UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

CRITERIOS DE ESTABILIDAD ASINTÓTICA PARA ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Trabajo realizado por Almudena Nicolás Ballesta, 48751757 Z

Dirigido por Antonio Linero Bas

2019/2020

UNIVERSIDAD DE MURCIA

Facultad de Matemáticas: Máster Universitario en Matemática Avanzada, especialidad de Análisis Matemático

Declaración de originalidad

Almudena Nicolás Ballesta, autora del Trabajo de Fin de Máster “Criterios de estabilidad asintótica para ecuaciones en diferencias lineales de orden superior”, bajo la tutela del profesor Antonio Linero Bas, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 4 de septiembre de 2020

A Nicolás

Fdo.: Almudena Nicolás Ballesta

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo principal el estudio de los criterios de estabilidad para ecuaciones en diferencias lineales de orden superior. Se pretende hacer un análisis de las técnicas empleadas para la obtención de estos criterios, comenzando por aquellos que pertenecen a ecuaciones más específicas hasta llegar a los más generales posibles.

La importancia de este trabajo se justifica porque las ecuaciones en diferencias modelizan gran cantidad de fenómenos que son de interés en la actualidad y conocer su estabilidad es uno de los puntos más importantes. Sin ir más lejos, en la actualidad del año 2020, la comunidad científica se ha volcado en el estudio de la pandemia causada por el Sars-CoV-2, y parte de ese trabajo se centra en analizar cómo evoluciona la población de infectados, curados y susceptibles de contagio. Este fenómeno se modeliza mediante ecuaciones en diferencias y es interesante conocer bajo qué condiciones las soluciones de ese modelo preveen que los infectados sigan creciendo o, por el contrario, el virus se extinga.

La gran variedad de fenómenos que se pueden modelizar pueden necesitar de ecuaciones en diferencias no lineales. Sin embargo, las estudiadas en este trabajo son exclusivamente las de tipo lineal. Esto no lo hace menos interesante, dado que existen métodos de linealización que pueden reducir ecuaciones no lineales a los casos que aquí se describen. De hecho, por la complicidad de los cálculos, en muchos casos es probable que sea preferible aplicar dicha linealización y estudiar entonces el criterio de estabilidad correspondiente.

Un punto interesante de este trabajo es que el lector puede hacer un estudio comparativo de las técnicas empleadas para obtener los criterios de estabilidad asintótica en cada caso. Como el lector podrá comprobar, destacan dos procedimientos:

1. Localización de las raíces del polinomio característico y análisis de su movimiento por el plano según varíen los coeficientes de la ecuación.

2. Análisis a partir del criterio de Schur-Cohn, que nos proporciona una ecuación en diferencias asociada a la que se estudia, y que va a ser más sencilla de analizar mediante la primera técnica.

Siguiendo en orden este trabajo, el lector podrá comprobar cómo se adaptan estas técnicas a las distintas ecuaciones en diferencias, que están ordenadas de la más concreta a la más general (este orden también coincide con el orden cronológico de publicación).

Lo que el lector va a encontrar en esta monografía será, en primer lugar, un capítulo introductorio sobre ecuaciones en diferencias. Aquí se dan pinceladas sobre qué es una ecuación en diferencias, cómo hallar sus soluciones y la estructura que presentan y las definiciones de estabilidad o inestabilidad que deberán tenerse en cuenta. Es un capítulo de referencia para entender la notación que se va a seguir en el resto del trabajo, y también para encontrar bibliografía adecuada para profundizar en estos temas.

El Capítulo 2 versa sobre el criterio de Schur-Cohn, que ya se ha adelantado que será fundamental para establecer la estabilidad asintótica, y dos criterios de condiciones suficientes para que la estabilidad sea asintótica. Si bien no son necesarios, puede ser interesantes tenerlos presentes.

Los Capítulos 3, 4, 5 y 6 suponen el grueso del trabajo. Cada uno está dedicado a una ecuación en diferencias distinta, ordenadas de menor a mayor generalidad como ya se ha mencionado. Se dan aquí los criterios encontrados por los diferentes autores para asegurar la estabilidad asintótica de las soluciones, junto con la prueba detallada, donde se pueden ver las técnicas que se mencionaban antes.

Finalmente, el lector podrá encontrar las conclusiones del trabajo y la bibliografía consultada para su realización.

Introduction

The main objective of this work is to study the stability criteria for higher order linear difference equations. It is intended to make an analysis of the techniques used to obtain these criteria, starting with those that are more specific equations up to the most general of them all.

The importance of this work is justified because the difference equations modeled lot of phenomena that are of interest today and to know its stability is one of the most important points. Without going any further, at the present time of the year 2020, the scientific community has turned to the study of the pandemic caused by Sars-CoV-2, and part of that work is focused on analyzing how the population of infected, cured and individuals susceptible to contagion evolves. This phenomenon is modeled using difference equations and it is interesting to know under what conditions the solutions of this model predicts that the infected continue to grow or, on the contrary, the virus will become extinct.

The wide variety of phenomena that can be modeled may require nonlinear difference equations. However, those studied in this work are exclusively linear. This does not make it less interesting, since there are linearization methods that can reduce nonlinear equations to the cases described here. In fact, due to the complicity of the calculations, in many cases it is probably preferable to apply those linearization techniques and then study the corresponding stability criterion.

An interesting point of this work is that the reader can make a comparative study of the techniques used to obtain asymptotic stability criteria in each case. As the reader will see, two procedures stand out:

1. Location of the roots of the characteristic polynomial and analysis of their movement through the plane as the coefficients of the equation vary.

2. Analysis from the Schur-Cohn criterion, which provides us with a equation in differences associated with the one being studied, which will be easier to analyze using the first technique.

Reading this work in order, the reader will be able to see how these techniques are adapted to the different difference equations, which are ordered from the most specific to the most general (this order also coincides with the chronological order of publication).

What the reader will find in this monograph is, first of all, an introductory chapter on difference equations. Here we give some hints about what a difference equation is, how to find its solutions and the structure they present and the definitions of stability or instability that should be taken into account. It is a reference chapter to understand the notation that will be followed in the rest of the work, and also to find adequate bibliography to deepen in these topics.

Chapter 2 deals with the Schur-Cohn criterion, which has already been advanced that will be fundamental to establish asymptotic stability, and two criteria of sufficient conditions for stability to be asymptotic. Although they are not necessary, it can be interesting to keep them in mind.

Chapters 3, 4, 5 and 6 represent the bulk of the work. Each one is dedicated to a different difference equation, ordered from least to most general as already mentioned. The criteria found by the different authors to ensure the asymptotic stability of the solutions are given here, together with the detailed test, where the techniques mentioned above can be seen.

Finally, the reader will be able to find the conclusions of the work and the bibliography consulted for its realization.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados que son necesarios para el desarrollo de los capítulos posteriores. El objetivo es establecer la nomenclatura que se va a seguir durante todo el trabajo y los conocimientos previos que el lector debe tener para poder abordar los problemas que se van a plantear posteriormente. De esta manera, el lector puede volver a este capítulo cuando requiera profundizar más en algún aspecto o concepto del trabajo. Para más detalles, el lector puede consultar las referencias [6], [7], [9] y [10].

1.1. Ecuaciones en diferencias

Las ecuaciones en diferencias se utilizan a menudo para describir la evolución de un cierto fenómeno a lo largo del tiempo. De manera similar a cómo las ecuaciones diferenciales relacionan funciones, las ecuaciones en diferencias relacionan sucesiones. De forma general, una ecuación en diferencias de primer orden se puede representar por el término $(n+1)$-ésimo relacionado mediante una cierta función f con el término n-ésimo de la sucesión. Es decir,

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.1}$$

con $x_{n+1}, x_n \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Se puede encontrar la solución a este problema empezando en un punto inicial x_0 y generando la secuencia

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \ldots.$$

Donde a menudo se usa la notación

$$f^2(x_0) = f(f(x_0)),\ f^3(x_0) = f(f(f(x_0))), \text{ etc.}$$

Y se llama $f(x_0)$ a la primera iterada de x_0, $f^2(x_0)$ a la segunda iterada y, en general, $f^n(x_0)$ se dice la iterada n-ésima de x_0. Además, se establece que $f^0(x_0) = x_0$ por definición. Así, una sucesión $\{x_n\}_{n_0}^{\infty}$ o simplemente x_n se llama solución de (1.1) si satisface la ecuación. Al conjunto de todas las iteradas positivas de x_0, $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ se le llama la órbita de x_0.

La ecuación que acabamos de ver tiene un periodo de retraso entre sus términos de una unidad. Sin embargo, existen ecuaciones en diferencias con un periodo de retraso mayor que 1. Al periodo de retraso se le llama el orden de la ecuación. Podemos clasificar las ecuaciones en diferencias atendiendo a su orden y a cómo es la función f.

Definición 1. *Una ecuación en diferencias de orden k es una expresión de la forma*

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_n, n), \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.2}$$

donde cada $x_n \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \to \mathbb{R}^n$. La ecuación es

- *autónoma si f no depende de n, es decir,*

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, \ldots, x_n), \tag{1.3}$$

  no autónoma si es al contrario;

- *lineal si* f *es lineal en las variables* $(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}, ..., x_n)$*, no lineal en caso contrario;*
- *homogénea si en* f *no hay términos independientes de* x_n*, no homogénea en caso contrario;*
- *de primer orden si* $k = 1$*, de orden superior si* $k > 1$.

Las ecuaciones en diferencias necesitan de un grupo de condiciones iniciales para su resolución. El número de condiciones iniciales debe coincidir con el del orden de la ecuación. Siendo así, se podrá obtener la sucesión que sea solución de la ecuación en función de las condiciones iniciales. Esto es fácil de ver, por ejemplo, en el caso de una ecuación de orden k cuyas condiciones iniciales son $\{x_0, x_1, ..., x_{k-1}\}$ la solución se obtiene mediante las sucesivas iteradas

$$\begin{aligned}
&x_k = f(x_0, x_1, ..., x_{k-1}),\\
&x_k + 1 = f(x_1, x_2, ..., x_k) = f(x_1, x_2, ..., f(x_0, x_1, ..., x_{k-1})) =: f^2(x_0, x_1, ..., x_{k-1}),\\
&\vdots\\
&x_n =: f^n(x_0, x_1, ..., x_{k-1}).
\end{aligned}$$

Obviamente, el cálculo de la $n-$ésima iterada de f no es algo fácil de calcular, por lo que a menudo interesa más conocer en comportamiento de la solución a largo plazo. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0, x_1, ..., x_{k-1}).$$

Conviene dar unas ideas sobre las ecuaciones en diferencias que más se estudian. La más sencilla que se puede ver es una ecuación de primer orden, lineal y homogénea, dada de forma general por

$$x_{n+1} = a(n)x_n.$$

Así como las no homogéneas, dadas por la expresión general

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n).$$

$a(n)$ y $b(n)$ son funciones de valores reales definidas para $n \geq n_0 \geq 0$, siendo n_0 aquel que cumple la condición inicial $x_{n_0} = x_0$. Para más detalles sobre estas ecuaciones y su resolución se recomienda consultar [6].

Tras las ecuaciones de primer orden, tendremos las ecuaciones lineales de orden k. Las ecuaciones lineales de orden superior vienen dadas por la expresión general

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + p_2(n)x_{n+k-2} + ... + p_k(n)x_n = g(n).$$

En este caso, los coeficientes p_i y $g(n)$ son funciones de valores reales definidas para todo $n \geq n_0$. Además, $p_k(n) \neq 0$ para todo $n \geq n_0$. Si el término $g(n)$ es idénticamente igual a 0, entonces la ecuación anterior es homogénea.

La búsqueda de soluciones de este tipo de ecuaciones es un problema complicado que puede llegar a requerir el uso de herramientas informáticas. Sin embargo, existen importantes resultados que aseguran que este tipo de ecuaciones tienen un conjunto de soluciones linealmente independientes entre sí. También se demuestra que cualquier combinación lineal que se pueda hacer con ellas es también solución de la ecuación, a lo que se da el nombre de solución general. Para un desarrollo exhaustivo de estos resultados se recomienda consultar [6, pp. 72-73].

Como caso concreto del anterior, un tipo de ecuación en diferencias lineal de orden superior que se resuelve con relativa facilidad es aquella que tiene coeficientes constantes. La expresión general de este tipo de ecuación viene dada por

$$x_{n+k} + p_1x_{n+k-1} + p_2x_{n+k-2} + ... + p_kx_n = g. \tag{1.4}$$

A diferencia con el caso anterior, aquí los términos p_i son constantes reales y $p_k \neq 0$. Si el término independiente g fuese igual a 0, entonces diríamos que la ecuación anterior es homogénea.

La facilidad en la resolución explícita de este tipo de ecuación en diferencias se debe a que sabemos que la parte homogénea de (1.4) la cumplen, es decir, es solución, términos tipo λ^n, siendo λ un número real o complejo. Esto es fácil de comprobar simplemente sustituyendo este tipo de soluciones en la parte homogénea de la ecuación en diferencias,

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + ... + p_k x_n = 0, \tag{1.5}$$

y viendo, tras unas sencillas simplificaciones, que el resultado es una ecuación, llamada ecuación característica,

$$\lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + ... + p_k = 0.$$

de la que siempre podremos hallar las raíces dado que se trata de un polinomio. El nombre que se da a dicho polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + ... + p_k \tag{1.6}$$

es el de polinomio característico.

El procedimiento para encontrar el conjunto de soluciones de las ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes es, entonces, bastante simple. En primer lugar, y dado que vamos a resolver primero la parte homogénea, debemos prescindir del término independiente g en (1.4), obteniendo (1.5). Luego, sustituimos la solución que sabemos que la cumple, $x_n = \lambda^n$, en cada término de la ecuación, obteniendo la ecuación característica.

Las raíces del polinomio característico nos darán los valores que λ puede tomar para que se cumpla la ecuación en diferencias. Sin embargo, aún no habremos obtenido todas las soluciones de la ecuación homogénea. Sabemos que las soluciones de la ecuación en diferencias son linealmente independientes entre sí y tienen estructura de espacio vectorial, se recomienda consultar [6, pp. 72-73] para ver esto en profundidad. Para tenerlas todas habremos de fijarnos en la multiplicidad de los valores λ que hallamos obtenido y en si se trata de valores reales o complejos. Si los valores de λ son reales, entonces el conjunto

$$\{\lambda^n, n\lambda^n, n^2\lambda^n, ..., n^{m-1}\lambda^n\}$$

es el conjunto de soluciones de la ecuación en diferencias, donde m será la multiplicidad de las raíces λ del polinomio característico.

En el caso de que las raíces λ sean complejas se podrán expresar en parte real e imaginaria tal como $\lambda = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Ambas partes serán solución de la ecuación en diferencias e independientes entre sí, por lo que obtendremos dos conjuntos diferentes de soluciones linealmente independientes, uno de cada parte:

$$\{r^n \cos(n\theta), nr^n \cos(n\theta), ..., n^{m-1} r^n \cos(n\theta)\}$$

que se obtendrá de la parte real, y

$$\{r^n \,\mathrm{sen}(n\theta), nr^n \,\mathrm{sen}(n\theta), ..., n^{m-1} r^n \,\mathrm{sen}(n\theta)\}$$

que se obtendrá de la parte imaginaria. Y, al igual que antes, m es la multiplicidad de la raíz.

Una vez que tengamos todas las soluciones que cumplen la parte homogénea de la ecuación en diferencias, lo único que faltará será encontrar la solución particular, x_n^p, que cumpla la parte no homogénea de la ecuación (1.4). Hay varios métodos para ello, dos de los más usados son el método de los coeficientes indeterminados, el lector puede consultar [6, pp. 83-87,90] para más detalles sobre este método, y el método de variación de constantes, para más detalles consultar [6, pp. 89,90].

La solución particular es en sí una solución de la ecuación en diferencias, pero la solución general será aquella que consista en una combinación lineal entre el conjunto de soluciones encontradas para la parte homogénea y la particular de la parte no homogénea. Es decir, la solución general será

$$x_n = x_n^p + \sum_{i=1}^{k} a_i x_{i,n}$$

donde $\{x_{1,n}, ..., x_{k,n}\}$ es el conjunto de soluciones de la parte homogénea de la ecuación.

1.2. Puntos de equilibrio y estabilidad

La noción de punto de equilibrio o estado de equilibrio es necesaria en el estudio de las ecuaciones en diferencias. En el estudio de la estabilidad de las soluciones es necesario tener en cuenta los puntos de equilibrio de la ecuación, ya que a estos puntos puede tender o alejarse una solución.

Definición 2. *Un punto $\bar{x} \in I$, con I el dominio de f, se llama punto de equilibrio de* (1.3) *si es un punto fijo de f, es decir, $f(\bar{x}, ..., \bar{x}) = \bar{x}$.*

En otras palabras, un punto fijo $\bar{x}$ es una solución constante de (1.2), $x_n = \bar{x} \forall n \geq 0$.

Podemos dar unas definiciones para determinar si un punto fijo es estable o no y qué tipo de estabilidad presenta según el comportamiento de la solución respecto a este.

Definición 3. *Sea $\bar{x}$ un punto de equilibrio de* (1.3).

(I) *El punto $\bar{x}$ es localmente estable si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para todo conjunto de condiciones iniciales, $\{x_0, x_1, ..., x_k - 1\} \in I$ con $\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| < \delta$, se tenga*

$$|x_n - \bar{x}| < \epsilon \textit{ para todo } n \geq 0.$$

(II) *El punto $\bar{x}$ es localmente asintóticamente estable si es localmente estable y, además, existe $\gamma > 0$ tal que para cada $\{x_0, x_1, ..., x_k - 1\} \in I$ con $\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| < \gamma$, se tenga*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

(III) *El punto $\bar{x}$ es un atractor global si para cada conjunto de condiciones iniciales, se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}.$$

(IV) *El punto $\bar{x}$ es globalmente asintóticamente estable si es localmente estable y un atractor global.*

(V) *El punto $\bar{x}$ es inestable si no es estable.*

(VI) *Al punto $\bar{x}$ se le llama fuente, o repulsor, si existe $r > 0$ tal que para cada $\{x_0, x_1, ..., x_k - 1\} \in I$ con $\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| < r$, existe un $N \geq 1$ tal que*

$$|x_N - \bar{x}| \geq r.$$

Claramente, una fuente o repulsor es un punto de equilibrio inestable.

Observación 1. En el caso de las ecuaciones en diferencias lineales homogéneas de coeficientes constantes, que el equilibrio sea asintóticamente estable equivale a decir que es localmente asintóticamente estable e incluso a que es globalmente asintóticamente estable. Como estas son las ecuaciones sobre las que va a tratar esta monografía, abreviaremos en la denominación de estas características y diremos exclusivamente "asintóticamente estable".

1.3. La estabilidad de la solución cero

En el caso de la ecuación en diferencias lineal de orden k y coeficientes constantes, (1.5), podemos hacer un análisis del tipo de estabilidad que presenta la solución cero de una ecuación en diferencias según las raíces λ que tenga su polinomio característico.

Las soluciones de la ecuación en diferencias son sucesiones cuyo término general es λ^n o r^n, si $\lambda = re^{i\theta}$ es complejo. Siendo el término general de estas sucesiones una exponencial, la base debe ser, en módulo, inferior a 1 para que los términos no diverjan cuando n tome valores muy grandes. Por ello, cuando $|\lambda| < 1$ las sucesivas iteradas harán que la solución tienda a cero. En este caso, por tanto, diremos que la solución cero es asintóticamente estable.

Si por contra $|\lambda| > 1$ entonces las sucesivas iteradas harán que la solución diverja hacia el infinito, por lo que en este caso la solución cero es inestable.

La última posibilidad es que $|\lambda| = 1$, en ese caso la solución permanece constante siempre en 1. Cuando esto sucede, y la raíz tiene multiplicidad 1, el cero es estable, pues podremos encontrar un entorno a su alrededor del que todos los términos de la solución $x_n = 1$ no salgan. Sin embargo, la estabilidad asintótica no se da, puesto que no se cumple la condición $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Pero si la raíz λ, con $|\lambda| = 1$, tiene multiplicidad $m > 1$, habrá soluciones del tipo $x_n = n\lambda^2$, que no convergen a 0, sino que se tiene que $|x_n|$ tiende a infinito, luego la ecuación será inestable.

El análisis realizado se puede recoger en el siguiente resultado:

Teorema 1. *Sea* $\sigma = \max\{|\lambda| : \lambda$ *es raíz de la ecuación característica* $(1.6)\}$. *Se cumple:*

a) Si $|\sigma| < 1$, *la solución cero de la ecuación es asintóticamente estable.*

b) Si $|\sigma| > 1$, *la solución cero es inestable.*

c) Si $\sigma = 1$, *y todas las raíces* λ *de módulo 1 son simples, entonces la solución cero es estable pero no asintóticamente estable; en cambio, si existe alguna raíz* λ *de módulo 1 y con multiplicidad mayor que 1, la solución 0 es inestable.*

Capítulo 2

Criterios preliminares para la estabilidad

En este capítulo se van a dar tres criterios para la estabilidad asintótica que son preliminares de los que se van a estudiar en capítulos posteriores. El primero que se va a ver es el criterio de Schur-Cohn, se trata de un criterio necesario y suficiente para que una ecuación en diferencias lineal tenga estabilidad asintótica. La facilidad que brinda este criterio en ecuaciones de orden pequeño es notable, sin embargo, cuando el orden es grande o incluso indeterminado deja de ser sencillo, lo cual nos ha llevado a tener que buscar otros criterios.

Los otros dos criterios que se proporcionan son criterios suficientes para la estabilidad asintótica de una ecuación en diferencias, pero no son necesarios, por ello tampoco pueden ser un resultado principal en este trabajo. Aun así el conocimiento de su existencia no deja de ser interesante.

2.1. El criterio Schur-Cohn

Antes de enunciar el criterio de Schur-Cohn es necesario definir lo que son los interiores de una matriz $M = (m_{ij})$. Tal y como explica Elaydi en [6]: *"Los interiores de una matriz son en sí la propia matriz y todas las matrices obtenidas por omisión sucesiva de la primera y la última columna."* Podemos ilustrar esta definición con el siguiente ejemplo, en el que se muestran varias matrices y se ha señalado con un recuadro el interior de cada una de ellas:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & \boxed{m_{22}} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & \boxed{\begin{matrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{matrix}} & m_{24} \\ m_{31} & & & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & \boxed{\begin{matrix} m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{32} & \boxed{m_{33}} & m_{34} \\ m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{matrix}} & m_{25} \\ m_{31} & & & & m_{35} \\ m_{41} & & & & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{pmatrix}.$$

Definición 4. *Una matriz se dice que es positiva interiormente si los determinantes de todos sus interiores son positivos.*

Teorema 2 (Criterio de Schur-Cohn)**.** *Las raíces del polinomio característico* (1.6) *caen dentro del disco unidad si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

I) $p(1) > 0$

II) $(-1)^k p(-1) > 0$

III) *las matrices* $(k-1)\times(k-1)$

$$M_{k-1}^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_{k-3} & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ p_{k-2} & p_{k-3} & \dots & p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_k \\ 0 & & \iddots & p_k & p_{k-1} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & p_k & \iddots & \iddots & p_3 \\ p_k & p_{k-1} & \dots & p_3 & p_2 \end{pmatrix}$$

son positivas interiormente.

