

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



Departamento de Matemáticas
UNIVERSIDAD DE MURCIA

Trabajo Fin de Master

Simetrizaciones de conjuntos convexos

Ángel Valera Reales

Tutores: María de los Ángeles Hernández Cifre y Jesús Yepes Nicolás

3 de septiembre de 2020

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Ángel Valera Reales, autor del TFM titulado “Simetrizaciones de conjuntos convexos”, bajo la tutela de los profesores María de los Ángeles Hernández Cifre y Jesús Yepes Nicolás,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 3 de septiembre de 2020.

Fdo.: Ángel Valera Reales

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha depositado una copia firmada de esta declaración.

A mis hermanos.

Índice general

Introducción	VII
1. Preliminares	1
1.1. Cuerpos convexos	1
1.2. Volumen	4
1.3. Medida	7
2. Simetrizaciones	9
2.1. Simetrización de Steiner	9
2.1.1. Teorema de Esfericidad de Gross	19
2.1.2. Convergencia de sucesiones de simetrizaciones de Steiner	25
2.2. Simetrización de Minkowski	28
2.3. Otras simetrizaciones	31
3. Caracterizaciones	35
3.1. Caracterización de la simetrización de Steiner	35
3.2. Caracterización de la simetrización de Minkowski	42
Bibliografía	47

Introducción

Una simetrización es una función que modifica conjuntos de manera que estos ganen cierta simetría mientras conservan algunas propiedades. El objetivo principal de este trabajo es presentar y estudiar dos de las simetrizaciones más importantes: la simetrización de Steiner y la simetrización de Minkowski. La simetrización de Steiner de un conjunto K respecto de un hiperplano H se define de la siguiente manera: para cada línea G ortogonal a H que corta a K , $K \cap G \neq \emptyset$, desplazamos el segmento $K \cap G$ sobre G de manera que su punto medio pase a estar en H . La unión de todos estos segmentos trasladados será el simetrizado de Steiner de K . Por otro lado, definimos el simetrizado de Minkowski de K respecto de H como la suma de Minkowski de K con su reflexión sobre H , multiplicado por el factor $1/2$. Además, presentaremos también algunas caracterizaciones, esto es, si una determinada simetrización cumple ciertas hipótesis, entonces esta simetrización será la de Steiner o la de Minkowski.

El interés en estudiar simetrizaciones viene, como veremos más adelante, en algunas aplicaciones que podemos obtener de éstas. La simetrización de Steiner será la pieza clave para demostrar algunos resultados fundamentales para la geometría convexa, como la desigualdad isoperimétrica, la desigualdad isodiamétrica, la desigualdad de Brunn-Minkowski y la desigualdad de Blaschke-Santaló. La simetrización de Steiner también tiene aplicaciones al análisis de funciones y al análisis de las EDP.

En el primer capítulo presentaremos los resultados previos que necesitaremos para el desarrollo de la memoria. Todos los resultados en este capítulo se incluirán sin demostración, por haber sido estudiados en el curso “Geometría Convexa y Discreta” del *Máster en Matemática Avanzada* de la Universidad de Murcia. Hablaremos de cuerpos convexos, es decir, subconjuntos de \mathbb{R}^n compactos y convexos no vacíos, junto con algunas de sus propiedades. También introduciremos la suma de Minkowski. Continuaremos con el volumen y los más generales volúmenes mixtos, así como algunas propiedades y fórmulas relativas a éstos. Terminamos el capítulo con algunos resultados de medida que necesitaremos para estudiar posteriormente la caracterización de la simetrización de Steiner.

El capítulo segundo presenta diferentes simetrizaciones. Empezaremos introduciendo la simetrización de Steiner junto con multitud de propiedades que cumple. Veremos como se comporta respecto a la intersección, la unión y la suma de conjuntos; respecto a las sucesiones convergentes; y respecto al volumen $\text{vol}(\cdot)$, al área de superficie $S(\cdot)$, al diámetro $D(\cdot)$, al circunradio y al inradio.

Continuamos con el teorema de esfericidad de Gross, que será fundamental en el trabajo pues va a ser la clave para poder demostrar muchos resultados de esta sección. Sean

$K, K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ cuerpos convexos. Probaremos, por ejemplo, las siguientes desigualdades clásicas:

- La desigualdad isoperimétrica, es decir,

$$S(K)^n \geq \frac{S(B_n)^n}{\kappa_n^{n-1}} \text{vol}(K)^{n-1},$$

donde B_n representa la bola euclídea n -dimensional y κ_n representa el volumen de B_n .

- La desigualdad isodiamétrica, esto es,

$$\text{vol}(K) \leq \frac{D(K)^n}{2^n} \kappa_n.$$

- La desigualdad de Brunn-Minkowski, o sea,

$$\text{vol}(K_1 + K_2)^{1/n} \geq \text{vol}(K_1)^{1/n} + \text{vol}(K_2)^{1/n}.$$

- Y, por último, la desigualdad de Blaschke-Santaló,

$$\text{vol}(K) \text{vol}(K^*) \leq \kappa_n^2,$$

donde K^* denota el conjunto dual de K .

El teorema de esfericidad de Gross nos asegura que para cualquier cuerpo convexo, existe una sucesión de hiperplanos mediante los cuales si realizamos las sucesivas simetrizaciones de Steiner, al final obtenemos una bola. Sin embargo, una sucesión cualquiera de simetrizaciones no tiene por qué converger. Así que dedicaremos la siguiente sección a estudiar una determinada condición que si es satisfecha por la sucesión, ésta convergerá.

El trabajo continua con una simetrización que introdujo Blaschke que se denomina la simetrización de Minkowski. Veremos las propiedades fundamentales de esta simetrización, además de como se comporta para el volumen, el diámetro, el inradio y el circunradio.

Terminamos el segundo capítulo con un apartado que recoge ejemplos de otras simetrizaciones. El objetivo de estos ejemplos de simetrizaciones es comprobar que las hipótesis pedidas a las simetrizaciones en el capítulo 3, en el que se caracterizan las simetrizaciones, son necesarias.

En el tercer capítulo trataremos con caracterizaciones. El objetivo de la primera sección es llegar al corolario 3.1.7, que es una caracterización de la simetrización de Steiner. La simetrización debe ser respecto de un hiperplano H y las propiedades que debe cumplir son: que la simetrización sea monótona, que conserve el volumen de los cuerpos convexos y, o bien que sea invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos, o bien que sea invariante por la proyección sobre H . Hay que destacar que si una simetrización cumple estas propiedades, puede diferir en la de Steiner para los conjuntos que estén contenidos en un hiperplano ortogonal a H , como se muestra en el ejemplo 3.2.

En este trabajo hemos incluido dos caracterizaciones de la simetrización de Minkowski. La primera, el teorema 3.2.2, donde H puede tener cualquier dimensión entre 0 y $n - 1$,

las hipótesis pedidas son que sea monótona, que sea lineal y que sea invariante sobre conjuntos H -simétricos. La segunda caracterización, el teorema 3.2.6, es para cuando H tiene dimensión $n - 1$ y le pedimos a la simetrización que sea monótona, que conserve la anchura media y, que cumpla una de las tres propiedades equivalentes para este caso: ser invariante para conjuntos H -simétricos, ser invariante en la proyección sobre H , o ser invariante para cilindros esféricos H -simétricos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo vamos a recoger las herramientas básicas de la geometría convexa y algunos resultados necesarios para el desarrollo posterior. Las definiciones y resultados de este capítulo las hemos obtenido principalmente de [10]. Como el objetivo de este capítulo es presentar los contenidos básicos, presentaremos los resultados sin realizar las demostraciones.

Respecto a la notación, utilizaremos \mathbb{R}^n para referirnos al espacio euclídeo n -dimensional. Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto escalar usual, y por $|\cdot|$ la norma euclídea. Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ escribiremos $\text{cl } A$, $\text{int } A$, ∂A para referirnos a la clausura de A , el interior de A y la frontera de A respectivamente. Escribiremos $\text{relint } A$ para referirnos al interior relativo de A , es decir, el interior del conjunto A relativo al menor subespacio afín que lo contiene.

Representaremos por \mathbb{S}^{n-1} la esfera unidad $n - 1$ -dimensional. B_n denotará la bola unidad n -dimensional centrada en el origen y, cuando tenga radio r , escribiremos rB_n . Además, para una bola i -dimensional de radio r centrada en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ escribiremos $rB_i(x)$.

Denotaremos al grassmanniano de los subespacios i -dimensionales de \mathbb{R}^n como $\mathcal{G}(n, i)$. Esto es, el espacio que contiene todos los subespacios lineales de dimensión i de \mathbb{R}^n . Sea $H \in \mathcal{G}(n, i)$. Denotaremos por H^\perp el complemento ortogonal de H , es decir, $H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in H\}$.

1.1. Cuerpos convexos

Un conjunto K de \mathbb{R}^n diremos que es convexo si dados dos puntos cualesquiera de K , el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto, es decir, la combinación convexa $(1 - \lambda)x + \lambda y \in K$ para todo $x, y \in K$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.

Un vector x de \mathbb{R}^n es una combinación convexa de x_1, \dots, x_k si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ que cumplen $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ y $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, k$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$.

Definición 1.1.1. Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se define la dimensión de A como la dimensión del menor espacio afín que lo contiene y se representa por $\dim A$.

Representaremos la clase de todos los subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n como \mathcal{C}^n . Llamaremos cuerpo convexo a todo conjunto convexo y compacto no vacío y denotaremos como \mathcal{K}^n a la familia de todos ellos. Escribiremos \mathcal{K}_n^n la familia de todos los cuerpos convexos de dimensión n .

En este trabajo constan de gran importancia los conjuntos simétricos respecto de algún $H \in \mathcal{G}(n, i)$. Sean $H \in \mathcal{G}(n, i)$ y A un conjunto. Decimos que A es simétrico respecto de H o H -simétrico si, para todo $x \in A$, se cumple $2(x|H) - x \in A$. Así, vamos a denotar por \mathcal{K}_H^n la subfamilia de todos los cuerpos convexos que son simétricos respecto de H . Análogamente, vamos a representar la familia de los conjuntos compactos que son simétricos respecto de H como \mathcal{C}_H^n . Además, llamaremos \mathcal{K}_0^n a la familia de cuerpos convexos que son centralmente simétricos, es decir, simétricos respecto del origen. También utilizaremos como notación \mathcal{K}_{nH}^n para referirnos a $(\mathcal{K}_n^n)_H$, es decir, la clase de los cuerpos convexos en \mathbb{R}^n de dimensión n que son H -simétricos. Si $K \in \mathcal{K}^n$, escribiremos K^H para referirnos al conjunto obtenido al realizar una reflexión a K respecto de H .

Definición 1.1.2. Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R}^n y $u \neq 0$ un vector unitario. Entonces A y B están estrictamente separados por $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle u, x \rangle = c\}$, si $A \subset \text{int } H^-$ y $B \subset \text{int } H^+$, o viceversa, donde $\text{int } H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle > c\}$ y $\text{int } H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle < c\}$.

Teorema 1.1.3. Sean K un conjunto convexo y cerrado y $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$. Entonces K y x pueden separarse estrictamente.

Definición 1.1.4. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Se define el conjunto dual o polar de A como

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 1, \forall a \in A\}.$$

Proposición 1.1.5. Sean A, B subconjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n . Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $A \subset B$ entonces $B^* \subset A^*$.
2. Si $\lambda > 0$, entonces $(\lambda A)^* = (1/\lambda)A^*$.
3. $A \subset (A^*)^* =: A^{**}$.

Definición 1.1.6. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado. Se define la función soporte de K como

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u \rangle : x \in K\}, \quad u \in \mathbb{R}^n.$$

La función soporte cumple la siguientes propiedades.

Proposición 1.1.7. Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Se cumple que

- $h_{K+x}(u) = h_K(u) + \langle x, u \rangle$.
- $h_K \leq h_L$ si, y solo si, $K \subset L$. Así que $h_K = h_L$ si, y solo si $K = L$.
- $h_{\lambda K}(u) = \lambda h_K(u)$.
- $h_{K \cap L}(u) = \min\{h_K(u), h_L(u)\}$ y $h_{\text{conv}(K \cup L)} = \max\{h_K(u), h_L(u)\}$.

Las funciones soporte van a caracterizar a los cuerpos convexos. El siguiente teorema nos va a permitir caracterizar los conjuntos convexos a partir de su función soporte.

Teorema 1.1.8. *Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función sublineal, entonces existe un único conjunto convexo y compacto K en \mathbb{R}^n cuya función soporte es f .*

Definición 1.1.9. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Se define la anchura de K en la dirección $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ como*

$$\omega(K, u) := h_K(u) + h_K(-u).$$

Definimos la anchura media de K como el valor medio de la función anchura sobre \mathbb{S}^{n-1} , es decir,

$$b(K) = \frac{2}{n\kappa_n} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_K(u) du.$$

La función $b(\cdot)$ es estrictamente creciente sobre cuerpos convexos, es decir, si $K \subset K'$ ambos cuerpos convexos, entonces $b(K) \leq b(K')$ y si el contenido es estricto, la desigualdad también lo será.

Definición 1.1.10. *Definimos:*

- $r(K) = \max\{r \geq 0 : x + rB_n \subset K, x \in \mathbb{R}^n\}$ como el **inradio** de K .
- $R(K) = \min\{R \geq 0 : K \subset x + RB_n, x \in \mathbb{R}^n\}$ como el **circunradio** de K .
- $D(K) = \max\{|x - y| : x, y \in K\}$ como el **diámetro** de K . El diámetro también se puede definir como $D(K) = \max\{\omega(K, u), u \in \mathbb{S}^{n-1}\}$.

A continuación vamos a presentar la suma de Minkowski. Esta va a ser la operación entre conjuntos más frecuente a lo largo del trabajo.

Definición 1.1.11. *Definimos la suma de Minkowski de dos conjuntos cualesquiera A y B como*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

Algunas propiedades de la suma de Minkowski para $K, L, K_1, K_2, K_3 \in \mathcal{K}^n$ cuerpos convexos y $\lambda, \mu > 0$, son

$$\begin{aligned} \lambda K + \lambda L &= \lambda(K + L), \\ \lambda K + \mu K &= (\lambda + \mu)K, \\ (K_1 \cup K_2) + K_3 &= (K_1 + K_3) \cup (K_2 + K_3), \\ (K_1 \cap K_2) + K_3 &= (K_1 + K_3) \cap (K_2 + K_3). \end{aligned}$$

Proposición 1.1.12 (Cancelación de la suma de Minkowski para cuerpos convexos). Sean $K_1, K_2, L \in \mathcal{K}^n$. Si $K_1 + L = K_2 + L$, entonces $K_1 = K_2$.

Definición 1.1.13. Sean K un conjunto de \mathbb{R}^n y H un hiperplano. Se define la proyección ortogonal de K en H como $K|H = H \cap (K + H^\perp)$. Por la última propiedad de la suma de Minkowski 1.1.11 tenemos que la proyección ortogonal será lineal, es decir, si $K, L \in \mathcal{K}^n$, entonces $(K + L)|H = K|H + L|H$.

La función soporte y la función anchura media son lineales para la suma de Minkowski.

Proposición 1.1.14. Sean $K, L \in \mathcal{K}^n$ y $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Se cumple

$$h_{K+L}(u) = h_K(u) + h_L(u).$$

Proposición 1.1.15. Si $K, L \in \mathcal{K}^n$, entonces

$$b(K + L) = b(K) + b(L).$$

Respecto al diámetro, tenemos la siguiente desigualdad para la suma de Minkowski.

Proposición 1.1.16. Si K y L son conjuntos, tenemos la siguiente desigualdad para el diámetro

$$D(K + L) \leq D(K) + D(L).$$

1.2. Volumen

El volumen n -dimensional de un cuerpo convexo K , $\text{vol } K$, es su medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Cuando estemos en \mathbb{R}^n y queramos hablar del volumen i -dimensional de un conjunto L , escribiremos $\text{vol}_i(L)$.

Proposición 1.2.1. Algunas propiedades del volumen son:

- $\text{vol}(K)$ no varía tras movimientos rígidos de K .
- Para todo $\lambda \geq 0$, tenemos $\text{vol}_i(\lambda K) = \lambda^i \text{vol}_i(K)$, es decir, es homogéneo de grado i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.
- $\text{vol}(K) = 0$ si y sólo si, K tiene dimensión menor o igual a $n - 1$.
- El volumen depende continuamente de K .
- Si $K \subset K'$, entonces $\text{vol}(K) \leq \text{vol}(K')$. La igualdad se tiene si, y sólo si $\text{vol}(K') = 0$ o $K = K'$.

Proposición 1.2.2. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. La función que da el volumen de las secciones mediante hiperplanos paralelos es continua.

Teorema 1.2.3 (Principio de Cavalieri). Sean K un subconjunto de \mathbb{R}^n y $H \in \mathcal{G}(n, i)$ un subespacio de dimensión i . Entonces

$$\text{vol}(K) = \int_{K|H} \text{vol}_{n-i} \left(K \cap (x + H^\perp) \right) dx.$$

Denotaremos el volumen de la bola unidad como

$$\kappa_n = \text{vol}(B_n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)}$$

donde Γ denota la función Gamma, $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Definición 1.2.4. *El área de superficie de un cuerpo convexo $K \in \mathcal{K}^n$, denotada por $S(K)$, es el límite de las áreas de superficie de cualquier sucesión de polítopos convexos que converjan a K .*

Proposición 1.2.5. *Entre las propiedades del funcional área tenemos:*

- $S(K)$ es invariante por movimientos rígidos de K ,
- $S(K)$ depende continuamente de K ,
- $S(K)$ es homogénea de grado $n - 1$, es decir, $S(\lambda K) = \lambda^{n-1} S(K)$ para todo $\lambda > 0$.
- Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$ con $K \subset K'$. Entonces $S(K) \leq S(K')$, obteniéndose la igualdad si y solo si $K = K'$ o $S(K') = 0$.

Destacamos que el área de superficie puede ser obtenida a través de la fórmula de Minkowski:

Teorema 1.2.6 (Fórmula de Minkowski). *El área de superficie de un conjunto convexo K viene dado por*

$$S(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

Para el cálculo del volumen de la suma de Minkowski de dos cuerpos convexos necesitaremos echar mano de los volúmenes mixtos.

