



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

MÁSTER EN MATEMÁTICAS AVANZADAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

---

INFERENCIA SOBRE CLASIFICACIÓN  
NO PARAMÉTRICA EN FIABILIDAD:  
CASOS IFR (DFR) Y NBU (NWU)

---

Autor:

Antonio Llopis Gómez

Tutores:

Félix Luis Belzunce Torregrosa y José María Ruiz Gómez

4 de septiembre de 2020



## Declaración de originalidad

Antonio Llopis Gómez, autor del Trabajo de fin de Máster “Inferencia sobre clasificación no paramétrica en fiabilidad: Casos IFR (DFR) y NBU (NWU)”, bajo la tutela de los profesores Félix Luis Belzunce Torregrosa y José María Ruiz Gómez, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 4 de septiembre de 2020.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Antonio', with a stylized flourish underneath.

Fdo.: Antonio Llopis Gómez.



# Introducción

Cuando observamos diferentes sistemas, entendiendo como sistema cualquier mecanismo o ser vivo, podemos constatar que el paso del tiempo no afecta de la misma manera a todos los sistemas ni a todas las componentes dentro del mismo sistema. Mientras que algunos se deterioran rápidamente, otros resisten en buenas condiciones tras haber transcurrido el mismo período de tiempo para ambos. En teoría de la fiabilidad esto se explica a través de la existencia de diferentes clases de envejecimiento que determinan cómo es la reacción ante el paso del tiempo. Por tanto, conocer qué clase de envejecimiento sigue cada componente o sistema resulta muy importante, ya que permitirá prever la evolución de su comportamiento a lo largo del tiempo.

Una manera de poder conocer qué clase de envejecimiento sigue la unidad estudiada es realizar un contraste de hipótesis en el que se enfrenta una hipótesis nula, constituida por el hecho de que el envejecimiento de la unidad pertenezca a una determinada clase o siga una distribución concreta, a una hipótesis alternativa que puede ser que el envejecimiento sea de una clase que se toma como candidata o simplemente que no sea de la clase o distribución considerada en la hipótesis nula.

Para poder realizar este contraste es necesario construir previamente un estadístico que permita determinar si los datos son compatibles con la hipótesis nula o no. Este estadístico se construye a partir de las propiedades de las diferentes clases de envejecimiento contrastadas, por lo que no es único, ya que dependiendo de la propiedad considerada el estadístico tendrá una forma u otra, de manera que se pueden obtener diferentes estadísticos para un mismo contraste de hipótesis.

En los últimos años, muchos autores han propuesto tests y estadísticos en relación a este propósito. En este trabajo nos hemos centrado en analizar algunos de los principales propuestos para la clase IFR con su dual DFR y para la clase NBU con su dual NWU, que constituyen dos de las clases de envejecimiento más destacadas.

En el capítulo 1 se abordan estas dos clases de envejecimiento, dando caracterizaciones que permiten determinar cuándo una variable aleatoria pertenece a la clase IFR (DFR) o NBU (NWU), así como la interpretación de qué significa pertenecer a cada una de estas clases.

Dedicamos el capítulo 2 al estudio de los resultados obtenidos para la clase IFR con su dual DFR, en concreto se analizan con detalle los trabajos de Belzunce, Candel y Ruiz (1998) y de Klefsjö (1983). Comenzamos la sección introduciendo el contraste de hipótesis tratado en ambos trabajos, en el que enfrentan la hipótesis nula de que la variable aleatoria

siga la distribución exponencial a la hipótesis alternativa de que pertenezca a la clase IFR o DFR pero no siga la distribución exponencial. Aunque consideren el mismo contraste de hipótesis, proponen diferentes estadísticos para realizarlo, ya que plantean un enfoque basado en propiedades distintas de esta clase de envejecimiento.

Después de presentar el contraste de hipótesis, se estudia el estadístico propuesto por Belzunce, Candel y Ruiz (1998), basado en el concepto de orden estocástico que está desarrollado en el capítulo de preliminares, obteniendo su distribución exacta y asintótica bajo la hipótesis nula y probando su consistencia.

También se estudia en este capítulo el estadístico propuesto por Klefsjö (1983). En este caso, su construcción está basada en las propiedades de la transformación en escala del tiempo total en test y su gráfica, conceptos que se explican también en el capítulo de preliminares y que fueron desarrollados en Barlow y Campo (1975). Una vez detallado cómo se construye el estadístico, realizamos el estudio de las mismas propiedades que tratamos con el estadístico propuesto por Belzunce, Candel y Ruiz (1998).

El capítulo 3, dedicado a la clase NBU con su dual NWU, mantiene una estructura similar a la anterior, ya que comenzamos presentando el contraste de hipótesis, que es análogo al que presentábamos en el inicio del capítulo 2, y continuamos con el estudio del estadístico que proponen Belzunce, Candel y Ruiz (1998), para el que realizamos el mismo análisis.

En el capítulo 4 aplicamos los resultados teóricos tratados a lo largo de la memoria a tres conjuntos de datos con el objetivo de determinar a qué clase de envejecimiento o a qué distribución pertenecen las muestras. Al final del capítulo se detalla el código utilizado en R para obtener tanto los estadísticos como los p-valores que sirven de evidencia para poder determinar qué hipótesis es la correcta en el contraste, así como el vector de datos utilizado en cada uno de los tres casos.



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Clases de envejecimiento IFR y NBU y sus duales . . . . .	3
1.2.1. Caracterización basada en el orden estocástico . . . . .	4
1.2.2. Caracterización basada en la TTT-gráfica . . . . .	5
1.3. Un caso excepcional: La distribución exponencial . . . . .	7
1.4. Resultados técnicos de interés . . . . .	8
<b>2. Contrastes para la clase IFR (DFR)</b>	<b>10</b>
2.1. Introducción . . . . .	10
2.2. Contraste basado en el orden estocástico . . . . .	10
2.2.1. Distribución exacta de $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$ . . . . .	13
2.2.2. Distribución asintótica de $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$ . . . . .	18
2.2.3. Consistencia . . . . .	23
2.3. Contraste basado en el TTT . . . . .	25
2.3.1. Distribución exacta de $A_2$ . . . . .	30
2.3.2. Distribución asintótica de $A_2$ . . . . .	31
2.3.3. Consistencia . . . . .	35
<b>3. Contrastes para la clase NBU (NWU)</b>	<b>39</b>
3.1. Introducción . . . . .	39
3.2. Contraste basado en el orden estocástico . . . . .	39
3.2.1. Distribución exacta de $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$ . . . . .	42



3.2.2. Distribución asintótica de $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$ . . . . .	44
3.2.3. Consistencia . . . . .	48
<b>4. Aplicaciones a conjuntos de datos de fiabilidad y supervivencia</b>	<b>49</b>
4.1. Introducción . . . . .	49
4.2. Caso 1 . . . . .	50
4.3. Caso 2 . . . . .	51
4.4. Caso 3 . . . . .	52
4.5. Código de R . . . . .	53
<b>Bibliografía</b>	<b>60</b>



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Introducción

En este capítulo se van a introducir aquellos conceptos y resultados que serán de utilidad a lo largo de la memoria, así como la notación empleada.

Se denota por  $X$  el tiempo de vida aleatoria de la componente o sistema objeto de estudio, por lo que consideramos que  $X$  es una variable aleatoria no negativa, es decir su soporte es  $[0, +\infty)$ , continua con función de distribución  $F_X(x) = P(X \leq x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . En otros resultados será necesario suponer que  $X$  es absolutamente continua con función de densidad  $f(x)$ .

Otra función asociada a una variable aleatoria es la función de fiabilidad o supervivencia, definida por  $\bar{F}_X(x) = P(X > x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Cuando  $X$  representa el tiempo de vida de una unidad, sistema u organismo, la función de supervivencia representa la probabilidad de que éste siga funcionando tras el instante de tiempo  $x$ .

Otra variable importante en este estudio es la variable tiempo de vida residual, definida como  $X_t = \{X - t | X > t\}$ ,  $\forall t > 0$ , y que representa el tiempo de vida que le queda a una unida que sigue en funcionamiento después de haber sobrevivido un tiempo  $t$ . Su función de supervivencia viene dada por:

$$\bar{F}_{X_t}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \leq 0. \\ \frac{\bar{F}_X(t+x)}{\bar{F}_X(t)}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Otra función de bastante interés en este trabajo es la razón de fallo, que introducimos para variables aleatorias absolutamente continuas.

**Definición 1.1** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa absolutamente continua. Se llama razón de fallo a la función definida por:

$$r_X(x) = \frac{f_X(x)}{\bar{F}_X(x)}, \quad (1.2)$$

donde  $\bar{F}_X(x) > 0$ .

La expresión (1.2) se puede escribir de la siguiente manera:

$$r_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{P(x < X < x + h | X > x)}{h}.$$

La probabilidad  $P(x < X < x + h | X > x)$  es la probabilidad de que una unidad que sigue funcionando después de un tiempo  $x$ , falle después de un tiempo  $h$ . Si consideramos el cociente  $\lim_{h \rightarrow 0^+} P(x < X < x + h | X > x) / h$ , se puede interpretar la razón de fallo como la “probabilidad” instantánea de que la unidad deje de funcionar en el tiempo  $x$ .

Introducimos también la definición de muestra aleatoria simple:

**Definición 1.2** Dada la variable aleatoria  $X$ , una muestra aleatoria simple (m.a.s.) de tamaño  $n$  es un conjunto de  $n$  variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , independientes e idénticamente distribuidas como  $X$ .

A partir de la definición anterior, introducimos los conceptos de estadístico y estadístico ordenado.

**Definición 1.3** Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una m.a.s. de la variable aleatoria  $X$ , llamamos estadístico a cualquier transformación de la muestra aleatoria simple,  $h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , donde  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $h$  medible Borel.

Como ejemplos más característicos de estadístico se pueden citar la media muestral  $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$  y la varianza muestral  $S_X^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n$ . Otro ejemplo destacado de estadístico es el estadístico ordenado:

**Definición 1.4** Dada una m.a.s.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de la variable aleatoria  $X$ , los estadísticos ordenados  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ , donde  $X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$  y  $X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$ , son los estadísticos que resultan de ordenar la muestra de menor a mayor.

A partir de las definiciones anteriores vamos a introducir la función de distribución empírica:

**Definición 1.5** Dada una m.a.s. ordenada  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  de la variable aleatoria  $X$ , la función de distribución empírica se expresa como:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < X_{(1)}. \\ \vdots & \\ \frac{i}{n}, & \text{si } X_{(i)} \leq x < X_{(i+1)}. \\ \vdots & \\ 1, & \text{si } x \geq X_{(n)}. \end{cases} \quad (1.3)$$

Es conocido que la función de distribución empírica es uno de los mejores estimadores de la función de distribución.

Como decimos en la introducción, el paso del tiempo no afecta por igual a todos los sistemas ni a todas las componentes de un mismo sistema, por lo que es necesario considerar diferentes clases de envejecimiento, que son tratadas en el siguiente apartado, tomando el mismo enfoque del concepto de envejecimiento que aparece en Bryson y Siddiqui (1969), donde el envejecimiento es tratado como el fenómeno por el cual un sistema o componente nuevo tiene un tiempo de vida útil más extenso, en sentido estadístico, que un sistema o componente que ya lleva un tiempo en funcionamiento.

Existen distintas formas de modelizar probabilísticamente ese efecto del paso del tiempo. En este trabajo vamos a abordar dos de las más utilizadas, las clases IFR (DFR) y NBU (NWU).

## 1.2. Clases de envejecimiento IFR y NBU y sus duales

Existe una amplia literatura en torno a este tema, obteniéndose numerosos e importantes resultados con aplicaciones prácticas a lo largo de los últimos años. Este trabajo se centra en dos de las clases de envejecimiento más destacadas: la clase IFR, con su dual DFR, y la clase NBU, con su dual NWU.

Se puede interpretar el significado de que  $X$  pertenezca a la clase de envejecimiento IFR como que el paso del tiempo hace que la unidad tenga una menor probabilidad de sobrevivir cualquier tiempo más, es decir, si se compara una misma unidad en períodos de tiempo distintos que denotamos como  $t_1, t_2 \geq 0$  tales que  $t_1 < t_2$ , la unidad tiene más probabilidad de seguir sobreviviendo cualquier tiempo más en  $t_1$  que en  $t_2$ . En consecuencia, se puede decir que el tiempo siempre afecta de forma negativa a una unidad que

pertenezca a la clase IFR, pues conforme aumenta el tiempo que ha transcurrido desde que empezó a funcionar, se reduce la probabilidad de que siga funcionando un tiempo cualquiera más.

Por el contrario, para la clase DFR se tiene el efecto contrario, el tiempo afectará de manera positiva a cualquier unidad que siga esta clase de envejecimiento, esto es, a medida que aumenta el tiempo que transcurre desde que la unidad comenzó a funcionar, aumentará también la probabilidad de que siga funcionando cualquier tiempo más.

El hecho de que una unidad pertenezca a la clase NBU significa que siempre tendrá menor probabilidad de sobrevivir cualquier tiempo  $t > 0$  una vez que ha comenzado a funcionar que cuando todavía no había empezado a hacerlo. Por el contrario, y debido a que el dual de la clase NBU es la clase NWU, si una unidad pertenece a la clase NWU, entonces tendrá mayor probabilidad de sobrevivir cualquier tiempo  $t > 0$  cuando ya ha comenzado a funcionar que siendo nueva. De ahí la elección de las siglas en inglés NBU (“New Better than Used”), con el significado en castellano de “nuevo mejor que usado”, y NWU (“New Worse than Used”), con el significado de “nuevo peor que usado”.

Resulta de gran utilidad conocer qué clase de envejecimiento sigue cada sistema o componente de un mismo sistema, puesto que ello permitirá poder prever su comportamiento y anticiparse a eventuales fallos o averías, pudiendo así reaccionar a tiempo para evitar que el sistema deje de funcionar súbitamente. Con ese propósito se han obtenido numerosas caracterizaciones, de las cuales se exponen a continuación algunas de ellas que son de interés para esta memoria.

### 1.2.1. Caracterización basada en el orden estocástico

Antes de enunciar esta caracterización, se necesita definir qué es el orden estocástico:

**Definición 1.6** *Se dice que una variable aleatoria  $X$  es menor en el orden estocástico que otra variable aleatoria  $Y$ , lo que se denota por  $X \stackrel{ST}{<} Y$ , si y sólo si,*

$$\bar{F}_X(x) \leq \bar{F}_Y(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se puede interpretar esta desigualdad como que una unidad que tenga el tiempo de vida  $X$  tendrá menos probabilidad de sobrevivir un tiempo  $x$  que una unidad que tenga el tiempo de vida  $Y$ , sea cual sea el valor de  $x$ .

Aplicando el concepto de orden estocástico, se obtiene la siguiente caracterización de la pertenencia de  $X$  a las clases IFR (DFR) y NBU (NWU):

**Definición 1.7** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa, se tiene que:

$$\begin{aligned} X \text{ es de la clase IFR (DFR)} &\Leftrightarrow X_s \overset{ST}{>} X_t \text{ (} X_s \overset{ST}{<} X_t \text{), para todo } 0 \leq s < t. \\ X \text{ es de la clase NBU (NWU)} &\Leftrightarrow X \overset{ST}{>} X_t \text{ (} X \overset{ST}{<} X_t \text{), para todo } t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Teniendo en cuenta que la definición de orden estocástico formaliza la idea de que es menos probable que una variable aleatoria alcance valores grandes que otra variable aleatoria, a partir de esta caracterización se puede interpretar que  $X$  pertenezca a la clase IFR (DFR) como que la probabilidad de que una unidad siga funcionando cualquier tiempo  $t > 0$  es mayor (menor) que la probabilidad de que lo haga una unidad más vieja. Análogamente, el hecho de que  $X$  sea de la clase NBU (NWU) puede interpretarse como que una unidad nueva tiene una probabilidad mayor (menor) de sobrevivir cualquier tiempo  $t > 0$  que una que ya esté en funcionamiento.

De la comparación de la caracterización de la clase IFR y su dual DFR con la de la clase NBU y su dual NWU, se extrae el siguiente corolario:

**Corolario 1.1** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa. Si  $X$  es de la clase IFR (DFR), entonces  $X$  es de la clase NBU (NWU).

Las siglas en inglés IFR (“Increasing Failure Rate”), traducidas al castellano como “razón de fallo creciente”, y DFR (“Decreasing Failure Rate”), traducidas como “razón de fallo decreciente”, hacen referencia a la razón de fallo, concepto tratado en la definición 1.1. A partir de esta medida de fiabilidad, se puede caracterizar el hecho de que  $X$  pertenezca a la clase de envejecimiento IFR (DFR):

**Proposición 1.1** Sea  $X$  una variable aleatoria no negativa, se tiene que:

$$X \text{ es de la clase IFR (DFR)} \Leftrightarrow r_X(x) \text{ es monótona creciente (decreciente)}. \quad (1.5)$$

### 1.2.2. Caracterización basada en la TTT-gráfica

Esta caracterización se basa en los conceptos de tiempo total en test (TTT), su transformación y su gráfica, desarrollados en Barlow y Campo (1975) y que se abordan a continuación.

**Definición 1.8** Sea  $F$  una función de distribución con función de supervivencia  $\bar{F} = 1 - F$  y media  $\mu = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$ , con  $\mu \in \mathbb{R}$ . La TTT-transformada en escala  $\varphi_F$  de  $F$  se

define como:

$$\varphi_F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(s) ds \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1, \quad \text{donde } F^{-1}(t) = \inf \{x : F(x) \leq t\}.$$

El siguiente teorema relaciona la clase IFR (DFR) con la función  $\varphi_F(t)$ :

**Teorema 1.1** Una función de distribución  $F$  es IFR (DFR) si, y sólo si,  $\varphi_F(t)$  es cóncava (convexa) para  $0 \leq t \leq 1$ .

**Demostración.** Supongamos que  $F$  es absolutamente continua y estrictamente creciente. Entonces:

$$\frac{d}{dt} \varphi_F(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(t)} \bar{F}(s) ds \right) = \frac{1}{\mu r(F^{-1}(t))}, \quad \text{donde } r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Si  $F$  es IFR, entonces por (1.5) se tiene que  $r(F^{-1}(t))$  es creciente, lo que implica que  $r'(F^{-1}(t)) > 0$  y que  $\frac{d^2}{dt^2} \varphi_F(t) = -\frac{r'(F^{-1}(t))}{(\mu r(F^{-1}(t)))^2} < 0$  y, por tanto,  $\varphi_F(t)$  es cóncava.