Este criterio tiene muchas formulaciones equivalentes, la que se ha propuesto aquí es la dada por Elaydi en [6], que a su vez se obtuvo de la de Jury, dada en [8]. La exposición del criterio de Schur-Cohn según la razona Jury, es menos clara que la que da Elaydi. Sin embargo fue Jury el que desarrolló esta formulación del criterio de Schur-Cohn a partir de la formulación original. En su libro, [8], Jury lo llama “El método del determinante”, nombre con el que también se conoce a esta formulación. Allí se puede encontrar la demostración del Teorema 2 y los pasos para reformular el criterio de Schur-Cohn original hasta llegar al que nos ocupa. Esta demostración se omite por ser de naturaleza técnica, pero se remite al lector a [8, pp. 85-94] para su consulta.

2.1.1. Ejemplos de aplicación

Este criterio es una herramienta muy eficiente en el caso de polinomios con coeficientes constantes y un orden fijo k. Para ciertos valores de k, permite formular criterios muy eficientes según los coeficientes p_i del polinomio característico. Para ilustrar esto, pongamos como ejemplo el caso de una ecuación en diferencias de tres términos y grado 2 como

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0.$$

Su polinomio característico será

$$p(\lambda) = \lambda^2 + p_1 \lambda + p_2,$$

Según el Teorema 2, el punto I) nos dice que debe cumplirse que $p(1) > 0$, por tanto en este caso

$$p(1) = 1 + p_1 + p_2 > 0.$$

El punto II) nos dice que debe cumplirse que $(-1)^k p(-1) > 0$, por tanto en este caso

$$(-1)^2 p(-1) = p(-1) = 1 - p_1 + p_2 > 0.$$

Del punto III) obtendremos las matrices de orden 1 $M_1^{\pm} = 1 \pm p_2$, cuyo determinante debe ser positivo según el Teorema 2, por lo que

$$1 \pm p_2 > 0.$$

De la primera y la segunda condición se sigue que $1 + p_2 > |p_1|$. La tercera condición se reduce a que $p_2 < 1$, o $1 + p_2 > 0$, por lo que $1 + p_2 < 2$. Finalmente, la condición obtenida según el criterio de Schur-Cohn para la estabilidad asintótica de $x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = 0$ es

$$|p_1| < 1 + p_2 < 2.$$

Como ejemplo para ilustrar el caso de una ecuación de tres términos, sea la ecuación de orden 3

$$x_{n+3} + p_1 x_{n+2} + p_2 x_{n+1} + p_3 x_n = 0.$$

Su polinomio característico es

$$p(\lambda) = \lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3.$$

Según el punto I) del Teorema 2, tendrá que tenerse que

$$p(1) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0.$$

El punto II) nos indica que debe cumplirse

$$(-1)^3 p(-1) = -p(-1) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0.$$

De estas dos relaciones se obtiene que $|p_1 + p_3| < 1 + p_2$.

Y por último del punto III) obtendremos que la matriz

$$M_2^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & p_3 \\ p_3 & p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \pm p_3 \\ p_1 \pm p_3 & 1 + \pm p_2 \end{pmatrix},$$

debe tener los determinantes de sus interiores positivos. Por ello obtendremos las relaciones

$$|M_2^+| = 1 + p_2 - p_1 p_3 - p_3^2 > 0$$

y

$$|M_2^-| = 1 - p_2 + p_1 p_3 - p_3^2 > 0.$$

De estas dos últimas relaciones obtenemos que $|p_2 - p_3 p_1| < 1 - p_3^2$.

Así pues, según el criterio de Schur-Cohn, la estabilidad asintótica de la ecuación en diferencias $x_{n+3} + p_1 x_{n+2} + p_2 x_{n+1} + p_3 x_n = 0$ será

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2 \quad \text{y} \quad |p_2 - p_3 p_1| < 1 - p_3^2.$$

2.2. Otros criterios suficientes de estabilidad

Antes de enunciar el siguiente criterio de suficiencia para la estabilidad asintótica de una ecuación en diferencias necesitaremos enunciar el Teorema de Rouché. Para nuestro interés es conveniente formularlo tal y como lo expresan Churchill *et al.* en su libro [3].

Teorema 3. *Sean f y g dos funciones analíticas en el interior y sobre una curva cerrada simple γ. Si $|f(z)| < |g(z)|$ en todo punto de γ, entonces las funciones f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros en el interior de γ, contando sus multiplicidades.*

Esta versión supone que las funciones f y g sean analíticas en su frontera, pero para lo que nos ocupa es suficiente, ya que trabajaremos con polinomios y las funciones polinómicas cumplirán esta condición.

Como consecuencia del Teorema 3, cuando $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es la circunferencia unidad y f y g son polinomios en $\mathbb{C}$, se tiene que f y $f+g$ tienen el mismo número de ceros, contando sus multiplicidades, en el disco abierto unidad $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, cuando se cumple que $|f(z)| > |g(z)|$ para todo $z \in \partial D$, $|z| = 1$.

El Teorema 3 lo necesitaremos para la demostración del siguiente criterio suficiente de estabilidad asintótica.

Teorema 4. *Sean $p_0, p_1, \dots, p_k$ números reales con*

$$\sum_{j=0}^{k} |p_j| < 1.$$

Entonces, todas las raíces de

$$q(\lambda) = \lambda^{k+1} - p_0\lambda^k - p_1\lambda^{k-1} - \dots - p_{k-1}\lambda - p_k = 0$$

caen dentro del disco abierto unidad $|\lambda| < 1$, y, por tanto, la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = p_0 x_n + p_1 x_{n-1} + \dots + p_{k-1} x_{n-k+1} + p_k x_{n-k}$$

es asintóticamente estable.

Demostración. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco abierto unidad, con ∂D su frontera tal que $\partial D = \{z : |z| = 1\} = \gamma$.

Consideramos $f(z) = z^{k+1}$ y $g(z) = -p_0 z^k - p_1 z^{k-1} - \dots - p_{k-1} z - p_k$ con z complejo. Estas funciones son analíticas en $\mathbb{C}$ y cuando $z \in \partial D$, $|z| = 1$, cumplen

$$|f(z)| = |z^{k+1}| = 1$$
$$|g(z)| = \left| -\sum_{j=0}^{k} p_j z^{k-j} \right| \leq \sum_{j=0}^{k} |p_j||z^{k-j}| = \sum_{j=0}^{k} |p_j| < 1$$

de modo que $|g(z)| < |f(z)|$ en $\partial D = \gamma$. Como $f(z) = z^{k+1}$ tiene $k+1$ raíces en D ($z = 0$ con multiplicidad $k+1$), por el Teorema 3 se deduce que también

$f(z)+g(z) = z^{k+1} - p_0 z^k - \dots - p_{k-1}z - p_0$ tiene $k+1$ raíces dentro de D. Es decir, todas las raíces de $q(\lambda)$ caen dentro del disco unidad, y, como consecuencia, por el Teorema 1 resulta que la ecuación en diferencias $x_{n+1} = p_0 x_n + p_1 x_{n-1} + \dots + p_{k-1}x_{n-k+1} + p_k x_{n-k}$ es asintóticamente estable. □

El otro resultado sobre criterios suficientes para la estabilidad asintótica que se quiere dar aparece en [4] y es como sigue.

Teorema 5. *Sea*

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n. \tag{2.1}$$

Dada la ecuación en diferencias

$$\Delta x_n = -q x_{n-k}, \tag{2.2}$$

donde $q > 0$ *es real y* $k \geq 1$ *es entero, supongamos que* $qk < 1$. *Entonces, todas las soluciones* x_n *de* (2.2) *convergen a 0,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0,$$

de modo que es asintóticamente estable.

Demostración. Sea x_n una solución de (2.2). Entonces,

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-k} = \sum_{j=n-k}^{n-1} (x_{j+1} - x_j) = \sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta x_j. \tag{2.3}$$

La Ec. (2.2) se puede escribir como

$$\Delta x_n = -q x_{n-k} = -q x_n + q(x_n - x_{n-k}),$$

usando (2.3)

$$\begin{aligned}\Delta x_n &= -q x_n + q(x_n - x_{n-k}) \\ &= -q x_n + q \sum_{j=n-k}^{n-1} \Delta x_j\end{aligned}$$

y por la definición de Δx_n dada por(2.1), podemos llegar a

$$\Delta x_n = -qx_n - q^2 \sum_{j=n-k}^{n-1} x_{j-k}.$$

Ahora, despejando en (2.1) para obtener $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$, evaluando $x_n = x_n$ y usando la expresión de Δx_n que acabamos de ver obtendremos

$$x_{n+1} = (1-q)x_n - q^2 \sum_{j=n-k}^{n-1} x_{j-k}. \tag{2.4}$$

Sea $M = \max_{-k\leq i\leq k} |x_i|$. En ese caso

$$|x_n| \leq M \tag{2.5}$$

para todo $n = -k, ..., k$. Debemos probar que (2.5) es válido para todo $n \geq -k$. Por inducción, probar que x_n está acotado (superior e inferiormente) por un máximo M para un índice $n = -k, ..., n_1$ siendo $n_1 \geq k$, es igual de válido que probarlo para un índice $n_1 + 1$. Por tanto, para probar (2.5) es suficiente con probar que (2.4) está acotado por M superior e inferiormente. Así pues, de (2.4),

$$\begin{aligned}|x_{n_1+1}| &\leq (1-q)|x_{n_1}| + q^2 \sum_{j=n_1-k}^{n_1-1} |x_{j-k}| \\ &\leq (1-q)M + q^2kM = (1-q+q^2k)M = (1-q(1-qk))M \leq M.\end{aligned}$$

Como hemos probado que (2.4) es, en módulo, inferior a M, podemos afirmar que (2.5) se cumple para todo $n \geq -k$ y

$$M_0 = \lim_{n\to\infty} \sup |x_n| < \infty.$$

Por ello, por la definición de límite superior, sabemos que existe una subsucesión n_l tal que $n_l \to \infty$ cuando $l \to \infty$ que cumpla

$$\lim_{l\to\infty} |x_{n_l}| = M_0.$$

Si en (2.4) hacemos el límite del supremo a x_{n+1}, tendremos que

$$\begin{aligned} M_0 &\leq (1-q)\lim_{n\to\infty}\sup|x_n| + q^2 k \lim_{n\to\infty}\sup|x_n| \\ &= ((1-q)+q^2 k)M_0. \end{aligned}$$

De aquí, fácilmente se sigue que

$$0 \geq M_0(q - q^2 k) = q(1-qk)M_0.$$

Como por hipótesis teníamos que $0 < qk < 1$, entonces $M_0 = 0$, por lo que la prueba del teorema está completa. □

El Teorema 5 se puede generalizar al caso en que aparecen más términos en la ecuación en diferencias. Para ello basta hacer un tipo de razonamiento similar al hecho para un solo retraso, y llegaremos a que si en la ecuación

$$x_{n+1} - x_n = -\sum_{j=1}^{m} q_j x_{n-k_j},$$

donde $q_j > 0$ es real, $k_j \geq 1$ es entero y $j = 1, 2, \ldots, m$, suponemos que $\sum_{j=1}^{m} q_j k_j < 1$, entonces todas las soluciones de la ecuación convergen a 0.

Capítulo 3

Teorema de Levin y May

El siguiente teorema fue desarrollado por Simon Levin y Robert May en 1976. El artículo original se puede encontrar en [12]. En él obtuvieron una condición para determinar la estabilidad asintótica de la solución cero de la ecuación en diferencias de orden $k+1$

$$x_{n+1} - x_n + \beta x_{n-k} = 0, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.1}$$

en base al valor del parámetro β.

La prueba que se va a exponer es una mezcla de las pruebas de este teorema hechas en [12] y [6]. También se han cogido ciertos resultados de [11] que resultan necesarios. El motivo para esta elección es que la prueba que aquí se exponga sea lo más clara y sencilla posible.

Teorema 6 (Levin-May)**.** *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. La ecuación en diferencias* (3.1) *tiene el punto fijo cero asintóticamente estable si y sólo si*

$$0 < \beta < 2\cos\left(\frac{k\pi}{2k+1}\right). \tag{3.2}$$

Observación 2. En este teorema no se incluye la posibilidad de que k sea nulo. Si fuese $k = 0$, entonces la ecuación en diferencias sería $x_{n+1} = x_n(1-\beta)$, y es sencillo encontrar que es asintóticamente estable si, y solo si, $|1-\beta| < 1$.

3.1. Resultados preliminares

La prueba de este teorema comienza con el polinomio característico de la Ec. (3.1),

$$\lambda^{k+1} - \lambda^k + \beta = 0. \tag{3.3}$$

o, lo que será más cómodo en adelante,

$$\lambda - 1 + \beta\lambda^{-k} = 0. \tag{3.4}$$

Se sabe que, en general, $|a-b| \geq ||a|-|b||$; por tanto, $|\lambda^{k+1}| = |\lambda^k - \beta| \geq |\beta| - |\lambda^k|$, de donde, trasladando términos, resulta $|\lambda^{k+1}| + |\lambda^k| \geq |\beta|$, o bien $|\lambda|^k(1+|\lambda|) \geq |\beta|$. Por lo que si $|\beta| \to \infty$ también $|\lambda| \to \infty$. Es más, ha de ser $\beta > 0$ porque, en caso contrario, a partir de (3.1), escrita en la forma $x_{n+1} = x_n - \beta x_{n-k}$, si fuese $\beta < 0$, se tiene que, dados unos valores iniciales tanto positivos como negativos, x_{n+1} aumenta o disminuye, respectivamente, sin poder acercarse a cero. Por eso mismo es necesario que, para asegurar la estabilidad, restrinjamos los valores de β a aquellos que sean positivos.

Observación 3. Para $\beta = 0$, el punto de equilibrio $x = 0$ en $x_{n+1} = x_n$ es evidentemente estable, pero no asintóticamente estable. Por este motivo descartamos el valor $\beta = 0$ del teorema.

Según lo que se explicaba en la Sección 1.3, la estabilidad asintótica de la solución trivial 0 se da cuando las soluciones de la Ec. (3.3) se encuentran en el interior del círculo unidad. Vamos a buscar, por tanto, que dichas soluciones cumplan la condición $|\lambda| < 1$. Si escribimos λ en forma polar, $\lambda = re^{i\theta}$, esto quiere decir que debemos requerir $r < 1$ a las soluciones. Será útil reescribir la Ec. (3.4) con $\lambda = re^{i\theta}$, de donde obtenemos

$$re^{i\theta} - 1 + \beta r^{-k} e^{-ik\theta} = 0. \tag{3.5}$$

Es de utilidad conocer la disposición de las raíces de la Ec. (3.3) en torno al círculo unidad según los valores que pueda tomar β. Por el momento, será suficiente caracterizar las raíces que sean reales. El siguiente lema responde a esta cuestión. Este lema está razonado en [11]. Kuruklis incluye la opción $\beta < 0$, aunque sabemos que esta opción no es posible si queremos asegurar la estabilidad asintótica de las soluciones de (3.1). No obstante, incluiremos también esta opción dado que en el artículo original está así escrito y será de utilidad cuando se desarrolle el Teorema de Kuruklis en capítulos posteriores.

Lema 1. *Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y sea $\beta \in \mathbb{R}$:*

a) Si k es par y $\beta > 0$, la Ec. (3.3) *tiene una raíz real negativa.*

b) Si k es impar y $\beta > 0$, la Ec. (3.3) *no tiene ninguna raíz real negativa.*

c) Si $0 < \beta < k^k/(k+1)^{k+1}$ entonces la Ec. (3.3) *tiene dos raíces reales positivas, una en el intervalo $(0, k/(k+1))$ y otra en $(k/(k+1), 1)$. Si $\beta = k^k/(k+1)^{k+1}$, entonces hay una raíz real doble en $k/(k+1)$. Si $\beta > k^k/(k+1)^{k+1}$ entonces no hay raíces reales positivas.*

d) Por último, si $\beta < 0$, la Ec. (3.3) *tiene una única raíz negativa si k es impar y no tendrá raíces negativas si k es par. Independientemente de k, tendrá una única raíz positiva en el intervalo $(1, \infty)$.*

Demostración. Analizaremos la función $f(\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^k + \beta$, que obtenemos de (3.3). Téngase en cuenta que si $f(\lambda) = 0$ recuperamos la Ec. (3.3). La prueba se basa en aplicar el teorema del valor medio y la prueba de la primera derivada. La primera derivada de $f(\lambda)$ es

$$f'(\lambda) = (k+1)\lambda^k - k\lambda^{k-1}.$$

Nótese que $f(0) = f(1) = \beta$.

En el apartado *a*) tomamos k par y $\beta > 0$. Entonces, $f(0) > 0$ y $f(-\infty) < 0$, lo que significa que $f(\lambda) = 0$ tiene una raíz en $(-\infty, 0)$. Esta raíz es única ya que $f'(\lambda) > 0$ para todo λ en $(-\infty, 0)$, lo que significa que es siempre creciente y por tanto sólo puede cruzar el eje de abscisas una vez en ese intervalo de λ.

De manera similar a la anterior, se demuestra que si $\beta < 0$ y k es impar, entonces $f(\lambda) = 0$ tiene una única raíz en $(-\infty, 0)$, lo cual demuestra la primera afirmación del caso *d*).

Para ver el apartado *b*), tomamos k impar y $\beta > 0$, podemos ver que $f(0) > 0$ y $f(-\infty) = \infty$. Como además $f'(\lambda) < 0$ para todo λ en el intervalo $(-\infty, 0)$, lo que significa que es siempre decreciente, sabemos que $f(\lambda)$ no cruza el eje de abscisas en $(-\infty, 0)$. Por tanto, concluimos que $f(\lambda) = 0$ no tiene raíces en ese intervalo.

De manera similar se puede ver que si $\beta < 0$ y k es par, $f(\lambda) = 0$ no tiene raíces en $(-\infty, 0)$, lo que demuestra la segunda afirmación del apartado *d*).

Para terminar de demostrar *d*) falta decir que si $\beta < 0$ entonces $f(1) < 0$, y dado que $f(\infty) = \infty$ y $f'(\lambda) > 0$ en $(1, \infty)$, entonces (3.3) tiene exactamente una raíz en dicho intervalo.

Finalmente, en el apartado de *c*) hay que tener presente que $f(0) = f(1) > 0$. Dado que $f'(\lambda) > 0$ para todo $\lambda > k/(k+1)$ y $f'(\lambda) < 0$ si $\lambda < k/(k+1)$, sabemos que $f(k/(k+1)) = \beta - k^k/(k+1)^{k+1}$ es un mínimo global de $f(\lambda)$ cuando λ está en $(0, \infty)$. Entonces, si $\beta < k^k/(k+1)^{k+1}$, $f(k/(k+1)) < 0$. Por lo que, considerando que $f(0) = f(1) > 0$, $f(\lambda)$ corta el eje de abscisas en dos intervalos, una vez en $(0, k/(k+1))$ y otra en $(k/(k+1), 1)$, lo que significa que tiene una raíz en cada uno de ellos.

Si por el contrario $\beta = k^k/(k+1)^{k+1}$, entonces tanto $f(k/(k+1))$ como $f'(k/(k+1))$ valen 0 y entonces $\lambda = k/(k+1)$ es una raíz doble.

Por último, si $\beta > k^k/(k+1)^{k+1}$, entonces $f(k/(k+1)) > 0$ y en general $f(\lambda) >$

0 para todo λ en $(0,\infty)$, por lo que no tiene raíces positivas. □

Para la siguiente parte de la demostración necesitaremos usar la propiedad de los polinomios que asegura la dependencia de las raíces con la de los coeficientes. Esta propiedad viene expresada en el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [1].

Lema 2. *Sea $n \geq 1$ y $k \geq 1$ y sean*

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + x_n$$

$$g(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n$$

dos polinomios máximos complejos con raíces a_i y b_i con $i = 1, \ldots, n$ respectivamente. Sea

$$\Gamma = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ |a_k|^{1/k}, |b_k|^{1/k} \right\}$$

y $\gamma = 2\Gamma$. Entonces las raíces de f y g se pueden enumerar de modo que

$$\max_j |\alpha_j - \beta_j| \leq 4 \cdot 2^{-1/n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k| \gamma^{n-k} \right)^{1/n}.$$

Como consecuencia, si $|a_j - b_j|$ es suficientemente pequeño también las raíces α_j y β_j están relativamente próximos. Con esta propiedad podemos asegurar que un desplazamiento en los coeficientes de un polinomio supone un desplazamiento similar en las raíces que se obtendrían en cada caso. Esto es aplicable al polinomio característico y a β, dado que es uno de sus coeficientes.

Cuando $\beta > \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$, veremos que la Ec. (3.1) tiene soluciones inestables la primera vez que r sobrepasa la unidad. Es el momento de analizar las soluciones de (3.5) que sean complejas. Por ello, es necesario encontrar aquellos valores de β que se obtienen al suponer en (3.5) que $\theta \neq 0$ y $r = 1$, lo que representa el círculo unidad. Para este paso de la demostración será útil tener presente, también, los resultados de los apartados *a*) y *b*) del Lema 1. La siguiente proposición resuelve este problema.

