{\mathrm{X}} \circ u$, por la naturalidad de la adjunción. Entonces, obtenemos que $u = {\epsilon_{\mathrm{X}}}^{-1} \circ \mathrm{L}(u) \circ \epsilon_{\mathrm{C}}$, por lo que $t = {\epsilon_{\mathrm{X}}}^{-1} \circ \mathrm{L}(u) \circ \epsilon_{\mathrm{C}} \circ c$.

Para ver esto más claro, veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{X}}"] & L(X) \\
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[ur, "t"] \arrow[r, "c"] & C \arrow[u, "u"'] \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{C}}"'] & L(C) \arrow[u, "L(u)"']
\end{tikzcd}$$

Veamos ahora que ${\epsilon_{\mathrm{X}}}^{-1} \circ \mathrm{L}(u)$ es el único homomorfismo tal que $t = {\epsilon_{\mathrm{X}}}^{-1} \circ \mathrm{L}(u) \circ h$. Lo veremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe otro homomorfismo φ: $\mathrm{L}(C) \to X$ tal que $t = \varphi \circ h$. Vamos a probar que h es un epimorfismo, y por tanto cancelable a la derecha, para llegar a que $t = {\epsilon_{\mathrm{X}}}^{-1} \circ \mathrm{L}(u) \circ h = \varphi \circ h$ implica que ${\epsilon_{\mathrm{X}}}^{-1} \circ \mathrm{L}(u) = \varphi$.

Hemos tomado c conúcleo de f, por lo que c es un epimorfismo en MOD-R. También, $h = \epsilon_{\mathrm{C}} \circ c$, por lo que tiene el mismo conúcleo (en MOD-R) que ϵ_{C}. Pero ϵ_{C} tiene conúcleo en MOD-R de torsión (Proposición 2.48), por lo que h tiene conúcleo de torsión. Por la Proposición 2.55, nos queda que h es un epimorfismo en Mod-R. Con lo que podemos concluir que ${\epsilon_{\mathrm{X}}}^{-1} \circ \mathrm{L}(u) = \varphi$. □

Proposición 2.57 *Todo monomorfismo de Mod-R es un núcleo y todo epimorfismo (de Mod-R) es un conúcleo.*

Dem

Sea f: $N \to M$ un monomorfismo de Mod-R. Por la Proposición 2.55 es un monomorfismo de MOD-R, así podemos suponer que $N \leq M$ es un submódulo saturado de M por la Proposición 2.50. Así, M/N es libre de torsión, de forma que el homomorfismo compuesto h: $M \to M/N \to \mathrm{L}(M/N)$ tiene núcleo (en MOD-R) igual a N. Puesto que $\mathrm{L}(N) = N$, la inmersión $N \to M$ es el núcleo en Mod-R de h, de acuerdo con la Proposición 2.54.

Sea ahora f: $M \to N$ un epimorfismo, así que f es la composición del epimorfismo (de MOD-R) f_1: $M \to T$ seguido de la inclusión $T \to N$, de modo que N/T es de torsión (por la Proposición 2.55). Llamemos K al núcleo (en MOD-R) de f, que es el mismo que el de f_1. De modo que $T = M/K$. Como $T \leq N$, con $N \in \mathrm{Ob}(\text{Mod-}R)$, nos queda que T es libre de torsión, o lo que es lo mismo, M/K es libre de torsión, teniendo así que K es saturado en M, aplicando ahora la Proposición 2.50, tenemos que K es cerrado, por lo que $\mathrm{L}(K) = K$; de este modo, la inclusión j: $K \to M$ es un homomorfismo de Mod-R (Además, j: $K \to M$ es el núcleo de f en Mod-R). Como hemos visto en la demostración de la Proposición 2.56, el conúcleo de j en Mod-R es la composición $M \to T \to \mathrm{L}(T)$. Pero, hemos visto antes que N/T es de torsión, basta ver la Proposición 2.49 para obtener que existe un isomorfismo $N \cong \mathrm{L}(T)$, de forma que el conúcleo de j es f. Esto prueba que f es conúcleo. □

Proposición 2.58 *Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de R-módulos por la derecha cerrados. Su producto (en el sentido usual) $\Pi_{i\in I}M_i$ es el producto de dichos objetos en la categoría Mod-R.*

Dem

El producto de R-módulos libres de torsión es libre de torsión (Proposición 2.21). Veamos que el producto de R-módulos T-inyectivos es T-inyectivo.

Dado α: $K \to \Pi_{i\in I}M_i$, debemos ver que existe h: $N \to \Pi_{i\in I}M_i$ tal que $h \circ j = \alpha$. Donde j: $K \to N$ es un monomorfismo.

Además, al ser todos los M_i T-inyectivos, nos queda que existen homomorfismos φ_i para todo $i \in I$, de forma que, dada la sucesión exacta corta $0 \to K \xrightarrow{j} N \to H \to 0$

con H de torsión y siendo los p_{i} las proyecciones habituales, nos queda que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\alpha"] & N \arrow[r] \arrow[ddl, "\varphi_{\mathrm{i}}"] & H \arrow[r] & 0 \\
 & \Pi_{i\in I}M_i \arrow[d, "p_{\mathrm{i}}"] & & & \\
 & M_{\mathrm{i}} & & &
\end{tikzcd}$$

conmuta, es decir, que $\varphi_{\mathrm{i}}\circ j = p_{\mathrm{i}}\circ\alpha$.

También sabemos que por tener producto en MOD-R, existe un homomorfismo h tal que el siguiente diagrama conmuta para todo $i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "\varphi_{\mathrm{i}}"] \\
\Pi_{i\in I}M_i \arrow[r, "p_{\mathrm{i}}"] & M_{\mathrm{i}}
\end{tikzcd}$$

Juntando todo lo anterior, tenemos que $p_{\mathrm{i}}\circ h\circ j = \varphi_{\mathrm{i}}\circ j = p_{\mathrm{i}}\circ\alpha$.

Para obtener $h\circ j = \alpha$ basta observar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[dl, "h\circ j"'] \arrow[d, "p_{\mathrm{i}}\circ\alpha"] \\
\Pi_{i\in I}M_i \arrow[r, "p_{\mathrm{i}}"] & M_{\mathrm{i}}
\end{tikzcd}$$

por la unicidad del homomorfismo que hace conmutar el diagrama, tenemos la igualdad buscada, $h\circ j = \alpha$.

Obteniendo así que $[\Pi_{i\in I}M_i,\ p_{\mathrm{i}}\colon \Pi_{i\in I}M_i \to M_{\mathrm{i}}]$ verifica la condición de producto para R-módulos de la categoría Mod-R. $\square$

Proposición 2.59 *Sea $\{M_i\}_{i\,\in\,I}$ una familia de R-módulos por la derecha cerrados. Sea $M = \oplus_{i\in I}M_i$ la suma directa (en el sentido usual) de dichos objetos de la categoría MOD-R, con los homomorfismos de la definición $j_i\colon M_i \to M$. Entonces $L(M)$ junto con los homomorfismos compuestos $\epsilon_M\circ j_i$ es el coproducto de la familia dada en la categoría Mod-R.*

<u>*Dem*</u>

Comencemos primero observando el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M_{\mathrm{i}} \arrow[r, "j_{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "f_{\mathrm{i}}"'] & M \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{M}}"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] & L(M) \arrow[dll, dotted, "\varphi"] \\ X & & \end{tikzcd}$$

donde $X \in$ Mod-R.

Veamos ahora la existencia de los homomorfismos ψ y φ.

Considerando los R-módulos M, X y $\{M_{\mathrm{i}}\}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ en MOD-R, por la existencia de coproductos en dicha categoría, (pues sabemos que es abeliana) tenemos que existe un único homomorfismo ψ: $M \rightarrow X$ tal que $\psi \circ j_{\mathrm{i}} = f_{\mathrm{i}}$ para todo $i \in I$.

Además, como el funtor L es adjunto por la izquierda del funtor j, tenemos que existe un isomorfismo $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-R}}(\mathrm{L}(M),X) \cong \mathrm{Hom}_{\text{MOD-R}}(M,\mathrm{j}(X))$. Por tanto, existe un único homomorfismo φ tal que $\mathrm{L}(\psi) = \varphi$.

Nos queda por tanto el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "\psi"'] & L(M) \arrow[d, "L(\psi)=\varphi"] \\ X \arrow[r, "\epsilon_{\mathrm{X}}"'] & L(X) \end{tikzcd}$$

donde $\mathrm{L}(X) = X$ y $\epsilon_{\mathrm{X}} = 1_{\mathrm{X}}$, por ser X cerrado. Por tanto, que el anterior diagrama sea conmutativo es lo mismo que decir que existe un único φ tal que $\varphi \circ \epsilon_{\mathrm{M}} = \psi$. Quedándonos por tanto que $\varphi \circ \epsilon_{\mathrm{M}} \circ j_{\mathrm{i}} = f_{\mathrm{i}}$ para todo $i \in I$. Si probamos que φ es única para la anterior composición, tendremos que es el coproducto.

Veamos entonces la unicidad de φ. Supongamos que existe φ': $\mathrm{L}(M) \rightarrow X$ tal que $\varphi' \circ \epsilon_{\mathrm{M}} \circ j_{\mathrm{i}} = f_{\mathrm{i}}$ para todo $i \in I$. Luego, el homomorfismo $\varphi' \circ \epsilon_{\mathrm{M}}$: $M \rightarrow X$ cumple que $\varphi' \circ \epsilon_{\mathrm{M}} = \psi$, por la unicidad de ψ. Por lo que tenemos que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\epsilon_M"] \arrow[d, "\psi"'] & L(M) \arrow[d, "\varphi'"] \\ X \arrow[r, "1_X"'] & X \end{tikzcd}$$

Pero, por la adjunción, el homomorfismo φ' que hace conmutar el anterior diagrama es único, por lo que obtenemos que $\varphi = \varphi$'. Obteniendo así que [L(M), $\epsilon_M \circ j_i$: $M_i \to$ L(M)] es coproducto en la categoría Mod-R, como queríamos probar. □

Estas propiedades muestran que Mod-R es una categoría con productos y coproductos. En particular, tiene productos y coproductos de familias finitas, lo que completaría la demostración de que es una categoría es abeliana.

Teorema 2.60 *La categoría Mod-R es abeliana.*

Dem

. □

2.5. Sucesiones exactas en Mod-*R*

Las sucesiones exactas cortas de Mod-R son

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

donde f es un monomorfismo, g un epimorfismo y $f = \ker(g)$ (o lo que es lo mismo, que $g = \mathrm{coker}(f)$). Si aplicamos el funtor de inclusión j, resultará que la sucesión

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

es exacta. Efectivamente, j es exacto por la izquierda porque es un adjunto por la derecha. El epimorfismo g puede no ser epimorfismo en MOD-R, solamente sabemos que tiene conúcleo de torsión.

El funtor L es exacto por la derecha por ser adjunto por la izquierda. Pero verifica algo más, también es exacto por la izquierda, obteniendo así que L es un funtor exacto.

Para probar esto, veamos antes el siguiente Lema.

Lema 2.61 *Si un R-módulo M es libre de torsión, entonces ϵ_M: $M \to L(M)$ es monomorfismo.*

<u>Dem</u>

Es obvio que $K = \mathrm{Ker}(\epsilon_{\mathrm{M}}) \subseteq M$, al ser M libre de torsión, nos queda que $\mathrm{T}(M) = 0$. Sabemos por la Proposición 2.48 que el núcleo de ϵ_{M} es de torsión, es decir, K es de torsión. Pero $K \subseteq M$ con $\mathrm{T}(M) = 0$. Luego basta tomar la inclusión i: $K \hookrightarrow M$ y utilizar la Proposición 2.8 para obtener que $\mathrm{T}(K) = 0$. Como el único módulo que es simultáneamente de torsión y libre de torsión es el módulo nulo, tenemos entonces que $K = 0$. Obteniendo así que ϵ_{M} es un monomorfismo. $\square$

Ahora sí, vamos a probar que el funtor L es exacto.

Proposición 2.62 *El funtor L es exacto.*

<u>Dem</u>

Puesto que es adjunto por la izquierda, tenemos que es exacto por la derecha. Basta entonces ver que conserva monomorfismos para probar que es exacto por la izquierda. Vamos a ver primero que conserva monomorfismos de R-módulos libres de torsión.

Sea f: $N \to M$ un monomorfismo, de modo que podemos suponer $N \leq M$, y N,M libres de torsión. $\mathrm{L}(f)$: $\mathrm{L}(N) \to \mathrm{L}(M)$ es el único homomorfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{N}}"] & M \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{M}}"] \\ L(N) \arrow[r, "L(f)"] & L(M) \end{tikzcd}$$

(2)

Pero, como ϵ_{N}, ϵ_{M} son monomorfismos en este caso (por el Lema previo), resulta que $\mathrm{L}(f) \circ \epsilon_{\mathrm{N}}$ es monomorfismo. Además, N es esencial en $\mathrm{L}(N)$, por la Proposición 2.48. Con todo esto, basta usar la Proposición 2.28 para obtener que $\mathrm{L}(f)$ es un monomorfismo.

En general, sea f: $N \to M$ monomorfismo de MOD-R. Tomando las proyecciones p_{N}: $N \to \overline{N}$ y la análoga para M, obtenemos un cuadrado conmutativo con f y $\overline{f}$: $\overline{N} \to \overline{M}$, como ya se ha visto en el Lema 2.41.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_{\mathrm{N}}"] & M \arrow[d, "p_{\mathrm{M}}"] \\
\overline{N} \arrow[r, "\overline{f}"] & \overline{M}
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, como se ha visto en el Lema 2.44, $\overline{f}$ determina el homomorfismo $\mathrm{L}(f)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\overline{N} \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[d] & \overline{M} \arrow[d] \\
L(N) \arrow[r, "L(f)"] & L(M)
\end{tikzcd}$$

Luego, el diagrama (2) se puede obtener "pegando" los dos diagramas anteriores. Si vemos que $\overline{f}$ es monomorfismo y aplicamos el razonamiento del principio, tendremos el resultado.

Para ello, supongamos que $\overline{f}(x+\mathrm{T}(N)) = 0$, de modo que $\overline{f} \circ p_{\mathrm{N}}(x) = 0 = p_{\mathrm{M}}(f(x))$. Esto implica que $f(x) \in \mathrm{T}(M)$. Considerando f como la inclusión $N \hookrightarrow M$, tenemos que $x \in \mathrm{T}(M) \cap N = \mathrm{T}(N)$ (Proposición 2.7). Así, $x+\mathrm{T}(N) = 0$ y $\overline{f}$ es monomorfismo. $\square$

Capítulo 3

La categoría $\boldsymbol{R}$-Mod

En lo que sigue R es un anillo general (no tiene por qué ser unitario) y R-MOD es la categoría de todos los R-módulos por la izquierda. Como ya vimos en el Teorema 1.9, R-MOD es equivalente a la categoría de R-módulos unitarios sobre la extensión de Dorroh de R, $\mathbb{Z}\times R$; así que R-MOD tiene todas las propiedades de las categorías de R-módulos. Durante este capítulo, salvo que se indique expresamente lo contrario, todos los R-módulos son R-módulos por la izquierda.

3.1. $\boldsymbol{R}$-módulos unitarios y evanescentes

Comenzaremos el capítulo viendo qué son los R-módulos unitarios y algunas de sus propiedades.

Definición 3.1 *Diremos que un R-módulo M es* ***unitario*** *si $RM = M$.*

Proposición 3.2 *La clase de los R-módulos unitarios es cerrada para cocientes, sumas directas y extensiones.*

<u>Dem</u>
Veamos primero que es cerrada para cocientes.
Sea M un R-módulo unitario y $N \leq M$ un submódulo. Sea entonces $\overline{m} \in M/N$, con $\overline{m} = m + N$, donde $m \in M$. Al ser M unitario, podemos escribir m de la forma: $m = \sum r_i m_i$, ($m_\mathrm{i} \in M$ y $r_\mathrm{i} \in R$) por lo tanto, $\overline{m} = \sum r_i m_i + N = \sum r_i(m_i + N) \in R{\cdot}M/N$, o lo que es lo mismo, M/N es unitario.