Si  $\varphi_F(t)$  es cóncava, entonces  $\frac{d^2}{dt^2} \varphi_F(t) = -\frac{r'(F^{-1}(t))}{(\mu r(F^{-1}(t)))^2} < 0$ , de manera que se tiene que  $r'(F^{-1}(t)) > 0$  y, por tanto,  $r(F^{-1}(t))$  es creciente. De (1.5) se concluye que  $F$  es IFR.

La prueba es análoga para la clase DFR con respecto de la convexidad de  $\varphi_F(t)$ . ■

Supongamos que  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  es una muestra ordenada de  $F$ , con  $X_{(0)} = 0$ . Se definen los espacios normalizados  $D_j$  como:

$$D_j = (n - j + 1) \cdot (X_{(j)} - X_{(j-1)}), \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6)$$

y el tiempo total en test en  $X_{(j)}$  como:

$$S_j = \sum_{k=1}^j D_k, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.7)$$

con  $S_0 = 0$ .

Una vez definida  $S_j$ , se define:

$$u_j = \frac{S_j}{S_n}, \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, n, \quad (1.8)$$



y se obtiene la TTT-gráfica representando los puntos que tienen como coordenada en el eje de abscisas  $\frac{j}{n}$  y como coordenada en el eje de ordenadas  $u_j$  para  $j = 0, 1, \dots, n$ , unidos mediante rectas.

El lema de Glivenko-Cantelli permite trabajar las propiedades de  $\varphi_F(t)$  a través de  $u_j$ , ya que relaciona ambas, puesto que tiene como implicación que si  $F$  es estrictamente creciente, entonces  $u_j$  converge uniformemente a  $\varphi_F(t)$  en  $[0, 1]$  con probabilidad 1, cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $\frac{j}{n} \rightarrow t$ .

Aplicando el teorema anterior y puesto que la TTT-gráfica converge a la TTT-transformada en escala, si  $F$  es IFR (DFR), entonces la TTT-gráfica debe ser aproximadamente cóncava (convexa).

### 1.3. Un caso excepcional: La distribución exponencial

En distribuciones continuas, a excepción de la exponencial, todas las distribuciones pertenecen a la clase IFR o a su dual DFR, pero no a ambas simultáneamente. La distribución exponencial es la única que pertenece a la clase IFR y a la DFR al mismo tiempo, ya que su razón de fallo es:

$$r(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\lambda \cdot \exp(-\lambda x)}{\exp(-\lambda x)} = \lambda, \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como la razón de fallo es constante, puede interpretarse como que es creciente y decreciente al mismo tiempo, por lo que se le puede aplicar la caracterización de la clase IFR y también la de su dual DFR.

Por tanto, se puede considerar que la probabilidad de que una unidad cuyo tiempo de vida sigue la distribución exponencial falle en un determinado momento es independiente del tiempo que haya transcurrido desde que comenzó a funcionar. Este comportamiento se denomina propiedad de falta de memoria y puede verse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(X > t + s | X > s) &= \frac{P(X > t + s, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > t + s)}{P(X > s)} = \frac{1 - F(t + s)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{\exp(-\lambda(t + s))}{\exp(-\lambda s)} = \exp(-\lambda t) = 1 - F(t) = P(X > t). \end{aligned}$$

Por el Corolario 1.1, se tiene que la distribución exponencial también pertenece a la clase NBU y su dual NWU simultáneamente.

## 1.4. Resultados técnicos de interés

En este apartado se enuncian resultados técnicos que serán utilizados para obtener la distribución exacta y asintótica de algunos de los diferentes estadísticos tratados a lo largo de este trabajo.

A partir del Corolario 2.6 de Barlow y Proschan (1975) y del Teorema 2.4 de Box (1954), se deriva el siguiente teorema que da la expresión de la distribución exacta de un estadístico que cumple unas determinadas condiciones:

**Teorema 1.2** *Sea  $X$  una variable aleatoria que sigue la distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1/2$  y  $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$  una m.a.s. ordenada de  $X$ . Supongamos que el estadístico  $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$  puede expresarse en términos de los espacios normalizados  $D_j$  definidos en (1.6) de la siguiente manera:*

$$T_n = \frac{\sum_{j=1}^n e_{j,n} D_j}{\sum_{j=1}^n D_j},$$

donde  $e_{j,n} \neq e_{i,n}$  para todo  $j \neq i$ . Entonces, se tiene que:

$$Pr\{T_n \leq x\} = 1 - \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{e_{i,n} - x}{e_{i,n} - e_{j,n}} \cdot I(x < e_{i,n}),$$

$$\text{siendo } I(x < e_{i,n}) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < e_{i,n}. \\ 0, & \text{si } x \geq e_{i,n}. \end{cases}$$

A partir de los teoremas 2 y 3 de Stigler (1974) y del Teorema de Slutsky, se pueden dar otros resultados que posibilitan la obtención de la distribución asintótica de un estadístico bajo ciertas condiciones. Sea  $J(u)$  una función definida en  $[0, 1]$  y  $F$  una función de distribución, la notación empleada será la siguiente:

$$\mu(J, F) = \int_{\mathbb{R}} z J(F(z)) dF(z), \quad (1.9)$$

$$\sigma^2(J, F) = \int \int_{\mathbb{R}^2} J(F(x)) J(F(y)) [F(\min(x, y)) - F(x)F(y)] dx dy. \quad (1.10)$$

Además, es conveniente recordar que con  $\xrightarrow{L}$  expresamos la convergencia en distribución.

A continuación exponemos los siguientes teoremas que utilizaremos a lo largo de la memoria:

**Teorema 1.3** *Sea  $X$  una variable aleatoria continua y no negativa tal que  $E[X^2] < \infty$  y que cumple que  $\sigma^2(J, F_X) > 0$ , donde  $J(u)$  es una función acotada en  $[0, 1]$  y continua sobre la imagen de  $F_X$ . Entonces para el estadístico*

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n J\left(\frac{i}{n}\right) X_{(i)},$$

se tiene que:

$$\sqrt{n} \cdot \left( \frac{T_n - \mu(J, F_X)}{\sigma(J, F_X)} \right) \xrightarrow{L} N(0, 1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Teorema 1.4** *Bajo las mismas condiciones del teorema anterior, para el estadístico  $T_n^* = T_n/\bar{X}$  se tiene que:*

$$\sqrt{n} \cdot \left( T_n^* - \frac{\mu(J, F_X)}{E[X]} \right) \xrightarrow{L} N\left(0, \frac{\sigma^2(J^*, F_X)}{E[X]^2}\right) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde  $J^*(u) = J(u) - \frac{\mu(J, F_X)}{E[X]}$ .

# Capítulo 2

## Contrastes para la clase IFR (DFR)

### 2.1. Introducción

En este capítulo estudiamos los contrastes desarrollados en Belzunce, Candel y Ruiz (1998) y Klefsjö (1983) para la clase IFR y su dual DFR. Como se ha visto en el capítulo 1, la distribución exponencial es muy importante, ya que es la única distribución continua que tiene la propiedad de falta de memoria, lo que equivale a que el paso del tiempo no afecta al tiempo de funcionamiento de la unidad objeto de estudio. Por esta razón, resulta conveniente contrastar la hipótesis de exponencialidad frente a alternativas que representen distintos tipos de envejecimiento.

El contraste de hipótesis utilizado en los trabajos citados anteriormente se basa en esta premisa. A lo largo de este capítulo se expone cómo se construye el estadístico empleado en estos trabajos, así como el estudio de su distribución exacta, asintótica y consistencia.

### 2.2. Contraste basado en el orden estocástico

El contraste de hipótesis en el que se basa el test propuesto por Belzunce, Candel y Ruiz (1998) pretende determinar si una variable aleatoria sigue una distribución exponencial, hecho que constituye la hipótesis nula, o si es de la clase IFR o DFR pero no sigue la distribución exponencial, lo que se toma como hipótesis alternativa.

De esta forma, se contrastan las hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \text{ con } \lambda > 0. \\ H_1 : X \text{ es IFR o DFR pero no exponencial.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Se trata de un contraste de significación en el que el objetivo es construir un estadístico que bajo la hipótesis nula sea próximo a cero y bajo la alternativa sea significativamente diferente de cero.

Belzunce, Candel y Ruiz (1998) proponen como medida de desviación de que la variable aleatoria siga la distribución exponencial frente a la hipótesis alternativa de que sea IFR o DFR pero no exponencial la siguiente medida:

$$\Delta_{\text{IFR}}(X) = \int_{\mathbb{R}^2} I(s < t) \cdot \bar{F}_X^2(s) \cdot \bar{F}_X^2(t) \cdot \Delta_{\text{ST}}(X_t, X_s) dF_X(s) dF_X(t), \quad (2.2)$$

donde

$$\Delta_{\text{ST}}(X_t, X_s) = \int_0^\infty \left( \bar{F}_{X_s}^2(u) - \bar{F}_{X_t}^2(u) \right) du. \quad (2.3)$$

Puesto que  $\bar{F}_X^2(s), \bar{F}_X^2(t) > 0$  y  $I(s < t) > 0$  siempre y cuando  $s < t$ , el signo de  $\Delta_{\text{IFR}}(X)$  depende de  $\Delta_{\text{ST}}(X_t, X_s)$ .

Por (1.1), se puede escribir (2.3) de la siguiente manera:

$$\Delta_{\text{ST}}(X_t, X_s) = \int_0^\infty \left( \frac{\bar{F}_X^2(s+u)}{\bar{F}_X^2(s)} - \frac{\bar{F}_X^2(t+u)}{\bar{F}_X^2(t)} \right) du. \quad (2.4)$$

Si la hipótesis nula fuera cierta, se tendría que  $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$  con  $\lambda > 0$ , y entonces sustituyendo en (2.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ST}}(X_t, X_s) &= \int_0^\infty \left( \frac{\exp(-2\lambda(s+u))}{\exp(-2\lambda s)} - \frac{\exp(-2\lambda(t+u))}{\exp(-2\lambda t)} \right) du \\ &= \int_0^\infty (\exp(-2\lambda u) - \exp(-2\lambda u)) du = 0, \end{aligned}$$

y, por tanto, de (2.2) tenemos que  $\Delta_{\text{IFR}}(X) = 0$ .

Si por el contrario se rechaza la hipótesis nula, se tendría que  $X$  es de la clase IFR o DFR, pero no exponencial. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $X$  es de la clase IFR pero no es exponencial, por lo que no es DFR. Entonces, por la caracterización de la clase IFR basada en el orden estocástico dada en (1.4) y la definición 1.6 de orden

estocástico, se obtiene que si  $X$  es IFR, entonces  $\Delta_{ST}(X_t, X_s) > 0$  y, en consecuencia, por (2.2) se verifica que  $\Delta_{IFR}(X) > 0$ .

Siguiendo un razonamiento análogo tomando como hipótesis que  $X$  es de la clase DFR pero no es exponencial, se tiene en ese caso que  $\Delta_{IFR}(X) < 0$ .

Resumiendo, tenemos una medida  $\Delta_{IFR}(X)$  que verifica:

1. Bajo  $H_0$ , se tiene que  $\Delta_{IFR}(X) = 0$ .
2. Bajo  $H_1$ ,  $\Delta_{IFR}(X)$  depende de la clase a la que pertenece  $X$ :
  - a) Si  $X$  es IFR, entonces  $\Delta_{IFR}(X) > 0$ .
  - b) Si  $X$  es DFR, entonces  $\Delta_{IFR}(X) < 0$ .

En consecuencia,  $\Delta_{IFR}(X)$  es una medida de desviación de la hipótesis nula frente a la alternativa. Puesto que no disponemos de la medida, al depender de la distribución y ser esta desconocida, procedemos a sustituir la medida por su versión empírica y en términos de esa medida empírica buscamos evidencia en contra de la hipótesis nula. Si la medida empírica está bien construida, bajo la hipótesis nula su comportamiento como variable es próximo a cero, por lo que valores muy alejados de este número indicarían que la hipótesis nula no es cierta. Veamos ahora la versión empírica de la medida anterior reemplazando la distribución teórica por la distribución empírica.

Para ello, sea una muestra aleatoria simple ordenada  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  de tamaño  $n$  de  $X$ , de la expresión (1.3) en la que se define la función de distribución empírica, se tiene que el análogo empírico de (2.2) es:

$$\begin{aligned} \Delta_{IFR}(n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-2} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2 \left[ \sum_{l=i+1}^n \frac{\left(1 - \frac{l-1}{n}\right)^2}{\left(1 - \frac{i}{n}\right)^2} (X_{(l)} - X_{(l-1)}) - \sum_{l=j+1}^n \frac{\left(1 - \frac{l-1}{n}\right)^2}{\left(1 - \frac{j}{n}\right)^2} (X_{(l)} - X_{(l-1)}) \right] \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2 (\Delta_i^n - \Delta_j^n), \end{aligned}$$

donde

$$\Delta_k^n \equiv \sum_{l=k+1}^n \left( \frac{n-l+1}{n-k} \right)^2 (X_{(l)} - X_{(l-1)}), \quad k = i, j. \quad (2.5)$$

Puesto que la variable aleatoria  $X$  denota un tiempo de vida, su extremo inferior es 0, por lo que es usual incluir en la muestra el valor  $X_{(0)} = 0$ . Añadiendo esta observación, se obtiene el siguiente estadístico asintóticamente equivalente:

$$\Delta_{\text{IFR}}(n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2 (\Delta_i^n - \Delta_j^n). \quad (2.6)$$

En el contraste de hipótesis planteado, se rechaza la hipótesis nula  $H_0$  en favor de la alternativa  $H_1$  si el estadístico toma valores positivos (negativos) suficientemente grandes (pequeños). En caso contrario, no se tiene evidencia que permita rechazar la hipótesis nula, por lo que se considera cierta. Este mismo razonamiento es el que sigue en el resto de contrastes de hipótesis tratados en esta memoria para determinar si se rechaza la hipótesis nula.

En este caso, si  $\Delta_{\text{IFR}}(n)$  toma valores positivos (negativos) suficientemente grandes (pequeños) se rechaza la hipótesis nula de exponencialidad en favor de la alternativa de que  $X$  pertenece a la clase IFR (DFR) pero no es exponencial. Por el contrario, si  $\Delta_{\text{IFR}}(n)$  no toma valores positivos (negativos) suficientemente grandes (pequeños) no se tiene evidencia para rechazar la hipótesis nula, por lo que se considera que  $X$  sigue la distribución exponencial.

Para conseguir que bajo la hipótesis nula no tenga que intervenir el parámetro y que el test sea invariante por cambio de escala, se realiza la siguiente modificación del estadístico:

$$\Delta_{\text{IFR}}^*(n) = \frac{\Delta_{\text{IFR}}(n)}{\bar{X}}.$$

Este será el estadístico final con el que realizaremos el contraste.

Para decidir cuándo los valores del estadístico del contraste no son compatibles con la hipótesis nula, necesitamos estudiar su distribución en el muestreo bajo dicha hipótesis. En las siguientes secciones estudiamos tanto su distribución exacta como su distribución asintótica.

### 2.2.1. Distribución exacta de $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$

En este apartado se da la expresión de la distribución exacta de  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$  bajo  $H_0$ , es decir, considerando que la hipótesis nula de que  $X$  sigue la distribución exponencial sea cierta. Como el test es invariante por cambio de escala, se puede asumir sin pérdida de generalidad que  $X$  es exponencial con  $\lambda = 1/2$ .

En primer lugar, en el siguiente lema se obtiene la expresión de  $\Delta_{\text{IFR}}(n)$  como combinación lineal de los espaciamientos normalizados  $D_l$  definidos en (1.6). El objetivo es poder aplicar el Teorema 1.2 para obtener su distribución exacta.

**Lema 2.1**

$$\Delta_{IFR}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{j,n} D_j, \quad (2.7)$$

donde  $e_{k,n} \equiv \sum_{l=1}^5 (-1)^{l+1} \cdot w_l \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^l$ , con  $w_5 \equiv \frac{1}{6}$ ,  $w_4 \equiv \frac{1}{2n} + \frac{5}{6}$ ,  $w_3 \equiv \frac{2}{3n^2} + \frac{2}{n} + \frac{5}{3}$ ,  $w_2 \equiv \frac{1}{2n^3} + \frac{11}{6n^2} + \frac{5}{2n} + \frac{4}{3}$  y  $w_1 \equiv \frac{1}{6n^4} + \frac{2}{3n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3}$  para  $e_{i,n} \neq e_{j,n}$ , para todo  $i \neq j$ , con  $n$  dado.

**Demostración.** La expresión (2.6) puede escribirse en términos de los espaciamentos normalizados  $D_l$  dados en (1.6) como:

$$\begin{aligned} \Delta_{IFR}(n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{j}{n}\right)^2 \left[ \sum_{l=i+1}^n \frac{n-l+1}{(n-i)^2} D_l - \sum_{l=j+1}^n \frac{n-l+1}{(n-j)^2} D_l \right] \\ &= \frac{1}{n^6} \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \left[ \sum_{l=i+1}^n (n-l+1)(n-j)^2 D_l - \sum_{l=j+1}^n (n-l+1)(n-i)^2 D_l \right] = \frac{1}{n^6} \sum_{i=0}^{n-2} (\Psi_{1:i} + \Psi_{2:i}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$\Psi_{1:i} = \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^j (n-l+1)(n-j)^2 D_l$$

y

$$\Psi_{2:i} = \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n (n-l+1)((n-j)^2 - (n-i)^2) D_l,$$

y cambiando los límites de los sumatorios contenidos en  $\Psi_{1:i}$  se obtiene que:

$$\Psi_{1:i} = \sum_{l=i+1}^{n-1} \sum_{j=l}^{n-1} (n-l+1)(n-j)^2 D_l = \sum_{l=i+1}^{n-1} D_l (n-l+1) A, \quad (2.9)$$

siendo  $A = \sum_{j=l}^{n-1} (n^2 - 2nj + j^2)$ .

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n \cdot (n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}, \quad (2.10)$$

se tiene que:

$$A = n^2(n-1-l+1) - 2n \left[ \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(l-1)l}{2} \right] + \left[ \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(l-1)l(2l-1)}{6} \right],$$



y operando se obtiene que  $A = \frac{1}{6}(n-l)(-4nl + 1 - 3l + 3n + 2n^2 + 2l^2)$ . Escribiendo  $2n^2 + 2l^2$  como  $2(n+l)(n-l) + 4l^2$ , se tiene que:

$$A = \frac{1}{6}(n-l)(-4l(n-l) + 3(n-l) + 2(n+l)(n-l) + 1) = \frac{1}{6}(n-l)(n-l+1)[2(n-l)+1]. \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.11) en (2.9), se tiene que:

$$\Psi_{1:i} = \sum_{l=i+1}^{n-1} \frac{(n-l)(n-l+1)^2 [2(n-l)+1]}{6} D_l = \sum_{j=i+1}^n a_j D_j, \quad (2.12)$$

siendo  $a_j = \frac{(n-j)(n-j+1)^2 [2(n-j)+1]}{6}$ .