Proposición 1. *La Ec.* (3.3) *tiene una raíz en el disco unidad si y sólo si* $\beta = 0$ *o bien*

$$\beta = \beta_j = 2\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2k+1}k\right) \qquad j = 0, 1, 2, ..., k.$$

Demostración. Esta prueba consiste en calcular los valores que toma β cuando las raíces del polinomio característico, es decir, la Ec. (3.5), se encuentran sobre el círculo unidad. Supondremos, por tanto, que las soluciones de (3.5) son del tipo $\lambda = re^{i\theta}$ con $r = 1$ y buscaremos qué valores de β cumplen esta condición. Así pues,

$$e^{i\theta} - 1 + \beta e^{-ik\theta} = 0, \tag{3.6}$$

Separamos la parte real de la imaginaria al sustituir $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \cos\theta - 1 + \beta\cos(k\theta) = 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta - \beta\,\mathrm{sen}(k\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 1 - \beta\cos(k\theta) \\ \mathrm{sen}\,\theta = \beta\,\mathrm{sen}(k\theta) \end{cases}.$$

Elevando al cuadrado y sumando ambas partes llegamos a

$$\beta^2 - 2\beta\cos(k\theta) = 0,$$

lo que nos da las soluciones $\beta = 0$ y $\beta = 2\cos(k\theta)$. El propio resultado $\beta = 0$ ya es uno de los que decía el enunciado. En el resultado $\beta = 2\cos(k\theta)$ aún debemos eliminar la dependencia con θ y dejarlo exclusivamente en función de k. Por eso, vamos a sustituir $\beta = 2\cos(k\theta)$ en (3.6), obteniendo

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - 1 + 2\cos(k\theta)e^{-ik\theta} &= 0 \\ e^{i\theta} - 1 + 2\cos(k\theta)[\cos(k\theta) - i\,\mathrm{sen}(k\theta)] &= 0 \\ e^{i\theta} - 1 + 2\cos^2(k\theta) - 2i\cos(k\theta)\,\mathrm{sen}(k\theta) &= 0. \end{aligned}$$

Usamos las relaciones trigonométricas del coseno y seno del ángulo doble y obtenemos

$$\begin{aligned} e^{i\theta} + \cos(2k\theta) - i\,\mathrm{sen}(2k\theta) &= 0 \\ -\cos(2k\theta) + i\,\mathrm{sen}(2k\theta) &= e^{i\theta} \\ -e^{-2ik\theta} &= e^{i\theta} \\ e^{i(2j+1)\pi} e^{-2ik\theta} &= e^{i\theta} \qquad j = 0,1,2,\ldots,k. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que $(2j+1)\pi - 2k\theta = \theta$, y entonces llegamos a

$$\theta_j = \frac{(2j+1)\pi}{2k+1} \qquad j = 0,1,2,\ldots,k.$$

Finalmente llevando θ_j a $\beta = 2\cos(k\theta)$ obtenemos el resultado que se declaraba en la proposición,

$$\beta = \beta_j = 2\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2k+1}k\right) \qquad j = 0,1,2,\ldots,k.$$

□

La proposición anterior nos divide la recta real de todos los valores que puede tomar β en $k+3$ intervalos. Cada división está dada por los β_j y $\beta = 0$. Cuando β tome únicamente estos valores, la Proposición 1 nos asegura que habrá raíces del polinomio característico en la circunferencia unidad, es decir, tendrán $r = 1$ y $\theta \neq 0$. Sin embargo, nos interesa que las raíces se encuentren por dentro del círculo unidad, no sobre él, porque ésta es la región de estabilidad. Por ello necesitaremos el Lema 2 que anunciábamos antes. Con él podemos asegurar que si β toma valores cercanos a los de la Proposición 1, entonces las raíces que se obtengan en (3.3) estarán cerca de la frontera del círculo unidad.

3.2. Demostración del Teorema de Levin-May

Para poder asegurar la estabilidad asintótica de la solución trivial de (3.1), nos interesa conocer el intervalo de valores de β para los cuales todas las soluciones de (3.3) tengan soluciones λ interiores al círculo unidad. El Lema 2 junto con la Proposición 1 como se mencionaba antes, nos permite saber que el número de soluciones de (3.3) que están dentro del círculo unidad permanece constante mientras β está en el interior de uno de los $k+3$ intervalos. Conforme el valor de β varíe, las soluciones de (3.3) se irán acercando a la frontera del círculo unidad y sólo cuando β es 0 o alguno de los β_j, las soluciones cruzarán esta frontera. Por ello, necesitamos saber que todas las soluciones λ de (3.3) se encontrarán en el interior del círculo unidad en el intervalo de valores de β entre el $\beta = 0$ y el menor de los β_j, que se da en $j = 0$, es decir,

$$\beta_0 = 2\cos\left(\frac{\pi k}{2k+1}\right).$$

Con intención de establecer este hecho, veamos qué sucede con las raíces de (3.3) según β esté en $(0, \beta_0)$ o $\beta > \beta_0$.

Antes de nada, señalemos que, dado que $k \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que

$$\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} < 2\cos\left(\frac{\pi k}{2k+1}\right). \tag{3.7}$$

Caso $\beta \in (0, \beta_0)$. Elijamos un $\tilde{\beta} > 0$ lo suficientemente pequeño como para que sea menor que $k^k/(k+1)^{k+1}$. Sean λ_j con $j = 1, \ldots, k+1$ las soluciones del polinomio característico $\lambda^{k+1} - \lambda^k + \tilde{\beta} = 0$. Entonces, por el Lema 1, apartado *c*), sabemos que las k primeras raíces se encuentran en el intervalo $(0, k/(k+1))$ y la raíz restante está $(k/(k+1), 1)$, por tanto todas las raíces tienen módulo menor que 1 cuando $\tilde{\beta} \in (0, k^k/(k+1)^{k+1})$. Como se cumple (3.7), si $\tilde{\beta}$ aumentase hasta ser muy próximo a β_0, todavía se encontraría en el intervalo $(0, \beta_0)$. Como la Preposición 1 nos asegura que las raíces de (3.3) nunca pueden tener módulo 1 cuando $\tilde{\beta} \in (0, \beta_0)$, entonces podemos asegurar que cuando $\tilde{\beta} \in (k^k/(k+1)^{k+1}, \beta_0)$ las raíces tienen también módulo menor que 1 debido a que el Lema 2 nos asegura la continuidad de las raíces respecto a los cambios en los coeficientes de su polinomio. Se demuestra así la estabilidad asintótica de la solución 0 para $\beta \in (0, \beta_0)$.

Caso $\beta > \beta_0$. Dado que si $\beta = \beta_0$ por la Proposición 1 sabemos que no hay estabilidad asintótica. Necesitamos asegurar que, conforme aumenta β desde el 0, las soluciones de (3.3) se mueven desde el interior del círculo unidad hasta la frontera de éste y sólo lo cruzan desde dentro del círculo hacia fuera y nunca al revés. Es decir, buscamos que en $r = 1$, $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\beta > 0$. Esto aseguraría que las soluciones de (3.3) no pueden volver a entrar al círculo unidad una vez salen de él. El lema siguiente demuestra que esto se cumple.

Lema 3. *Si en* (3.5), $r = 1$, *entonces se verifica que* $dr/d\beta > 0$.

Demostración. Empezaremos esta prueba reescribiendo (3.5) tal como

$$r^{k+1}e^{i(k+1)\theta} - r^k e^{ik\theta} + \beta = 0.$$

Ahora separaremos la parte real de la imaginaria para obtener el sistema

$$\begin{cases} r^{k+1}\cos((k+1)\theta) - r^k\cos(k\theta) + \beta = 0 \\ r^{k+1}\operatorname{sen}((k+1)\theta) - r^k\operatorname{sen}(k\theta) = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

De la segunda ecuación, para $r \neq 0$, obtenemos

$$r = \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)}. \tag{3.9}$$

Teniendo en cuenta esta igualdad y usando la primera ecuación, se deduce que

$$\begin{aligned} \beta &= r^k\cos(k\theta) - r^{k+1}\cos((k+1)\theta) \\ &= \operatorname{sen}^k(k\theta)\left[\frac{\cos(k\theta)}{\operatorname{sen}^k((k+1)\theta)} - \frac{\cos((k+1)\theta)\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}^{k+1}((k+1)\theta)}\right] \\ &= \frac{\operatorname{sen}^k(k\theta)}{\operatorname{sen}^{k+1}((k+1)\theta)}[\operatorname{sen}((k+1)\theta)\cos(k\theta) - \cos((k+1)\theta)\operatorname{sen}(k\theta)] \\ &= \frac{\operatorname{sen}^k(k\theta)\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^{k+1}((k+1)\theta)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

De esta misma manera también se puede deducir la expresión alternativa equivalente

$$\begin{aligned}
\beta &= r^k \cos(k\theta) - r^{k+1}\cos((k+1)\theta) \\
&= r^k[\cos(k\theta) - r\cos((k+1)\theta)] \\
&= r^k \left[\cos(k\theta) - \frac{\operatorname{sen}^k(k\theta)\cos((k+1)\theta)}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)}\right] \\
&= \frac{r^k}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)}[\cos(k\theta)\operatorname{sen}((k+1)\theta) - \operatorname{sen}(k\theta)\cos((k+1)\theta)] \\
&= r^k \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Si ahora hacemos $r = 1$ en (3.9) obtendremos

$$\operatorname{sen}(k\theta) = \operatorname{sen}((k+1)\theta).$$

Operando en esta relación tal como

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2(k\theta) &= \operatorname{sen}^2((k+1)\theta), \\
1-\cos^2(k\theta) &= 1-\cos^2((k+1)\theta), \\
\cos(k\theta) &= \pm\cos((k+1)\theta).
\end{aligned}$$

Resulta que si $\cos(k\theta) = \cos((k+1)\theta)$, los ángulos $k\theta$ y $(k+1)\theta$ van a cumplir $k\theta = -(k+1)\theta$. Si esto es así, entonces la relación $\operatorname{sen}(k\theta) = \operatorname{sen}((k+1)\theta)$ no se satisface. Por contra si $\cos(k\theta) = -\cos((k+1)\theta)$ entonces los ángulos $k\theta$ y $(k+1)\theta$ van a cumplir $k\theta + pi/2 = (k+1)\theta$, lo que sí satisface $\operatorname{sen}(k\theta) = \operatorname{sen}((k+1)\theta)$. Por tanto

$$\cos(k\theta) = -\cos((k+1)\theta).$$

De (3.9) y (3.10) podemos desarrollar respectivamente $\operatorname{sen}((k+1)\theta)$ y $\cos((k+1)\theta)$ para llegar a

$$\operatorname{sen}(k\theta) = \operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta + \cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta,$$

y a

$$\cos(k\theta) = -\cos(k\theta)\cos\theta + \mathrm{sen}(k\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Multiplicando la primera por $\cos(k\theta)$ y la segunda por $\mathrm{sen}(k\theta)$ y después sumando los resultados obtenemos que

$$\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}(2k\theta).$$

Y si multiplicamos la primera por $\mathrm{sen}(k\theta)$ y la segunda por $\cos(k\theta)$ y restamos obtendremos

$$\cos\theta = -\cos(2k\theta).$$

Estas relaciones las usaremos en los desarrollos que siguen. Como tenemos expresiones de r y β con respecto de θ, esto nos invita a usar la regla de la cadena para obtener $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\beta$. Así pues, de la expresión que habíamos obtenido para r, (3.9), hacemos la derivada respecto a θ,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k\cos(k\theta)}{\mathrm{sen}((k+1)\theta)} - \frac{(k+1)\,\mathrm{sen}(k\theta)\cos((k+1)\theta}{\mathrm{sen}^2((k+1)\theta)}$$

y luego, evaluando en $r = 1$ y dado que en ese caso por (3.9) se tiene $\mathrm{sen}(k\theta)/\,\mathrm{sen}((k+1)\theta) = 1$, llegamos a

$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{r=1} = k\cot(k\theta) - (k+1)\cot((k+1)\theta) = (2k+1)\cot(k\theta).$$

Ahora hacemos la derivada de β con respecto de θ,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{\mathrm{sen}^{k+1}((k+1)\theta)[k^2\,\mathrm{sen}^{k-1}(k\theta)\cos(k\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}^k(k\theta)\cos\theta]}{\mathrm{sen}^{2k+2}((k+1)\theta)} \\ &\quad - \frac{\mathrm{sen}^k(k\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta(k+1)^2\,\mathrm{sen}^k((k+1)\theta)\cos((k+1)\theta)}{\mathrm{sen}^{2k+2}((k+1)\theta)} \\ &= \frac{k^2\,\mathrm{sen}^{k-1}(k\theta)\cos(k\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}^{k+1}((k+1)\theta)} + \frac{\mathrm{sen}^k(k\theta)\cos\theta}{\mathrm{sen}^{2k+2}((k+1)\theta)} \\ &\quad - \frac{\mathrm{sen}^k(k\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta(k+1)^2\,\mathrm{sen}^k((k+1)\theta)\cos((k+1)\theta)}{\mathrm{sen}^{2k+2}((k+1)\theta)}.\end{aligned}$$

Evaluamos la expresión anterior en $r = 1$ y simplificamos teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}((k+1)\theta) = 1$ por haber evaluado r en 1,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta}\right|_{r=1} &= \frac{k^2\cos(k\theta)\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)} - \frac{(k+1)^2\operatorname{sen}\theta\cos((k+1)\theta)}{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)} \\ &= (2k^2+2k+1)\cot(k\theta) - \cot(2k\theta) \\ &= (2k^2+2k+1)\cot(k\theta) - \frac{1}{2}(\tan(k\theta)-\cot(k\theta)) \\ &= \frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\cot(k\theta) + \frac{1}{2}\tan(k\theta).\end{aligned}$$

Claramente, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}|_{r=1}$ y $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta}|_{r=1}$ tienen ambos signo de $\cot(k\theta)$. La regla de la cadena nos dice que $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\beta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}/\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta}$. Como tanto $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}|_{r=1}$ como $\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}\theta}|_{r=1}$ tienen el mismo signo, $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\beta}|_{r=1}$ es positivo, como queríamos demostrar. □

Ya hemos demostrado que (3.3) tiene soluciones dentro del círculo unidad y, conforme β crece, lo van abandonando únicamente cuando β toma alguno de los valores que se daban en la Proposición 1. Además, también hemos demostrado que, por encima de β_0, ya habrá pasado alguna de las soluciones de (3.3) por encima del círculo unidad y no podremos decir que todas las soluciones son estables.

Así pues, para que todas las soluciones de la Ec. (3.1) sean convergentes hacia 0 y por tanto 0 sea asintóticamente estable, es condición necesaria y suficiente que

$$0 < \beta < 2\cos\frac{\pi k}{2k+1}.$$

Esta es la condición (3.2) que queríamos demostrar y con ella finaliza la prueba del Teorema de Levin-May.

Capítulo 4

Teorema de Kuruklis

Siguiendo con el objetivo de esta monografía, este capítulo va a versar sobre el criterio de estabilidad asintótica de un nuevo tipo de ecuación en diferencias, de la que podríamos considerar que es el paso siguiente a la Ec. (3.1) que se exponía en el capítulo anterior. La siguiente condición fue encontrada por Spiridon Kuruklis en 1993 para asegurar la estabilidad asintótica de la solución cero de una ecuación en diferencias tipo

$$x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0\ ,\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

en base a los parámetros a y b.

El artículo original se puede encontrar en [11], en el que se puede encontrar la prueba hecha por Kuruklis. La demostración que aquí se va a desarrollar sigue los pasos de la demostración original.

Teorema 7 (Kuruklis)**.** *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$. La ecuación* (4.1) *es asintóticamente estable si y sólo si*

a) o bien $a = 0$ y $|b| < 1$,

b) o bien $a \neq 0$

$$|a| < (k+1)/k$$

y

$$|a|-1<b<(a^2+1-2|a|\cos\theta)^{1/2} \quad \textit{para k impar,}$$

$$|b-a|<1 \quad y \quad |b|<(a^2+1-2|a|\cos\theta)^{1/2} \quad \textit{para k par,}$$

donde θ *es la solución en* $(0,\pi/(k+1))$ *de la ecuación* $\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}((k+1)\theta)=1/|a|$.

Observación 4. Téngase en cuenta que si $k=0$, en (4.1) queda $x_{n+1}+(b-a)x_n=0$, de modo que se da estabilidad asintótica si y solo si $|b-a|<1$. Considerar $k=0$ en el Teorema de Kuruklis conlleva problemas porque para hacer el cálculo de θ se llega a una indeterminación.

Observación 5. La demostración del caso *a*) es inmediato, ya que si $a=0$, entonces (4.1) se reduce a $x_{n+1}+bx_{n-k}=0$. Es sencillo ver que las raíces de la ecuación característica tienen todas módulo $\sqrt[k+1]{|b|}$, luego se situarán dentro del círculo unidad si y solo si $|b|<1$. Por tanto, la Ec. (4.1) con $a=0$ tendrá estabilidad asintótica si y sólo si $|b|<1$.

En lo siguiente, solo nos preocuparemos por analizar el caso *b*) del enunciado del Teorema de Kuruklis, dado que el *a*) ya ha sido demostrado.

4.1. Resultados preliminares

La prueba que realiza Kuruklis en [11] consiste en encontrar condiciones de a y b que aseguren que las raíces de la ecuación característica de (4.1),

$$\lambda^{k+1}-a\lambda^k+b=0. \tag{4.2}$$

se encuentran dentro del círculo unidad.

Para abarcar esta prueba es de gran utilidad conocer el Teorema de Levin-May que se explica en el Capítulo 3, puesto que muchos resultados que eran necesarios en aquella demostración lo son también para este teorema. Esto se explica porque el primer paso que debemos abordar sobre la Ec. (4.2) es aplicar el cambio

$$\mu = \frac{\lambda}{a},$$

de tal manera que ahora tenemos

$$\mu^{k+1} - \mu^k + c = 0, \tag{4.3}$$

siendo

$$c = \frac{b}{a^{k+1}}.$$

Este cambio obliga a proseguir con la condición $a \neq 0$, por eso se ha estudiado a parte en la Observación 5. Nótese que la Ec. (4.3) y la Ec. (3.3) son la misma ecuación. Por ello, lo demostrado para (3.3) sigue siendo válido para (4.3).

Por el momento, es necesario notar que si era necesario imponer que las raíces de la Ec. (4.2) se mantuvieran interiores al círculo unidad, en el caso de la Ec. (4.3) debemos de imponer que sus raíces sean interiores al círculo $|\mu| < 1/|a|$. Por ello necesitaremos hacer uso del Lema 1, que se enunció en el Capítulo 3, donde se establecen las raíces reales que la Ec. (4.3) tiene según el valor del parámetro c [1]. Con este lema podemos asegurar dónde se encuentran las raíces de (4.3) respecto del círculo $|\mu| < 1/|a|$ que nos interesa.

Si consideramos la Ec. (4.3), podemos ver que se cumple $|\mu|^{k+1} +^| \mu|^k \geq |c|$, de donde obtenemos $|\mu|^k(1+|\mu|) \geq |c|$. Por tanto, si $|c| \to \infty$ entonces $|\mu| \to \infty$. Esto es importante porque el siguiente paso consiste en averiguar cómo se desplazan las soluciones de (4.3) según $|c| \to \infty$. Recordemos que el Lema 2 nos asegura que un desplazamiento en los coeficientes de un polinomio supone un desplazamiento similar en las raíces de este.

[1] Cuando se enunció el Lema 1 en el Capítulo 3, nos referíamos a la Ec. (3.3) y al parámetro β, por ser la misma ecuación, es igualmente aplicable a (4.3), pero téngase en cuenta que ahora escribimos μ donde antes escribíamos λ y escribimos c donde antes escribíamos β.

Empezaremos con el siguiente lema acerca del crecimiento del valor absoluto de las raíces de (4.3).

Lema 4. *El valor absoluto de las raíces, tanto reales como complejas, de* (4.3) *crece conforme lo hace* $|c|$, *excepto en el caso* $0 < c < k^k/(k+1)^{k+1}$, *en cuyo caso solo la mayor de las raíces positivas decrece.*

Demostración. [2] Para esta prueba expresaremos, en primer lugar, (4.3) en coordenadas polares. Sea $\mu = re^{i\theta}$ con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

(A) Raíces reales positivas Cuando μ es real positivo, se tiene simplemente $\mu = r$, por tanto la (4.3) queda

$$r^{k+1} - r^k + c = 0.$$

La prueba consiste en analizar la primera derivada de c con respecto de r, $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r$, para lo cual es cómodo despejar c de la expresión anterior,

$$c = r^k - r^{k+1}.$$

La primera derivada es

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = (k+1)r^{k-1}\left[\frac{k}{k+1} - r\right]. \tag{4.4}$$

De (4.4) sabemos que si $r < k/(k+1)$, entonces $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r > 0$; si $r > k/(k+1)$, entonces $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r < 0$; y por último si $r = k/(k+1)$, $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r = 0$. Según el Lema

[2] La prueba original se hace estudiando la derivada $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c$, sin embargo, en este caso se ha decidido hacer una demostración propia distinta de la original estudiando la derivada $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r$ en su lugar por comodidad para los cálculos. El cambio está justificado porque las funciones $c(r)$ y $r(c)$ que podemos obtener de $r^{k+1} - r^k + c = 0$ son inversas, por tanto se cumple $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c = (\mathrm{d}c/\mathrm{d}r)^{-1}$. Por tanto, para estudiar la variación del módulo de r respecto de la variación de c, el método de la prueba que aquí se da es igualmente válido y los resultados son análogos con los de la prueba original de Kuruklis.

1, apartado c), el punto máximo de $c = r^k - r^{k+1}$, se da en $c(r = k/(k+1)) = k^k/(k+1)^{k+1}$, y también sabemos que si c está en el intervalo $(0, k^k/(k+1)^{k+1})$ hay una raíz en $(0, k/(k+1)$ y otra en $(k/(k+1), 1)$. Según el criterio de la primera derivada que acabamos de obtener, si c aumenta desde 0 hasta $k^k/(k+1)^{k+1}$, la raíz que se encuentra en $(0, k/(k+1)$ crece hacia $k/(k+1)$ por ser en este intervalo $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r > 0$; y, a su vez, la raíz que se encuentra en $(k/(k+1), 1)$ decrece hasta el punto $k/(k+1)$ por ser en este intervalo $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r < 0$.

La única otra raíz positiva que podemos encontrar, según el Lema 1 apartado d), se da cuando $c < 0$ y se encuentra en el intervalo $(1, \infty)$. Como acabamos de ver, si $r > k/(k+1)$, entonces $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r < 0$, por tanto cuando c crezca hacia el infinito, esta raíz positiva crecerá hacia el infinito también.

(B) Raíces reales negativas. Si μ es negativa, la podremos expresar en la forma $\mu = -4$. Por tanto de (4.3) tenemos

$$c = (-r)^k - (-r)^{k+1}.$$

(B.1) k par La primera derivada es, si k es par,

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = (k+1)r^{k-1}\left[\frac{k}{k+1} + r\right].$$

En este caso vemos que si c crece hacia el infinito, dado que $r \geq 0$ y para cumplir con la igualdad anterior cuyo término a la derecha siempre es positivo, sabemos que $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r > 0$ por necesidad. Esto implica que r solo podrá aumentar. Como hablamos de raíces negativas $\mu = -r$, entonces significa que la raíz decrecerá hasta el infinito. La presencia de la raíz negativa cuando $c > 0$ y k es par está garantizada por el Lema 1 apartado a).