Teorema 1.2.7. *Sean K_1, \dots, K_m cuerpos convexos de \mathbb{R}^n . Entonces para números cualesquiera $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, el volumen de la combinación lineal $\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m$ es un polinomio homogéneo de grado n , en las variables λ_i ,*

$$\text{vol}(\lambda_1 K_1 + \dots + \lambda_m K_m) = \sum_{i_1=1}^m \dots \sum_{i_n=1}^m V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n},$$

cuyos coeficientes $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ se denominan los volúmenes mixtos de K_1, \dots, K_m .

Vamos a denotar por $V_{n-1,1}(K, K')$ el volumen mixto $V(K, \dots, K, K')$ donde K aparece $n - 1$ veces. Si $K, K', K_2, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$, algunas propiedades de los volúmenes mixtos son:

- $V : (\mathcal{K}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación continua en todos sus argumentos.
- $V(K, \dots, K) = \text{vol}(K)$ es el volumen de K .
- Son lineales para todas sus variables, es decir, si $\lambda, \mu \geq 0$, entonces $V(\lambda K + \mu K', K_2, \dots, K_n) = \lambda V(K, K_2, \dots, K_n) + \mu V(K', K_2, \dots, K_n)$.

$$\blacksquare V_{n-1,1}(K, K') = \frac{1}{n} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K + \lambda K') - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

Presentamos la primera desigualdad de Minkowski, que relaciona $V_{n-1,1}$ con los volúmenes de los cuerpos sobre los que se aplica.

Teorema 1.2.8 (Primera desigualdad de Minkowski). *Sean $K, L \in \mathcal{K}_n^n$. Se cumple la siguiente desigualdad*

$$V_{n-1,1}(K, L)^n \geq \text{vol}(K)^{n-1} \text{vol}(L).$$

Además, la igualdad se da si y solo si son homotéticos, es decir, si existe un $\lambda > 0$ tal que $K = \lambda L + x_0$.

Definimos la distancia de Hausdorff como una distancia entre conjuntos compactos no vacíos de \mathbb{R}^n .

Definición 1.2.9. *Dados A y B subconjuntos de \mathbb{R}^n se define la distancia de Hausdorff entre A y B como*

$$\delta(A, B) = \min \{ \lambda \geq 0 : A \subset B + \lambda B_n, B \subset A + \lambda B_n \}. \quad (1.1)$$

El teorema de selección de Blaschke garantiza la existencia de conjuntos con propiedades extremales. La existencia de estos conjuntos va a ser clave para la demostración de otros resultados. Para ello, primero definamos qué es una sucesión uniformemente acotada.

Definición 1.2.10. *Una familia de conjuntos convexos se dice que es uniformemente acotada si existe una bola de un determinado radio de \mathbb{R}^n que contiene todos los elementos de la familia.*

Teorema 1.2.11 (Teorema de selección de Blaschke). *De cualquier sucesión uniformemente acotada de conjuntos convexos compactos se puede extraer una subsucesión convergente a un conjunto convexo y compacto.*

Las simetrizaciones pueden tener diferentes propiedades. A continuación vamos a enunciar algunas de estas propiedades, que serán de especial interés en el capítulo de caracterizaciones.

Definición 1.2.12. *Dados $H \in \mathcal{G}(n, i)$ y $\diamond : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}_H^n$ una i -simetrización en $\mathcal{B}^n = \mathcal{C}^n, \mathcal{K}^n$ o \mathcal{K}_n^n respecto de H . Para $K, K' \in \mathcal{B}^n$, algunas propiedades posibles que puede cumplir \diamond son:*

1. *Monótona: Si $K \subset K'$ entonces $\diamond K \subset \diamond K'$.*
2. *Estrictamente monótona: Si $K \subset K'$ entonces $\diamond K \subset \diamond K'$ y además $K \neq K'$ implica $\diamond K \neq \diamond K'$.*
3. *Idempotente: $\diamond(\diamond K) = \diamond K$.*
4. *Invariante sobre conjuntos H -simétricos: Si K es H -simétrico, entonces $\diamond K = K$.*

5. *Invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos:* Llamaremos cilindro esférico H -simétrico a un conjunto de la forma $rB_i(x) + s(B_n \cap H^\perp)$, donde $s > 0$ y $rB_i(x) \subset H$ es un disco centrado en x de radio $r > 0$. Si K es un cilindro esférico H -simétrico, entonces $\diamond K = K$.
6. *Invariante en la proyección sobre H :* $(\diamond K)|H = K|H$.
7. *Lineal:* $\diamond(K + K') = \diamond K + \diamond K'$.

1.3. Medida

Proposición 1.3.1. [9] *Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y no negativa para casi todo $x \in A \subset \mathbb{R}^n$. Si*

$$\int_A f(x) dx = 0,$$

entonces $f(x) = 0$ para casi todo punto $x \in A$. Si f es continua en A , será $f(x) = 0$ para todo $x \in A$.

Teorema 1.3.2. [9] *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Si a cada $x \in \mathbb{R}^n$ le asociamos una sucesión de conjuntos $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de dimensión n que converge a x , entonces*

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{\text{vol}(E_i(x))} \int_{E_i(x)} f(s) ds \quad (1.2)$$

para casi todo punto $x \in A$. Si la función f es continua en A , la igualdad (1.2) será cierta para todo $x \in A$.

Capítulo 2

Simetrizaciones

En este capítulo vamos a tratar diferentes simetrizaciones así como algunas de sus propiedades. Empezaremos con la herramienta principal del trabajo, la simetrización de Steiner, que nos permitirá obtener multitud de resultados, como la desigualdad isoperimétrica, la desigualdad isodiamétrica, la desigualdad de Brunn-Minkowski, o la desigualdad de Blaschke-Santaló. Posteriormente veremos la simetrización de Minkowski junto con sus propiedades. Por último, daremos algunos ejemplos de otras simetrizaciones.

2.1. Simetrización de Steiner

Para esta sección nos basaremos principalmente en [4] y [11], aunque también en [3], [7] y [8]. Vamos a ver las propiedades fundamentales de la simetrización de Steiner.

La simetrización de Steiner es una herramienta muy potente ya que permite transformar conjuntos en otros simétricos conservando ciertas propiedades. Esto nos permitirá obtener resultados fundamentales, como la desigualdad isoperimétrica, la igualdad isodiamétrica o la fórmula de Brunn-Minkowski. Fue introducida por Steiner en 1838 como una herramienta para demostrar la desigualdad isoperimétrica, pero ha acabado siendo muy útil para obtener variedad de resultados. Actualmente existen muchas publicaciones acerca de la simetrización de Steiner, para la cual podemos encontrar aplicaciones en Geometría, Análisis de funciones o Análisis de EDP.

En [5] se habla sobre el intento de Steiner por demostrar la desigualdad isoperimétrica. Si bien Steiner dio una demostración de esta desigualdad, no era correcta. La idea de Steiner era que para cualquier figura en el plano que no sea un círculo, hay otra con el mismo perímetro pero mayor área. Pero en realidad de esto solo podemos deducir que si existe solución, debe ser el círculo. De esta manera, el teorema de esfericidad de Gross es la pieza que le faltó a Steiner, con la que queda completada la prueba.

Vamos a comenzar definiendo la simetrización de Steiner, que será el tema central de este capítulo.

Definición 2.1.1. Sean K un cuerpo convexo y H un hiperplano de \mathbb{R}^n . Para cada $x \in K|H$, $(x+H^\perp)$ corta a K en un segmento de longitud $\text{vol}_1(K \cap (x+H^\perp))$. Consideramos $s(x+H^\perp)$ el segmento en $x+H^\perp$ de longitud $\text{vol}_1(K \cap (x+H^\perp))$ cuyo punto medio es $(x+H^\perp) \cap H = x|H$. Se define la simetrización de Steiner de K respecto de H como el conjunto

$$\sigma_H(K) = \bigcup_{x \in K|H} s(x+H^\perp). \quad (2.1)$$

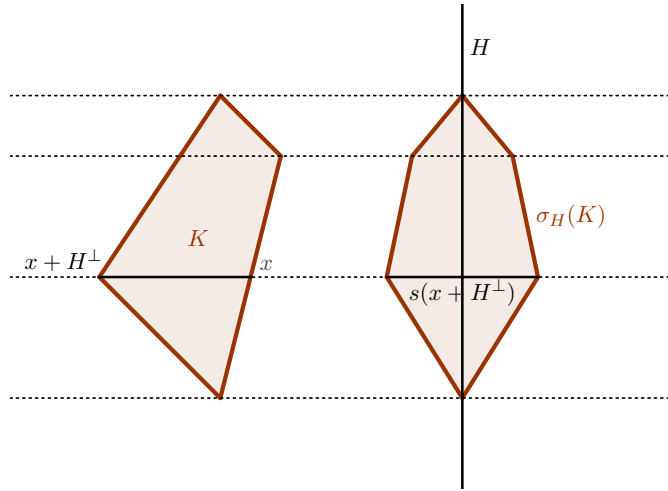


Figura 2.1: Simetrización de Steiner de K

Denotemos por u un vector unitario normal a H . De manera analítica podemos definir la simetrización de Steiner como

$$\sigma_H(K) = \left\{ x + \theta u : x \in K|H, |\theta| \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x+H^\perp)) \right\}.$$

Esta definición nos servirá para múltiples demostraciones. De la propia definición, podemos deducir inmediatamente que:

- $\sigma_H(K)$ es simétrico respecto a H , ya que cada segmento $s(x+H^\perp)$ lo es.
- La simetrización de Steiner es invariante por traslaciones.

Definición 2.1.2. [11] Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y H un hiperplano, definimos γ como la función que a cada punto $x \in K|H$ le asocia $\text{vol}_1(K \cap (x+H^\perp))$, es decir, la longitud del segmento de K ortogonal a H que pasa por x . Sea u un vector unitario ortogonal a H . Definimos $\alpha, \beta : K|H \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \min\{\theta \in \mathbb{R} : x + \theta u \in K\}, \\ \beta(x) &= \max\{\theta \in \mathbb{R} : x + \theta u \in K\}. \end{aligned}$$

Con estas definiciones se tiene que

$$\gamma(x) = \beta(x) - \alpha(x) = \text{vol}_1(K \cap (x+H^\perp)). \quad (2.2)$$

Podemos escribir entonces la definición simetrización de Steiner como

$$\sigma_H(K) = \left\{ x + \theta u : x \in K|H, |\theta| \leq \frac{1}{2}\gamma(x) \right\}.$$

Proposición 2.1.3. *Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y H un hiperplano, la función $\gamma : K|H \rightarrow \mathbb{R}$ es cóncava.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in K|H$ y $0 \leq \lambda \leq 1$. Por un lado, por la definición de α , $x_1 + \alpha(x_1)u \in K$ y $x_2 + \alpha(x_2)u \in K$. Así que, usando la convexidad de K

$$\lambda(x_1 + \alpha(x_1)u) + (1 - \lambda)(x_2 + \alpha(x_2)u) = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 + (\lambda\alpha(x_1) + (1 - \lambda)\alpha(x_2))u \in K.$$

Por la definición de α , al ser un mínimo se tiene

$$\alpha(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda\alpha(x_1) + (1 - \lambda)\alpha(x_2).$$

De manera análoga, como β es un máximo, tenemos

$$\beta(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda\beta(x_1) + (1 - \lambda)\beta(x_2).$$

Y, por tanto,

$$\begin{aligned} \gamma(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &= \beta(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - \alpha(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \\ &\geq \lambda(\beta(x_1) - \alpha(x_1)) + (1 - \lambda)(\beta(x_2) - \alpha(x_2)) = \\ &= \lambda\gamma(x_1) + (1 - \lambda)\gamma(x_2). \end{aligned}$$

□

A continuación, vamos a ver algunas propiedades básicas de la simetrización de Steiner. De aquí en adelante H denotará siempre un hiperplano.

La primera propiedad es la de la monotonía. Esto es, dado un subconjunto de un conjunto de \mathbb{R}^n , al realizar las simetrizaciones respecto de un mismo hiperplano a ambos se conservará la inclusión.

Proposición 2.1.4. *Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$ dos cuerpos convexos tales que $K' \subset K$. Entonces $\sigma_H(K') \subset \sigma_H(K)$.*

Demostración. Para todo $x \in K'|H$, como $K' \subset K$ tendremos también $K' \cap (x + H^\perp) \subset K \cap (x + H^\perp)$. Sean $s(x + H^\perp)$ y $s'(x + H^\perp)$ los segmentos en $x + H^\perp$ de longitudes $\text{vol}_1(K \cap (x + H^\perp))$ y $\text{vol}_1(K' \cap (x + H^\perp))$ respectivamente, cuyos puntos medios coinciden con $x|H$. Así, como $s'(x + H^\perp) \subset s(x + H^\perp)$, ya que $s(x + H^\perp)$ tiene mayor longitud que $s'(x + H^\perp)$, tenemos:

$$\sigma_H(K') = \bigcup_{x \in K'|H} s'(x + H^\perp) \subset \bigcup_{x \in K'|H} s(x + H^\perp) \subset \bigcup_{x \in K|H} s(x + H^\perp) = \sigma_H(K).$$

□

En la simetrización de Steiner, las bolas jugarán un papel fundamental ya que son invariantes (aunque no son el único tipo de conjunto que es invariante). Esto se debe a que la simetrización de Steiner no modifica los conjuntos simétricos respecto de H y las bolas son simétricas respecto de cualquier hiperplano H .

Proposición 2.1.5. *Para todo H que contenga al origen se cumple $\sigma_H(B_n) = B_n$.*

Demostración. Consideremos $x \in B_n|H$. Como $0 \in H$, entonces B_n es simétrica respecto de H , por lo que el punto medio de $(x+H^\perp) \cap B_n$ tiene que estar en H y es $(x+H^\perp) \cap H = x$. Por tanto, el segmento $s(x+H^\perp) = (x+H^\perp) \cap B_n$, de donde

$$\sigma_H(B_n) = \bigcup_{x \in B_n|H} s(x+H^\perp) = \bigcup_{x \in B_n|H} ((x+H^\perp) \cap B_n) = B_n,$$

donde la última igualdad viene dada por ser la descomposición de B_n en segmentos. \square

La simetrización de Steiner es homogénea de grado 1 para constantes positivas.

Proposición 2.1.6. *Sean $K \in \mathcal{K}^n$ un cuerpo convexo y H un hiperplano que contiene al origen. Entonces $\sigma_H(\lambda K) = \lambda \sigma_H(K)$ para todo $\lambda > 0$.*

Demostración. Esto es consecuencia directa de la definición: como vol_1 es una función homogénea de grado 1,

$$\text{vol}_1(\lambda K \cap \lambda(x+H^\perp)) = \text{vol}_1(\lambda(K \cap (x+H^\perp))) = \lambda \text{vol}_1(K \cap (x+H^\perp))$$

para todo $x \in K|H$. Si representamos los segmentos correspondientes al conjunto λK como $s'(\lambda x+H^\perp)$, se tiene que $s'(\lambda x+H^\perp) = \lambda s(x+H^\perp)$, de donde se deduce que

$$\sigma_H(\lambda K) = \bigcup_{\lambda x \in \lambda K|H} s'(\lambda x+H^\perp) = \bigcup_{x \in K|H} \lambda s(x+H^\perp) = \lambda \sigma_H(K).$$

\square

Una propiedad importante de la simetrización de Steiner es que conserva la convexidad y la compacidad.

Proposición 2.1.7. *Para todo $K \in \mathcal{K}^n$, se cumple que $\sigma_H(K) \in \mathcal{K}^n$, es decir, es convexo y compacto.*

Demostración. La simetrización de Steiner es una aplicación biyectiva entre K y su imagen $\sigma_H(K)$. Esto se debe a que cada $x \in K$ tiene como imagen un punto $\sigma_H(x)$ que se encuentra sobre la recta $x+H^\perp$ y cuya distancia a H , teniendo en cuenta el signo, es igual a la distancia de x al punto medio de $(x+H^\perp) \cap K$.

El simetrizado de un conjunto acotado es acotado trivialmente: Supongamos que H pasa por el origen y $K \subset \lambda B_n$. Por las proposiciones 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6 se tiene $\sigma_H(K) \subset \sigma_H(\lambda B_n) = \lambda B_n$.

Vamos a ver que el simetrizado de un conjunto cerrado es cerrado. Para ello, utilizaremos que dada una sucesión convergente $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ en $\sigma_H(K)$, el límite $y \in \sigma_H(K)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Para cada y_i existen $x_i \in K|H$ y $|\theta_i| \leq \frac{1}{2}\gamma(x_i)$ tales que

$$y_i = (x_i, \theta_i).$$

El límite y también será de la forma (x, θ) , con $x \in K|H$ y $\theta \in \mathbb{R}$. Como $|x_i - x| \leq |y_i - y|$ e $y_i \rightarrow y$ cuando $i \rightarrow \infty$, también se tendrá que $x_i \rightarrow x$ cuando $i \rightarrow \infty$.

Ahora, si llamamos $a_i = (x_i, \alpha(x_i))$ y $b_i = (x_i, \beta(x_i))$, ambas sucesiones de puntos están en K . Como K es compacto, existen subsucesiones convergentes (podemos suponer que son la de partida) y puntos a y b para los que $a_i \rightarrow a$ y $b_i \rightarrow b$ cuando $i \rightarrow \infty$. Como $a_i = (x_i, \alpha(x_i)) \rightarrow a$, entonces a tendrá la forma (x, a') . Análogamente b será de la forma (x, b') . Por tanto, tenemos

$$|\theta| = \lim_{i \rightarrow \infty} |\theta_i| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(\beta(x_i) - \alpha(x_i)) = \frac{1}{2}(b' - a') \leq \frac{1}{2}\gamma(x).$$

Por lo que $y \in \sigma_H(K)$ y $\sigma_H(K)$ es cerrado.

