



# **UNIVERSIDAD DE MURCIA**

## **FACULTAD DE MATEMÁTICAS**

Estudio de la preservación de clases de envejecimiento en sistemas coherentes.

**D. José Ríos Carrillo**

2020



## **Declaración de originalidad**

José Ríos Carrillo, autor del Trabajo de Fin de Máster “Estudio de la preservación de clases de envejecimiento en sistemas coherentes”, bajo la tutela del profesor D. Jorge Luis Navarro Camacho, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que la obra no infringe el copyright de ninguna persona.

En Murcia, a 22 de junio de 2020

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.



# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>Resumen</b>	<b>9</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
1.1. Sistemas coherentes . . . . .	11
1.2. Representación de sistemas. . . . .	13
1.3. Conceptos básicos en el análisis de fiabilidad . . . . .	15
1.4. Teoría de cópulas . . . . .	17
1.5. Estadísticos ordenados . . . . .	20
1.6. Clases de envejecimiento . . . . .	22
<b>2. Preservación de clases</b>	<b>25</b>
2.1. Resultados previos . . . . .	25
2.2. Distribución distorsionada . . . . .	27
2.3. Sistemas con componentes idénticamente distribuidas . . . . .	29
2.4. Sistemas con componentes independientes . . . . .	35
2.5. Sistemas con componentes independientes e idénticamente distri- buidas. . . . .	37
2.6. Sistemas k-out-of-n . . . . .	39
2.7. Sistemas con componentes no idénticamente distribuidas . . . . .	40
<b>3. Ejemplos</b>	<b>43</b>
3.1. Sistemas con componentes independientes e idénticamente distri- buidas . . . . .	43
3.2. Sistemas con componentes independientes . . . . .	60
3.3. Sistemas con componentes dependientes . . . . .	65
<b>4. Conclusiones</b>	<b>73</b>



# Abstract

In this work we study the different properties of a coherent or semi-coherent system. In particular, we have focused on studying the preservation of ageing classes in a system. The preservation of ageing classes is based on studying whether a system whose components belong to a certain ageing class, belongs to the same ageing class too.

The work is structured in three chapters. In the first one, we have made an introduction to the reliability of systems, including definitions and basic properties of systems, reliability analysis, stochastic orders of random variables, order statistics, copula theory and ageing classes. In the copulas section we have focused on Sklar's theorem and we have defined some copulas, which we are going to use in practical examples in the third chapter: Fréchet–Hoeffding upper and lower bound copula, Clayton copula, independence copula, Gumbel copula, Farlie-Gumbel-Morgenstern copula and the Ali-Mikhail-Haq copula. Within the ageing classes we will study the most important ones in which notable results on preservation have been obtained: the IFR, DFR, DMRL, IMRL, NBU, NWU, IRFR, ILR, IFRA, IMIT classes, etc. These acronyms study properties such as the growth or decrease of functions such as the mean residual life, the mean inactivity time, the hazard rate or its reversal, among others.

In the second chapter, we have studied the theorems related to the preservation of ageing classes. Starting from the classes that we have mentioned before, it is a matter of seeing under what conditions it happens that a system belongs to a certain class starting from the fact that its components belong to that class. Firstly, we have explained previous results in which the concept of distorted has been included. Our objective is to write the reliability (or density) function of the system using a distortion from its minimal cut and path sets. After that, we have studied the results about preservation of ageing classes in different cases: systems with independent components, systems with identically distributed components, systems with independent and identically distributed components,  $k$ -out-of- $n$  systems and systems with non identically distributed components. We should remark that I have obtained a result related to IMIT class by myself.

Finally, in the third chapter, we provide examples in which the previous results are applied. The most of these examples have been obtained by myself. We have checked the preservation of the survival classes under the conditions established by the theorems and propositions. We have also looked for examples in which the class is not preserved.





# Resumen

Este trabajo tiene como objetivo estudiar algunas propiedades de los sistemas coherentes o semi-coherentes. En particular, nos hemos centrado en estudiar la preservación de clases de envejecimiento en un sistema. La preservación de clases de envejecimiento se basa en estudiar si un sistema pertenece a una clase de envejecimiento sabiendo que sus componentes pertenecen a dicha clase.

El trabajo se estructura en tres partes. En la primera, se ha hecho una introducción a la fiabilidad de sistemas, incluyendo definiciones y propiedades básicas de sistemas, análisis de fiabilidad, órdenes de variables aleatorias, estadísticos ordenados y lo más importante: teoría de cópulas y clases de envejecimiento. En el apartado de cópulas nos limitaremos al teorema de Sklar y a definir las cópulas, que luego usaremos en los ejemplos prácticos: cópulas cota superior e inferior de Frechet–Hoeffding, cópula de Clayton, cópula de independencia, cópula de Gumbel, cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern o la cópula de Ali-Mikhail-Haq. Dentro de las clases estudiaremos aquellas más importantes en las que se han obtenido resultados destacables sobre preservación: la clases IFR, DFR, DMRL, IMRL, NBU, NWU, IRFR, ILR, IFRA, IMIT, etcétera. Estas siglas estudian propiedades como el crecimiento o decrecimiento de funciones como la vida media residual, del tiempo medio de inactividad, de la razón de fallo o de su reversa, entre otras.

En la segunda parte, hemos estudiado los teoremas relativos a la preservación de clases de envejecimiento. Partiendo de las clases que hemos citado antes, se trata de ver bajo qué condiciones ocurre que un sistema pertenezca a una determinada clase partiendo de que sus componentes pertenecen a esa clase. Primero hemos explicado unos resultados previos donde se incluía el concepto de distorsión, el objetivo es representar la función de fiabilidad (o de distribución) del sistema en función de una distorsión a partir de sus caminos y cortes minimales. Una vez hecha esta introducción, hemos estudiado los resultados sobre preservación de clases en diferentes casos: sistemas con componentes idénticamente distribuidas, con componentes independientes, con componentes independientes e idénticamente distribuidas, sistemas  $k$ -out-of- $n$  y sistemas con componentes no idénticamente distribuidas. Cabe destacar que se ha obtenido un resultado propios para la clase IMIT.

Por último, en el tercer capítulo, hemos obtenido algunos ejemplos, la mayoría de ellos originales, en los que se aplicaban los resultados anteriores. Hemos comprobado en casos concretos la preservación de la clase de envejecimiento siempre que se cumpliesen las condiciones de las proposiciones. También hemos buscado ejemplos en los que, al no verificarse la condición, no se preservaba la clase.



# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se va a realizar una introducción a los conceptos básicos de probabilidad en general y de análisis de fiabilidad de sistemas en particular, ya que son necesarios para entender el trabajo, así como a las definiciones de cópulas y clases de envejecimiento que se utilizarán a lo largo del mismo.

### 1.1. Sistemas coherentes

Las definiciones de esta sección se han obtenido de [2].

Dadas  $n$  componentes, sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las variables binarias de forma que  $x_i = 1$  si la componente  $i$ -ésima funciona y  $x_i = 0$  si no funciona. Un sistema formado por esas componentes viene determinado por una función Booleana

$$\phi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

que tomará los valores

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

si el sistema funciona y

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

si no lo hace. Esta función se conoce con el nombre de función de estructura.

**Definición 1.1.1.** Un sistema en serie es aquel que falla si falla alguna de sus componentes.

**Definición 1.1.2.** Un sistema en paralelo es aquel que falla solo cuando fallan todas sus componentes.

**Definición 1.1.3.** Un sistema  $k$ -out-of- $n$ :  $G$  es aquel que funciona si funcionan al menos  $k$  de sus  $n$  componentes.

**Definición 1.1.4.** Un sistema  $k$ -out-of- $n$ :  $F$  es aquel que falla si fallan al menos  $k$  de sus  $n$  componentes.

Cuando, a lo largo del trabajo, nos refiramos a los sistemas *k-out-of-n*, sin especificar más, se entenderá que son los descritos en la Definición 1.1.3.

Veamos ahora, como ejemplo, cómo son las funciones de estructura para los sistemas que acabamos de definir.

**Ejemplo 1.1.1.** Denotamos, a partir de ahora  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Para el sistema en serie, la función de estructura sería

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n x_i = \min(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Ejemplo 1.1.2.** En el caso del sistema en paralelo, la función de estructura sería

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

**Ejemplo 1.1.3.** Si el sistema es *k-out-of-n*:G

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k$$

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i < k.$$

**Ejemplo 1.1.4.** Si el sistema es *k-out-of-n*:F

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 \text{ si } \sum_{i=1}^n (1 - x_i) < k$$

$$\phi(\mathbf{x}) = 0 \text{ si } \sum_{i=1}^n (1 - x_i) \geq k.$$

**Definición 1.1.5.** Decimos que la componente *i*-ésima de un sistema es irrelevante si

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

para todo  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ .

**Definición 1.1.6.** Un sistema es semi-coherente si  $\phi(0, 0, \dots, 0) = 0$  y  $\phi(1, 1, \dots, 1) = 1$  y  $\phi$  es creciente.

En toda la memoria diremos que una función es creciente si  $g(x) \leq g(y)$  para todo  $x \leq y$ . Respectivamente, diremos que es decreciente si  $g(x) \geq g(y)$  para todo  $x \leq y$ .

**Definición 1.1.7.** Un sistema es coherente si  $\phi$  es creciente y si cada componente es relevante.

**Definición 1.1.8.** El dual de un sistema es el sistema

$$\phi^D : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$$

definido por  $\phi^D(\mathbf{x}) = 1 - \phi(1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n)$ .

**Definición 1.1.9.** Diremos que un conjunto no vacío  $P \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  es un camino del sistema  $\phi$  si  $\phi(\mathbf{x}) = 1$  cuando  $x_i = 1$  para todo  $i \in P$ . Diremos además que es un camino minimal cuando P no contenga a otros caminos.

**Definición 1.1.10.** Diremos que un conjunto no vacío  $C \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  es un corte del sistema  $\phi$  si  $\phi(\mathbf{x}) = 0$  cuando  $x_i = 0$  para todo  $i \in C$ . Diremos además que es un camino minimal cuando C no contenga a otros caminos.

Los caminos de un sistema serán los cortes de su dual y viceversa.

## 1.2. Representación de sistemas.

Las definiciones y resultados de esta sección se han obtenido de [2].

Los sistemas pueden representarse de diferentes maneras: gráficamente, dando su función de estructura a partir de su descomposición pivotal o dando su función de estructura en términos de máximos y mínimos a partir de sus caminos y cortes minimales.

Vamos a comenzar viendo un ejemplo de representación gráfica.

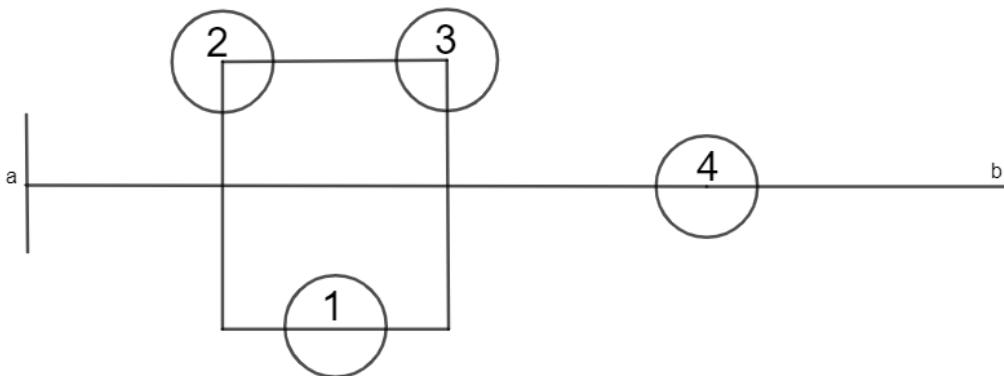


Figura 1.1: Representación gráfica de un sistema.

En la Figura 1.1 podemos observar la representación gráfica de un sistema de cuatro componentes, el sistema funcionará si existe un camino entre a y b que pase por componentes que estén funcionando en ese momento. Por ejemplo, si funcionan la componente 1 y la 4 habrá un camino de la forma  $\{(a,1), (1,4), (4,b)\}$  y el sistema

funcionará. Este camino se representará mediante el conjunto  $P = \{1, 4\}$ . Por el contrario, si no funcionase la componente 4 no habría ningún camino entre a y b.