Vamos a obtener ahora una expresión similar para  $\Psi_{2:i}$ :

$$\Psi_{2:i} = \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{l=j+1}^n (n-l+1) [(n-j)^2 - (n-i)^2] D_l = \sum_{l=i+2}^n D_l (n-l+1) B, \quad (2.13)$$

donde  $B = \sum_{j=i+1}^{l-1} [(n-j)^2 - (n-i)^2] = \sum_{j=i+1}^{l-1} (n^2 - 2nj + j^2 - n^2 + 2ni - i^2),$

y utilizando (2.10) se tiene que:

$$B = -2n \left[ \frac{(l-1)l}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right] + \frac{(l-1)l(2l-1)}{6} - \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} + 2ni(l-1-i) - i^2(l-1-i),$$

y operando se obtiene que:

$$B = -c_l - (-c_i) - (l-1-i)(n-i)^2, \quad (2.14)$$

siendo

$$c_l = \frac{-6n^2l + 6nl^2 - 6nl - 2l^3 + 3l^2 - l + n + 3n^2 + 2n^3}{6}$$

y

$$c_i = \frac{-6in^2 + 6ni^2 + 6in - 2i^3 - 3i^2 - i + n - 3n^2 + 2n^3}{6}.$$

Para  $-c_l$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
-c_l &= \frac{-(n-l) + 6nl(n-l) + 6l(n-l) + 2l^3 + 3l^2 - 3n^2 - 2n^3}{6} \\
&= \frac{n-l}{6}(-1 + 4nl + 3l - 3n - 2n^2 - 2l^2) \\
&= \frac{n-l}{6}(-3(n-l+1) - 2n(n-l+1) + 2l(n-l+1) - 1 + 3 + 2n - 2l) \\
&= -\frac{(n-l)(n-l+1)[2(n-l)+1]}{6}
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$c_l = \frac{(n-l)(n-l+1)[2(n-l)+1]}{6}. \quad (2.15)$$

Para  $-c_i$  se tiene que:

$$\begin{aligned}
-c_i &= \frac{-(n-i) + 6in(n-i-1) - 2(n-i)(n^2+i^2) + 2ni^2 - 2n^2i + 3(n^2+i^2)}{6} \\
&= \frac{-(n-i-1) + 6in(n-i-1) - 2(n-i-1)(n^2+i^2) - 2in(n-i-1) + n^2+i^2 - 2in-1}{6}
\end{aligned}$$

y como  $n^2 + i^2 - 2in - 1 = (n-i-1)(n-i+1)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
-c_i &= \frac{-(n-i-1) + 6in(n-i-1) - 2(n-i-1)(n^2+i^2) - 2in(n-i-1) + (n-i-1)(n-i+1)}{6} \\
&= \frac{n-i-1}{6}[-2(n-i)^2 + (n-i)] = -\frac{n-i-1}{6}(n-i)[2(n-i-1)+1]
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$c_i = \frac{n-i-1}{6}(n-i)[2(n-i-1)+1]. \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.15) y (2.16) en (2.14) y (2.14) en (2.13), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi_{2:i} &= \sum_{l=i+2}^n (n-l+1) \left[ \frac{(n-i-1)(n-i)(2(n-i-1)+1)}{6} - \frac{(n-l)(n-l+1)(2(n-l)+1)}{6} - (l-i-1)(n-i)^2 \right] D_l \\
&= \sum_{j=i+1}^n b_{i,j} D_j,
\end{aligned} \quad (2.17)$$

siendo  $b_{i,j} = (n-j+1)[c_i - c_j - (j-i-1)(n-i)^2]$ .

Sustituyendo (2.12) y (2.17) en (2.8) tenemos que:

$$\Delta_{\text{IFR}}(n) = \frac{1}{n^6} \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=0}^{j-1} (a_j + b_{i,j}) D_j \right] \quad (2.18)$$

y desarrollando  $a_j$  y  $b_{i,j}$  se obtiene que:

$$a_j = \frac{n-j+1}{6} (2n^3 - 6n^2j + 3n^2 + 6nj^2 - 6nj - 2j^3 + 3j^2 + n - j),$$

$$b_{i,j} = \frac{n-j+1}{6} (4i^3 - 6i^2n - 6in + 3i^2 - i - 6nj^2 + 6nj + 2j^3 - 3j^2 + j + 12ijn - 6i^2j), \text{ y}$$

$$a_j + b_{i,j} = \frac{n-j+1}{6} (2n^3 - 6n^2j + 3n^2 + n - 6i^2n - 6in + 4i^3 + 3i^2 - i + 12ijn - 6i^2j).$$

Sustituyendo esta última expresión en (2.18), se tiene que:

$$\Delta_{\text{IFR}}(n) = \frac{1}{6n^6} \sum_{j=1}^n (n-j+1) D_j \sum_{i=0}^{j-1} (2n^3 - 6n^2j + 3n^2 + n - 6i^2n - 6in + 4i^3 + 3i^2 - i + 12ijn - 6i^2j).$$

Teniendo en cuenta (2.10) y que  $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ , se llega a que:

$$\Delta_{\text{IFR}}(n) = \frac{1}{6n^6} \sum_{j=1}^n (n-j+1) (2n^3j - 6n^2j^2 + 3n^2j + 3nj + 4j^3n - 6nj^2 - j^4 + 2j^3 - 2j^2 + j) D_j.$$

Desarrollando esta última expresión, se obtiene que:

$$\Delta_{\text{IFR}}(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_{j,n} D_j,$$

donde

$$\begin{aligned} e_{j,n} = & \frac{1}{6} \left( \frac{j}{n} \right)^5 - \left( \frac{1}{2n} + \frac{5}{6} \right) \left( \frac{j}{n} \right)^4 + \left( \frac{2}{3n^2} + \frac{2}{n} + \frac{5}{3} \right) \left( \frac{j}{n} \right)^3 - \left( \frac{1}{2n^3} + \frac{11}{6n^2} + \frac{5}{2n} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{j}{n} \right)^2 \\ & + \left( \frac{1}{6n^4} + \frac{2}{3n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3} \right) \frac{j}{n}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

■

Para hacer que bajo la hipótesis nula el parámetro de la distribución exponencial no tenga relevancia y que el test sea invariante por cambio de escala, se realiza una modificación de la expresión (2.7) en la que se definía la forma de  $\Delta_{\text{IFR}}(n)$ :

$$\Delta_{\text{IFR}}^*(n) = \frac{\sum_{j=1}^n e_{j,n} D_j}{\sum_{j=1}^n D_j}. \quad (2.20)$$

Podemos ahora obtener la distribución exacta del estadístico como podemos ver en el siguiente resultado:

**Proposición 2.1** *La distribución exacta del estadístico  $\Delta_{IFR}^*(n)$  bajo la hipótesis nula es:*

$$Pr\{\Delta_{IFR}^*(n) \leq x\} = 1 - \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{e_{i,n} - x}{e_{i,n} - e_{j,n}} \cdot I(x < e_{i,n}),$$

donde  $e_{k,n} \equiv \sum_{l=1}^5 (-1)^{l+1} \cdot w_l \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^l$ , con  $w_5 \equiv \frac{1}{6}$ ,  $w_4 \equiv \frac{1}{2n} + \frac{5}{6}$ ,  $w_3 \equiv \frac{2}{3n^2} + \frac{2}{n} + \frac{5}{3}$ ,  $w_2 \equiv \frac{1}{2n^3} + \frac{11}{6n^2} + \frac{5}{2n} + \frac{4}{3}$  y  $w_1 \equiv \frac{1}{6n^4} + \frac{2}{3n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3}$  para  $e_{i,n} \neq e_{j,n}$ , para todo  $i \neq j$ , con  $n$  dado.

**Demostración.** El resultado es consecuencia de (2.20) y del Teorema 1.2. ■

### 2.2.2. Distribución asintótica de $\Delta_{IFR}^*(n)$

En este apartado se estudia la distribución límite del estadístico  $\Delta_{IFR}^*(n)$ , así como la media y la varianza de dicha distribución límite.

Para ese estudio se necesita el siguiente resultado previo, en el que se da la expresión de  $\Delta_{IFR}(n)$  como combinación lineal de una muestra ordenada. En este caso, el objetivo es aplicar el Teorema 1.3 para obtener su distribución asintótica.

**Lema 2.2**

$$\Delta_{IFR}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,n} \cdot X_{(i)}, \quad (2.21)$$

$$\text{donde } \varepsilon_{i,n} \equiv \sum_{l=0}^5 (-1)^{l+1} \cdot w_l \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^l, \quad w_5 \equiv 1, \quad w_4 \equiv \frac{5}{6n} + 5, \quad w_3 \equiv \frac{4}{3n^2} + \frac{10}{3n} + 10,$$

$$w_2 \equiv \frac{2}{3n^3} + \frac{7}{2n^2} + \frac{7}{2n} + 9, \quad w_1 \equiv \frac{1}{6n^4} + \frac{5}{6n^3} + \frac{13}{6n^2} + \frac{1}{3n} + \frac{10}{3}, \quad w_0 \equiv \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

**Demostración.** Por (1.6), se tiene que  $D_l = (n - l + 1) \cdot (X_{(l)} - X_{(l-1)})$ , y por el lema 2.1, que  $\Delta_{IFR}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{i,n} \cdot D_i$ . Por tanto:

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{IFR}}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{i,n} \cdot (n-i+1) \cdot (X_{(i)} - X_{(i-1)}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e_{i,n} \cdot (n-i+1) - e_{i+1,n} \cdot (n-i)] X_{(i)}.\end{aligned}$$

Usando (2.19) que da la expresión de  $e_{i,n}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}e_{i,n}(n-i+1) - e_{i+1,n}(n-i) &= \frac{1}{6} \left[ (n-i+1) \left(\frac{i}{n}\right)^5 - (n-i) \left(\frac{i+1}{n}\right)^5 \right] \\ &\quad - \left(\frac{1}{2n} + \frac{5}{6}\right) \left[ (n-i+1) \left(\frac{i}{n}\right)^4 - (n-i) \left(\frac{i+1}{n}\right)^4 \right] \\ &\quad + \left(\frac{2}{3n^2} + \frac{2}{n} + \frac{5}{3}\right) \left[ (n-i+1) \left(\frac{i}{n}\right)^3 - (n-i) \left(\frac{i+1}{n}\right)^3 \right] \\ &\quad - \left(\frac{1}{2n^3} + \frac{11}{6n^2} + \frac{5}{2n} + \frac{4}{3}\right) \left[ (n-i+1) \left(\frac{i}{n}\right)^2 - (n-i) \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \right] \\ &\quad + \left(\frac{1}{6n^4} + \frac{2}{3n^3} + \frac{1}{n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3}\right) \left[ (n-i+1) \frac{i}{n} - (n-i) \frac{i+1}{n} \right].\end{aligned}$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene que:

$$\begin{aligned}e_{i,n}(n-i+1) - e_{i+1,n}(n-i) &= \frac{6i^5 - 5i^4 + 8i^3 - 4i^2 + i}{6n^5} + \frac{-30i^4 + 20i^3 - 21i^2 + 5i}{6n^4} \\ &\quad + \frac{60i^3 - 21i^2 + 13i}{6n^3} + \frac{-54i^2 + 2i - 1}{6n^2} + \frac{20i + 3}{6n} - \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{i}{n}\right)^5 - \left(\frac{5}{6n} + 5\right) \left(\frac{i}{n}\right)^4 + \left(\frac{4}{3n^2} + \frac{10}{3n} + 10\right) \left(\frac{i}{n}\right)^3 - \left(\frac{2}{3n^3} + \frac{7}{2n^2} + \frac{7}{2n} + 9\right) \left(\frac{i}{n}\right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{6n^4} + \frac{5}{6n^3} + \frac{13}{6n^2} + \frac{1}{3n} + \frac{10}{3}\right) \frac{i}{n} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right).\end{aligned}$$

■

Por (2.21), se puede aplicar el Teorema 1.3 al estadístico  $\Delta_{\text{IFR}}(n)$  obteniéndose que:

$$\sqrt{n} \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{IFR}}(n) - \mu(J, F_X)}{\sigma(J, F_X)} \right) \xrightarrow{L} N(0, 1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De la misma forma, se puede aplicar el Teorema 1.4 al estadístico  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$  y entonces se tiene que:

$$\sqrt{n} \cdot \left( \Delta_{\text{IFR}}^*(n) - \frac{\mu(J, F_X)}{E[X]} \right) \xrightarrow{L} N\left(0, \frac{\sigma^2(J^*, F_X)}{E[X]^2}\right) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde  $J^*(u) = J(u) - \frac{\mu(J, F_X)}{E[X]}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

En la siguiente proposición se determina exactamente la distribución límite bajo  $H_0$  hallando los valores de  $\mu(J, F_X)$  y de  $\sigma^2(J, F_X)$ . Si se considera  $H_0$  como cierto, entonces se está considerando que  $X$  sigue una distribución exponencial. Como  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$  es invariante por cambio de escala, se puede suponer que  $X$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1$ .

**Proposición 2.2** *Si se tiene que:*

$$\bullet F_X(t) = 1 - \exp(-t), \quad t > 0. \quad (2.22)$$

$$\bullet J(u) = u^5 - 5u^4 + 10u^3 - 9u^2 + \frac{10}{3}u - \frac{1}{3}. \quad (2.23)$$

Entonces:

$$\mu(J, F_X) = 0, \quad \sigma^2(J, F_X) = \frac{23}{83610}.$$

**Demostración.** Para calcular  $\mu(J, F_X)$ , definida en (1.9), se utiliza la expresión:

$$\mu(J, F_X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot J(F_X(x)) dF_X(x) = \sum_{p=0}^r \frac{w_{r,p}}{p+1} \int_0^{\infty} \overline{F}_X^{p+1}(x) dx, \quad (2.24)$$

donde  $w_{r,p} \equiv (-1)^p \sum_{j=p}^r \binom{j}{p} a_j$ . Como  $J(u) = \sum_{p=0}^r a_p u^p$ , para este caso se pueden identificar los  $a_j$  como:

$$a_0 = -\frac{1}{3}, \quad a_1 = \frac{10}{3}, \quad a_2 = -9, \quad a_3 = 10, \quad a_4 = -5, \quad a_5 = 1,$$

y se puede calcular  $w_{r,p}$ :

$$w_{5,0} = (-1)^0 \sum_{j=0}^5 \binom{j}{0} a_j = -\frac{1}{3} + \frac{10}{3} - 9 + 10 - 5 + 1 = 0,$$

$$w_{5,1} = (-1)^1 \sum_{j=1}^5 \binom{j}{1} a_j = (-1) \cdot \left( \frac{10}{3} - 18 + 30 - 20 + 5 \right) = -\frac{1}{3},$$

$$w_{5,2} = (-1)^2 \sum_{j=2}^5 \binom{j}{2} a_j = -9 + 30 - 30 + 10 = 1,$$

$$\begin{aligned}
w_{5,3} &= (-1)^3 \sum_{j=3}^5 \binom{j}{3} a_j = (-1) \cdot (10 - 20 + 10) = 0, \\
w_{5,4} &= (-1)^4 \sum_{j=4}^5 \binom{j}{4} a_j = -5 + 5 = 0, \\
w_{5,5} &= (-1)^5 \sum_{j=5}^5 \binom{j}{5} a_j = (-1) \cdot 1 = -1.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Sustituyendo la expresión de  $w_{r,p}$  en (2.24), así como (2.22), se calcula  $\mu(J, F_X)$ :

$$\begin{aligned}
\mu(J, F_X) &= \sum_{p=0}^5 \frac{w_{5,p}}{p+1} \int_0^\infty (\exp(-t))^{p+1} dt = -\frac{1}{6} \int_0^\infty \exp(-2t) dt + \frac{1}{3} \int_0^\infty \exp(-3t) dt \\
&\quad - \frac{1}{6} \int_0^\infty \exp(-6t) dt = \frac{1}{12} \exp(-2t) \Big|_0^\infty - \frac{1}{9} \exp(-3t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{36} \exp(-6t) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{12} + \frac{1}{9} - \frac{1}{36} = 0.
\end{aligned}$$