Así pues, sólo queda ver que el simetrizado de un conjunto convexo es convexo. Denotamos como u un vector unitario ortogonal a H . Sean $y_1, y_2 \in \sigma_H(K)$ cualesquiera. Se pueden escribir como $y_1 = x_1 + \theta_1 u$ e $y_2 = x_2 + \theta_2 u$ con $x_1, x_2 \in K|H$, $|\theta_1| \leq \frac{1}{2}\gamma(x_1)$ y $|\theta_2| \leq \frac{1}{2}\gamma(x_2)$. Veamos que el segmento que une y_1 e y_2 está en $\sigma_H(K)$. Para ello, sea $0 \leq \lambda \leq 1$ arbitrario. Tenemos que el punto

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 &= \lambda(x_1 + \theta_1 u) + (1 - \lambda)(x_2 + \theta_2 u) = \\ &= \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 + (\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2)u \end{aligned}$$

estará en $\sigma_H(K)$ si $|\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2| \leq \frac{1}{2}\gamma(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$. Para ver esto, utilizando la proposición 2.1.3 tenemos

$$|\lambda\theta_1 + (1 - \lambda)\theta_2| \leq \lambda|\theta_1| + (1 - \lambda)|\theta_2| \leq \lambda \frac{1}{2}\gamma(x_1) + (1 - \lambda) \frac{1}{2}\gamma(x_2) \leq \frac{1}{2}\gamma(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Luego $\sigma_H(K)$ es convexo. □

Para la intersección y unión de dos cuerpos convexos tenemos las siguientes inclusiones.

Proposición 2.1.8. *Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$ dos cuerpos convexos. Tenemos las siguientes propiedades:*

1. $\sigma_H(K \cap K') \subset \sigma_H(K) \cap \sigma_H(K')$.
2. $\text{conv}[\sigma_H(K) \cup \sigma_H(K')] \subset \text{conv}[\sigma_H(K \cup K')]$.

Demostración. Primero, veamos 1: teniendo en cuenta la monotonía de σ_H , como $K \cap K' \subset K, K'$, deducimos $\sigma_H(K \cap K') \subset \sigma_H(K)$ y $\sigma_H(K \cap K') \subset \sigma_H(K')$. Con estas dos desigualdades obtenemos $\sigma_H(K \cap K') \subset \sigma_H(K) \cap \sigma_H(K')$.

Por otro lado, para ver 2, sabemos que $K \cup K' \subset \text{conv}(K \cup K')$. Aplicando la monotonía, $\sigma_H(K \cup K') \subset \sigma_H[\text{conv}(K \cup K')]$, que además es convexo por la proposición 2.1.7. Así, tenemos que $\text{conv}[\sigma_H(K \cup K')] \subset \sigma_H[\text{conv}(K \cup K')]$. Además, como ambos $K, K' \subset K \cup K'$, por la monotonía se tiene $\sigma_H(K), \sigma_H(K') \subset \sigma_H(K \cup K')$ y, por tanto, $\text{conv}[\sigma_H(K) \cup \sigma_H(K')] \subset \text{conv}[\sigma_H(K \cup K')]$. Encadenando estas inclusiones, tenemos

$$\text{conv}[\sigma_H(K) \cup \sigma_H(K')] \subset \text{conv}[\sigma_H(K \cup K')] \subset \sigma_H[\text{conv}(K \cup K')].$$

□

Observación 1. Para ver que no se cumplen los recíprocos de la proposición anterior, construimos los ejemplos de las figuras 2.2 y 2.3.

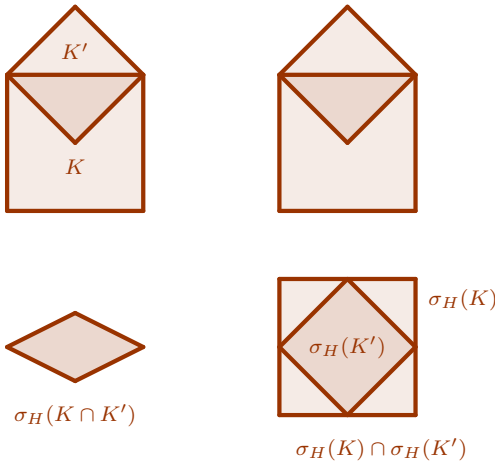


Figura 2.2: Ejemplo de $\sigma_H(K) \cap \sigma_H(K') \not\subset \sigma_H(K \cap K')$

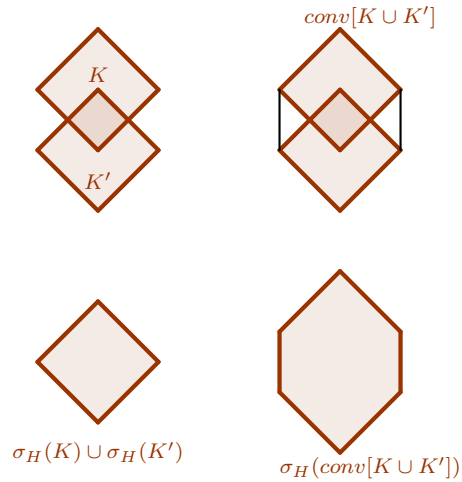


Figura 2.3: Ejemplo de $\sigma_H(\text{conv}[K \cup K']) \not\subset \text{conv}[\sigma_H(K) \cup \sigma_H(K')]$

Respecto a la suma de conjuntos tenemos la siguiente propiedad, que necesitaremos para algunas demostraciones posteriores.

Proposición 2.1.9. Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$ y H un hiperplano. Entonces se cumple

$$\sigma_H(K) + \sigma_H(K') \subset \sigma_H(K + K').$$

Demostración. Sean $x \in \sigma_H(K)$, $y \in \sigma_H(K')$ y u un vector unitario ortogonal a H . En tal caso, podemos escribir $x = \bar{x} + \theta_x u$ e $y = \bar{y} + \theta_y u$, con $\bar{x} \in K|H$ e $\bar{y} \in K'|H$, verificando que:

$$|\theta_x| \leq \frac{1}{2}\gamma(x) = \frac{\text{vol}_1(K \cap (x + H^\perp))}{2} \quad \text{y} \quad |\theta_y| \leq \frac{1}{2}\gamma(y) = \frac{\text{vol}_1(K' \cap (y + H^\perp))}{2}.$$

Entonces $x + y = (\bar{x} + \bar{y}) + (\theta_x + \theta_y)u$, donde $\bar{x} + \bar{y} \in K|H + K'|H = (K + K')|H$. Veamos que se cumple la siguiente inclusión

$$K \cap (x + H^\perp) + K' \cap (y + H^\perp) \subset (K + K') \cap (x + y + H^\perp).$$

Para ello, sea $z \in K \cap (x + H^\perp) + K' \cap (y + H^\perp)$. Este z lo podemos escribir como $a + b$ con $a \in K \cap (x + H^\perp)$ y $b \in K' \cap (y + H^\perp)$. En particular, como $a \in K$ y $b \in K'$, tenemos $z = a + b \in K + K'$. Por otro lado, $a = x + h_1$ y $b = y + h_2$ con $h_1, h_2 \in H^\perp$. Por tanto, $z = a + b = x + y + (h_1 + h_2) \in x + y + H^\perp$. Por lo que $z \in (K + K') \cap (x + y + H^\perp)$. Con esto, usando la monotonía de la simetrización de Steiner, tenemos

$$\begin{aligned} |\theta_x + \theta_y| &\leq |\theta_x| + |\theta_y| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + H^\perp)) + \frac{1}{2} \text{vol}_1(K' \cap (y + H^\perp)) = \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + H^\perp) + K' \cap (y + H^\perp)) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \text{vol}_1((K + K') \cap (x + y + H^\perp)). \end{aligned}$$

□

Otra propiedad muy importante de la simetrización de Steiner es que dada una sucesión convergente de cuerpos convexos de dimensión n , la sucesión obtenida al simetrizar todos ellos converge.

Proposición 2.1.10. *Sea $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cuerpos convexos convergente a un cuerpo convexo K con $\text{int}(K) \neq \emptyset$, entonces la sucesión $(\sigma_H(K_i))_{i \in \mathbb{N}}$ converge a $\sigma_H(K)$.*

Para la demostración de esta proposición necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.1.11. *Sean $K_i, K \in \mathcal{K}^n$, $i \in \mathbb{N}$ con $\dim K = n$ y $0 \in \text{int} K$. Entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$ si y solo si, $(1 - \varepsilon)K \subset K_i \subset (1 + \varepsilon)K$ para todo $\varepsilon > 0$ e i suficientemente grande.*

Demostración. Como $0 \in \text{int} K$ y $\dim K = n$, existe un $r > 0$ para el que $rB_n \subset K$. Dado que $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$, existe un i_0 tal que si $i \geq i_0$, tendremos $rB_n \subset K_i$. Por otro lado, sabemos que dado un $\varepsilon > 0$ (el cual suponemos menor que r), por la definición de métrica de Hausdorff (definición 1.2.9) existe un i_ε tal que si $i \geq i_\varepsilon$, entonces $K_i \subset K + \varepsilon B_n$ y $K \subset K_i + \varepsilon B_n$. De $K_i \subset K + \varepsilon B_n$ se tiene que

$$K_i \subset K + \varepsilon B_n = K + \frac{\varepsilon}{r} rB_n \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K$$

para todo $i \geq \max\{i_0, i_\varepsilon\}$. Análogamente, usando ahora que $K \subset K_i + \varepsilon B_n$, obtenemos que

$$K \subset K_i + \varepsilon B_n = K_i + \frac{\varepsilon}{r} rB_n \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K_i$$

para cualquier $i \geq \max\{i_0, i_\varepsilon\}$. Teniendo en cuenta que $\frac{r - \varepsilon}{r} \leq \frac{r}{r + \varepsilon}$, de los anteriores contenidos deducimos

$$\frac{r - \varepsilon}{r} K \subset \frac{r}{r + \varepsilon} K \subset K_i.$$

Esto demuestra el resultado: para todo $i \geq \max\{i_0, i_\varepsilon\}$,

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right) K \subset K_i \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K.$$

Haciendo $\varepsilon = r\varepsilon'$ tenemos lo que queríamos ver.

Para el recíproco, vamos a suponer que para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe un i_ε tal que

$$(1 - \varepsilon)K \subset K_i \subset (1 + \varepsilon)K$$

y queremos demostrar que $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K$. Pero demostrar esto es equivalente a que dado un ε' , exista un i' que cumpla que $\delta(K_i, K) < \varepsilon'$, es decir, $K \subset K_{i'} + \varepsilon' B_n$ y $K_{i'} \subset K + \varepsilon' B_n$. Para ello, como K es un cuerpo convexo, en particular está acotado y existirá un $R > 0$ tal que $K \subset RB_n$. Teniendo en cuenta que $\varepsilon < 1$,

$$K \subset \frac{1}{1 - \varepsilon} K_i = \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right) K_i \subset K_i + \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon} K \subset K_i + \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)R}{1 - \varepsilon} B_n.$$

Y por otro lado,

$$K_i \subset (1 + \varepsilon)K \subset K + \varepsilon RB_n \subset K + \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)R}{1 - \varepsilon} B_n.$$

Así, dado ε' , como R es un número fijo podemos elegir un ε adecuado que cumpla $\varepsilon' \geq \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)R}{1 - \varepsilon}$ y se cumple lo que queríamos demostrar. \square

Demostración de la proposición 2.1.10. Sea $K_i \in \mathcal{K}^n$, con $i \in \mathbb{N}$, una sucesión de cuerpos convexos que converge a $K \in \mathcal{K}_n^n$. Tenemos que demostrar que $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_H(K_i) = \sigma_H(K)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 \in \text{int } K$. Como $K_i \rightarrow K$, el lema 2.1 nos asegura que $(1 - \varepsilon)K \subset K_i \subset (1 + \varepsilon)K$ para cualquier $\varepsilon > 0$ e i suficientemente grande. Así, por las proposiciones 2.1.4 y 2.1.6, tenemos que

$$(1 - \varepsilon)\sigma_H(K) \subset \sigma_H(K_i) \subset (1 + \varepsilon)\sigma_H(K).$$

Dado que $0 \in \text{int } \sigma_H(K)$, por el mismo lema 2.1 obtenemos que $\sigma_H(K_i) \rightarrow \sigma_H(K)$. \square

Observación 2. Veamos que la proposición 2.1.10 no es cierta en general si $\text{int } K = \emptyset$. Para ello, vamos a construir el siguiente ejemplo. Sea K_i el segmento con extremos el origen y $(1/i, 1)$. La sucesión $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge al segmento con extremos el origen y $(0, 1)$. Tomamos como hiperplano H de simetrización el eje x . Entonces, $\sigma_H(K_i)$ es el segmento sobre el eje x que tiene extremos 0 y $(1/i, 0)$ y el límite de la sucesión $(\sigma_H(K_i))_{i \in \mathbb{N}}$ es el propio origen de coordenadas. Sin embargo, $\sigma_H(K)$ es el segmento $[(0, -1/2), (0, 1/2)]$, como podemos ver en la figura 2.4.

Podemos debilitar la proposición 2.1.10 admitiendo conjuntos que no necesariamente tengan dimensión n . En este caso, en vez de una igualdad, tendremos una inclusión.

Proposición 2.1.12. *Dados un cuerpo convexo $K \in \mathcal{K}^n$ y una sucesión $(K_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$ tal que $\lim_i K_i = K$ y $\lim_i \sigma_H(K_i) \rightarrow \bar{K}$, entonces $\bar{K} \subset \sigma_H(K)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $0 \in H$. Para cada $\rho > 0$, por la convergencia de $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y de $(\sigma_H(K_i))_{i \in \mathbb{N}}$ existirá un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_i \subset K + \rho B_n$

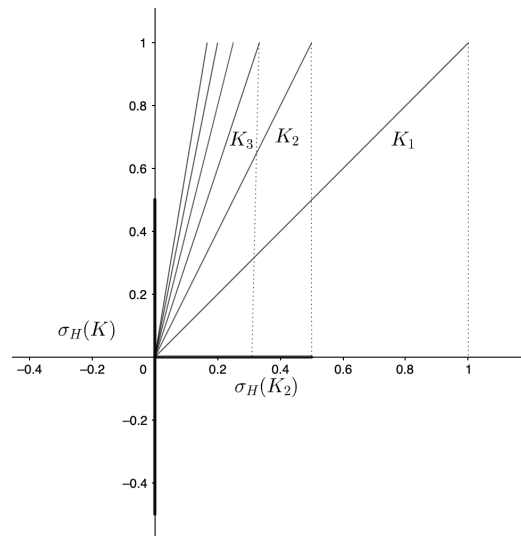


Figura 2.4: Si $\text{int } K = \emptyset$, entonces $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma(K_i) \subset \sigma(K)$

y $\overline{K} \subset \sigma_H(K_i) + \rho B_n$ si $i > i_0$. Así, utilizando la proposición 2.1.5, la proposición 2.1.8 y la monotonía de σ_H tenemos

$$\overline{K} \subset \sigma_H(K_i) + \sigma_H(\rho B_n) \subset \sigma_H(K_i + \rho B_n) \subset \sigma_H(K + 2\rho B_n),$$

luego si hacemos $\rho \rightarrow 0$, tenemos que $(\sigma_H(K + 2\rho B_n))_\rho$ es una sucesión decreciente de cerrados, y por tanto, convergente. Dado un $x \in K$, tomamos la recta $(x + H^\perp)$ y tenemos que $(K + 2\rho B_n) \cap (x + H^\perp) \rightarrow K \cap (x + H^\perp)$ cuando $\rho \rightarrow 0$. Como esto es válido para cada recta, será también válido para el simetrizado por ser la unión de todos estos segmentos: $\sigma_H(K + 2\rho B_n) \rightarrow \sigma_H(K)$, y por tanto, $\overline{K} \subset \sigma_H(K)$. \square

A continuación, vamos a ver cómo se comportan algunas magnitudes de conjuntos tras aplicarles la simetrización de Steiner.

Proposición 2.1.13. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$ un cuerpo convexo. Entonces*

- $\text{vol}(\sigma_H(K)) = \text{vol}(K)$,
- $S(\sigma_H(K)) \leq S(K)$,
- $D(\sigma_H(K)) \leq D(K)$,
- $R(\sigma_H(K)) \leq R(K)$ y $r(\sigma_H(K)) \geq r(K)$.

Demostración. Para el volumen, usaremos la fórmula de Cavalieri (teorema 1.2.3)

$$\text{vol}(K) = \int_{K|H} \text{vol}_1(K \cap (x + H^\perp)) dx = \text{vol}(\sigma_H(K)).$$

La desigualdad para el área de superficie es consecuencia directa de la fórmula de Minkowski (teorema 1.2.6), las proposiciones 2.1.5, 2.1.6 y 2.1.9 y la invarianza del volumen:

$$\begin{aligned} S(\sigma_H(K)) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(\sigma_H(K) + \lambda B_n) - \text{vol}(\sigma_H(K))}{\lambda} \leq \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(\sigma_H(K + \lambda B_n)) - \text{vol}(\sigma_H(K))}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda} = S(K). \end{aligned}$$

Respecto al diámetro, sean $y_1, y_2 \in \sigma_H(K)$ cualesquiera. Se pueden escribir como $y_1 = x_1 + \theta_1 u$ e $y_2 = x_2 + \theta_2 u$ con $x_1, x_2 \in K|H$, $|\theta_1| \leq \frac{1}{2}\gamma(x_1)$ y $|\theta_2| \leq \frac{1}{2}\gamma(x_2)$. Consideremos ahora los puntos $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$

$$\begin{aligned} a_1 &= x_1 + \alpha(x_1)u, & b_1 &= x_1 + \beta(x_1)u, \\ a_2 &= x_2 + \alpha(x_2)u, & b_2 &= x_2 + \beta(x_2)u. \end{aligned}$$

Como $x_1, x_2 \in K|H$, tenemos

$$\begin{aligned} |a_1 - b_2|^2 &= |x_1 - x_2|^2 + |\alpha(x_1) - \beta(x_2)|^2, \\ |a_2 - b_1|^2 &= |x_1 - x_2|^2 + |\alpha(x_2) - \beta(x_1)|^2. \end{aligned}$$

Podemos acotar la distancia de y_1 a y_2 por

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2|^2 &= |x_1 - x_2|^2 + |\theta_1 - \theta_2|^2 \leq \\ &\leq |x_1 - x_2|^2 + (|\theta_1| + |\theta_2|)^2 \leq \\ &\leq |x_1 - x_2|^2 + \frac{1}{4}(\gamma(x_1) + \gamma(x_2))^2 = \\ &= |x_1 - x_2|^2 + \frac{1}{4}(\beta(x_1) - \alpha(x_1) + \beta(x_2) - \alpha(x_2))^2. \end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}(\beta(x_1) - \alpha(x_2))(\beta(x_2) - \alpha(x_1)) \leq \frac{1}{4}(\beta(x_1) - \alpha(x_2))^2 + \frac{1}{4}(\beta(x_2) - \alpha(x_1))^2$, entonces

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2|^2 &\leq |x_1 - x_2|^2 + \frac{1}{2}|\beta(x_1) - \alpha(x_2)|^2 + \frac{1}{2}|\beta(x_2) - \alpha(x_1)|^2 = \\ &= \frac{1}{2}|b_1 - a_2|^2 + \frac{1}{2}|b_2 - a_1|^2 \leq D(K)^2. \end{aligned}$$

Como $y_1, y_2 \in \sigma_H(K)$ eran arbitrarios, $D(\sigma_H(K)) \leq D(K)$.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + r(K)B_n \subset K$. Usando las proposiciones 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7 y 2.1.8 obtenemos que

$$\sigma_H(x) + r(K)B_n = \sigma_H(x) + r(K)\sigma_H(B_n) \subset \sigma_H(x + r(K)B_n) \subset \sigma_H(K),$$

lo que demuestra que $r(K) \leq r(\sigma_H(K))$.