En cuanto a la función de estructura, uno de los métodos para hallarla es mediante la descomposición pivotal dada en la proposición siguiente:

**Proposición 1.2.1.** La siguiente igualdad se verifica para cualquier función de estructura de orden  $n$ :

$$\phi(\mathbf{x}) = x_i \phi(1_i, \mathbf{x}) + (1 - x_i) \phi(0_i, \mathbf{x})$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$  y donde  $(1_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$  y  $(0_i, \mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

Aplicando la igualdad anterior repetidas veces, la función de estructura es de la forma

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in \{0,1\}^n} \left( \phi(\mathbf{y}) \prod_{j=1}^n x_j^{y_j} (1 - x_j)^{(1-y_j)} \right)$$

para todo  $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^n$ .

**Ejemplo 1.2.1.** Sea el sistema con la representación gráfica de la Figura 1.1. Su función de estructura sería

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) = & x_1 x_4 (1 - x_2)(1 - x_3) + (1 - x_1) x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 (1 - x_3) \\ & + x_1 (1 - x_2) x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4. \end{aligned}$$

Presentamos a continuación el otro método para hallar la función de estructura basado en los caminos y cortes minimales:

**Proposición 1.2.2.** Sea un sistema coherente (o semi-coherente), con caminos minimales  $P_1, P_2, \dots, P_r$  y cortes minimales  $C_1, C_2, \dots, C_s$ . Entonces

$$\phi(\mathbf{x}) = \max_{1,2,\dots,r} \min_{j \in P_i} x_j$$

y

$$\phi(\mathbf{x}) = \min_{1,2,\dots,s} \max_{j \in C_i} x_j.$$

Si tenemos un sistema con tiempo de vida  $T$  y con tiempos de vida de las componentes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , entonces su función de estructura será

$$T = \max_{i=1,2,\dots,r} X_{P_i}$$

y

$$T = \min_{i=1,2,\dots,s} X_{C_i}^{C_i},$$

donde  $X_{P_i} = \min_{j \in P_i} X_j$  y  $X_{C_i}^{C_i} = \max_{j \in C_i} X_j$ .

**Ejemplo 1.2.2.** Con el sistema del ejemplo anterior, tenemos que sus caminos minimales son  $P_1 = \{1, 4\}$  y  $P_2 = \{2, 3, 4\}$  Por tanto,

$$\phi(\mathbf{x}) = \max(\min(x_1, x_4), \min(x_2, x_3, x_4)).$$

Si queremos calcularlo con sus cortes minimales, que son  $C_1 = \{4\}$ ,  $C_2 = \{1, 2\}$   $C_3 = \{1, 3\}$ , obtenemos

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(x_4, \max(x_1, x_2), \max(x_1, x_3)).$$

Para un estudio más completo de sistemas véase [2].

### 1.3. Conceptos básicos en el análisis de fiabilidad

En este apartado vamos a introducir conceptos básicos y definiciones relacionadas con el análisis de fiabilidad que se utilizarán a lo largo del trabajo. Estos conceptos y definiciones se han extraído también de [2].

**Definición 1.3.1.** Sea una variable aleatoria T, se llama función de distribución a la función  $F(t) = \Pr(T \leq t)$ .

**Definición 1.3.2.** Sea una variable aleatoria T, se llama función de supervivencia o fiabilidad a la función  $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = \Pr(T > t)$ .

A partir de esta expresión se puede calcular la esperanza en el caso de una variable aleatoria no negativa con la fórmula  $E(T) = \int_0^{\infty} \bar{F}(t) dt$ .

**Definición 1.3.3.** Llamamos función de densidad de la variable aleatoria T a  $f(t) = F'(t) = -\bar{F}'(t)$  cuando F es absolutamente continua.

**Definición 1.3.4.** La variable aleatoria  $T_t = \{T - t | T > t\}$  se denomina tiempo de vida residual y su esperanza, siempre que exista, es la vida media residual

$$m(t) = E(T_t) = \frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)}.$$

Representa el tiempo de vida adicional esperado de una componente o de un sistema con edad t.

**Definición 1.3.5.** La variable aleatoria  ${}_tT = \{t - T | T < t\}$  se denomina tiempo de inactividad antes del tiempo t y su esperanza, siempre que exista, es el tiempo medio de inactividad

$$\bar{m}(t) = E({}_tT) = \frac{\int_{-\infty}^t F(x) dx}{F(t)}.$$

Representa el tiempo de inactividad esperado de una componente o de un sistema que ha fallado antes de la edad t.

**Definición 1.3.6.** Llamamos razón de fallo (o riesgo) a la función  $h(t) = f(t)/\bar{F}(t)$ , donde  $f(t)$  es la función de densidad de la variable aleatoria cuya función de distribución es  $F(t)$ . Representa la probabilidad de morir en un instante de tiempo inmediatamente posterior a  $t$  siempre que  $\bar{F}(t) > 0$ .

**Proposición 1.3.1.** Ambas funciones,  $h(t)$  y  $m(t)$ , están relacionadas por medio de la expresión  $h(t) = \frac{1+m'(t)}{m(t)}$ .

*Demostración:*

Consideramos  $f(t)$  y  $\bar{F}(t)$  como las funciones de densidad y fiabilidad de la variable aleatoria  $T$ . Entonces

$$\begin{aligned} m(t) &= \int_0^{\infty} \Pr(T-t > x | T > t) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\Pr(T-t > x)}{\Pr(T > t)} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} dx \\ (\text{si hacemos el cambio } u=t+x) &= \int_t^{\infty} \frac{\bar{F}(u)}{\bar{F}(t)} du. \end{aligned}$$

De esta forma

$$m(t)\bar{F}(t) = \int_t^{\infty} \bar{F}(u) du.$$

Derivando, obtenemos

$$m'(t)\bar{F}(t) - m(t)f(t) = -\bar{F}(t)$$

y si dividimos por  $\bar{F}(t)$  llegamos a

$$m'(t) - m(t)\frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -1.$$

Entonces

$$m'(t) - m(t)h(t) = -1$$

y

$$h(t) = \frac{1+m'(t)}{m(t)}.$$

□

**Proposición 1.3.2.** La fórmula de inversión

$$\bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t h(x) dx\right)$$

nos da la relación entre la función de supervivencia y la razón de fallo (o la vida media residual).



*Demostración:*

De la definición, tenemos

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int_0^t h(x)dx\right) &= \exp\left(\int_0^t \frac{-f(x)}{\bar{F}(x)}dx\right) = \exp(\ln(\bar{F}(x))|_0^t) \\ &= \exp(\ln(\bar{F}(t)) - \ln(1)) = \bar{F}(t),\end{aligned}$$

ya que como  $T \geq 0$ , entonces  $\bar{F}(0) = 1$ .

□

**Definición 1.3.7.** Llamamos razón de fallo reversa de la variable aleatoria  $T$  a la expresión  $\bar{h}(t) = f(t)/F(t)$ , donde  $f(t)$  es la función de densidad de la variable aleatoria.

La fórmula de inversión para  $\bar{h}(t)$  y la relación entre  $\bar{h}(t)$  y  $\bar{m}(t)$  se obtiene de forma similar.

## 1.4. Teoría de cópulas

En esta sección daremos los resultados básicos de la teoría de cópulas y ejemplos de algunas cópulas que posteriormente usaremos en el tercer capítulo. Para un estudio más amplio de cópulas ver [8].

**Proposición 1.4.1.** Sea una función  $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ .  $C$  es una cópula si y solo si se verifican las propiedades siguientes:

- i)  $C$  es creciente y continua por la derecha en cada componente.
- ii)  $C(u_1, \dots, 0, \dots, u_n) = 0$ . Es decir, que si alguna componente del vector  $\mathbf{u} \in [0, 1]$  es nula, entonces,  $C(\mathbf{u}) = 0$ .
- iii)  $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$  con  $u_i \in [0, 1]$ . Es decir, que si todas las componentes del vector  $\mathbf{u} \in [0, 1]$ , excepto la  $i$ -ésima, son 1 y la  $i$ -ésima vale  $u_i$ , entonces,  $C(\mathbf{u}) = u_i$ . Para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .
- iv)  $C$  es supermodular. Equivalentemente, para todo  $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$  con  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , se verifica

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{\sum_{j=1}^n i_j} C(u_{1,i_1}, u_{2,i_2}, \dots, u_{n,i_n}) \geq 0,$$

donde  $u_{j,1} = a_j$  y  $u_{j,2} = b_j$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Toda cópula se puede extender para obtener una función de distribución. De la propiedad iii) se deduce que las marginales univariantes de cualquier cópula siguen una distribución uniforme en  $[0, 1]$ .

**Teorema 1.4.1. (Sklar, 1959).** Sea  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  con función de distribución conjunta  $F$  y funciones de distribución marginales  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Entonces existe una cópula  $C$  tal que

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)).$$

Si  $F_1, F_2, \dots, F_n$  son continuas, entonces  $C$  es única.

Alternativamente la función de fiabilidad conjunta puede escribirse como

$$\bar{F}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \bar{F}_2(x_2), \dots, \bar{F}_n(x_n))$$

donde  $\hat{C}$  se conoce como cópula de supervivencia.

Este teorema sirve para representar las funciones de distribución y fiabilidad en función de la cópula y se aplicará en resultados posteriores.

Vemos ahora algunos ejemplos de cópulas bivariantes.

**Ejemplo 1.4.1.** Cópula cota superior Fréchet–Hoeffding:

$$C_{SF}(u, v) = \min(u, v).$$

**Ejemplo 1.4.2.** Cópula cota inferior Fréchet–Hoeffding:

$$C_{IF}(u, v) = \max(u + v - 1, 0).$$

Todas las cópulas cumplen que  $C_{IF}(u, v) \leq C(u, v) \leq C_{SF}(u, v)$ .

**Ejemplo 1.4.3.** Cópula de supervivencia asociada a la cópula bivalente  $C$ :

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v).$$

**Definición 1.4.1.** Sea  $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$  una función continua, estrictamente decreciente, con  $\phi(1) = 0$ . Definimos su pseudo-inversa como:

$$\phi^{[-1]}(t) = \phi^{-1}(t) \text{ si } 0 \leq t \leq \phi(0)$$

y

$$\phi^{[-1]}(t) = 0 \text{ si } \phi(0) \leq t \leq \infty.$$

**Definición 1.4.2.** A partir de la función de la definición anterior definimos la cópula Arquimediana como:

$$C_\phi(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$$

para  $u, v \in [0, 1]$  y con  $\phi(u) + \phi(v) \leq \phi(0)$  y

$$C_\phi(u, v) = 0$$

si no. Se puede probar que  $C_\phi$  es una cópula si y solo si  $\phi(t)$  es convexa, véase [6].

Vemos ahora ejemplos de algunas cópulas Arquimedianas.

**Ejemplo 1.4.4.** Cópula de Clayton:

$$C(u, v) = (\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0))^{-\frac{1}{\theta}}$$

con  $\theta \in [-1, \infty) - \{0\}$ . Es una cópula Arquimediana con  $\phi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$ .

**Ejemplo 1.4.5.** Cópula de independencia (o producto):

$$C_I(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i.$$

Es una cópula Arquimediana con  $\phi(t) = -\ln(t)$ . Representa a las variables aleatorias independientes.

**Ejemplo 1.4.6.** Cópula de Ali–Mikhail–Haq:

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$$

con  $\theta \in [-1, 1]$ . Es una cópula Arquimediana con  $\phi(t) = \ln\left(\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right)$ .

**Ejemplo 1.4.7.** Cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern:

$$C(u, v) = uv(1 - \theta(1-u)(1-v))$$

con  $\theta \in [-1, 1]$ .

**Ejemplo 1.4.8.** Cópula de Joe:

$$C(u, v) = 1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}$$

con  $\theta \in [1, \infty]$ . Es una cópula Arquimediana con  $\phi(t) = -\ln(1 - (1-t)^\theta)$ .

La cópula cota inferior de Fréchet-Hoeffding es también una cópula Arquimediana con  $\phi(t) = 1 - t$ . En cambio, la cópula cota superior de Fréchet-Hoeffding no es una cópula Arquimediana.

## 1.5. Estadísticos ordenados

Para redactar esta sección se ha consultado [9].

Dada una muestra de  $n$  variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , si ordenamos los valores de dichas variables de menor a mayor, denotaremos como  $X_{i:n}$  el valor que ocupa la posición  $i$ -ésima. En ese caso  $X_{1:n}$  será el mínimo de  $X_1, X_2, \dots, X_n$  y  $X_{n:n}$ , el máximo.

**Proposición 1.5.1.** Si denotamos  $F_{i:n}$  como la función de distribución de  $X_{i:n}$ , y las  $n$  variables son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución  $F$ , tendremos que:

- i.  $F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$ .
- ii.  $F_{n:n}(x) = [F(x)]^n$ .
- iii.  $F_{i:n}(x) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}$ .