Si por contra c decrece hasta el infinito, por el Lema 1 apartado d), no hay raíces negativas.

(B.1) k impar Finalmente queda ver si k es impar, donde obtendríamos la

derivada

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}r} = -(k+1)r^{k-1}\left[\frac{k}{k+1}+r\right].$$

En este caso si c crece hasta el infinito no existen raíces reales negativas por el Lema 1 apartado b). Pero si c decrece hasta el infinito sí hay una raíz real negativa según el Lema 1 apartado d). Como el término de la derecha es siempre negativo dado que $r \geq 0$, necesariamente $\mathrm{d}c/\mathrm{d}r < 0$, por tanto si decimos que c decrece, necesariamente r crece. Por tanto la raíz negativa decrece hasta el infinito.

(C) Raíces complejas. Para proceder a examinar las raíces complejas de (4.3) primero debemos asumir ciertos cambios. Sustituyendo $\mu = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ en (4.3) obtendremos el mismo sistema de ecuaciones (3.8) que utilizábamos para la demostración del Teorema de Levin-May. De él obteníamos las relaciones (3.9) y (3.11), que recordemos que eran, respectivamente,

$$r = \frac{\mathrm{sen}(k\theta)}{\mathrm{sen}((k+1)\theta)} \tag{4.5}$$

y

$$c = r^k \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}((k+1)\theta)}. \tag{4.6}$$

Ahora ya estamos listos para afrontar el problema del movimiento de las raíces complejas. En primer lugar debemos ver que con (4.5) y (4.6) tenemos una fácil relación entre r y c. Como estamos interesados en conocer cómo varían las raíces complejas con respecto varíe c, nos interesa saber $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c$, gracias a estas dos ecuaciones podemos aplicar la regla de la cadena para obtener lo que buscamos. Según dicha regla tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}c} &= \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)\left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\theta}\right)^{-1}\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)\left(kr^{k-1}\left[\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}((k+1)\theta)}\right]\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) + r^k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}((k+1)\theta)}\right)\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Donde la derivada $\mathrm{d}c/\mathrm{d}\theta$ se ha hecho con la Ec. (4.6). Podemos sustituir en la expresión anterior $r^k \operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}((k+1)\theta)$ por c siguiendo la Ec. (4.6). Después, sacamos c como factor común añadiendo los cambios necesarios. El resultado será

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}c} = c\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)\left[\frac{k}{r}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right) + r^k c^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)}\right)\right]^{-1}. \tag{4.7}$$

Es necesario resolver las derivadas $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c$ y la derivada de $\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}((k+1)\theta)$ con respecto de θ en (4.7) para poder determinar el signo de $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c$. Procedamos a ello, en primer lugar, empleamos la Ec. (4.5) para sustituir la derivada de r con respecto de θ,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{k\cos(k\theta)\operatorname{sen}((k+1)\theta) - (k+1)\operatorname{sen}(k\theta)\cos((k+1)\theta)}{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)}. \tag{4.8}$$

Y la otra derivada que queda por hacer es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)}\right) = \frac{\cos\theta\operatorname{sen}((k+1)\theta) - (k+1)\operatorname{sen}\theta\cos((k+1)\theta)}{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)}. \tag{4.9}$$

Según nos dice (4.7), el signo de $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c$ estará enteramente determinado por los signos de (4.8) y (4.9). Por tanto será más sencillo conocer primero los signos de estas expresiones. Para ello bastará con analizar sus numeradores dado que en ambos casos los denominadores son positivos. Así, de (4.8) nombramos al numerador

$$G(\theta) = k\cos(k\theta)\operatorname{sen}((k+1)\theta) - (k+1)\operatorname{sen}(k\theta)\cos((k+1)\theta). \tag{4.10}$$

Su derivada es $G'(\theta) = (k+1)\operatorname{sen}(k\theta)\operatorname{sen}((k+1)\theta)$. Usando (4.5) en $G'(\theta)$ y dado que $r \geq 0$ obtenemos que $G'(\theta) \geq 0$. Y dado que $G(0) = 0$, podemos concluir que $G(\theta) \geq 0$ para $0 \leq \theta < 2\pi$, y por eso mismo

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} > 0. \tag{4.11}$$

Ahora, de (4.9), nombramos el numerador

$$H(\theta) = \cos\theta \operatorname{sen}((k+1)\theta) - (k+1)\operatorname{sen}\theta \cos((k+1)\theta). \tag{4.12}$$

Su derivada es $H'(\theta) = k(k+2)\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}((k+1)\theta)$ y nótese que $H(0) = 0$. Ahora, si nos ayudamos de (4.6), podemos ver si que si $c > 0$ entonces $H'(\theta) \geq 0$, y también será $c^{-1}H'(\theta) \geq 0$. De la misma forma, si $c < 0$, $H'(\theta) \leq 0$ y entonces $c^{-1}H'(\theta) \geq 0$. De modo que, con esta discusión y las Ecs. (4.9) y (4.12), podemos afirmar que

$$c^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)}\right) \geq 0. \tag{4.13}$$

Finalmente, teniendo en cuenta (4.7), (4.11) y (4.13), podemos concluir que $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c > 0$ para $c > 0$ y $\mathrm{d}r/\mathrm{d}c < 0$ para $c < 0$. Esto implica que si $|c|$ se incrementa, las raíces complejas de (4.3) se alejan del cero tal y como se quería demostrar. Y con esto concluye la prueba del lema. □

Con el Lema 4 podemos asegurar que cuando $|c|$ crece, tomando valores mayores que $k^k/(k+1)^{k+1}$, todas las raíces de (4.3) se alejan de 0. Sabiendo esto, supongamos que el círculo en el que queremos tener todas las raíces de (4.3), $|\mu| = 1/|a|$, cumple $1/|a| < k/(k+1)$.

Por el Lema 1 apartado *c*) sabemos que si $c > 0$, hay una raíz positiva fuera del círculo $|\mu| = 1/|a| < k/(k+1)$, concretamente en el intervalo $(k/(k+1), 1)$.

Si $c < 0$, el Lema 1 apartado *d*) nos garantiza, al menos, la existencia de una raíz positiva en $(1, \infty)$, que estaría fuera del círculo $|\mu| = 1/|a| < k/(k+1) < 1$.

De modo que es imposible que siendo $1/|a| < k/(k+1)$ tengamos todas las raíces dentro del círculo para cualquier valor de c. Necesariamente tiene que ser $1/|a| > k/(k+1)$ para poder asegurar que habrá valores de $|c|$ para los una raíz de (4.3) esté en el interior del círculo $|\mu| = 1/|a|$.

Sin embargo, pasado un cierto valor $|c|$ que desconocemos por el momento, también habrán salido raíces del círculo $|\mu| = 1/|a|$ debido al Lema 4 que nos aseguran que las raíces crecen cuando lo hace el valor de $|c|$. Es por esto que nuestro interés ahora es encontrar valores de $|c|$, en términos de $|a|$ y de θ que cumplan que $|\mu| = r = 1/|a|$ y $1/|a| > k/(k+1)$, ya que es nuestra única opción de conseguir que todas las raíces de (4.3) estén dentro del círculo que nos interesa.

Lema 5. *Sea* $r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$*, con* $0 \leq \theta < 2\pi$*, una raíz de* (4.3) *tal que* $r = 1/|a|$ *y* $|a| < (k+1)/k$*. Entonces,*

$$|c| = \frac{(a^2+1-2|a|\cos\theta)^{1/2}}{|a|^{k+1}}. \tag{4.14}$$

Demostración. Por la Ec. (4.5) y dado que $r = 1/|a|$ tenemos

$$\operatorname{sen}((k+1)\theta) = |a|\operatorname{sen}(k\theta), \tag{4.15}$$

lo que nos lleva a

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(k\theta)\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos(k\theta) &= |a|\operatorname{sen}(k\theta),\\
\operatorname{sen}(k\theta)[|a| - \cos\theta] &= \operatorname{sen}\theta\cos(k\theta),\\
\tan(k\theta) &= \frac{\operatorname{sen}\theta}{|a|-\cos\theta}.
\end{aligned}$$

A partir de (4.6) podemos escribir

$$\begin{aligned}
c^2 &= r^{2k}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)},\\
\frac{c^2}{r^{2(k+1)}} &= \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)}.
\end{aligned}$$

Y empleando (4.5) tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{c^2}{r^{2(k+1)}} &= \frac{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)}{\operatorname{sen}^2(k\theta)}\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2((k+1)\theta)}\\
&= \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\operatorname{sen}^2(k\theta)}\\
&= \operatorname{sen}^2\theta\frac{1+\tan^2(k\theta)}{\tan^2(k\theta)}\\
&= (|a|-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta = a^2+1-2|a|\cos\theta,
\end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos aplicado la relación de $\tan(k\theta)$ que habíamos conseguido. Evaluando ahora r en $1/|a|$ y despejando c obtendremos

$$|c| = \frac{(a^2+1-2|a|\cos\theta)^{1/2}}{|a|^{k+1}},$$

como queríamos conseguir. $\square$

El siguiente paso es encontrar el mínimo valor de $|c|$ dado por (4.14), o lo que es lo mismo, el primer valor de $|c|$ para el que hay una raíz de (4.3) en el círculo $|\mu| = 1/|a|$ con $|a| < (k+1)/k$. Esto es necesario porque, de no buscar este primer valor y permitir que $|c|$ tome valores superiores, entonces sabemos que la primera raíz que estuviese sobre el círculo $|\mu| = 1/|a|$ seguiría alejándose de 0 por los lemas que aseguran el crecimiento de las raíces, y entonces ya no podríamos garantizar que todas las raíces estén dentro del círculo.

El argumento, es decir θ, de las raíces de (4.3) satisface la Ec. (4.15), en la que se incluyen los valores 0 y π como posibles soluciones, incluso cuando es posible que (4.3) no tenga una raíz positiva y otra negativa en el círculo $|\mu| < 1/|a|$. De todas formas, excluyendo $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, podemos reescribir (4.15) como

$$S(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)} = \frac{1}{|a|}. \tag{4.16}$$

Los argumentos de todas las raíces complejas de (4.3) satisfacen (4.16). El siguiente lema asegura que dichos argumentos son los únicos que producen soluciones de (4.16).

Lema 6. *Sea $c \neq 0, k^k/(k+1)^{k+1}$ y $|a| < (k+1)/k$. Los argumentos de las raíces complejas de* (4.3) *en $|\mu| = 1/|a|$ son las únicas soluciones de* (4.16).

Demostración. Es suficiente con mostrar que la cantidad de raíces que tiene (4.16) en $(0,\pi)$ o en $(\pi, 2\pi)$ es la misma cantidad que (4.3) tiene de raíces complejas.

Notemos que $S(2\pi-\theta)=S(\theta)$ y que las raíces complejas de (4.3) son pares conjugados. Ahora sea

$$N_1 = \text{número de soluciones de (4.16) en}(0,\pi),$$

y

$$N_2 = \text{número de raíces complejas de (4.3) en la mitad superior del plano}(0<\theta<\pi).$$

Será suficiente con establecer la igualdad $N_1 = N_2$. Con este propósito, en lo sucesivo considérese que $[x]$ se refiere a la parte entera de x. Tendremos que analizar dos casos.

Caso 1: $c>0$. Dado que, por (4.5) y (4.6), $\operatorname{sen}(k\theta)>0$ y $\operatorname{sen}((k+1)\theta)>0$ tenemos que

$$\frac{2m\pi}{k}<\theta<\frac{(2m+1)\pi}{k} \quad m=0,1,2,...,\left[\frac{k-1}{2}\right],$$

y

$$\frac{2n\pi}{k+1}<\theta<\frac{(2n+1)\pi}{k+1} \quad n=0,1,2,...,\left[\frac{k}{2}\right].$$

En consecuencia,

$$\frac{2p\pi}{k}<\theta<\frac{(2p+1)\pi}{k+1} \quad p=0,1,2,...,\left[\frac{k-1}{2}\right].$$

Por (4.6), (4.11) y (4.16), $S(\theta)$ es estrictamente creciente. Además, $S(0)=k/(k+1)$, $S(p\pi/k)=0$ y $S((2p+1)\pi/(k+1))=\infty$ para $p=0,1,2,...[(k-1)/2]$.

Entonces, dado que $1/|a|>k/(k+1)$, $S(\theta)=1/|a|$ tiene exactamente una solución en cada intervalo $(2p\pi/k,(2p+1)\pi/(k+1))$ para $p=0,1,2,...,[(k-1)/2]$. De modo que

$$N_1=\left[\frac{k-1}{2}\right]+1.$$

Si $k=2j$ entonces $N_1=j$. Además en este caso, según el Lema 1, $N_2=j$ y entonces $N_1=N_2$.

Si $k=2j+1$ entonces $N_1 = j+1$. En este caso, según el Lema 1, $N_2 = j+1$ y de nuevo $N_1 = N_2$.

Caso 2: $c>0$. Según (4.5) y (4.6) $\operatorname{sen}(k\theta)<0$ y $\operatorname{sen}((k+1)\theta)<0$ tenemos que

$$\frac{(2m+1)\pi}{k} < \theta < \frac{(2m+2)\pi}{k} \quad m = 0,1,2,\ldots,\left[\frac{k-2}{2}\right],$$

y

$$\frac{(2n+1)\pi}{k+1} < \theta < \frac{(2n+2)\pi}{k+1} \quad n = 0,1,2,\ldots,\left[\frac{k-1}{2}\right].$$

En consecuencia,

$$\frac{(2p+1)\pi}{k} < \theta < \frac{(2p+2)\pi}{k+1} \quad p = 0,1,2,\ldots,\left[\frac{k-2}{2}\right].$$

Al igual que como se discutía en el caso 1, $S(\theta) = 1/|a|$ tiene exactamente una solución en los intervalos $((2p+1)\pi/k, (2p+2)\pi/(k+1))$ para $p = 0,1,2,\ldots,[(k-2)/2]$. Por eso,

$$N_1 = \left[\frac{k-2}{2}\right] + 1.$$

Si $k=2j+1$ entonces $N_1 = j$. Según el Lema 1, $N_2 = j$ y entonces $N_1 = N_2$.

Si $k = 2j$ entonces $N_1 = j$. Y otra vez, según el Lema 1, $N_2 = j$ y de nuevo $N_1 = N_2$.

$\square$

Observación 6. El mínimo valor de $|c|$ dado por la Ec. (4.14), o lo que es lo mismo, el primer valor de $|c|$ para el que hay una raíz compleja de (4.3) en el círculo $|\mu| = 1/|a|$ con $|a| < (k+1)/k$, ocurre cuando θ en $(0, \pi/(k+1))$ es la solución de (4.16).

Los siguientes dos lemas dan las condiciones necesarias y suficientes para que las raíces de (4.3), con $c>0$ y $c<0$, estén dentro del disco $|\mu| < 1/|a|$.

Lema 7. *Sea* $k \in \mathbb{N}$ *y* $c > 0$. *Entonces, todas las raíces de* (4.3) *están en el interior del disco* $|\mu| < 1/|a|$ *si y solo si* $|a| < (k+1)/k$ *y*

$$\frac{|a|-1}{|a|^{k+1}} < c < \frac{(a^2+1-2|a|\cos\phi)^{1/2}}{|a|^{k+1}},$$

donde ϕ *es la solución de* (4.16) *en* $(0, \pi/(k+1))$.

Demostración. Como ya hemos deducido anteriormente, es necesario que $1/|a| > k/(k+1)$ o lo que es lo mismo $|a| < (k+1)/k$. Anteriormente esta condición ya se ha asumido y ahora debemos subdividirla en dos casos diferentes: uno cuando $1/|a|$ está en $((k/(k+1), 1)$ y otro cuando $1/|a|$ es mayor que 1.

Caso 1: $1 < |a| < (k+1)/k$. Como sabemos por el Lema 1 apartado c), cuando c crece desde 0 hasta $k^k/(k+1)^{+1}$ la raíz positiva mayor decrece desde 1 hasta $k/(k+1)$ mientras que el resto crecen. Llamemos c_1, c_2 y c_3 a los valores de c para los que la raíz positiva mayor, una raíz compleja y la raíz negativa, si es que existe por ser k par, se encuentran exactamente sobre el círculo $|\mu| = 1/|a|$ respectivamente. Según el Lema 5 tenemos que usar la Ec. (4.14). En el caso de c_1 la raíz es positiva, entonces será $\theta = 0$,

$$c_1 = \frac{|a|-1}{|a|^{k+1}};$$

en el caso de c_2, la raíz es compleja, entonces será

$$c_2 = \frac{(a^2+1-2|a|\cos\phi)^{1/2}}{|a|^{k+1}}$$

con ϕ la solución de (4.16) en $(0, \pi/(k+1))$ siguiendo la Observación 6; y finalmente en el caso de c_3, la raíz es negativa y tendremos

$$c_3 = \frac{|a|+1}{|a|^{k+1}}.$$

Nótese que $c_1 < c_2 < c_3$ así que conforme c crezca primero saldrá del círculo $|\mu| = 1/|a|$ la raíz mayor positiva, luego la raíz compleja y finalmente la raíz negativa (si existe). Por tanto, está claro que c no debe pasar el límite c_2 ni menos el c_3. Sin embargo, recordemos que la raíz mayor positiva no crece conforme lo hace c, sino que decrece hasta $k/(k+1)$, es decir, esta raíz cruza el círculo desde fuera hasta dentro, al contrario que el resto de casos. Por tanto, debemos asegurar que la raíz mayor positiva ha cruzado la frontera del círculo y por eso ahora está dentro de él. Es decir, necesariamente c debe ser mayor que c_1. Así pues, el intervalo de valores en los que se debe encontrar c es $c_1 < c < c_2$. Usando los valores anteriormente dados, se ve que es la condición que se pretende en el lema.

Caso 2: $|a| \leq 1$. En este caso sabemos que habrá raíces complejas y una posible raíz negativa si k es par que llegarán al círculo $|\mu| = 1/|a|$. Usaremos los mismos c_2 y c_3 que en el caso anterior, pues se sigue tratando de raíces complejas y raíces negativas respectivamente. De nuevo, $c_2 < c_3$ y dado que todas estas raíces crecen conforme lo hace c, debemos asegurar que $c < c_2$. No importa en este caso el límite inferior, por lo que no pasa nada si acotamos con $c_1 < c$ para que el caso 1 pueda seguir siendo válido.

Así, ya tenemos demostrado el lema como queríamos. □

Lema 8. *Sea* $k \in \mathbb{N}$ *y* $c < 0$. *Entonces, todas las raíces de* (4.3) *están en el interior del disco* $|\mu| < 1/|a|$ *si y solo si* $|a| < 1$ *y*

$$c > \frac{|a|-1}{|a|^{k+1}}.$$

Demostración. Cuando $c < 0$, según el Lema 1 la raíz positiva se encuentra en $(1,\infty)$. Para que todas las raíces de (4.3) estén dentro de $|\mu| < 1/|a|$ debemos empezar por asegurar que $|a| < 1$ para que la raíz positiva pueda estar dentro. Esta es la primera condición que buscábamos, y en el resto de la prueba asumiremos que se mantiene.

Conforme c decrece hemos visto que todas las raíces se alejan del 0 en los sucesivos lemas. Según el Lema 1 la Ec. (4.3) tiene una raíz real y una posible raíz compleja si k es impar. Además, hay raíces complejas también. Sean c_1, c_2 y c_3 los valores de c para los que la raíz real, la compleja y la posible negativa alcanzan la frontera del círculo $|\mu| < 1/|a|$. Haciendo uso de (4.14) hallada en el Lema 5 tenemos

$$c_1 = \frac{|a|-1}{|a|^{k+1}},$$

$$c_2 = -\frac{(a^2+1-2|a|\cos\phi)^{1/2}}{|a|^{k+1}}$$

y

$$c_3 = -\frac{|a|+1}{|a|^{k+1}}.$$

Como $c_1 > c_2 > c_3$, conforme c decrezca saldrá del círculo primero la raíz positiva, luego la compleja y luego la negativa. Así que necesariamente debemos imponer que $c > c_1$, que es la última condición que faltaba para completar la prueba. □

4.2. Demostración del Teorema de Kuruklis

Para hacer la prueba del teorema de Kuruklises necesario deshacer el cambio que hicimos con $\mu = \lambda/a$. De modo que ahora vamos a abordar las condiciones necesarias y suficientes para que las raíces de (4.2), $\lambda^{k+1} - a\lambda^k + b = 0$, estén dentro del círculo unidad.

Teorema 8. *Sea $a, b \in \mathbb{R}$ distintos de 0, y $k \in \mathbb{N}$. Las raíces de* (4.2) *están dentro del círculo unidad si* $|a| < (k+1)/k$ *y*

$$|a|-1 < b < (a^2+1-2|a|\cos\phi)^{1/2} \quad \textit{para k impar,} \tag{4.17}$$

$$|b-a| < 1 \quad y \quad |b| < (a^2+1-2|a|\cos\phi)^{1/2} \quad \textit{para k par,} \tag{4.18}$$

donde ϕ es la solución en $(0, \pi/(k+1))$ *de la ecuación* $\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}((k+1)\theta) = 1/|a|$.

Demostración. Para esta prueba necesitamos considerar varios casos.

Caso 1: $a > 0$ y $b > 0$. Entonces $c = b/a^{k+1} \geq 0$, por lo que podemos usar el Lema 7 para decir que las raíces de (4.2) están en el círculo unidad si

$$a < \frac{k+1}{k} \quad \text{y} \quad a - 1 < b < (a^2 + 1 - 2a\cos\phi)^{1/2}.$$

Caso 2: $a > 0$ y $b < 0$. Entonces $c = b/a^{k+1} < 0$, por lo que podemos usar el Lema 8 para decir que las raíces de (4.2) están en el círculo unidad si

$$a < 1 \quad \text{y} \quad a - 1 < b.$$

Caso 3: $a < 0$ y $b < 0$. Entonces el signo de $c = b/a^{k+1}$ depende de la paridad de k. Necesitamos considerar dos subcasos.

Subcaso A: k impar. Entonces será $a^{k+1} > 0$, por lo que $c < 0$ y por ello podemos usar el Lema 8 para decir que las raíces de (4.2) están en el círculo unidad si

$$-1 < a \quad \text{y} \quad -a - 1 < b.$$

Subcaso B: k par. Entonces será $a^{k+1} < 0$, por lo que $c > 0$ y por ello podemos usar el Lema 7 para decir que las raíces de (4.2) están en el círculo unidad si

$$-\frac{k+1}{k} < a \quad \text{y} \quad -(a^2 + 1 + 2a\cos\phi)^{1/2} < b < a + 1.$$

Caso 4: $a < 0$ y $b > 0$. De nuevo, el signo de $c = b/a^{k+1}$ dependerá de la paridad de k. Necesitamos considerar dos subcasos.