Veamos ahora que es cerrada para sumas directas.
Sea $\{M_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i}\,\in\,\mathrm{I}}$ una familia de R-módulos unitarios y sea $M = \oplus_{i\in I} M_\mathrm{i}$. Al ser cada M_i

unitario, tenemos que $RM_i = M_i$ para todo $i \in I$. Por lo que: $M = \oplus_{i\in I} M_i = \oplus_{i\in I} RM_i = R(\oplus_{i\in I} M_i) = RM$. Obteniendo así que la suma directa de R-módulos unitarios es un R-módulo unitario.

Veamos ahora que es cerrada para extensiones.
Sea la sucesión exacta corta $0 \to X \to M \to N \to 0$, donde X y N son R-módulos unitarios. Vamos a ver que M también es unitario.

Podemos considerar la sucesión exacta corta $0 \to X \hookrightarrow M \to M/X \to 0$. Sea $m \in M$ y $\overline{m} \in M/X$, es decir, $\overline{m} = m + X$. Al ser M/X unitario, nos queda que $\overline{m} = \sum r_i\overline{m}_i$ (donde $r_i \in R$ y $\overline{m}_i \in M/X$). Nos queda entonces que $m - \sum r_i m_i \in X$, que también es unitario, luego $m - \sum r_i m_i = \sum s_j x_j$ (donde $s_j \in R$ y $x_j \in X \subseteq M$). Despejando, $m = \sum r_i m_i + \sum s_j x_j$, obteniendo entonces que M también es unitario. □

Proposición 3.3 *Para cada R-módulo M existe un submódulo unitario $U(M) \leq M$ de manera que todo submódulo unitario de M es submódulo de $U(M)$.*

<u>*Dem*</u>

Dado M, consideramos el conjunto de todos los submódulos unitarios $\{L_s\}_{s\in S}$ de M. La suma de dichos submódulos $\sum_{s\in S} L_s$ es la imagen de un homomorfismo $\oplus_{s\in S} L_s \to M$, luego es unitario por la Proposición 3.2. Tomando $U(M) = \sum_{s\in S} L_s$, $U(M)$ es un submódulo unitario de M y contiene a todo submódulo unitario de M. □

De este modo, un R-módulo M es unitario cuando $M = U(M)$.

Definición 3.4 *Un R-módulo M se llama* ***evanescente*** *si $U(M) = 0$.*

Definición 3.5 *Diremos que un R-módulo M es* ***completamente de torsión*** *cuando $RM = 0$.*

Está claro que si M es completamente de torsión, entonces $U(M) = 0$ y M es evanescente. Sin embargo, el recíproco no se verifica. Un contraejemplo sería un anillo S que verifique $S^2 \neq 0$, pero $S^n = 0$ para algún $n > 2$.

Al igual que hemos hecho en el capítulo anterior para R-módulos por la derecha de torsión y libres de torsión. Vamos a ver a continuación algunos resultados sencillos sobre R-módulos unitarios y evanescentes que nos serán de utilidad en el trabajo.

Proposición 3.6 *Sea f: $M \to N$ un homomorfismo de R-módulos, entonces se cumple que f(U(M)) $\subseteq$ U(N).*

<u>Dem</u>

Sea f un homomorfismo de R-módulos y sea $x \in U(M)$. Vamos a probar que $f(x) \in U(N)$. Como $x \in U(M)$, podemos escribir $x = \sum r_i m_i$, donde cada $r_i \in R$ y $m_i \in M$. Aplicando f a esta expresión, nos queda f(x) $= f(\sum r_i m_i) = \sum r_i f(m_i)$. Luego $f(x) \in U(N)$. □

Proposición 3.7 *Sea M un R-módulo unitario y N un R-módulo evanescente. Entonces $Hom_{R\text{-}MOD}(M,N) = 0$.*

<u>Dem</u>

Sea f: $M \to N$ un homomorfismo de R-módulos. Por la Proposición 3.6, tenemos que $f(U(M)) \subseteq U(N)$. Pero, al ser M unitario, $U(M) = M$ y, al ser N evanescente, $U(N) = 0$. Por lo que nos queda $f(M) \subseteq 0$, es decir, $f = 0$. □

Proposición 3.8 *Sea N un R-módulo. Si $Hom_{R\text{-}MOD}(M,N) = 0$ para todo M unitario, entonces N es evanescente.*

<u>Dem</u>

Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que $Hom_{R\text{-MOD}}(M,N) = 0$ para todo M unitario y que N no es evanescente. Al no ser N evanescente, $U(N) \neq 0$. Sabemos que $U(N)$ es unitario, basta entonces tomar la inclusión $U(N) \hookrightarrow N$, que es no nula, pues hemos dicho que $U(N) \neq 0$, lo que es una contradicción con la hipótesis. □

Proposición 3.9 *La clase de los R-módulos evanescentes es cerrada para submódulos, productos y extensiones.*

<u>Dem</u>

Veamos que es cerrada para submódulos. Sea M un R-módulo evanescente, luego $\mathrm{U}(M) = 0$. Sea $N \leq M$ y sea el homomorfismo i: $N \hookrightarrow M$ la inclusión. Tenemos por la Proposición 3.6 que $i(\mathrm{U}(N)) \subseteq \mathrm{U}(M) = 0$, luego $i(\mathrm{U}(N)) = 0$, o lo que es lo mismo, $\mathrm{U}(N) = 0$, pues i es la inclusión.

Vamos a ver ahora que es cerrada para productos. Sea $\{M_\mathrm{i}\}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}$ una familia de R-módulos evanescentes, y sea X un R-módulo unitario. Tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R\text{-}MOD}}(X,\prod_{\mathrm{i} \in I} M_\mathrm{i}) \cong \prod_{\mathrm{i} \in I} \mathrm{Hom}_{\mathrm{R\text{-}MOD}}(X,M_\mathrm{i}) = 0$, por la Proposición 3.7. Basta usar la Proposición 3.8, para obtener que $\prod_{i \in I} M_i$ es evanescente.

Finalmente, vamos a probar que es cerrada para extensiones, es decir, dada la sucesión exacta corta

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} H \to 0$$

donde N y H son evanescentes, vamos a ver que M es evanescente.

Por la Proposición 3.6, nos queda que $g(\mathrm{U}(M)) \subseteq \mathrm{U}(H) = 0$, por ser H evanescente. Por lo que $\mathrm{U}(M) \subseteq \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f) \cong N$. Teniendo así que $\mathrm{U}(M)$ es un submódulo de un R-módulo evanescente, por lo que es también evanescente.

Hemos llegado a que $\mathrm{U}(M)$ es evanescente y unitario simultáneamente, por lo que no queda otra que $\mathrm{U}(M) = 0$, obteniendo así que M es evanescente, como queríamos probar. $\square$

Proposición 3.10 *Sea M un R-módulo. Entonces $M/U(M)$ es un R-módulo evanescente.*

<u>*Dem*</u>

Veamos esto por reducción al absurdo. Supongamos que tenemos un R-módulo M tal que $M/U(M)$ no es evanescente, por lo que $U(\frac{M}{U(M)}) = X/U(M) \neq 0$, con $U(M) \subseteq X \subseteq M$. Basta entonces considerar la sucesión exacta corta $0 \to U(M) \to X \to X/U(M) \to 0$. Al ser $U(M)$ y $X/U(M)$ unitarios, y ser la clase de R-módulos unitarios cerrada para extensiones (Proposición 3.2), obtenemos que X es unitario. Por lo que obtenemos $X \subseteq U(M)$, teniendo así la doble inclusión, es decir, $X = U(M)$, llegando así a una contradicción, pues hemos dicho que $X/U(M) \neq 0$. $\square$

Proposición 3.11 *Sea M un R-módulo. Si $Hom_{R\text{-}MOD}(M,N) = 0$ para todo N evanescente, entonces M es unitario.*

<u>*Dem*</u>

Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que $Hom_{R\text{-MOD}}(M,N) = 0$ para todo N evanescente y que M no es unitario. Al ser M no unitario, $U(M) \neq M$, por lo que $M/U(M)$ es no nulo.

Además, por la Proposición 3.10, $M/U(M)$ es un R-módulo evanescente. Basta entonces tomar la proyección habitual $M \to M/U(M)$, que es no nula, pues hemos dicho que

$M/U(M) \neq 0$, lo que es una contradicción con la hipótesis. $\square$

A continuación, vamos a definir el homomorfismo canónico que nos permitirá caracterizar una clase de R-módulos, a los R-módulos firmes, los cuales estudiaremos en breve en este trabajo. Definimos el homomorfismo $\mu_{\mathbf{M}}$ como sigue:

Sea un homomorfismo f: $R{\times}M \to M$, definido de la forma $f(r{,}m) = rm$ para todo $r \in R$, $m \in M$. Es rutinario probar que este homomorfismo es bilineal. Tenemos entonces que, por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único homomorfismo $\mu_{\mathbf{M}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} R \times M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R \otimes_{\mathrm{R}} M \arrow[dl, "\mu_{\mathrm{M}}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

de forma que $\mu_{\mathrm{M}}(r \otimes_{\mathrm{R}} m) = f(r{,}m) = rm$.

Veamos ahora unos resultados relacionados con esta aplicación.

Proposición 3.12 *Un R-módulo M es unitario $\Longleftrightarrow$ la aplicación μ_M es sobreyectiva.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos primero que M es un R-módulo unitario. Por lo tanto, $M = RM$, o lo que es lo mismo, dado $m \in M$, tenemos que $m = \sum r_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}} = \mu_{\mathrm{M}}(\sum r_{\mathrm{i}} \otimes_{\mathrm{R}} m_{\mathrm{i}})$ (para $r_{\mathrm{i}} \in R$ y $m_{\mathrm{i}} \in M$), obteniendo así que μ_{M} es sobreyectiva.

Para ver el recíproco, supongamos que μ_{M} es sobreyectiva. Tenemos entonces que dado $m \in M$, existen $r_{\mathrm{i}} \in R$ y $m_{\mathrm{i}} \in M$ tal que $\mu_{\mathrm{M}}(\sum r_{\mathrm{i}} \otimes_{\mathrm{R}} m_{\mathrm{i}}) = m$. Pero, por la definición de μ_{M}, $\mu_{\mathrm{M}}(\sum r_{\mathrm{i}} \otimes_{\mathrm{R}} m_{\mathrm{i}}) = \sum r_{\mathrm{i}} m_{\mathrm{i}}$. Por lo que obtenemos que $M = RM$. $\square$

Definición 3.13 *Diremos que un R-módulo M es **firme** si la aplicación μ_M es un isomorfismo.*

Vamos a ver un resultado que nos da una condición suficiente para saber cuando el homomorfismo μ_{M} es un monomorfismo. Antes de ello, necesitaremos ver el siguiente Lema.

Lema 3.14 *Dado un anillo R, la extensión de Dorroh $A = \mathbb{Z}\times R$, M un R-módulo por la derecha y N un R-módulo por la izquierda. Entonces $M\otimes_A N \cong M\otimes_R N$, dado por el isomorfismo $x\otimes y \rightsquigarrow x\otimes y$.*

<u>*Dem*</u>

Por la definición de $M\otimes_{\mathrm{A}}N$, $M\otimes_{\mathrm{A}}N = \mathbb{Z}^{(M\times N)}/H$, donde H es el subgrupo generado por:
$<x+x',y>$ - $<x,y>$ - $<x',y>$.
$<x,y+y'>$ - $<x,y>$ - $<x,y'>$.
$<xa,y>$ - $<x,ay>$.
Para x, $x' \in M$, y, $y'\in N$ y $a \in A$.

Del mismo modo, $M\otimes_{\mathrm{R}}N = \mathbb{Z}^{(M\times N)}/H'$, donde H' es el subgrupo generado por:
$<x+x',y>$ - $<x,y>$ - $<x',y>$.
$<x,y+y'>$ - $<x,y>$ - $<x,y'>$.
$<xr,y>$ - $<x,ry>$.
Para x, $x' \in M$, y, $y'\in N$ y $r \in R$.

Por tanto, si vemos que $H = H'$, tendremos que $M\otimes_{\mathrm{A}}N \cong M\otimes_{\mathrm{R}}N$. Veremos la igualdad por doble inclusión. Que $H' \subseteq H$ es obvio. Veremos con más detalle que $H \subseteq H'$.

Ver que $<x+x',y>$ - $<x,y>$ - $<x',y> \in H'$ y que $<x,y+y'>$ - $<x,y>$ - $<x,y'> \in H'$ es trivial. Prestaremos más atención a la prueba de que $<xa,y>$ - $<x,ay> \in H'$.

Identificaremos $a \in A$ con (n,r), donde $n \in \mathbb{Z}$ y $r \in R$. Luego, $<x(n,r),y> = <xn+xr,y> = <xn,y> + <xr,y>$.

Como $r \in R$, nos queda que $<xr,y> = <x,ry>$. También tenemos que $<xn,y> = <\overbrace{x+...+x}^{n},y> = \overbrace{<x,y>+...+<x,y>}^{n} = <x,ny>$.

Con todo esto, $<x(n,r),y> = <xn+xr,y> = <xn,y> + <xr,y> = <x,ny> + <x,ry> = <x,ny+ry> = <x,(n,r)y>$. Teniendo así que $<x(n,r),y>$ - $<x,(n,r)y> \in H'$. Concluimos entonces que $M\otimes_{\mathrm{A}}N \cong M\otimes_{\mathrm{R}}N$. $\square$

Sabemos que, para grupos abelianos, se tiene que ${}_R(A\otimes_{\mathrm{A}}M) \cong {}_RM$. Acabamos de ver que ${}_R(A\otimes_{\mathrm{A}}M) \cong {}_R(A\otimes_{\mathrm{R}}M)$. Por tanto, tenemos también que ${}_R(A\otimes_{\mathrm{R}}M) \cong {}_RM$. Este último isomorfismo nos será de gran utilidad para probar el siguiente resultado.

Proposición 3.15 *Si un R-módulo F es plano en R-MOD, entonces la aplicación μ_F es un monomorfismo.*

Dem

Sea la sucesión exacta corta $0 \to R \xrightarrow{i} {}_RA \xrightarrow{p} A/R \to 0$, (en R-MOD) donde $A = \mathbb{Z}\times R$ (la extensión de Dorroh), i es la inclusión y p la proyección canónica. Por ser F un R-módulo plano, tenemos que la fila superior del siguiente diagrama es una sucesión exacta corta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R\otimes_{\mathrm{R}}F \arrow[r, "i_{\mathrm{F}}"] \arrow[dr, "\mu_{\mathrm{F}}"'] & A\otimes_{\mathrm{R}}F \arrow[r, "p_{\mathrm{F}}"] \arrow[d, "\alpha"] & A/R\otimes_{\mathrm{R}}F \arrow[r] & 0 \\ & & F & & \end{tikzcd}$$

donde α es un isomorfismo (por el comentario hecho justo antes de este teorema). Además, dado $r \in R$ y $x \in F$, nos queda $r\otimes x \overset{i_{\mathrm{F}}}{\rightsquigarrow} (0,r)\otimes x \overset{\alpha}{\rightsquigarrow} (0,r)\cdot x = rx$, por lo que $\mu_{\mathrm{F}} = \alpha\circ i_{\mathrm{F}}$. Teniendo así que el triángulo conmuta.

Como i_{F} es un monomorfismo, α un isomorfismo y $\mu_{\mathrm{F}} = \alpha\circ i_{\mathrm{F}}$, nos queda que μ_{F} es también un monomorfismo, justo como queríamos probar. □

Corolario 3.16 *Todo R-módulo plano y unitario es firme.*

Dem

Es consecuencia directa de las Proposiciones 3.12 y 3.15. □

3.2. Caracterización de los *R*-módulos firmes

Vamos a ver a continuación una caracterización de los R-módulos firmes, para ello, introduciremos el siguiente concepto.

Definición 3.17 *Un R-módulo M es codivisible si, dada la sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X \xrightarrow{p} Z \longrightarrow 0$$

donde N es completamente de torsión, tenemos que para todo homomorfismo $f\colon M \to Z$ existe un homomorfismo $g\colon M \to X$ tal que $p\circ g = f$.

Teorema 3.18 *Un R-módulo M es firme $\Longleftrightarrow$ M es unitario y codivisible.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos que M es firme. Esto implica que μ_M es un isomorfismo. Ya hemos visto en la Proposición 3.12 que si μ_M es un epimorfismo, entonces M es un R-módulo unitario.