*Demostración:*

i. Como  $\bar{F}_{1:n}(x) = \Pr(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) = \Pr(X_1 > x) \Pr(X_2 > x) \dots \Pr(X_n > x) = (\bar{F}(x))^n = (1 - F(x))^n$ , entonces  $F_{1:n}(x) = 1 - (1 - F(x))^n$ .

ii.  $F_{n:n}(x) = \Pr(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \Pr(X_1 \leq x) \Pr(X_2 \leq x) \dots \Pr(X_n \leq x) = \Pr(X \leq x) = [F(x)]^n$ .

iii. El resultado se obtiene a partir de una distribución binomial.  $F_{i:n}$  es la probabilidad de que de que  $i$  o más variables sean menores o iguales que  $x$ . La probabilidad de que exactamente  $i$  sean menores que  $x$  sigue una binomial de parámetros  $n$  y  $p = [F(x)]$ . Es decir, la probabilidad de que exactamente  $i$  sean menores que  $x$  es

$$\binom{n}{i} [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}$$

y, por tanto, la probabilidad de que  $i$  o más variables sean menores que  $x$  es

$$F_{i:n}(x) = \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}.$$

□

**Proposición 1.5.2.** La función de densidad de  $X_{i:n}$  es de la forma

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} f(x).$$

*Demostración:*

Puede obtenerse de derivar la función de distribución anterior.

$$\begin{aligned}
F'_{i:n}(x) &= f_{i:n}(x) = \sum_{j=i}^n f(x) \binom{n}{j} j [F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} \\
&- \sum_{j=i}^n f(x) \binom{n}{j} (n-j) [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j-1} \\
&= f(x) \binom{n}{i} i [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} + \sum_{j=i+1}^n f(x) \binom{n}{j} j [F(x)]^{j-1} [1 - F(x)]^{n-j} \\
&- \sum_{j=i}^n f(x) \binom{n}{j} (n-j) [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j-1} \\
&= f(x) \binom{n}{i} i [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} + \sum_{j=i}^n f(x) \binom{n}{j+1} (j+1) [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j-1} \\
&- \sum_{j=i}^n f(x) \binom{n}{j} (n-j) [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j-1} \\
&= f(x) \binom{n}{i} i [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} + \sum_{j=i}^n f(x) \frac{n!}{(n-j-1)!j!} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j-1} \\
&- \sum_{j=i}^n f(x) \frac{n!}{(n-j-1)!j!} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j-1} = f(x) \binom{n}{i} i [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i} \\
&= f(x) \frac{n!}{(n-i)!(i-1)!} [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i}.
\end{aligned}$$

□

## 1.6. Clases de envejecimiento

En esta sección se definen las clases de envejecimiento más importantes. Las definiciones de las distintas clases se han obtenido de [2]. El objetivo del trabajo es estudiar si se preservan, es decir, tenemos que comprobar bajo qué condiciones se cumple que si las componentes de un sistema pertenecen a alguna de estas clases, el sistema también pertenece a la misma clase.

**Definición 1.6.1.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua,  $T$  pertenece a la clase IFR si su razón de fallo es creciente.

**Definición 1.6.2.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua,  $T$  pertenece a la clase DFR si su razón de fallo es decreciente.

**Definición 1.6.3.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua,  $T$  pertenece a la clase DMRL si su función vida media residual es decreciente.

**Definición 1.6.4.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua,  $T$  pertenece a la clase IMRL si su función vida media residual es creciente.

Las clases “naturales” son IFR y DMRL, puesto que las componentes suelen empeorar con el tiempo.

**Definición 1.6.5.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua,  $T$  pertenece a la clase DMIT si su función tiempo medio de inactividad es decreciente.

**Definición 1.6.6.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua,  $T$  pertenece a la clase IMIT si su función tiempo medio de inactividad es creciente.

**Definición 1.6.7.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua, con extremo inferior del soporte 0,  $T$  pertenece a la clase bañera si su razón de fallo es del tipo bañera, es decir, si es decreciente en un primer intervalo para después permanecer constante y luego ser creciente en un intervalo posterior.

Vemos un ejemplo de la razón de fallo de tipo bañera en la Figura 1.2.



Figura 1.2: Ejemplo de razón de fallo de tipo bañera. Extraída de [11].

**Teorema 1.6.1. (Glaser, 1985).** Sea  $T$  una variable no negativa con soporte  $\mathbb{R}^+$  función de distribución continua  $F$ , y función de densidad  $f$  dos veces derivable en el soporte, y sea  $\eta(t) = -f'(t)/f(t)$ . Entonces se verifica:

- a) Si  $\eta$  crece entonces  $T$  es IFR.
- b) Si  $\eta$  decrece entonces  $T$  es DFR.
- c) Si existe un punto  $n_0$  tal que  $\eta'(n) < 0$  para todo  $n \in (0, n_0)$  y  $\eta'(n) \geq 0$  para todo  $n \in (n_0, \infty)$  con desigualdad estricta en algún punto, siendo  $\eta'(n_0) = 0$  y existe un punto  $m$  donde se anula la derivada de  $h(t)$ , entonces  $T$  es de tipo bañera.

A la función  $\eta(t)$  también se le llama función de Glaser.

**Definición 1.6.8.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua positiva,  $T$  pertenece a la clase NBU (*new better than used*) si  $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ .

**Definición 1.6.9.** Sea  $T$  una variable aleatoria continua positiva,  $T$  pertenece a la clase NWU (*new worse than used*) si  $\bar{F}(x+y) \geq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$ .

**Definición 1.6.10.** Sea  $T$  una variable aleatoria, decimos que pertenece a la clase IRFR (*increasing reverse failure rate*) si su razón de fallo reversa crece.

**Definición 1.6.11.** Sea  $T$  una variable aleatoria, decimos que pertenece a la clase DRFR (*decreasing reverse failure rate*) si su razón de fallo reversa decrece.

**Definición 1.6.12.** Decimos que una variable aleatoria  $T$  pertenece a la clase ILR (*increasing likelihood ratio*) si su función de densidad es log-cóncava, esto es que  $\ln(f(t))$  es cóncavo o la función  $\eta(t)$  crece.

**Definición 1.6.13.** Decimos que una variable aleatoria  $T$  pertenece a la clase DLR (*decreasing likelihood ratio*) si su función de densidad es log-convexa, esto es que  $\ln(f(x))$  es convexo o la función  $\eta$  decrece.

**Definición 1.6.14.** Una variable aleatoria  $T$  pertenece a la clase IFRA (*increasing failure rate average*) si, para todo  $t > 0$ ,  $\frac{1}{t} \int_0^t h(x) dx$  es creciente.

Otra definición alternativa es que una variable aleatoria pertenece a la clase IFRA si se cumple la desigualdad  $\bar{F}(\alpha t) \geq \bar{F}^\alpha(t)$  para todo  $\alpha \in (0, 1)$  y para todo  $t > 0$ .

**Definición 1.6.15.** Una variable aleatoria  $T$  pertenece a la clase DFRA (*decreasing failure rate average*) si, para todo  $t > 0$ ,  $\frac{1}{t} \int_0^t h(x) dx$  es decreciente.

Otra definición alternativa es que una variable aleatoria pertenece a la clase DFRA si se cumple la desigualdad  $\bar{F}(\alpha t) \leq \bar{F}^\alpha(t)$  para todo  $\alpha \in (0, 1)$  y para todo  $t > 0$ .

**Definición 1.6.16.** Una variable aleatoria  $T$  positiva pertenece a la clase NBUE si cumple  $m(t) \leq \mu$  donde  $\mu = E(X) = m(0)$  es la media de la variable aleatoria.

En la Figura 1.3 podemos ver la relación entre las distintas clases de envejecimiento.

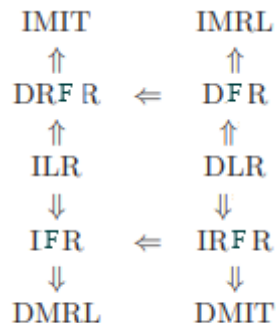


Figura 1.3: Relación entre las clases de envejecimiento.



# Capítulo 2

## Preservación de clases

### 2.1. Resultados previos

En esta sección analizaremos los resultados obtenidos a partir de [2] que nos permiten expresar las funciones de fiabilidad y distribución de un sistema en función de sus caminos y cortes minimales.

**Teorema 2.1.1.** Si  $T$  es el tiempo de vida de un sistema coherente (o semicoherente) con caminos minimales  $P_1, P_2, \dots, P_r$  y tiempos de vida de las componentes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_i}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots + (-1)^{r+1} \bar{F}_{P_1 \cup \dots \cup P_r}(t),$$

donde  $\bar{F}_{P_i}(t) = \Pr(X_{P_i} > t)$  y  $X_{P_i} = \min_{j \in P_i} X_j$ .

*Demostración:*

Como vimos en el primer capítulo, el tiempo de vida del sistema puede escribirse como  $T = \max_{i=1,2,\dots,r} X_{P_i}$ . Entonces

$$\bar{F}_T(t) = \Pr(T > t) = \Pr\left(\max_{i=1,2,\dots,r} X_{P_i} > t\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^r \{X_{P_i} > t\}\right)$$

(fórmula de inclusión-exclusión)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^r \Pr(X_{P_i} > t) - \sum_{i < j} \Pr(X_{P_i} > t, X_{P_j} > t) + \dots \\ &+ (-1)^{r+1} \Pr(X_{P_1} > t, X_{P_2} > t, \dots, X_{P_r} > t) \\ &= \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_i}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots + (-1)^{r+1} \bar{F}_{P_1 \cup \dots \cup P_r}(t). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.1.1.** Volviendo al sistema de los Ejemplos 1.2.1 y 1.2.2 y sustituyendo en la fórmula, se obtiene

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_{\{1,4\}}(t) + \bar{F}_{\{2,3,4\}}(t) - \bar{F}_{\{1,2,3,4\}}(t).$$

**Teorema 2.1.2.** Si  $T$  es el tiempo de vida de un sistema coherente (o semicoherente) con cortes minimales  $C_1, C_2, \dots, C_r$  y tiempos de vida de las componentes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , entonces

$$F_T(t) = \sum_{i=1}^r F^{C_i}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n F^{C_i \cup C_j}(t) + \dots + (-1)^{r+1} F^{C_1 \cup \dots \cup C_r}(t),$$

donde  $F^{C_i}(t) = \Pr(X^{C_i} \leq t)$  y  $X^{C_i} = \max_{j \in C_i} X_j$ .

*Demostración:*

Como hemos visto en el primer capítulo  $T = \min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i}$ . Entonces

$$F_T(t) = \Pr(T \leq t) = \Pr\left(\min_{i=1,2,\dots,r} X^{C_i} \leq t\right) = \Pr\left(\bigcup_{i=1}^r \{X^{C_i} \leq t\}\right)$$

(fórmula de inclusión-exclusión)

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^r \Pr(X^{C_i} \leq t) - \sum_{i < j} \Pr(X^{C_i} \leq t, X^{C_j} \leq t) + \dots \\ &+ (-1)^{r+1} \Pr(X^{C_1} \leq t, X^{C_2} \leq t, \dots, X^{C_r} \leq t) \\ &= \sum_{i=1}^r F^{C_i}(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n F^{C_i \cup C_j}(t) + \dots + (-1)^{r+1} F^{C_1 \cup \dots \cup C_r}(t). \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 2.1.2.** Volviendo al sistema de los Ejemplos 1.2.1 y 1.2.2 y sustituyendo en la fórmula, se obtiene

$$\begin{aligned} F_T(t) &= F^{\{4\}}(t) + F^{\{1,2\}}(t) + F^{\{1,3\}}(t) - F^{\{1,2,4\}}(t) - F^{\{1,3,4\}}(t) - F^{\{1,2,3\}}(t) \\ &+ F^{\{1,2,3,4\}}(t). \end{aligned}$$

**Definición 2.1.1.** Decimos que un vector aleatorio  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es intercambiable (EXC) si

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) =_{ST} (X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)})$$

para todas las permutaciones  $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ , donde  $=_{ST}$  denota la igualdad en distribución y  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Observación 2.1.1.** Si  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es intercambiable, todas las distribuciones marginales de  $k$  dimensiones son iguales y las variables son idénticamente distribuidas.

Por lo tanto, las distribuciones de todos los sistemas en serie (respectivamente, en paralelo) con  $k$  componentes son iguales:

$$\bar{F}_P(t) = \bar{F}_{\{1,2,\dots,k\}}(t) = \bar{F}(t, \dots, t, -\infty, \dots, -\infty) = F_{1:k}(t)$$

donde  $t$  se repite  $k = |P|$  veces.