Análogamente, sea $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y + K \subset R(K)B_n$. Entonces,

$$\sigma_H(y) + \sigma_H(K) \subset \sigma_H(y + K) \subset \sigma_H(R(K)B_n) = R(K)B_n,$$

y por tanto, $R(K) \geq R(\sigma_H(K))$. □

2.1.1. Teorema de Esfericidad de Gross

Una de las propiedades fundamentales de la simetrización de Steiner es que, dado cualquier cuerpo convexo, es posible aplicarle una sucesión adecuada de simetrizaciones de Steiner de forma que el conjunto resultante se aproxime a una bola.

Este resultado, nos puede dar la idea intuitiva de que la simetrización de Steiner redondea los conjuntos. Este teorema denominado el teorema de esfericidad de Gross junto con algunas propiedades de la simetrización de Steiner nos permitirán demostrar algunas relaciones geométricas como la desigualdad isoperimétrica o la desigualdad isodiamétrica.

Teorema 2.1.14. Sean $K \in \mathcal{K}_n^n$ y \mathcal{S}_K el conjunto de todos los cuerpos convexos obtenidos al realizar una cantidad finita de simetrizaciones de Steiner a K respecto a hiperplanos que contienen al origen de coordenadas. Entonces, existe una sucesión $K_i \in \mathcal{S}_K$, $i \in \mathbb{N}$, tal que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = \left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n.$$

Demostración. Dado $M \in \mathcal{K}^n$, vamos a llamar $\rho(M) = \min\{R > 0 : M \subset RB_n\}$ (observamos que B_n está centrada en el origen). Como $\{\rho(M) : M \in \mathcal{S}_K\}$ es un conjunto de números reales positivos y está acotado inferiormente por 0, existe el ínfimo:

$$\rho = \inf\{\rho(M) : M \in \mathcal{S}_K\}.$$

Veamos que $\rho(\cdot)$ es continuo. Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ y $\delta = \delta(K_1, K_2)$ la distancia de Hausdorff entre K_1 y K_2 . Esto quiere decir que $K_1 \subset K_2 + \delta B_n$. Como $K_2 \subset \rho(K_2)B_n$, tendremos que $K_1 \subset K_2 + \delta B_n \subset \rho(K_2)B_n + \delta B_n = (\rho(K_2) + \delta)B_n$. Por la definición de $\rho(K_1)$, será $\rho(K_1) \leq \rho(K_2) + \delta$. Análogamente tenemos $\rho(K_2) \leq \rho(K_1) + \delta$. Esto nos da la continuidad de $\rho(\cdot)$.

Consideramos $(K_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_K$, una sucesión con $\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(K_i) = \rho$. Para cualquier hiperplano H , como $K \subset \rho(K)B_n$, usando las proposiciones 2.1.4, 2.1.5 y 2.1.6 tenemos que $\sigma_H(K) \subset \rho(K)B_n$. Esto implica que $\rho(M) \leq \rho(K)$ para todo $M \in \mathcal{S}_K$. En particular, $K_i \subset \rho(K_i)B_n \subset \rho(K)B_n$, así que la sucesión $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada y por el teorema de selección de Blaschke 1.2.11 existe una subsucesión convergente a un conjunto convexo y compacto K_0 . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la subsucesión es la de partida, es decir, $K_i \rightarrow K_0 \in \mathcal{K}^n$ cuando $i \rightarrow \infty$. Por la continuidad de $\rho(\cdot)$, obtenemos que

$$\rho(K_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(K_i) = \rho.$$

Ahora vamos a ver que $K_0 = \rho B_n$. Por reducción al absurdo, supongamos que $K_0 \subset \rho B_n$ estrictamente y podemos encontrar un punto $x \in \rho B_n \setminus K_0$ y un hiperplano $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, u \rangle = \alpha\}$ que separa estrictamente K_0 y x . Supongamos que $\langle u, x \rangle > \alpha$. Consideramos el casquete $C_0 = \{y \in \rho \mathbb{S}^{n-1} : \langle u, y \rangle \geq \alpha\}$, ver figura 2.5.

Por la compacidad de $\rho \mathbb{S}^{n-1}$, habrá un número finito de reflexiones de C_0 que denotaremos por $\{C_1, \dots, C_k\}$ que junto con C_0 cubren $\rho \mathbb{S}^{n-1}$. Sean H_1, \dots, H_k los hiperplanos

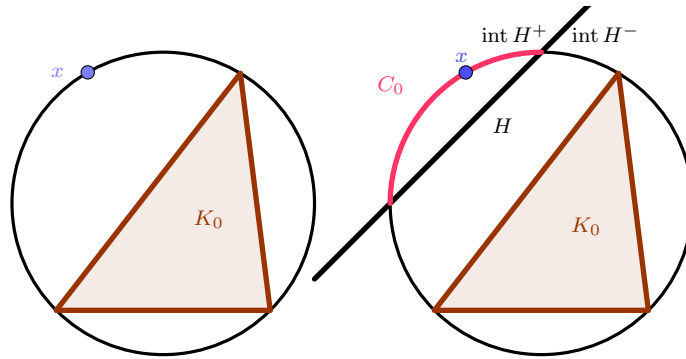


Figura 2.5: Existe un hiperplano que separa estrictamente x y K_0

conteniendo al origen asociados a cada una de las reflexiones de C_0 . Vamos a llamar $K'_0 = K_0$ y $K'_j = \sigma_{H_j}(K'_{j-1})$ para $j = 1, \dots, k$.

Veamos que K'_k está contenido estrictamente en el interior de ρB_n . Por un lado, por la monotonía de la simetrización

$$\sigma_{H_j}(K'_{j-1} \cap \text{int } \rho B_n) \subset \sigma_{H_j}(\text{int } \rho B_n) = \text{int } \rho B_n$$

para cada $j = 1, \dots, k$.

Así, para cualquier punto de K'_{j-1} que esté en el interior de la bola ρB_n , sus posteriores simetrizaciones van a ser puntos del interior de la bola ρB_n , es decir, si $y \in K'_{j-1} \cap \text{int } \rho B_n$, entonces $\sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_j}(y) \in \text{int } \rho B_n$ para todo $j = 1 \dots k$.

Por otro lado, veamos qué pasa cuando aplicamos $\sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_1}$ a los puntos de K'_0 que están en la frontera de la bola ρB_n . Sabemos que $K'_0 \cap C_0 = \emptyset$. Al hacer $\sigma_{H_1}(K'_0)$, cada punto $p \in C_1$ es la reflexión de un p' respecto de H_1 en C_0 , luego al realizar la simetrización de Steiner respecto de H_1 , como el segmento $K'_0 \cap (p + H_1^\perp)$ tiene menor longitud que el segmento $(\rho B_n) \cap (p + H_1^\perp)$, entonces el segmento simetrizado $\sigma_{H_1}(K'_0) \cap (p + H_1^\perp)$ pasará a estar contenido en el interior de ρB_n . De esta manera, obtenemos $\sigma_{H_1}(K'_0) \cap (C_0 \cup C_1) = K'_1 \cap (C_0 \cup C_1) = \emptyset$.

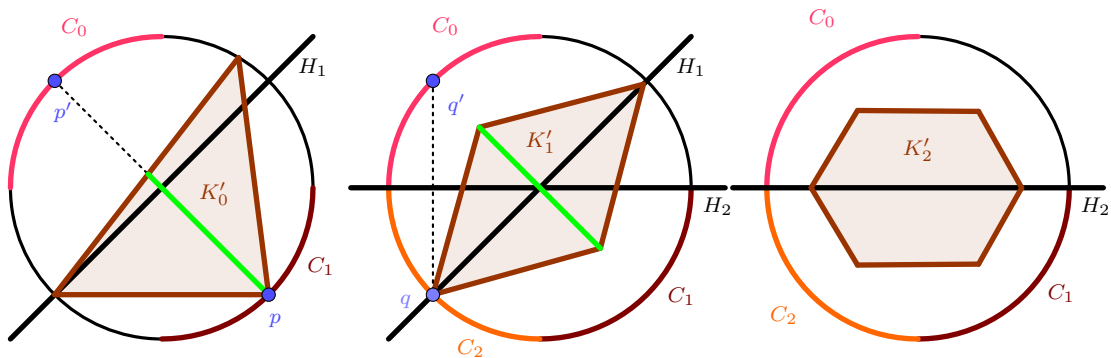


Figura 2.6: Proceso por el cual $K'_2 \cap (C_0 \cup C_1 \cup C_2) = \emptyset$

Con el mismo argumento, cada $q \in C_2$ es la reflexión de un q' respecto de H_2 en C_0 . Así

que al simetrizar respecto de H_2 , como el segmento $K'_1 \cap (q + H_2^\perp)$ tiene menor longitud que $(\rho B_n) \cap (q + H_2^\perp)$, tendremos que $K'_1 \cap (q + H_2^\perp)$ está contenido en el interior de ρB_n . De aquí que $\sigma_{H_2}(K'_1) \cap (C_0 \cup C_1 \cup C_2) = K'_2 \cap (C_0 \cup C_1 \cup C_2) = \emptyset$. Repitiendo este proceso, de forma iterativa obtenemos

$$K'_k \cap (C_0 \cup C_1 \cup \dots \cup C_k) = \emptyset,$$

es decir, $K'_k \cap \rho \mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$. Con esto, tenemos que

$$K'_k = \sigma_{H_k} \sigma_{H_{k-1}} \dots \sigma_{H_1}(K'_0) \subset \text{int}(\rho B_n),$$

de donde deducimos que $\rho(K'_k) < \rho$.

Consideramos la sucesión de conjuntos $\overline{K}_i = \sigma_{H_k} \sigma_{H_{k-1}} \dots \sigma_{H_1}(K_i)$ con $i \in \mathbb{N}$. Como $\overline{K}_i \in \mathcal{S}_K$, se tiene que $\rho(\overline{K}_i) \geq \rho$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pero como $K_i \rightarrow K_0$, la proposición 2.1.10 nos asegura que $\overline{K}_i \rightarrow K'_k$ y, por tanto, $\rho(\overline{K}_i) < \rho$ a partir de algún i , lo que lleva a una contradicción. Hemos demostrado así que $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = K_0 = \rho B_n$, luego

$$\text{vol}(K_0) = \text{vol}(\rho B_n) = \rho^n \kappa_n.$$

Despejando ρ tenemos

$$\rho = \left(\frac{\text{vol}(K_0)}{\kappa_n} \right)^{1/n} = \left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n} \right)^{1/n}.$$

Y concluimos que $\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = \left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n$. \square

Además, podemos construir sucesiones de simetrizaciones de Steiner que redondeen un número finito de cuerpos simultáneamente. En particular, el siguiente corolario lo hace para dos.

Corolario 2.1.15. *Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_n^n$, entonces existen simetrizaciones de Steiner σ_{H_i} con $i \in \mathbb{N}$ tales que*

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{H_i} \dots \sigma_{H_1}(K_1) &= \left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{H_i} \dots \sigma_{H_1}(K_2) &= \left(\frac{\text{vol}(K_2)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el lema 2.1 y el teorema de esfericidad de Gross 2.1.14 existen hiperplanos H_1, \dots, H_k que contienen al origen tales que

$$(1 - \varepsilon) \left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n \subset \sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_1}(K_1) \subset (1 + \varepsilon) \left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n.$$

Ahora consideremos el cuerpo convexo $\sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_1}(K_2)$. Aplicando otra vez el mismo lema, existen hiperplanos H_{k+1}, \dots, H_l (con $l > k$) que contienen el origen tales que

$$(1 - \varepsilon) \left(\frac{\text{vol}(K_2)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n \subset \sigma_{H_l} \dots \sigma_{H_{k+1}}(\sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_1}(K_2)) \subset (1 + \varepsilon) \left(\frac{\text{vol}(K_2)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n,$$

ya que $\text{vol}(\sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_1}(K_2)) = \text{vol}(K_2)$, mientras que se sigue manteniendo por las proposiciones 2.1.4 y 2.1.6

$$(1 - \varepsilon) \left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n \subset \sigma_{H_1} \dots \sigma_{H_{k+1}}(\sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_1}(K_1)) \subset (1 + \varepsilon) \left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n.$$

Aplicando el mismo argumento a los cuerpos convexos $\sigma_{H_1} \dots \sigma_{H_1}(K_1)$ y $\sigma_{H_1} \dots \sigma_{H_1}(K_2)$ para $\varepsilon/2, \varepsilon/3 \dots$ obtenemos la sucesión de hiperplanos. \square

El teorema de esfericidad de Gross permite demostrar de forma sencilla importantes desigualdades geométricas. Veamos la desigualdad isoperimétrica.

Teorema 2.1.16 (Desigualdad isoperimétrica). *Para todo $K \in \mathcal{K}^n$ se cumple:*

$$S(K)^n \geq \frac{S(B_n)^n}{\kappa_n^{n-1}} \text{vol}(K)^{n-1}.$$

Demostración. Por el teorema de esfericidad de Gross 2.1.14 y usando la desigualdad para el área de la proposición 2.1.13 existen hiperplanos H_i , con $i \in \mathbb{N}$, conteniendo al origen tales que

$$S(K) \geq S(\sigma_{H_1}(K)) \geq \dots \geq S\left(\left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n}\right)^{1/n} B_n\right) = \frac{\text{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}}}{\kappa_n^{\frac{n-1}{n}}} S(B_n)$$

de donde se deduce la desigualdad isoperimétrica. \square

Con la desigualdad isoperimétrica tenemos que

$$\frac{S(K)}{\text{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}}} \geq \frac{S(B_n)}{\kappa_n^{\frac{n-1}{n}}}$$

para todo K . Es decir, si fijamos el volumen $\text{vol}(K) = \kappa_n$, B_n minimiza la función $S(\cdot)$, es decir, las bolas son los conjuntos de superficie mínima.

Otra desigualdad geométrica importante es la desigualdad isodiamétrica, que acota el volumen de un cuerpo a partir de su diámetro.

Teorema 2.1.17 (Desigualdad isodiamétrica). *Sea $K \in \mathcal{K}_n^n$. Entonces*

$$\text{vol}(K) \leq \frac{D(K)^n}{2^n} \kappa_n.$$

Demostración. Sea \overline{K} el cuerpo convexo obtenido tras aplicar las sucesivas simetrizaciones de Steiner a K respecto de los hiperplanos coordenados. Sabemos por la proposición 2.1.13 que $\text{vol}(\overline{K}) = \text{vol}(K)$ y $D(\overline{K}) \leq D(K)$ y además que \overline{K} es simétrico respecto del origen pues es simétrico respecto de cada hiperplano coordenado. Por tanto, $\overline{K} \subseteq (D(\overline{K})/2)B_n$. Esto nos lleva a

$$\text{vol}(K) = \text{vol}(\overline{K}) \leq \frac{D(\overline{K})^n}{2^n} \kappa_n \leq \frac{D(K)^n}{2^n} \kappa_n.$$

\square

A continuación vamos a tratar la desigualdad de Brunn-Minkowski. Este es uno de los resultados principales y más potentes de la Geometría Convexa y el Análisis Geométrico Convexo.

Teorema 2.1.18 (Desigualdad de Brunn-Minkowski). *Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ cuerpos convexos. Entonces*

$$\text{vol}(K_1 + K_2)^{1/n} \geq \text{vol}(K_1)^{1/n} + \text{vol}(K_2)^{1/n}.$$

Demostración. Por el corolario 2.1.15 existen hiperplanos H_i con $i \in \mathbb{N}$, que contienen al origen, tales que

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{H_i} \dots \sigma_{H_1}(K_1) &= \left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{H_i} \dots \sigma_{H_1}(K_2) &= \left(\frac{\text{vol}(K_2)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n. \end{aligned}$$

Por las proposiciones 2.1.9 y 2.1.13 y por la continuidad del volumen tenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}(K_1 + K_2)^{1/n} &= \text{vol}(\sigma_{H_1}(K_1 + K_2))^{1/n} \geq \text{vol}(\sigma_{H_1}(K_1) + \sigma_{H_1}(K_2))^{1/n} \geq \dots \geq \\ &\geq \text{vol} \left(\left(\frac{\text{vol}(K_1)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n + \left(\frac{\text{vol}(K_2)}{\kappa_n} \right)^{1/n} B_n \right)^{1/n} = \\ &= \text{vol} \left(\frac{\text{vol}(K_1)^{1/n} + \text{vol}(K_2)^{1/n}}{\kappa_n^{1/n}} B_n \right)^{1/n} = \\ &= \text{vol}(K_1)^{1/n} + \text{vol}(K_2)^{1/n}. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado establece una relación entre los volúmenes de los polares de un conjunto y de su simetrizado de Steiner. Será de gran utilidad para demostrar la desigualdad de Blaschke-Santaló.