Subcaso A: k impar. Entonces será $a^{k+1} > 0$, por lo que $c > 0$ y por ello podemos usar el Lema 7 para decir que las raíces de (4.2) están en el círculo unidad si

$$-\frac{k+1}{k} < a \quad \text{y} \quad -a - 1 < b < (a^2 + 1 + 2a\cos\phi)^{1/2}.$$

Subcaso B: k par. Entonces será $a^{k+1} < 0$, por lo que $c < 0$ y por ello podemos usar el Lema 8 para decir que las raíces de (4.2) están en el círculo unidad si

$$-1 < a \quad \text{y} \quad b < a + 1.$$

Para llegar a (4.17) y (4.18) es cuestión de condensar todos los resultados de los diferentes casos y subcasos que hemos considerado. En el caso de las relaciones que solo incumben a a, tenemos que $a < 1$, $-1 < a$, $a < (k+1)/k$ y $-(k+1)/k < a$, por tanto, está claro que $|a| < 1$ y $|a| < (k+1)/k$, lo que podemos simplificar en $|a| < (k+1)/k$ porque $(k+1)/k < 1$.

Respecto a las relaciones que incumben a b con el resto de parámetros habrá que hacer distinción según la paridad de k porque son relaciones excluyentes, no como con el caso del parámetro a. Y también habrá que prestar atención al signo de a. Así que, cuando k es impar teníamos

$$\text{del Caso 1} \quad a-1 < b < (a^2+1-2a\cos\phi)^{1/2} \text{ con } a > 0,$$

$$\text{del Caso 2} \quad a-1 < b \text{ con } a > 0,$$

$$\text{del Caso 3 Subcaso A} \quad -a-1 < b \text{ con } a < 0,$$

$$\text{y del Caso 4 Subcaso A} \quad -a-1 < b < (a^2+1+2a\cos\phi)^{1/2} \text{ con } a < 0.$$

Atendiendo al signo de a, claramente el límite inferior es $|a|-1 < b$ y el superior, aunque en dos casos no haya, es $b < (a^2+1-2|a|a\cos\phi)^{1/2}$. Por tanto, cuando k sea impar, $|a|-1 < b < (a^2+1-2|a|a\cos\phi)^{1/2}$, que es (4.17).

El caso k par es más difícil porque también hay que prestar atención al signo de b. Procederemos como antes,

$$\text{del Caso 1} \quad a-1 < b < (a^2+1-2a\cos\phi)^{1/2} \text{ con } a > 0 \text{ y } b > 0,$$

$$\text{del Caso 2} \quad a-1 < b \text{ con } a > 0 \text{ y } b < 0,$$

$$\text{del Caso 3 Subcaso B} \quad -(a^2+1+2a\cos\phi)^{1/2} < b < a+1 \text{ con } a < 0 \text{ y } b > 0,$$

$$\text{y del Caso 4 Subcaso B} \quad -b < a+1 \text{ con } a < 0 \text{ y } b < 0.$$

No podemos escribir un límite inferior para $|b|$ como tal, únicamente un límite superior, $|b| < (a^2+1-2|a|\cos\phi)^{1/2}$. El resto de condiciones que quedan por vincular son $a-b<1$ para $a,b>0$ y $a>0,b<0$ y $b-a<1$ para $a>0,b<0$ y $a,b<0$. Con ellas estamos requiriendo que la resta de los parámetros a y b sea siempre menor que 1 tengan el signo que tengan. Esto lo podemos expresar simplemente como $|b-a|<1$, que es la condición que nos faltaba para tener (4.18). □

Observación 7. Queda decir que cuando $b=0$, entonces la Ec. (4.1) queda como $x_{n+1}-ax_n=0$, cuyo polinomio característico es $\lambda^{k+1}-a\lambda^k=0$. Sus raíces son menores que 1 si $|a|<1$, por tanto, esta es la condición de la estabilidad asintótica cuando $b=0$. Esta condición se cumple en el Teorema 8 cuando ponemos $b=0$, por tanto, también es válido para ese caso.

Así, habiendo asegurado que (4.2) tiene raíces interiores al círculo unidad si cumple las condiciones del Teorema 8 y la Observación obs:B=0Kuruklis. Por lo dicho en la Sección 1.3, concluimos que dichas condiciones aseguran también la estabilidad asintótica de la solución 0 de (4.1) y el Teorema de Kuruklis queda demostrado.

4.3. Prueba del Teorema de Levin-May

Dado que la Ec. (3.1),

$$x_{n+1}-x_n+\beta x_{n-k}=0,$$

es un caso particular de la Ec. (4.1),

$$x_{n+1}-ax_n+bx_{n-k}=0,$$

es posible demostrar el criterio de estabilidad asintótica que propone el Teorema de Levin-May mediante la aplicación directa del Teorema de Kuruklis.

En primer lugar, debemos ver que (3.1) es (4.1) cuando esta última tiene $a = 1$. Por tanto, del Teorema de Kuruklis sabemos que (3.1) será asintóticamente estable si y solo si

$$0 < b < (2-2|cos\phi)^{1/2} \quad \text{para } k \text{ impar} \tag{4.19}$$

o

$$|b-1| < 1 \quad \text{y} \quad |b| < (2-2\cos\phi)^{1/2} \quad \text{para } k \text{ par} \tag{4.20}$$

donde ϕ es la solución en $(0, \pi/(k+1))$ de

$$\frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}((k+1)\theta)} = 1. \tag{4.21}$$

Nótese que $|b-1| < 1$ significa que $b > 0$ y $b < 2$. Por ello, las condiciones (4.19) y (4.20) se reducen a, simplemente,

$$0 < b < (2-2\cos\phi)^{1/2} \tag{4.22}$$

dado que $b < 2$ no se contradice con (4.19) y (4.20), y como es más restrictivo $b < (2-2\cos\phi)^{1/2}$, dejamos esta condición.

Además, podemos hacer los siguientes cambios en los que usamos la fórmula del seno del ángulo mitad,

$$(2-2\cos\phi)^{1/2} = (2(1-\cos\phi))^{1/2} = \left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^{1/2} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Por lo que podemos reescribir (4.22) como

$$0 < b < 2\operatorname{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right). \tag{4.23}$$

Por otro lado, de (4.21), y evaluando θ en ϕ, sabemos que $\operatorname{sen}(k\phi) = \operatorname{sen}((k+1)\phi)$ lo que nos lleva a que, o bien

$$k\phi + (k+1)\phi = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.24}$$

o bien

$$k\phi = (k+1)\phi + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.25}$$

Dado que necesitamos que las soluciones de (4.21) estén en $(0, \pi/(k+1))$ y (4.25) no lo está, entonces solo debe ser posible (4.24). Es más, por tener que cumplirse $0 < \phi < \pi/(k+1)$, necesariamente $n = 0$ en (4.24), por lo que $\phi = (1/(2k+1))\pi$.

Véase que podemos escribir

$$\frac{k}{2k+1}\pi + \frac{1}{2(2k+1)}\pi = \frac{\pi}{2},$$

de donde sacamos que

$$\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{k}{2k+1}\pi.$$

Al sustituir en (4.23) obtendríamos

$$0 < b < 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k}{2k+1}\pi\right) = 2\cos\left(\frac{k}{2k+1}\pi\right)$$

que es la condición de estabilidad del Teorema de Levin-May para la Ec. (3.1).

Capítulo 5

Teoremas de Dannan

Los siguientes teoremas suponen un paso más respecto a los dos capítulos anteriores. La ecuación con la que trabaja Dannan en su artículo [5] es de orden $k+l$, se trata de

$$x_{n+k} + ax_n + bx_{n-l} = 0. \tag{5.1}$$

En comparación, la Ec. (4.1) del Teorema de Kuruklis es el caso particular con $k = 1$ de (5.1).

En su artículo, Dannan llega a la conclusión de que es necesario hacer distinción entre tres casos concretos según la paridad de k y l. Según cada caso, así da un criterio, por lo que su resultado final consta de los tres teoremas siguientes.

Teorema 9. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $l \geq 1$ y $k > 1$ coprimos y enteros impares. Las raíces de* (5.2) *se encuentran dentro del círculo unidad y por consiguiente la Ec.* (5.1) *es asintóticamente estable si y solo si $|a| < 1$ y*

$$|a| - 1 < b < \min_{\theta \in S} (1 + a^2 - 2|a| \cos(k\theta))^{1/2}$$

donde S es el conjunto de soluciones de

$$\frac{1}{|a|} = \frac{\operatorname{sen}(l\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta)}$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

Teorema 10. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, $l \geq 1$ *un entero impar,* $k > 1$ *un entero par y ambos coprimos. Las raíces de* (5.2) *se encuentran dentro del círculo unidad y por consiguiente la Ec.* (5.1) *es asintóticamente estable si y solo si*

$$|b| < 1 - |a| \quad para \quad -1 < a < 0$$

y

$$|b| < \min_{\theta \in S^*} (1 + a^2 + 2a\cos(k\theta))^{1/2} \quad para \quad 0 < a < 1,$$

donde S^* *es el conjunto de soluciones de*

$$-\frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sen}(l\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta)}$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

Teorema 11. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$, l *un entero par y* $k > 1$ *un entero impar, ambos coprimos. Las raíces de* (5.2) *se encuentran dentro del círculo unidad y por consiguiente la Ec.* (5.1) *es asintóticamente estable si y solo si*

$$|a| - 1 < b < \min_{\theta \in S} (1 + a^2 - 2|a|\cos(k\theta))^{1/2} \quad para \quad -1 < a < 0$$

y

$$a - 1 < -b < \min_{\theta \in S} (1 + a^2 - 2a\cos(k\theta))^{1/2} \quad para \quad 0 < a < 1,$$

donde S *es el conjunto de soluciones de*

$$\frac{1}{|a|} = \frac{\operatorname{sen}(l\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta)}$$

en el intervalo $(0, \pi)$.

5.1. Resultados preliminares

Siguiendo la prueba original, lo más cómodo es establecer una serie de lemas previos para poder trabajar con ellos en la demostración.

Como ya conocemos por la Sección 1.3, la Ec. (5.1) es asintóticamente estable si y solo si las soluciones de su polinomio característico,

$$\lambda^{l+k} + a\lambda^{l} + b = 0, \tag{5.2}$$

se encuentran dentro del círculo unidad.

Para poder desarrollar la prueba con comodidad nos convendrá elegir l y k tal que sean coprimos. El siguiente lema demuestra que esta elección se puede hacer sin pérdida de generalidad para la prueba.

Lema 9. *Si $l = sl'$ y $k = sk'$ con s, l' y k' unos enteros positivos aleatorios, entonces todas las raíces de* (5.2) *caen dentro del círculo unidad si y solo si todas las raíces de*

$$u^{l'+k'} + au^{l'} + b = 0 \tag{5.3}$$

caen dentro del círculo unidad.

Demostración. La Ec. (5.2) se puede escribir como

$$v^{l'+k'} + av^{l'} + b = 0 \tag{5.4}$$

si $v = \lambda^s$. Asumamos que $|\lambda| < 1$. Entonces $|v| = |\lambda^s| < 1$. Al contrario también sucede, si en (5.3) una raíz cumple $|u| < 1$, entonces por ser (5.4) igual que (5.3) también $|v| < 1$ y por tanto $|\lambda| < 1$ por lo que las raíces de (5.2) también están dentro del círculo unidad. □

Según este lema, dado que s puede ser cualquier entero positivo, nada nos impide elegir $s = 1$, tal que entonces k y l sean coprimos. En lo sucesivo se debe entender que k y l son coprimos.

Para encontrar las raíces de (5.2) será más sencillo si aplicamos el cambio

$$z = \frac{\lambda}{a^{1/k}}.$$

En ese caso, si $a > 0$, la Ec. (5.2) puede escribirse como

$$z^{l+k} + z^l + p = 0, \tag{5.5}$$

con

$$p = \frac{b}{a^{(l+k)k}}.$$

Si $a < 0$ podremos obtener una ecuación diferente si aplicamos unas modificaciones a (5.5). Usemos la notación $z = z_{a>0}$ y $p = p_{a>0}$ para designar las variables z y p cuando $a > 0$, como en (5.5). Para las variables z y p cuando $a < 0$ se usará, respectivamente $z_{a<0}$ y $p_{a<0}$. Debemos tener en cuenta los siguientes casos:

a) l y k son impares. Entonces

$$z_{a<0} = \frac{\lambda}{(-|a|)^{1/k}} = -\frac{\lambda}{|a|^{1/k}} = -z$$

y

$$p_{a<0} = \frac{b}{(-|a|)^{(l+k)k}} = \frac{b}{|a|^{(l+k)k}} = p,$$

por lo que $z^{l+k} - z^l + p = 0$.

b) l es impar y k es par. Entonces

$$z_{a<0}^{l+k} = -\frac{\lambda^{l+k}}{|a|(-|a|)^{l/k}}$$

y

$$z_{a<0}^{l} = \frac{\lambda^l}{(-|a|)^{l/k}} = \pm z^l$$

por lo que $z_{a<0}^{k+l}$ y $z_{a<0}^{l}$ tienen signo contrario ya que

$$z_{a<0}^{l+k} = -\frac{\lambda^k}{|a|} z_{a<0}^{l} = -z^k z_{a<0}^{l} = \mp z^{k+1},$$

y $p_{a<0}$ es como en el caso anterior, por lo que podemos escribir convenientemente $z^{l+k} - z^l + p = 0$.

c) l es par y k es impar. Entonces $z_{a<0} = -z$ como en el caso a) y

$$p_{a<0} = \frac{b}{(-|a|)^{(l+k)k}} = -\frac{b}{|a|^{(l+k)k}} = -p,$$

por lo que $-z^{l+k} + z^l - p = 0 \Rightarrow z^{l+k} - z^l + p = 0$.

El caso en el que l y k son pares está desestimado porque l y k los hemos supuesto coprimos, por lo que esta posibilidad no puede darse. Por tanto, de todos los casos anteriormente descritos llegamos a que si $a < 0$, la Ec. (5.2) se puede escribir como

$$z^{l+k} - z^l + p = 0, \tag{5.6}$$

con p como en (5.5).

Ahora, determinar si las raíces de (5.2) están dentro del círculo unidad se reduce a ver si en (5.5) y (5.6) las raíces están en el círculo $|z| = h$ con

$$h = \frac{1}{|a|^{1/k}}.$$

Será necesario considerar los siguientes casos:

- *Caso A:* En (5.6) $(a < 0)$, l y k son impares.
- *Caso B:* En (5.6) $(a < 0)$, l es impar y k es par.
- *Caso C:* En (5.6) $(a < 0)$, l es par y k es impar.
- *Caso D:* En (5.5) $(a > 0)$, l es impar y k es par.

Nótese que es innecesario considerar que en (5.5) l y k sean impares y tampoco cuando l sea par y k impar, ya que entonces se trataría del *Caso C* y el *Caso A*, respectivamente, simplemente con reemplazar z por $-z$.

También será necesario considerar los subcasos en los que $h = 1$, $h < 1$ y $h > 1$.

Los siguientes cuatro lemas se encargan de analizar las raíces de las Ecs. (5.5) y (5.6) según los casos anteriores. Nótese la similitud de los siguientes lemas con el Lema 1 que se daba en el Capítulo 3, esto es comprensible porque lo que ha hecho el autor es ver que la técnica, la estrategia de Levin-May, se podía generalizar a otras ecuaciones en diferencias lineales.

Lema 10 (Caso A)**.** *Sean k y l dos enteros positivos impares. Entonces la Ec.* (5.6)

I) *tiene una raíz doble*

$$\mu_t = \left(\frac{l}{l+k}\right)^{1/k} \tag{5.7}$$

para

$$p = p_t = \mu_t^l - \mu_t^{l+k} = \left(\frac{k}{l+k}\right)\left(\frac{l}{l+k}\right)^{1/k}, \tag{5.8}$$

ninguna raíz negativa para $p > p_t$ y dos raíces μ_l y μ_r tal que $\mu_l < \mu_t < \mu_r$ para $p < p_t$.

II) *Las raíces μ_l y μ_r son ambas positivas si $p > 0$, mientras que si $p < 0$ entonces $\mu_l < 0$. Además, conforme p crece (decrece), μ_l y μ_r se acercan a (se alejan de) μ_t.*

III) *Las dos raíces reales satisfacen*

a) $|\mu| < 1$ *si y solo si* $0 < p < p_t$.

b) $|\mu| < h < 1$ *para algún real h si y solo si* $p_h < p < p_t$ *y* $\mu_t < h < 1$, *donde*

$$p_h = p(h) = h^l - h^{l+k}. \tag{5.9}$$

c) $|\mu| < h$ *para algún* $h > 1$ *si y solo si* $p_h < p < p_t$.

Demostración. De (5.6) pongamos

$$f(\mu) = \mu^{l+k} - \mu^l + p. \tag{5.10}$$

Entonces

$$f'(\mu) = \mu^{l-1}((l+k)\mu^k - l) \tag{5.11}$$

por lo que es claro ver que $f'(\mu_t) = 0$, $f'(\mu < \mu_t) < 0$ y $f'(\mu > \mu_t) > 0$ por lo que se sigue que $f(\mu)$ tiene un mínimo global en $\mu = \mu_t$ de valor $f(\mu_t) = p - p_t$. Con esto podemos ver también que (5.6) no tiene raíces reales si $p > p_t$, tiene una doble raíz real si $p = p_t$ y dos raíces reales μ_l y μ_r si $p < p_t$, donde $\mu_l < \mu_t < \mu_r$. Los subíndices r y l se usan en este momento para indicar si la raíz μ se encuentra a la derecha o a la izquierda de μ_t, respectivamente. Esto demuestra el apartado I).

De (5.6) podemos ver que

$$p(\mu) = \mu^l - \mu^{l+k} \tag{5.12}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\mu} = p' = \mu^{l-1}[l - (l+k)\mu^k]. \tag{5.13}$$

Si $\mu < \mu_t$ entonces $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\mu > 0$ y $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\mu < 0$ si $\mu > \mu_t$. Así que la raíz izquierda μ_l crece conforme p crece hacia μ_t mientras que la raíz derecha μ_r decrece hacia μ_t. Como se tiene que si $p = 0$, $\mu_l = 0$ y $\mu_r = 1$, usando el Lema 2 sabemos que si $p < 0$ entonces $\mu_l < 0$ y si $p > 0$ entonces μ_l y μ_r son ambas positivas. Esto prueba el apartado II).

Para probar el apartado III) subapartado a) tenemos que usar la propiedad del apartado II) por la que si p aumenta hasta p_t, entonces las raíces $\mu_r < 1$ y $\mu_l > 0$ se mueven hacia $\mu_t < 1$. Entonces es fácil ver que $0 < \mu_l < \mu_t < \mu_r < 1$. Y para descartar otras posibilidades, véase que si $p < 0$, $mu_r > 1$.

En el caso III) subapartado b), para que $|\mu| < h < 1$ debe ser entonces que la mayor raíz, μ_r cumpla $\mu_r = h$ en cuyo caso será, de (5.6), $p = p(h) = h^l - h^{k+l}$, por lo que $\mu_l < \mu_t < \mu_r = h < 1$.

Por último, en el caso III) subapartado c), si la raíz mayor debe cumplir $\mu_r < h$ para algún $h > 1$, entonces debemos garantizar su existencia acorde con el caso I), lo que solo sucede si $p(h) < p < p_t$. En el caso en que se tenga que $\mu_l > 0$ se tendrá también que $0 < \mu_l < \mu_t < h$. Por contra, si resulta que $\mu_r < 0$ entonces $-h < \mu_r$ si $p(-h) < p < p_t$. Dado que $p(h) > p(-h)$ podemos concluir la condición que buscábamos. □

Lema 11 (Caso B)**.** *Sea l un entero positivo impar y $k > 1$ un entero par. Entonces* (5.6) *tiene una raíz ξ tal que $|\xi| > 1$. Las raíces reales μ satisfacen $|\mu| < h$ para algún $h > 1$ si y solo si*

$$h^l - h^{l+k} < p < h^{l+k} - h^l.$$

Demostración. Sea $f(\mu)$ como en (5.10). Si $p > 0$, entonces $f(-1) = p > 0$. También tenemos que $f(-\infty) < 0$ por lo que debe haber una raíz $\xi < -1$. Por el mismo procedimiento se ve que si $p < 0$ hay una raíz en $\xi > 1$.

Para la segunda afirmación tenemos que ver que $f'(\mu) < 0$ para $0 < \mu < \mu_t$ siendo $f'(\mu)$ como en (5.11) y μ_t como en (5.7). También que $f'(\mu) > 0$ para $\mu_t < \mu < \infty$ y que $f'(\mu_t) = 0$.

Para $0 < p < p_t$, con p_t como en (5.8), tenemos $f(0) > 0$, $f(\mu_t) < 0$ y $f(1) > 0$. Así que hay dos raíces, $\xi_1 \in (0, \mu_t)$ y $\xi_2 \in (\mu_t, 1)$.

Para $p < 0$ hay una raíz $\xi > 1$ porque $f(1) < 0$ y $f(\infty) > 0$. Como $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\mu < 0$ para $\mu > \mu_t$, podemos concluir que si $\mu = h > 1$ es una raíz entonces $p = p_h = h^l - h^{k+l} < 0$. Conforme p crece y se aleja de p_h la correspondiente raíz seguirá siendo inferior a h mientras $p_h \le 0$.

Cuando $0 < p < p_t$, hay solo dos raíces positivas $\xi_1 < 1 < h$ y $\xi_2 < 1 < h$. Cuando $p > p_t$ no hay raíces positivas. Finalmente concluimos que todas las raíces positivas satisfacen $0 < \mu < h$ si y solo si $h^l - h^{k+l} < p$. De igual manera se puede ver que $-h < \mu < 0$ será si y solo si $p > h^{k+l} - h^l$. Como lo que buscamos es que $|\mu| < h$, en la unión de estos dos intervalos, $h^l - h^{k+l} < p$ y $p > h^{k+l} - h^l$, se tiene la condición que buscábamos. □

Lema 12 (Caso C)**.** *Sea $l > 1$ un entero par y k un entero impar. Entonces la raíz real μ de* (5.6) *satisface:*

I) *$|\mu| < 1$ si y solo si $0 < p < 2$.*

II) *$|\mu| < h$ para algún $h < \mu_t$ tal que $h^{k+l} + h^l > p_t$ si y solo si $p_t < p < h^{l+k} + h^l$, donde μ_t y p_t son como en* (5.7) *y* (5.8).