## 2.2. Distribución distorsionada

Las distribuciones distorsionadas fueron introducidas en el contexto de la teoría de riesgos por Yaari [10]. El propósito de estas distribuciones fue permitir una distorsión (es decir, un cambio) en la función de distribución del riesgo inicial o pasado. Formalmente, su definición es la siguiente:

**Definición 2.2.1.** La distribución distorsionada asociada a una función de distribución  $F$  y a una función de distorsión creciente y continua  $q : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  tal que  $q(0) = 0$  y  $q(1) = 1$  es

$$F_q(t) = q(F(t)).$$

Análogamente, para la función de fiabilidad se tiene

$$\bar{F}_q(t) = \bar{q}(\bar{F}(t))$$

donde  $\bar{q}(u) = 1 - q(1 - u)$  se conoce como distorsión dual.

Si  $F$  es absolutamente continua y  $q$  es diferenciable, la función de densidad es

$$f_q(t) = f(t)q'(F(t)) = f(t)\bar{q}'(\bar{F}(t)).$$

La razón de fallo sería

$$h_q(t) = \frac{\bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} f(t) \quad (2.1)$$

y la vida media residual

$$m_q(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x)) dx}{\bar{q}(\bar{F}(t))} = \frac{\bar{F}(t)}{\bar{q}(\bar{F}(t))} \frac{\int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x)) dx}{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx} m(t).$$

En cuanto a la razón de fallo reversa, sería

$$\bar{h}_q(t) = \frac{q'(F(t))}{q(F(t))} f(t)$$

y el tiempo medio de inactividad

$$\bar{m}_q(t) = \frac{\int_{-\infty}^t q(F(x)) dx}{q(F(t))} = \frac{F(t)}{q(F(t))} \frac{\int_{-\infty}^t q(F(x)) dx}{\int_{-\infty}^t F(x) dx} \bar{m}(t).$$

La distribución distorsionada que se define a continuación fue generalizada en [7].

**Definición 2.2.2.** La distribución distorsionada generalizada asociada a las funciones de distribución  $F_1, F_2, \dots, F_n$  y a una función de distorsión continua y creciente  $Q : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  tal que  $Q(0, 0, \dots, 0) = 0$  y  $Q(1, 1, \dots, 1) = 1$  es

$$F_Q(t) = Q(F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)).$$

Mientras que para la función de fiabilidad obtenemos

$$\bar{F}_Q(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))$$

donde  $\bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n) = 1 - Q(1 - u_1, 1 - u_2, \dots, 1 - u_n)$  se llama función de distorsión dual generalizada.

Si F es absolutamente con continua y Q es diferenciable, la función de densidad es

$$f_Q(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \partial_i \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)) \quad (2.2)$$

donde  $\partial_i \bar{Q}$  representa la derivada parcial respecto a su i-ésima variable. Y a partir de las funciones de fiabilidad y densidad podemos calcular que la razón de fallo del sistema es

$$h_Q(t) = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(t) \partial_i \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))}{\bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))}. \quad (2.3)$$

Vemos a continuación dos teoremas con sus respectivos corolarios que permiten escribir las funciones de fiabilidad y distribución de un sistema como distorsiones de las componentes.

**Teorema 2.2.1.** Si  $T$  es el tiempo de vida de un sistema semi-coherente, entonces la función de fiabilidad de T puede escribirse como

$$\bar{F}_T(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

donde  $\bar{Q}$  es una distorsión.

*Demostración:*

Por el Teorema 2.1.1

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_i}(t) - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots + (-1)^{r+1} \bar{F}_{P_1 \cup \dots \cup P_r}(t).$$

Además, por el Teorema de Sklar (Teorema 1.4.1), es cierto que

$$\bar{F}_P(t) = \Pr(X_P > t) = \Pr(\cap_{j \in P} \{X_j > t\}) = \hat{C}_P(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))$$

donde  $\hat{C}_P(u_1, u_2, \dots, u_n) = \hat{C}(u_1^P, u_2^P, \dots, u_n^P)$ ,  $u_i^P = u_i$  si  $i \in P$  y  $u_i^P = 1$  si  $i \notin P$  para  $u_1, u_2, \dots, u_n \in [0, 1]$ . De ambos resultados se obtiene que si

$$\bar{Q}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^r \hat{C}_{P_i}(\mathbf{u}) - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \hat{C}_{P_i \cup P_j}(\mathbf{u}) + \dots + (-1)^{r+1} \hat{C}_{P_1 \cup \dots \cup P_r}(\mathbf{u})$$

para  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ , entonces

$$\bar{F}_T(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

□

**Corolario 2.2.1.** Si las componentes son idénticamente distribuidas, entonces se dará la igualdad  $\bar{F}_T(t) = \bar{q}(\bar{F}(t))$  para una distorsión  $\bar{q}$ .

*Demostración:*

La demostración es inmediata a partir del Teorema 2.2.1 tomando  $\bar{q}(u) = \bar{Q}(u, u, \dots, u)$ .

□

**Teorema 2.2.2.** Si  $T$  es el tiempo de vida de un sistema semi-coherente, entonces la función de distribución de  $T$  puede escribirse como

$$F_T(t) = Q(F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)).$$

*Demostración:*

Es análoga a la del Teorema 2.2.1. utilizando en este caso el Teorema 2.1.2 y el Teorema de Sklar (Teorema 1.4.1).

□

**Corolario 2.2.2.** Si las componentes son idénticamente distribuidas, entonces se dará la igualdad  $F_T(t) = q(F(t))$ .

*Demostración:*

Es análoga a la del Corolario 2.2.1 utilizando el Teorema 2.2.2 y  $q(u) = Q(u, u, \dots, u)$ .

□

En el tercer capítulo se verán ejemplos concretos del cálculo de distorsiones para sistemas concretos.

Una vez introducidos estos resultados previos, podemos comenzar a estudiar los resultados sobre preservación de clases en diferentes tipos de sistemas, considerando las clases introducidas en la Sección 1.6.

## 2.3. Sistemas con componentes idénticamente distribuidas

Vamos a empezar considerando los casos en los que las componentes son idénticamente distribuidas.

Vamos a comenzar estudiando los resultados relativos al crecimiento o decrecimiento de la razón de fallo y de la preservación de las clases IFR y DFR. Dichos resultados se han obtenido de [5].

**Proposición 2.3.1.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente, con componentes idénticamente distribuidas y con  $\bar{q}$  función de distorsión dual. Consideramos  $\alpha(u) = u\bar{q}'(u)/\bar{q}(u)$  con  $0 \leq u \leq 1$ . Entonces la clase IFR se preserva si y solo si  $\alpha$  decrece en  $(0,1)$ .

*Demostración:*

Por el Corolario 2.2.1 la función de fiabilidad del sistema puede escribirse como

$$\bar{F}_T(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)),$$

donde  $\bar{F}$  es la función de fiabilidad común a todas las componentes.

Además, la razón de fallo del sistema, aplicando la Ecuación 2.1, puede escribirse como

$$h_T(t) = f(t) \frac{\bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} = f(t) \frac{\bar{q}'(\bar{F}(t)) \bar{F}(t)}{\bar{q}(\bar{F}(t)) \bar{F}(t)} = h(t) \frac{\bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} \bar{F}(t) = h(t) \alpha(\bar{F}(t)).$$

Si suponemos que  $h$  creciente y  $\alpha$  decreciente, entonces  $\alpha(\bar{F}(t))$  crece y el producto  $h(t)\alpha(\bar{F}(t))$  es creciente.

Recíprocamente, si la clase se preserva para todas las distribuciones IFR, consideremos una distribución exponencial de media 1 y razón de fallo constante 1, y tendremos que

$$h_T(t) = h(t)\alpha(\bar{F}(t)) = \alpha(\exp(-t))$$

es creciente para  $t \geq 0$ , lo que implica que la función  $\alpha$  decrece en  $[0,1]$ .

□

Veremos con ejemplos que la clase IFR no se preserva siempre en sistemas, a pesar de que a priori es lógico pensar que si la razón de fallo de las componentes crece, entonces la razón de fallo del sistema también lo haga.

**Proposición 2.3.2.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente, con componentes idénticamente distribuidas y con  $\bar{q}$  función de distorsión dual. Consideramos  $\alpha(u) = u\bar{q}'(u)/\bar{q}(u)$  con  $0 \leq u \leq 1$ . Entonces la clase DFR se preserva si y solo si  $\alpha$  crece en  $[0,1]$ .

La demostración es análoga a la de la Proposición 2.3.1.

**Proposición 2.3.3.** Las clases IFR y DFR se preservan simultáneamente en un sistema con componentes idénticamente distribuidas y con distorsión dual  $\bar{q}$  si y solo si  $\bar{q}(u) = u^k$ , con  $k > 0$  constante.

*Demostración:*

Si se preservan ambas por las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2 se ha de cumplir que  $\alpha(u) = u\bar{q}'(u)/\bar{q}(u)$  sea creciente y decreciente a la vez, es decir, que  $\alpha(u)$  es constante. Entonces

$$k = u \frac{\bar{q}'(u)}{\bar{q}(u)}$$

para  $k > 0$  y resolviendo la ecuación diferencial por separación de variables tenemos

$$\int \frac{k}{u} du = \int \frac{\bar{q}'(u)}{\bar{q}(u)} du.$$

Resolviendo las integrales se obtiene que

$$k \ln(u) = \ln(\bar{q}(u)) + C.$$

Como  $\bar{q}(u) = 1$ ,  $C=0$  y por tanto,  $\bar{q}(u) = u^k$ .

En cuanto al recíproco, si  $\bar{q}(u) = u^k$ , entonces

$$\alpha(u) = \frac{ku \cdot u^{k-1}}{u^k} = 1.$$

Al ser constante, por las Proposiciones 2.3.2 y 2.3.1, preserva las clases IFR y DFR.

□

Estudiamos ahora la razón de fallo reversa y la preservación de la clase DRFR, estos resultados se han obtenido de [5].

**Proposición 2.3.4.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente, con componentes idénticamente distribuidas y con  $q$  función de distorsión. Consideramos  $\bar{\alpha}(u) = uq'(u)/q(u)$  con  $0 \leq u \leq 1$ . Entonces la clase DRFR se preserva si  $\bar{\alpha}$  decrece en  $(0,1)$ .

*Demostración:*

Por el Corolario 2.2.2 la función de distribución del sistema puede escribirse como

$$F_T(t) = q(F(t)),$$

donde  $\bar{F}$  es la función de fiabilidad común a todas las componentes.

Además, la razón de fallo puede escribirse como

$$\bar{h}_T(t) = f(t) \frac{q'(F(t))}{q(F(t))} = f(t) \frac{q'(F(t))}{q(F(t))} \frac{F(t)}{F(t)} = \bar{h}(t) \frac{q'(F(t))}{q(F(t))} F(t) = \bar{h}(t) \bar{\alpha}(F(t)).$$

Si suponemos que  $\bar{h}(t)$  decreciente y  $\bar{\alpha}(F(t))$  decreciente, entonces el producto es decreciente.

□

Estudiamos ahora la preservación de las clases ILR y DLR, utilizando la función de Glaser, resultados obtenidos de [5].

**Proposición 2.3.5.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente, con componentes idénticamente distribuidas y con  $\bar{q}$  función de distorsión dual. Consideramos  $\beta(u) = u\bar{q}''(u)/\bar{q}'(u)$  con  $0 \leq u \leq 1$ . Entonces si  $\beta$  es positiva y decreciente en  $(0,1)$ , la clase ILR se preserva.

*Demostración:*

Como hemos visto anteriormente, la función de densidad de  $T$  puede escribirse como

$$f_T(t) = f(t)\bar{q}'(\bar{F}(t))$$

y

$$f'_T(t) = f'(t)\bar{q}'(t)(\bar{F}(t)) - f^2(t)\bar{q}''(t)(\bar{F}(t))$$

entonces la función de Glaser se obtendría como

$$\eta_T(t) = -\frac{f'_T(t)}{f_T(t)} = \eta(t) + h(t)\beta(\bar{F}(t)).$$

Si las componentes del sistema son ILR entonces  $h(t)$  y  $\eta$  son crecientes, ya que ILR implica IFR por el Teorema de Glaser (Teorema 1.6.1). Por lo tanto, si  $\beta$  es positiva y decreciente,  $\eta_T(t)$  es creciente y el sistema es ILR.

□

**Proposición 2.3.6.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente, con componentes idénticamente distribuidas y con  $\bar{q}$  función de distorsión dual. Consideramos  $\beta(u) = u\bar{q}''(u)/\bar{q}'(u)$  con  $0 \leq u \leq 1$ . Entonces si  $\beta$  es positiva y creciente en  $(0,1)$ , la clase DLR se preserva.