Proposición 2.1.19. *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ con $\dim K = n$ y sea H un hiperplano que contiene al 0, entonces*

$$\text{vol}(\sigma_H(K)^*) \geq \text{vol}(K^*).$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Utilizando la definición equivalente de la simetrización de Steiner

$$\sigma_H(K) = \left\{ \left(x, \frac{1}{2}(a-b) \right) \in \mathbb{R}^n : x \in K|H; (x, a), (x, b) \in K \right\},$$

por definición los polares serán

$$\begin{aligned} K^* &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle + st \leq 1, x \in K|H, (x, s) \in K\}, \\ \sigma_H(K)^* &= \left\{ (y, t) \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle + \frac{1}{2}(a-b)t \leq 1, x \in K|H, (x, a), (x, b) \in K \right\}. \end{aligned}$$

Dados $A \subset \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$, denotamos por $A(t) := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, t) \in A\}$. Vamos a ver que

$$\frac{1}{2}(K^*(t) + K^*(-t)) \subseteq \sigma_H(K)^*(t). \quad (2.3)$$

Para ello, sean $y_1 \in K^*(t)$ e $y_2 \in K^*(-t)$. Veamos que $((y_1 + y_2)/2, t) \in \sigma_H(K)^*$. Para ello, dados $(x, a) \in K$ y $(x, b) \in K$ cualesquiera, entonces

$$\left\langle x, \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right\rangle + \frac{1}{2}(a - b)t = \frac{1}{2}\langle x, y_1 \rangle + \frac{1}{2}\langle x, y_2 \rangle + \frac{1}{2}at + \frac{1}{2}b(-t) \leq 1,$$

ya que $\langle x, y_1 \rangle + at \leq 1$ y $\langle x, y_2 \rangle + b(-t) \leq 1$. Lo que prueba la inclusión (2.3).

Por otro lado, como K es centralmente simétrico, se tiene que K^* también lo es, es decir, $K^*(t) = -K^*(-t)$. Esto implica que $\text{vol}_{n-1}(K^*(t)) = \text{vol}_{n-1}(K^*(-t))$. Usando que σ_H es monótona y la desigualdad de Brunn-Minkowski (teorema 2.1.18) tenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}_{n-1}(\sigma_H(K)^*(t))^{1/(n-1)} &\geq \text{vol}_{n-1}\left(\frac{1}{2}(K^*(t) + K^*(-t))\right)^{1/(n-1)} \\ &\geq \frac{1}{2}\text{vol}_{n-1}(K^*(t))^{1/(n-1)} + \frac{1}{2}\text{vol}_{n-1}(K^*(-t))^{1/(n-1)} \\ &= \text{vol}_{n-1}(K^*(t))^{1/(n-1)} \end{aligned}$$

luego $\text{vol}_{n-1}(\sigma_H(K)^*(t)) \geq \text{vol}_{n-1}(K^*(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, así que el principio de Cavalieri (teorema 1.2.3) nos asegura que $\text{vol}(\sigma_H(K)^*) \geq \text{vol}(K^*)$. \square

A continuación vamos a ver la desigualdad de Blaschke-Santaló. Esta desigualdad acota superiormente el producto del volumen de un cuerpo convexo centralmente simétrico por el de su polar. Este resultado clásico fue demostrado originalmente por Blaschke en dimensión $n = 3$, siendo Santaló el autor de la prueba en dimensión arbitraria.

Teorema 2.1.20 (Blaschke-Santaló). *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$ con $\dim K = n$. Entonces*

$$\text{vol}(K) \text{vol}(K^*) \leq \kappa_n^2.$$

Demostración. Por el teorema de esfericidad de Gross 2.1.14, existe una sucesión de hiperplanos $(H_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que contienen el origen tales que

$$K_i = \sigma_{H_i} \dots \sigma_{H_1}(K) \rightarrow \left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n}\right)^{1/n} B_n,$$

y, por tanto,

$$K_i^* \rightarrow \left(\left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n}\right)^{1/n} B_n\right)^* = \left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n}\right)^{-1/n} B_n.$$

Y aplicando la proposición 2.1.19 obtenemos

$$\text{vol}(K) \text{vol}(K^*) \leq \text{vol}(K_1) \text{vol}(K_1^*) \leq \dots \leq \kappa_n^2$$

por la continuidad del volumen. \square

2.1.2. Convergencia de sucesiones de simetrizaciones de Steiner

Esta sección ha sido desarrollada siguiendo [6]. Del teorema de Gross deducimos un resultado muy importante para las simetrizaciones de Steiner: dado cualquier cuerpo convexo, existe una sucesión de hiperplanos mediante los cuales si realizamos la simetrización de Steiner podemos transformarlo en una bola. Esto, intuitivamente, nos dice que la simetrización de Steiner redondea los conjuntos. Sin embargo, este teorema asegura que existe una sucesión, pero no que cualquier sucesión va a converger a una bola. Así, surgen cuestiones muy interesantes, como por ejemplo, dada una sucesión de hiperplanos, si existen condiciones para esta sucesión que nos garantice la convergencia.

El último teorema de esta sección, el teorema 2.1.25, nos da una condición para que una sucesión de simetrizaciones de un determinado cuerpo convexo converja.

Sea $\alpha = \{H_1, H_2, \dots\}$ una sucesión de hiperplanos que pasan por el origen. Llamamos $K_i = \sigma_{H_i} \dots \sigma_{H_1} K$. Si existe el límite $L = \lim K_i$ lo denotamos por $L = \sigma_\alpha K$. Si L es el límite de alguna subsucesión de α , diremos que L es un sublímite de $\sigma_\alpha K$.

Proposición 2.1.21. *Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ y H un hiperplano. Se cumple*

$$V_{n-1,1}(K_1, K_2) \geq V_{n-1,1}(\sigma_H K_1, \sigma_H K_2) \quad (2.4)$$

Demostración. Para demostrar la desigualdad (2.4), supongamos $\varepsilon > 0$. Como la simetrización de Steiner conserva el volumen, usando la proposición 2.1.9 tenemos

$$\text{vol}(K_1 + \varepsilon K_2) = \text{vol}(\sigma_H(K_1 + \varepsilon K_2)) \geq \text{vol}(\sigma_H K_1 + \varepsilon \sigma_H K_2).$$

Como $\text{vol}(K_1) = \text{vol}(\sigma_H(K_1))$, si restamos $\text{vol}(K_1)$, dividimos por $\varepsilon > 0$ y tomamos límites cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtenemos

$$\begin{aligned} V_{n-1,1}(K_1, K_2) &= \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K_1 + \varepsilon K_2) - \text{vol}(K_1)}{\varepsilon} \geq \\ &\geq \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(\sigma_H K_1 + \varepsilon \sigma_H K_2) - \text{vol}(\sigma_H K_1)}{\varepsilon} \\ &= V_{n-1,1}(\sigma_H K_1, \sigma_H(K_2)). \end{aligned}$$

□

Proposición 2.1.22. *Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$. Si $\sigma_\alpha K'$ existe y L es un sublímite de $\sigma_\alpha K$, entonces*

$$V_{n-1,1}(L, \sigma_\alpha K') = \inf_i V_{n-1,1}(K_i, \sigma_\alpha K').$$

Demostración. Sabemos que $L = \lim_{j \rightarrow \infty} K_j$ para alguna subsucesión $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Como los volúmenes mixtos son continuos, la sucesión

$$\left(V_{n-1,1}(K_j, \sigma_{H_j} \dots \sigma_{H_{i_1}} K') \right)_{j \in \mathbb{N}} \quad (2.5)$$

converge a $V_{n-1,1}(L, \sigma_\alpha K')$. Por la proposición 2.1.21, $(V_{n-1,1}(K_i, \sigma_{H_i} \dots \sigma_{H_{i_1}} K'))_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, así que la subsucesión anterior (2.5) también es decreciente y su límite será $\inf_i V_{n-1,1}(K_i, \sigma_\alpha K')$. □

En particular, de esta proposición obtenemos como corolario que este valor no depende del sublímite.

Corolario 2.1.23. Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$. Si $\sigma_\alpha K'$ existe y $\sigma_\alpha K$ tiene dos sublímites L_1 y L_2 , entonces

$$V_{n-1,1}(L_1, \sigma_\alpha K') = V_{n-1,1}(L_2, \sigma_\alpha K').$$

A continuación, vamos a enunciar una propiedad de la función soporte respecto a la simetrización de Steiner que necesitaremos posteriormente.

Lema 2.1.24. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. La función soporte cumple la siguiente propiedad:

$$h_{\sigma_H K}(x) = h_K(x) \quad \text{si } x \in H.$$

Demostración. Por definición, $h_{\sigma_H K}(x) = \sup\{\langle \sigma_H y, x \rangle : \sigma_H y \in \sigma_H K\}$. Por la definición de la simetrización de Steiner, dado un $y \in K$ existe un $z \in H^\perp$ tal que $\sigma_H y = y + z$. Entonces, como $x \in H$, se tiene que $\langle \sigma_H y, x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle = \langle y, x \rangle$ para todo $y \in K$. Por tanto, $h_{\sigma_H K}(x) = h_K(x)$. \square

El siguiente teorema es el teorema clave en esta sección. Éste afirma que si todos los sublímites quedan invariantes bajo σ_α , entonces la sucesión convergerá.

Teorema 2.1.25. Sean $K \in \mathcal{K}_n^n$ y $\alpha = \{H_1, H_2, \dots\}$, una sucesión de hiperplanos que pasan por el origen. Si $\sigma_\alpha L = L$ para todos los sublímites L de $\sigma_\alpha K$, entonces $\sigma_\alpha K$ converge.

Demostración. Primero, vamos a ver la unicidad de los sublímites. Por el teorema de selección de Blaschke 1.2.11, toda subsucesión de $\sigma_\alpha K$ tiene una subsucesión convergente a un límite. Sean L_1 y L_2 dos de estos límites.

Por hipótesis, tenemos que $\sigma_\alpha L_1 = L_1$ y $\sigma_\alpha L_2 = L_2$. Por el corolario 2.1.23 y la invarianza del volumen de la simetrización de Steiner, se cumple

$$V_{n-1,1}(L_1, L_2) = V_{n-1,1}(L_2, L_2) = \text{vol}(L_2) = \text{vol}(K) = \text{vol}(L_1).$$

Como $\text{vol}(K) > 0$, también será $\text{vol}(L_1) = \text{vol}(L_2) > 0$. Por la primera desigualdad de Minkowski (teorema 1.2.8) para L_1 y L_2 , como se cumple la igualdad

$$V_{n-1,1}(L_1, L_2)^n = \text{vol}(L_1)^n = \text{vol}(L_1)^{n-1} \text{vol}(L_2),$$

entonces L_1 y L_2 son homotéticos. Por tanto, como tienen el mismo volumen y son homotéticos, L_2 será resultado de un traslación de L_1 , es decir, existirá un $x \in \mathbb{R}^n$ para el que $L_2 = L_1 + x$.

Veamos que $x = 0$. Como $\sigma_\alpha L_1 = L_1$ y $\sigma_\alpha L_2 = L_2$, tenemos

$$L_2 = \sigma_\alpha(L_2) = \sigma_\alpha(L_1 + x) = \sigma_\alpha(L_1) + \sigma_\alpha(x) = L_1 + \sigma_\alpha(x)$$

así que $\sigma_\alpha x = x$. Esto quiere decir que x es simétrico respecto de cada H_i , y por tanto $x \in H_i$ para todo $H_i \in \alpha$. Ahora distinguimos dos casos: en el primer caso, supongamos

que existen k_1, \dots, k_n tales que los vectores generadores de las rectas $H_{k_1}^\perp, \dots, H_{k_n}^\perp$ forman una base de \mathbb{R}^n . Esto implica que $x = 0$, por lo que $L_1 = L_2$.

Para el otro caso, supongamos que la sucesión $\alpha^\perp = \{H_1^\perp, H_2^\perp, \dots\}$ genera un subespacio propio $V \subset \mathbb{R}^n$. Entonces x es ortogonal a todos ellos así que $x \in V^\perp$. Como cada dirección de simetrización H^\perp correspondiente a $H \in \alpha$ está en V , el plano soporte de K normal a x también soporta cada simétrico de K_i , así que por el lema 2.1.24, $h_{K_i}(x) = h_K(x)$ para todo i . Tomando límites

$$h_{L_1}(x) = h_K(x) = h_{L_2}(x) = h_{L_1+x}(x) = h_{L_1}(x) + \langle x, x \rangle,$$

así que $\langle x, x \rangle = 0$, luego $x = 0$ y $L_2 = L_1$.

De todo lo anterior, tenemos que toda subsucesión convergente de $\sigma_\alpha K$ converge a L_1 . Falta ver que la sucesión total converge. Para ello, procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que la sucesión no converge, lo que implica la existencia de una subsucesión γ de $\sigma_\alpha K$ que está a distancia $\varepsilon > 0$ de L_1 en la distancia de Hausdorff. Como la sucesión $\sigma_\alpha K$ está uniformemente acotada, también lo está γ . Por el Teorema de selección de Blaschke 1.2.11, γ tiene una subsucesión convergente γ' . Pero esta subsucesión también es una subsucesión de $\sigma_\alpha K$. Así que como γ' es convergente, tiene que tener límite L_1 , contradiciendo la construcción de γ . Por tanto, la sucesión original $\sigma_\alpha K$ converge y, por tanto, convergerá al límite L_1 . \square

Observación 3. La condición $\sigma_\alpha L = L$ para todo sublímite L es necesaria para la prueba del teorema anterior, pero no es cierta en general. Es decir, si la sucesión de simetrizaciones converge no tiene por qué cumplirse $\sigma_\alpha L = L$.

Como contraejemplo en \mathbb{R}^2 , sean H_1 y H_2 dos hiperplanos (rectas) diferentes que pasan por el origen y que no son ortogonales. Sea α la sucesión $\{H_1, H_2, H_2, \dots, H_2, \dots\}$. Dado K un conjunto compacto en \mathbb{R}^2 , entonces $\sigma_\alpha K = \sigma_{H_2} \sigma_{H_1} K$ ya que σ_{H_2} es idempotente. Pero $\sigma_{H_2} \sigma_{H_1} K \neq \sigma_{H_2} \sigma_{H_1} \sigma_{H_2} \sigma_{H_1} K$ en general, por ejemplo, si K es un segmento de línea, como podemos ver en el ejemplo 2.7.

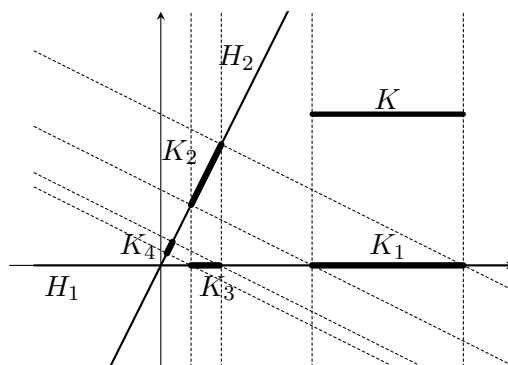


Figura 2.7: Ejemplo donde $K_1 = \sigma_{H_1} K$, $K_2 = \sigma_{H_2} \sigma_{H_1} K$, $K_3 = \sigma_{H_1} \sigma_{H_2} \sigma_{H_1} K$ y $K_4 = \sigma_{H_2} \sigma_{H_1} \sigma_{H_2} \sigma_{H_1} K$

2.2. Simetrización de Minkowski

La simetrización de Minkowski fue introducida por Blaschke en [2], aunque en [1] se recoge con el nombre de simetrización de Minkowski. Esta simetrización va a consistir en, dado un cuerpo convexo, sumarle su reflexión respecto de H y multiplicarlo por el factor $1/2$.

Definición 2.2.1. *Dados un $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $H \in \mathcal{G}(n, i)$, definimos el simetrizado de Minkowski de $K \in \mathcal{K}^n$ como*

$$M_H(K) = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K^H,$$

donde recordamos que K^H es la reflexión de K respecto a H . El caso en el que $i = 0$ corresponde a $K^H = -K$ y la simetrización de Minkowski coincide con la denominada simetrización central $\Delta K = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}(-K)$.

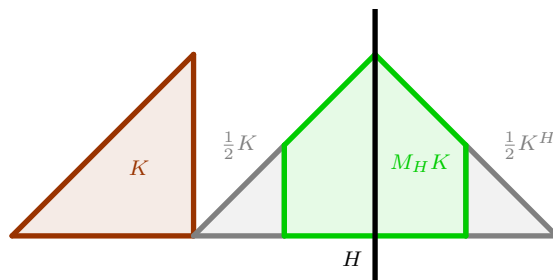


Figura 2.8: Simetrización de Minkowski del triángulo K

Para cada $K \in \mathcal{K}^n$ y cada $y \in H^\perp$, vamos a denotar por

$$K_y = K + y,$$

a la traslación ortogonal y de K . Además, tenemos $K_y^H = (K + y)^H = K^H - y$.

Proposición 2.2.2. *La simetrización de Minkowski cumple las siguientes propiedades:*

1. *Es lineal.*
2. *Es estrictamente monótona.*
3. *Es invariante en la proyección sobre H .*
4. *Es invariante sobre conjuntos H -simétricos.*
5. *Es invariante por traslaciones ortogonales a H .*
6. *Conserva la anchura media.*

Demostración. Sean $K, K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$. Es lineal ya que la suma de Minkowski lo es para cuerpos convexos

$$\begin{aligned} M_H(K_1 + K_2) &= \frac{1}{2}(K_1 + K_2) + \frac{1}{2}(K_1^H + K_2^H) = \\ &= \frac{1}{2}(K_1 + K_2 + K_1^H + K_2^H) = \\ &= \frac{1}{2}(K_1 + K_1^H) + \frac{1}{2}(K_2 + K_2^H) = \\ &= M_H K_1 + M_H K_2. \end{aligned}$$

Para ver que es estrictamente monótona, como $K_1 \subset K_2$ implica $K_1^H \subset K_2^H$, tenemos que

$$M_H K_1 = \frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_1^H \subset \frac{1}{2}K_2 + \frac{1}{2}K_2^H = M_H K_2.$$

Además, si el contenido $K_1 \subset K_2$ es estricto, el anterior contenido lo será también.