III) *$|\mu| < h$ para algún $\mu_t < h < 1$ si y solo si $h^l - h^{l+k} < p < h^{l+k} + h^l$.*

IV) *$|\mu| < h$ para algún $h > 1$ si y solo si $h^l - h^{l+k} < p < h^{l+k} + h^l$.*

Demostración. En primer lugar debemos observar ciertos aspectos sobre la localización de las raíces de (5.6). Sea $f(\mu)$ como en (5.10) y $p(\mu)$ como en (5.12), por lo que $f'(\mu)$ y $p'(\mu)$ son como en (5.11) y (5.13), respectivamente. Vemos que $f'(\mu) < 0$ si $\mu \in (-\infty, 0) \cup (\mu_t, \infty)$ donde μ_t es como en (5.7). Entonces, $f(\mu)$ tiene un valor mínimo $p - p_t$ en $\mu = \mu_t$ y un valor máximo p en $\mu = 0$, p_t es como en (5.8). Así pues, lo siguiente se cumple para las raíces reales de (5.6) en este caso:

a) Para $p < 0$ existe una raíz $\xi > 1$ que crece conforme p decrece, ya que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\mu < 0$ para $\mu > \mu_t$.

b) Para $0 < p < p_t$ existe una raíz negativa $\xi < 0$ y dos raíces positivas ξ_1, ξ_2 tal que $0 < \xi_1 < \mu_t < \xi_2$. Además, ξ decrece conforme p crece porque $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\mu < 0$ para $\mu < 0$, ξ_1, x_2 se mueven hacia μ_t mientras p crece porque $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\mu > 0$ para $0 < \mu < \mu_t$.

c) Para $p > p_t$ existe una raíz negativa ξ que decrece conforme p crece porque $\mathrm{d}p/\mathrm{d}\mu < 0$ para $\mu < 0$.

Ahora ya podemos demostrar cada uno de los puntos del lema.

I) Para $p = 0$, (5.6) tiene dos raíces, 0 y 1. Dado que $0 < \mu_t < 1$, se sigue del punto b) que las raíces 0 y 1 se mueven hacia μ_t y se mantienen inferiores a 1 mientras p crezca desde 0. Hay una raíz negativa ξ cuando $p > 0$. Mientras p crezca, la raíz negativa decrecerá hacia $\xi = -1$, caso en el que $p = 2$. Así pues, si $p < 2$, la raíz negativa es $\xi > -1$. Entonces está claro que si $p < 0$, (5.6) tiene una raíz mayor que 1 porque la raíz positiva en 1 crece conforme p decrece.

II) S $\mu = h < \mu_t$ es una raíz de (5.6), entonces $p = p(h) < p(\mu_t) = p_t$ por lo que (5.6) tiene que tener otra raíz $\xi > h$. Si (5.6) no tiene una raíz positiva menor que μ_t, entonces solo tiene una raíz negativa ξ. Si comparamos ξ con $-h$ nos daremos cuenta de que $\mu^{l+k} - \mu^l + p(-h) = 0$ tiene la raíz $\mu = -h$. Si $p(-h) < p_t$, entonces $\xi < -h$. Así pues, $\xi > -h$ solo si $p(-h) > p_t$. Si usamos el Lema 2, que nos asegura la correlación del movimiento de las raíces de un polinomio con el movimiento de sus coeficientes, con $p(\mu)$ podemos concluir que la raíz ξ se mantiene mayor que $-h$ mientras $p_t < p < p(-h)$.

III) Si h es una raíz de (5.6), entonces $p = p(h)$ y $\mu^{k+l} - \mu^l + p(h) = 0$ tiene otras dos raíces ξ_1 y ξ_2 tal que $0 < \xi_1 < \mu_t < h$ y $\xi_2 < 0$. Mientras p crece y se aleja de $p(h)$, las dos raíces positivas permanecen inferiores a h y, la raíz negativa, $\xi_2 > -h$. De hecho, véase que $\mu^{k+l} - \mu^l + p(-h) = 0$ tiene solo uan raíz negativa $\mu = -h$ porque $p(-h) > p_t$ y $p(-h) > p(h)$. Entonces, $\xi_2 > -h$ y $|\mu| < h$ dado que $p(h) < p < p(-h)$.

IV) La mayor raíz positiva de $\mu^{k+l} - \mu^l + p(h) = 0$ es h y la raíz más pequeña negativa de $\mu^{k+l} - \mu^l + p(-h) = 0$ es $-h$. Entonces, para cualquier p que satisfaga $p(h) < p < p(-h)$, las correspondientes raíces μ satisfacen $-h < \mu < h$ por la aplicación del Lema 2.

□

Lema 13 (Caso D)**.** *Sea l un entero impar y k un entero par. Entonces la Ec.* (5.5) *tiene solo una raíz real μ, y cumple $|\mu| < h$ para cualquier real $h > 0$ si y solo si*

$$|p| < h^{l+k} + h^l.$$

Demostración. Sea $f(\mu) = \mu^{l+k} + \mu^l + p$ y $p(\mu) = -(\mu^{l+k} + \mu^l)$. Dado que $f'(\mu) = \mu^{l-1}((l+k)\mu^k + l)$, $f'(\mu) > 0$, $f(-\infty) < 0$ y $f(\infty) > 0$, se deduce que $f(\mu)$ tiene únicamente una raíz real. Además, $p'(\mu) = -\mu^{l-1}[(l+k)\mu^k + l] < 0$ implica que la única raíz real decrece mientras p crece. Debido a que las raíces h y $-h$ corresponden a los valores $p(h)$ y $p(-h)$ concluimos que $-h < \mu < h$ si $p(-h) > p > p(h)$ o lo que es lo mismo $-j^{k+l} - h^l < p < h^{k+l} + h^l$, que es lo que queríamos demostrar. □

El siguiente paso sería examinar las raíces complejas de (5.5) y (5.6) y cómo varían respecto de p. Pero antes serán necesarios los siguientes lemas.

Lema 14. *Sea*

$$f(\theta) = \frac{\operatorname{sen}(m\theta)}{\operatorname{sen}(n\theta)},$$

donde m y n son enteros positivos tal que $\operatorname{sen}(n\theta) \neq 0$. *Entonces $f(\theta)f'(\theta) > 0$ para $m < n$ y $f(\theta)f'(\theta) < 0$ para $m > n$.*

Demostración. Tenemos que

$$f'(\theta) = \frac{m\cos(m\theta)\operatorname{sen}(n\theta) - n\cos(n\theta)\operatorname{sen}(m\theta)}{\operatorname{sen}^2(n\theta)},$$

llamemos $g(\theta)$ al numerador. Asumamos primero que $m < n$. Si $f(\theta) > 0$ entonces $g'(\theta) > 0$. Dado que $g(0) = 0$ podemos deducir que $g(\theta) > 0$ y en consecuencia $f'(\theta) > 0$. De la misma manera se tiene el caso en el que $f(\theta) < 0$. De ahí se puede deducir la primera afirmación del lema.

Vamos con el caso en el que $m > n$. En primer lugar, pongamos $f(\theta) > 0$, entonces $g'(\theta) < 0$ y $g(\theta) < 0$ porque $g(0) = 0$. Entonces $f'(\theta) < 0$. De la misma manera se procede cuando $f(\theta) > 0$ y se obtiene la segunda afirmación del lema. □

El siguiente lema guarda relación con la técnica ya empleada por Levin-May y Kuruklis, que trata de entender cómo se ven modificadas las raíces del polinomio característico de la ecuación estudiada conforme se varían sus parámetros.

Lema 15. *El valor absoluto de las raíces complejas de las Ecs.* (5.5) *y* (5.6) *crece conforme* $|p|$ *crece.*

Demostración. Las raíces complejas de (5.6) en coordenadas complejas se escriben $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$. Sustituyendo esto en (5.6) e igualando las partes real e imaginaria obtenemos

$$r^{l+k}\cos[(l+k)\theta] - r^{l}\cos(l\theta) + p = 0 \tag{5.14}$$

$$r^{l}[r^{k}\operatorname{sen}[(l+k)\theta] - \operatorname{sen}(l\theta)] = 0. \tag{5.15}$$

De estas ecuaciones obtenemos

$$r^{k} = \frac{\operatorname{sen}(l\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta]} \tag{5.16}$$

y

$$p = r^{l}\frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta]}. \tag{5.17}$$

Nótese que $\operatorname{sen}[(l+k)\theta]$ no puede ser 0, debido a que si lo fuera, entonces de (5.15) se tendría que $\operatorname{sen}(l\theta) = 0$, y eso implicaría que l y k no pueden ser coprimos.

Las Ecs. (5.16) y (5.17) nos dan una forma de definir p en función de r. Por ello podemos optar por emplear la regla de la cadena para ver el signo de la derivada de p respecto de r. Así, de (5.17),

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = l r^{l-1} \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta]} + r^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta)}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r}$$

y de (5.16),

$$k r^{k-1}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}(l\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta)}\right).$$

Dado que $r^k > 0$, la Ec. (5.16) junto con el Lema 14 muestran que $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta > 0$. Ahora bien, si $p > 0$ entonces $\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}[(l+k)\theta] > 0$ y por el Lema 14 se concluye que $\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta(\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}[(l+k)\theta]) > 0$. De modo que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r > 0$.

De forma similar, si $p < 0$ tendremos $\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}[(l+k)\theta] < 0$ y por el Lema 14 se concluye que $\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta(\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}[(l+k)\theta]) < 0$. De modo que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r < 0$. Por esto podemos concluir que cuando $|p|$ crece las raíces complejas de (5.6) de mueven en dirección contraria a 0.

Para la Ec. (5.5) podemos obtener expresiones similares a las anteriores,

$$r^k = -\frac{\operatorname{sen}(l\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta]}, \tag{5.18}$$

$$p = -r^l \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta]}, \tag{5.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -l r^{l-1} \frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta]} - r^l \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}(k\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta)}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} \tag{5.20}$$

y

$$k r^{k-1}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}(l\theta)}{\operatorname{sen}[(l+k)\theta)}\right). \tag{5.21}$$

El procedimiento entonces es el mismo. Dado que $r^k > 0$ se sigue de (5.18) que $\operatorname{sen}(l\theta)/\operatorname{sen}[(l+k)\theta] < 0$. Entonces por el Lema 14 y (5.21) tenemos que $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta > 0$.

Si $p > 0$, por (5.19) se sabe que $\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}[(l+k)\theta] < 0$. Usando el Lema 14 concluimos que $\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta(\operatorname{sen}(k\theta)/\operatorname{sen}[(l+k)\theta]) < 0$. Entonces, por (5.13) obtenemos $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r > 0$.

Si $p < 0$ entonces $\text{sen}(k\theta)/\text{sen}[(l+k)\theta] > 0$ y, como consecuencia del Lema 14, $\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta(\text{sen}(k\theta)/\text{sen}[(l+k)\theta]) > 0$. De modo que $\mathrm{d}p/\mathrm{d}r < 0$. Así pues concluimos que si $|p|$ crece, las raíces complejas de (5.5) se alejan de 0. □

De las Ecs. (5.14), (5.15) se obtiene que el valor de p para el que una raíz de (5.6) está en el círculo $|z| = h$ está determinado por

$$h^k \cos[(+k)\theta] - \cos(l\theta) = -\frac{p}{h^l}$$

y

$$h^k \text{sen}[(l+k)\theta] - \text{sen}(l\theta) = 0.$$

Elevando al cuadrado y sumando estas dos ecuaciones llegamos a

$$p(h,\theta) = h^l(1 + h^{2k} - 2h^k \cos(k\theta))^{1/2}, \tag{5.22}$$

donde hemos aplicado que $1 + h^{2k} - 2h^k \cos(k\theta) \geq (1 - h^k)^2 \geq 0$ para justificar la raíz cuadrada. Y si procedemos del mismo modo pero con la Ec. (5.5) obtendremos

$$p^*(h,\theta) = h^l(1 + h^{2k} + 2h^k \cos(k\theta))^{1/2}. \tag{5.23}$$

Desde ahora trabajaremos con estas relaciones. Además, sea $S = \{\theta_1, \theta_2, ...\theta_m\}$ el conjunto de soluciones de

$$h^k = \frac{\text{sen}(l\theta)}{\text{sen}[(l+k)\theta]} \tag{5.24}$$

en el intervalo $(0,\pi)$, y S^* el conjunto de soluciones de

$$h^k = -\frac{\text{sen}(l\theta)}{\text{sen}[(l+k)\theta]} \tag{5.25}$$

en el intervalo $(0,\pi)$.

Lema 16. *Asumamos que, para $p = 0$, las raíces complejas de* (5.5) *y* (5.6) *están en el círculo $|z| = h$. Entonces, para $p \neq 0$, las raíces complejas de* (5.6) *satisfacen $|z| < h$ si y solo si*

$$0 < |p| < \min_{\theta \in S} p(h,\theta),$$

y las raíces complejas de (5.5) *también están en dicho círculo si y solo si satisfacen*

$$0 < |p| < \min_{\theta \in S^*} p^*(h, \theta).$$

Demostración. Como ya habíamos visto en el desarrollo para llegar hasta (5.22), $p(h\theta)$ es el valor para el cual una raíz de (5.6) está en el círculo $|z| = h$. De (5.16) también se sigue que el argumento de las raíces en el círculo $|z| = h$ satisface (5.24). Dado que las Ecs. (5.22) y (5.24) no cambian si cambiamos θ por $-\theta$ o $2\pi - \theta$, bastará con considerar las soluciones en $(0, \pi)$ en lugar de incluir hasta 2π.

Mientras $|p|$ crece, por el Lema 15 el valor absoluto de las raíces complejas crece también. Cuando cualquier raíz compleja llegue al círculo $|z| = h$ entonces su argumento será solución de (5.24), $S = \{\theta_1, \theta_2, ...\theta_m\}$, y el valor de p que corresponda en ese caso se podrá obtener de (5.22), $p(h, \theta_j)$ con $j = 1, 2, ..., m$. Se sigue del Lema 15 que el mínimo valor de $p(h, \theta_j)$ corresponde con la primera raíz que cruce el círculo $|z| = h$. Así que para garantizar que $|z| < h$ entonces debe cumplirse que $p < \min_{\theta \in S} p(h, \theta)$. De manera similar se procede para la Ec. (5.5). □

5.2. Demostración de los Teoremas de Dannan

Como el caso $k = 1$ se ha estudiado en el Capítulo 4 con el Teorema de Kuruklis, ahora nos centraremos en el caso $k > 1$.

Teorema 12. *Sea $k > 1$ un entero y l un entero positivo. Entonces, $h = 1/|a|^{1/k} > 1$ es una condición necesaria para que las raíces de* (5.5) *y* (5.6) *cumplan $|z| < h$.*

Demostración. Consideremos los Casos A, B, C y D de (5.5) y (5.6). Empecemos por esta última. Supongamos que $h \leq 1$, entones (5.6) tiene al menos dos raíces fuera del disco $|z| = h$. Esto se puede ver por que, si por ejemplo $p = 0$, al menos hay dos raíces con valor absoluto igual a 1 y por el Lema 15, el valor absoluto de estas raíces crece conforme lo hace $|p|$, por lo que estarían por fuera del disco $|z| = h \leq 1$. Además, cuando k es un entero par, el Lema 11 implica que para cualquier p hay una raíz real ξ tal que $|\xi| \geq 1$, por lo que esta raíz estaría fuera del disco $|z| = h \leq 1$.

Siguiendo con la Ec. (5.5), el Lema 13 nos dice que hay al menos dos raíces complejas en el círculo $|z| = 1$ cuando $p = 0$. Y con el Lema 15 sabemos que estas raíces crecerán conforme lo haga $|p|$ por lo que también saldrán fuera del disco $|z| = h \leq 1$.

Por estos motivos, $h > 1$ es condición necesaria para que todas las raíces de (5.5) y (5.6) estén dentro del disco $|z| < h$. □

Teorema 13. *Todas las raíces de* (5.6) *están en el disco* $|z| = h$ *si y solo si* $h > 1$ *y*

I)

$$h^l(1 - h^k) < p < \min_{\theta \in S} p(h,\theta) \tag{5.26}$$

para el Caso A.

II)

$$-h^l(h^k - 1) < p < h^l(h^k - 1) \tag{5.27}$$

para el Caso B.

III)

$$h^l(1 - h^k) < p < h^l(1 + h^k) \tag{5.28}$$

para el Caso C.

Demostración. En primer lugar, la condición $h > 1$ está asegurada por el Teorema 12.

Para probar el punto I) tenemos que ver que del Lema 10 punto III)-c) se dice que para que las raíces reales μ satisfagan $|\mu| < h$ para $h > 1$ se debe tener

$h^l(1-h^k) < p < p_t$, donde $p_t = \mu_t^l(1-\mu_t^k)$ y $\mu_t = (l/(l+k))^{1/k}$. Del Lema 16 sabemos que si las raíces complejas satisfacen $|z| < h$ para $h > 1$ entonces $p \neq 0$ debe cumplir $-\text{mín}_{\theta\in S}\, p(h,\theta) < p < \text{mín}_{\theta\in S}\, p(h,\theta)$. Con estas dos condiciones no queda más remedio que asumir que si queremos que todas las raíces de (5.6) estén dentro del círculo $|z| = h$ con $h > 1$ debe cumplirse necesariamente que

$$\text{máx}\{h^l - h^{l+k}, -\min_{\theta\in S} p(h,\theta)\} < p < \min_{\theta\in S} p(h,\theta).$$

Ahora bien, sabemos que $h^{l+k} - h^l \leq \text{mín}_{\theta\in S}\, p(h,\theta) \leq p(h,\theta)$, por lo que la condición (5.26) está demostrada.

En cuanto al punto II), por el Lema 11 sabemos que las raíces reales de (5.6) están dentro del disco $|z| = h > 1$ si se cumple (5.27). Pero no es suficiente, necesitamos asegurar que las raíces reales también estarán dentro del disco $|z| = h > 1$, para eso necesitaremos el Lema 16, que, al igual que en caso anterior exige $-\text{mín}_{\theta\in S}\, p(h,\theta) < p < \text{mín}_{\theta\in S}\, p(h,\theta)$. Por tanto, para que todas las raíces estén dentro de $|z| = h > 1$ necesariamente

$$\text{máx}\{h^l - h^{l+k}, -\min_{\theta\in S} p(h,\theta)\} < p < \text{mín}\{h^{l+k} - h^l, \min_{\theta\in S} p(h,\theta)\}.$$

Como $h^{l+k} - h^l \leq \text{mín}_{\theta\in S}\, p(h,\theta) \leq p(h,\theta)$, podemos recuperar la condición (5.27) que buscábamos.

Para la prueba del punto III) hay que proceder de manera similar. En este caso hay que atender a los Lemas 12 y 16 para obtener

$$\text{máx}\{h^l - h^{l+k}, -\min_{\theta\in S} p(h,\theta)\} < p < \text{mín}\{h^{l+k} + h^l, \min_{\theta\in S} p(h,\theta)\}.$$

Y como $h^{l+k} - h^l \leq \text{mín}_{\theta\in S}\, p(h,\theta) \leq p(h,\theta) \leq h^l + h^{l+k}$ se tendría la condición (5.28). □

El siguiente teorema es el homólogo del anterior pero con la Ec. (5.5).

Teorema 14. *Sea $l \geq 1$ un entero impar y k un entero par. Todas las raíces de* (5.5) *están dentro del disco $|z| = h$ si y solo si $h > 1$ y*

$$|p| < \min_{\theta \in S^*} p^*(h, \theta).$$

Demostración. La necesidad de que $h > 1$ está garantizada por el Teorema 12. Por otro lado, para asegurar que las raíces reales son interiores al círculo $|z| = h > 1$ debemos asegurar que se cumple la condición del Lema 13, $|p| < h^{l+k} + h^l$. Y para asegurar que las raíces complejas están dentro del círculo $|z| = h > 1$ debemos asegurar la condición del Lema 16, $0 < |p| < \min_{\theta \in S^*} p^*(h, \theta)$. Por tanto, para asegurar que todas las raíces permanecen dentro del círculo necesitamos que se cumpla $|p| < \min\{h^{l+k} + h^l, \min_{\theta \in S^*} p^*(h, \theta)\}$. Como $\min_{\theta \in S^*} p^*(h, \theta) \leq p^*(h, \theta) \leq h^l + h^{l+k}$, entonces se cumple la condición buscada y queda demostrado. □

Finalmente, llegados a este punto lo último que queda es reformular los Teoremas 13 y 14 para que sean válidos para la Ec. (5.2). Para ello necesitaremos emplear las siguientes relaciones

$$h = \frac{1}{|a|^{1/k}}, \quad p(h, \theta) = \frac{1}{|a|^{(k+l)/k}} (1 + a^2 - 2|a| \cos(k\theta))^{1/2}$$

y

$$p = \frac{b}{|a|^{(k+l)/k}}, \quad p^*(h, \theta) = \frac{1}{a^{(k+l)/k}} (1 + a^2 + 2a \cos(k\theta))^{1/2}. \tag{5.29}$$

Los teoremas que nos van a quedar entonces serán tres, uno por cada caso A, B y C, teniendo en cuenta que el caso D ahora se puede incluir junto con el caso B. Con estos teoremas hemos asegurado que las raíces del polinomio característico Respectivamente, estos teoremas son los que queríamos demostrar, por lo que aquí finaliza la prueba.

Capítulo 6

Teoremas de Čermák-Jánský-Kundrát

Los siguientes dos teoremas están desarrollados por Čermák, Jánský y Kundrát en su artículo [2]. La ecuación estudiada por ellos es

$$x_{n+1} + \alpha x_n + \beta x_{n-k+1} + \gamma x_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{6.1}$$

de orden $k+1$, que supone un paso más en el desarrollo de este trabajo al incorporar cuatro términos en lugar de tres como hasta ahora. Los casos de Levin-May y Kuruklis, anteriormente vistos, son casos particulares de esta ecuación, ya que cualquiera de ellos se puede expresar mediante adecuados coeficientes α, β, γ y k.

Para obtener condiciones equivalentes de la estabilidad asintótica de la Ec. (6.1), partiremos de su ecuación característica,

$$\lambda^{k+1} + \alpha\lambda^k + \beta\lambda + \gamma = 0, \tag{6.2}$$

e intentaremos asegurar que sus raíces están dentro del círculo unidad. Lo interesante de esta prueba es que parte del criterio de Schur-Cohn que ya se ha estudiado en secciones anteriores.

Los teoremas propuestos son dos, atendiendo a la paridad de k.