Denotando por  $\Xi_{x,y}(\xi) \equiv J(F_X(x)) \cdot J(F_X(y)) \cdot [F_X(\xi) - F_X(x) \cdot F_X(y)]$  en (1.10), entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}
\sigma^2(J, F_X) &= \int \int_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, y < x} \Xi_{x,y}(y) dx dy + \int \int_{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2, x \leq y} \Xi_{x,y}(x) dx dy \\
&= \int_y^\infty \int_0^\infty J(F_X(x)) \cdot J(F_X(y)) \cdot [F_X(y) \cdot (1 - F_X(x))] dx dy \\
&\quad + \int_x^\infty \int_0^\infty J(F_X(x)) \cdot J(F_X(y)) \cdot [F_X(x) \cdot (1 - F_X(y))] dx dy \\
&= \int_0^\infty J(F_X(y)) \cdot F_X(y) \left( \int_y^\infty J(F_X(x)) \cdot \bar{F}_X(x) dx \right) dy \\
&\quad + \int_0^\infty J(F_X(x)) \cdot F_X(x) \left( \int_x^\infty J(F_X(y)) \cdot \bar{F}_X(y) dy \right) dx \\
&= 2 \int_0^\infty J(F_X(s)) \cdot F_X(s) \left( \int_s^\infty J(F_X(t)) \cdot \bar{F}_X(t) dt \right) ds,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

y sustituyendo (2.22) y (2.23) en la segunda integral de (2.26), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty J(F_X(t)) \bar{F}_X(t) dt &= \int_s^\infty [(1 - \exp(-t))^5 - 5(1 - \exp(-t))^4 + 10(1 - \exp(-t))^3 \\
&\quad - 9(1 - \exp(-t))^2 + \frac{10}{3}(1 - \exp(-t)) - \frac{1}{3}] \cdot (\exp(-t)) dt,
\end{aligned}$$

donde para resolver la integral anterior, se considera el cambio de variable

$$1 - \exp(-t) = u, \quad du = \exp(-t)dt, \quad \begin{cases} t = s & \rightarrow u = 1 - \exp(-s) \\ t = \infty & \rightarrow u = 1 \end{cases}$$

y tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int_s^\infty J(F_X(t)) \bar{F}_X(t) dt &= \int_{1-\exp(-s)}^1 \left( u^5 - 5u^4 + 10u^3 - 9u^2 + \frac{10}{3}u - \frac{1}{3} \right) du \\ &= \left( \frac{u^6}{6} - u^5 + \frac{5}{2}u^4 - 3u^3 + \frac{5}{3}u^2 - \frac{1}{3}u \right) \Big|_{1-\exp(-s)}^1 = -\frac{(1 - \exp(-s))^6}{6} + (1 - \exp(-s))^5 \\ &\quad - \frac{5}{2}(1 - \exp(-s))^4 + 3(1 - \exp(-s))^3 - \frac{5}{3}(1 - \exp(-s))^2 + \frac{1}{3}(1 - \exp(-s)) \\ &= -\frac{1}{6}\exp(-6s) + \frac{1}{3}\exp(-3s) - \frac{1}{6}\exp(-2s). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2.26), se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma^2(J, F_X) &= 2 \int_0^\infty [(1 - \exp(-s))^5 - 5(1 - \exp(-s))^4 + 10(1 - \exp(-s))^3 - 9(1 - \exp(-s))^2 \\ &\quad + \frac{10}{3}(1 - \exp(-s)) - \frac{1}{3}] \cdot [1 - \exp(-s)] \cdot \left[ -\frac{1}{6}\exp(-6s) + \frac{1}{3}\exp(-3s) - \frac{1}{6}\exp(-2s) \right] ds \\ &= 2 \int_0^\infty [(1 - \exp(-s))^6 - 5(1 - \exp(-s))^5 + 10(1 - \exp(-s))^4 - 9(1 - \exp(-s))^3 \\ &\quad + \frac{10}{3}(1 - \exp(-s))^2 - \frac{1}{3}(1 - \exp(-s))] \left[ -\frac{1}{6}\exp(-5s) + \frac{1}{3}\exp(-2s) - \frac{1}{6}\exp(-s) \right] \exp(-s) ds, \end{aligned}$$

integral que se resuelve mediante el cambio de variable, resultando:

$$\begin{aligned} \sigma^2(J, F_X) &= 2 \int_0^1 \left( u^6 - 5u^5 + 10u^4 - 9u^3 + \frac{10}{3}u^2 - \frac{1}{3}u \right) \cdot \left[ -\frac{1}{6}(1-u)^5 + \frac{1}{3}(1-u)^2 - \frac{1}{6}(1-u) \right] du \\ &= 2 \left[ -\frac{1}{6} \int_0^1 u^6(1-u)^5 du + \frac{1}{3} \int_0^1 u^6(1-u)^2 du - \frac{1}{6} \int_0^1 u^6(1-u) du - 5 \left( -\frac{1}{6} \int_0^1 u^5(1-u)^5 du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \int_0^1 u^5(1-u)^2 du - \frac{1}{6} \int_0^1 u^5(1-u) du \right) + 10 \left( -\frac{1}{6} \int_0^1 u^4(1-u)^5 du + \frac{1}{3} \int_0^1 u^4(1-u)^2 du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{6} \int_0^1 u^4(1-u) du \right) - 9 \left( -\frac{1}{6} \int_0^1 u^3(1-u)^5 du + \frac{1}{3} \int_0^1 u^3(1-u)^2 du - \frac{1}{6} \int_0^1 u^3(1-u) du \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{10}{3} \left( -\frac{1}{6} \int_0^1 u^2(1-u)^5 du + \frac{1}{3} \int_0^1 u^2(1-u)^2 du - \frac{1}{6} \int_0^1 u^2(1-u) du \right) - \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{6} \int_0^1 u(1-u)^5 du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{3} \int_0^1 u(1-u)^2 du - \frac{1}{6} \int_0^1 u(1-u) du \right) \right]. \end{aligned}$$



Las integrales anteriores son funciones beta del tipo

$$B(x, y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}, \quad (2.27)$$

por lo que dichas integrales se transforman en:

$$\begin{aligned} \sigma^2(J, F_X) = & 2 \left[ -\frac{1}{6} \left( B(7, 6) - 5B(6, 6) + 10B(5, 6) - 9B(4, 6) + \frac{10}{3}B(3, 6) - \frac{1}{3}B(2, 6) \right) \right. \\ & + \frac{1}{3} \left( B(7, 3) - 5B(6, 3) + 10B(5, 3) - 9B(4, 3) + \frac{10}{3}B(3, 3) - \frac{1}{3}B(2, 3) \right) \\ & \left. - \frac{1}{6} \left( B(7, 2) - 5B(6, 2) + 10B(5, 2) - 9B(4, 2) + \frac{10}{3}B(3, 2) - \frac{1}{3}B(2, 2) \right) \right], \end{aligned}$$

y de (2.27) se tiene que:

$$\sigma^2(J, F_X) = \frac{23}{83610}.$$

■

Como consecuencia de que  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n) \xrightarrow{L} N\left(0, \frac{23}{83610}\right)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , se tiene que  $\sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \Delta_{\text{IFR}}^*(n) \xrightarrow{L} N(0, 1)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Denotando por  $\alpha$  el nivel de significación de los contrastes y por  $z_\alpha$  el cuantil  $1 - \alpha$  de la distribución  $Z = N(0, 1)$ , se tiene que para un  $n$  suficientemente grande, en el contraste de hipótesis planteado al principio de esta sección se rechaza la hipótesis nula de que  $X$  sea exponencial cuando  $P\left(Z > \sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \cdot \Delta_{\text{IFR}}^*(n)\right) \leq \alpha$  ó, equivalentemente, cuando  $P\left(Z < \sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \cdot \Delta_{\text{IFR}}^*(n)\right) \leq 1 - \alpha$ , es decir, cuando:

$$\sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \cdot \Delta_{\text{IFR}}^*(n) < z_\alpha \quad \text{ó} \quad \sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \cdot \Delta_{\text{IFR}}^*(n) > z_{1-\alpha}. \quad (2.28)$$

### 2.2.3. Consistencia

En el siguiente teorema veremos que  $\Delta_{\text{IFR}}(X) = \mu(J, F_X)$ . Como  $\mu(J, F_X) = 0$  cuando  $X$  sigue la distribución exponencial, el estadístico  $\Delta_{\text{IFR}}(X)$  es consistente si, y sólo si,  $\mu(J, F_X) > 0$  cuando  $X$  es de la clase IFR o  $\mu(J, F_X) < 0$  cuando es de la clase DFR pero en ninguno de los dos casos es exponencial.

**Teorema 2.1** Sea  $X$  una variable aleatoria con media finita, entonces para  $J(u)$  con la misma forma que en (2.23) se tiene que:

$$\Delta_{IFR}(X) = \mu(J, F_X).$$

**Demostración.** En primer lugar, se ha de considerar que en el desarrollo de algunas integrales por partes de la demostración es necesaria la condición  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \bar{F}(x) = 0$ , la cual es cierta al ser la media de  $X$  finita.

La medida  $\Delta_{IFR}(X)$  la podemos reescribir como:

$$\begin{aligned} \Delta_{IFR}(X) &= \int_{\mathbb{R}^2} I(s < t) \cdot \bar{F}_X^2(s) \cdot \bar{F}_X^2(t) \cdot \Delta_{ST}(X_t, X_s) dF_X(s) dF_X(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(s < t) \cdot \bar{F}_X^2(s) \cdot \bar{F}_X^2(t) \cdot \left( \int_0^\infty \left( \frac{\bar{F}_X(u+s)}{\bar{F}_X(s)} \right)^2 du - \int_0^\infty \left( \frac{\bar{F}_X(u+t)}{\bar{F}_X(t)} \right)^2 du \right) dF_X(s) dF_X(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(s < t) \cdot \bar{F}_X^2(s) \cdot \bar{F}_X^2(t) \cdot \frac{\int_s^\infty \bar{F}_X^2(u) du}{\bar{F}_X^2(s)} dF_X(s) dF_X(t) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} I(s < t) \cdot \bar{F}_X^2(s) \cdot \bar{F}_X^2(t) \cdot \frac{\int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du}{\bar{F}_X^2(t)} dF_X(s) dF_X(t) \\ &= \int_0^\infty \int_s^\infty \bar{F}_X^2(t) \int_s^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) dF_X(s) - \int_0^\infty \int_s^\infty \bar{F}_X^2(s) \int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) dF_X(s) \\ &= \int_0^\infty \left( \int_s^\infty \bar{F}_X^2(u) du \right) \left( \int_s^\infty \bar{F}_X^2(t) dF_X(t) \right) dF_X(s) - \int_0^\infty \bar{F}_X^2(s) \left( \int_s^\infty \int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) \right) dF_X(s). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dado que:

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{F}_X^n(x) dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} (1 - F_X(x))^n dF_X(x) = -\frac{1}{n+1} (1 - F_X(x))^{n+1} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{n+1}, \quad (2.30)$$

y para la integral  $\int_{\mathbb{R}} \bar{F}_X^n(s) \cdot \left[ \int_s^{+\infty} \bar{F}_X^m(t) dt \right] dF_X(s)$  se tiene aplicando el método de integración por partes que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \bar{F}_X^n(s) \cdot \left[ \int_s^{+\infty} \bar{F}_X^m(t) dt \right] dF_X(s) &= -\frac{1}{n+1} \bar{F}_X^{n+1}(s) \int_s^{+\infty} \bar{F}_X^m(t) dt \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n+1} \bar{F}_X^{n+m+1}(s) ds \\ &= \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}} \bar{F}_X^m(t) dt - \frac{1}{n+1} \int_{\mathbb{R}} \bar{F}_X^{n+m+1}(t) dt, \end{aligned} \quad (2.31)$$

sustituyendo (2.30) y (2.31) en (2.26):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left( \int_s^\infty \bar{F}_X^2(u) du \right) \left( \int_s^\infty \bar{F}_X^2(t) dF_X(t) \right) dF_X(s) &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \bar{F}_X^3(s) \left[ \int_s^\infty \bar{F}_X^2(u) du \right] dF_X(s) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^\infty \bar{F}_X^2(u) du - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \int_0^\infty \bar{F}_X^6(u) du = \frac{\delta_2(X)}{12} - \frac{\delta_6(X)}{12}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty \int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) &= \left( -\bar{F}_X(t) \int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du \right) \Big|_s^\infty - \int_s^\infty \bar{F}_X^3(t) dt \\
&= \bar{F}_X(s) \int_s^\infty \bar{F}_X^2(u) du - \int_s^\infty \bar{F}_X^3(t) dt, \\
\int_0^\infty \bar{F}_X^2(s) \left( \int_s^\infty \int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) \right) dF_X(s) &= \int_0^\infty \bar{F}_X^3(s) \left[ \int_s^\infty \bar{F}_X^2(u) du \right] dF_X(s) \\
- \int_0^\infty \bar{F}_X^2(s) \left[ \int_s^\infty \bar{F}_X^3(t) dt \right] dF_X(s) &= \frac{1}{4} \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) dt - \frac{1}{4} \int_0^\infty \bar{F}_X^6(t) dt - \frac{1}{3} \int_0^\infty \bar{F}_X^3(t) dt \\
+ \frac{1}{3} \int_0^\infty \bar{F}_X^6(t) dt &= \frac{\delta_2(X)}{4} - \frac{\delta_6(X)}{4} - \frac{\delta_3(X)}{3} + \frac{\delta_6(X)}{3} = \frac{\delta_2(X)}{4} - \frac{\delta_3(X)}{3} + \frac{\delta_6(X)}{12}, \quad (2.33)
\end{aligned}$$

y sustituyendo (2.32) y (2.33) en (2.29), se tiene que:

$$\Delta_{\text{IFR}}(X) = \frac{\delta_2(X)}{12} - \frac{\delta_6(X)}{12} - \left( \frac{\delta_2(X)}{4} - \frac{\delta_3(X)}{3} + \frac{\delta_6(X)}{12} \right) = -\frac{\delta_2(X)}{6} + \frac{\delta_3(X)}{3} - \frac{\delta_6(X)}{6}.$$

Considerando  $w_{r,p}$  dado en (2.25), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mu(J, F_X) &= \sum_{p=0}^5 \frac{w_{5,p}}{p+1} \int_0^\infty \bar{F}_X^{p+1}(t) dt = -\frac{1}{6} \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) dt + \frac{1}{3} \int_0^\infty \bar{F}_X^3(t) dt - \frac{1}{6} \int_0^\infty \bar{F}_X^6(t) dt \\
&= -\frac{\delta_2(X)}{6} + \frac{\delta_3(X)}{3} - \frac{\delta_6(X)}{6} = \Delta_{\text{IFR}}(X).
\end{aligned}$$

■

### 2.3. Contraste basado en el TTT

En este apartado, se aborda el estadístico que plantea Klefsjö (1983) para el mismo contraste de hipótesis que tratan Belzunce, Candel y Ruiz (1998), expuesto en (2.1), pero que en este caso se apoya en el tiempo total en test (TTT), su transformación y su gráfica, desarrolladas en Barlow y Campo (1975).

Si la hipótesis nula del contraste de hipótesis (2.1) fuera cierta, es decir, si  $F$  siguiera la distribución exponencial de parámetro  $\lambda$ , entonces se tendría que  $\varphi_F(t) = t$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , ya que  $\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x)$ ,  $\mu = \int_0^\infty \exp(-\lambda x) dx = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda x) \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$  y, por tanto,

$$\varphi_F(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{F^{-1}(t)} \exp(-\lambda s) ds = \lambda \int_0^{F^{-1}(t)} \frac{1}{\lambda} dF(s) = F(s)|_0^{F^{-1}(t)} = t.$$

Por la caracterización basada en la TTT-gráfica, tratada en el apartado 1.2.2., se tiene que si  $F$  es de la clase IFR (DFR), entonces la TTT-gráfica es cóncava (convexa). Dado que la TTT empírica es un estimador de la medida TTT, si esta es cóncava (convexa), la TTT empírica debe ser aproximadamente cóncava (convexa). Por tanto, dados tres puntos consecutivos  $u_{j-1}$ ,  $u_j$  y  $u_{j+1}$  de la TTT empírica, debe verificarse (aproximadamente) que si  $F$  sigue la clase de envejecimiento IFR (DFR), entonces:

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n}} < \frac{u_j - u_{j-1}}{\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}} \left( \frac{u_{j+1} - u_j}{\frac{j+1}{n} - \frac{j}{n}} > \frac{u_j - u_{j-1}}{\frac{j}{n} - \frac{j-1}{n}} \right),$$

y esta desigualdad es equivalente a la condición de que

$$2u_j - u_{j-1} - u_{j+1} > 0 \quad (2u_j - u_{j-1} - u_{j+1} < 0), \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Utilizando esta condición, se define el estadístico  $A_1 = \sum_{j=1}^{n-1} (2u_j - u_{j-1} - u_{j+1})$ , del cual se espera un valor positivo (negativo) si  $F$  es IFR (DFR), pero no exponencial.

Desarrollando la expresión de  $A_1$ , se llega a que  $A_1 = -u_0 + u_1 + u_{n-1} - u_n$ . Por (1.7) y (1.8), se tiene que  $u_0 = \frac{S_0}{S_n} = 0$  y  $u_n = \frac{S_n}{S_n} = 1$ , obteniéndose que:

$$A_1 = u_1 + u_{n-1} - 1 = \frac{S_1 + S_{n-1} - S_n}{S_n} = \frac{D_1 - D_n}{S_n},$$

donde  $D_i$  son los espacios normalizados definidos en (1.6).

De David (1970), la distribución de  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$  es la misma que la distribución de una muestra ordenada de tamaño  $n-1$  uniformemente distribuida en el intervalo  $[0, 1]$ , y tenemos que:

$$P(A_1 \leq x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x)^{n-1}, & \text{para } -1 \leq x \leq 0. \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^{n-1}, & \text{para } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

El problema del estadístico  $A_1$  es que como en su numerador únicamente aparecen  $D_1$  y  $D_n$ , este numerador es independiente de  $D_2, D_3, \dots, D_{n-1}$ , lo que convierte al test que se basa en  $A_1$  en inconsistente contra la clase IFR (DFR), por lo que se debe encontrar un estadístico alternativo.

Para ello, se sigue el mismo razonamiento empleado para construir  $A_1$ , es decir, se utiliza de nuevo la caracterización basada en la TTT-gráfica. La diferencia es que mientras que antes se establecía la condición que permitía obtener el estadístico tomando como referencia tres puntos consecutivos, ahora se asume que esa condición se tiene que cumplir para tres puntos distintos cualesquiera, por lo que se tiene que satisfacer que:

$$\frac{u_{j+k} - u_j}{\frac{j+k}{n} - \frac{j}{n}} < \frac{u_{j+v} - u_j}{\frac{j+v}{n} - \frac{j}{n}} \quad \left( \frac{u_{j+k} - u_j}{\frac{j+k}{n} - \frac{j}{n}} > \frac{u_{j+v} - u_j}{\frac{j+v}{n} - \frac{j}{n}} \right),$$

para  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ,  $k = 2, 3, \dots, n-j$ , y  $v = 1, 2, \dots, k-1$ .

Esta condición es equivalente a que se cumpla que:

$$u_j + \frac{(u_{j+k} - u_j)v}{k/n} < u_{j+v} \quad \left( u_j + \frac{(u_{j+k} - u_j)v}{k/n} > u_{j+v} \right),$$

que a su vez es equivalente a que se satisfaga:

$$k(u_{j+v} - u_j) > v(u_{j+k} - u_j) \quad (k(u_{j+v} - u_j) < v(u_{j+k} - u_j)),$$

para  $j = 0, 1, \dots, n-2$ ,  $k = 2, 3, \dots, n-j$ , y  $v = 1, 2, \dots, k-1$ .

A partir de esta condición, se construye el estadístico:

$$A_2 = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{v=1}^{k-1} [k(u_{j+v} - u_j) - v(u_{j+k} - u_j)]$$

y por la manera en que ha sido construido, se espera que  $A_2$  sea positivo (negativo) si  $F$  es IFR (DFR) pero no exponencial.

En el siguiente lema, se obtiene para este estadístico una expresión equivalente que permitirá posteriormente estudiar sus propiedades.

**Lema 2.3**

$$A_2 = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^n \alpha_i D_i, \quad (2.34)$$

donde  $\alpha_i = \frac{1}{6} [(n+1)^3 i - 3(n+1)^2 i^2 + 2(n+1)i^3]$ ,  $S_n$  viene dado en (1.7) y  $D_i$  son los espacios normalizados definidos en (1.6).