La invarianza de la proyección sobre H es consecuencia de $K|H = K^H|H$ y de la linealidad de la proyección, ya que

$$(M_H K)|H = \left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K^H\right)|H = \left(\frac{1}{2}K\right)|H + \left(\frac{1}{2}K^H\right)|H = \left(\frac{1}{2}K\right)|H + \left(\frac{1}{2}K\right)|H = K|H.$$

La invarianza sobre conjuntos H -simétricos también es inmediata: si $K = K^H$, tenemos que

$$M_H K = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K^H = \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K = K.$$

Para ver que es invariante por traslaciones ortogonales a H , consideremos $y \in H^\perp$. Se tiene

$$\begin{aligned} M_H K_y &= \frac{1}{2}K_y + \frac{1}{2}K_y^H = \frac{1}{2}(K + y) + \frac{1}{2}(K^H - y) = \\ &= \frac{1}{2}(K + y + K^H - y) = \frac{1}{2}(K + K^H) = M_H K. \end{aligned}$$

En cuanto a que se conserva la anchura media, esto se obtiene de la linealidad, ya que

$$b(M_H K) = b\left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K^H\right) = \frac{1}{2}b(K) + \frac{1}{2}b(K^H) = b(K).$$

□

Ahora veamos las desigualdades respectivas al volumen, diámetro, inradio y circunradio de la simetrización de Minkowski.

Proposición 2.2.3. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Entonces*

- $\text{vol}(M_H K) \geq \text{vol}(K)$,
- $D(M_H K) \leq D(K)$,
- $r(M_H K) \geq r(K)$ y $R(M_H K) \leq R(K)$.

Demostración. Respecto al volumen, utilizando la desigualdad de Brunn-Minkowski (teorema 2.1.18) y que $\text{vol}(K) = \text{vol}(K^H)$ tenemos

$$\text{vol}(M_H K)^{1/n} = \text{vol}\left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K^H\right)^{1/n} \geq \frac{1}{2}\text{vol}(K)^{1/n} + \frac{1}{2}\text{vol}(K^H)^{1/n} = \text{vol}(K)^{1/n}.$$

Así que $\text{vol}(M_H K) \geq \text{vol}(K)$.

Para la desigualdad del diámetro, utilizamos la proposición 1.1.16 y el hecho de que $D(K) = D(K^H)$,

$$D(M_H K) = D\left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K^H\right) \leq \frac{1}{2}D(K) + \frac{1}{2}D(K^H) = D(K).$$

Vamos a ver la desigualdad del inradio. Sin pérdida de generalidad, supongamos que H es un hiperplano que pasa por el origen. Como la bola B_n es simétrica respecto de H , por la proposición 2.2.2, tendremos $M_H B_n = B_n$. Si $r = r(K)$, entonces existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x + rB_n \subset K$. Como la simetrización de Minkowski es monótona y lineal por la proposición 2.2.2, tenemos

$$M_H K \supset M_H(x + rB_n) = M_H x + rM_H B_n = M_H x + rB_n,$$

por lo que $r(K) \leq \text{máx}\{r \geq 0 : y + rB_n \subset M_H K, y \in \mathbb{R}^n\} = r(M_H K)$.

Análogamente, veamos la desigualdad del circunradio. Supongamos que H es un hiperplano que pasa por el origen. Si $R = R(K)$, esto significa que existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $K \subset x + RB_n$. Por la monotonía y la linealidad de la simetrización de Minkowski tenemos

$$M_H K \subset M_H(x + RB_n) = M_H x + RM_H B_n = M_H x + RB_n,$$

así que $R(M_H K) \geq R(K)$. □

A continuación vamos a ver una forma alternativa de presentar la simetrización de Minkowski. Este resultado servirá para dar caracterizaciones de la simetrización de Minkowski más adelante.

Proposición 2.2.4. *Sea $H \in \mathcal{G}(n, i)$ para algún $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Para cada $K \in \mathcal{K}^n$ tenemos que*

$$M_H(K) = \bigcap_{y \in H^\perp} \text{conv}(K_y \cup K_y^H). \quad (2.6)$$

Demostración. Sean $y \in H^\perp$ y $Q_y = \text{conv}(K_y \cup K_y^H)$. Como K_y y K_y^H están en Q_y , que es convexo, y la simetrización es invariante por traslaciones ortogonales a H , tenemos

$$M_H K = M_H K_y = \frac{1}{2}K_y + \frac{1}{2}K_y^H \subset Q_y.$$

Como esto vale para cualquier $y \in H^\perp$, obtenemos la inclusión $M_H K \subset \bigcap_{y \in H^\perp} Q_y$. Veamos ahora el contenido inverso. Para ello, dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, por las propiedades de la función

soporte, proposición 1.1.7, obtenemos

$$\begin{aligned}
 h_{\cap_{y \in H^\perp} Q_y}(u) &\leq \min_{y \in H^\perp} h_{Q_y}(u) = \\
 &= \min_{y \in H^\perp} \max\{h_{K_y}(u), h_{K_y^H}(u)\} = \\
 &= \min_{y \in H^\perp} \max\{h_K(u) + \langle y, u \rangle, h_{K^H}(u) - \langle y, u \rangle\} = \\
 &= \frac{1}{2}h_K(u) + \frac{1}{2}h_{K^H}(u) = \\
 &= h_{M_H K}(v),
 \end{aligned}$$

donde la penúltima igualdad se cumple porque el mínimo ocurre cuando las dos expresiones son iguales, es decir, cuando $\langle y, u \rangle = (h_{K^H}(u) - h_K(u))/2$, ya que $h_K(u) + \langle y, u \rangle$ y $h_{K^H}(u) - \langle y, u \rangle$ varían de igual manera pero con signo contrario.

Esto implica que $\cap_{y \in H^\perp} \text{conv}(K_y \cup K_y^H) \subset M_H K$ y, por tanto, la igualdad (2.6) es cierta. \square

2.3. Otras simetrizaciones

En esta sección vamos a presentar varios ejemplos de simetrizaciones, así como algunas propiedades que poseen. En todos los ejemplos H representará un hiperplano.

Como primer ejemplo, para cualquier conjunto podemos definir su simetrizado como una bola con el mismo volumen.

Ejemplo 2.1. Para todo $K \in \mathcal{K}^n$, definimos $\diamond K = (\text{vol}(K)/\kappa_n)^{1/n} B_n$. Es decir, definimos la simetrización como la bola centrada en el origen con el mismo volumen que K ,

$$\text{vol}(\diamond K) = \text{vol}\left(\left(\frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n}\right)^{1/n} B_n\right) = \frac{\text{vol}(K)}{\kappa_n} \kappa_n = \text{vol}(K).$$

Entonces la simetrización $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ es monótona, conserva el volumen y es idempotente. Sin embargo, no es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos ya que la imagen de cualquier conjunto es una bola. Además, al estar la bola centrada en el origen, en general no tendrá la misma proyección que el propio conjunto, como vemos en la figura 2.9.

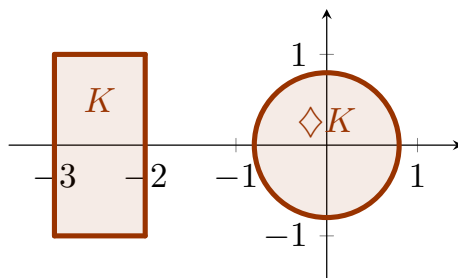


Figura 2.9: \diamond del ejemplo 2.1

De manera similar al ejemplo anterior, podemos definir una simetrización que cada conjunto lo simetriza en una bola, pero cambiando el radio de tal manera que en vez de conservar el volumen, conserve la anchura media.

Ejemplo 2.2. Vamos a definir $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ como $\diamond K = (b(K)/2)B_n$. Esta simetrización conserva la anchura media, ya que por la linealidad de $b(\cdot)$ y que $b(B_n) = 2$, tenemos

$$b(\diamond K) = b\left(\frac{b(K)}{2}B_n\right) = \frac{b(K)}{2}b(B_n) = b(K).$$

Además, también es monótona, ya que la función $b(K)$ es estrictamente creciente para cuerpos convexos. Sin embargo, no es invariante sobre conjuntos H -simétricos, como se puede ver si cogemos cualquier conjunto H -simétrico que no sea una bola, como en la figura 2.10.

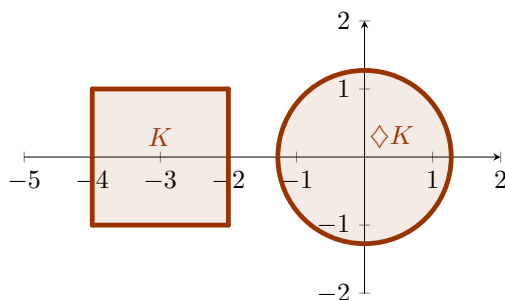


Figura 2.10: \diamond del Ejemplo 2.2

Ejemplo 2.3. Definimos $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ como $\diamond K = \text{conv}(K \cup K^H)$ para todo $K \in \mathcal{K}^n$. Veamos que \diamond es monótona. Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ tales que $K_1 \subset K_2$. Sus simétricos conservarán el contenido $K_1^H \subset K_2^H$ y, por tanto,

$$\diamond K_1 = \text{conv}(K_1 \cup K_1^H) \subset \text{conv}(K_2 \cup K_2^H) = \diamond K_2.$$

Por otro lado, veamos que \diamond es invariante sobre conjuntos H -simétricos. Si $K = K^H$, entonces $\diamond K = \text{conv}(K \cup K^H) = \text{conv}(K) = K$. Podemos ver que en general no conserva el volumen en la figura 2.11.

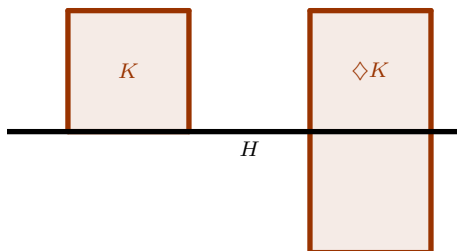


Figura 2.11: \diamond del Ejemplo 2.3

Ejemplo 2.4. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Definimos

$$\diamond K = K|H + t_K(B_n \cap H^\perp),$$

donde t_K es el número que hace que se conserve el volumen $\text{vol}(\diamond K) = \text{vol}(K)$.

Así, por definición, \diamond conserva el volumen. También, por la construcción de \diamond , será invariante por la proyección. Como la proyección sobre H de un cilindro esférico H -simétrico es un disco en H , su simetrizado será el propio cilindro esférico H -simétrico, luego \diamond será invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos. Análogamente, con un argumento similar será idempotente. Sin embargo, la simetrización no es monótona.

Para ver que no es monótona, sea $C \subset H$ un conjunto convexo y compacto $n - 1$ -dimensional. Consideramos $K = C + (B_n \cap H^\perp) + y$, donde $y \in H^\perp$ de manera que sea suficientemente grande para que $K \cap H = \emptyset$. Sea $L \in \mathcal{K}_n^n$ que satisfaga que $K \subset L \subset (L|H) + (B_n \cap H^\perp) + y$, con ambas inclusiones estrictas. Como $K|H = C$, tenemos

$$\diamond K = C + t_K(B_n \cap H^\perp) = C + (B_n \cap H^\perp) = K - y,$$

ya que solo para $t_K = 1$ se cumple que $\text{vol}(\diamond K) = \text{vol}(K)$. Por otro lado, tenemos

$$\diamond L = (L|H) + t_L(B_n \cap H^\perp)$$

para algún t_L . Si $t_L \geq 1$, entonces $\diamond L$ contiene estrictamente a $L - y$, así que $\text{vol}(\diamond L) > \text{vol}(L)$. Por tanto, debe ser $t_L < 1$ y $\diamond K \not\subset \diamond L$, como podemos ver en la figura 2.12.

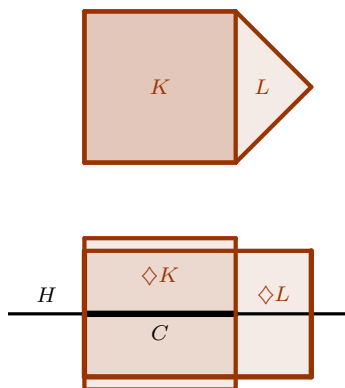


Figura 2.12: \diamond del Ejemplo 2.4

De manera similar al ejemplo anterior, podemos construir una simetrización que conserve la anchura media y que sea invariante en la proyección pero que no sea monótona.

Ejemplo 2.5. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Definimos $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ de manera que

$$\diamond K = K|H + s_K(B_n \cap H^\perp),$$

donde s_K es el número que hace que se conserve la anchura media, $b(K) = b(\diamond K)$.

Por la propia definición se conserva la anchura media y es invariante en la proyección. Utilizando el mismo argumento que en el ejemplo anterior sustituyendo t_K por s_K y $\text{vol}(\cdot)$ por $b(\cdot)$ obtenemos que no puede ser monótona.

Ejemplo 2.6. Definimos la simetrización $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ como

$$\diamond K = \frac{1}{2}M_H K = \frac{1}{4}K + \frac{1}{4}(K^H).$$

Esta simetrización, cumple que es lineal y monótona porque la simetrización de Minkowski es lineal y monótona. Sin embargo no es invariante para conjuntos H -simétricos, basta con coger cualquier conjunto $K \in \mathcal{K}^n$ H -simétrico, tenemos $\diamond K = \frac{1}{2}M_H K = \frac{1}{2}K$, ni es invariante en la proyección.

Capítulo 3

Caracterizaciones

Para este capítulo nos hemos basado principalmente en [1]. El objetivo es abordar caracterizaciones. Esto es, dados un $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$ y una función $\diamond : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_H$ donde \mathcal{B} representa \mathcal{C}^n , \mathcal{K}^n o \mathcal{K}_n^n , si \diamond cumple determinadas propiedades, entonces podremos deducir de qué simetrización se trata.

3.1. Caracterización de la simetrización de Steiner

Esta sección tiene como objetivo dar una caracterización de la simetrización de Steiner, el corolario 3.1.7. Este resultado afirma que si una simetrización es monótona, conserva el volumen y tiene cierta invarianza de conjuntos, será esencialmente la de Steiner. Además, también veremos que todas las hipótesis son necesarias, puesto que podemos construir ejemplos de otras simetrizaciones que no cumplan las hipótesis.

Definición 3.1.1. Sean $K \in \mathcal{K}^n$ y $H \in \mathcal{G}(n, i)$. Si $x \in H$, como K está acotado, podemos escoger un $s > 0$ tal que $K|_{H^\perp} \subset s(B_n \cap H^\perp)$. Denotamos por $rB_i(x)$ la bola i -dimensional en H de radio $r > 0$ centrada en x . Consideramos el cilindro esférico H -simétrico $C_r(x) = rB_i(x) + s(B_n \cap H^\perp)$ y definimos para todo $K \in \mathcal{K}^n$ y para todo $x \in H$

$$m_{r,K}(x) = \text{vol}(K \cap C_r(x))$$

y

$$m_K(x) = \text{vol}_{n-i}(K \cap (x + H^\perp)). \quad (3.1)$$

En particular, cuando $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$, tenemos $m_K(x) = \gamma(x)$ definida en (2.2).

Proposición 3.1.2. Para cualquier $K \in \mathcal{K}^n$ y $H \in \mathcal{G}(n, i)$, la función $m_K(x)$ es continua para todo $x \in \text{relint } K|_H$.

Demostración. Vamos a probar que la función $m_K(x)^{\frac{1}{n-i}}$ es cóncava. Pero antes, primero veamos la siguiente inclusión donde $x, y \in \text{relint } K|H$

$$\lambda \left(K \cap (x + H^\perp) \right) + (1 - \lambda) \left(K \cap (y + H^\perp) \right) \subset \left(K \cap (\lambda x + (1 - \lambda)y + H^\perp) \right). \quad (3.2)$$

Si $a \in \lambda \left(K \cap (x + H^\perp) \right) + (1 - \lambda) \left(K \cap (y + H^\perp) \right)$, entonces existen $a_x \in \left(K \cap (x + H^\perp) \right)$ y $a_y \in \left(K \cap (y + H^\perp) \right)$ tales que $a = \lambda a_x + (1 - \lambda)a_y$. Por un lado, como a_x y a_y están en K que es convexo, a también lo estará. Por otro lado, deben existir $h_1, h_2 \in H^\perp$ tales que $a_x = x + h_1$ y $a_y = y + h_2$. Así que

$$a = \lambda(x + h_1) + (1 - \lambda)(y + h_2) = \lambda x + (1 - \lambda)y + (\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2) \in \left(\lambda x + (1 - \lambda)y + H^\perp \right),$$

por lo que será cierto el contenido (3.2).

Ahora, por la inclusión (3.2) y la desigualdad de Brunn-Minkowski (teorema 2.1.18) tenemos

$$\begin{aligned} m_K(\lambda x + (1 - \lambda)y)^{\frac{1}{n-i}} &= \text{vol}_{n-i} \left(K \cap (\lambda x + (1 - \lambda)y + H^\perp) \right)^{\frac{1}{n-i}} \geq \\ &\geq \text{vol}_{n-i} \left(\lambda \left(K \cap (x + H^\perp) \right) + (1 - \lambda) \left(K \cap (y + H^\perp) \right) \right)^{\frac{1}{n-i}} \geq \\ &\geq \lambda \text{vol}_{n-i} \left(K \cap (x + H^\perp) \right)^{\frac{1}{n-i}} + (1 - \lambda) \text{vol}_{n-i} \left(K \cap (y + H^\perp) \right)^{\frac{1}{n-i}} = \\ &= \lambda m_K(x)^{\frac{1}{n-i}} + (1 - \lambda) m_K(y)^{\frac{1}{n-i}}. \end{aligned}$$

Luego la función $m_K(x)^{\frac{1}{n-i}}$ es cóncava. De esta manera, $m_K(x)^{\frac{1}{n-i}}$ será continua en el interior de su dominio, es decir, en $\text{relint } K|H$ y, por tanto, $m_K(x)$ será continua para todo $x \in \text{relint } K|H$. \square

Observación 4. Utilizando argumentos topológicos que exceden el contenido de este trabajo puede verse que la función $m_K(x)$ es continua en $K|H$. Además, tenemos $m_K(x) = 0$ para todo $x \in H \setminus (K|H)$.

Sabemos que algunas propiedades de la simetrización de Steiner como que es estrictamente monótona, conserva el volumen, es invariante sobre conjuntos H -simétricos y es invariante en la proyección sobre H .