Teorema 15. *Sea α, β y γ constantes reales y k un entero positivo impar. Entonces,* (6.1) *es asintóticamente estable si y solo si*

$$|\alpha+\beta| < 1+\gamma,$$

o bien

$$\gamma - 1 < |\alpha-\beta| \leq 1-\gamma,$$

o bien

$$|\alpha-\beta| > |1-\gamma|, \quad k < \frac{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1)/(2|\alpha\gamma-\beta|)\big)}{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1)/(2|\alpha-\beta\gamma|)\big)}.$$

Teorema 16. *Sea α, β y γ constantes reales y k un entero positivo impar. Entonces,* (6.1) *es asintóticamente estable si y solo si*

$$|\alpha+\gamma| < 1+\beta,$$

o bien

$$\beta - 1 < |\alpha-\gamma| \leq 1-\beta,$$

o bien

$$|\alpha-\gamma| > |1-\beta|, \quad k < \frac{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1)/(2|\alpha\gamma-\beta|)\big)}{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1)/(2|\alpha-\beta\gamma|)\big)}.$$

6.1. Resultados previos

Empezaremos reformulando el criterio de Schur-Cohn para (6.2). Este criterio se dio ya de forma general en el Teorema 2.

Teorema 17. *Sea α, β, γ reales arbitrarios y $k \geq 1$ un entero. Entonces, las raíces del polinomio* (6.2) *caen dentro del círculo unidad si y solo si se cumplen las siguientes condiciones:*

I) $1+\alpha+\beta+\gamma>0$;

II) $1-\alpha+(-1)^k\beta+(-1)^{k+1}\gamma>0$;

III) *las matrices* $k\times k$

$$M_k^{\pm}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \alpha & 1 & \ddots & & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0\\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma\\ 0 & & \iddots & \gamma & \beta\\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0\\ 0 & \gamma & \iddots & \iddots & \vdots\\ \gamma & \beta & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

tienen interiores positivos, o lo que es lo mismo, los determinantes de los interiores son positivos.

Nuestro objetivo es transformar estas tres condiciones en un criterio más explícito. Para ello intentaremos simplificar un poco la condición III). Denotamos por $d_m^{\pm}=\det(M_m^{\pm})$, con $m=1,2,...,k$. Asumamos en lo siguiente que $k\geq 5$, el caso $k<5$ se verá después, podemos expresar $d_{m+4}^{\pm}$ como

$$d_{m+4}^{\pm}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \pm\gamma\\ \alpha & \multicolumn{3}{c}{\multirow{3}{*}{\boxed{\quad M_{m+2}^{\pm}\quad}}} & \pm\beta\\ \vdots & & & & \vdots\\ 0 & & & & 0\\ \pm\gamma & \pm\beta & \dots & \alpha & 1 \end{vmatrix}$$

y efectuar las siguientes operaciones:

1. La primera fila se multiplica por $\pm(\alpha\beta-\gamma)$ y se suma a la última fila.

2. la segunda fila se multiplica por $\mp\beta$ y se suma a la última fila.

3. La primera columna se multiplica por $\mp\gamma$ y se suma a la última columna.

4. La segunda columna se multiplica por $\mp\beta$ y se suma a la última columna.

5. La penúltima columna se multiplica por α y se suma a la última columna.

Así obtenemos

$$d_{m+4}^{\pm} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{M_{m+2}^{\pm}} & & 0 \\ 0 & & & & \alpha-\beta\gamma \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\beta\gamma & 1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2 \end{vmatrix}$$

Utilizando el desarrollo de Laplace mediante la última fila o la última columna para resolver el determinante podemos escribir

$$d_{m+4}^{\pm} = (1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)d_{m+2}^{\pm} - (\alpha-\beta\gamma)^2 d_m^{\pm},$$

es decir

$$d_{m+4}^{\pm} - (1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)d_{m+2}^{\pm} + (a-\beta\gamma)^2 d_m^{\pm} = 0 \quad m = 1,2,\dots,k-4. \tag{6.4}$$

La ecuación obtenida es una ecuación en diferencias lineal de orden cuatro. Obsérvese que hasta ahora ha sido irrelevante el signo escogido en $M_k^{\pm}$, por lo que las soluciones d_m^{+} y d_m^{-} cumplen por igual la ecuación en diferencias. Únicamente es importante tener en cuenta las condiciones iniciales $d_1^{+},\dots,d_4^{+}$ o $d_1^{-},\dots,d_4^{-}$ que obtendremos de (6.3).

La condición III) del Teorema 17 sobre la positividad de (6.3) se debe cumplir independientemente de que sea d_m^{+} o d_m^{-}, y también debe cumplirse independientemente de la paridad de m y k y de cuál de los dos sea mayor. Para verlo vamos a considerar dos casos según la paridad de k. Empecemos asumiendo que k es impar, proponemos el cambio

$$z_l = d_m^{\pm}, \quad l = \frac{m+1}{2}, \quad m = 1,3,\dots,k.$$

Con esto podemos convertir (6.4) en la ecuación en diferencias de segundo orden

$$z_{l+2}-(1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)z_{l+1}+(\alpha-\beta\gamma)^2 z_l=0,\quad l=1,2,\ldots,\frac{k-3}{2}. \tag{6.5}$$

Con esta notación podemos obtener dos grupos de condiciones iniciales según el signo que se escoja en (6.3). En el caso de haber escogido sumar las matrices en (6.3) tendremos

$$\begin{aligned} z_1 \to l=1 &\Rightarrow m=1,\\ M_1^+ &= (1+\gamma),\\ z_1=d_1^+=|M_1^+| &= 1+\gamma. \end{aligned}$$

Calculamos z_2 por el mismo procedimiento,

$$\begin{aligned} z_2 \to l=2 &\Rightarrow m=3,\\ M_3^+ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \gamma\\ \alpha & 1+\gamma & \beta\\ \gamma & \beta+\alpha & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= d_3^+=|M_3^+|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \gamma\\ \alpha & 1+\gamma & \beta\\ \gamma & \beta+\alpha & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+\gamma & \beta\\ \beta+\alpha & 1\end{vmatrix}+\gamma\begin{vmatrix}\alpha & 1+\gamma\\ \gamma & \beta+\alpha\end{vmatrix}\\ &= 1+\gamma-\beta(\beta+\gamma)+\gamma[\alpha(\beta+\alpha)-\gamma(1+\gamma)]\\ &= (1-\gamma^2)z_1-\beta(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\beta+\alpha)\\ &= (1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)z_1-\beta(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\beta+\alpha)-(1+\gamma)(\alpha^2-\beta^2)\\ &= (1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)z_1+\beta\alpha\gamma-\alpha\beta-\alpha^2+\gamma\beta^2\\ &= (1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)z_1-(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta), \end{aligned}$$

en donde hemos tenido en cuenta que $z_1=1+\gamma$. Por tanto, las condiciones iniciales eligiendo + en (6.3) son

$$z_1=1+\gamma,\quad z_2=(1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)z_1-(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta). \tag{6.6}$$

Procediendo de la misma manera encontramos que si elegimos - en (6.3) tendremos

$$z_1 = 1 - \gamma, \quad z_2 = (1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) z_1 - (\alpha - \beta\gamma)(\alpha - \beta). \tag{6.7}$$

De forma similar, si k es par utilizaremos el cambio

$$z_l = d_m^{\pm}, \quad l = \frac{m}{2}, \quad m = 2, 4, \ldots, k.$$

Y la ecuación en diferencias que obtendremos es

$$z_{l+2} - (1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) z_{l+1} + (\alpha - \beta\gamma)^2 z_l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, \frac{k-4}{2}. \tag{6.8}$$

Para la que podemos encontrar las condiciones iniciales siguientes. En el caso en que elijamos + en (6.3) tendremos

$$z_1 = 1 - \alpha\gamma + \beta - \gamma^2, \quad z_2 = (1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) z_1 - (\alpha - \beta\gamma)^2. \tag{6.9}$$

Y cuando elijamos - en (6.3) será

$$z_1 = 1 + \alpha\gamma - \beta - \gamma^2, \quad z_2 = (1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) z_1 - (\alpha - \beta\gamma)^2. \tag{6.10}$$

A partir de estas conclusiones, en el Teorema 17 la condición III) se transforma en averiguar si los valores de los determinantes z_l son positivos, mientras que II) será $1 - \alpha - \beta + \gamma > 0$ o $1 - \alpha + \beta - \gamma > 0$ dependiendo de la paridad de k. Por ello, podemos reformular el Teorema 17 en los dos siguientes lemas.

Lema 17. *Sea α, β y γ constantes reales y sea k un entero positivo impar. Todas las raíces de* (6.2) *se encuentran dentro del disco unidad si y solo si*

$$1 + \alpha + \beta + \gamma > 0, \ \ 1 - \alpha - \beta + \gamma > 0 \tag{6.11}$$

y las soluciones z_l de la Ec. (6.5)*, con condiciones iniciales* (6.6) *o bien con condiciones iniciales* (6.7)*, deben ser positivas para todo $l = 1, 2, \ldots, (k+2)/2$.*

Lema 18. *Sea α, β y γ constantes reales y sea k un entero positivo par. Todas las raíces de* (6.2) *se encuentran dentro del disco unidad si y solo si*

$$1+\alpha+\beta+\gamma>0, \quad 1-\alpha+\beta-\gamma>0 \tag{6.12}$$

y las soluciones z_l de la Ec. (6.8)*, con condiciones iniciales* (6.9) *o bien con condiciones iniciales* (6.10)*, deben ser positivas para todo $l = 1, 2, \ldots, k/2$.*

Observación 8. Si $k < 5$, entonces el problema de estudiar la positividad de (6.3) se reduce a discutir el signo de las condiciones iniciales (6.6),(6.7),(6.9) y (6.10). Ya que, recordemos, se corresponden exactamente con los determinantes de las matrices $M_i^{\pm}$ con $i = 1, 2, 3, 4$.

6.2. Demostración de los teoremas

La prueba de los Teoremas 15 y 16 consiste en analizar los casos en los que las soluciones z_l son positivas según las condiciones dadas por los Lemas 17 y 18, ya que en ellos se asegura que solo así tendremos la estabilidad asintótica que buscamos en (6.4). Además también tendremos en cuenta que en dichos lemas también están las condiciones (6.11) y (6.12), que deben cumplirse para asegurar dicha estabilidad.

Así pues, como se trata de una discusión del signo de z_l, lo que debemos hacer es analizar las ecuaciones en diferencias (6.5) y (6.8), de las que es solución. Empecemos por su polinomio característico, que es el mismo en ambas ecuaciones, ya que ambas parten de (6.4),

$$Q(\mu) = \mu^2 - (1+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)\mu + (\alpha-\beta\gamma)^2.$$

Es trivial comprobar que el polinomio $Q(\mu)$ tendrá raíces

$$\mu_{\pm} = \frac{L \pm D^{1/2}}{2},$$

donde

$$L = 1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2, \quad D = L^2 - 4(\alpha - \beta\gamma)^2. \tag{6.13}$$

Para el análisis que va a seguir, será útil considerar las siguientes expresiones equivalentes de L y D, como puede comprobarse sin dificultad,

$$L = \frac{1}{2}[(1+\alpha+\beta+\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma)+(1-\alpha+\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)], \tag{6.14}$$

$$D = (1+\alpha+\beta+\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma). \tag{6.15}$$

6.2.1. Análisis de los signos de z_l

El análisis del signo de z_l se hará según el signo de D y la paridad de k. Cuando k sea impar asumiremos siempre se cumple la condición (6.11) del Lema 17, y lo mismo haremos cuando k sea impar con (6.12). Así pues, tendremos tres casos, según $D > 0$, $D = 0$ y $D < 0$, cada uno con sus respectivos dos subcasos según sea k par o impar.

Caso 1. Sea $D > 0$. Primero, asumamos que $\alpha - \beta\gamma \neq 0$, entonces se tendría, por (6.13), que $L^2 > D$. La solución general de (6.5) y (6.8) sería entonces, como se comentó en el Capítulo 1, una combinación lineal de las dos $\mu_\pm$ calculadas anterioremente,

$$z_l = c_1\left(\frac{L + D^{1/2}}{2}\right)^l + c_2\left(\frac{L - D[1/2}{2}\right)^l. \tag{6.16}$$

Y las constantes c_1 y c_2 las podemos calcular fácilmente imponiendo las condiciones iniciales z_1 y z_2, que corresponden a los valores $l = 1$ y $l = 2$, respectivamente, en z_l. Para que el resultado sea independiente del grupo de condiciones iniciales que escojamos de las cuatro posibles, podemos dejarlo con z_1 y z_2 indicadas. Obtendríamos

$$c_1 = \frac{(D^{1/2} - L)z_1 + 2z_2}{D^{1/2}(l + D^{1/2})}, \quad c_2 = \frac{(l + D^{1/2})z_1 - 2z_2}{D^{1/2}(l - D^{1/2})}. \tag{6.17}$$

Subcaso 1. Sea k impar, con $\alpha-\beta\gamma \neq 0$, por lo que consideraremos que (6.11) se cumple. Entonces, por (6.15), se debe cumplir que

$$(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma) > 0.$$

Podrían ser ambos términos negativos, en cuyo sería necesario que $\gamma > 1$. Si esto es así, entonces de los dos grupos de condiciones iniciales con k impar que teníamos, (6.6) y (6.7), en (6.7) tendremos que $z_1 < 0$. Esto supone que no todas las raíces z_l de (6.5) serían negativas, por lo que, por el Lema 17, con k negativo no tendríamos todas las raíces de (6.2) dentro del círculo unidad. Descartamos, pues, esta posibilidad.

La otra opción es que ambos términos sean positivos,

$$(1+\alpha-\beta-\gamma) > 0, \quad (1-\alpha+\beta-\gamma) > 0, \tag{6.18}$$

en ese caso tendrá que ser $|\gamma| < 1$ para cumplir con (6.11). De esta manera ya no se tiene que $z_1 < 0$ ni para (6.6) ni para (6.7). Además, $L > D^{1/2}$ y usando (6.6) en (6.17) podemos calcular c_1 fácilmente,

$$c_1 = \frac{1+\gamma}{l+D^{1/2}} + \frac{1-\gamma}{L+D^{1/2}} \left(\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)} \right)^{1/2} > 0.$$

De forma similar, usando (6.7) en (6.17), tendremos

$$c_1 = \frac{1-\gamma}{l+D^{1/2}} + \frac{1+\gamma}{L+D^{1/2}} \left(\frac{(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)} \right)^{1/2} > 0.$$

Siendo esto así, por (6.16) sabemos que las soluciones z_l de (6.5) con condiciones iniciales tanto (6.6) como (6.7), tienen soluciones positivas para todo $l = 1, 2, \ldots, (k+2)/2$ dado que (6.18) se cumple.

Subcaso 2. Sea k par, con $\alpha - \beta\gamma \neq 0$, por lo que consideramos que (6.12) se cumple. De nuevo como en el subcaso 1, por (6.15) sabemos que

$$(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma) > 0$$

debe cumplirse. Si ambos términos son negativos, sabemos que $L < 0$ por (6.14). Podemos ver que esto nos lleva a que la condición inicial z_1 dada en (6.10) y (6.9) es negativa. Para ello primero consideremos la forma alternativa de L,

$$L = \frac{(1-\alpha\gamma+\beta-\gamma^2)[(1-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2]+(1+\alpha\gamma-\beta-\gamma^2)[(1+\beta)^2+(\alpha+\gamma)^2]}{2(1+\gamma)^2}.$$

Con ella vemos que si $L < 0$ entonces $1-\alpha\gamma+\beta-\gamma^2 < 0$ o $1+\alpha\gamma-\beta-\gamma^2 < 0$. Efectivamente, con el uso de (6.9) o (6.10), tendremos que en cualquier caso $z_1 < 0$. Por tanto esta opción, $1+\alpha-\beta-\gamma < 0$ y $1-\alpha+\beta-\gamma < 0$, debemos descartarla para poder cumplir con el Lema 18.

Así pues,

$$(1+\alpha-\beta-\gamma) > 0, \quad (1-\alpha-\beta+\gamma) > 0. \tag{6.19}$$

Por tanto $L > D^{1/2}$ porque $d > 0$ y $D = L^2 - 4(\alpha-\beta\gamma)^2$. Además,

$$2z_1 = L + (1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma) > 0 \tag{6.20}$$

para el valor de z_1 dado por (6.9) y

$$2z_1 = L + (1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma) > 0 \tag{6.21}$$

para el valor z_1 dado por (6.10). Sustituyendo (6.9) y (6.10) en (6.17) obtenemos, respectivamente,

$$c_1 = 1 + \left(\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right)^{1/2} > 0$$

y

$$c_1 = 1 + \left(\frac{(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}\right)^{1/2} > 0.$$

Así, las soluciones z_l de (6.8) con valores iniciales (6.9) o (6.10) son siempre positivas para $l = 1, 2, \ldots, k/2$ dado que (6.19) se verifica.

Subcaso 3. Asumiendo ahora que $\alpha - \beta\gamma = 0$ y que k es impar, en la Ec. (6.5) tendremos

$$z_{l+1} - Lz_l = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, \frac{k-1}{2}.$$

Con los mismos argumentos que en el Subcaso 1, podemos comprobar que $z_1 > 0$ en (6.6) y (6.7) siempre que (6.18) se cumpla. Es más, (6.18) implica que $L > 0$. Por ello podemos ver, con un procedimiento similar a los anteriores, que las soluciones z_l de (6.5) con valores iniciales (6.6) o (6.7) son positivas para todo $l = 1, 2, \ldots, (k+1)/2$.

Subcaso 4. Si $\alpha - \beta\gamma = 0$ y k es par, por los mismos procedimientos que los seguidos en los subcasos anteriores, se comprueba que las soluciones z_l de (6.8) con valores iniciales (6.9) o (6.10) son positivas para todo $l = 1, 2, \ldots, (k+1)/2$ si se cumple (6.19).

Caso 2. Sea $D = 0$. Entonces $L^2 = 4(\alpha - \beta\gamma)^2$ y además $L \neq 0$, porque de no ser así (6.5) y (6.8) solamente tienen a la solución trivial nula como solución. Como la raíz de la ecuación característica de (6.5) y (6.8), $L/2$, ahora es única y doble, tal y como se vio en el Capítulo 1, la solución general será entonces de la forma $z_l = c_1(L/2)^l + c_2 l(L/2)^l$, o bien,

$$z_l = \left(\frac{L}{2}\right)^l (c_1 + c_2 l), \tag{6.22}$$

donde la relación entre c_1, c_2 con z_1 y z_2 se puede dar, al sustituir $l = 1$ y $l = 2$ en z_l y despejar c_1 y c_2 en el sistema de ecuaciones que se genera, por

$$c_1 = -\frac{4}{L^2}(z_2 - Lz_1), \quad c_2 = \frac{2}{L^2}(2z_2 - Lz_1). \tag{6.23}$$

Subcaso 1. Sea k impar, por lo que (6.11) se cumple. Entonces (6.15) nos conduce a

$$(1 + \alpha - \beta - \gamma)(1 - \alpha + \beta - \gamma) = 0.$$

Si ambos términos son cero, entonces $\gamma = 1$ y en (6.7) tendríamos $z_1 = 0$. Si solo uno de los términos es cero y el término no nulo es negativo entonces debe ser

$\gamma > 1$ (por ejemplo, si $1+\alpha-\beta-\gamma=0$ y $1-\alpha+-\beta-\gamma<0$, entonces sumando se llega a $2-2\gamma<0$, esto es, $\gamma>1$; el otro caso es similar), por lo que $z_1<0$ en (6.7). Estas dos opciones quedan descartadas, por el Lema 17, como candidatas para que las raíces de (6.2) estén dentro del círculo unidad.

Así pues, consideremos las otras opciones posibles, que consisten en que un término es nulo y el otro es no nulo positivo. Por tanto tendremos

$$1+\alpha-\beta-\gamma=0, \quad 1-\alpha+\beta-\gamma>0 \tag{6.24}$$

o

$$1+\alpha-\beta-\gamma>0, \quad 1-\alpha+\beta-\gamma=0. \tag{6.25}$$

Si esto es así, se cumple que $|\gamma|<1$ debido a que por (6.24) y (6.26) tenemos que $\gamma<1$, mientras que por (6.11) sabemos que $\gamma>-1$. Entonces, $z_1>0$ tanto en (6.6) como en (6.7). Considerando (6.23) junto con (6.6) tendremos

$$c_2 = \frac{(1-\gamma)(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{2(\alpha-\beta\gamma)^2} > 0.$$

De forma similar con (6.23) junto con (6.7) tendremos

$$c_2 = \frac{(1+\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}{2(\alpha-\beta\gamma)^2} = 0.$$

Entonces, utilizando (6.22) con estas dos expresiones y $z_1>0$ sabemos que todas las soluciones z_l de (6.5) son positivas para todo $l=1,2,\ldots,(k+1)/2$ siempre que (6.24) o (6.25) se cumplan.

Subcaso 2. Sea k par, (6.12) se cumple. Entonces, por (6.15) debe cumplirse

$$(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)=0.$$

Si ambos términos son cero, entonces $L=0$ debido a (6.14). Si uno de los dos términos fuese cero y el otro fuese negativo, entonces $L<0$. De la misma manera que en el Caso 1 Subcaso 2, obtenemos $1-\alpha\gamma+\beta-\gamma^2\le 0$ o $1+\alpha\gamma-\beta-\gamma^2\le 0$, por lo que $z_1 \leq 0$ usando (6.9) o (6.10). Siendo así, sabemos que por el Lema 18 no es lo que buscamos.

Quedan entonces las posibilidades

$$1+\alpha-\beta-\gamma = 0, \quad 1-\alpha-\beta+\gamma > 0 \tag{6.26}$$

y

$$1+\alpha-\beta-\gamma > 0, \quad 1-\alpha-\beta+\gamma = 0. \tag{6.27}$$

Con ambas tendremos $L > 0$ según (6.14). Entonces, según (6.20) y (6.21) tendremos $z_1 > 0$. Además, de (6.23) junto con (6.9) tenemos

$$c_2 = \frac{(1+\alpha\gamma-\beta-\gamma^2)(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}{2(\alpha-\beta\gamma)^2} > 0. \tag{6.28}$$

E igualmente con (6.23) y (6.10) se tiene

$$c_2 = \frac{(1-\alpha\gamma+\beta-\gamma^2)(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{2(\alpha-\beta\gamma)^2} = 0. \tag{6.29}$$

Por todo ello, las soluciones z_l de (6.8) con valores iniciales (6.9) o (6.10) son todas positivas si $l = 1, 2, \ldots, k/2$ si se cumple (6.26) o (6.27).