Vamos a ver ahora que M es codivisible. Tomaremos la siguiente sucesión exacta corta de R-MOD

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Z \longrightarrow 0$$

donde N es completamente de torsión; y un homomorfismo f: $M \to Z$. Aplicamos el funtor $R \otimes_R$- a la sucesión anterior y obtenemos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
 & R\otimes_R N \arrow[r] \arrow[d, "\mu_N"] & R\otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, "\mu_X"] & R\otimes_R Z \arrow[r] \arrow[d, "\mu_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "p"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como N es completamente de torsión, nos queda que $\mu_N = 0$, pues $RN = 0$. Por lo tanto, μ_X se factoriza por el conúcleo $R\otimes_R X \to R\otimes_R Z$, obteniendo así el homomorfismo h: $R\otimes_R Z \to X$ de manera que $\mu_X = h\circ(1\otimes p)$. Por la conmutatividad del diagrama, $\mu_Z\circ(1\otimes p) = p\circ\mu_X$ y se sigue que $\mu_Z\circ(1\otimes p) = p\circ h\circ(1\otimes p)$ y $\mu_Z = p\circ h$ por ser $(1\otimes p)$ un epimorfismo, ya que la fila de arriba del diagrama es exacta.

Por otro lado, el homomorfismo f: $M \to Z$ induce $1\otimes f$: $R\otimes_R M \to R\otimes_R Z$, así que obtenemos g: $M \to X$ como $g = h\circ(1\otimes f)\circ(\mu_M)^{-1}$, la existencia de esta inversa la podemos asegurar por la hipótesis (μ_M es un isomorfismo). Debemos probar que $f = p\circ g$. Pero $p\circ g = p\circ h\circ(1\otimes f)\circ(\mu_M)^{-1} = \mu_Z\circ(1\otimes f)\circ(\mu_M)^{-1}$. Como $\mu_Z\circ(1\otimes f) = f\circ\mu_M$, nos queda $p\circ g = \mu_Z\circ(1\otimes f)\circ(\mu_M)^{-1} = f\circ\mu_M\circ(\mu_M)^{-1} = f$, y obtenemos la igualdad que buscábamos. Hemos probado así que M es codivisible.

Vamos a probar el recíproco. Para ello, suponemos que M es un R-módulo codivisible y unitario. Por la Proposición 3.12, ya tenemos que μ_M es un epimorfismo, así que nos queda ver que es un monomorfismo. Sea $K = \mathrm{Ker}(\mu_M)$; dado $\sum r_i \otimes m_i \in K$, será $\sum r_i m_i = 0$. Entonces, para cada $r \in R$ tenemos $r(\sum r_i \otimes m_i) = r\otimes \sum r_i m_i = 0$, luego $RK = 0$ y K es completamente de torsión. Esto implica que la identidad 1_M se factoriza a través de $R \otimes M$, de forma que la sucesión $0 \to K \to R\otimes_R M \to M \to 0$ es escindida. Pero $R\otimes_R M$ es unitario: si $r \otimes m \in R\otimes_R M$, será $r\otimes m = r \otimes \sum r_i m_i = \sum r r_i \otimes m_i = r(\sum r_i \otimes m_i) \in R(R\otimes_R M)$, tenemos entonces que los generadores de $R\otimes_R M$ pertenecen a $U(R\otimes_R M)$. Como K es sumando directo de $R\otimes_R M$, K ha de ser unitario; pero $RK = 0$, así que $K = 0$ y μ_M es un monomorfismo. $\square$

Corolario 3.19 *Si $L \leq M$ es unitario y M es firme, entonces M/L es firme.*

<u>*Dem*</u>

Vamos a probar que M/L es firme viendo que es unitario y codivisible (Teorema 3.18). Por hipótesis, tenemos que L es unitario y M es firme (y por tanto unitario). Por la Proposición 3.2, tenemos que M/L es unitario. Veamos ahora que también es codivisible. Sea $0 \to N \to X \to Z \to 0$ una sucesión exacta corta con N completamente de torsión, sea f: $M/L \to Z$ y consideremos el diagrama conmutativo con filas exactas

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & M/L \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, "p"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde la existencia de g: $M \to X$ que cumple $p \circ g = f \circ \pi$ resulta al aplicar que M es firme al homomorfismo $f \circ \pi$: $M \to Z$. $p \circ g$ se anula en el submódulo L por la conmutatividad del cuadrado; por tanto $g(L) \subseteq \mathrm{Ker}(p) = N$. Obtenemos pues que la restricción de g dará un homomorfismo $L \to N$ que ha de ser 0 puesto que N es evanescente. Esto implica que $g(L) = 0$, luego g se factoriza a través del conúcleo M/L. Obtenemos así h: $M/L \to X$ tal que $g = h \circ \pi$. Ahora $p \circ h \circ \pi = p \circ g = f \circ \pi$. Como π es un epimorfismo, resulta que $p \circ h = f$, lo que muestra que M/L es codivisible. $\square$

3.3. Cubiertas planas

Definición 3.20 *Sea M un R-módulo y sea F un R-módulo plano (plano y unitario), decimos que (F,p) es una* ***cubierta plana*** *(**cubierta plana y unitaria**) de M si se verifica que:*

1. *Dado un R-módulo plano (plano unitario) F' y q: $F' \to M$, existe un homomorfismo ψ: $F' \to F$ que hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & F' \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[d, "q"] & \\ F \arrow[r, "p"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

2. *Para cualquier homomorfismo φ: $F \to F$, que verifica que el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "p"] & \\ F \arrow[r, "p"'] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

se tiene que φ es un isomorfismo.

Todo R-módulo tiene cubierta plana (ver [BBE]). Vamos a ver, que además también tiene cubierta plana unitaria.

Proposición 3.21 *Sea M un R-módulo unitario. Entonces M tiene una cubierta plana y unitaria sobreyectiva.*

Dem

Dicha prueba se puede encontrar en [GFJ, Corollary C.4]. □

Teorema 3.22 *Sea M un R-módulo. Entonces M tiene cubierta plana unitaria.*

Dem

Dado M, basta tomar la cubierta plana unitaria de $\mathrm{U}(M)$, (F,p). La cual existe, como hemos visto en la Proposición 3.21. Luego tenemos que $(F,i \circ p)$ es cubierta plana unitaria de M, donde i: $\mathrm{U}(M) \hookrightarrow M$ es la inclusión. □

3.4. El funtor D

Dado un R-módulo M, podemos construir el siguiente R-módulo firme: tómese primero p: $F \to \mathrm{U}(M)$ una cubierta plana y unitaria de $\mathrm{U}(M)$. Sea $K = \mathrm{Ker}(p)$, y tomemos $M' = F/\mathrm{U}(K)$. Como en el caso de las envolturas inyectivas, podemos fijar una cubierta unitaria plana de $\mathrm{U}(M)$ y entonces el R-módulo M' está determinado de modo único. Este R-módulo será $\mathrm{D}(M)$. Ver que $\mathrm{D}(M)$ es firme es sencillo, pues por el Corolario 3.16, tenemos que F es firme, y por el Corolario 3.19 nos queda que $F/\mathrm{U}(K) = \mathrm{D}(M)$ es firme.

Denotamos por ***R*-Mod** la subcategoría plena de R-MOD cuyos objetos son los módulos firmes. Debemos ver que podemos definir un funtor D: R-MOD $\to$ R-Mod que actúa de ese modo en objetos. Habrá ahora que ver cómo actúa sobre los homomorfismos.

Proposición 3.23 *Sea f: M → N un homomorfismo de R-MOD, y consideremos f₁: U(M) → U(N) su restricción a los submódulos unitarios (Proposición 3.6). Existe un homomorfismo g: D(M) → D(N) que hace conmutativo el diagrama*

$$\begin{tikzcd} D(M) \arrow[r, "g"] \arrow[d] & D(N) \arrow[d] \\ U(M) \arrow[r, "f_1"] & U(N) \end{tikzcd}$$

<u>*Dem*</u>

Usamos primero las cubiertas planas $F_1 \to U(M)$, $F_2 \to U(N)$ para obtener un cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d] & F_2 \arrow[d] \\ U(M) \arrow[r, "f_1"] & U(N) \end{tikzcd}$$

h se restringe a un homomorfismo entre los núcleos $K_1 \to K_2$ de las cubiertas, que son además sobreyectivas. Esa restricción se restringe a su vez a los submódulos unitarios $U(K_1)$, $U(K_2)$, dando un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U(K_1) \arrow[r, "h_1"] \arrow[d] & U(K_2) \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r, "h"] & F_2 \end{tikzcd}$$

y se induce así como de costumbre un homomorfismo sobre los cocientes $\mathrm{D}(M)$ y $\mathrm{D}(N)$, lo que da un nuevo cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "h"] \arrow[d] & F_2 \arrow[d] \\
D(M) \arrow[r, "h_2"] & D(N)
\end{tikzcd}$$

Obtenemos entonces el diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
& F_1/U(K_1) \arrow[d, equal] & F_1/K_1 \arrow[d, equal] \\
F_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h"] & D(M) \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & U(M) \arrow[d] \\
F_2 \arrow[r, "\beta"] & D(N) \arrow[r] \arrow[d, equal] & U(N) \arrow[d, equal] \\
& F_2/U(K_2) & F_2/K_2
\end{tikzcd}$$

en que el cuadrado de la izquierda es conmutativo; por ser α un epimorfismo, también el cuadrado de la derecha es conmutativo, lo que prueba el enunciado. □

Se deduce de aquí que, dado un homomorfismo f: $M \to N$ en R-Mod, existe un homomorfismo g: $\mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(N)$ de manera que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
D(M) \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
D(N) \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Debemos definir el homomorfismo canónico $\rho_{\mathbf{M}}$: $\mathrm{D}(M) \to M$. Suponemos elegida una cubierta plana unitaria de $U(M)$, lo que dará p: $F \to U(M) \hookrightarrow M$. Si $K = \mathrm{Ker}(p)$, tomamos $F/U(K)$ como $\mathrm{D}(M)$ y se obtiene el homomorfismo $\mathrm{D}(M) \to M$ que denotaremos como ρ_{M}. Se tiene:

Proposición 3.24 *El núcleo y el conúcleo de ρ_M son módulos evanescentes.*

<u>*Dem*</u>

Dada la cubierta plana unitaria p: $F \to M$ cuya imagen es $U(M)$(Teorema 3.22), tenemos el isomorfismo inducido $U(M) \cong F/K$ siendo K, como antes, el núcleo de p. El homomorfismo p admite entonces la factorización $F \to F/U(K) \to F/K \cong U(M) \hookrightarrow M$, y como $F/K \cong (F/U(K))/(K/U(K))$, el núcleo de ρ_{M}: $F/U(K) \to U(M) \cong F/K \hookrightarrow M$ será isomorfo a $K/U(K)$, que es evanescente por la Proposición 3.10.

Por otro lado, como la imagen de p es $U(M)$, también es $U(M)$ la imagen de ρ_{M}: $F/U(K) \to M$. Así que el conúcleo de ρ_{M} es isomorfo a $M/U(M)$, que de nuevo es evanescente (Proposición 3.10). □

Ya hemos visto que, dado un homomorfismo f: $M \to N$, existe un homomorfismo g: $\mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(N)$ tal que $f \circ \rho_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{N}} \circ g$. Vamos a ver ahora que g es único.

Proposición 3.25 *Sea f: M → N, el homomorfismo g: D(M) → D(N) que hace conmutar al diagrama*

$$\begin{tikzcd} D(M) \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "g"'] & M \arrow[d, "f"] \\ D(N) \arrow[r, "\rho_N"'] & N \end{tikzcd}$$

es único.

<u>*Dem*</u>

Vamos a verlo por reducción al absurdo. Supongamos que existen dos homomorfismos distintos, g', g": $\mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(N)$ tal que $f \circ \rho_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{N}} \circ g$' y $f \circ \rho_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{N}} \circ g$". Restando estas igualdades, obtenemos que $\rho_{\mathrm{N}} \circ (g$' - g") $= 0$. Nos queda entonces que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} & D(M) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{M}}"] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "g'-g''"'] & M \arrow[d, "f"] \\ K/U(K) \arrow[r, "Ker(\rho_{\mathrm{N}})"'] & D(N) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{N}}"'] & N \end{tikzcd}$$

ya que hemos visto en la demostración de la Proposición 3.24 que $K/U(K)$ es el núcleo de $\mathrm{D}(N)$, donde $K = \mathrm{Ker}(p)$, siendo p: $F \to U(N)$ una cubierta unitaria plana de $U(N)$.

Como $\rho_{\mathrm{N}}\circ(g' - g'') = 0$, podemos factorizar por el núcleo, obteniendo la existencia de un homomorfismo α: $\mathrm{D}(M) \to K/U(K)$ que hace conmutativo el anterior diagrama. Pero, por ser $\mathrm{D}(M)$ unitario y $K/U(K)$ evanescente, tenemos por la Proposición 3.7 que $\alpha = 0$. Entonces, como tenemos que $g' - g'' = \mathrm{Ker}(\rho_{\mathrm{N}})\circ\alpha$, nos queda que $g' - g'' = \mathrm{Ker}(\rho_{\mathrm{N}})\circ 0 = 0$. Luego $g' = g''$. Llegando así a una contradicción al suponer que existen dos homomorfismos distintos que hacen conmutar el diagrama del enunciado. □

Si el R-módulo M es firme, entonces ρ_{M} es un isomorfismo, basta tomar la cubierta plana unitaria de M, (F,p) (la cual hemos visto que siempre existe en el Teorema 3.22), considerar $K = \mathrm{Ker}(p)$ y tomar la sucesión exacta corta $0 \to K \to F \to \mathrm{U}(M) \to 0$. Al ser F plano unitario, nos queda que F es firme (Corolario 3.16). Como $M \cong F/K$, tenemos que F/K es firme, y por [GFJ, Proposición 2.19], obtenemos que K es unitario, o lo que es lo mismo, $K = \mathrm{U}(K)$. Obteniendo así que $\mathrm{D}(M) = F/\mathrm{U}(K) = F/K \cong M$, llegando así al isomorfismo deseado.

La propiedad anterior (de existencia y unicidad del homomorfismo $\mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(N)$ inducido por $M \to N$) permite definir $\mathrm{D}(f)$: $\mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(N)$ como el único homomorfismo tal que $f\circ\rho_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{N}}\circ\mathrm{D}(f)$.

Vamos a ver que, efectivamente, D es un funtor.

Proposición 3.26 *Dados $f \in Hom_{R\text{-}MOD}(M,N)$, $g \in Hom_{R\text{-}MOD}(N,H)$, se verifica:*

1. *$D(g\circ f) = D(g)\circ D(f)$.*
2. *$D(1_M) = 1_{D(M)}$.*

<u>Dem</u>

1.

$$\begin{tikzcd} D(M) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "D(g\circ f)"] & M \arrow[d, "g\circ f"] \\ D(H) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{H}}"] & H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D(M) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "D(f)"] & M \arrow[d, "f"] \\ D(N) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{N}}"] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D(N) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{N}}"] \arrow[d, "D(g)"] & N \arrow[d, "g"] \\ D(H) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{H}}"] & H \end{tikzcd}$$

Por definición, $\mathrm{D}(g\circ f)$, $\mathrm{D}(f)$ y $\mathrm{D}(g)$ son los únicos homomorfismos que hacen conmutar los diagramas anteriores. Pero, componiendo los dos diagramas de la derecha, nos queda:

$$\begin{tikzcd} D(M) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{M}}"] \arrow[d, "D(f)"] & M \arrow[d, "f"] \\ D(N) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{N}}"] \arrow[d, "D(g)"] & N \arrow[d, "g"] \\ H \arrow[r, "\rho_{\mathrm{H}}"] & \overline{H^c} \end{tikzcd}$$

donde claramente este último diagrama es conmutativo al ser los diagramas de D(f) y D(g) conmutativos. Comparando este diagrama con el de D(g∘f), por la unicidad de D(g∘f), nos queda que D(g∘f) = D(g)∘D(f).

2.