**Demostración.**

$$\begin{aligned}
A_2 &= \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{v=1}^{k-1} [k(u_{j+v} - u_j) - v(u_{j+k} - u_j)], \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{v=1}^{k-1} \left[ k \left( \frac{S_{j+v} - S_j}{S_n} \right) - v \left( \frac{S_{j+k} - S_j}{S_n} \right) \right] \\
&= \frac{1}{S_n} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{v=1}^{k-1} \left[ k \left( \sum_{i=1}^{j+v} D_i - \sum_{i=1}^j D_i \right) - v \left( \sum_{i=1}^{j+k} D_i - \sum_{i=1}^j D_i \right) \right] = \frac{1}{S_n} (\Psi_1 - \Psi_2),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

donde

$$\Psi_1 = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{v=1}^{k-1} k \sum_{i=j+1}^{j+v} D_i \tag{2.36}$$

y

$$\Psi_2 = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{v=1}^{k-1} v \sum_{i=j+1}^{j+k} D_i \tag{2.37}.$$

Por (2.36), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} k \sum_{i=j+1}^{j+k-1} (k+j-i) D_i = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} \sum_{k=i-j+1}^{n-j} k(k+j-i) D_i \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} D_i \sum_{k=i-j+1}^{n-j} (k^2 + kj - ki).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

De (2.10), el último sumatorio de esta expresión se transforma en:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i-j+1}^{n-j} (k^2 - kj - ki) &= \frac{(n-j)(n-j+1)(2n-2j+1)}{6} - \frac{(i-j)(i-j+1)(2i-2j+1)}{6} \\
&\quad + \left[ \frac{(n-j)(n-j+1)}{2} - \frac{(i-j)(i-j+1)}{2} \right] (j-i) \\
&= \frac{1}{6} (2n^3 - 3n^2j + 3n^2 - 3in^2 - 3nj + n - 3in + 6nji + 3ij - 3i^2j + i^3 - i).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Sustituyendo (2.39) en (2.38), se tiene que:

$$\Psi_1 = \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^{n-1} (2n^3 - 3n^2j + 3n^2 - 3in^2 - 3nj + n - 3in + 6nji + 3ij - 3i^2j + i^3 - i) D_i$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} D_i \sum_{j=0}^{i-1} (2n^3 - 3n^2j + 3n^2 - 3in^2 - 3nj + n - 3in + 6nji + 3ij - 3i^2j + i^3 - i),$$

y de nuevo por (2.10), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} D_i \left[ 2in^3 - 3n^2 \frac{(i-1)i}{2} + 3in^2 - 3i^2n^2 - 3n \frac{(i-1)i}{2} + ni - 3i^2n \right. \\ &\quad \left. + 6ni \frac{(i-1)i}{2} + 3i \frac{(i-1)i}{2} - 3i^2 \frac{(i-1)i}{2} + i^4 - i^2 \right] = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} D_i B_i, \end{aligned}$$

siendo  $B_i = 2in^3 + \frac{9in^2}{2}(1-i) + \frac{in}{2}(5-15i+6i^2) + \frac{i^2}{2}(-i^2+6i-5)$ , y como

$$B_n = 2n^4 + \frac{9n^3}{2}(1-n) + \frac{n^2}{2}(5-15n+6n^2) + \frac{n^2}{2}(-n+6n-5) = 0,$$

$$\text{entonces, } \Psi_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{n-1} B_i D_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n B_i D_i. \quad (2.40)$$

Para (2.37) y considerando (2.10), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{v=1}^{k-1} v \sum_{i=j+1}^{j+k} D_i = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{i=j+1}^{j+k} D_i \sum_{v=1}^{k-1} v = \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{k=2}^{n-j} \sum_{i=j+1}^{j+k} D_i \frac{(k-1)k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^n D_i \sum_{k=i-j}^{n-j} (k^2 - k) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^n D_i \left[ \frac{1}{6}(n-j)(n-j+1)(2n-2j+1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(i-j-1)(i-j)(2i-2j-1) - \frac{1}{2}(n-j)(n-j+1) + \frac{1}{2}(i-j-1)(i-j) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^n D_i \left[ \frac{1}{2}(n-j)(n-j+1) \left( \frac{1}{3}(2n-2j+1) - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(i-j-1)(i-j) \left( \frac{1}{3}(2i-2j-1) - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{6} \sum_{j=0}^{n-2} \sum_{i=j+1}^n [(n-j)(n-j+1)(n-j-1) - (i-j-1)(i-j)(i-j-2)] D_i \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n D_i \sum_{j=0}^{i-1} [(n-j)(n-j+1)(n-j-1) - (i-j-1)(i-j)(i-j-2)] \\ &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n D_i \sum_{j=0}^{i-1} (n^3 - 3jn^2 + 3nj^2 - n + 3j - i^3 + 3i^2j + 3i^2 - 3ij^2 - 6ij - 2i + 3j^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n D_i \left[ in^3 - 3 \frac{(i-1)i}{2} n^2 + 3n \frac{(i-1)i(2i-1)}{6} - ni + 3 \frac{(i-1)i}{2} - i^4 \right. \\
&\quad \left. + 3i^2 \frac{(i-1)i}{2} + 3i^3 - 3i \frac{(i-1)i(2i-1)}{6} - 6i \frac{(i-1)i}{2} - 2i^2 + 3 \frac{(i-1)i(2i-1)}{6} \right] \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n C_i D_i, \quad (2.41)
\end{aligned}$$

donde  $C_i = in^3 - 3 \frac{(i-1)i}{2} n^2 + \frac{n}{2} [(i-1)i(2i-1) - 2i] - \frac{i^4}{2} + i^3 + \frac{i^2}{2} - i$ .

Restando (2.40) y (2.41), se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 - \Psi_2 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (B_i - C_i) D_i = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n D_i \left[ in^3 + \frac{3n^2 i}{2} (3 - 3i + i - 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{ni}{2} [5 - 15i + 6i^2 - (i-1)(2i-1) + 2] + \frac{1}{2} (-i^3 + 6i^2 - 5i + i^3 - i + 2 - 2i^2) \right] \\
&= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n [(n^3 + 3n^2 + 3n + 1)i + i^2(-3n^2 - 6n - 3) + i^3(2n + 2)] D_i \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{6} [(n+1)^3 i - 3(n+1)^2 i^2 + 2(n+1)i^3] D_i. \quad (2.42)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.42) en (2.35), se tiene que:

$$A_2 = \frac{1}{S_n} \sum_{i=1}^n \alpha_i D_i, \quad \text{donde } \alpha_i = \frac{1}{6} [(n+1)^3 i - 3(n+1)^2 i^2 + 2(n+1)i^3].$$

■

### 2.3.1. Distribución exacta de $A_2$

Al igual que se ha hecho con el estadístico  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$ , en este apartado se da una expresión de la distribución exacta de  $A_2$  cuando  $H_0$  es cierta, es decir, cuando  $F$  sigue la distribución exponencial. Por tanto, suponemos que  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  es una muestra ordenada de una distribución exponencial y también podemos suponer sin pérdida de generalidad que el parámetro de la distribución exponencial es  $\lambda = \frac{1}{2}$ , ya que el estadístico  $A_2$  es invariante por cambio de escala.



**Proposición 2.3** *La distribución exacta del estadístico  $A_2$  bajo la hipótesis nula es:*

$$Pr\{A_2 \leq x\} = 1 - \sum_{j=1}^n \prod_{i=1, i \neq j}^n \frac{\alpha_j - x}{\alpha_j - \alpha_i} \cdot I(x < \alpha_j),$$

donde  $\alpha_j = \frac{1}{6} [(n+1)^3 j - 3(n+1)^2 j^2 + 2(n+1)j^3]$ .

**Demostración.** El resultado se obtiene de (2.34) y del Teorema 1.2. ■

### 2.3.2. Distribución asintótica de $A_2$

En este apartado, se prueba que  $A_2$  es asintóticamente normal bajo algunas condiciones que se establecen sobre  $F$  y se calcula cuál es la media y la varianza de su distribución límite.

Un paso previo antes de estudiar la distribución asintótica de  $A_2$  es hallar su expresión como combinación lineal de una muestra ordenada, resultado que se obtiene en el siguiente lema.

**Lema 2.4**

$$A_2 = \frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n \alpha_j D_j = \frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n \alpha'_j X_{(j)}, \quad (2.43)$$

con  $\alpha'_j = \frac{1}{6}(8nj^3 - 15n^2j^2 + 8n^3j - n^4) + p(n^a j^b)$ , donde  $p(n^a j^b)$  denota el polinomio constituido por la suma de términos de la forma  $n^a j^b$  con  $a + b \leq 3$ ,  $\alpha_j$  viene dada en (2.34),  $S_n$  en (1.7) y  $D_j$  está definido en (1.6).

**Demostración.** Para  $j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \alpha_{j+1} D_{j+1} + \alpha_j D_j &= \frac{1}{6} [(n+1)^3(j+1) - 3(n+1)^2(j+1)^2 + 2(n+1)(j+1)^3] (n-j) \cdot \\ &\cdot [X_{(j+1)} - X_{(j)}] + \frac{1}{6} [(n+1)^3 j - 3(n+1)^2 j^2 + 2(n+1)j^3] (n-j+1) [X_{(j)} - X_{(j-1)}] \end{aligned}$$

Como para determinar  $\alpha'_j$  únicamente es necesario conocer el coeficiente que multiplica a  $X_{(j)}$ , se desarrolla la expresión anterior tomando en consideración solamente ese coeficiente, teniendo entonces:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{6} [j(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3(n^2 + 2n + 1)(j^2 + 2j + 1) + 2 \cdot \\
& \cdot (n + 1)(j^3 + 3j^2 + 3j + 1)](n - j)X_{(j)} + \frac{1}{6} [j(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3(n^2 + 2n + 1)j^2 \\
& + 2(n + 1)j^3](n - j + 1)X_{(j)} = \frac{1}{6}X_{(j)} [j(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n - j)(n^3 + 3n^2 + 3n \\
& + 1) + 3(n^2 + 2n + 1)(2j + 1)(n - j) - 3(n^2 + 2n + 1)j^2 - 2(n + 1)(3j^2 + 3j + 1)(n - j) \\
& + 2(n + 1)j^3] = \frac{1}{6}X_{(j)} [2j(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - n(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 3(n^2 + 2n + 1) \\
& \cdot (2jn - 3j^2 + n - j) - 2(n + 1)(3j^2n - 4j^3 + 3jn - 3j^2 + n - j)] = \frac{1}{6}(8j^3n - 15j^2n^2 \\
& + 8jn^3 - n^4)X_{(j)} + p(n^aj^b)X_{(j)}.
\end{aligned}$$

Para  $j = 0$ , se tiene que  $X_{(0)} = 0$ .

$$\begin{aligned}
& \text{Para } j = n, \text{ se tiene que } \alpha'_n = p(n^{a+b}) \text{ y que } \alpha_n D_n = \frac{1}{6} [(n + 1)^3 n - 3(n + 1)^2 n^2 \\
& + 2(n + 1)n^3] [X_{(n)} - X_{(n-1)}] = p(n^aj^b) [X_{(n)} - X_{(n-1)}].
\end{aligned}$$

■

En este caso podemos despreciar  $p(n^aj^b)$  porque no afecta a las propiedades asintóticas de  $A_2$ . Tomando  $J_{A_2}(u) = \frac{1}{6}(8u^3 - 15u^2 + 8u - 1)$ , se tiene que  $\frac{A_2}{n^4}$  y  $\frac{1}{S_n} \sum_{j=1}^n J_{A_2}(j/n)X_{(j)}$  tienen las mismas propiedades asintóticas.

Por (2.43), se puede aplicar el Teorema 1.3 y se tiene que:

$$\sqrt{n} \cdot \left( \frac{\frac{A_2}{n^4} - \frac{\mu(J_{A_2}, F)}{\mu(F)}}{\frac{\sigma(J_{A_2}, F)}{\mu(F)}} \right) \xrightarrow{L} N(0, 1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

La siguiente proposición, análoga a la Proposición 2.2, da los valores de  $\mu(J_{A_2}, F_0)$  y de  $\frac{\sigma^2(J_{A_2}, F_0)}{\mu^2(F_0)}$  bajo  $H_0$ , es decir, cuando  $X$  sigue la distribución exponencial. Como  $A_2$  es invariante por cambio de escala, se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $X$  sigue una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1$ .

**Proposición 2.4** *Si se tiene que:*

$$\bullet F(t) = 1 - \exp(-t), \quad t > 0. \quad (2.44)$$

$$\bullet J_{A_2}(u) = \frac{1}{6}(8u^3 - 15u^2 + 8u - 1). \quad (2.45)$$

Entonces:

$$\mu(J_{A_2}, F_0) = 0, \quad \frac{\sigma^2(J_{A_2}, F_0)}{\mu^2(F_0)} = \frac{1}{7560}.$$

**Demostración.** El cálculo de  $\mu(J_{A_2}, F_0)$  se realiza utilizando (2.24), lo que requiere hallar previamente  $w_{r,p}$ . Por (2.45), se pueden identificar los  $a_j$  como:

$$a_0 = -\frac{1}{6}, \quad a_1 = \frac{8}{6}, \quad a_2 = -\frac{15}{6}, \quad a_3 = \frac{8}{6}$$

Realizando el cálculo de  $w_{r,p}$  se obtiene que:

$$\begin{aligned} w_{3,0} &= (-1)^0 \sum_{j=0}^3 \binom{j}{0} a_j = -\frac{1}{6} + \frac{8}{6} - \frac{15}{6} + \frac{8}{6} = 0, \\ w_{3,1} &= (-1) \sum_{j=1}^3 \binom{j}{1} a_j = (-1) \left( \frac{8}{6} - \frac{30}{6} + \frac{24}{6} \right) = -\frac{1}{3}, \\ w_{3,2} &= (-1)^2 \sum_{j=2}^3 \binom{j}{2} a_j = -\frac{15}{6} + \frac{24}{6} = \frac{3}{2}, \\ w_{3,3} &= (-1)^3 \sum_{j=3}^3 \binom{j}{3} a_j = (-1) \frac{8}{6} = -\frac{4}{3}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Sustituyendo (2.44) y (2.46) en (2.24), se tiene para  $\mu(J, F_X)$  que:

$$\begin{aligned} \mu(J_{A_2}, F_0) &= \sum_{p=0}^3 \frac{w_{3,p}}{p+1} \int_0^\infty (\exp(-t))^{p+1} dt = -\frac{1}{6} \int_0^\infty \exp(-2t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp(-3t) dt \\ &\quad - \frac{1}{3} \int_0^\infty \exp(-4t) dt = \frac{1}{12} \exp(-2t) \Big|_0^\infty - \frac{1}{6} \exp(-3t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{12} \exp(-4t) \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = 0. \end{aligned}$$

De (2.26), se tiene que:

$$\sigma^2(J_{A_2}, F_0) = 2 \int_0^\infty J_{A_2}(F_0(s)) \cdot F_0(s) \left( \int_s^\infty J_{A_2}(F_0(t)) \cdot \bar{F}_0(t) dt \right) ds. \quad (2.47)$$

Por (2.44) y (2.45), se tiene que:

$$\int_s^\infty J_{A_2}(F_0(t))\bar{F}_0(t)dt = \int_s^\infty \left[ \frac{4}{3}(1 - \exp(-t))^2 - \frac{5}{2}(1 - \exp(-t))^2 + \frac{4}{3}(1 - \exp(-t)) - \frac{1}{6} \right] \cdot (\exp(-t)) dt,$$

y se resuelve la integral realizando cambio de variable, obteniendo que:

$$\begin{aligned} \int_s^\infty J_{A_2}(F_0(t))\bar{F}_0(t)dt &= \int_{1-\exp(-s)}^1 \left( \frac{4}{3}u^3 - \frac{5}{2}u^2 + \frac{4}{3}u - \frac{1}{6} \right) du \\ &= -\frac{1}{6}\exp(-2s) + \frac{1}{2}\exp(-3s) - \frac{1}{3}\exp(-4s). \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en (2.47), se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma^2(J_{A_2}, F_0) &= 2 \int_0^\infty \left[ \frac{4}{3}(1 - \exp(-s))^3 - \frac{5}{2}(1 - \exp(-s))^2 + \frac{4}{3}(1 - \exp(-s)) - \frac{1}{6} \right] \cdot (1 - \exp(-s)) \\ &\cdot \left[ -\frac{1}{6}\exp(-2s) + \frac{1}{2}\exp(-3s) - \frac{1}{3}\exp(-4s) \right] ds = 2 \int_0^\infty \left[ \frac{4}{3}(1 - \exp(-s))^4 - \frac{5}{2}(1 - \exp(-s))^4 \right. \\ &\left. + \frac{4}{3}(1 - \exp(-s))^2 - \frac{1}{6}(1 - \exp(-s)) \right] \cdot \left[ -\frac{1}{6}\exp(-s) + \frac{1}{2}\exp(-2s) - \frac{1}{3}\exp(-3s) \right] \exp(-s) ds, \end{aligned}$$

que se resuelve mediante un nuevo cambio de variable y entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma^2(J_{A_2}, F_0) &= 2 \int_0^1 \left( \frac{4}{3}u^4 - \frac{5}{2}u^3 + \frac{4}{3}u^2 - \frac{1}{6}u \right) \cdot \left[ -\frac{1}{6}(1 - u) + \frac{1}{2}(1 - u)^2 - \frac{1}{3}(1 - u)^3 \right] du \\ &= 2 \left[ -\frac{1}{6} \left( \frac{4}{3} \int_0^1 u^4(1 - u)du - \frac{5}{2} \int_0^1 u^3(1 - u)du + \frac{4}{3} \int_0^1 u^2(1 - u)du - \frac{1}{6} \int_0^1 u(1 - u)du \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \int_0^1 u^4(1 - u)^2du - \frac{5}{2} \int_0^1 u^3(1 - u)^2du + \frac{4}{3} \int_0^1 u^2(1 - u)^2du - \frac{1}{6} \int_0^1 u(1 - u)^2du \right) \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \left( \frac{4}{3} \int_0^1 u^4(1 - u)^3du - \frac{5}{2} \int_0^1 u^3(1 - u)^3du + \frac{4}{3} \int_0^1 u^2(1 - u)^3du - \frac{1}{6} \int_0^1 u(1 - u)^3du \right) \right]. \end{aligned}$$

Las integrales anteriores son del tipo (2.27), por lo que:

$$\sigma^2(J_{A_2}, F_0) = \frac{1}{7560}.$$

■

Por tanto, bajo  $H_0$ , es decir, cuando  $X$  sigue la distribución exponencial, cuando  $n \rightarrow \infty$  tenemos que:

$$\sqrt{n} \frac{\frac{A_2}{n^4}}{\sqrt{1/7560}} = \frac{A_2}{n^4} \sqrt{7560n} = A_2 \sqrt{\frac{7560}{n^7}} \xrightarrow{L} N(0, 1).$$

Entonces, siguiendo un razonamiento similar al realizado en el apartado 2.2.2. se tiene que para un  $n$  suficientemente grande, se rechaza la hipótesis nula de que  $X$  sea exponencial cuando  $P\left(Z > \sqrt{\frac{7560}{n^7}} \cdot A_2\right) \leq \alpha$  ó, equivalentemente, cuando  $P\left(Z < \sqrt{\frac{7560}{n^7}} \cdot A_2\right) \leq 1 - \alpha$ , es decir, cuando:

$$\sqrt{\frac{7560}{n^7}} \cdot A_2 < z_\alpha \quad \text{ó} \quad \sqrt{\frac{7560}{n^7}} \cdot A_2 > z_{1-\alpha}. \quad (2.48)$$

### 2.3.3. Consistencia

Ahora se va a analizar la consistencia del estadístico. Puesto que  $\mu(J_{A_2}, F_0) = 0$ , donde  $F_0$  denota la distribución exponencial, la consistencia se verifica si  $\mu(J_{A_2}, F) > 0$  ( $\mu(J_{A_2}, F) < 0$ ) cuando  $F$  es de la clase IFR (DFR) pero no exponencial. En el siguiente teorema obtenemos que  $A_2 = \frac{\mu(J_{A_2}, F)}{\mu(F)}$  y el test basado en el estadístico  $A_2$  es consistente.