El siguiente resultado es un poco más general de lo que necesitamos, puesto que está enunciado para conjuntos compactos. La primera parte del teorema nos asegura que si una simetrización cumple que es monótona, conserva el volumen, y es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos, entonces casi todas las secciones del simetrizado de K mediante planos $(n-i)$ -dimensionales paralelos a H^\perp conservan el volumen de las secciones correspondientes de K . Además, la segunda parte afirma que si H es un hiperplano y estos subconjuntos son segmentos, entonces \diamond es la simetrización de Steiner.

Teorema 3.1.3. *Sea $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $H \in \mathcal{G}(n, i)$. Supongamos que $\diamond : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}_H^n$ es una i -simetrización que es monótona, conserva el volumen y es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos. Entonces*

$$\text{vol}_{n-i} \left((\diamond K) \cap (x + H^\perp) \right) = \text{vol}_{n-i} \left(K \cap (x + H^\perp) \right) \quad (3.3)$$

para todo $K \in \mathcal{C}^n$ y para casi todo $x \in H$.

En particular, si $i = n - 1$ y además $(\diamond K) \cap (x + H^\perp)$ es un segmento de línea para todo $K \in \mathcal{K}^n$ y casi todo $x \in H$, entonces \diamond es esencialmente la simetrización de Steiner sobre \mathcal{K}^n , en el sentido de que para todo $K \in \mathcal{K}^n$, $(\diamond K) \cap G = \sigma_H(K) \cap G$ para casi toda línea G ortogonal a H .

Demostración. Primero, demostraremos la igualdad (3.3). Sea $K \in \mathcal{C}^n$. Como K está acotado, podemos escoger un $s > 0$ tal que $K|H^\perp \subset s(B_n \cap H^\perp)$ y $\diamond K|H^\perp \subset s(B_n \cap H^\perp)$. Con este s definimos las funciones $m_K(x)$, $m_{r,K}(x)$, $m_{\diamond K}(x)$ y $m_{r,\diamond K}(x)$ según la definición 3.1.1 para $r > 0$.

Veamos que

$$m_{r,\diamond K} \geq m_{r,K}. \quad (3.4)$$

Para ello, sean $r > 0$ y $x \in H$. Por la invarianza sobre cilindros esféricos H -simétricos tenemos que $\diamond C_r(x) = C_r(x)$. Como \diamond es monótona, de $K \cap C_r(x) \subset K$ tenemos que $\diamond(K \cap C_r(x)) \subset \diamond K$. De manera similar, de $K \cap C_r(x) \subset C_r(x)$ se obtiene $\diamond(K \cap C_r(x)) \subset \diamond C_r(x) = C_r(x)$. Luego queda

$$\diamond(K \cap C_r(x)) \subset (\diamond K) \cap C_r(x). \quad (3.5)$$

Ahora, usando que \diamond conserva el volumen, obtenemos

$$m_{r,\diamond K}(x) = \text{vol}((\diamond K) \cap C_r(x)) \geq \text{vol}(\diamond(K \cap C_r(x))) = \text{vol}(K \cap C_r(x)) = m_{r,K}(x).$$

Esto demuestra la ecuación (3.4). A continuación, por la propia definición de $C_r(x)$, para todo $t \in rB_i(x)$, $K \cap (t + H^\perp) = (K \cap C_r(x)) \cap (t + H^\perp)$. Usando el principio de Cavalieri (teorema 1.2.3)

$$\begin{aligned} m_{r,K}(x) &= \text{vol}(K \cap C_r(x)) = \int_{(K \cap C_r(x))|H} \text{vol}_{n-i} \left((K \cap C_r(x)) \cap (t + H^\perp) \right) dt = \\ &= \int_{rB_i(x)} \text{vol}_{n-i} \left(K \cap (t + H^\perp) \right) dt = \int_{rB_i(x)} m_K(t) dt. \end{aligned}$$

Esto nos permite utilizar el teorema de diferenciación de Lebesgue (teorema 1.3.2) para obtener que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{r,K}(x)}{\text{vol}_i(rB_i(x))} = m_K(x), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{r,\diamond K}(x)}{\text{vol}_i(rB_i(x))} = m_{\diamond K}(x) \quad (3.6)$$

para casi todo $x \in H$. Las igualdades de (3.6) junto a la desigualdad (3.4) nos dan $m_{\diamond K}(x) \geq m_K(x)$ para casi todo $x \in H$. Además, usando la igualdad (3.1) y que \diamond conserva el volumen tenemos

$$\int_H (m_{\diamond K}(x) - m_K(x)) dx = \text{vol}(\diamond K) - \text{vol}(K) = 0. \quad (3.7)$$

Como el anterior integrando es no negativo para casi todo $x \in H$ y su integral vale 0, podemos utilizar la proposición 1.3.1 para obtener que $m_{\diamond K}(x) - m_K(x) = 0$ para casi todo $x \in H$, obteniendo así la igualdad (3.3).

Para la segunda parte, si $i = n - 1$ y $(\diamond K) \cap (x + H^\perp)$ es un segmento para casi todo $x \in H$, obtenemos segmentos simétricos respecto de H . Así, estos segmentos estarán centrados en H y tendrán igual longitud que $K \cap (x + H^\perp)$, lo que coincide con la definición de la simetrización de Steiner. \square

En la segunda parte del teorema 3.1.3 necesitamos imponer que $(\diamond K) \cap (x + H^\perp)$ sea un segmento. Sin esta condición podemos encontrar simetrizaciones monótonas, que conservan el volumen y que son invariantes sobre cilindros esféricos H -simétricos y, sin embargo, no son la simetrización de Steiner. La idea es que podemos obtener conjuntos no necesariamente convexos.

Ejemplo 3.1. Sea $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, para cada $K \in \mathcal{C}^n$, definimos

$$\begin{aligned}\diamond_1 K &= \sigma_H(K \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [-1, 1])) \\ \diamond_2 K &= \sigma_H(K \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times ((-\infty, -1) \cup (1, \infty))))\end{aligned}$$

y a partir de \diamond_1 y \diamond_2 construimos

$$\diamond K = (\diamond_1 K) \cup (((\diamond_2 K) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty))) + e_n) \cup (((\diamond_2 K) \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0])) - e_n). \quad (3.8)$$

Esta simetrización está bien definida porque para cada conjunto compacto, obtenemos otro conjunto compacto (es la unión de hasta 3 compactos) y simétrico respecto de H .

La simetrización \diamond de (3.8) es monótona y conserva el volumen, ya que \diamond_1 y \diamond_2 son monótonas y conservan el volumen para los subconjuntos de K sobre los que actúan. Esto se debe a que \diamond_1 simetriza la parte de K que está entre $H_{-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = -1\}$ y $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 1\}$ mientras que \diamond_2 actúa sobre lo que está bajo H_{-1} y sobre H_1 . Además, la intersección de donde actúan \diamond_1 y \diamond_2 es justamente los hiperplanos H_1 y H_{-1} , que tienen medida nula, por lo que no afectan al volumen.

Para ver que \diamond de (3.8) es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos, sean $y \in H$, $r > 0$ y $s > 0$, tenemos el cilindro $K = rB_i(y) + s(B_n \cap H^\perp)$. Si $x \in K$, sus coordenadas serán $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$, donde $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in rB_i(y)$ y $(0, \dots, 0, x_n) \in s(B_n \cap H^\perp)$, es decir, $|x_n| \leq s$. Distinguimos dos casos: $s < 1$ y $s \geq 1$. Para $s < 1$, tenemos que $\diamond_2 K = \emptyset$, luego $\diamond K = \diamond_1 K$ y coincide con σ_H . Como σ_H es invariante para cilindros esféricos H -simétricos, \diamond también lo será. Por otro lado, sea ahora $s \geq 1$, entonces $\diamond_1 K = rB_i(y) + (B_n \cap H^\perp)$ y $\diamond_2 K = rB_i(y) + (s - 1)(B_n \cap H^\perp)$. De aquí que

$$\diamond K = [rB_i(y) + (B_n \cap H^\perp)] \cup [rB_i(y) + (s(B_n \cap H^\perp)) \setminus (B_n \cap H^\perp)] = rB_i(y) + s(B_n \cap H^\perp) = K.$$

Por tanto, \diamond es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos.

En la Figura 3.1, si tomamos $H = \text{eje } OX$, tenemos un conjunto que es invariante para \diamond de (3.8) pero, sin embargo, su simetrización de Steiner sería el segmento con extremos $(1, -1)$ y $(1, 1)$.

A continuación vamos a presentar un resultado similar al anterior para $\dim H = n - 1$ pero definido sobre cuerpos convexos.

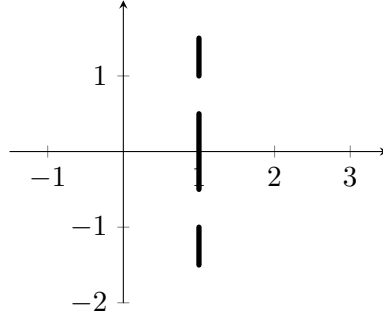


Figura 3.1: Este conjunto es invariante para \diamond de (3.8) pero no para σ_H

Teorema 3.1.4. *Sea $\diamond : \mathcal{K}_n^n \rightarrow \mathcal{K}_{nH}^n$ una $(n-1)$ -simetrización. Si \diamond es monótona, conserva el volumen y es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos, entonces*

$$\text{vol}_1 \left((\diamond K) \cap (x + H^\perp) \right) = \text{vol}_1 \left(K \cap (x + H^\perp) \right) \quad (3.9)$$

para todo $K \in \mathcal{K}_n^n$ y todo $x \in \text{relint } K|H$.

Demostración. Podemos repetir la demostración del teorema anterior 3.1.3 para $i = n-1$ y $K \in \mathcal{K}^n$. Como en este caso K es un cuerpo convexo, por la proposición 3.1.2 las funciones m_K y $m_{\diamond K}$ serán continuas en $K|H$ y, por tanto, las igualdades (3.6) serán ciertas para todo $x \in \text{relint } K|H$. De la integral (3.7) y la proposición 1.3.1 deducimos que $m_{\diamond K}(x) = m_K(x)$ para todo $x \in \text{relint } K|H$, de donde obtenemos la igualdad (3.9) para todo $x \in \text{relint } K|H$. \square

El siguiente teorema caracteriza la simetrización de Steiner para cuerpos convexos de dimensión n . A diferencia del teorema anterior 3.1.4, en este caso cambiamos la hipótesis sobre \diamond de ser invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos por la hipótesis de ser invariante por la proyección.

Teorema 3.1.5. *Sea $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $\diamond : \mathcal{K}_n^n \rightarrow \mathcal{K}_{nH}^n$ una i -simetrización. Si \diamond es monótona, conserva el volumen y es invariante por la proyección, entonces*

$$\text{vol}_{n-i} \left((\diamond K) \cap (x + H^\perp) \right) = \text{vol}_{n-i} \left(K \cap (x + H^\perp) \right) \quad (3.10)$$

para todo $K \in \mathcal{K}_n^n$ y todo $x \in \text{relint } K|H$.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{K}_n^n$. Dado $r > 0$ y $x \in K|H$, denotamos por $rB_i(x)$ la bola i -dimensional en H centrada en x de radio r . Como K y $\diamond K$ están acotados, $(K \cup \diamond K)$ estará acotado y $(K \cup \diamond K)|H^\perp$ también. Así, existe un $s > 0$ tal que $(K \cup \diamond K)|H^\perp \subset s(B_n \cap H^\perp)$. Como \diamond es invariante por la proyección, $K|H = \diamond K|H$, podemos escoger un $x \in \text{relint}(K|H) = \text{relint}(\diamond K|H)$ y definir el cilindro esférico H -simétrico $C_r(x) = rB_i(x) + s(B_n \cap H^\perp)$. Tenemos que $K \cap C_r(x) \in \mathcal{K}_n^n$ por estar x en el interior relativo de $K|H$.

Como \diamond es monótona y $K \cap C_r(x) \subset K$ tenemos $\diamond(K \cap C_r(x)) \subset \diamond K$. Por la invarianza sobre la proyección tenemos

$$(\diamond(K \cap C_r(x)))|H = (K \cap C_r(x))|H \subset C_r(x)|H \quad (3.11)$$

y por la monotonía de \diamond y la elección de s tenemos

$$(\diamond(K \cap C_r(x)))|H^\perp \subset (\diamond K)|H^\perp \subset C_r(x)|H^\perp. \quad (3.12)$$

Como $C_r(x)$ es un cilindro, por las inclusiones (3.11) y (3.12) tenemos que $\diamond(K \cap C_r(x)) \subset C_r(x)$. Por tanto

$$\diamond(K \cap C_r(x)) \subset (\diamond K) \cap C_r(x). \quad (3.13)$$

Por un lado, como es invariante por la proyección sobre H , tenemos que $\text{relint } K|H = \text{relint } \diamond K|H$. Al igual que en la demostración del teorema 3.1.3, consideremos las funciones $m_K(x)$, $m_{r,K}(x)$, $m_{\diamond K}(x)$ y $m_{r,\diamond K}(x)$ de la definición 3.1.1 y como \diamond conserva el volumen obtenemos

$$m_{r,\diamond K}(x) = \text{vol}((\diamond K) \cap C_r(x)) \geq \text{vol}(\diamond(K \cap C_r(x))) = \text{vol}(K \cap C_r(x)) = m_{r,K}(x). \quad (3.14)$$

A continuación, utilizando el mismo argumento que en el teorema 3.1.3, teniendo en cuenta que las funciones $m_K(x)$ y $m_{\diamond K}(x)$ son continuas en $\text{relint } K|H$ por la proposición 3.1.2, usamos el principio de Cavalieri (teorema 1.2.3) y el teorema de diferenciación de Lebesgue (teorema 1.3.2) para obtener

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{r,K}(x)}{\text{vol}_i(rB_i(x))} = m_K(x), \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{m_{r,\diamond K}(x)}{\text{vol}_i(rB_i(x))} = m_{\diamond K}(x) \quad (3.15)$$

para casi todo $x \in \text{relint } K|H$, pero como las funciones $m_K(x)$ y $m_{\diamond K}(x)$ son continuas, el resultado será cierto para todo $x \in \text{relint } K|H$.

Las igualdades de (3.15) junto a la desigualdad (3.14) nos dan $m_{\diamond K}(x) \geq m_K(x)$ para todo $x \in \text{relint } K|H$. Además, usando la igualdad (3.1) y que \diamond conserva el volumen tenemos

$$\int_H (m_{\diamond K}(x) - m_K(x)) dx = \text{vol}(\diamond K) - \text{vol}(K) = 0.$$

Como el anterior integrando es no negativo para todo $x \in \text{relint } K|H$, la función $m_{\diamond K}(x) - m_K(x)$ es continua por serlo $m_K(x)$ y $m_{\diamond K}(x)$ y su integral vale 0, podemos utilizar la proposición 1.3.1 para obtener que $m_{\diamond K}(x) - m_K(x) = 0$ para todo $x \in \text{relint } K|H$, obteniendo así la igualdad (3.3). \square

A partir de estos teoremas podemos caracterizar la Simetrización de Steiner. Primero consideraremos el caso de cuerpos convexos de dimensión n .

Corolario 3.1.6. *Sea $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$ y $\diamond : \mathcal{K}_n^n \rightarrow \mathcal{K}_{nH}^n$ una $(n-1)$ -simetrización. Si \diamond es monótona, conserva el volumen y, o bien es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos, o bien es invariante por la proyección, entonces \diamond es la simetrización de Steiner respecto de H .*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{K}_n^n$. Por un lado, si \diamond es invariante por la proyección, por el teorema 3.1.5 para $i = n-1$ tenemos

$$\text{vol}_1((\diamond K) \cap G) = \text{vol}_1(K \cap G) \quad (3.16)$$

para toda G línea ortogonal a H . Como $\diamond K$ es H -simétrico y cada $(\diamond K) \cap G$ es un segmento porque $\diamond K$ convexo, tenemos $\diamond K = \sigma_H(K)$.

Por otro lado, si \diamond es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos, por el teorema 3.1.4 se cumplirá también (3.16) para todo $x \in \text{relint } K|H$. Pero como tanto $\diamond K$ como $\sigma_H(K)$ son cuerpos convexos simétricos respecto de H , la igualdad (3.16) es cierta para toda línea G ortogonal a $\text{relint } K|H$ y tenemos $\diamond K = \sigma_H(K)$. \square

Una vez caracterizado sobre \mathcal{K}_n^n , podemos pasar a caracterizar para \mathcal{K}^n , concluyendo así que cualquier simetrización bajo estas condiciones es esencialmente la simetrización de Steiner definida sobre cuerpos convexos. El siguiente corolario es el mejor resultado posible para caracterizar la simetrización de Steiner en el sentido de, como hemos visto en los ejemplos 2.1, 2.3 y 2.4, todas las hipótesis son necesarias. Sin embargo, no nos garantiza que efectivamente sea la simetrización de Steiner, puesto que como veremos en el ejemplo 3.2, existen simetrizaciones que cumplen estas condiciones que no son la simetrización de Steiner.

Corolario 3.1.7. *Sea $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$ y $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ una $(n-1)$ -simetrización. Si \diamond es monótona, conserva el volumen y, o bien es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos, o bien es invariante por la proyección, entonces \diamond es la simetrización de Steiner respecto de H para cada $K \in \mathcal{K}^n$ que no esté contenido en un hiperplano ortogonal a H .*

Demostración. Como \diamond conserva el volumen, si nos restringimos a cuerpos convexos tenemos que $\diamond : \mathcal{K}_n^n \rightarrow \mathcal{K}_{nH}^n$ y por el corolario 3.1.6 el resultado es cierto. Así, supongamos que $\dim K < n$. Para cada $\varepsilon > 0$, $K + \varepsilon B_n$ es un cuerpo convexo, así que $\diamond(K + \varepsilon B_n) = \sigma_H(K + \varepsilon B_n)$. Si K no está contenido en un hiperplano ortogonal a H , tendremos que $\sigma_H(K) = K|H$. Por tanto, por la monotonía de \diamond y la proposición 2.1.12 se cumple

$$\diamond K \subset \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \diamond(K + \varepsilon B_n) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_H(K + \varepsilon B_n) \subset \sigma_H \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (K + \varepsilon B_n) \right) = \sigma_H(K) = K|H$$

en la métrica de Hausdorff cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Veamos que $\diamond K = K|H = \sigma_H(K)$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\diamond K \neq K|H$. Como hemos visto que $\diamond K \subset K|H$, entonces tendremos que $K|H \not\subset \diamond K$ y, por tanto, $(K|H) \setminus \diamond K \neq \emptyset$. Como ambos son conjuntos compactos, existe otro conjunto compacto $L \in \mathcal{K}^n$ que $L \subset K$ y $L|H \subset (K|H) \setminus \diamond K$. Como $\diamond L \subset L|H$, tenemos que $\diamond L \not\subset \diamond K$, contradiciendo que \diamond es monótona. \square

Para ver que todas las hipótesis de la caracterización son necesarias, podemos encontrar ejemplos de otras simetrizaciones que no son la simetrización de Steiner que incumplen alguna hipótesis.