Basta observar los siguientes diagramas, el de la izquierda es conmutativo por definición, y el de la derecha es obvio que es conmutativo

$$\begin{tikzcd} D(M) \arrow[r] \arrow[d, "D(1_{\mathrm{M}})"] & M \arrow[d, "1_{\mathrm{M}}"] \\ D(M) \arrow[r] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D(M) \arrow[r] \arrow[d, "1_{\mathrm{D(M)}}"] & M \arrow[d, "1_{\mathrm{M}}"] \\ D(M) \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

Por la unicidad de la definición de D, nos queda que $\mathrm{D}(1_{\mathrm{M}}) = 1_{\mathrm{D(M)}}$. □

3.5. La adjunción D ⊢ j

Llamaremos j: R-Mod → R-MOD al funtor de inclusión. Por otro lado, tenemos D: R-MOD → R-Mod. Se verifica:

Proposición 3.27 *El funtor D es adjunto por la derecha del funtor j.*

<u>*Dem*</u>

Vamos a ver a continuación que el funtor D es adjunto por la derecha del funtor j. (D ⊢ j).

$$\begin{tikzcd} R-MOD \arrow[r, bend left, "D"] & R-Mod \arrow[l, bend left, "j"] \end{tikzcd}$$

Sean $M \in R$-Mod y $N \in R$-MOD.

$$\begin{tikzcd} Hom_{R\text{-Mod}}(M, D(N)) \arrow[r, "\tau"] & Hom_{R\text{-MOD}}(j(M), N) \\ f \arrow[r, squiggly] & \rho_{\mathrm{N}} \circ f \end{tikzcd}$$

es decir, $\tau(f) = \rho_{\mathrm{N}} \circ f$, donde ρ_{N}: $\mathrm{D}(N) \to N$ en R-MOD. La distributividad de la composición respecto de la suma prueba que cada τ es un homomorfismo.

Veamos que τ es biyectiva y que es natural en las dos variables.

<u>τ es inyectiva</u>
Sean f, g: $M \to \mathrm{D}(N)$ en R-Mod. Vamos a probar que si $\tau(f) = \tau(g)$, entonces $f = g$.

Si $\tau(f) = \tau(g)$, entonces $\rho_{\mathrm{N}} \circ f = \rho_{\mathrm{N}} \circ g$. Nos queda entonces que $\rho_{\mathrm{N}} \circ (f$ - $g) = 0$. Es decir, (f - g) anula (por la derecha) a ρ_{N}, luego se factoriza a través del núcleo de ρ_{N}, quedándonos el diagrama conmutativo siguiente

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f-g"] \arrow[d, "\alpha"] & D(N) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{N}}"] & N \\ K/U(K) \arrow[ur, "ker(\rho_{\mathrm{N}})"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $K = \mathrm{Ker}(p)$, siendo p: $F \to U(N)$ una cubierta unitaria plana de $U(N)$.

Por la Proposición 3.10, tenemos que $K/U(K)$ es evanescente. Además, como $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$, M es unitario. Por la Proposición 3.7, nos queda que $\alpha = 0$. Por lo tanto, f - $g = \mathrm{Ker}(\rho_{\mathrm{N}}) \circ \alpha = \mathrm{Ker}(\rho_{\mathrm{N}}) \circ 0 = 0$. Obteniendo así que $f = g$, y por consiguiente que τ es inyectiva.

<u>τ es sobreyectiva</u>
Sea ahora f: $M \to N$ considerada en R-MOD (con $M \in R$-Mod). Entonces, $\mathrm{D}(f)$: $\mathrm{D}(M) \to \mathrm{D}(N)$ verifica que $f \circ \rho_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{N}} \circ \mathrm{D}(f) = \tau(D(f))$. Como $\tau(\mathrm{D}(f) \circ {\rho_{\mathrm{M}}}^{-1}) = \rho_{\mathrm{N}} \circ \mathrm{D}(f) \circ {\rho_{\mathrm{M}}}^{-1} = f \circ \rho_{\mathrm{M}} \circ {\rho_{\mathrm{M}}}^{-1} = f$. Obtenemos que τ es sobreyectiva.

Naturalidad en la 1ªvariable
Si fijamos $N \Rightarrow$ Tenemos 2 funtores R-Mod $\to$ Sets.

Hom$_{R\text{-MOD}}$(j(?),N): R-Mod $\to$ Sets

$$\begin{tikzcd} Hom_{R\text{-MOD}}(j(?),N) : R - Mod \arrow[r] & Sets \\ M \arrow[r, squiggly] & Hom_{R\text{-MOD}}(j(M),N) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} R - Mod \arrow[r, "Hom_{R\text{-Mod}}(?,D(N))"] & Sets \\ M \arrow[r, squiggly] & Hom_{R\text{-Mod}}(M,D(N)) \end{tikzcd}$$

y tenemos una colección de homomorfismos en Sets.

Sea τ_{N}:= ($\tau_{\mathrm{M,N}}$: Hom$_{R\text{-Mod}}$(M,D(N)) $\to$ Hom$_{R\text{-MOD}}$(j(M),N)$_{\mathrm{M} \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})}$

Sabemos que, naturalidad en la 1ª variable $\Longleftrightarrow$ τ_{N} es una transformación natural.

Veamos que Hom$_{R\text{-Mod}}$(?,D(N)) $\xrightarrow{\sim}$ Hom$_{R\text{-MOD}}$(j(?),N).

Sea φ: $M_1 \to M_2$ homomorfismo en R-Mod.

Queremos ver que el siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} Hom_{R\text{-Mod}}(M_1, D(N)) \arrow[r, "\tau_{\mathrm{M_1,N}}"] & Hom_{R\text{-MOD}}(j(M_1), N) \\ Hom_{R\text{-Mod}}(M_2, D(N)) \arrow[r, "\tau_{\mathrm{M_2,N}}"] \arrow[u, "Hom_{\text{Mod-}R}(\varphi,D(N))"] & Hom_{R\text{-MOD}}(j(M_2), N) \arrow[u, "Hom_{\text{MOD-}R}(j(\varphi),N)"'] \end{tikzcd}$$

Para verlo, debemos ver que el siguiente diagrama es conmutativo para cualquier f: $M_2 \to$ D(N)

$$\begin{tikzcd}
f \circ \varphi \arrow[rr, rightsquigarrow] & & \rho_{\mathrm{N}} \circ f \circ \varphi \\
& & \rho_{\mathrm{N}} \circ f \circ \varphi \arrow[u, equal, "?"] \\
f \arrow[uu, rightsquigarrow] \arrow[rr, rightsquigarrow] & & \rho_{\mathrm{N}} \circ f \arrow[u, rightsquigarrow]
\end{tikzcd}$$

Obviamente es conmutativo, por lo que obtenemos así la naturalidad de la 1ªvariable.

<u>Naturalidad en la 2ªvariable</u>
La naturalidad de la segunda variable se ve de forma análoga a la primera. Por ello, la veremos con menos detalle.

Fijado $M \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$, y dada $\psi\colon N_1 \to N_2$, vamos a ver que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{R\text{-Mod}}(M, D(N_1)) \arrow[r, "\tau_{\mathrm{M,N_1}}"] \arrow[d, "Hom_{R\text{-Mod}}(M,D(\psi))"] & Hom_{R\text{-MOD}}(j(M), N_1) \arrow[d, "Hom_{R\text{-MOD}}(j(M),\psi)"] \\
Hom_{R\text{-Mod}}(M, D(N_2)) \arrow[r, "\tau_{\mathrm{M,N_2}}"] & Hom_{R\text{-MOD}}(j(M), N_2)
\end{tikzcd}$$

Para verlo, debemos ver que el siguiente diagrama es conmutativo para cualquier $f\colon M \to \mathrm{D}(N_1)$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[rr, rightsquigarrow] \arrow[dd, rightsquigarrow] & & \rho_{\mathrm{N_1}} \circ f \arrow[d, rightsquigarrow] \\
& & \psi \circ \rho_{\mathrm{N_1}} \circ f \arrow[d, equal, "?"] \\
D(\psi) \circ f \arrow[rr, rightsquigarrow] & & \rho_{\mathrm{N_2}} \circ D(\psi) \circ f
\end{tikzcd}$$

Para ver que se da esa igualdad, basta comprobar que $\psi \circ \rho_{\mathrm{N_1}} = \rho_{\mathrm{N_2}} \circ \mathrm{D}(\psi)$. Pero, es obvio que esto se da mirando el siguiente diagrama (Por la definición de D).

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \xrightarrow{\psi} & N_2 \\ \uparrow{\scriptstyle \rho_{N_1}} & & \uparrow{\scriptstyle \rho_{N_2}} \\ D(N_1) & \xrightarrow{D(\varphi)} & D(N_2) \end{array}$$

Luego, hemos probado que el diagrama es conmutativo, y por tanto también lo son los anteriores. Obteniendo así la naturalidad en la segunda variable.

Con todo esto, hemos probado que D es un funtor adjunto por la derecha de j. □

La adjunción nos permite de nuevo deducir propiedades del funtor D y de la inclusión j. Así, D es exacto por la izquierda y conserva productos, mientras que el funtor de inclusión j es exacto por la derecha y conserva coproductos. En particular, j conserva epimorfismos y coproductos finitos. Por lo tanto, si f: $M \to N$ es un epimorfismo en la categoría de módulos firmes R-Mod, también es epimorfismo en R-MOD, quedándonos que f es sobreyectiva. Luego los epimorfismos de R-Mod son los homomorfismos de R-módulos sobreyectivos. También, dados M_1,...,$M_{\rm n}$ R-módulos firmes, la inclusión aplicada a su coproducto en R-Mod dará el coproducto en R-MOD; es decir, la suma directa finita (usual) de módulos firmes es el coproducto en R-Mod, y lo mismo se tiene para el producto. Igualmente, la suma directa (incluso infinita) de módulos firmes es el coproducto en R-Mod. Como R-Mod es subcategoría plena de R-MOD, la composición de homomorfismos es distributiva respecto a la suma y la categoría R-Mod es aditiva; el objeto 0 es el módulo trivial. Los funtores j y D son también funtores aditivos.

3.6. Propiedades de la categoría *R*-Mod

Ya hemos visto que los epimorfismos son los homomorfismos sobreyectivos. Como j conserva conúcleos, también los conúcleos de R-Mod son los conúcleos tomados como R-módulos generales.

Proposición 3.28 *Un homomorfismo f: $M \to N$ en la categoría R-Mod es un monomorfismo si y solo si su núcleo K (en R-MOD) es evanescente.*

<u>*Dem*</u>

Sea f: $M \to N$ monomorfismo en R-Mod y supongamos que $K = \mathrm{Ker}(f)$ no es evanescente. Por lo que $U(K) \neq 0$. Tomemos el homomorfismo ρ: $\mathrm{D}(U(K)) \xrightarrow{\rho_{U(K)}} U(K) \hookrightarrow K \hookrightarrow M$. Como $\rho_{U(K)}$ es sobreyectivo, nos queda que ρ: $\mathrm{D}(U(K)) \to M$ es no nulo; sin embargo, $f \circ \rho = 0$, luego f no es un monomorfismo, contradicción con la hipótesis al suponer que K no es evanescente.

Para ver el recíproco, sea $K = \mathrm{Ker}(f)$ (en R-MOD) un R-módulo evanescente. Supongamos que existe un homomorfismo g: $X \to M$ en R-Mod tal que $f \circ g = 0$. Pasando a R-MOD, tenemos que g se puede factorizar a través de K, obteniendo que existe un homomorfismo α: $X \to K$ tal que $g = \ker(f) \circ \alpha$. Pero, al ser X firme (y por tanto unitario) y ser K evanescente por hipótesis, nos queda por la Proposición 3.7 que $\alpha = 0$, o lo que es lo mismo, $g = \ker(f) \circ \alpha = \ker(f) \circ 0 = 0$. Así que f es un monomorfismo. □

Proposición 3.29 *Sea f: $M \to N$ un homomorfismo de la categoría R-Mod, y sea u: $K \to M$ núcleo de f en R-MOD. Entonces $u \circ \rho_K$: D(K) $\to$ M es núcleo de f en la categoría R-Mod.*

<u>*Dem*</u>

Como $f \circ u = 0$, tenemos que $f \circ u \circ \rho_{\mathrm{K}} = 0$. Además, como u es un monomorfismo en R-MOD, el núcleo en dicha categoría de $u \circ \rho_{\mathrm{K}}$ es el núcleo de ρ_{K}, el cuál es evanescente, como ya hemos visto en la Proposición 3.24. Luego, por la Proposición 3.28, $u \circ \rho_{\mathrm{K}}$ es un monomorfismo.
Sea ahora g: $X \to M$ homomorfismo en R-Mod tal que $f \circ g = 0$. Debemos ver que g se factoriza a través de $u \circ \rho_{\mathrm{K}}$ para completar la demostración. Vamos a verlo. Por hipótesis, existe h: $X \to K$ en R-MOD tal que $u \circ h = g$ (pues u es el núcleo de f en R-MOD). Esto dará $\mathrm{D}(h)$: $\mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(K)$ con la propiedad $h \circ \rho_{\mathrm{X}} = \rho_{\mathrm{K}} \circ \mathrm{D}(h)$. Como ρ_{X} es un isomorfismo (pues $X \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$), podemos escribir $h = \rho_{\mathrm{K}} \circ \mathrm{D}(h) \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1}$. Entonces, $g = u \circ h = u \circ \rho_{\mathrm{K}} \circ \mathrm{D}(h) \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1} = (u \circ \rho_{\mathrm{K}}) \circ (\mathrm{D}(h) \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1})$, como queríamos probar. □

De este modo vemos que R-Mod es una categoría aditiva con núcleos y conúcleos. Veamos a continuación que también tiene productos.

Proposición 3.30 *Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia de R-módulos firmes, y sea M, junto con las proyecciones p_i: $M \to M_i$, su producto en R-MOD. Tomemos π_i: D(M) $\to M_i$ como los homomorfismos $\pi_i = p_i \circ \rho_M$. Entonces D(M) con los homomorfismos π_i es un producto de la familia $\{M_i\}_{i \in I}$ en la categoría R-Mod.*

<u>*Dem*</u>

Sea $X \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$ con los homomorfismos g_{i}: $X \to M_{\mathrm{i}}$. Queremos obtener un homomorfismo h: $X \to \mathrm{D}(M)$ que sea único con la propiedad $\pi_{\mathrm{i}} \circ h = g_{\mathrm{i}}$ para todo

índice $i \in I$. Considerando los objetos y los homomorfismos en R-MOD, sabemos que existe t: $X \to M$ único tal que $p_{\mathrm{i}} \circ t = g_{\mathrm{i}}$ para cada $i \in I$.
Aplicando el funtor D, obtenemos $\mathrm{D}(t)$: $\mathrm{D}(X) \to \mathrm{D}(M)$ tal que $\rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{D}(t) = t \circ \rho_{\mathrm{X}}$. Al ser $X \in \mathrm{Ob}(R\text{-Mod})$, ρ_{X} es un isomorfismo, y podemos hacer $t = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{D}(t) \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1}$. Tomemos ahora h: $X \to \mathrm{D}(M)$ como $h = \mathrm{D}(t) \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1}$. Veamos que h cumple las propiedades requeridas.
Para cualquier $i \in I$, $\pi_{\mathrm{i}} \circ h = p_{\mathrm{i}} \circ \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{D}(t) \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1} = p_{\mathrm{i}} \circ t \circ \rho_{\mathrm{X}} \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1} = p_{\mathrm{i}} \circ t = g_{\mathrm{i}}$, como queríamos ver. Falta comprobar la unicidad de h. Veámosla por reducción al absurdo. Supongamos que existe otro homomorfismo h': $X \to \mathrm{D}(M)$ que verifica $\pi_{\mathrm{i}} \circ h' = g_{\mathrm{i}}$. Entonces, $p_{\mathrm{i}} \circ \rho_{\mathrm{M}} \circ h' = g_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{i}} \circ t$. Así $\rho_{\mathrm{M}} \circ h' = t$ por la unicidad de t. Luego $\rho_{\mathrm{M}} \circ (h' \circ \rho_{\mathrm{X}}) = t \circ \rho_{\mathrm{X}}$. Por la definición del funtor D se tiene que $\mathrm{D}(t)$ es el único homomorfismo que cumple $t \circ \rho_{\mathrm{X}} = \rho_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{D}(t)$, luego $h' \circ \rho_{\mathrm{X}} = \mathrm{D}(t)$, quedándonos que $h' = \mathrm{D}(t) \circ \rho_{\mathrm{X}}{}^{-1} = h$, probando así la unicidad de h. □

En [GFJ, Capítulo 3] se ve que los monomorfismos en R-Mod no son necesariamente núcleos, lo que hace que la categoría R-Mod no sea, en general, abeliana. Sin embargo, cumple todas las demás condiciones y los epimorfismos son conúcleos como ya hemos visto. Allí se dan las condiciones para las que la categoría es abeliana, y condiciones para que un monomorfismo sea un núcleo, así como ejemplos de los diferentes casos.