**Teorema 2.2** *Sea  $X$  una variable aleatoria con media finita y  $J_{A_2}(u) = \frac{1}{6}(8u^3 - 15u^2 + 8u - 1)$ , entonces se verifica que  $A_2 = \frac{\mu(J_{A_2}, F)}{\mu(F)}$ .*

**Demostración.** En primer lugar, señalar que en el desarrollo de algunas integrales por partes de la demostración es necesaria la condición  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \bar{F}(x) = 0$ , la cual es cierta al ser la media de  $X$  finita.

Sea

$$\Psi_A = \int \int \int_{\Omega_A} \left[ \frac{\varphi(t+u) - \varphi(t)}{u} - \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s} \right] su \, ds \, dt \, du,$$

donde  $\Omega_A = \{(s, t, u) : 0 \leq u \leq s, 0 \leq s \leq 1-t, 0 \leq t \leq 1\}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \Psi_A &= \int_0^1 \int_0^{1-t} \int_u^{1-t} [\varphi(t+u) - \varphi(t)] s \, ds \, du \, dt - \int_0^1 \int_0^{1-t} \int_0^s [\varphi(t+s) - \varphi(t)] u \, du \, ds \, dt \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-t} [\varphi(t+u) - \varphi(t)] \left[ \frac{(1-t)^2 - u^2}{2} \right] du \, dt - \int_0^1 \int_0^{1-t} [\varphi(t+s) - \varphi(t)] \frac{s^2}{2} ds \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-t} [\varphi(t+u) - \varphi(t)] \left[ \frac{(1-t)^2 - u^2}{2} \right] du dt - \int_0^1 \int_0^{1-t} [\varphi(t+u) - \varphi(t)] \frac{u^2}{2} du dt \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-t} [\varphi(t+u) - \varphi(t)] \left[ \frac{(1-t)^2}{2} - u^2 \right] du dt \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-t} \varphi(t+u) \frac{(1-t)^2}{2} du dt - \int_0^1 \int_0^{1-t} \varphi(t+u) u^2 du dt \\
&\quad - \int_0^1 \int_0^{1-t} \varphi(t) \frac{(1-t)^2}{2} du dt + \int_0^1 \int_0^{1-t} \varphi(t) u^2 du dt \\
&= \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \int_0^{1-t} \varphi(t+u) du dt - \int_0^1 \int_0^{1-t} u^2 \varphi(t+u) du dt \\
&\quad - \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{2} \varphi(t) dt + \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{3} \varphi(t) dt. \quad (2.49)
\end{aligned}$$

La primera integral de (2.49) se simplifica mediante el cambio de variable  $t + u = z$ :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \int_0^{1-t} \varphi(t+u) du dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \left( \int_t^1 \varphi(z) dz \right) dt,$$

y empleando la integración por partes, con  $U = \int_t^1 \varphi(z) dz$  y  $dV = \frac{(1-t)^2}{2} dt$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} \int_0^{1-t} \varphi(t+u) du dt &= - \frac{(1-t)^3}{6} \int_t^1 \varphi(z) dz \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{(1-t)^3}{6} \varphi(t) dt \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(z) dz - \frac{1}{6} \int_0^1 (1-t)^3 \varphi(t) dt. \quad (2.50)
\end{aligned}$$

Para la segunda integral de (2.49), se tiene por el cambio de variable  $t + u = z$  que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-t} u^2 \varphi(t+u) du dt &= \int_0^1 \int_t^1 (z-t)^2 \varphi(z) dz dt \\
&= \int_0^1 \int_t^1 z^2 \varphi(z) dz dt - \int_0^1 2t \int_t^1 z \varphi(z) dz dt + \int_0^1 t^2 \int_t^1 \varphi(z) dz dt,
\end{aligned}$$

y resolviendo por partes las tres integrales, la primera con  $U = \int_t^1 z^2 \varphi(z) dz$  y  $dV = dt$ , la segunda con  $U = \int_t^1 z \varphi(z) dz$  y  $dV = 2t dt$ , y la tercera con  $U = \int_t^1 z^2 \varphi(z) dz$  y  $dV = dt$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \int_0^{1-t} u^2 \varphi(t+u) du dt = t \int_t^1 z^2 \varphi(z) dz \Big|_0^1 + \int_0^1 t^3 \varphi(t) dt \\
& - \left( t^2 \int_t^1 z \varphi(z) dz \Big|_0^1 + \int_0^1 t^3 \varphi(t) dt \right) + \frac{t^3}{3} \int_t^1 \varphi(z) dz \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{t^3}{3} \varphi(t) dt \\
& = \int_0^1 t^3 \varphi(t) dt - \int_0^1 t^3 \varphi(t) dt + \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 \varphi(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 t^3 \varphi(t) dt. \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.50) y (2.51) en (2.49), se tiene que:

$$\begin{aligned}
\Psi_A &= \frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(u) du - \frac{1}{6} \int_0^1 (1-u)^3 \varphi(u) du - \frac{1}{3} \int_0^1 u^3 \varphi(u) du - \frac{1}{2} \int_0^1 (1-u)^3 \varphi(u) du \\
&+ \frac{1}{3} \int_0^1 (1-u)^3 \varphi(u) du = \frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(u) du - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-u)^3 \varphi(u) du - \frac{1}{3} \int_0^1 u^3 \varphi(u) du \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(u) du - \frac{1}{3} \int_0^1 (1-3u+3u^2-u^3) \varphi(u) du - \frac{1}{3} \int_0^1 u^3 \varphi(u) du \\
&= -\frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(u) du + \int_0^1 u \varphi(u) du - \int_0^1 u^2 \varphi(u) du.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $w_{r,p}$  de (2.46), se tiene que la expresión de  $\mu(J, F)$  viene dada por:

$$\mu(J, F) = \sum_{p=0}^3 \frac{w_{3,p}}{p+1} \int_0^\infty \overline{F}^{p+1}(t) dt = -\frac{1}{6} \int_0^\infty \overline{F}^2(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty \overline{F}^3(t) dt - \frac{1}{3} \int_0^\infty \overline{F}^4(t) dt.$$

Para toda función de distribución continua  $F$ , se verifica que:

$$\frac{k+1}{\mu} \int_0^\infty x \overline{F}^k(x) dF(x) = k \int_0^1 (1-u)^{k-1} \varphi(u) du, \quad \text{para } k \geq 1, \quad (2.52)$$

y el primer miembro de la igualdad anterior, utilizando integración por partes con  $u = x$  y  $dv = \overline{F}^k(x) dF(x)$ , se transforma en:

$$\frac{k+1}{\mu} \int_0^\infty x \overline{F}^k(x) dF(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \overline{F}^{k+1}(x) dx, \quad (2.53)$$

por lo que de (2.52) y (2.53) se tiene que:

$$k \int_0^1 (1-u)^{k-1} \varphi(u) du = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \overline{F}^{k+1}(x) dx, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Aplicando esta igualdad se concluye la demostración de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\mu(J_{A_2}, F)}{\mu(F)} &= -\frac{1}{6\mu} \int_0^\infty \overline{F}^2(x) dx + \frac{1}{2\mu} \int_0^\infty \overline{F}^3(x) dx - \frac{1}{3\mu} \int_0^\infty \overline{F}^4(x) dx \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(u) du + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^1 (1-u) \varphi(u) du - \frac{1}{3} \cdot 3 \int_0^1 (1-u)^2 \varphi(u) du \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(u) du + \int_0^1 (1-u) \varphi(u) du - \int_0^1 (1-2u+u^2) \varphi(u) du \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 \varphi(u) du + \int_0^1 u \varphi(u) du - \int_0^1 u^2 \varphi(u) du = \Psi_A. \end{aligned}$$

■



# Capítulo 3

## Contrastes para la clase NBU (NWU)

### 3.1. Introducción

En este capítulo abordamos los contrastes planteados en Belzunce, Candel y Ruiz (1998) para la clase NBU y su dual NWU, siguiendo un esquema similar al de la sección 2.2. del capítulo anterior.

De la misma forma que que para la clase IFR (DFR) se contrastaba la hipótesis nula de exponencialidad frente a la alternativa de que la variable aleatoria fuera de la clase IFR (DFR) pero no siguiera la distribución exponencial, en este caso la hipótesis alternativa es que la variable aleatoria sea de la clase NBU (NWU) pero no siga la distribución exponencial. Para poder realizar el contraste Belzunce, Candel y Ruiz (1998) proponen un estadístico, cuya construcción también se estudia en este capítulo, al igual que su distribución exacta y asintótica bajo la hipótesis nula, y su consistencia.

### 3.2. Contraste basado en el orden estocástico

En esta sección se trata el test propuesto por Belzunce, Candel y Ruiz (1998), en el que se enfrenta la hipótesis nula de que la variable aleatoria siga la distribución exponencial a la hipótesis alternativa de que sea de la clase NBU o NWU pero no exponencial.

De esta forma, se contrastan las hipótesis:

$$\begin{cases} H_0 : F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \text{ con } \lambda > 0. \\ H_1 : X \text{ es NBU o NWU pero no exponencial.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Este contraste de hipótesis, análogo al expuesto en (2.1), es también un contraste de significación en el que la finalidad es desarrollar un estadístico que bajo la hipótesis nula sea cercano a cero y bajo la alternativa sea significativamente distinto de cero.

Belzunce, Candel y Ruiz (1998) plantean como medida de desviación de la hipótesis nula de que la variable aleatoria sea exponencial a la hipótesis alternativa de que sea NBU o NWU pero no exponencial la siguiente medida:

$$\Delta_{\text{NBU}}(X) = \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) \cdot \Delta_{\text{ST}}(X_t, X) dF_X(t), \quad (3.2)$$

donde

$$\Delta_{\text{ST}}(X_t, X) = \int_0^\infty \left( \bar{F}_X^2(u) - \bar{F}_{X_t}^2(u) \right) du. \quad (3.3)$$

Como se tiene que  $\bar{F}_X^2(t) > 0$ , el signo de  $\Delta_{\text{NBU}}(X)$  está determinado por  $\Delta_{\text{ST}}(X_t, X)$ . Por (1.1), se puede escribir (3.3) de la siguiente manera:

$$\Delta_{\text{ST}}(X_t, X) = \int_0^\infty \left( \bar{F}_X^2(u) - \frac{\bar{F}_X^2(t+u)}{\bar{F}_X^2(t)} \right) du. \quad (3.4)$$

Si se considera cierta la hipótesis nula, es decir, si  $F_X(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$  con  $\lambda > 0$ , entonces sustituyendo en (3.4) se tiene que:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ST}}(X_t, X) &= \int_0^\infty \left( \exp(-2\lambda u) - \frac{\exp(-2\lambda(t+u))}{\exp(-2\lambda t)} \right) du \\ &= \int_0^\infty (\exp(-2\lambda u) - \exp(-2\lambda u)) du = 0, \end{aligned}$$

y, por tanto, sustituyendo en (3.2) se obtiene que  $\Delta_{\text{NBU}}(X) = 0$ .

En el caso contrario de rechazar la hipótesis nula, se tendría que  $X$  es de la clase NBU o NWU, pero no exponencial. Si suponemos sin pérdida de generalidad que  $X$  es de la clase NBU pero no es exponencial, en ese caso no es NWU. Como consecuencia de (1.4) y la definición 1.6, se tiene que si  $X$  es NBU, entonces  $\Delta_{\text{ST}}(X_t, X) > 0$ , y por (3.2) se verifica que  $\Delta_{\text{NBU}}(X) > 0$ .

Realizando un razonamiento similar pero considerando como hipótesis que  $X$  es de la clase NWU y no es exponencial, se concluye que en ese caso  $\Delta_{\text{NBU}}(X) < 0$ .

En consecuencia, procediendo de la misma forma que en la sección 2.2. se ha obtenido una medida  $\Delta_{\text{NBU}}(X)$  que cumple las siguientes propiedades:

1. Bajo  $H_0$ , se tiene que  $\Delta_{\text{NBU}}(X) = 0$ .
2. Bajo  $H_1$ ,  $\Delta_{\text{NBU}}(X)$  depende de la clase a la que pertenece  $X$ :
  - a) Si  $X$  es NBU, entonces  $\Delta_{\text{NBU}}(X) > 0$ .
  - b) Si  $X$  es NWU, entonces  $\Delta_{\text{NBU}}(X) < 0$ .

Por tanto,  $\Delta_{\text{NBU}}(X)$  es una medida de desviación de la hipótesis nula frente a la alternativa, al igual que  $\Delta_{\text{IFR}}(X)$  y que verifica las mismas propiedades. Siguiendo el mismo procedimiento que el realizado para  $\Delta_{\text{IFR}}(X)$ , vamos a obtener la versión empírica de  $\Delta_{\text{NBU}}(X)$  sustituyendo la distribución teórica por la distribución empírica.

En este caso, por (1.3) se tiene que el análogo empírico de (3.2), dada una muestra aleatoria simple ordenada  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  de tamaño  $n$  de  $X$ , es:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{NBU}}(n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \left[ \sum_{l=1}^n \left(1 - \frac{l-1}{n}\right)^2 (X_{(l)} - X_{(l-1)}) - \sum_{l=i+1}^n \frac{\left(1 - \frac{l-1}{n}\right)^2}{\left(1 - \frac{i}{n}\right)^2} (X_{(l)} - X_{(l-1)}) \right] \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 (\Delta_0^n - \Delta_i^n), \end{aligned} \tag{3.5}$$

donde  $\Delta_k^n$  está definido en (2.5).

Se rechaza la hipótesis nula de exponencialidad en el contraste (3.1) en favor de la alternativa de que la variable aleatoria siga la clase de envejecimiento NBU (NWU) cuando se obtengan valores de  $\Delta_{\text{NBU}}(n)$  suficientemente grandes (pequeños). En cambio, si no se obtienen valores de  $\Delta_{\text{NBU}}(n)$  suficientemente grandes (pequeños) no existe evidencia que permita rechazar la hipótesis nula, por lo que se considera que la variable aleatoria es exponencial.

A partir del estadístico  $\Delta_{\text{NBU}}(n)$ , se obtiene uno nuevo que hace que bajo la hipótesis nula no intervenga el parámetro y que el test sea invariante por cambio escala, realizando la siguiente modificación:

$$\Delta_{\text{NBU}}^*(n) = \frac{\Delta_{\text{NBU}}(n)}{\bar{X}}$$

Análogamente al estudio realizado para  $\Delta_{\text{IFR}}^*(X)$ , en las siguientes secciones veremos cuál es la distribución exacta y asintótica bajo la hipótesis nula de este estadístico, que permiten realizar el análisis de para qué valores de  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$  se debe rechazar  $H_0$ .

### 3.2.1. Distribución exacta de $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$

En esta sección se obtiene la expresión de la distribución exacta de  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$  bajo  $H_0$ , es decir, tomando la hipótesis nula de exponencialidad como cierta. Como consecuencia de que el test es invariante en escala, se puede asumir sin pérdida de generalidad que  $X$  sigue la distribución exponencial con  $\lambda = 1/2$ .

En el siguiente lema se expresa  $\Delta_{\text{NBU}}(n)$  como combinación lineal de los espacios normalizados  $D_l$  dados en (1.6), lo que permite aplicar el Teorema 1.2 para hallar su distribución exacta.

#### Lema 3.1

$$\Delta_{\text{NBU}}(n) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n e_{l,n} D_l, \quad (3.6)$$

donde  $e_{k,n} \equiv \sum_{l=0}^2 (-1)^l \cdot w_l \cdot \binom{k}{n}^l$ , con  $w_2 \equiv 1$ ,  $w_1 \equiv \frac{1}{6n^2} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3}$  y  $w_0 \equiv \frac{1}{6n^3} + \frac{2}{3n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3}$ , para  $e_{i,n} \neq e_{j,n}$ , para todo  $i \neq j$ , con  $n$  dado.