La demostración es análoga a la de la Proposición 2.3.6.

Los siguientes resultados son muy similares entre sí. En ellos se estudia el crecimiento la vida media residual y, por tanto, la preservación de las clases IMRL y DMRL. Estos resultados se han obtenido de [6].

**Proposición 2.3.7.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente con componentes idénticamente distribuidas, si sus componentes son IMRL, entonces  $T$  es IMRL si

$$\inf_{u \in (0,v]} \frac{\bar{q}(u)}{u} \geq \frac{\bar{q}^2(v)}{v^2\bar{q}'(v)}$$

con  $v \in (0, 1)$ , donde  $\bar{q}(u)$  es la distorsión dual.

*Demostración:*

Por un lado, podemos escribir

$$m_T(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx}{\bar{q}(\bar{F}(t))}.$$

Si derivamos, debemos probar que

$$0 \leq m'_T(t) = \frac{f(t)\bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}^2(\bar{F}(t))} \int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx - 1,$$

es decir, que

$$1 \leq \frac{f(t)\bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}^2(\bar{F}(t))} \int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx.$$



Partimos de la hipótesis de que sus componentes son IMLR, es decir, dada

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}(t)}$$

se cumple

$$m'(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}^2(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x)dx - 1 \geq 0.$$

o

$$\frac{f(t)}{\bar{F}^2(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x)dx \geq 1.$$

Si

$$\inf_{u \in (0, v]} \frac{\bar{q}(u)}{u} \geq \frac{\bar{q}^2(v)}{v^2 \bar{q}'(v)}$$

eso implica que

$$\frac{\bar{q}(\bar{F}(x))}{\bar{F}(x)} \geq \frac{\bar{q}^2(\bar{F}(t))}{\bar{F}^2(t) \bar{q}'(\bar{F}(t))}$$

si  $x \geq t$ . De ahí obtenemos que

$$\frac{f(t) \bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}^2(\bar{F}(t))} \int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx \geq \frac{f(t) \int_t^\infty \bar{F}(x)dx}{\bar{F}^2(t)} \geq 1$$

por ser las componentes IMRL. Con esto se prueba que el sistema es IMRL.

□

**Proposición 2.3.8.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente con componentes idénticamente distribuidas, si las componentes son DMRL, entonces  $T$  es DMRL si

$$\sup_{u \in (0, v]} \frac{\bar{q}(u)}{u} \leq \frac{\bar{q}^2(v)}{v^2 \bar{q}'(v)}$$

con  $v \in (0, 1)$ , donde  $\bar{q}(u)$  es la distorsión dual.

*Demostración:*

Por un lado, podemos escribir

$$m_T(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx}{\bar{q}(\bar{F}(t))}$$

si derivamos, debemos probar que

$$0 \geq m'_T(t) = \frac{f(t) \bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}^2(\bar{F}(t))} \int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx - 1,$$

es decir,

$$1 \geq \frac{f(t) \bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}^2(\bar{F}(t))} \int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx.$$

Partimos de la hipótesis de que las componentes son DMLR, es decir, dada

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)}$$

se cumple

$$m'(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}^2(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx - 1 \leq 0$$

o

$$\frac{f(t)}{\bar{F}^2(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq 1.$$

Si

$$\sup_{u \in (0, v]} \frac{\bar{q}(u)}{u} \leq \frac{\bar{q}^2(v)}{v^2 \bar{q}'(v)}$$

eso implica que

$$\frac{\bar{q}(\bar{F}(x))}{\bar{F}(x)} \leq \frac{\bar{q}^2(\bar{F}(t))}{\bar{F}^2(t) \bar{q}'(\bar{F}(t))}$$

si  $x \geq t$ . De ahí obtenemos que

$$\frac{f(t) \bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}^2(\bar{F}(t))} \int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x)) dx \leq \frac{f(t) \int_t^\infty \bar{F}(x) dx}{\bar{F}^2(t)} \leq 1$$

por ser sus componentes DMRL. Con esto se prueba que el sistema es DMRL.

□

Estudiamos ahora los resultados relativos al tiempo medio de inactividad. Estos resultados son propios obtenidos a partir de una aplicación en la clase IMIT de las desigualdades para las clases DMRL de [6].

**Proposición 2.3.9.** Sea  $T$  el tiempo de vida de un sistema coherente con componentes idénticamente distribuidas, si sus componentes son IMIT entonces  $T$  es IMIT si

$$\sup_{u \in (0, v]} \frac{q(u)}{u} \leq \frac{q^2(v)}{v^2 q'(v)}$$

con  $v \in (0, 1)$ , donde  $q$  es la distorsión definida en el Corolario 2.2.2.

*Demostración:*

Por un lado, podemos escribir

$$\bar{m}_T(t) = \frac{\int_0^t q(F(x)) dx}{q(F(t))}$$

si derivamos, debemos probar que

$$0 \leq \bar{m}'_T(t) = -\frac{f(t) q'(F(t))}{q^2(F(t))} \int_0^t q(F(x)) dx + 1$$

$$1 \geq \frac{f(t)q'(F(t))}{q^2(F(t))} \int_0^t q(F(x))dx.$$

Partimos de la hipótesis de que sus componentes son IMIT, es decir, dado

$$\bar{m}(t) = \frac{\int_0^t F(x)dx}{F(t)}$$

se cumple

$$\bar{m}'(t) = -\frac{f(t)}{F^2(t)} \int_0^t F(x)dx + 1 \geq 0.$$

o

$$\frac{f(t)}{F^2(t)} \int_{0y}^t F(x)dx \leq 1.$$

Si

$$\sup_{u \in (0,v]} \frac{q(u)}{u} \leq \frac{q^2(v)}{v^2 q'(v)}$$

eso implica que

$$\frac{q(F(x))}{F(x)} \leq \frac{q^2(F(t))}{F^2(t)q'(F(t))}$$

si  $x \leq t$ . De ahí obtenemos que

$$\frac{f(t)q'(F(t))}{q^2(F(t))} \int_0^t q(F(x))dx \leq \frac{f(t) \int_0^t F(x)dx}{F^2(t)} \leq 1$$

por pertenecer sus componentes a la clase IMIT. Con esto se prueba que el sistema es IMIT.

□

Los resultados anteriores se pueden aplicar tanto en el caso de independencia como en el de dependencia de las componentes, como se mostrará en los ejemplos del tercer capítulo.

## 2.4. Sistemas con componentes independientes

Estudiaremos ahora los casos en los que las componentes son independientes pero no idénticamente distribuidas. Para ello necesitaremos unas definiciones y lemas previos.

**Definición 2.4.1.** Se llama polinomio de dominación generalizado de un sistema a un polinomio creciente en  $P_\phi : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  que cumple que  $P_\phi(0, 0, \dots, 0) = 0$  y  $P_\phi(1, 1, \dots, 1) = 1$ .

Este polinomio solo depende de la función de estructura del sistema, en caso de que las componentes sean independientes, la función de fiabilidad del sistema puede escribirse como

$$\bar{F}_T(t) = P_\phi(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n).$$

Para profundizar más sobre lo anterior, ver [2].

Como la cópula de supervivencia  $\hat{C}$  es la cópula de independencia se cumple que  $\bar{Q} = P_\phi$ .

Mostramos a continuación dos resultados, obtenidos de [5], sobre clases que se preservan cuando un sistema tiene componentes independientes, sin importar su estructura. Estas son la clase NBU y la clase IFRA. Para probarlos son necesarios dos lemas previos que se han obtenido de [2].

**Lema 2.4.1.** Si  $P_\phi$  es el polinomio de dominación generalizado de un sistema coherente con componentes independientes, entonces

$$P_\phi(p_1q_1, p_2q_2, \dots, p_nq_n) \leq P_\phi(p_1, p_2, \dots, p_n)P_\phi(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

$\forall p_i, q_i \in [0, 1]$ .

**Proposición 2.4.1.** Sea  $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  el tiempo de vida de un sistema coherente, con componentes independientes. Si todas las componentes pertenecen a la clase NBU, entonces T también es NBU.

*Demostración:*

Si para cada  $i$ ,  $X_i$  es NBU, entonces  $\bar{F}_i(x+y) \leq \bar{F}_i(x)\bar{F}_i(y)$ . A partir del polinomio de dominación del sistema, la fiabilidad puede escribirse

$$\bar{F}_T(t) = P_\phi(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))$$

y entonces

$$\begin{aligned} \bar{F}_T(x+y) &= P_\phi(\bar{F}_1(x+y), \bar{F}_2(x+y), \dots, \bar{F}_n(x+y)) \\ &\leq P_\phi(\bar{F}_1(x)\bar{F}_1(y), \bar{F}_2(x)\bar{F}_2(y), \dots, \bar{F}_n(x)\bar{F}_n(y)) \\ &\leq P_\phi(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(x), \dots, \bar{F}_n(x))P_\phi(\bar{F}_1(y), \bar{F}_2(y), \dots, \bar{F}_n(y)) \\ &= \bar{F}_T(x)\bar{F}_T(y) \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad es cierta por ser creciente el polinomio de dominación y la segunda desigualdad es cierta por el Lema 2.4.1. Por tanto, el sistema verifica la Definición 1.1.6 y es NBU.

□

**Lema 2.4.2.** Si  $P_\phi$  es el polinomio de dominación generalizado de un sistema coherente con componentes independientes, entonces

$$P_\phi^\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n) \leq P_\phi(p_1^\alpha, p_2^\alpha, \dots, p_n^\alpha)$$

con  $\alpha \in (0, 1)$ .

**Proposición 2.4.2.** Sea  $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n)$  el tiempo de vida de un sistema coherente, con componentes independientes. Si todas las componentes pertenecen a la clase IFRA, entonces el sistema también es IFRA.

*Demostración:*

A raíz del polinomio de dominación, la fiabilidad del sistema puede escribirse como

$$\bar{F}(t) = P_\phi(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

Por estar  $\alpha$  entre 0 y 1 tenemos

$$\begin{aligned} \bar{F}_T(\alpha t) &= P_\phi(\bar{F}_1(\alpha t), \bar{F}_2(\alpha t), \dots, \bar{F}_n(\alpha t)) \geq P_\phi(\bar{F}_1^\alpha(t), \bar{F}_2^\alpha(t), \dots, \bar{F}_n^\alpha(t)) \\ &\geq P_\phi^\alpha(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)) = \bar{F}_T^\alpha(t) \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se deduce por ser IFRA las componentes y por ser  $P_\phi$  creciente y la segunda del Lema 2.3.2. Por tanto, el sistema también es IFRA porque cumple la Definición 1.6.12.

□

## 2.5. Sistemas con componentes independientes e idénticamente distribuidas.

En estos resultados se exigen ambas condiciones simultáneamente, ambos se aplican a la clase NBUE. El primero de ellos nos da una condición suficiente para la preservación de la clase y el segundo, una condición necesaria. Ambos se han obtenido de [4].

**Proposición 2.5.1.** Sea  $\bar{q}(u)$  la distorsión dual de un sistema coherente con componentes independientes e idénticamente distribuidas tal que  $\bar{q}(u) \geq u$  con  $u \in [0, 1]$  y tal que

$$\frac{u}{\bar{q}(u)} \cdot \frac{1 - \bar{q}(u)}{1 - u} \cdot \sup_{r \in (0, u]} \frac{\bar{q}(r)}{r} \leq 1, \quad (2.4)$$

entonces el sistema preserva la clase NBUE.

*Demostración:*

Supongamos que las componentes satisfacen la definición de NBUE, es decir, que  $m(t) \leq \mu$ , condición equivalente a

$$\int_t^\infty \bar{F}(u) du \frac{1 - \bar{F}(t)}{\bar{F}(t)} \leq \int_0^t \bar{F}(u) du.$$

Esta equivalencia de ambas definiciones puede consultarse en [3] y fue demostrada por primera vez por Abouammoh y El-Newehi en [1].