Capítulo 4

Relaciones entre Mod-$\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R}$-Mod

4.1. Bimódulos y funtores

Definición 4.1 *Sean R, S anillos y M un grupo abeliano que tiene una estructura de R-módulo (general) por la izquierda y otra de S-módulo por la derecha. M es un* ***R-S-bimódulo*** *si se cumple*

$$(rx)s = r(xs)$$

para cada $x \in M$, $r \in R$ y $s \in S$.

Cuando M es un R-S-bimódulo, los grupos abelianos $\mathrm{Hom}_{\mathrm{R\text{-}MOD}}(M,X)$ para $X \in R$-MOD (respectivamente, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{MOD\text{-}S}}(M,Y)$ para $Y \in$ MOD-S) tienen estructura de S-módulo (general) por la izquierda (resp., de R-módulo por la derecha). Análogamente, $L\otimes_{\mathrm{R}}M$, $M\otimes_{\mathrm{S}}H$ tienen estructuras de S-módulo por la derecha, R-módulo por la izquierda respectivamente (para $L \in$ MOD-R, $H \in S$-MOD).

Las propiedades de adjunción de los funtores Hom y producto tensorial son conocidas para las categorías de módulos sobre anillos con identidad. Como las categorías R-MOD, MOD-S, etc. Son equivalentes a dichas categorías sobre anillos con uno, esas adjunciones siguen valiendo. De modo específico, dado un R-S-bimódulo M, se tiene:

1. El funtor $M\otimes_{\mathrm{S}}$-: S-MOD $\to$ R-MOD es adjunto por la izquierda del funtor $\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(M,\text{-})$: R-MOD $\to$ S-MOD.

2. El funtor -$\otimes_{\mathrm{R}}$M: MOD-R $\to$ MOD-S es adjunto por la izquierda del funtor $\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(M,\text{-})$: MOD-$S$ $\to$ MOD-R.

3. El funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\text{R-MOD}}(\text{-},M)$: R-MOD $\to$ MOD-S es adjunto por la izquierda (cuando lo tomamos como funtor covariante de R-MOD en la categoría opuesta de MOD-S) del funtor $\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(\text{-},M)$: $(\text{MOD-}S)^{op} \to R$-MOD.

Nosotros vamos a considerar una clase especial de bimódulos para las categorías de módulos sobre anillos generales.

Definición 4.2 *Dados los anillos R,S, un R-S-bimódulo M se llamará un* ***R-S-f-c-bimódulo*** *si es M_S cerrado y $_RM$ firme.*

Los funtores definidos por R-S-f-c-bimódulos tienen las siguientes propiedades.

Proposición 4.3 *Sea M un R-S-f-c-bimódulo. Entonces:*

1. *Para todo $Y \in$ MOD-S, se tiene que $\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(M,Y)$ es un R-módulo por la derecha cerrado.*

2. *Para todo $H \in$ S-MOD, se tiene que $M \otimes_S H$ es un R-módulo por la izquierda firme.*

3. *Para todo $X \in$ R-MOD, se tiene que $\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M)$ es un S-módulo por la derecha cerrado.*

<u>*Dem*</u>

Vamos a probar *1.* Consideramos el homomorfismo canónico de R-módulos por la derecha $\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(M,Y) \to \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(R_{\text{R}},\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(M,Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(R\otimes_{\text{R}}M,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(M,Y)$, y comprobamos que la composición da la identidad. Dado f: $M \to Y$, le corresponde el homomorfismo $R \to \mathrm{Hom}_{\text{MOD-S}}(M,Y)$ que lleva r a fr: $M \to Y$. El siguiente isomorfismo es el de la adjunción; llegamos al homomorfismo $R\otimes_{\text{R}}M \to Y$ en el que $r\otimes x$ va a $fr(x) = f(rx)$. Finalmente, usamos el isomorfismo $R\otimes M \cong M$ para tener que el homomorfismo final lleva $u \in M$, que será $u = \sum r_i x_i$ a $f(\sum r_i x_i) = f(u)$. Así se obtiene efectivamente *f*. Esta identidad prueba el isomorfismo buscado.

Veamos ahora *2.* Basta probar que $R\otimes_{\text{R}}(M\otimes_{\text{S}}H) \cong (R\otimes_{\text{R}}M)\otimes_{\text{S}}H \cong M\otimes_{\text{S}}H$. El primer isomorfismo viene dado por la asociatividad del producto tensorial. El segundo isomorfismo ya lo hemos probado en el capítulo 3.

Para probar *3*, hay que ver que el homomorfismo canónico $\lambda_{\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M)}$: $\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M) \to \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(S,\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M))$ es un isomorfismo. Lo que implicará que $\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M)$

es un S-módulo por la derecha cerrado por el Teorema 2.38. Usaremos el isomorfismo canónico λ_{M}: $M \to \mathrm{Hom}_{\text{MOD-S}}(S,M)$ que se tiene por ser M_{S} cerrado. Encontramos el isomorfismo inverso de $\lambda_{\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M)}$ dando, para cada α: $S \to \mathrm{Hom}_{\text{R-MOD}}(X,M)$ el correspondiente homomorfismo $\mathrm{F}(\alpha) = h$: $X \to \mathrm{Hom}_{\text{MOD-S}}(S,M) \xrightarrow{\lambda_{\mathrm{M}}{}^{-1}} M$ dado por $h(x)(s) = \alpha(s)(x)$.
Vamos a probar que, efectivamente, h es un homomorfismo.
Sean $x,y \in X$, $s \in S$. $h(x+y)(s) = \alpha(s)(x+y) = \alpha(s)(x)+\alpha(s)(y) = h(x)(s)+h(y)(s) = (h(x)+h(y))(s)$.
Sean ahora $x \in X$, $r \in R$, $s \in S$. Por un lado, $h(rx)(s) = \alpha(s)(rx) = r(\alpha(s)(x))$. Por otro lado, $r(h(x))(s) := r(\alpha(s)(x))$. Luego, h es un homomorfismo de R-módulos por la izquierda.
Queda entonces ver que $\mathrm{F}\circ\lambda_{\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M)}$ y $\lambda_{\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(X,M)}\circ\mathrm{F}$ son iguales a la identidad, lo cual no haremos pues, si bien la prueba se sigue por definición, es bastante tediosa.
□

Nota 4.4 *En esta sección, salvo que se diga explícitamente lo contrario, M será un R-S-f-c-bimódulo.*

Estas propiedades nos permiten definir los siguientes funtores, análogos a los del caso de anillos con identidad. Se trata de los mismos funtores dados antes de la Definición 4.2, donde la segunda categoría está restringida a la de los módulos firmes o cerrados, según el caso.

1. $T_1 = M\otimes_{\mathrm{S}}$-: S-MOD $\to$ R-Mod.
2. $H_1 = \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(M,\text{-})$: MOD-$S$ $\to$ Mod-R.
3. $Q_1 = \mathrm{Hom}_{\text{R-MOD}}(\text{-},M)$: R-MOD $\to$ Mod-S

Se deducen entonces las adjunciones siguientes.

Proposición 4.5 *En la situación anterior, consideramos los funtores de inclusión* $j_S{}^2$*: Mod-S* $\to$ *MOD-S,* $j_R{}^2$*: Mod-R* $\to$ *MOD-R y* $j_R{}^1$*: R-Mod* $\to$ *R-MOD. Se tiene:*

1. *El funtor* T_1 *es adjunto por la izquierda del funtor compuesto* $j_R{}^1$ *seguido de* $Hom_{R\text{-}MOD}(M,\text{-})$*: R-MOD* $\to$ *S-MOD, que llamaremos* H_2*.*
2. *El funtor* H_1 *es adjunto por la derecha del funtor compuesto* $j_R{}^2$ *seguido de* $\text{-}\otimes_R M$*: MOD-R* $\to$ *MOD-S, que llamaremos* T_2*.*

3. *El funtor Q_1 (tomado como funtor covariante R-MOD $\rightarrow$ (Mod-S)^{op}) es adjunto por la izquierda del funtor compuesto $(j_S{}^2)^{op}$ seguido de $Hom_{MOD\text{-}S}$(-,M): MOD-S $\rightarrow$ R-MOD, que llamaremos Q_2 (de nuevo tomando este funtor como covariante).*

<u>*Dem*</u>

Se obtienen inmediatamente por las adjunciones indicadas justo antes de la Proposición 4.2. Por ejemplo, la adjunción 1. de dicha lista implica la existencia de isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(M \otimes_{\mathrm{S}} X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}MOD}}(X, \mathrm{Hom}_{R\text{-}MOD}(M, Y))$$

y, restringidos a los módulos $Y \in R$-Mod, obtenemos que $\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M \otimes_{\mathrm{S}} X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}MOD}}(X, \mathrm{Hom}_{R\text{-}Mod}(M, Y))$, que son exactamente los isomorfismos que demuestran la adjunción 1. de nuestro enunciado. Los demás casos son análogos. $\square$

Una pequeña variante de lo anterior nos dará finalmente las adjunciones para funtores entre las categorías de módulos firmes y cerrados, que extienden de forma natural las conocidas para anillos con identidad.

Proposición 4.6 *En la situación anterior (y añadiendo el funtor de inclusión $j_S{}^1$: S-Mod $\rightarrow$ S-MOD), los funtores*

$$T_1 \circ j_S{}^1,\ H_1 \circ j_S{}^2,\ Q_1 \circ j_R{}^1$$

son adjuntos (el primero y tercero por la izquierda, el segundo por la derecha) respectivamente de los funtores

$$D_S \circ H_2,\ L_S \circ T_2,\ D_R \circ Q_2$$

(D, L representan los funtores canónicos de los capítulos anteriores, sobre S-módulos o R-módulos según el subíndice).

<u>*Dem*</u>

Es consecuencia de la Proposición 4.5; por ejemplo, en el primer caso $\mathrm{j_S}^1$ es adjunto por la izquierda del funtor canónico $\mathrm{D_S}$, luego la composición $T_1 \circ \mathrm{j_S}^1$ es adjunto por la izquierda de $\mathrm{D_S} \circ H_2$ por la Proposición 4.5 y por ser la composición de adjunciones una adjunción. $\square$

En definitiva, las adjunciones para las categorías de módulos firmes y cerrados quedan así:

$$M\otimes_{\mathrm{S}}\text{-}: S\text{-Mod} \to R\text{-Mod} \dashv \mathrm{D}(\mathrm{Hom}_{\text{R-Mod}}(M,\text{-})): R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$$

$$\mathrm{L}(\text{-}\otimes_{\mathrm{R}} M): \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S \dashv \mathrm{Hom}_{\text{Mod-S}}(M,\text{-}): \text{Mod-}S \to \text{Mod-}R$$

$$\mathrm{Hom}_{\text{R-Mod}}(\text{-},M): R\text{-Mod} \to \text{Mod-}S \dashv \mathrm{D}(\mathrm{Hom}_{\text{Mod-S}}(\text{-},M)): \text{Mod-}S \to R\text{-Mod}$$

Estas adjunciones implican por las propiedades generales de los adjuntos lo siguiente:

Corolario 4.7 *Sea M un R-S-f-c-bimódulo. El funtor $M\otimes_S$- : S-Mod → R-Mod conserva conúcleos y sumas directas (recuérdese que las sumas directas de módulos firmes son firmes). El funtor $Hom_{Mod\text{-}S}$(M,-): Mod-S → Mod-R conserva núcleos y productos (el producto de cerrados es cerrado). El funtor contravariante $Hom_{R\text{-}Mod}$(-,M): R-Mod → Mod-S transforma conúcleos en núcleos y sumas directas de módulos firmes en productos de módulos cerrados.*

<u>Dem</u>

Todas los resultados son inmediatos por las propiedades de las adjunciones en categorías aditivas con núcleos y conúcleos, productos y coproductos. □

Nos interesará especialmente el siguiente caso particular. Sabemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo de la categoría $\mathbb{Z}$-Mod de grupos abelianos. Si M es un R-módulo por la izquierda firme, tenemos que M es un R-$\mathbb{Z}$-f-c-bimódulo. Por la Proposición 4.3 (1), tenemos que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un R-módulo cerrado por la derecha. Este módulo se llama el **módulo de caracteres** de M y se denota $\boldsymbol{M}^{+}$. La construcción del módulo de caracteres es funtorial. Esto es:

Proposición 4.8 *Existe un funtor contravariante C: R-Mod → Mod-R de modo que C(M) = M^+. Además, C es un adjunto por la izquierda (considerándolo como funtor covariante del modo usual).*

<u>Dem</u>

Como ya hemos visto, definimos $\mathrm{C}(M) = M^+$. Por otro lado, dado un homomorfismo g: $M \to N$ en R-Mod, obtenemos g^+: $N^+ \to M^+$ aplicando el funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{-},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ a g. En principio, el homomorfismo resultante es un homomorfismo de grupos abelianos. Pero además, es también un homomorfismo de R-módulos, pues, dado cualquier homomorfismo de $\mathbb{Z}$ módulos f_2: $N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, se define $\mathrm{C}(g)(f_2) = g^+(f_2) := f_2 \circ g$. Al ser g^+ la composición de un homomorfismo de $\mathbb{Z}$-módulos seguido de un homormorfismo de R-módulos, nos queda que es también un homomorfismo de

R-módulos. Las propiedades de funtor se siguen entonces de modo directo.

C es adjunto por la izquierda del funtor C': Mod-$R \rightarrow R$-Mod que se define sobre objetos de este modo: C'(N) = D(Hom$_{\mathbb{Z}}$(N,$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$)). La condición de que estos funtores son adjuntos es de nuevo directa. □

Como consecuencia, el funtor C (módulo de caracteres) transforma conúcleos en núcleos y sumas directas en productos.

4.2. Módulos inyectivos y módulos planos

Algunos de los resultados más notables que relacionan las categorías de módulos por la derecha y por la izquierda sobre un anillo unitario son las que dan la conexión entre módulos inyectivos por un lado y planos por el otro. Veremos en esta sección que estas propiedades se mantienen (con una cuidadosa elección de las categorías) en el caso de los anillos generales.

Definición 4.9 *Sea S un anillo, M_S un S-módulo por la derecha cerrado. Decimos que M_S es **inyectivo** cuando el funtor $Hom_{Mod\text{-}S}$(-,M) de Mod-S en la categoría de grupos abelianos lleva sucesiones exactas cortas a sucesiones exactas cortas (es decir, es un funtor exacto).*

De acuerdo con la Proposición 4.6, el funtorHom$_{\text{Mod-}S}$(-,M) es un adjunto por la derecha (en este caso $R = \mathbb{Z}$ y $\mathrm{D_R}$ es la identidad en grupos abelianos), pero considerado de la categoría opuesta de Mod-S en la de grupos abelianos. Luego lleva conúcleos a núcleos. Así, dada una sucesión exacta corta

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

en Mod-S, obtenemos una sucesión exacta de grupos abelianos

$$0 \rightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(Z,M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(Y,M) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(X,M)$$

Por tanto, M_{S} es inyectivo si y solo si Hom$_{\text{Mod-}S}$(-,M) transforma cada monomorfismo f: $X \rightarrow Y$ en una aplicación sobreyectiva de grupos abelianos. Concretamente:

Proposición 4.10 *Sea M_S un S-módulo cerrado. M_S es inyectivo si y solo si para cada monomorfismo f: $X \rightarrow Y$ de Mod-S, el homomorfismo de grupos inducido $Hom_{Mod\text{-}S}(Y,M) \rightarrow Hom_{Mod\text{-}S}(X,M)$ es sobreyectivo.*

<u>*Dem*</u>

Se deduce de lo comentado tras la Definición 4.9. □

En forma de diagrama, la condición de ser M_{S} inyectivo consiste en que para cada diagrama con fila exacta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \\ & M & \end{tikzcd}$$

existe un homomorfismo g: $Y \to M$ que lo completa de modo conmutativo.