**Demostración.** Se puede escribir (3.5) en función de los espaciamentos normalizados  $D_l$  definidos en (1.6) como:

$$\Delta_{\text{NBU}}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 \left[ \sum_{l=1}^n \frac{n-l+1}{n^2} D_l - \sum_{l=i+1}^n \frac{n-l+1}{(n-i)^2} D_l \right] = \frac{1}{n^3} (\Psi_1 - \Psi_2), \quad (3.7)$$

donde

$$\Psi_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \frac{(n-i)^2 (n-l+1)}{n^2} D_l$$

y

$$\Psi_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^n (n-l+1) D_l,$$

y cambiando los límites de los sumatorios que aparecen en la expresión de  $\Psi_1$  se tiene que:

$$\Psi_1 = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 (n-l+1) D_l = \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n (n-l+1) D_l \sum_{i=1}^{n-1} (n^2 - 2ni + i^2).$$

Aplicando (2.10) se obtiene que:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^n (n-l+1) D_l \left( n^2(n-1) - 2n \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(2(n-1)+1)}{6} \right) \\ &= \frac{1}{6n} \sum_{l=1}^n (n-l+1)(n-1)(2n-1) D_l. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Realizamos un proceso análogo con  $\Psi_2$  para obtener una expresión similar:

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^n (n-l+1) D_l = \sum_{l=2}^n (l-1)(n-l+1) D_l \\ &= \frac{1}{6n} \sum_{l=1}^n 6n(l-1)(n-l+1) D_l, \end{aligned} \quad (3.9)$$

y restando (3.8) y (3.9) se obtiene que:

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \frac{1}{6n} \sum_{l=1}^n (2n^3 + 5n^2 + 4n - 8n^2l + 6nl^2 - 9nl - l + 1) D_l. \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.10) en (3.7), se tiene que:

$$\Delta_{\text{NBU}}(n) = \frac{1}{6n^4} \sum_{l=1}^n (2n^3 + 5n^2 + 4n - 8n^2l + 6nl^2 - 9nl - l + 1) D_l = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n e_{l,n} D_l,$$

donde

$$e_{l,n} = \left( \frac{l}{n} \right)^2 - \left( \frac{1}{6n^2} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{l}{n} \right) + \frac{1}{6n^3} + \frac{2}{3n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3}. \quad (3.11)$$

■

Para conseguir que bajo la hipótesis nula el parámetro de la distribución exponencial no sea determinante y que el test sea invariante por cambio de escala, se modifica (3.6) de la siguiente manera, obteniéndose así la expresión de  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$ :

$$\Delta_{\text{NBU}}^*(n) = \frac{\sum_{l=1}^n e_{l,n} D_l}{\sum_{l=1}^n D_l}. \quad (3.12)$$

La expresión de la distribución exacta del estadístico se determina en el siguiente resultado:

**Proposición 3.1** *La distribución exacta del estadístico  $\Delta_{NBU}^*(n)$  bajo la hipótesis nula es:*

$$Pr\{\Delta_{NBU}^*(n) \leq x\} = 1 - \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{e_{i,n} - x}{e_{i,n} - e_{j,n}} \cdot I(x < e_{i,n}),$$

donde  $e_{k,n} \equiv \sum_{l=0}^2 (-1)^l \cdot w_l \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^l$ , con  $w_2 \equiv 1$ ,  $w_1 \equiv \frac{1}{6n^2} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3}$  y  $w_0 \equiv \frac{1}{6n^3} + \frac{2}{3n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3}$ , para  $e_{i,n} \neq e_{j,n}$ , para todo  $i \neq j$ , con  $n$  dado.

**Demostración.** El resultado se obtiene de (3.12) y el Teorema 1.2. ■

### 3.2.2. Distribución asintótica de $\Delta_{NBU}^*(n)$

Para poder estudiar cómo es esta distribución, primero se necesita expresar  $\Delta_{NBU}(n)$  como combinación lineal de una muestra ordenada, lo que se realiza en el siguiente lema, para poder aplicar el Teorema 1.3 al estadístico y obtener así su distribución asintótica.

Además, en este apartado también se detalla cómo se obtiene la media y varianza de dicha distribución.

#### Lema 3.2

$$\Delta_{NBU}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,n} \cdot X_{(i)}, \quad (3.13)$$

donde  $\varepsilon_{i,n} \equiv \sum_{l=0}^2 (-1)^l w_l \left(\frac{i}{n}\right)^l$ ,  $w_2 \equiv 3$ ,  $w_1 \equiv \frac{14}{3} + \frac{2}{n} + \frac{1}{3n^2}$ ,  $w_0 \equiv \frac{5}{3} + \frac{4}{3n} + \frac{5}{6n^2} + \frac{1}{6n^3}$ .

**Demostración.** Por la expresión de  $\Delta_{NBU}(n)$  dada en (3.6) y la definición de los espacios normalizados  $D_l$  en (1.6), se tiene que:

$$\Delta_{NBU}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e_{i,n} \cdot (n - i + 1) - e_{i+1,n} \cdot (n - i)] X_{(i)},$$

y aplicando (3.11) se puede calcular  $e_{i,n}(n - i + 1) - e_{i+1,n}(n - i)$ :

$$\begin{aligned}
e_{i,n}(n-i+1) - e_{i+1,n}(n-i) &= \left[ (n-i+1) \cdot \left(\frac{i}{n}\right)^2 - (n-i) \cdot \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 \right] \\
&\quad - \left( \frac{1}{6n^2} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3} \right) \left[ (n-i+1) \cdot \frac{i}{n} - (n-i) \cdot \frac{i+1}{n} \right] \\
&\quad + \left( \frac{1}{6n^3} + \frac{2}{3n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3} \right) [(n-i+1) - (n-i)] \\
&= \frac{i^2 - (n-i)(2i+1)}{n^2} - \left( \frac{1}{6n^2} + \frac{3}{2n} + \frac{4}{3} \right) \left( \frac{2i}{n} - 1 \right) + \frac{1}{6n^3} + \frac{2}{3n^2} + \frac{5}{6n} + \frac{1}{3} \\
&= \frac{3i^2}{n^2} - \frac{i}{3n^3} - \frac{2i}{n^2} - \frac{14i}{3n} + \frac{1}{6n^3} + \frac{5}{6n^2} + \frac{4}{3n} + \frac{5}{3} \\
&= 3 \left( \frac{i}{n} \right)^2 - \left( \frac{1}{3n^2} + \frac{2}{n} + \frac{14}{3} \right) \frac{i}{n} + \frac{1}{6n^3} + \frac{5}{6n^2} + \frac{4}{3n} + \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

■

Por (3.13), el estadístico  $\Delta_{\text{NBU}}(n)$  puede ser expresado como combinación lineal de una muestra ordenada, por lo que se le puede aplicar el Teorema 1.3 teniendo entonces que:

$$\sqrt{n} \cdot \left( \frac{\Delta_{\text{NBU}}(n) - \mu(J, F_X)}{\sigma(J, F_X)} \right) \xrightarrow{L} N(0, 1) \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

De igual manera, se puede aplicar el Teorema 1.4 al estadístico  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$  obteniéndose que:

$$\sqrt{n} \cdot \left( \Delta_{\text{NBU}}^*(n) - \frac{\mu(J, F_X)}{E[X]} \right) \xrightarrow{L} N \left( 0, \frac{\sigma^2(J^*, F_X)}{E[X]^2} \right) \text{ cuando } n \rightarrow \infty,$$

donde  $J^*(u) = J(u) - \frac{\mu(J, F_X)}{E[X]}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

En la siguiente proposición se obtienen los valores de  $\mu(J, F_X)$  y  $\sigma^2(J, F_X)$  bajo  $H_0$ , es decir, tomando como cierta la hipótesis nula de que  $X$  sigue la distribución exponencial. Puesto que el test es invariante por cambio de escala, se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $X$  es exponencial de parámetro  $\lambda = 1$ .

**Proposición 3.2** *Si se tiene que:*

$$\bullet F_X(t) = 1 - \exp(-t), \quad t > 0. \quad (3.14)$$

$$\bullet J(u) = 3u^2 - \frac{14}{3}u + \frac{5}{3}. \quad (3.15)$$

Entonces:

$$\mu(J, F_X) = 0, \quad \sigma^2(J, F_X) = \frac{2}{135}.$$

**Demostración.** El cálculo de  $\mu(J, F_X)$  se realiza utilizando (2.24), para lo que se debe obtener previamente  $w_{r,p}$ . Por la expresión que tiene  $J(u)$ , se pueden identificar los  $a_j$  como:

$$a_0 = \frac{5}{3}, \quad a_1 = -\frac{14}{3}, \quad a_2 = 3,$$

y efectuando el cálculo de  $w_{r,p}$  se obtiene que:

$$\begin{aligned} w_{2,0} &= (-1)^0 \sum_{j=0}^2 \binom{j}{0} a_j = \frac{5}{3} - \frac{14}{3} + 3 = 0, \\ w_{2,1} &= (-1) \sum_{j=1}^2 \binom{j}{1} a_j = (-1) \cdot \left( -\frac{14}{3} + 6 \right) = -\frac{4}{3}, \\ w_{2,2} &= (-1)^2 \sum_{j=2}^2 \binom{j}{2} a_j = 3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sustituyendo (3.14) y (3.16) en (2.24), se puede calcular  $\mu(J, F_X)$ :

$$\begin{aligned} \mu(J, F_X) &= \sum_{p=0}^2 \frac{w_{2,p}}{p+1} \int_0^\infty (\exp(-t))^{p+1} dt = -\frac{4}{6} \int_0^\infty \exp(-2t) dt + \frac{3}{3} \int_0^\infty \exp(-3t) dt \\ &= \frac{1}{3} \exp(-2t) \Big|_0^\infty - \frac{1}{3} \exp(-3t) \Big|_0^\infty = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo (3.14) y (3.15) en la segunda integral de (2.26), se tiene que:

$$\int_s^\infty J(F_X(t)) \overline{F}_X(t) dt = \int_s^\infty \left[ 3(1 - \exp(-t))^2 - \frac{14}{3}(1 - \exp(-t)) + \frac{5}{3} \right] \cdot (\exp(-t)) dt,$$



integral que se resuelve por cambio de variable, obteniéndose que:

$$\begin{aligned} \int_s^\infty J(F_X(t)) \bar{F}_X(t) dt &= \int_{1-\exp(-s)}^1 \left( 3u^2 - \frac{14}{3}u + \frac{5}{3} \right) du \\ &= \frac{1}{3} - (1 - \exp(-s))^3 + \frac{7}{3}(1 - \exp(-s))^2 - \frac{5}{3}(1 - \exp(-s)) = \exp(-3s) - \frac{2}{3}\exp(-2s), \end{aligned}$$

y sustituyendo este resultado en (2.26) se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma^2(J, F_X) &= 2 \int_0^\infty \left[ 3(1 - \exp(-s))^2 - \frac{14}{3}(1 - \exp(-s)) + \frac{5}{3} \right] \cdot (1 - \exp(-s)) \\ &\cdot \left[ \exp(-3s) - \frac{2}{3}\exp(-2s) \right] ds = 2 \int_0^\infty \left[ 3(1 - \exp(-s))^3 - \frac{14}{3}(1 - \exp(-s))^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{5}{3}(1 - \exp(-s)) \right] \cdot \left[ \exp(-2s) - \frac{2}{3}\exp(-s) \right] \cdot \exp(-s) ds, \end{aligned}$$

integral que se resuelve también por cambio de variable, dando como resultado:

$$\begin{aligned} \sigma^2(J, F_X) &= 2 \int_0^1 \left( 3u^3 - \frac{14}{3}u^2 + \frac{5}{3}u \right) \cdot \left[ (1 - u)^2 - \frac{2}{3}(1 - u) \right] du \\ &= 2 \left[ 3 \int_0^1 u^3(1 - u)^2 du - \frac{14}{3} \int_0^1 u^2(1 - u)^2 du + \frac{5}{3} \int_0^1 u(1 - u)^2 du \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \left( 3 \int_0^1 u^3(1 - u) du - \frac{14}{3} \int_0^1 u^2(1 - u) du + \frac{5}{3} \int_0^1 u(1 - u) du \right) \right]. \end{aligned}$$

Estas integrales son del tipo (2.27), por que utilizando dicha expresión se tiene que:

$$\sigma^2(J, F_X) = \frac{2}{135}.$$

■

Para un  $n$  suficientemente grande, en el contraste de hipótesis dado en (3.1) se rechaza la hipótesis nula de que  $X$  sea exponencial cuando:

$$\sqrt{n \cdot \frac{135}{2}} \cdot \Delta_{\text{NBU}}^*(n) < z_\alpha \quad \text{ó} \quad \sqrt{n \cdot \frac{135}{2}} \cdot \Delta_{\text{NBU}}^*(n) > z_{1-\alpha}. \quad (3.17)$$

### 3.2.3. Consistencia

En el siguiente teorema se prueba que  $\Delta_{\text{NBU}}(n) = \mu(J, F_X)$ , demostrando así que el test es consistente.

**Teorema 3.1** *Sea  $X$  una variable aleatoria con media finita, entonces para  $J(u)$  con la misma forma que en (3.15) se tiene que:*

$$\Delta_{\text{NBU}}(X) = \mu(J, F_X).$$

**Demostración.** En primer lugar, destacar que en el desarrollo de algunas integrales por partes de la demostración es necesaria la condición  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \bar{F}(x) = 0$ , la cual es cierta al ser la media de  $X$  finita.

Se puede reescribir  $\Delta_{\text{NBU}}(X)$  como:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{NBU}}(X) &= \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) \cdot \Delta_{\text{ST}}(X_t, X) dF_X(t) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) \left( \int_0^\infty \bar{F}_X^2(u) du - \int_0^\infty \left( \frac{\bar{F}_X(u+t)}{\bar{F}_X(t)} \right)^2 du \right) dF_X(t) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) \int_0^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) - \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) \cdot \frac{\int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du}{\bar{F}_X^2(t)} dF_X(t) \\ &= \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) \int_0^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) - \int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Aplicando (2.30), se tiene que:

$$\int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) \int_0^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) = \frac{1}{3} \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) dF_X(t) = \frac{\delta_2(X)}{3}, \quad (3.19)$$

y por (2.31):

$$\int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}_X^2(u) du dF_X(t) = \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) dt - \int_0^\infty \bar{F}_X^3(t) dt = \delta_2(X) - \delta_3(X). \quad (3.20)$$

Sustituyendo (3.19) y (3.20) en (3.18), se obtiene que:

$$\Delta_{\text{NBU}}(X) = \frac{\delta_2(X)}{3} - (\delta_2(X) - \delta_3(X)) = -\frac{2}{3}\delta_2(X) + \delta_3(X).$$

Por otro lado, teniendo en cuenta (3.16) también se tiene que:

$$\mu(J, F_X) = \sum_{p=0}^2 \frac{w_{2,p}}{p+1} \int_0^\infty \bar{F}_X^{p+1}(t) dt = -\frac{4}{6} \int_0^\infty \bar{F}_X^2(t) dt + \frac{3}{3} \int_0^\infty \bar{F}_X^3(t) dt = -\frac{2}{3}\delta_2(X) + \delta_3(X).$$

■

# Capítulo 4

## Aplicaciones a conjuntos de datos de fiabilidad y supervivencia

### 4.1. Introducción

En este capítulo se aplican los tests tratados teóricamente a lo largo de la memoria a tres conjuntos de datos, extraídos de Barlow y Campo (1975), Bryson y Siddiqui (1969) y Davis (1952), con el objetivo de determinar a qué distribución o clase de envejecimiento de las que se han visto en el trabajo pertenecen las muestras.

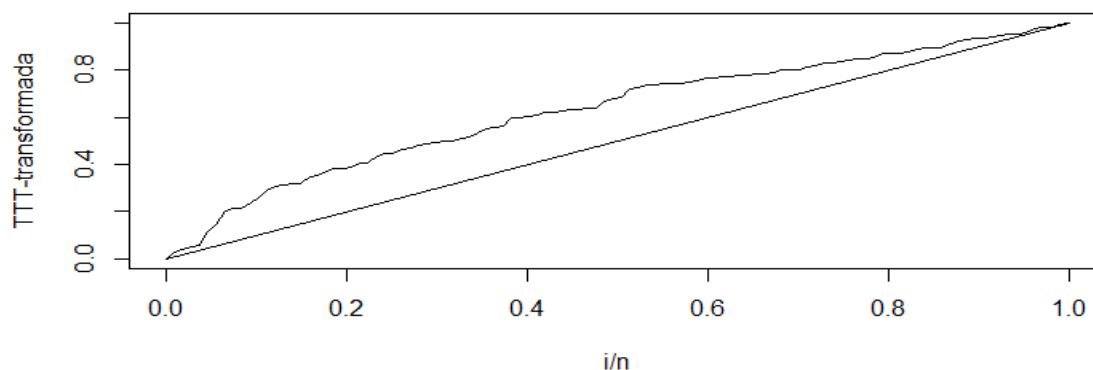
Comenzamos obteniendo la TTT-gráfica, cuyo comportamiento permitirá anticipar el resultado de los tests. En la sección 1.2.2. vimos la caracterización basada en la TTT-gráfica, por la que podemos considerar que la muestra pertenece a la clase IFR (DFR) si su TTT-gráfica es aproximadamente cóncava (convexa).

Tras analizar la TTT-gráfica e interpretarla, obtenemos los estadísticos  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$ ,  $A_2$  y  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$ . A partir de estos estadísticos obtenemos los p-valores exactos cuando el tamaño muestral es pequeño, como en el caso 2, utilizando las expresiones que aparecen en las proposiciones 2.1, 2.3 y 3.1, y los p-valores aproximados cuando el tamaño muestral es grande, como en los casos 1 y 3, a partir de las expresiones dadas en (2.28), (2.48) y (3.17). Estos p-valores servirán de evidencia para establecer conclusiones.

En la última sección del capítulo se detallan los tres conjuntos de datos seleccionados, así como el código utilizado en R para obtener la TTT-gráfica, los estadísticos para el contraste y los p-valores exactos y aproximados.

## 4.2. Caso 1

Se trata de una muestra de  $n = 107$  observaciones del tiempo de vida del freno trasero derecho de un tractor Caterpillar, extraída de Barlow y Campo (1975). La TTT-gráfica de la muestra es:



Como se puede observar, la TTT-gráfica es cóncava, por lo que según la caracterización basada en la TTT-gráfica tratada en la sección 1.2.2. podemos considerar que la muestra pertenece a la clase de envejecimiento IFR y, por el Corolario 1.1, también es de la clase NBU. Para hallar más evidencia obtenemos los estadísticos a partir de los cuales realizamos los contrastes, que en este caso son:

$$\Delta_{\text{IFR}}^*(n) = 0.006172296, \quad A_2 = 518427.5 \quad \text{y} \quad \Delta_{\text{NBU}}^*(n) = 0.06540738.$$

Para el estadístico  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$ , se tiene que:

- $\sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \cdot \Delta_{\text{IFR}}^*(n) = 3.849496.$
- El p-valor aproximado es 0.039876.

La conclusión depende del nivel de significación  $\alpha$ . Si tomamos  $\alpha = 0.05$ , entonces se rechaza la hipótesis nula de exponencialidad y se considera que se tiene evidencia de que la muestra pertenece a la clase de envejecimiento IFR pero no es exponencial, mientras que si tomamos  $\alpha = 0.01$ , no tenemos evidencia para rechazar la hipótesis nula.

Para el estadístico  $A_2$ , se tiene que:

$$\bullet \sqrt{\frac{7560}{n^7}} \cdot A_2 = 3.557179.$$

- El p-valor aproximado es 0.0001874294.

Para cualquier nivel de significación razonable se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la muestra es de la clase IFR pero no sigue la distribución exponencial.