Utilizando las hipótesis de la proposición obtenemos

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(u))du \frac{1 - \bar{q}(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} &= \frac{\int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(u))du}{\int_t^\infty \bar{F}(u)du} \int_t^\infty \bar{F}(u)du \frac{1 - \bar{q}(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} \\ &\leq \sup_{r \in (0, \bar{F}(t)]} \frac{\bar{q}(r)}{r} \int_0^t \bar{F}(u)du \frac{\bar{F}(t)}{1 - \bar{F}(t)} \frac{1 - \bar{q}(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} \\ &\leq \frac{\bar{F}(t)}{1 - \bar{F}(t)} \frac{1 - \bar{q}(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} \sup_{r \in (0, \bar{F}(t)]} \frac{\bar{q}(r)}{r} \int_0^t \bar{q}(\bar{F}(u))du \\ (\text{aplicando la Ecuación 2.4}) &\leq \int_0^t \bar{q}(\bar{F}(u))du. \end{aligned}$$

Entonces la definición alternativa de NBUE se cumple para  $\bar{q}(\bar{F}(t))$  y el sistema pertenece a la clase NBUE. □

**Proposición 2.5.2.** Sea un sistema coherente con componentes independientes e idénticamente distribuidas con distorsión dual  $\bar{q}(u)$ . Entonces una condición necesaria para que se preserve la clase NBUE es  $\bar{q}(u) \geq u$  para  $u \in [0, 1]$ .

*Demostración:*

Consideramos un sistema coherente con con distorsión dual  $\bar{q}(u)$ . Supongamos por reducción al absurdo que existe  $0 < p_0 < 1$  tal que  $\bar{q}(p_0) < p_0$ . Ahora probaremos que el sistema no preserva la clase NBUE. Dado  $p_0$ , sea  $F$  la distribución del tiempo de vida de las componentes con probabilidad  $1 - p_0$  si  $t = 1$  y probabilidad  $p_0$  si  $t = a$ , donde  $a = 1 + \frac{1}{1 - p_0}$ . Entonces

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ p_0 & \text{si } 1 \leq t < a \\ 0 & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

Mientras que la esperanza del tiempo de vida es

$$\mu = 1 - p_0 + ap_0 = 1 + (a - 1)p_0 = 1/(1 - p_0)$$

Que  $F$  es NBUE se ve calculando

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(t)dx}{\bar{F}(t)} = \begin{cases} 1 - t + (a - 1)p_0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ a - t & \text{si } 1 \leq t < a \end{cases}$$

y viendo que la definición se cumple con  $0 \leq t \leq 1$ , mientras que para  $1 \leq t < a$  tenemos

$$a - t \leq a - 1 = \frac{1}{1 - p_0} = \mu.$$

Por tanto  $F$  es NBUE y las componentes pertenecen a dicha clase. Vamos a probar ahora que no se preserva teniendo en cuenta que hemos supuesto que  $\bar{q}(u)$  es la

distorsión dual de un sistema que no cumple las condiciones que hemos indicado en el teorema, es decir, se ha supuesto que existe  $0 < p_0 < 1$  tal que  $\bar{q}(p_0) < p_0$ .

Su función de fiabilidad correspondiente es  $\bar{F}_T(t) = \bar{q}(\bar{F}(t))$ , entonces tendríamos que la vida media residual es

$$m_T(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)} = \begin{cases} 1 - t + (a - 1)\bar{q}(p_0) & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ a - t & \text{si } 1 \leq t < a \end{cases}$$

el valor esperado de del tiempo de vida del sistema se calcula sustituyendo  $t=0$  en la expresión anterior. Y se obtiene

$$\mu_T = 1 + (a - 1)\bar{q}(p_0) < 1 + (a - 1)p_0 = \frac{1}{1 - p_0} = a - 1.$$

Como  $\int_t^\infty \bar{F}(x) dx / \bar{F}_T(t) > \mu_T$  por tanto, no cumple la definición de NBUE. Contradicción que se produce por suponer que existe  $0 < p_0 < 1$  tal que  $\bar{q}(p_0) < p_0$ . Por tanto,  $\bar{q}(u) \geq u$  para  $u \in [0, 1]$  es condición necesaria para la preservación de la clase.

□

Aunque los resultados anteriores se dan en [4] para sistemas con componentes independientes e idénticamente distribuidas, también son válidos para sistemas con componentes idénticamente distribuidas.

## 2.6. Sistemas k-out-of-n

Los resultados anteriores pueden aplicarse a cualquier tipo de sistema coherente, sea o no k-out-of-n. Estudiaremos ahora los resultados sobre preservación de clases que se pueden aplicar específicamente en los sistemas de tipo k-out-of-n cuyas componentes son independientes e idénticamente distribuidas. Los tiempos de vida de estos sistemas coinciden con los estadísticos ordenados vistos en el Capítulo 1. Estos resultados se han obtenido de [5].

Vemos ahora que, en este caso, la clases IFR, DRFR e ILR se preservan siempre.

**Proposición 2.6.1.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución absolutamente continua  $F$  y pertenecientes a la clase IFR, entonces  $X_{i:n}$  es IFR  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Demostración:*

Si  $F$  es absolutamente continua, la razón de fallo de  $X_{i:n}$  puede escribirse como

$$h_{i:n}(t) = \frac{i \binom{n}{i} F^{i-1}(t) \bar{F}^{n-i}(t) f(t)}{\sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t) \bar{F}^{n-j}(t)} = \frac{i \binom{n}{i}}{\sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^{j-i+1}(t) \bar{F}^{i-j-1}(t)} h(t).$$

Como  $F^{j-i+1}(t) \bar{F}^{i-j-1}(t)$  es decreciente, entonces, si  $h(t)$  es creciente,  $h_{i:n}(t)$  será creciente y pertenecerá a la clase IFR.

□

**Proposición 2.6.2.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución absolutamente continua  $F$  y pertenecientes a la clase DRFR, entonces  $X_{i:n}$  es DRFR  $i = 1, 2, \dots, n$ .

La demostración es similar a la del teorema anterior.

En este caso también se asegura la preservación de la clase ILR, como vemos en la siguiente Proposición.

**Proposición 2.6.3.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución absolutamente continua  $F$  y pertenecientes a la clase ILR, entonces  $X_{i:n}$  es ILR  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Demostración:*

Si  $F$  es absolutamente continua, la función de densidad de  $X_{i:n}$  puede escribirse como

$$f_{i:n}(t) = i \binom{n}{i} F^{i-1}(t) \bar{F}^{n-i}(t) f(t).$$

Tomando logaritmos

$$\ln(f_{i:n}(t)) = \ln \left( i \binom{n}{i} \right) + (i-1) \ln(F(t)) + (n-i) \ln(\bar{F}(t)) + \ln(f(t)).$$

Si derivamos

$$\frac{(f_{i:n})'(t)}{f_{i:n}(t)} = (i-1) \frac{f'(t)}{F(t)} - (n-i) \frac{f'(t)}{\bar{F}(t)} + \frac{f'(t)}{f(t)}.$$

Y la función de Glaser del sistema es

$$\eta_{i:n}(t) = \eta(t) + (n-i)h(t) - (i-1)\bar{h}(t).$$

Si  $X_i$  es ILR, entonces  $\eta(t)$  es creciente. Como ILR implica IFR y DRFR,  $h(t)$  será creciente y  $\bar{h}(t)$  decreciente. Por tanto,  $\eta_{i:n}(t)$  es creciente y  $X_{i:n}$  pertenece a la clase ILR.

□

## 2.7. Sistemas con componentes no idénticamente distribuidas

Consideramos ahora resultados obtenidos a partir de las distorsiones duales generalizadas, es decir

$$\bar{F}_Q(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t)).$$

Estos resultados son útiles en el caso de que las componentes no sean idénticamente distribuidas. Se trata de una generalización de algunos resultados que hemos probado anteriormente y que se han obtenido de [5].



**Proposición 2.7.1.** Consideramos

$$\alpha_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{u_i \partial_i \bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)}.$$

La clase IFR se preserva si  $\alpha_i$  es decreciente para cada  $i \in 1, 2, \dots, n$ .

*Demostración:*

Por 2.2 tenemos

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \partial_i \bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

donde  $f_i$  es la función de densidad de la componente  $X_i$  del sistema para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Mientras que la razón de fallo del sistema es

$$h_T(t) = \frac{\sum_{i=1}^n f_i(t) \partial_i \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))}{\bar{Q}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \dots, \bar{F}_n(t))} = \sum_{i=1}^n h_i(t) \alpha_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

como hemos calculado en 2.3. Donde  $h_i$  es la razón de fallo de la componente  $X_i$  del sistema para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por lo tanto, si  $\alpha_i$  es decreciente en para cada  $i \in 1, 2, \dots, n$  y  $h_i$  es creciente por ser IFR las componentes, entonces  $h_T(t)$  crece.

□

**Proposición 2.7.2.** Consideramos

$$\alpha_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{u_i \partial_i \bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)}.$$

La clase DFR se preserva si  $\alpha_i$  es creciente para cada  $i$ .

La demostración es análoga a la de la Proposición 2.7.1.

**Proposición 2.7.3.** Consideramos

$$\bar{\alpha}_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{(1 - u_i) \partial_i \bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)}{1 - \bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n)}.$$

La clase DRFR se preserva si  $\bar{\alpha}_i$  es creciente para cada  $i \in 1, 2, \dots, n$ .

**Proposición 2.7.4.** La clase NBU se preserva si

$$\bar{Q}(u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_n v_n) \leq \bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n) \bar{Q}(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

**Proposición 2.7.5.** La clase IFRA se preserva si

$$\bar{Q}(u_1^\alpha, u_2^\alpha, \dots, u_n^\alpha) \geq (\bar{Q}(u_1, u_2, \dots, u_n))^\alpha$$

Las demostraciones de los resultados anteriores son similares a los de las Proposiciones 2.4.1 y 2.4.2.



# Capítulo 3

## Ejemplos

### 3.1. Sistemas con componentes independientes e idénticamente distribuidas

En esta sección se darán ejemplos, la mayoría de ellos propios, en los casos en los que las componentes sean independientes e idénticamente distribuidas. Eso implica que a la hora de calcular las distorsiones se utilizará la cópula de independencia.

Comenzamos estudiando las clases IFR y DFR con dos ejemplos propios.

**Ejemplo 3.1.1.** En este ejemplo vamos a estudiar si se preserva la clase IFR en el sistema  $T = \min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$ .

Calculamos las distorsiones teniendo en cuenta que si las componentes son independientes e idénticamente distribuidas. El sistema  $T$  tiene por caminos minimales  $P_1 = \{1, 2\}$ ,  $P_2 = \{1, 3\}$  y  $P_3 = \{1, 4\}$ . Por tanto, teniendo en cuenta que sus componentes son independientes e idénticamente distribuidas, y aplicando los resultados del segundo capítulo, su distorsión será

$$\begin{aligned}\bar{F}_T(t) &= \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), 1, 1) + \hat{C}(\bar{F}(t), 1, \bar{F}(t), 1) + \hat{C}(\bar{F}(t), 1, 1, \bar{F}(t)) \\ &\quad - \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t), 1) - \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), 1, \bar{F}(t)) - \hat{C}(\bar{F}(t), 1, \bar{F}(t), \bar{F}(t)) \\ &\quad + \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t)) \\ &= \bar{F}^2(t) + \bar{F}^2(t) + \bar{F}^2(t) - 3\bar{F}^3(t) + \bar{F}^4(t) = \bar{q}(\bar{F}(t))\end{aligned}$$

con

$$\bar{q}(u) = 3u^2 - 3u^3 + u^4.$$

Por la Proposición 2.3.1 debemos estudiar el crecimiento de

$$\alpha(u) = u \frac{\bar{q}'(u)}{\bar{q}(u)} = \frac{9 - 12u + 5u^2}{3 - 3u + u^2}.$$

Con

$$\begin{aligned}\alpha'(u) &= \frac{(10u - 12)(3 - 3u + u^2) - (9 - 12u + 5u^2)(-3 + 2u)}{(3 - 3u + u^2)^2} \\ &= \frac{3(-u^2 + 4u - 3)}{(3 - 3u + u^2)^2} \leq 0 \text{ si } u \in (0, 1).\end{aligned}$$

Dibujamos su gráfica en la Figura 3.1 y vemos que decrece estrictamente en  $(0,1)$ . Por tanto, se preserva la clase IFR por la Proposición 2.3.1.