Los inyectivos de Mod-S pueden identificarse de forma sencilla.

Proposición 4.11 *Sea M_S cerrado. Se tiene que M_S es inyectivo si y solo si M_S es inyectivo en la categoría MOD-S.*

<u>*Dem*</u>

Sea M_{S} cerrado e inyectivo en MOD-S y sea f: $X \to Y$ un monomorfismo de la categoría Mod-S. Como ya se vio en la Proposición 2.55, f es también un monomorfismo de MOD-S. Dado h: $X \to M$, existirá por tanto g: $Y \to M$ de modo que $g \circ h = f$, de forma que M_{S} es inyectivo en Mod-S.

Recíprocamente, supongamos que M_{S} es inyectivo en Mod-S y sea f: $X \to Y$ un monomorfismo en MOD-S, sea h: $X \to M$. Por la adjunción del funtor L, obtenemos h_1: $\mathrm{L}(X) \to M$ de modo que $h_1 \circ \epsilon_{\mathrm{X}} = h$. $\mathrm{L}(f)$: $\mathrm{L}(X) \to \mathrm{L}(Y)$ es un monomorfismo de Mod-S, ya que L es exacto, como vimos en la Proposición 2.62. Usando ahora la propiedad de que M_{S} es inyectivo en Mod-S, obtenemos g_1: $\mathrm{L}(Y) \to M$ tal que $g_1 \circ \mathrm{L}(f) = h_1$. Tomemos g: $Y \to M$ como $g = g_1 \circ \epsilon_{\mathrm{Y}}$. Como $\epsilon_{\mathrm{Y}} \circ f = \mathrm{L}(f) \circ \epsilon_{\mathrm{X}}$, resultará $g \circ f = g_1 \circ \epsilon_{\mathrm{Y}} \circ f = g_1 \circ \mathrm{L}(f) \circ \epsilon_{\mathrm{X}} = h_1 \circ \epsilon_{\mathrm{X}} = h$. Lo que muestra que M_{S} es inyectivo en MOD-S. □

Corolario 4.12 *Para todo $M_S \in$ Mod-S existe un inyectivo $E \in$ Mod-S y un monomorfismo $M \to E$. Es decir, Mod-S tiene suficientes inyectivos.*

<u>*Dem*</u>

Dado M_{S} cerrado, su envoltura inyectiva E en MOD-S es libre de torsión (como ya vimos en la Proposición 2.35). Por tanto E es cerrado, $M \to E$ es un monomorfismo de Mod-S, y E es inyectivo en Mod-S por la Proposición 4.11 □

Definición 4.13 *Dado un anillo S, diremos que $E \in$ Mod-S es un* ***cogenerador inyectivo*** *de Mod-S si E es inyectivo y para todo $M \in$ Mod-S, existe un conjunto I y un monomorfismo de la forma $M \to E^I$.*

A continuación, vamos a ver una condición relacionada con la definición precendente.

Proposición 4.14 *Sea $E \in$ Mod-S, E inyectivo. Si para todo $M \in$ Mod-S, con $M \neq 0$ se tiene que $Hom_{Mod\text{-}S}(M,E) \neq 0$, entonces E es un cogenerador inyectivo.*

<u>*Dem*</u>

Veámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que E no es un cogenerador inyectivo. Por lo que existe un homomorfismo φ de forma que $0 \neq K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\varphi} E^{Hom_{\text{Mod-S}}(M,E)}$ que actúa del siguiente modo: $\varphi(x)$:=(0,...0,$\alpha(x)$,0,...,0), donde la componente no nula se encuentra en la α-ésima posición, $x \in K$, el núcleo de φ, el cual tenemos que es no nulo pues hemos supuesto que E no es un cogenerador inyectivo, i es la inclusión y $\alpha \in \text{Hom}_{\text{Mod-S}}(M,E)$.

Por hipótesis, $\text{Hom}_{\text{Mod-}S}(K,E) \neq 0$, pero, como K es el núcleo de φ, nos queda que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in K$, porque $K \to E$ se puede extender a un homomorfismo α: $M \to E$, llegando así a una contradicción. □

A partir de la Proposición 4.14. vamos a probar que la categoría Mod-S tiene un cogenerador inyectivo.

Proposición 4.15 *Dado un anillo S. La categoría Mod-S tiene un cogenerador inyectivo.*

<u>*Dem*</u>

Sean $\{I_{\text{j}}\}_{\text{j} \in J}$ ideales de S tal que S/I_{j} son libres de torsión para todo $j \in J$.
Definimos $\prod_{j \in J} E(S/I_{\text{j}}) = E_0$.

Sea $M \in$ Mod-S y $x \in M$ ($x \neq 0$). Por lo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
xS \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\neq 0"] & S/ann(x) \arrow[dl] \\
E(S/ann(x)) \arrow[d, "i_1"] & \\
E_0 &
\end{tikzcd}$$

donde i_1 es la inclusión.

Por lo que nos queda que el siguiente diagrama conmuta, por ser E_0 inyectivo:

$$\begin{tikzcd} xS \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "\neq 0"'] & M \arrow[dl] \\ E_0 & \end{tikzcd}$$

donde i_2 es la inclusión.

Obteniendo así que $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,E_0) \neq 0$. Por la Proposición 4.14, obtenemos que E_0 es un cogenerador inyectivo. □

También todo S-módulo cerrado posee una envoltura inyectiva en Mod-S.

La caracterización de los inyectivos dada por el criterio de Baer tiene también su versión en nuestra situación.

Proposición 4.16 *Sea M_S un S-módulo cerrado. M_S es inyectivo si y solo si cada homomorfismo f: $I \to M$ (donde I es un ideal por la derecha saturado de S) se extiende a un homomorfismo $S \to M$.*

<u>*Dem*</u>

Si M_{S} es inyectivo, sabemos que es inyectivo en MOD-S por la Proposición 4.11, así que cada homomorfismo f: $I \to M$ se extiende a S.

Para el recíproco, suponemos la condición y tomamos un homomorfismo f: $J \to M$ donde ahora J es un ideal por la derecha arbitrario de S. Si J^c es la saturación de J en S, el homomorfismo f se extiende a f_1: $J^c \to M$ dado que J^c/J es de torsión y M es T-inyectivo. Por la hipótesis, f_1 se extiende a un homomorfismo $S \to M$ que obviamente es una extensión de f. □

Pasemos ahora a considerar módulos planos en R-Mod.

Definición 4.17 *Sea R un anillo, ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda firme. ${}_RM$ es plano cuando el funtor -$\otimes_R M$ de Mod-R en la categoría de grupos abelianos lleva sucesiones exactas a sucesiones exactas (es decir, es un funtor exacto).*

Como en el caso de los módulos inyectivos, la condición equivale a la de que el funtor conserve sucesiones exactas cortas. Como ya se ha visto que -$\otimes_{\mathrm{R}}M$ conserva conúcleos, la condición de ser plano equivale a la de que el funtor conserva monomorfismos. De este modo, ${}_{\mathrm{R}}M$ es plano si y solo si para cada monomorfismo f: $X \to Y$ de Mod-R, el homomorfismo $f\otimes_{\mathrm{R}}1_{\mathrm{M}}$: $X\otimes_{\mathrm{R}}M \to Y\otimes_{\mathrm{R}}M$ es un monomorfismo de grupos abelianos. Por tanto, si ${}_{\mathrm{R}}M$ es firme y plano en la categoría R-MOD, entonces también es plano en R-Mod. El recíproco de este resultado lo veremos como consecuencia de la relación entre módulos planos e inyectivos que damos a continuación.

Proposición 4.18 *Dados anillos R, S, sea M un R-S-f-c-bimódulo. Supongamos que E es un cogenerador inyectivo de la categoría Mod-S, y sea* $M^* = Hom_{Mod\text{-}S}(M,E)$. *Entonces* M^* *es un R-módulo por la derecha cerrado; y* M^* *es inyectivo si y solo si el funtor* $L\circ(\text{ -}\otimes_R M)$: *Mod-R* $\to$ *Mod-S es exacto.*

<u>Dem</u>

Que M^* es cerrado es consecuencia de la Proposición 4.3. Por otra parte, el funtor L$\circ$(-$\otimes_{\mathrm{R}}M$) es un adjunto por la izquierda por la Proposición 4.6, así que conserva conúcleos. Por tanto, la condición del enunciado para dicho funtor equivale a la de conservar monomorfismos.

Así, para probar la segunda afirmación del enunciado, consideremos un monomorfismo f: $X \to Y$ en Mod-R y construyamos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Hom_{\text{Mod-R}}(Y, Hom_{\text{Mod-S}}(M,E)) \arrow[r] \arrow[d] & Hom_{\text{Mod-R}}(X, Hom_{\text{Mod-S}}(M,E)) \arrow[d] \\
Hom_{\text{Mod-S}}(L(Y\otimes_{\mathrm{R}}M),E) \arrow[r] & Hom_{\text{Mod-S}}(L(X\otimes_{\mathrm{R}}M),E)
\end{tikzcd}$$

(4.1)

que es el diagrama que resulta de la naturalidad obtenida a partir de la adjunción considerada en la Proposición 4.6 para el homomorfismo f y el módulo E (para los funtores L(-$\otimes_{\mathrm{R}}M$) $\dashv$ $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\text{-})$. Si M^* es inyectivo, entonces la fila de arriba en el diagrama anterior es un epimorfismo, por la definición de inyectivo. Como las verticales son los isomorfismos de la adjunción, se sigue que la fila de abajo ha de ser también un epimorfismo. Queremos ver que esto implica la condición del enunciado, y emplearemos reducción al absurdo.

Supongamos, pues, que no se verifica. Por definición, existe algún monomorfismo $f\colon X \to Y$ en Mod-R de modo que el correspondiente homomorfismo de S-módulos por la derecha, $\mathrm{L}(X\otimes_{\mathrm{R}}M) \to \mathrm{L}(Y\otimes_{\mathrm{R}}M)$ no es un monomorfismo. Llamando, para abreviar, $A = \mathrm{L}(X\otimes_{\mathrm{R}}M)$, $B = \mathrm{L}(Y\otimes_{\mathrm{R}}M)$ a estos S-módulos, tenemos pues que $A \to B$ no es monomorfismo, luego se obtiene una sucesión exacta $0 \to K \to A \to B$ en la que $K \neq 0$. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(\text{-},E)$ que es exacto por ser E inyectivo, se obtiene la sucesión exacta $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(B,E) \to \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(A,E) \to \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(K,E) \to 0$. Como E es cogenerador y $K \neq 0$, tenemos que $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(K,E) \neq 0$. Pero entonces el homomorfismo $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(B,E) \to \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(A,E)$ no sería epimorfismo (pues su conúcleo es no nulo), contrariamente a lo que se ha demostrado en el párrafo anterior. Esta contradicción prueba nuestra afirmación.

Vamos a ver ahora la propiedad recíproca. Supongamos que $\mathrm{L}(\text{-}\otimes_{\mathrm{R}}M)$ es exacto, pero que M^* no es inyectivo. Por esta razón, ha de existir un monomorfismo $f\colon X \to Y$ en Mod-R de modo que el homomorfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(Y,M^*) \to \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(X,M^*)$ no es un epimorfismo. Observando el diagrama (4.1), nos fijamos en que la fila de arriba no es un epimorfismo, luego la de abajo no puede ser epimorfismo tampoco, dado que las verticales son isomorfismos. Pero tenemos también que, si llamamos A, B a los mismos S-módulos del párrafo anterior, el homomorfismo $A \to B$ es monomorfismo por la hipótesis; luego $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(B,E) \to \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(A,E)$ será epimorfismo ya que E_{S} es inyectivo. Con lo que llegamos a una contradicción y probamos el resultado. $\square$

Corolario 4.19 *Sea M un R-módulo por la izquierda firme, M^+ su módulo de caracteres. Se tiene que ${}_RM$ es plano si y solo si M^+ es inyectivo.*

<u>*Dem*</u>

Por hipótesis, M es un R-$\mathbb{Z}$-f-c-bimódulo. Además, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador inyectivo de Mod-$\mathbb{Z}$ (pues por [STE, Proposition I.6.10], tenemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo, y al tener que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_{\mathrm{p}},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \neq 0$, tenemos que es un cogenerador inyectivo) y $M^+ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Podemos pues aplicar directamente la Proposición 4.18 para obtener que ${}_{\mathrm{R}}M$ es plano si y solo si M^+ es inyectivo. (en este caso $\mathbb{Z} = S$ es un anillo con uno). $\square$

Estamos ya en condiciones de obtener la propiedad análoga a la de los inyectivos en la Proposición 4.11.

Corolario 4.20 *Sea M un R-módulo por la izquierda firme. Se tiene que M es plano en R-Mod si y solo si es un módulo plano de R-MOD.*

Dem

Ya se ha comentado, justo antes de la Proposición 4.18, que si M es plano en R-MOD, entonces es plano en R-Mod. Para el recíproco, supongamos ${}_{\mathrm{R}}M$ plano en R-Mod; por el Corolario 4.19, M^+ es cerrado como R-módulo por la derecha y es inyectivo en Mod-R. Usando la Proposición 4.11, M^+ es inyectivo en la categoría MOD-R. Pero entonces M es plano en R-MOD por la Proposición 4.18 aplicada a anillos con identidad. □

Todo esto permite deducir la existencia de cubiertas planas en R-Mod. Porque existen cubiertas de cualquier módulo en la clase de los planos unitarios ([GFJ, Corollary C.4]). Pero los planos unitarios son exactamente los planos firmes; y, por tanto, son los planos de R-Mod. Como consecuencia, todo R-módulo firme tiene una cubierta plana en R-Mod.

4.3. Anillos comunes

Para anillos con identidad, los R-módulos por la derecha coinciden (salvo la manera de escribir los productos) con los R^{op}-módulos por la izquierda: si X_{R} es un módulo por la derecha, entonces definimos su estructura por la izquierda poniendo

$$r \cdot x = xr$$

(con la otra estructura). La propiedad de que es R^{op} módulo por la izquierda se debe a la igualdad

$$(r_1 \star r_2) \cdot x = (r_2 r_1) \cdot x = x(r_2 r_1) = (x r_2) r_1 = r_1 \cdot (x r_2) = r_1 \cdot (r_2 \cdot x)$$

escribiendo $\star$ para el producto en el anillo opuesto de R.

Podríamos decir que este cambio de estructura es un funtor Mod-$R \to R^{op}$-Mod (que es prácticamente la identidad). De hecho, es inmediato dar un funtor inverso, con la condición de que las composiciones dan las identidades.

En nuestra situación general, la identidad se da entre las categorías MOD-R y R^{op}-MOD; pero no es tan evidente en las categorías Mod-R y R^{op}-Mod. Sin embargo, es posible definir los funtores correspondientes:

Proposición 4.21 *Dado el anillo R, existe un funtor F: Mod-$R \to R^{op}$-Mod tal que $F(M_R) = D(M)$ considerando la estructura de R-módulo por la izquierda de M; y un funtor G: R^{op}-Mod $\to$ Mod-R de modo que $G({}_R N) = L(N)$, de nuevo cambiando el lado del módulo. Se tiene la adjunción $G \dashv F$.*

<u>*Dem*</u>

Para ver la existencia de los funtores basta definir la actuación sobre homomorfismos: si f: $M_{\mathrm{R}} \to Z_{\mathrm{R}}$, entonces el mismo f nos da un homomorfismo de R^{op}-módulos por la izquierda. Entonces $\mathrm{F}(f) = \mathrm{D}(f)$. Del mismo modo $\mathrm{G}(h) = \mathrm{L}(h)$.

La adjunción se obtiene a partir del isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(\mathrm{L}(M),N) \cong \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-MOD}}(M,N) \cong \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M,\mathrm{D}(N))$$

donde el primer isomorfismo se debe a que N es cerrado (como módulo por la derecha), el segundo por la identidad que se da entre las categorías MOD-R y R^{op}-MOD, y el tercero por ser M firme (como módulo por la izquierda). La naturalidad es fácil de ver dado que esencialmente es debida a las adjunciones de L y D con las inclusiones. □

La adjunción anterior permite definir las transformaciones naturales que son la unidad y la counidad de la adjunción. Estas están dadas, respectivamente, por homomorfismos

$$\xi_{\mathrm{X}}: X \to \mathrm{D}(\mathrm{L}(\mathrm{X}))\ , \qquad \eta_{\mathrm{Y}}: \mathrm{L}(\mathrm{D}(\mathrm{Y})) \to Y$$

para $X \in R^{op}$-Mod e $Y \in$ Mod-R. Si denotamos como τ los isomorfismos de la adjunción, será $\xi_{\mathrm{X}} = \tau(1_{\mathrm{L}(X)})$ y $\eta_{\mathrm{Y}} = \tau^{-1}(1_{\mathrm{D}(Y)})$.