Para el estadístico  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$ , se tiene que:

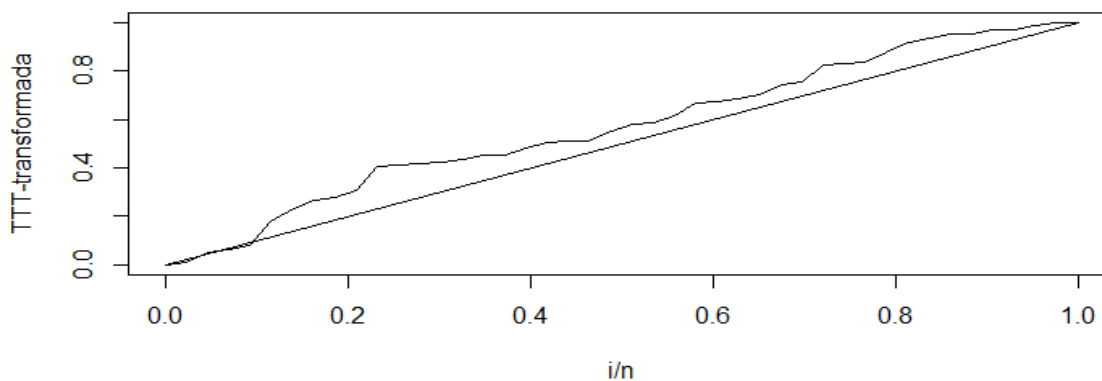
- $\sqrt{n \cdot \frac{135}{2}} \cdot \Delta_{\text{NBU}}^*(n) = 5.558665.$

- El p-valor aproximado es 0.00045597.

Para todo nivel de significación razonable se rechaza la hipótesis nula y se concluye que la muestra pertenece a la clase NBU pero no es exponencial.

### 4.3. Caso 2

Tenemos una muestra de  $n = 43$  observaciones del tiempo de vida de pacientes que sufren leucemia granulocítica crónica, tomando como  $t = 0$  la fecha de diagnóstico, y que ha sido extraída de Bryson y Siddiqui (1969). Su TTT-gráfica es:



Podemos apreciar que la TTT-gráfica no es ni aproximadamente cóncava ni aproximadamente convexa, por lo que no podemos utilizar la caracterización basada en la TTT-gráfica. La proximidad con la recta  $x = y$  hace pensar que la muestra sigue una distribución exponencial. Los estadísticos utilizados para realizar los contrastes son:

$$\Delta_{\text{IFR}}^*(n) = 0.002823365, \quad A_2 = 6468.92 \quad \text{y} \quad \Delta_{\text{NBU}}^*(n) = 0.02269596.$$

Para el estadístico  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$ , se tiene que:

- $\sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \cdot \Delta_{\text{IFR}}^*(n) = 1.116263.$

- El p-valor exacto es 0.1228174.

Para el estadístico  $A_2$ , se tiene que:

- $\sqrt{\frac{7560}{n^7}} \cdot A_2 = 1.07883.$

- El p-valor exacto es 0.1641381.

Para el estadístico  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$ , se tiene que:

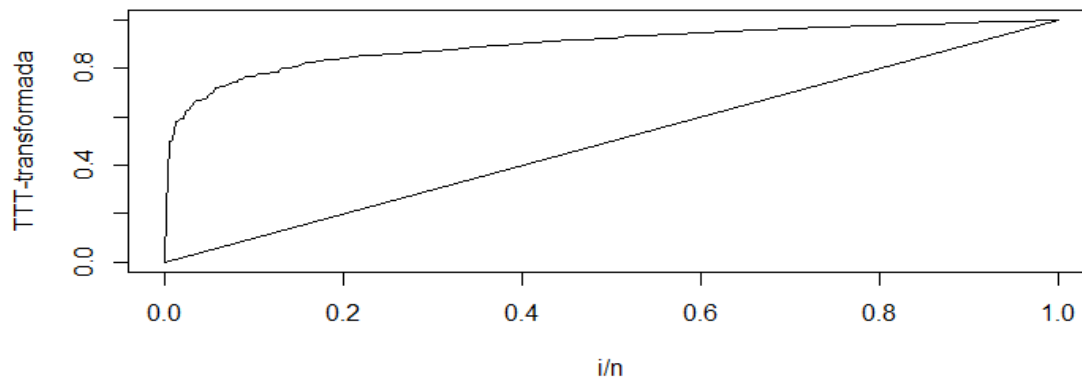
- $\sqrt{n \cdot \frac{135}{2}} \cdot \Delta_{\text{NBU}}^*(n) = 1.222741.$

- El p-valor exacto es 0.1002354.

La conclusión obtenida es la misma en todos los casos: Para cualquier nivel de significación razonable no se tiene evidencia suficiente para rechazar la hipótesis nula, por lo que consideramos que la muestra sigue la distribución exponencial.

#### 4.4. Caso 3

Se trata de una muestra de  $n = 417$  observaciones del tiempo de vida medido en horas de lámparas incandescentes internamente esmeriladas de 40 vatios y 110 voltios, obtenida de Davis (1952). Su TTT-gráfica es:



Como se puede observar, la TTT-gráfica es cóncava, por lo que por la caracterización basada en la TTT-gráfica podemos considerar que la muestra pertenece a la clase de envejecimiento IFR. Los estadísticos de contraste en este caso son:

$$\Delta_{\text{IFR}}^*(n) = 0.005159569, \quad A_2 = 90766086 \quad \text{y} \quad \Delta_{\text{NBU}}^*(n) = 0.2484775.$$

Para el estadístico  $\Delta_{\text{IFR}}^*(n)$ , se tiene que:

- $\sqrt{n \cdot \frac{83610}{23}} \cdot \Delta_{\text{IFR}}^*(n) = 6.352529.$
- El p-valor aproximado es 0.000048.

Para el estadístico  $A_2$ , se tiene que:

- $\sqrt{\frac{7560}{n^7}} \cdot A_2 = 5.329768.$
- El p-valor aproximado es 0.001649.

Por tanto, en ambos casos para cualquier nivel de significación razonable podemos rechazar la hipótesis nula de exponencialidad y considerar que la muestra pertenece a la clase IFR pero no es exponencial.

Para el estadístico  $\Delta_{\text{NBU}}^*(n)$ , se tiene que:

- $\sqrt{n \cdot \frac{135}{2}} \cdot \Delta_{\text{NBU}}^*(n) = 41.6876.$
- El p-valor aproximado es 0.0000.

En consecuencia, para todo nivel de significación se puede rechazar la hipótesis nula y se puede considerar que hay evidencia de que la muestra pertenece a la clase NBU pero no sigue la distribución exponencial.

## 4.5. Código de R

En esta sección se muestra el código utilizado en R para la realización de la parte práctica de la memoria, exponiendo los conjuntos de datos utilizados y las funciones programadas para la obtención de los estadísticos y de los p-valores exactos y aproximados.

Los vectores de datos utilizados han sido:

## #Caso 1

```
x1<-c(56,83,104,116,244,305,429,452,453,503,552,614,661,673,
683,685,753,763,806,834,838,862,897,904,981,1007,1008,1049,
1069,1107,1125,1141,1153,1154,1193,1201,1253,1313,1329,1347,
1454,1464,1490,1491,1532,1549,1568,1574,1586,1599,1608,1723,
1769,1795,1927,1957,2005,2010,2016,2022,2037,2065,2096,2139,
2150,2156,2160,2190,2210,2220,2248,2285,2325,2337,2351,2437,
2454,2546,2565,2584,2624,2675,2701,2755,2877,2879,2922,2986,
3092,3160,3185,3191,3439,3617,3685,3756,3826,3995,4007,4159,
4300,4487,5074,5579,5623,6869,7739)
```

## #Caso 2

```
x2<-c(7,47,58,74,177,232,273,285,317,429,440,445,455,468,495,497,
532,571,579,581,650,702,715,779,881,900,930,968,1077,1109,
1314,1334,1367,1534,1712,1784,1877,1886,2045,2056,2260,2429,
,2509)
```

## #Caso 3

```
x3<-c(1067,919,1196,785,1126,936,918,1156,920,948,855,1092,1162,
1170,929,950,905,972,1035,1045,1157,1195,1195,1340,1122,938,
970,1237,956,1102,1022,978,832,1009,1157,1151,1009,765,958,
902,923,1333,811,1217,1085,896,958,1311,1037,702,521,933,928
,1153,946,858,1071,1069,830,1063,930,807,954,1063,1002,909,
1077,1021,1062,1157,999,932,1035,944,1049,940,1122,1115,833,
1320,901,1324,818,1250,1203,1078,890,1303,1011,1102,996,780,
900,1106,704,621,854,1178,1138,951,1187,1067,1118,1037,958,
760,1101,949,992,966,824,653,980,935,878,934,910,1058,730,
980,844,814,1103,1000,788,1143,935,1069,1170,1067,1037,1151,
863,990,1035,1112,931,970,932,904,1026,1147,883,867,990,1258
,1192,922,1150,1091,1039,1083,1040,1289,699,1083,880,1029,
658,912,1023,984,856,924,801,1122,1292,1116,880,1173,1134,
932,938,1078,1180,1106,1184,954,824,529,998,996,1133,765,775
,1105,1081,1171,705,1425,610,916,1001,895,709,860,1110,1149,
972,1002,990,1141,1127,1181,856,716,1308,943,1272,917,1069,
976,1187,1107,1230,836,1034,1248,1061,1550,1240,932,1165,
1303,1085,813,1340,1137,773,787,1438,1009,1002,1061,1277,892
,900,1384,1148,1117,1225,1176,709,1485,1225,1011,1028,1227,
1277,1222,912,885,1562,1118,1197,976,1080,924,1233,1135,623,
983,883,1088,1029,1201,898,970,1058,1160,831,1023,1354,1218,
1121,1172,1169,1113,1308,1166,1470,1635,1141,1555,1054,1461,
1057,1228,1187,1016,744,1197,1122,666,1022,964,1085,612,1003
,1235,942,1055,893,1235,1056,968,1056,1014,1096,1013,889,
1430,926,1297,1033,1024,1103,1385,1077,813,1121,960,1156,
1033,1255,225,525,675,1211,995,924,732,935,1173,1024,1254,
1014,798,1080,862,1220,1024,1170,1120,898,918,1086,1028,1122
,872,826,1337,965,1297,1096,1068,943,1490,918,609,985,1233,
985,985,1075,1240,985,1105,1243,1204,1203,1310,1262,1234,
1104,1303,1185,759,1404,944,1343,932,1055,1381,816,1067,1252
,1248,1324,1000,984,1220,972,1022,956,1093,1358,1024,1240,
1157,1415,1385,824,1690,1302,1233,1331,1109,827,1209,1202,
1229,1079,1176,1173,769,905)
```



Para obtener la TTT-gráfica, se ha utilizado la siguiente función:

```
TTT_plot<-function(x){
  X<-sort(X)
  if (X[c(1)]>0){
    X<-c(0,X)
  }
  n<-length(X)
  D<-vector()
  S<-vector()
  for (j in 2:n){
    D<-c(D,(n-j+1)*(X[c(j)]-X[c(j-1)]))
  }
  for (i in 2:n-1){
    S<-c(S,sum(D[c(1:i)]))
  }
  m<-length(S)
  u<-c(0)
  for (k in 1:m){
    u<-c(u,S[c(k)]/S[c(m)])
  }
  z<-c(0)
  for (l in 1:m){
    z<-c(z,1/m)
  }
  a<-c(0,1)
  b<-c(0,1)
  plot(c(z,a),c(u,b),type='l',xlab = "i/n", ylab = "TTT-transformada")
}
```

Para el cálculo de los estadísticos, se han utilizado las siguientes funciones:

```
#Estadístico IFR*:
IFR_star<-function(X){
  X<-sort(X)
  Xmed<-mean(X)
  if (X[c(1)]>0){
    X<-c(0,X)
  }
  n<-length(X)
  m<-n-1
  IFR_est<-0
  for (i in 0:(m-2)){
    for (j in (i+1):(m-1)){
      v<-sum(sapply((i+1):m, function(x) {((m-x+1)/(m-i))^2*(X[c(x+1)]-X[c(x)]))}))
      w<-sum(sapply((j+1):m, function(x) {((m-x+1)/(m-j))^2*(X[c(x+1)]-X[c(x)]))}))
      IFR_est<-IFR_est+(1-(i/m))^2*(1-(j/m))^2*(v-w)
    }
  }
  IFR_est<-IFR_est/(m^2)
  IFR_est<-IFR_est/Xmed
  IFR_est
}
```

```

#Estadístico A2:
A2<-function(X){
  X<-sort(X)
  if (X[c(1)]>0){
    X<-c(0,X)
  }
  n<-length(X)
  D<-vector()
  S<-vector()
  for (j in 2:n){
    D<-c(D,(n-j+1)*(X[c(j)]-X[c(j-1)]))
  }
  for (i in 2:n-1){
    S<-c(S,sum(D[c(1:i)]))
  }
  m<-length(S)
  alpha<-vector()
  for (k in 1:m){
    alpha<-c(alpha,(1/6)*((m+1)^3*k-3*(m+1)^2*k^2+2*(m+1)*k^3))
  }
  A<-0
  for (l in 1:m){
    A<-A+(alpha[c(l)]*D[c(l)])/S[c(m)]
  }
  A
}

```

```

#Estadístico NBU*:
NBU_star<-function(X){
  X<-sort(X)
  Xmed<-mean(X)
  if (X[c(1)]>0){
    X<-c(0,X)
  }
  n<-length(X)
  m<-n-1
  NBU_est<-0
  for (i in 1:(m-1)){
    V<-sum(sapply(1:m, function(x) {((m-x+1)/m)^2*(X[c(x+1)]-X[c(x)])}))
    W<-sum(sapply((i+1):m, function(x) {((m-x+1)/(m-i))^2*(X[c(x+1)]-X[c(x)])}))
    NBU_est<-NBU_est+(1-(i/m))^2*(V-W)
  }
  NBU_est<-NBU_est/m
  NBU_est<-NBU_est/Xmed
  NBU_est
}

```

Los p-valores exactos se han obtenido utilizando las siguientes funciones:

```
#p-valor exacto IFR*
p_exac_IFR<-function(x){
  n<-length(x)
  t<-IFR_star(x)
  eps<-vector()
  w<-vector()
  w[c(1)]=1/(6*n^4)+2/(3*n^3)+1/(n^2)+5/(6*n)+1/3
  w[c(2)]=1/(2*n^3)+11/(6*n^2)+5/(2*n)+4/3
  w[c(3)]=2/(3*n^2)+2/n+5/3
  w[c(4)]=1/(2*n)+5/6
  w[c(5)]=1/6
  p<-vector()
  for (i in 1:n){
    eps[c(i)]=0
    for (l in 1:5){
      eps[c(i)]=eps[c(i)]+(-1)^(l+1)*w[c(l)]*(i/n)^l
    }
  }
  for (i in 1:n){
    if(t<eps[c(i)]){
      p[c(i)]<-1
      v<-c(1:n)
      v<-v[-c(i)]
      for (j in v){
        p[c(i)]<-p[c(i)]*((eps[c(i)]-t)/(eps[c(i)]-eps[c(j)]))
      }
    } else{
      p[c(i)]<-0
    }
  }
  pvalue<-1-sum(p)
  pvalue<-1-pvalue
  pvalue
}

#p-valor exacto A2
p_exac_A2<-function(x){
  n<-length(x)
  t<-A2(x)
  eps<-vector()
  p<-vector()
  for (i in 1:n){
    eps[c(i)]=(1/6)*((n+1)^3*i-3*(n+1)^2*i^2+2*(n+1)*i^3)
  }
  for (i in 1:n){
    if(t<eps[c(i)]){
      p[c(i)]<-1
      v<-c(1:n)
      v<-v[-c(i)]
      for (j in v){
        p[c(i)]<-p[c(i)]*((eps[c(i)]-t)/(eps[c(i)]-eps[c(j)]))
      }
    } else{
      p[c(i)]<-0
    }
  }
  pvalue<-1-sum(p)
  pvalue<-1-pvalue
  pvalue
}
```

```

#p-valor exacto NBU*
p_exac_NBU<-function(x){
  n<-length(x)
  t<-NBU_star(x)
  eps<-vector()
  w<-vector()
  w[c(1)]=1/(6*n^3)+2/(3*n^2)+5/(6*n)+1/3
  w[c(2)]=1/(6*n^2)+3/(2*n)+4/3
  w[c(3)]=1
  p<-vector()
  for (i in 1:n){
    eps[c(i)]=0
    for (l in 0:2){
      eps[c(i)]=eps[c(i)]+(-1)^l*w[c(l+1)]*(i/n)^l
    }
  }
  for (i in 1:n){
    if(t<eps[c(i)]){
      p[c(i)]<-1
      v<-c(1:n)
      v<-v[-c(i)]
      for (j in v){
        p[c(i)]<-p[c(i)]*((eps[c(i)]-t)/(eps[c(i)]-eps[c(j)]))
      }
    } else{
      p[c(i)]<-0
    }
  }
  pvalue<-1-sum(p)
  pvalue<-1-pvalue
  pvalue
}

```

Los p-valores aproximados se han obtenido con los siguientes comandos:

```

#P-valor aproximado del test con el estadístico IFR*:
pnorm(IFR_star(x)*sqrt((83610*n)/23), mean = 0, sd = 1, lower.tail = FALSE)
#P-valor aproximado del test con el estadístico A2:
pnorm(A2(x)*sqrt(7560/(n^7)), mean = 0, sd = 1, lower.tail = FALSE)
#P-valor aproximado del test con el estadístico NBU*:
pnorm(NBU_star(x)*sqrt((135*n)/2), mean = 0, sd = 1, lower.tail = FALSE)

```

donde X es el conjunto de datos utilizado en cada caso y n es el tamaño muestral.



# Bibliografía

- [1] Barlow, R.E. y Campo, R. (1975). Total time on test processes and applications to failure data analysis, in “Reliability and Fault Tree Analysis”, ed. R.E. Barlow, J. Fussell y N.D. Singpurwalla, SIAM, Philadelphia, 451-481.
- [2] Barlow, R.E. y Proschan, F. (1975). Statistical Theory of Reliability and Life Testing. Probability Models. Holt, Rinehart and Winston, Nueva York.
- [3] Belzunce, F., Candel, J. y Ruiz, J.M. (1998). Testing the stochastic order and the IFR, DFR, NBU, NWU ageing classes. IEEE Transactions on Reliability 47, 285-296.
- [4] Box, G.E.P. (1954). Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems, I. Effect of inequality of variance on the one-way classification. Annals of Mathematical Statistics 25, 290-302.
- [5] Bryson, M.C. y Siddiqui, M.M. (1969). Some criteria for ageing. Journal of the American Statistical Association 64, 1472-1483.
- [6] David, H.A. (1970). Order Statistics. John Wiley and Sons, Nueva York.
- [7] Davis, D.J. (1952). An analysis of some failure data. Journal of the American Statistical Association 47, 113-150.
- [8] Klefsjö, B. (1983). Some tests against aging based on the total time on test transform. Communications in Statistics- Theory and Methods 12, 907-927.
- [9] Stigler, S.M. (1974). Linear functions of order statistics with smooth weight functions. Annals of Statistics 2, 676-693.