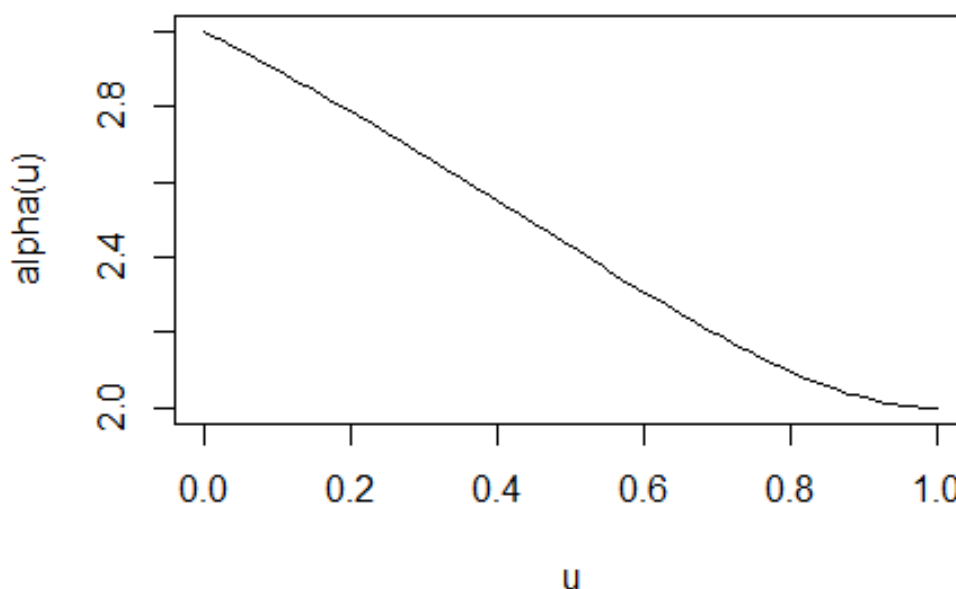


Figura 3.1: Representación gráfica de  $\alpha(u)$  para el sistema del Ejemplo 3.1.1.

Dentro de este mismo ejemplo podemos estudiar el caso concreto en el que las funciones de fiabilidad y de densidad de las componentes sean  $\bar{F}(t) = f(t) = e^{-t}$  con  $t \geq 0$ , es decir, estudiaremos el caso en el que las componentes sigan una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1$ . Al tratarse de una distribución exponencial la razón de fallo de las componentes será constante e igual a 1, es lo que se denomina propiedad de falta de memoria de la exponencial. Ser constante implica que es creciente, por lo tanto, sus componentes pertenecen a la clase IFR.

Hacemos ahora la gráfica de  $h_T(t) = h(t)\alpha(\bar{F}(t))$ , igualdad demostrada en la Proposición 2.3.1. En este caso  $h(t)=1$ . Concretamente, tendríamos  $h_T(t) = \alpha(e^{-t})$ , que es creciente por ser composición de funciones decrecientes. En la Figura 3.2

podemos comprobar que es creciente y que  $h_T(t) > 1 = h(t)$  para todo  $t \geq 0$ . Por tanto el sistema pertenece a la clase IFR (y no a la DFR).

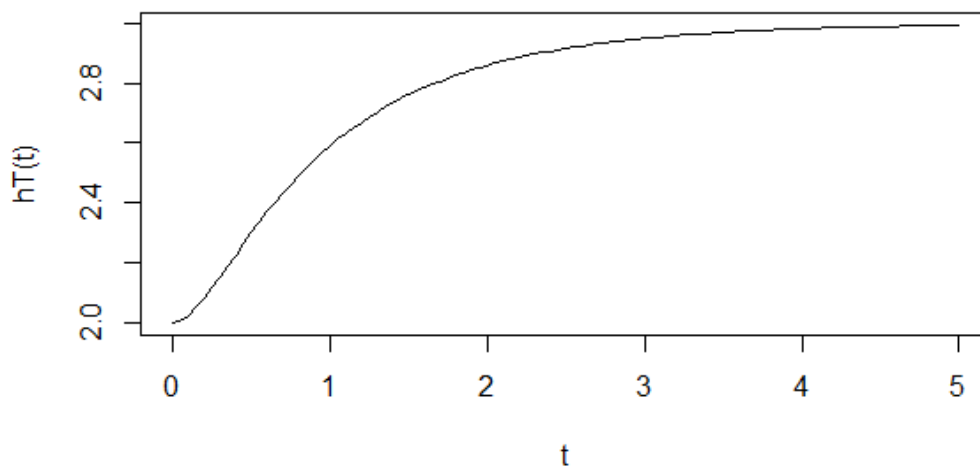


Figura 3.2: Gráfica de la razón de fallo del sistema del Ejemplo 3.1.1.

Hacemos otro ejemplo propio en el que comprobamos si se preserva la clase DFR.

**Ejemplo 3.1.2.** Consideramos el sistema con cuatro componentes  $X_{2:4}$  y vamos a comprobar si preserva la clase DFR.

Primero calculamos su distorsión dual, siendo sus caminos minimales  $P_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $P_2 = \{1, 2, 4\}$ ,  $P_3 = \{2, 3, 4\}$  y  $P_4 = \{1, 3, 4\}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{F}_{2:4}(t) &= \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t), 1) + \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), 1, \bar{F}(t)) + \hat{C}(1, \bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t)) \\ &\quad + \hat{C}(\bar{F}(t), 1, \bar{F}(t), \bar{F}(t)) - 3\hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t)) \\ &= 4\bar{F}^3(t) - 3\bar{F}^4(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)). \end{aligned}$$

Por tanto  $\bar{q}(u) = 4u^3 - 3u^4$ , tenemos entonces que

$$\alpha(u) = \frac{12 - 12u}{4 - 3u},$$

cuya derivada es

$$\alpha'(u) = \frac{-12}{(4 - 3u)^2} < 0.$$

Luego  $\alpha$  es decreciente, por lo tanto, según la Proposición 2.3.2 no siempre se preserva la clase DFR.

Estudiamos ahora la preservación de la clases ILR con un ejemplo propio.

**Ejemplo 3.1.3.** Comprobamos ahora que el sistema  $X_{3:3}$  preserva la clase ILR. Para ello utilizaremos la Proposición 2.3.5, es decir, debemos probar que

$$\beta(u) = u \frac{\bar{q}''(u)}{\bar{q}'(u)}$$

es positiva y decrece.

Empezamos calculando su distorsión, al ser un sistema en paralelo sus caminos minimales son  $P_1 = \{1\}$ ,  $P_2 = \{2\}$  y  $P_3 = \{3\}$  y por tanto tenemos

$$\begin{aligned} \bar{F}_{3:3}(t) &= \hat{C}(\bar{F}(t), 1, 1) + \hat{C}(1, \bar{F}(t), 1) + \hat{C}(1, 1, \bar{F}(t)) \\ &\quad - \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), 1) - \hat{C}(\bar{F}(t), 1, \bar{F}(t)) - \hat{C}(1, \bar{F}(t), \bar{F}(t)) \\ &\quad + \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t)) = 3\bar{F}(t) - 3\bar{F}^2(t) + \bar{F}^3(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)). \end{aligned}$$

Entonces, si son independientes e idénticamente distribuidas su distorsión es  $\bar{q}(u) = 3u - 3u^2 + u^3$  y, por tanto,

$$\beta(u) = \frac{6u^2 - 6u}{3 - 6u + 3u^2} = \frac{6u(u - 1)}{3(u - 1)^2} = \frac{2u}{3(u - 1)} = \frac{2}{1 - 1/u},$$

que es decreciente, como se puede comprobar gráficamente en la Figura 3.3, pero toma valores negativos.

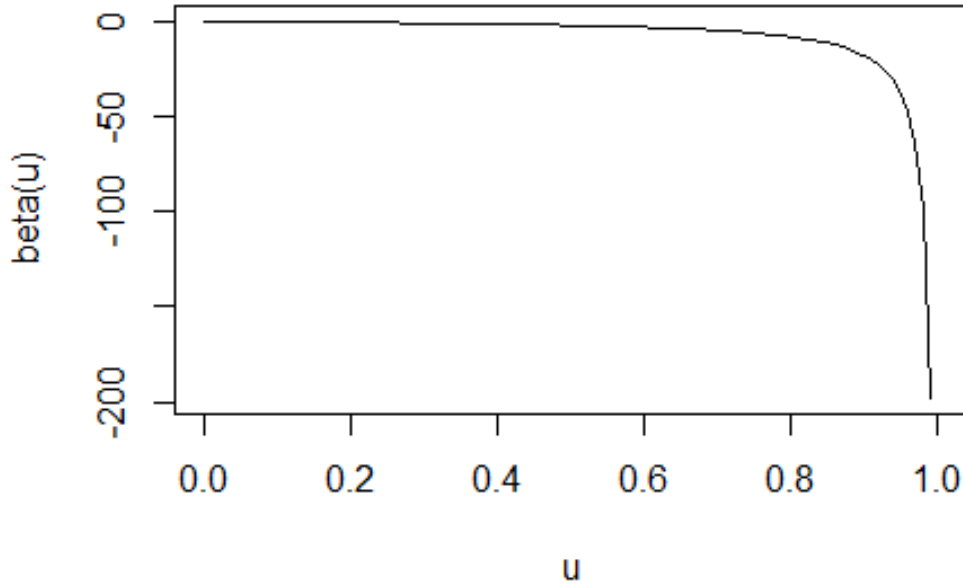


Figura 3.3: Representación gráfica de  $\beta(u)$  para el sistema del Ejemplo 3.1.3.

La Proposición 2.3.5 solo puede aplicarse en el caso en el que la función  $\beta$  sea positiva, con lo cual, no podemos concluir que se preserve o no la clase ILR. Más adelante se hará un ejemplo en el caso de un sistema k-out-of-n donde sí se preserve esta clase y donde estudiaremos un caso concreto con componentes que sigan una distribución normal truncada.

A continuación probamos la preservación de la clase DMRL con un ejemplo propio.

**Ejemplo 3.1.4.** Partiendo de nuevo del sistema  $X_{3;3}$  con componentes independientes e idénticamente distribuidas y con distorsión dual  $\bar{q}(u) = 3u - 3u^2 + u^3$ , queremos comprobar si preserva la clase DMRL.

Se debe verificar esta desigualdad:

$$\sup_{u \in (0,v]} \frac{\bar{q}(u)}{u} \leq \frac{\bar{q}^2(v)}{v^2 \bar{q}'(v)}.$$

Por un lado tenemos que  $\frac{\bar{q}(u)}{u} = 3 - 3u + u^2$  es decreciente en  $(0,1)$ . Ya que si derivamos obtenemos que su derivada es  $2u - 3 < 0$  en  $(0,1)$ . Por tanto su supremo lo alcanzará en  $u=0$  y valdrá 3. Debemos probar que

$$3 \leq \frac{v^2(3 - 3v + v^2)^2}{v^2(3v^2 - 6v + 3)} = \frac{(3 - 3v + v^2)^2}{(3v^2 - 6v + 3)} = g(v),$$

lo comprobaremos gráficamente dibujando  $g(v)$  en la Figura 3.4. Vemos que  $g(v)$  es creciente en el intervalo  $(0,1)$ . Entonces como  $g(0)=3$  se cumplirá que  $g(v) \geq 3$ . Por la Proposición 2.3.8 esto implica que el sistema preserve la clase DMRL.

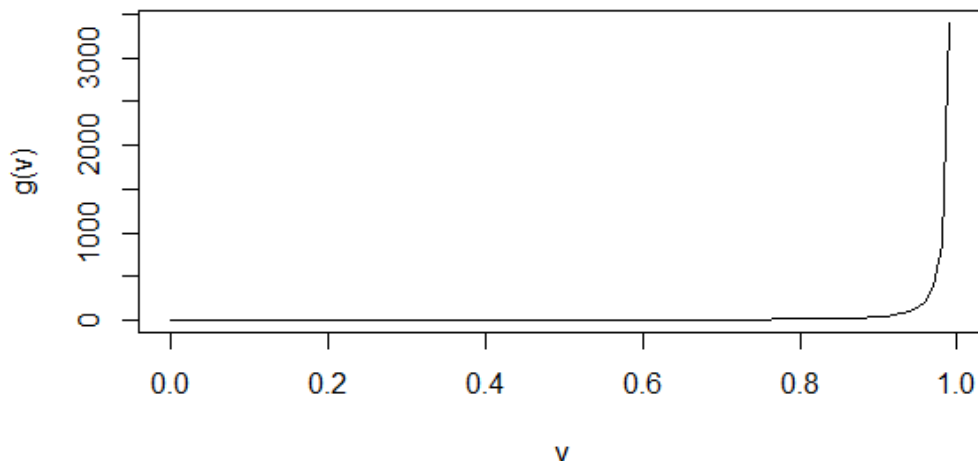


Figura 3.4: Representación gráfica de  $g(v)$  para el sistema del Ejemplo 3.1.4.