Definición 4.22 *Un anillo R se llamará **anillo común** cuando las transformaciones η y ξ dadas anteriormente sean isomorfismos naturales.*

4.4. Anillos idempotentes

Un anillo R es **idempotente** cuando se verifica $R = R^2$. Algunas propiedades de los anillos idempotentes en relación con los conceptos que estamos estudiando son bastante inmediatas.

Proposición 4.23 *Si R es un anillo idempotente, entonces R_R es unitario.*

<u>*Dem*</u>

Para obtener que R_{R} es un R-módulo unitario, necesitamos ver que $R = RR$. Lo cual se tiene por hipótesis, pues al ser R un anillo idempotente, $R = R^2$. □

Proposición 4.24 *Si R es un anillo idempotente y M_R es un R-módulo, entonces M es de torsión si y solo si $mR = 0$ para todo $m \in M$.*

<u>*Dem*</u>

Supongamos por hipótesis que $mR = 0$ para todo $m \in M$, vamos a proceder por reducción al absurdo. Supongamos que M no fuera de torsión, es decir, existe $m \in M$, existe una sucesión $(r_{\mathrm{n}})_{\mathrm{n}\,\in\,\mathbb{N}} \subseteq R$ y no existe ningún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $mr_1...r_{\mathrm{n}0} = 0$. Pero $mr_1 = 0$, llegando así a una contradicción. Luego M es de torsión.

Veamos el recíproco. Vamos a suponer que existe $m \in M$ tal que $mR \neq 0$, y vamos a llegar $m \notin \mathrm{T}(M)$.

Como $mR \neq 0$, podemos escoger $r_1 \in R$ tal que $mr_1 \neq 0$. Como $R = R^2$, se tiene $r_1 = \sum a_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{i}}$ con cada a_{i}, $b_{\mathrm{i}} \in R$. Se sigue que $\sum ma_{\mathrm{i}}b_{\mathrm{i}} \neq 0$, luego podemos escoger $a_1 \in R$ de modo que $ma_1b_1 \neq 0$ y también $ma_1 \neq 0$. Del mismo modo, $b_1 = \sum c_{\mathrm{i}}d_{\mathrm{i}}$, así que $ma_1c_1d_1 \neq 0$ y escogemos $a_2 = c_1$ tal que $ma_1a_2d_1 \neq 0$ y $ma_1a_2 \neq 0$. Está claro que podemos seguir indefinidamente escogiendo elementos a_{j} de forma que se tiene siempre $ma_1a_2...a_{\mathrm{k}} \neq 0$. Pero entonces encontramos una sucesión que no anula a m, luego $m \notin \mathrm{T}(M)$. Hemos llegado a $M \neq \mathrm{T}(M)$, como queríamos. □

Estamos ahora en condiciones de relacionar los módulos de torsión y los evanescentes.

Proposición 4.25 *Si R es un anillo idempotente, entonces un módulo M_R es de torsión si y solo si es evanescente.*

<u>*Dem*</u>

Sea M_{R} de torsión, y sea X_{R} un módulo unitario. Sea f: $X \to M$ un homomorfismo y $x \in X$, tenemos que $x = \sum x_{\mathrm{i}}r_{\mathrm{i}}$ para ciertos $r_{\mathrm{i}} \in R$, $x_{\mathrm{i}} \in X$, puesto que X es unitario. Entonces $f(x) = \sum f(x_{\mathrm{i}})r_{\mathrm{i}} = 0$ puesto que $MR = 0$. Por tanto, $f = 0$ y así $\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(X,M) = 0$, lo que implica que M_{R} es evanescente, por la Proposición 3.8.

Recíprocamente, supongamos que M_{R} no es de torsión, vamos a ver que no puede ser evanescente. Para ello veremos que $\mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(R_{\mathrm{R}},M) \neq 0$; como R_{R} es unitario, M_{R} no puede ser evanescente.

Puesto que M_{R} no es de torsión, existe $m \in M$ con $mR \neq 0$, por la Proposición 4.24. Consideremos f: $R_{\mathrm{R}} \to M$ dado por $f(r) = mr$. Es inmediato que f es homomorfismo. Además, puesto que $mR \neq 0$, existe $a \in R$ con $ma \neq 0$. Luego $f(a) = ma \neq 0$ y $f \neq 0$. □

El resultado central es el siguiente.

Teorema 4.26 *Sea R un anillo idempotente. Los funtores F y G de la Proposición 4.21 son equivalencias inversas.*

<u>Dem</u>

Hay que ver que F∘G y G∘F son naturalmente equivalentes a las identidades respectivas. Por la definición de estos funtores, se trata de ver que D∘L y L∘D son también equivalentes a las identidades cuando los restringimos a las categorías Mod-R de módulos por la derecha cerrados y R^{op}-Mod de R-módulos por la derecha firmes. Para verlo, sea M_{R} cerrado, y consideremos $N = \mathrm{L}(\mathrm{D}(M))$. Probaremos que existe un isomorfismo $M \to N$ que verifica las condiciones de naturalidad. Construímos el siguiente diagrama en MOD-R a partir de un homomorfismo α: $M_1 \to M_2$ de módulos cerrados

$$\begin{tikzcd}
L(D(M_1)) \arrow[dr, "h_1"] \arrow[ddd, bend right, "g"'] & \\
D(M_1) \arrow[u, "\epsilon_{\mathrm{D(M_1)}}"'] \arrow[r, "\rho_{\mathrm{M_1}}"] \arrow[d, "D(\alpha)"] & M_1 \arrow[d, "\alpha"] \\
D(M_2) \arrow[r, "\rho_{\mathrm{M_2}}"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathrm{D(M_2)}}"] & M_2 \\
L(D(M_2)) \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}$$

donde: los ρ son los homomorfismos canónicos que hacen conmutativo el cuadrado central; los ϵ son también homomorfismos canónicos, y existe $g = \mathrm{L}(\mathrm{D}(\alpha))$: $\mathrm{L}(\mathrm{D}(M_1)) \to \mathrm{L}(\mathrm{D}(M_2))$ que cumple $g \circ \epsilon_{\mathrm{D(M_1)}} = \epsilon_{\mathrm{D(M_2)}} \circ \mathrm{D}(\alpha)$. El homomorfismo h_1 es un isomorfismo y se obtiene del siguiente modo: $\rho_{\mathrm{M_1}}$ tiene núcleo y conúcleo evanescente, como ya vimos en la Proposición 3.24, y por tanto tiene núcleo y conúcleo de torsión, como hemos visto en la Proposición 4.25; así hay dos homomorfismos de $\mathrm{D}(M_1)$ en módulos cerrados M_1 y $\mathrm{L}(\mathrm{D}(M_1))$ con núcleo y conúcleo de torsión: esto implica, por la Proposición 2.49, que existe el isomorfismo h_1 de modo que $h_1 \circ \epsilon_{\mathrm{D(M_1)}} = \rho_{\mathrm{M_1}}$. Se obtiene del mismo modo el isomorfismo h_2 y los dos triángulos (arriba y abajo) son conmutativos.

Esto da una equivalencia natural entre LD y la identidad en la categoría Mod-R. La naturalidad se sigue de la conmutatividad dada en la ecuación $h_2 \circ g = \alpha \circ h_1$. A su vez, obtenemos esta ecuación así:

$$h_2 \circ g \circ \epsilon_{\mathrm{D(M_1)}} = h_2 \circ \epsilon_{\mathrm{D(M_2)}} \circ \mathrm{D}(\alpha) = \rho_{\mathrm{M_2}} \circ \mathrm{D}(\alpha) = \alpha \circ \rho_{\mathrm{M_1}} = \alpha \circ h_1 \circ \epsilon_{\mathrm{D(M_1)}}$$

Por tanto, $\epsilon_{\mathrm{D(M_1)}}$ anula a $h_2 \circ g$-$\alpha \circ h_1$: $\mathrm{L}(\mathrm{D}(M_1)) \to M_2$. Como el conúcleo de $\epsilon_{\mathrm{D(M_1)}}$ es de torsión y M_2 es cerrado, se sigue que $h_2 \circ g$-$\alpha \circ h_1 = 0$. Como se trataba de ver. De modo análogo se obtiene que también D$\circ$L es naturalmente equivalente a la identidad. Se tiene pues que L,D son equivalencias inversas una de otra; y como F,G están definidas de ese modo, es inmediato comprobar que la unidad y counidad de la adjunción de la Proposición 4.21 son isomorfismos. □

Corolario 4.27 *Si R es un anillo idempotente, entonces R es un anillo común.*

Dem

Hemos visto en el Teorema 4.26 la naturalidad de la unidad y la counidad en caso de que R sea un anillo idempotente, por lo que obtenemos que R es también un anillo común. □

Así, si R es idempotente, Mod-R es equivalente a la categoría de los R-módulos por la derecha firmes; como en este caso R^{op} también es idempotente, también será común y R-Mod es equivalente a la categoría de los R-módulos por la izquierda cerrados.

4.5. Teoría de Morita

Los teoremas de Morita para anillos con identidad estudian la existencia de equivalencias de categorías de módulos y cómo la existencia de una tal equivalencia entre Mod-R y Mod-S tiene consecuencias sobre las propiedades aritméticas o de estructura de los anillos R,S. Una propiedad fundamental de la teoría de Morita (en el caso de los anillos con identidad) es el hecho de que si Mod-R y Mod-S son categorías equivalentes, entonces R-Mod y S-Mod son también categorías equivalentes; y recíprocamente. Veremos en esta sección que los anillos comunes (en especial, los anillos idempotentes) tienen propiedades semejantes. Concretamente, si R es un anillo común y Mod-R es equivalente a Mod-S, entonces R-Mod es equivalente a S-Mod. Naturalmente, si también R^{op} es un anillo común, entonces la equivalencia entre R-Mod y S-Mod es la equivalencia entre Mod-R^{op} y Mod-S^{op} y, en consecuencia, R^{op}-Mod y S^{op}-Mod son equivalentes, esto es, Mod-R y Mod-S son equivalentes. Así, la situación de los anillos idempotentes (más en general, la de los anillos que son comunes juntamente con su opuesto) reproduce la relación del caso de anillos con identidad.

Dividiremos el resultado principal en dos teoremas.

Antes de probar el primero de ellos, vamos a ver un Lema que nos será de utilidad.

Lema 4.28 *Dado un anillo R, el producto tensorial de un R-módulo por la derecha de torsión M y un R-módulo por la izquierda unitario N es nulo.*

<u>Dem</u>

Lo veremos por reducción al absurdo. Si $M \otimes_{\mathrm{R}} N \neq 0$, existirá $u \in M$, $n \in N$ de modo que $u \otimes n \neq 0$. Como N es unitario, será $n = \sum r_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}}$ con los $r_{\mathrm{i}} \in R$, $n_{\mathrm{i}} \in N$; se deduce que $u \otimes r_{\mathrm{i}} n_{\mathrm{i}} \neq 0$ para alguno de estos sumandos; esto es $ur_{\mathrm{i}} \otimes n_{\mathrm{i}} \neq 0$. Pero, como $n_{\mathrm{i}} \in N$, nos queda que $n_{\mathrm{i}} = \sum r'_{\mathrm{k}} n'_{\mathrm{k}}$ con los $r'_{\mathrm{k}} \in R$, $n'_{\mathrm{k}} \in N$, por lo que obtendremos que alguno de los sumandos es de la forma $ur_{\mathrm{i}} r'_{\mathrm{k}} \otimes n'_{\mathrm{k}} \neq 0$. Procediendo recurrentemente, obtenemos que ha de existir una sucesión infinita de R, $(r_{\mathrm{j}})_{\mathrm{j} \in \mathbb{N}}$ con la propiedad de que $ur_1 r_2 ... r_{\mathrm{j}} \neq 0$ para todo j. Lo cual es una contradicción, pues M es de torsión. De aquí se sigue que $M \otimes_{\mathrm{R}} N = 0$. $\square$

Nota 4.29 *Existe una operación* $\cdot$*:* $L(R_R) \times M \to M$*. (ver [GAM2, Propositions 10, 11]).*

Teorema 4.30 *Sean R, S anillos y supongamos que:*

1. *Existen bimódulos* ${}_R M_S$ *y* ${}_S N_R$ *tales que* M_S *y* N_R *son cerrados.*

2. *Los funtores*

$$Hom_{Mod\text{-}R}(N,\text{-}): Mod\text{-}R \to Mod\text{-}S, \qquad Hom_{Mod\text{-}S}(M,\text{-}): Mod\text{-}S \to Mod\text{-}R$$

   son equivalencias inversas.

3. $M \cong Hom_{Mod\text{-}R}(N,L(R_R))$ *y* $N \cong Hom_{Mod\text{-}S}(M,L(S_S))$*. Además, los homomorfismos* α*:* $M \otimes_S N \to L(R_R)$ *y* β*:* $N \otimes_R M \to L(S_S)$ *que están dados de modo natural por los isomorfismos* $M \cong Hom_{Mod\text{-}R}(N,L(R_R))$ *y* $N \cong Hom_{Mod\text{-}S}(M,L(S_S))$*, verifican que* $\alpha(m \otimes n) \cdot m' = m \cdot \beta(n \otimes m')$ *y* $\beta(n \otimes m) \cdot n' = n \cdot \beta(m \otimes n')$*, donde* $m,m' \in M$ *y* $n,n' \in N$ *(es decir,* α *y* β *dan un* ***contexto de Morita****, ver [GAM2, Definition 13]).*

Entonces las categorías R-Mod y S-Mod son también categorías equivalentes.

<u>*Dem*</u>

Probaremos primero la afirmación siguiente: si h: $P \to Q$ es un homomorfismo de S-módulos por la derecha de modo que Ker(h), Coker(h) son de torsión y X es un S-módulo por la izquierda firme, entonces el homomorfismo inducido h': $P \otimes_S X \to Q \otimes_S X$ es un isomorfismo.
La exactitud por la derecha del producto tensorial aplicada a la sucesión exacta por la derecha

$$P \to Q \to C \to 0$$

dará la sucesión exacta $P \otimes_S X \to Q \otimes_S X \to 0$, puesto que el producto tensorial de un módulo de torsión por uno unitario es nulo, por el Lema 4.28. Así el homomorfismo considerado es un epimorfismo.

Para probar que también se trata de un monomorfismo debemos usar el hecho de que si X es firme, entonces existe una sucesión exacta corta $0 \to K \to F \to X \to 0$ donde F es un S-módulo por la izquierda plano unitario y K es un S-módulo por la izquierda unitario. Esto nos permite construir el siguiente diagrama conmutativo y exacto

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & \\
P \otimes_S K \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes_S F \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes_S X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Q \otimes_S K \arrow[r] \arrow[d] & Q \otimes_S F \arrow[r] \arrow[d] & Q \otimes_S X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

donde: las filas son exactas por la exactitud por la derecha del producto tensorial; además, las columnas son también exactas por la derecha por el mismo motivo, ya que en cada caso, el conúcleo de h es de torsión y los S-módulos K, F y X son unitarios. Finalmente, en la columna central usamos las sucesiones

$$0 \to K' \to P \to Y \to 0, \quad 0 \to Y \to Q \to C \to 0$$

y al tensorizar por F la segunda sucesión obtenemos la sucesión exacta $0 \to Y \otimes_S F \to Q \otimes_S F \to 0$, por lo que $Y \otimes_S F \to Q \otimes_S F$ es un isomorfismo. Por un procedimiento análogo con la primera sucesión, obtenemos el isomorfismo $P \otimes_{\mathrm{S}} F \to Y \otimes_{\mathrm{S}} F$. Al componer estos dos isomorfismos, obtenemos el isomorfismo $P \otimes_{\mathrm{S}} F \to Q \otimes_{\mathrm{S}} F$. Obteniendo así la exactitud de la columna central.