Caso 3. Sea $D < 0$. En ese caso, la ecuación característica de (6.5) y (6.8) tiene raíces complejas conjugadas $L/2 \pm i\sqrt{-D}/2$, de módulo $\rho = \sqrt{(L^2-D)/4}$; por tanto, la solución general de (6.5) y (6.8) es

$$z_l = \left(\frac{L^2-D}{4}\right)^{l/2} [c_1 \cos(wl) + c_2 \operatorname{sen}(wl)], \quad w = \arccos\left(\frac{L}{(L^2-D)^{1/2}}\right) \tag{6.30}$$

con

$$c_1 = \frac{4Lz_1 - 4z_2}{L^2-D}, \quad c_2 = \frac{2z_1 - Lc_1}{(-D)^{1/2}}. \tag{6.31}$$

En principio, al calcular w pondríamos $w = \arctan(\sqrt{-D}/L)$, pero al tratarse de parejas de raíces complejas se puede tomar este valor w en $(0,\pi)$, con $\operatorname{sen}(w) \geq 0$, y se puede comprobar sin dificultar que si $\tan(w) = \sqrt{-D}/L$, entonces $\cos(w) = L/(L^2-D)^{1/2}$.

Subcaso 1. Sea k impar, por lo que (6.11) se cumplen. Entonces, por (6.15) debe cumplirse que

$$(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)<0. \tag{6.32}$$

Dado que $w>0$ y $(L^2-D)>=$, téngase en cuenta que z_l será positiva para todo $l=1,2,...,(k+1)/2$ si y solo si

$$g(s)=c_1\cos\left(w\frac{s+1}{2}\right)+c_2\operatorname{sen}\left(w\frac{s+1}{2}\right)$$

es positivo para todo $1\le s\le k$. Donde hemos hecho el cambio $l=\frac{s+1}{2}$ por facilitar los cálculos siguientes.

Aún podemos simplificar más $g(s)$. Desarrollamos el seno y el coseno del ángulo suma $(ws/2)+(w/2)$ y agrupamos los términos que queden multiplicando a $\cos(ws/2)$ y $\operatorname{sen}(ws/2)$ llamándolos, respectivamente, $\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_2$. Esto es

$$\tilde{c}_1=c_1\cos\left(\frac{w}{2}\right)+c_2\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right),\quad \tilde{c}_2=-c_1\operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)+c_2\cos\left(\frac{w}{2}\right).$$

Véase que tanto $\cos(w/2)$ como $\operatorname{sen}(w/2)$ se pueden desarrollar para dejarlas en función de $\cos w$ exclusivamente. Si lo hacemos y tenemos en cuenta la expresión de w dada en (6.30) y que $(L^2-D)^{1/2}=2|\alpha-\beta\gamma|$ según (6.13), nos queda por la fórmula del ángulo mitad,

$$\cos\left(\frac{w}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2|\alpha-\beta\gamma|+L}{|\alpha-\beta\gamma|}\right)^{1/2},\quad \operatorname{sen}\left(\frac{w}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2|\alpha-\beta\gamma|-L}{|\alpha-\beta\gamma|}\right)^{1/2}.$$

Así pues, podemos escribir

$$g(s)=\tilde{c}_1\cos\left(\frac{ws}{2}\right)+\tilde{c}_2\operatorname{sen}\left(\frac{ws}{2}\right).$$

Retomando (6.32), podemos empezar asumiendo

$$1+\alpha-\beta-\gamma<0,\quad 1-\alpha+\beta-\gamma>0. \tag{6.33}$$

Si tenemos en cuenta que

$$(1+\alpha+\beta+\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma)-(1-\alpha+\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)=4(\alpha-\beta\gamma) \quad (6.34)$$

y

$$(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)-(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)=4(\alpha\gamma-\beta), \quad (6.35)$$

entonces, como además $1+\alpha+\beta+\gamma>0$ y $1-\alpha-\beta+\gamma>=$, se puede ver que (6.33) implica $\alpha-\beta\gamma<0$ y $\alpha\gamma-\beta<0$.

Si aplicamos las condiciones iniciales (6.6) a $z_l=((L^2-D)/4)^{1/2}g(s)$ para calcular $\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_2$ tendremos

$$\tilde{c}_1=\left(\frac{1-\alpha-\beta+\gamma}{-(\alpha-\beta\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right)^{1/2}, \quad \tilde{c}_2=\left(\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{(\alpha-\beta\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma)}\right)^{1/2}.$$

Entonces, $g(0)=\tilde{c}_1>0$ y $g(\pi/w)=\tilde{c}_2>0$. Es decir, $g(s)>0$ para todo $0\le s\le \pi/w$. Si por contra utilizamos las condiciones iniciales (6.7) lo que tenemos es

$$\tilde{c}_1=\left(\frac{1-\alpha+\beta-\gamma}{-(\alpha-\beta\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}\right)^{1/2}, \quad \tilde{c}_2=-\left(\frac{1+\alpha-\beta-\gamma}{(\alpha-\beta\gamma)(1+\alpha+\beta+\gamma)}\right)^{1/2}.$$

Y en este caso, $g(0)=\tilde{c}_1>0$ y $g(\pi/w)=\tilde{c}_2<0$, por tanto habrá un valor s^* tal que $g(s^*)=0$ en $(0,\pi/w)$. Este valor de $s*$ es fácil de encontrar, basta con resolver $g(s^*)=0$ y tener en cuenta que hemos encontrado expresiones alternativas para $\cos(w/2)$, $\mathrm{sen}(w/2)$ y $\alpha-\beta\gamma$ que nos permiten simplificar la expresión. Finalmente obtendremos

$$s^*=\frac{2}{w}\operatorname{arccot}\left(\frac{-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right)^{1/2}. \quad (6.36)$$

Si ahora lo que asumimos de (6.32) es

$$1+\alpha-\beta-\gamma>0, \quad 1-\alpha+\beta-\gamma<0, \quad (6.37)$$

entonces $\alpha-\beta\gamma>0$ y $\alpha\gamma-\beta>0$ por el uso de (6.34) y (6.35).

Imponiendo las condiciones iniciales (6.6) y (6.7) en $z_l = ((L^2 - D)/4)^{1/2} g(s)$, obtendremos los valores de $\tilde{c}_1$ y $\tilde{c}_2$ siguientes:

$$\tilde{c}_1 = \left(\frac{1+\alpha+\beta+\gamma}{(\alpha-\beta\gamma)(1+\alpha-\beta-\gamma)}\right)^{1/2}, \quad \tilde{c}_2 = \left(\frac{1-\alpha-\beta+\gamma}{-(\alpha-\beta\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right)^{1/2}$$

y

$$\tilde{c}_1 = \left(\frac{1+\alpha-\beta-\gamma}{(\alpha-\beta\gamma)(1+\alpha+\beta+\gamma)}\right)^{1/2}, \quad \tilde{c}_2 = -\left(\frac{1-\alpha+\beta-\gamma}{-(\alpha-\beta\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}\right)^{1/2},$$

respectivamente.

Como el mismo análisis que habíamos hecho anteriormente, podemos ver que cuando se asuman las condiciones (6.7) habrá un valor s^{**} para el que $g(s^{**}) = 0$. Esta raíz es

$$s^{**} = \frac{2}{w}\operatorname{arccot}\left(\frac{-(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}{(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}\right)^{1/2}. \tag{6.38}$$

Para establecer una conexión entre los dos criterios de signos (6.33) y (6.37), vamos a probar que s^* y s^{**} se pueden escribir de manera conjunta como

$$s^* = s^{**} = \frac{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1)/(2|\alpha\gamma-\beta|)\big)}{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1)/(2|\alpha-\beta\gamma|)\big)}. \tag{6.39}$$

Para demostrar esto empecemos con llegar a esta fórmula desde s^*. Lo que vamos a necesitar es hacer uso de las igualdades trigonométricas siguientes:

$$\operatorname{arccot} a = \frac{\pi}{2} - \arctan a, \tag{6.40}$$

$$2\arctan\left(\frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a}\right) = \arccos a, \quad \text{para } -1 < a \le 1, \tag{6.41}$$

y

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a. \tag{6.42}$$

Evidentemente, de (6.36) si aplicamos (6.40) llegaremos a

$$s^* = \frac{1}{w}\left(\pi - 2\arctan\left(\frac{-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right)^{1/2}\right).$$

Antes de poder aplicar (6.41), que sería la siguiente fórmula que necesitamos usar, tenemos que aplicarle un cambio. Necesitamos sustituir el término que hay dentro de la arco-tangente por un término más sencillo, por ejemplo b. Para que esto sea así, el término del interior del arco-coseno debe modificarse y que se siga cumpliendo la igualdad, luego habrá que asegurar que lo que tenemos dentro del arco-coseno tiene módulo menor que 1. Así pues, para abordar esto haremos el cambio $b = (\sqrt{1-a^2})/(1+a)$, el resultado de despejar a es una ecuación cuadrada que tiene como soluciones $a = -1$ o $a = (1-b^2)/(1+b^2)$. Comprobamos con facilidad que en ningún caso podrá ser $a = -1$, dado que eso supondría que

$$\arccos(-1) = \pi \to \arctan(b) = \frac{\pi}{2},$$

lo que no puede ser porque $\pi/2$ no forma parte del dominio de la tangente. Por tanto solo puede ser

$$2\arctan b = \arccos\left(\frac{1-b^2}{1+b^2}\right), \quad \text{para } \left|\frac{1-b^2}{1+b^2}\right| \leq 1.$$

Desde luego, la condición $|(1-b^2)/(1+b^2)| \leq 1$ se va a cumplir siempre que b sea real, que en nuestro caso,

$$b = \left(\frac{-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right)^{1/2},$$

lo es. Así pues, podemos desarrollar el interior del arcocoseno y obtenemos

$$\frac{1-b^2}{1+b^2} = \frac{1-\left|\frac{-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right|}{1+\left|\frac{-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right|}.$$

Debemos pensar en que se cumple (6.11) y también (6.33), por tanto el único de los términos que es negativo es $(1+\alpha-\beta-\gamma)$, el resto son positivos. Por tanto es lícito, para poder prescindir del valor absoluto, escribir

$$\begin{aligned}\frac{1-b^2}{1+b^2} &= \frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)+(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)} \\ &= -\frac{1-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2(\alpha\gamma-\beta)}\end{aligned}$$

y como en este caso, por estar aplicando (6.33), $\alpha\gamma-\beta<0$, por lo que podemos escribir
$$b=\frac{1-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2|\alpha\gamma-\beta|}.$$
Así pues, si aplicamos (6.41), lo que nos queda es
$$s^*=\frac{1}{w}\left(\pi-\arccos\left(\frac{1-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2|\alpha\gamma-\beta|}\right)\right).$$
Y por último aplicando (6.42), obtenemos
$$s^*=\frac{1}{w}\arccos\left(\frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1}{2|\alpha\gamma-\beta|}\right).$$
De (6.30) podemos obtener una expresión alternativa para w sabiendo las dos relaciones de (6.13), que será
$$w=\arccos\left(\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1}{2|\alpha-\beta\gamma|}\right),$$
y con ella finalmente podemos llegar a (6.39).

Para llegar hasta (6.39) desde (6.38) el procedimiento es similar, teniendo en cuenta que las condiciones que se aplican en ese caso son (6.37). Al final, la expresión resultante es la misma, por lo que $s^*=s^{**}$.

Como consecuencia, $g(s)>0$ para todo $0\le s\le k$ si y solo si $k<s^*(=s^{**})$, lo que quiere decir,
$$k<\frac{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-1)/(2|\alpha\gamma-\beta|)\big)}{\arccos\big((\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+1)/(2|\alpha-\beta\gamma|)\big)}. \tag{6.43}$$
En este caso, las soluciones z_l de(6.5) serán positivas para $l=1,2,\dots,(k+1)/2$ si se cumplen (6.11) y, o bien (6.33) o bien (6.37), y se satisface siempre (6.43).

Subcaso 2. Sea k par, por lo que (6.12) se cumple. Entonces tenemos las opciones
$$1+\alpha-\beta-\gamma<0,\quad 1-\alpha-\beta+\gamma>0 \tag{6.44}$$
o
$$1+\alpha-\beta-\gamma<0,\quad 1-\alpha-\beta+\gamma<0. \tag{6.45}$$

El procedimiento es similar al del Subcaso 1. Dada z_l por (6.30), será positiva para todo $l = 1, 2, ..., k/2$ si y solo si

$$h(s) = c_1 \cos\left(w\frac{s}{2}\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(w\frac{s}{2}\right)$$

es positivo para todo $1 \leq s \leq k$. Como en este caso hemos hecho el cambio $l = s/2$ no será necesario simplificar más la expresión de $h(s)$, a diferencia del subcaso anterior. Podemos ver, directamente de $h(s)$, que $h(0) = c_1$ y $h(\pi/w) = c_2$. Usando las condiciones iniciales (6.9) obtenemos

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \left(\frac{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}{-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}\right)^{1/2}.$$

Y si utilizamos las condiciones (6.10) tendremos

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -\left(\frac{-(1+\alpha-\beta-\gamma)(1-\alpha-\beta+\gamma)}{(1+\alpha+\beta+\gamma)(1-\alpha+\beta-\gamma)}\right)^{1/2}.$$

Podemos encontrar el punto s^* para el que $h(s) = 0$ usando las condiciones (6.9), al igual que el punto s^{**} para el que $h(s^{**}) = 0$ si se usan las condiciones (6.7). Los resultados van a ser los mismos que los del subcaso 1. Por tanto, para k par, también se cumple $s^* = s^{**}$ dado por la Ec. (6.39).

Por tanto, las soluciones z_l de (6.5) serán positivas para $l = 1, 2, ..., k/2$ si se cumplen(6.12) y, o bien (6.44) o bien (6.45), y se satisface siempre (6.43).

6.2.2. Prueba final de los teoremas

Estudiados ya todos los casos y subcasos posibles, lo último que queda para llegar a los teoremas principales es agrupar todos los resultados obtenidos hasta el momento. Lo haremos según la paridad de k.

Empezando por k impar, en todos los casos se cumplían las condiciones (6.11),

$$1+\alpha+\beta+\gamma > 0, \;\; 1-\alpha-\beta+\gamma > 0.$$

De aquí directamente podemos ver que será condición necesaria que $|\alpha+\beta| < 1+\gamma$. Luego teníamos otras condiciones que hemos ido obteniendo de los diferentes casos:

I) $1+\alpha-\beta-\gamma > 0,\ \ 1-\alpha+\beta-\gamma > 0.$

II) $1+\alpha-\beta-\gamma = 0,\ \ 1-\alpha+\beta-\gamma > 0.$

III) $1+\alpha-\beta-\gamma > 0,\ \ 1-\alpha+\beta-\gamma = 0.$

IV) $1+\alpha-\beta-\gamma < 0,\ \ 1-\alpha+\beta-\gamma > 0$ y (6.43)

V) $1+\alpha-\beta-\gamma > 0,\ \ 1-\alpha+\beta-\gamma < 0$ y (6.43)

De I) tenemos que $|\alpha-\beta| > \gamma-1$; de II) tenemos que $|\alpha-\beta| \leq 1-\gamma$; de III) tenemos que $|\alpha-\beta| \geq \gamma-1$. Conjuntamente, estas tres conclusiones nos dirigen a que $\gamma-1 < |\alpha-\beta| \leq 1-\gamma$. Finalmente de IV) y V), obtenemos $\alpha-\beta < 1-\gamma < \beta-\alpha$ y $\beta-\alpha < 1-\gamma < \alpha-\beta$, respectivamente; por tanto esto significa que $|1-\gamma| < |\alpha-\beta|$ en ambos. Obviamente, esta condición viene acompañada por la Ec. (6.43). De modo que hemos encontrado todas las condiciones del Teorema 15.

En el caso de k par, en todos los casos se cumplían las condiciones (6.12),

$$1+\alpha+\beta+\gamma > 0,\ \ 1-\alpha+\beta-\gamma > 0.$$

De aquí directamente podemos ver que será condición necesaria que $|\alpha+\gamma| < 1+\beta$. Las otras condiciones que hemos ido obteniendo de los diferentes casos son:

I) $1+\alpha-\beta-\gamma > 0,\ \ 1-\alpha-\beta+\gamma > 0.$

II) $1+\alpha-\beta-\gamma = 0,\ \ 1-\alpha-\beta+\gamma > 0.$

III) $1+\alpha-\beta-\gamma > 0,\ \ 1-\alpha-\beta+\gamma = 0.$

IV) $1+\alpha-\beta-\gamma<0,\ \ 1-\alpha-\beta+\gamma>0$ y (6.43)

V) $1+\alpha-\beta-\gamma>0,\ \ 1-\alpha-\beta+\gamma<0$ y (6.43)

De I) tenemos que $\beta-1<|\alpha-\gamma|<1-\beta$; de II) tenemos que $\beta-1<|\alpha-\gamma|=1-\beta$; de III) tenemos que $\beta-1<|\alpha-\gamma|=1-\beta$. Conjuntamente, estas tres conclusiones nos dirigen a que $\beta-1<|\alpha-\gamma|\leq 1-\beta$. Finalmente de IV) y V) obtenemos $|\alpha-\gamma|<|1-\beta|$, obviamente, esta condición viene acompañada por la Ec. (6.43). De modo que hemos encontrado todas las condiciones del Teorema 16.

Conclusiones

Al empezar este trabajo se planteaba el objetivo de estudiar las técnicas y procedimientos que se emplean para obtener criterios de estabilidad asintótica en ecuaciones en diferencias lineales. Este aspecto ha sido ampliamente discutido a lo largo del trabajo, pero resumamos sus puntos más destacables.

Podemos identificar dos técnicas de todo lo que se ha visto, ambas basadas en el principio de que si las raíces del polinomio característico asociado a la ecuación tienen módulo menor que 1, entonces el cero tendrá estabilidad asintótica. La primera de las técnicas podríamos resumirla en los siguientes pasos:

1. Localizar las raíces del polinomio característico de la ecuación a estudiar, tanto reales como complejas.

   1.1 Si la ecuación en diferencias tuviese varios coeficientes, intentar reducirlos mediante cambios de variable apropiados, hasta que solo quede un coeficiente.

2. Estudiar cómo se mueven las raíces del polinomio característico conforme crezcan o decrezcan sus coeficientes.

3. Encontrar los valores de los coeficientes del polinomio para los que las raíces tienen módulo 1.

3.1 Si se hubiesen aplicado cambios de variable al polinomio como se indicaba en el paso 1.1, calcular cuál es el círculo para el que la nueva variable cumple que la antigua variable tenga módulo unidad.

3.2 Encontrar los valores del coeficiente del polinomio para los que las raíces tienen módulo igual al radio de dicho círculo.

4. Asegurar el intervalo de valores, delimitado por los valores hallados en el paso 3, para los que todas las raíces del polinomio característico tienen módulo menor que 1. De aquí se obtiene el criterio buscado.

La segunda de las técnicas comienza a partir del criterio de Schur-Cohn, tal como se ha dado en el Teorema 2, y seguiría los siguientes pasos:

1. Aplicar el criterio de Schur-Cohn al polinomio característico de la ecuación a estudiar y extraer condiciones de las condiciones I) y II), que deberán tenerse en cuenta en todo momento.

2. De la condición III) del criterio de Schur-Cohn, extraer una ecuación en diferencias asociada a la que estamos estudiando:

    2.1 Nombrar como primer término x_n al interior más pequeño de la matriz con la que se trabaja, y sucesivamente añadiendo un desfase de 2 a cada término, $x_{n+2}, x_{n+4}, ...$, nombrar al resto de interiores hasta llegar a la matriz en sí.

    2.2 Dar la nueva ecuación en diferencias resolviendo el determinante de la con la ayuda del desarrollo de Laplace.

3. Seguir con el primer método en esta nueva ecuación en diferencias y deshacer los cambios realizados al final.

Para finalizar, cabe hacer un análisis de aspectos a completar en este trabajo, tal vez para futuros estudios. Evidentemente, sería interesante estudiar criterios de estabilidad asintótica en muchos otros tipos de ecuaciones en diferencias de las que se han visto aquí, pero esto puede volverse una tarea tan larga como ecuaciones en diferencias existen.

Por tanto, quizás una continuación razonable de este trabajo sea estudiar métodos para obtener alguna de las ecuaciones en diferencias que hemos estudiado a partir de la que nos interesa. En esta línea ya se mencionaba la linealización de ecuaciones no lineales, que es un primer paso, por lo menos, para no restringirnos al caso lineal.

Otro trabajo alternativo es estudiar otros criterios de estabilidad que no se recojan aquí. Aunque se han recogido los resultados más importantes y actuales en cuanto a ecuaciones lineales, existen otros que pueden aportar puntos de vista interesantes. Pero sobre todo, en cuanto a ecuaciones en diferencias no lineales hay una gran cantidad de territorio sin explorar.

Bibliografía

[1] R. BHATIA, L. ELSNER, AND G. KRAUSE, *Bounds for the variation of the roots of a polynomial and the eigenvalues of a matrix*, Linear Algebra and its Applications, 142 (1990), pp. 195–209.

[2] J. ČERMÁK, J. JÁNSKÝ, AND P. KUNDRÁT, *On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of higher order linear difference equations*, Journal of Difference Equations and Applications, 18(11) (2012), pp. 1781–1800.

[3] R. V. CHURCHILL, J. W. BROWN, AND L. A. RAPUN, *Variable compleja y aplicaciones*, McGraw-Hill, 1990.

[4] K. L. COOKE AND I. GYÖRI, *Numerical approximation of the solutions of delay differential equations on an infinite interval using piecewise constant arguments*, Computers & Mathematics with Applications, 28(1-3) (1994), pp. 81–92.

[5] F. DANNAN, *The asymptotic stability of* $x_{n+k} - ax_n + bx_{n-l} = 0$, Journal of Difference Equations and Applications, 10(6) (2004), pp. 589–599.

[6] S. ELAYDI, *An introduction to difference equations*, Springer Science & Business Media, 2005.

[7] E. A. GROVE AND G. LADAS, *Periodicities in nonlinear difference equations*, vol. 4, CRC Press, 2005.

[8] E. I. JURY, *Theory and Application of the z-Transform Method*, Wiley, 1964.

[9] V. L. KOCIC AND G. LADAS, *Global behavior of nonlinear difference equations of higher order with applications*, vol. 256, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[10] M. R. KULENOVIC AND G. LADAS, *Dynamics of second order rational difference equations: with open problems and conjectures*, CRC Press, 2001.

[11] S. A. KURUKLIS, *The asymptotic stability of* $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 188(3) (1994), pp. 719–731.

[12] S. A. LEVIN AND R. M. MAY, *A note on difference-delay equations*, Theoretical Population Biology, 9(2) (1976), pp. 178–187.