Si omitimos la hipótesis de que sea invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos o que sea invariante por la proyección, podemos construir la simetrización dada en el ejemplo 2.1. También podemos construir otra simetrización que es monótona e invariante sobre conjuntos H -simétricos, pero no conserva el volumen: la recogida en el ejemplo 2.3. En cuanto a una simetrización que conserva el volumen y es invariante por la proyección e invariante

sobre cilindros esféricos H -simétricos pero que no es monótona podemos encontrarla en el ejemplo 2.4.

El siguiente ejemplo nos dice que si la simetrización está definida sobre cuerpos convexos arbitrarios entonces las condiciones del teorema 3.1.5 no son suficientes para garantizar que la simetrización sea la simetrización de Steiner.

Ejemplo 3.2. Sea $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$. Para cada $K \in \mathcal{K}^n$, definimos $\diamond K = \sigma_H(K)$ si K no está contenido en un hiperplano ortogonal a H y $\diamond K = K|H$ si sí lo está. Entonces $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ es monótona, conserva el volumen, es idempotente, es invariante sobre cilindros esféricos H -simétricos y es invariante por la proyección sobre H . Sin embargo, \diamond no es invariante sobre conjuntos H -simétricos, así que no será la simetrización de Steiner. Para ver que no es invariante sobre conjuntos H -simétricos, sean u un vector unitario ortogonal a H y K el segmento que va de $-au$ hasta au , que representamos por $[-au, au]$ para algún $a > 0$. Entonces $\sigma_H(K) = [-au, au] \neq \{o\} = K|H = \diamond K$.

3.2. Caracterización de la simetrización de Minkowski

En esta sección vamos a tratar con caracterizaciones de la simetrización de Minkowski. Daremos una caracterización para cualquier dimensión de H entre 0 y $n-1$ y otra para cuando tengamos $\dim H = n-1$.

Antes vamos a ver una propiedad que necesitaremos para la demostración de ambas caracterizaciones de la simetrización de Minkowski. Esta propiedad dice que si tenemos una simetrización monótona, invariante sobre conjuntos H -simétricos e invariante sobre traslaciones ortogonales a H de conjuntos H -simétricos, el simetrizado de cualquier cuerpo convexo estará contenido en el simetrizado de Minkowski.

Proposición 3.2.1. *Sea $H \in \mathcal{G}(n, i)$ con $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Sea $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ monótona, invariante sobre conjuntos H -simétricos e invariante sobre traslaciones ortogonales a H de conjuntos H -simétricos. Entonces*

$$\diamond K \subset M_H K. \quad (3.17)$$

Demostración. Sean $K \in \mathcal{K}^n$ e $y \in H^\perp$. El conjunto $\text{conv}(K_y \cup K_y^H)$ es H -simétrico y además tenemos $K \subset \text{conv}(K_y \cup K_y^H) - y$. Usando la monotonía y la invarianza de \diamond sobre traslaciones ortogonales a H de conjuntos H -simétricos y la invarianza sobre conjuntos H -simétricos, obtenemos

$$\diamond K \subset \diamond(\text{conv}(K_y \cup K_y^H) - y) = \diamond \text{conv}(K_y \cup K_y^H) = \text{conv}(K_y \cup K_y^H).$$

Como esto es cierto para todo $y \in H^\perp$, por la proposición 2.2.4 se tiene que

$$\diamond K \subset \bigcap_{y \in H^\perp} \text{conv}(K_y \cup K_y^H) = M_H K.$$

□

A continuación, vamos a ver una caracterización de la simetrización de Minkowski. Las condiciones que vamos a pedir a la simetrización son que sea monótona, lineal y que sea invariante sobre conjuntos H -simétricos.

Teorema 3.2.2. *Sea $H \in \mathcal{G}(n, i)$ para algún $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Si $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ es monótona, invariante sobre conjuntos H -simétricos y lineal, entonces \diamond es la simetrización de Minkowski respecto de H .*

Demostración. Primero, consideremos un $y \in H^\perp$. Como la simetrización es lineal, tenemos

$$\diamond y + \diamond y^H = \diamond(y + y^H) = \diamond\{o\} = \{o\}$$

donde la última igualdad se tiene porque el origen es un conjunto H -simétrico. Esto nos da que los conjuntos $\diamond y$ y $\diamond y^H$ son conjuntos unipuntuales. Consideremos ahora el segmento que va de y a y^H , es decir, $[y, y^H]$. Como este segmento es H -simétrico, $\diamond[y, y^H] = [y, y^H]$. Por la monotonía de \diamond , tenemos entonces que $\diamond y, \diamond y^H \subset [y, y^H]$. Así que como $\diamond y$ es unipuntual y simétrico respecto de H , deducimos que $\diamond y = \{o\}$.

Ahora, consideremos un $K \in \mathcal{K}^n$. Como \diamond es lineal,

$$\diamond(K + y) = \diamond K + \diamond y = \diamond K, \quad (3.18)$$

por lo que \diamond es invariante sobre traslaciones ortogonales a H , y, en particular, también será invariante sobre traslaciones ortogonales a H de conjuntos H -simétricos. Por la proposición 3.2.1, tenemos $\diamond K \subset M_H K$ y $\diamond K^H \subset M_H K^H$. Como $K + K^H$ es simétrico respecto de H , utilizando que \diamond es invariante sobre conjuntos H -simétricos y lineal obtenemos

$$\begin{aligned} K + K^H &= \diamond(K + K^H) = \diamond K + \diamond K^H \subset M_H K + \diamond K^H \subset \\ &\subset M_H K + M_H K^H = M_H(K + K^H) = K + K^H. \end{aligned}$$

Esto implica que $\diamond K + \diamond K^H = M_H K + \diamond K^H$. Por la cancelación de la suma de Minkowski para cuerpos convexos (proposición 1.1.12) tenemos que $\diamond K = M_H K$. \square

Respecto a las necesidad de las hipótesis, podemos encontrar en el ejemplo 2.6 una simetrización que es monótona y lineal, pero que no es invariante para conjuntos H -simétricos. Podemos considerar la simetrización de Steiner como ejemplo de simetrización monótona e invariante para conjuntos H -simétricos pero que no es lineal.

A continuación, vamos a ver algunos resultados previos que necesitamos para dar la otra caracterización de la simetrización de Minkowski.

Lema 3.2.3. *Sean $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$ y $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ una simetrización monótona que conserva la anchura media. Si $K \in \mathcal{K}^n$ H -simétrico tal que $\diamond(K + y) \subset K$ o $K \subset \diamond(K + y)$ para algún $y \in H^\perp$, entonces $\diamond(K + y) = K$.*

Demostración. Sean $K \in \mathcal{K}^n$, $y \in H^\perp$. Supongamos que $\diamond(K + y) \subset K$. Como \diamond conserva la anchura media y ésta es invariante bajo movimientos rígidos, tenemos

$$b(\diamond(K + y)) = b(K + y) = b(K). \quad (3.19)$$

Ahora, como la anchura media es una función estrictamente creciente, debe ser $\diamond(K+y) = K$. Análogamente, si suponemos que $K \subset \diamond(K+y)$, por la igualdad (3.19) y que $b(\cdot)$ es una función estrictamente creciente tenemos $K = \diamond(K+y)$. \square

Lema 3.2.4. *Si $K \in \mathcal{K}_n^n$ es simétrico respecto de H , K será la clausura de la unión de todos los cilindros esféricos H -simétricos contenidos en K .*

Proposición 3.2.5. *Sean $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$ y $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ una simetrización monótona que conserva la anchura media. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. \diamond es invariante para conjuntos H -simétricos.
2. \diamond es invariante en la proyección sobre H .
3. \diamond es invariante para cilindros esféricos H -simétricos.

Demostración. Empecemos viendo que (1) implica (2). Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Como K está acotado, existirá algún $R_0 > 0$ tal que K esté contenido en $L = (K|H) + (R_0 B_n \cap H^\perp)$. Como L es un conjunto H -simétrico, tenemos que $\diamond L = L$. Utilizando la monotonía de \diamond , tenemos que $\diamond K \subset \diamond L$, así que

$$(\diamond K)|H \subset (\diamond L)|H = L|H = K|H.$$

Para el otro contenido, procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe una bola B con $\dim B = \dim(K|H)$ contenida en $(K|H) \setminus ((\diamond K)|H)$. Podemos escoger un $R_1 > 0$ tal que si $M = B + (R_1 B_n \cap H^\perp)$, entonces $K \cap (B + H^\perp) \subset M$. Por la definición de M , $M \in \mathcal{K}^n$ y es simétrico respecto de H . Además $K \cap M \in \mathcal{K}^n$. Esto junto con la monotonía de \diamond y la invarianza sobre conjuntos H -simétricos nos llevan a que $\diamond(K \cap M) \subset \diamond M = M$. Por la monotonía de la proyección sobre H , tenemos $(\diamond(K \cap M))|H \subset M|H = B$. Como $K \cap M \neq \emptyset$, el conjunto $\diamond(K \cap M)$ es no vacío y, por tanto, $(\diamond(K \cap M))|H \neq \emptyset$. La inclusión $K \cap M \subset K$ nos da $(\diamond(K \cap M))|H \subset (\diamond K)|H$. Por lo que

$$\emptyset \neq (\diamond(K \cap M))|H \subset B \cap ((\diamond K)|H),$$

lo cual lleva a una contradicción con la definición de B , ya que $B \cap ((\diamond K)|H) = \emptyset$. Esto nos lleva a que $K|H \subset (\diamond K)|H$ y, por tanto, $(\diamond K)|H = K|H$, es decir, \diamond es invariante en la proyección.

Ahora veamos que (2) implica (3). Para ello, sea $K \in \mathcal{K}^n$ un cilindro esférico H -simétrico. Como \diamond conserva la anchura media y es monótona, por el lema 3.2.3 si se cumple que $K \subset \diamond K$, entonces tendremos que $\diamond K = K$. En caso de que esto no ocurra, existe un $x \in \text{relint } K|H = \text{relint } (\diamond K)|H$, tal que $(\diamond K) \cap (x + H^\perp)$ está contenido estrictamente en $K \cap (x + H^\perp)$. Así, podemos escoger un $r > 0$ de forma que si denotamos por $C_r(x) = r B_{n-1}(x) + H^\perp$ con $r B_{n-1}(x) \subset H$, entonces $(\diamond K) \cap C_r(x)$ esté contenido estrictamente en $K \cap C_r(x)$. Como \diamond es monótona, tenemos $\diamond(K \cap C_r(x)) \subset \diamond K$. Por la monotonía y la invarianza en la proyección de \diamond tenemos que $\diamond(K \cap C_r(x)) \subset \diamond C_r(x) \subset C_r(x)$. Por tanto, $\diamond(K \cap C_r(x)) \subset (\diamond K) \cap C_r(x)$ y se sigue que $\diamond(K \cap C_r(x))$ está contenido estrictamente en $K \cap C_r(x)$, pero esto contradice el hecho de que \diamond conserva la anchura media, ya que es

una función estrictamente creciente. Así que si es invariante en la proyección, es invariante para cilindros esféricos H -simétricos.

Por último, veamos que (3) implica (1). Sea $K \in \mathcal{K}^n$ un conjunto H -simétrico. Supongamos primero que $\dim K = n$. Si L es un cilindro esférico H -simétrico contenido en K , por la monotonía de \diamond tendremos $L = \diamond L \subset \diamond K$. Por el lema 3.2.4, K será la clausura de la unión de todos los cilindros esféricos H -simétricos que contiene, luego $K \subset \diamond K$. Pero por el lema 3.2.3 para $y = 0$ ha de ser $K = \diamond K$.

Ahora supongamos que K es un conjunto H -simétrico con $\dim K < n$. Para cada $\varepsilon > 0$, $K + \varepsilon B_n$ es un conjunto H -simétrico de dimensión n , así que $\diamond K \subset \diamond(K + \varepsilon B_n) = K + \varepsilon B_n$. Tomando el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, obtenemos $\diamond K \subset K$ y por el lema 3.2.3 para $y = 0$ concluimos $\diamond K = K$.

□

Teorema 3.2.6. *Sean $H \in \mathcal{G}(n, n-1)$ y $\diamond : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}_H^n$ una simetrización monótona, que conserva la anchura media y cumple alguna de las propiedades equivalentes de la proposición anterior 3.2.5. Entonces \diamond es la simetrización de Minkowski.*

Demostración. Si la simetrización \diamond cumple alguna de las propiedades, las cumplirá todas ya que es monótona y conserva la anchura media. Vamos a ver que la simetrización es invariante por traslaciones ortogonales a H de conjuntos H -simétricos. Sean $K \in \mathcal{K}^n$ un conjunto H -simétrico e $y \in H^\perp$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\diamond(K + y) \neq K$. Para no entrar en contradicción con el lema 3.2.3 para $y = 0$, no podemos tener ni $K \subset \diamond(K + y)$ ni $\diamond(K + y) \subset K$.

Supongamos primero que $\dim K = n$. Como \diamond es invariante en la proyección sobre H , $\text{relint } K|H = \text{relint } (\diamond K)|H$. De que no puede ser $K \subset \diamond(K + y)$ deducimos que debe existir un $x \in \text{relint } K|H$ tal que $(\diamond(K + y)) \cap (x + H^\perp)$ esté contenido estrictamente en $K \cap (x + H^\perp)$. Así, podemos escoger un $r > 0$ y definir $C_r(x) = rB_{n-1}(x) + H^\perp$ con $rB_{n-1}(x) \subset H$ de modo que $(\diamond(K + y)) \cap C_r(x)$ esté contenido estrictamente en $K \cap C_r(x)$. El conjunto $C_r(x)$ cumple $C_r(x) = C_r(x) + y$ y como \diamond es invariante en la proyección, $\diamond C_r(x) \subset C_r(x)$. Esto junto con la monotonía de \diamond , nos da

$$\diamond((K \cap C_r(x)) + y) = \diamond((K + y) \cap C_r(x)) \subset (\diamond(K + y)) \cap C_r(x).$$

Como $(\diamond(K + y)) \cap C_r(x)$ está contenido estrictamente en $K \cap C_r(x)$, $\diamond((K \cap C_r(x)) + y)$ también estará contenido estrictamente en $K \cap C_r(x)$. Pero esto entra en contradicción con el lema 3.2.3 aplicado al conjunto $K \cap C_r(x)$. Así que $\diamond(K + y) = K = \diamond K$.

Ahora, supongamos que $\dim K < n$. Por la monotonía de \diamond y el argumento anterior, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos

$$\diamond(K + y) \subset \diamond(K + \varepsilon B_n + y) = K + \varepsilon B_n.$$

Si hacemos $\varepsilon \rightarrow 0^+$, esto implica que $\diamond(K + y) \subset K$ y, por el lema 3.2.3, $\diamond(K + y) = K$. Como \diamond es invariante para conjuntos H -simétricos, $\diamond(K + y) = K = \diamond K$.

Por último, sea $K \in \mathcal{K}^n$ cualquiera. Como \diamond es monótona, invariante sobre conjuntos H -simétricos y hemos visto que es invariante sobre traslaciones ortogonales a H de

conjuntos H -simétricos, utilizando la proposición 3.2.1, tenemos que $\diamond K \subset M_H K$. Como tanto \diamond como M_H conservan la anchura media, tenemos

$$b(K) = b(\diamond K) \leq b(M_H K) = b(K).$$

Por tanto, como $b(\diamond K) = b(M_H K)$ y la anchura media es una función estrictamente creciente, concluimos que $\diamond K = M_H K$. \square

En cuanto a las hipótesis de esta caracterización, podemos ver que son todas necesarias ya que, por ejemplo, encontramos una simetrización en el ejemplo 2.2 que es monótona y conserva la anchura media, pero sin embargo, no es invariante para conjuntos H -simétricos. Por otro lado, la simetrización del ejemplo 2.3 es monótona e invariante para conjuntos H -simétricos pero no conserva la anchura media. Por último, en el ejemplo 2.5 encontramos una simetrización que conserva la anchura media y es invariante en la proyección, pero no es monótona.

Bibliografía

- [1] Gabriele Bianchi, Richard J Gardner, and Paolo Gronchi. Symmetrization in geometry. *Advances in Mathematics*, 306:51–88, 2017.
- [2] Wilhelm Blaschke. *Kreis und kugel*. Verlag von Veit & Comp., 1959.
- [3] Silouanos Brazitikos, Apostolos Giannopoulos, Petros Valettas, and Beatrice-Helen Vritsiou. *Geometry of isotropic convex bodies*, volume 196. American Mathematical Soc., 2014.
- [4] Peter M Gruber. *Convex and discrete geometry*, volume 336. Springer Science & Business Media, 2007.
- [5] Nicholas D Kazarinoff. Geometric inequalities. *New York*, 1961.
- [6] Daniel A Klain. Steiner symmetrization using a finite set of directions. *Advances in Applied Mathematics*, 48(2):340–353, 2012.
- [7] Steven G Krantz and Harold R Parks. *The geometry of domains in space*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [8] Horst Martini, Luis Montejano, and Déborah Oliveros. *Bodies of constant width*. Springer, 2019.
- [9] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006.
- [10] Rolf Schneider. *Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory*. Number 151. Cambridge university press, 2014.
- [11] Roger Webster et al. *Convexity*. Oxford University Press, 1994.