Usando caza en diagramas se ve entonces que h': $P \otimes_{\mathrm{S}} X \to Q \otimes_{\mathrm{S}} X$ es un monomorfismo; y por tanto, un isomorfismo de módulos. Además este es un isomorfismo natural, en el sentido de que si tenemos un homomorfismo $X_1 \to X_2$ de S-Mod, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} P \otimes_{\mathrm{S}} X_1 \arrow[r] \arrow[d] & P \otimes_{\mathrm{S}} X_2 \arrow[d] \\ Q \otimes_{\mathrm{S}} X_1 \arrow[r] & Q \otimes_{\mathrm{S}} X_2 \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Aplicaremos esta propiedad a los siguientes homomorfismos α y β. Vamos a ver con más detalle el primer homomorfismo, sea α: $M \otimes_{\mathrm{S}} N \to \mathrm{L}(R_R)$ el homomorfismo indicado, vamos a comprobar que $\mathrm{Ker}(\alpha)$ y $\mathrm{Coker}(\alpha)$ son de torsión. Veamos primero esta segunda conexión.

Sea $Z \in$ Mod-S y $u \in Z$. El homomorfismo g_u: $S_S \to Z$ dado por $g_u(s) := us$ se factoriza de la siguiente forma: $f_{\mathrm{u}} \circ \epsilon_{\mathrm{S}} = g_{\mathrm{u}}$, donde ϵ_{S} es el homomorfismo canónico de S en $\mathrm{L}(S_{\mathrm{S}})$ y f_u: $\mathrm{L}(S_S) \to Z$, ya que Z es cerrado; y la imagen de f_u contiene a $uS = \mathrm{Im}(g_u)$. Los f_u son morfismos de la categoría Mod-S e inducen un homomorfismo en la suma directa f: $\mathrm{L}(S_S)^{(Z)} \to Z$ que es igual a f_u en la componente $u \in Z$. La imagen (en MOD-S) de este homomorfismo contiene por tanto a ZS (ya que contiene a uS para todo $u \in Z$). Se sigue entonces que $\mathrm{Coker}(f) = Z/\mathrm{Im(f)}$ es isomorfo a un cociente de Z/ZS, el cual es de torsión, por lo que obtenemos así que $\mathrm{Coker}(f)$ es de torsión. Tenemos entonces por la Proposición 2.55 que f es un epimorfismo en la categoría Mod-S. Y como lo anterior es aplicable a cada objeto Z de Mod-S, resulta que $\mathrm{L}(S_S)$ es un generador.

Puesto que $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\text{-})$ es una equivalencia, por hipótesis, $N \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\mathrm{L}(S_S))$ es un generador de Mod-R. La imagen de α contiene a todos los elementos de $\mathrm{L}(R_R)$ de la forma $t(n)$ para cada $n \in N$ y $t \in \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(N,\mathrm{L}(R_R))$. Por ser N_{R} generador se sigue que α es un epimorfismo de Mod-R. Una vez más, por la Proposición 2.55, nos queda que $\mathrm{Coker}(\alpha)$ es de torsión en la categoría MOD-R. De modo análogo obtendríamos que $\mathrm{Coker}(\beta)$ es de torsión en MOD-S para el otro homomorfismo β:

$N \otimes_{\mathrm{R}} M \to \mathrm{L}(S_S)$ considerado.

Se puede ver que $\mathrm{Ker}(\alpha)$ es de torsión en [GAM2, Theorem 15], pues tenemos por hipótesis que α y β dan un contexto de Morita.

Como se cumplen las condiciones de la afirmación del comienzo de esta demostración, tenemos que existen isomorfismos

$$(M \otimes_{\mathrm{S}} N) \otimes_{\mathrm{R}} X \cong \mathrm{L}(R_R) \otimes_{\mathrm{R}} X, \quad (N \otimes_{\mathrm{R}} M) \otimes_{\mathrm{S}} Y \cong \mathrm{L}(S_S) \otimes_{\mathrm{S}} Y$$

para módulos X, Y tales que $X \in R$-Mod, $Y \in S$-Mod.

Las hipótesis sobre M y N implican también, por [GAM2, Proposition 3.1], que los funtores $M \otimes_{\mathrm{S}}$-: S-Mod $\to R$-Mod, y $N \otimes_{\mathrm{R}}$-: R-Mod $\to S$-Mod son, efectivamente, funtores entre esas categorías. Para completar la demostración bastará ver que son equivalencias inversas. A su vez, para esto habrá que ver que las composiciones son naturalmente equivalentes a las identidades. Pero se tiene:

$$M \otimes_{\mathrm{S}} (N \otimes_{\mathrm{R}} X) \cong (M \otimes_{\mathrm{S}} N) \otimes_{\mathrm{R}} X \cong \mathrm{L}(R_R) \otimes_{\mathrm{R}} X$$

y además el homomorfismo $\epsilon_{\mathrm{R_R}}$: $R_R \to \mathrm{L}(R_R)$, que tiene núcleo y conúcleo de torsión (por la Proposición 2.48), dará por la afirmación del principio de esta demostración un isomorfismo $R_R \otimes_{\mathrm{R}} X \cong \mathrm{L}(R_R) \otimes_{\mathrm{R}} X$; al ser X firme, tenemos que $R_R \otimes_{\mathrm{R}} X \cong X$, por lo que llegamos a que $M \otimes_{\mathrm{S}} (N \otimes_{\mathrm{R}} X) \cong X$. Como los isomorfismos están construidos todos a partir de isomorfismos naturales, tenemos también que este último isomorfismo es natural. Análogamente se prueba el caso de la composición de los funtores en el otro orden. Obteniendo así la equivalencia de categorías del enunciado. □

Teorema 4.31 *Sean R,S anillos y supongamos que existen equivalencias inversas F: Mod-R $\to$ Mod-S y G: Mod-S $\to$ Mod-R. Existen entonces bimódulos ${}_RM_S$,${}_SN_R$ tales que: M_S y N_R son cerrados; los funtores Hom$_{\text{Mod-R}}$(N,-): Mod-R $\to$ Mod-S y Hom$_{\text{Mod-S}}$(M,-): Mod-S $\to$ Mod-R son equivalencias inversas; M $\cong$ Hom$_{\text{Mod-R}}$(N,L(R_R)) y N $\cong$ Hom$_{\text{Mod-S}}$(M,L(S_S)); además los homomorfismos inducidos*

$$\alpha\colon M \otimes_S N \to L(R_R), \quad \beta\colon N \otimes_R M \to L(S_S)$$

dan un contexto de Morita.

<u>*Dem*</u>

Para cualquier $X \in$ Mod-S, consideremos $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(\mathrm{L}(R_R),X)$. Dado que F,G son equivalencias inversas, se tiene en particular que F es adjunto por la izquierda de G. De este modo, hay un isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(\mathrm{F}(\mathrm{L}(R_R)),X) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(\mathrm{L}(R_R),\mathrm{G}(X))$$

Por otro lado, como $\mathrm{G}(X)$ es cerrado, existen isomorfismos

$$\mathrm{G}(X) \cong \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}R}(R_R,\mathrm{G}(X)) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(\mathrm{L}(R_R),\mathrm{G}(X))$$

donde el último isomorfismo resulta de la adjunción L $\dashv$ j. Con todo lo anterior, obtenemos los isomorfismos

$$\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(\mathrm{F}(\mathrm{L}(R_R)),X) \cong \mathrm{G}(X)$$

y es fácil ver que estos isomorfismos son naturales usando la manera en que han sido definidos. Llamando $M_{\mathrm{S}} = \mathrm{F}(\mathrm{L}(R_R))$, tenemos que M_{S} es un S-módulo cerrado y que el funtor G es equivalente a $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\text{-})$. La estructura de R-módulo por la izquierda de M_{S} viene dada del modo siguiente:

Como $M \in$ Mod-S, se tiene que $\mathrm{G}(M) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,M)$ tiene una estructura de R-módulo (cerrado) por la derecha. Así para cada endomorfismo f: $M_{\mathrm{S}} \to M_{\mathrm{S}}$ se tiene fr: $M_{\mathrm{S}} \to M_{\mathrm{S}}$ para cualquier $r \in R$. Definimos entonces, para $r \in R$ y $m \in M$, el producto $rm = (1_{\mathrm{M}}r)(m)$. Vamos a ver ahora que M es un R-S-bimódulo.

Sean $r_1,r_2 \in R$ y $m_1,m_2 \in M$.

- $r_1(m_1{+}m_2) = (1_{\mathrm{M}}r_1)(m_1{+}m_2) = (1_{\mathrm{M}}r_1)(m_1){+}(1_{\mathrm{M}}r_1)(m_2) = r_1m_1{+}r_1m_2$.
- $(r_1{+}\ r_2)m_1 = (1_{\mathrm{M}}(r_1{+}\ r_2))(m_1) = (1_{\mathrm{M}}r_1)(m_1){+}(1_{\mathrm{M}}r_2)(m_1) = r_1m_1{+}r_2m_1$.
- La prueba de $(r_1r_2)m_1 = r_1(r_2m_1)$ no es tan directa. Vamos a ver primero la siguiente propiedad general:

  Para cualquier endomorfismo g: $M_{\mathrm{S}} \to M_{\mathrm{S}}$ y cualquier $r \in R$, se tiene $(gr)(m) = g(rm)$ para todo $m \in M$. Para ello, sea f: $X \to Y$ cualquier homomorfismo de Mod-S; por ser $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\text{-})$ un funtor a Mod-R, se tiene que f_*: $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,X) \to \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,Y)$ es un homomorfismo de R-módulos a la derecha. Se sigue entonces que, dado cualquier homomorfismo de S-módulos h: $M \to X$, será

  $$f_*(hr) = f\circ(hr) = f_*(h)r = (f\circ h)r$$

Aplicando esto último a $f = g$ y a $h = 1_\mathrm{M}$, nos quedará que

$$g\circ(1_\mathrm{M}r) = (g\circ 1_\mathrm{M})r = gr, \quad (gr)(m) = g((1_\mathrm{M}r)(m)) = g(rm)$$

Con esto, (tomando $g = 1_\mathrm{M}r_1$) podemos ver la igualdad $(r_1r_2)m_1 = r_1(r_2m_1)$.

$$\begin{gathered} r_1(r_2m_1) = (1_\mathrm{M}r_1)(r_2m_1) = (1_\mathrm{M}r_1)(1_\mathrm{M}r_2)(m_1) = ((1_\mathrm{M}r_1)r_2)(m_1) = \\ = (1_\mathrm{M}(r_1r_2))(m_1) = (r_1r_2)m_1 \end{gathered}$$

Quedando probado así que M es un R-módulo por la izquierda.

Ver que es un bimódulo es ahora directo: Dados $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, se tiene que:

$$r(ms) = (1_\mathrm{M}r)(ms) = (1_\mathrm{M}r)(m)s = (\mathrm{rm})s$$

ya que $1_\mathrm{M}r$ es un endomorfismo de M_S.

Razonando igual que antes podemos ver que el funtor F es equivalente al funtor $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(N,\text{-})$, donde tomamos $N = \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\mathrm{L}(S_S))$.

Sea $Y \in$ Mod-R. Por ser F y G equivalencias inversas, se tiene que

$$\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(\mathrm{L}(S_S),\mathrm{F}(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(\mathrm{G}(\mathrm{L}(S_S)),Y)$$

Además, por ser F(Y) cerrado y por la adjunción $\mathrm{L} \dashv \mathrm{j}$, tenemos:

$$\mathrm{F}(Y) \cong \mathrm{Hom}_{\text{MOD-}S}(S_S,\mathrm{F}(Y)) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(\mathrm{L}(S_S),\mathrm{F}(Y))$$

Además, hemos visto al comienzo de la demostración la equivalencia entre G y $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\text{-})$, por lo que tenemos también que $\mathrm{G}(\mathrm{L}(S_S)) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\mathrm{L}(S_S))$. Teniendo en cuenta las equivalencias anteriores, llegamos a que:

$$\mathrm{F}(Y) \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\mathrm{L}(S_S)),Y)$$

como queríamos ver.

Por la misma razón anterior, N es un S-R-bimódulo. Al tener por hipótesis que F y G son equivalencias inversas, tenemos entonces que $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}S}(M,\text{-})$ y $\mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(N,\text{-})$ son equivalencias inversas. Finalmente, como M corresponde a $\mathrm{L}(R_R)$ en la equivalencia, esto sigue siendo cierto para los nuevos funtores (salvo isomorfismo natural), de modo que $M \cong \mathrm{Hom}_{\text{Mod-}R}(N,\mathrm{L}(R_R))$.

Esto muestra todas las propiedades del enunciado salvo la de que los homomorfismos inducidos sobre $M\otimes_\mathrm{S}N$ y $N\otimes_\mathrm{R}M$ dan un contexto de Morita. Esta propiedad es algo más complicada y puede verse en [GAM2, Propositions 6, 11, Theorems 15, 16]. $\square$

Corolario 4.32 *Dados anillos R y S, si Mod-R y Mod-S son categorías equivalentes, entonces R-Mod y S-Mod son también categorías equivalentes.*

La simetría de la propiedad anterior, conocida para anillos con uno y anillos idempotentes, se puede restablecer en el caso más general de anillos comunes:

Corolario 4.33 *Sean R,R^{op},S,S^{op} anillos comunes. Se tiene que Mod-R y Mod-S son categorías equivalentes si y solo si R-Mod y S-Mod son equivalentes. En ese caso, también Mod-R^{op}, Mod-S^{op} son equivalentes y lo mismo para las correspondientes categorías de módulos firmes por la izquierda.*

<u>Dem</u>

Una dirección está dada en el Corolario 4.32. Para la otra, supongamos que R-Mod y S-Mod son equivalentes. Puesto que R^{op} y S^{op} son anillos comunes, obtenemos que Mod-R^{op} y Mod-S^{op} son categorías equivalentes. Por el Corolario 4.32 otra vez,R^{op}-Mod y S^{op}-Mod son también categorías equivalentes. Por ser R y S comunes, se tiene entonces que Mod-R y Mod-S son equivalentes. $\square$

Bibliografía

[ANF] ANDERSON, FRANK W.; FULLER, KENT R. *Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag(Second Edition)* (1992).

[BBE] L. BICAN, R. EL BASHIR AND E.ENOCHS, All modules have flat covers, Bull. Lond. Math. Soc. (2000)

[CCJP] CHAN CASTRO, SERGIO SANTIAGO; CUITUN CORONADO, RODRIGO; JIMENEZ CORREA, RODRIGO; PEREZ TERRAZAS JESUS EFREN; *La Envolvente Inyectiva y el Teorema de Bass-Papp. Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Yucatán, México.*

[GAM] GARCÍA HERNÁNDEZ, JOSÉ LUIS; MARÍN MUÑOZ, LEANDRO; *Basic Module Theory for General Rings, Communications in Algebra, 40:1, (291-314)* (2012).

[GAM2] GARCÍA HERNÁNDEZ, JOSÉ LUIS; MARÍN MUÑOZ, LEANDRO; *Morita theory for associative rings, Communications in Algebra. (5835-5856)* (2001).

[GFJ] GONZALEZ FEREZ, JUAN DE LA CRUZ; *La Categoría de Módulos Firmes. Tesis Doctoral Universidad de Murcia.* (2008).

[HWU] HILTON, PETER; YEL-CHIANG, WU *Curso de álgebra moderna. Reverté,s.a., 1977.*

[LEZ] LEZAMA, OSWALDO; *Cuadernos de Álgebra No. 7 Categorías. Universidad Nacional de Colombia.* (2014).

[MCL] MAC LANE, SAUNDERS; *Categories for the Working Mathematician.Springer-Verlag.* (1971).

[MML] MARIN MUÑOZ, L; *Equivalencias de Morita para anillos asociativos. Tesina de Licenciatura Universidad de Murcia.* (1996).

[MML2] MARIN MUÑOZ, L; *Categorías de Módulos para Anillos Asociativos y Equivalencias de Morita. Tesis Universidad de Murcia.* (1998).

[PIE] PIERCE, RICHARD S.; *Associative Algebras. Graduate Texts Maths. Springer-Verlag* (1982).

[RSJ] RABADAN SANCHEZ, JP; *Representaciones de Álgebras. Trabajo de Final de Grado. Universidad de Murcia.* (2018).

[STE] STENSTRÖM, BO; *Rings of Quotients. Graduate Texts Maths. Springer-Verlag* (1975).