Dentro de este mismo ejemplo podemos considerar el caso en el que las componentes sigan una distribución exponencial y, por tanto, tengan función de fiabilidad  $\bar{F}(t) = e^{-t}$  con  $t \geq 0$ . En ese caso, su vida media residual sería

$$m(t) = \frac{\int_t^\infty \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)} = \frac{\int_t^\infty e^{-x} dx}{e^{-t}} = 1.$$

Al ser constante, su vida media residual es decreciente y pertenece a la clase DMRL. En este caso, la vida media residual del sistema sería

$$\begin{aligned} m_{3:3}(t) &= \frac{\int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x)) dx}{\bar{q}(\bar{F}(t))} = \frac{\int_t^\infty 3e^{-x} - 3e^{-2x} + e^{-3x} dx}{3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}} \\ &= \frac{3e^{-t} - (3/2)e^{-2t} + (1/3)e^{-3t}}{3e^{-t} - 3e^{-2t} + e^{-3t}}. \end{aligned}$$

Si lo representamos gráficamente en la Figura 3.5 vemos que es decreciente y, por ello, pertenece a la clase DMRL. Sin embargo,  $m_{3:3}(t) > 1 = m(t)$ .



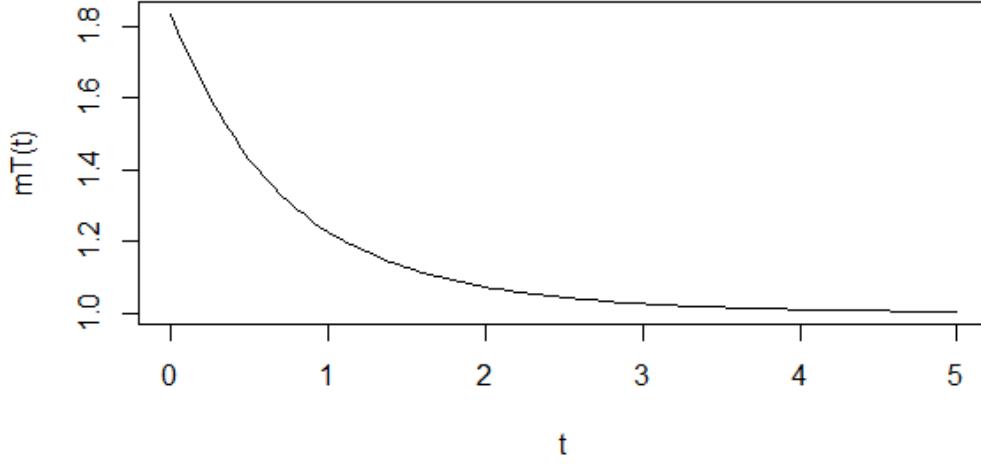


Figura 3.5: Representación gráfica de la vida media residual del sistema del Ejemplo 3.1.4.

Estudiamos ahora un ejemplo propio en el que se aplican los resultados para la clase NBUE.

**Ejemplo 3.1.5.** Comprobamos ahora si  $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3, X_4))$  preserva la clase NBUE a partir de la Proposición 2.5.1 y la Proposición 2.5.2.

Tomamos como polinomio de fiabilidad su distorsión en el caso independientes e idénticamente distribuidas, que calculamos partiendo de los caminos minimales  $P_1 = \{1\}$  y  $P_2 = \{2, 3, 4\}$ :

$$\begin{aligned} \bar{F}_T(t) &= \hat{C}(\bar{F}(t), 1, 1, 1) + \hat{C}(1, \bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t)) \\ &\quad - \hat{C}(\bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t), \bar{F}(t)) \\ &= \bar{F}(t) + \bar{F}^3(t) - \bar{F}^4(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)). \end{aligned}$$

con

$$\bar{q}(u) = u + u^3 - u^4.$$

Debemos comprobar que  $\bar{q}(u) = u + u^3 - u^4 \geq u$  o equivalentemente que  $u^3 - u^4 = u^3(1 - u) \geq 0$ . Eso es cierto para  $0 \leq u \leq 1$ . Con lo cual podría preservar la clase NBUE al cumplir la condición necesaria de la Proposición 2.5.1.

Comprobamos ahora si cumple la condición suficiente dada en la Proposición 2.5.2:

$$\frac{u}{\bar{q}(u)} \cdot \frac{1 - \bar{q}(u)}{1 - u} \cdot \sup_{r \in (0, u]} \frac{\bar{q}(r)}{r} \geq 1,$$

condición dada en la ecuación 2.4.

Haciendo los cálculos con la distorsión dual del sistema T, obtenemos

$$\frac{1}{1+u^2-u^3} \cdot \frac{1-u-u^3+u^4}{1-u} \sup_{r \in (0,u]} 1+r^2-r^3 \geq 1$$

$$\frac{1}{1+u^2-u^3} \cdot u^3 - 1 \cdot \sup_{r \in (0,u]} 1+r^2-r^3 \geq 1.$$

Si derivamos  $f(r) = 1+r^2-r^3$  obtenemos  $f'(r) = r(2-3r)$  y la expresión alcanza un máximo relativo en  $r=2/3$ . Por tanto, si  $1 \geq u \geq 2/3$ , el supremo es  $f(2/3)=31/27$ . Si  $0 \leq u < 2/3$  entonces el supremo se alcanza en  $f(u)$ .

Distinguiamos ahora dos casos. En el primero,  $0 \leq u < 2/3$ , comprobamos si se cumple la desigualdad con

$$\frac{(u^3-1)(1+u^2-u^3)}{1+u^2-u^3} = u^3-1 \geq 1.$$

Como no es cierta para esos valores de  $u$ , no se cumplen las hipótesis de la citada Proposición 2.5.2 y no podemos afirmar que preserve la clase NBUE al no cumplir la condición suficiente.

Vemos ahora un ejemplo concreto, tomamos como distribución de las componentes la distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1$ , que pertenece a la clase NBUE porque  $m(t) = 1$  para todo  $t \geq 0$  y por tanto  $m(t) = 1 = m(0)$ .

En cuanto al sistema, tenemos que la fiabilidad, si sus componentes siguen una distribución exponencial, es

$$\bar{F}_T(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)) = \bar{q}(e^{-t}) = e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}.$$

Para comprobar si ese sistema pertenece a la clase NBUE debemos ver que  $m_T(t) \leq m_T(0)$ . Por un lado  $m_T(t)$  es

$$\begin{aligned} m_T(t) &= \frac{\int_t^\infty \bar{q}(\bar{F}(x))dx}{\bar{q}(\bar{F}(t))} = \frac{\int_t^\infty (e^{-x} + e^{-3x} - e^{-4x})dx}{e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}} \\ &= \frac{e^{-t} + (1/3)e^{-3t} - (1/4)e^{-4t}}{e^{-t} + e^{-3t} - e^{-4t}} \end{aligned}$$

y por otro,  $m_T(0) = 13/12$ . Gráficamente en la Figura 3.7 podemos comprobar que  $m_T(t) \leq m_T(0) = 13/12$ . La línea horizontal en la citada figura indica el valor  $m_T(0)$ . Por lo tanto, en este caso concreto de la exponencial el sistema preserva la clase NBUE.

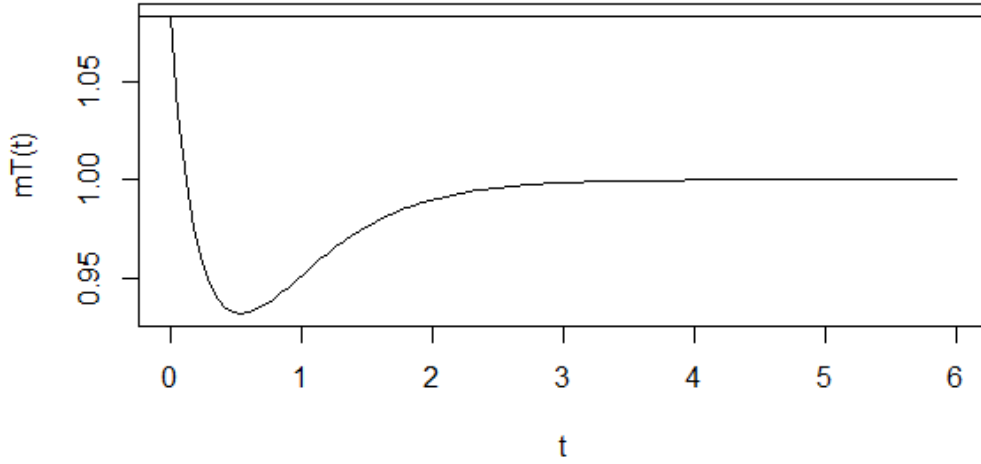


Figura 3.6: Representación gráfica de  $m_T(t)$  y comparación con  $m_T(0)$  para el sistema del Ejemplo 3.1.5.

Hacemos ahora un ejemplo propio de preservación de la clase DRFR.

**Ejemplo 3.1.6.** Comprobamos si el sistema  $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$  preserva la clase DRFR.

Para comprobarlo utilizaremos la Proposición 2.3.4. Primero tenemos que calcular la distorsión dual en el caso independientes e idénticamente distribuidas, teniendo en cuenta que los cortes minimales son  $C_1 = \{1, 2\}$  y  $C_2 = \{1, 3\}$

$$\begin{aligned} F_T(t) &= C(F(t), F(t), 1) + C(F(t), 1, F(t)) \\ &\quad - C(F(t), F(t), F(t)) = q(F(t)) \\ &= 2F(t) - F^3(t) \end{aligned}$$

con  $q(u) = 2u^2 - u^3$  y obtenemos así que

$$\bar{\alpha}(u) = \frac{4 - 3u}{2 - u}.$$

Si derivamos obtenemos que

$$\bar{\alpha}'(u) = \frac{-3(2 - u) + 4 - 3u}{(2 - u)^2} = \frac{-2}{(2 - u)^2} < 0$$

y, por tanto,  $\bar{\alpha}(u)$  es decreciente. Gráficamente también podemos ver en la Figura 3.7 que  $\bar{\alpha}(u)$  se trata de una función decreciente.

Por la Proposición 2.3.4 citada anteriormente, este sistema preserva la clase DRFR.

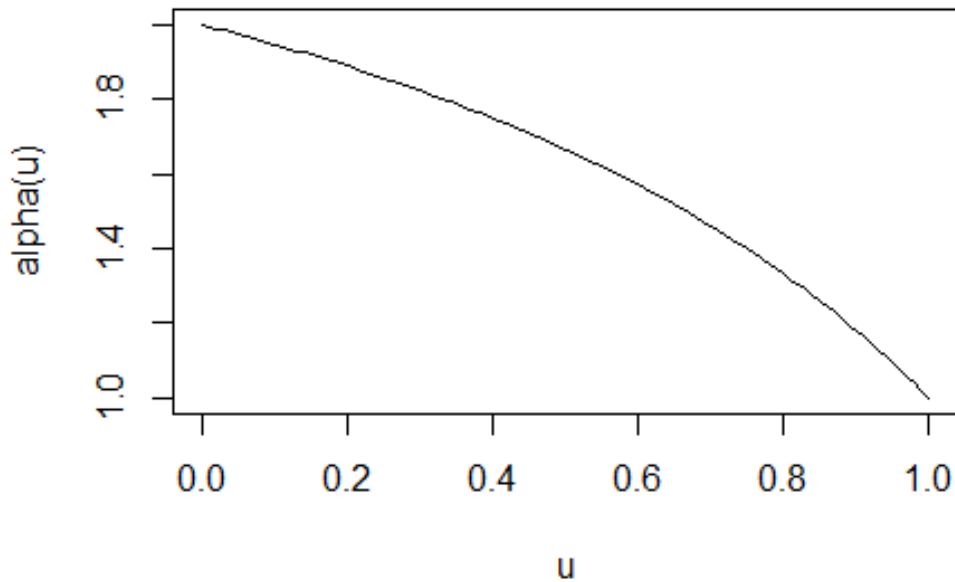


Figura 3.7: Representación gráfica de  $\bar{\alpha}(u)$  para el sistema del Ejemplo 3.1.6.

Estudiamos ahora en este ejemplo el caso particular en el que la distribución de las componentes sea la distribución uniforme en el intervalo (0,1). En ese caso

$$F(t) = t$$

con  $t \in (0, 1)$  y

$$q(F(t)) = 2t^2 - t^3.$$

Por la citada Proposición 2.3.4

$$\bar{h}_T(t) = \bar{h}(t)\bar{\alpha}(F(t)).$$

Calculamos primeramente la razón de fallo reversa de las componentes. Por seguir una distribución uniforme en el intervalo (0,1)

$$\bar{h}(t) = \frac{f(t)}{F(t)} = \frac{1}{t}$$

que es una función decreciente. En cuanto a la razón de fallo reversa del sistema obtenemos

$$\bar{h}_T(t) = \bar{h}(t)\bar{\alpha}(F(t)) = \frac{4 - 3t}{2t - t^2}.$$

En la Figura 3.8 se puede ver que  $\bar{h}_T(t)$  es decreciente.

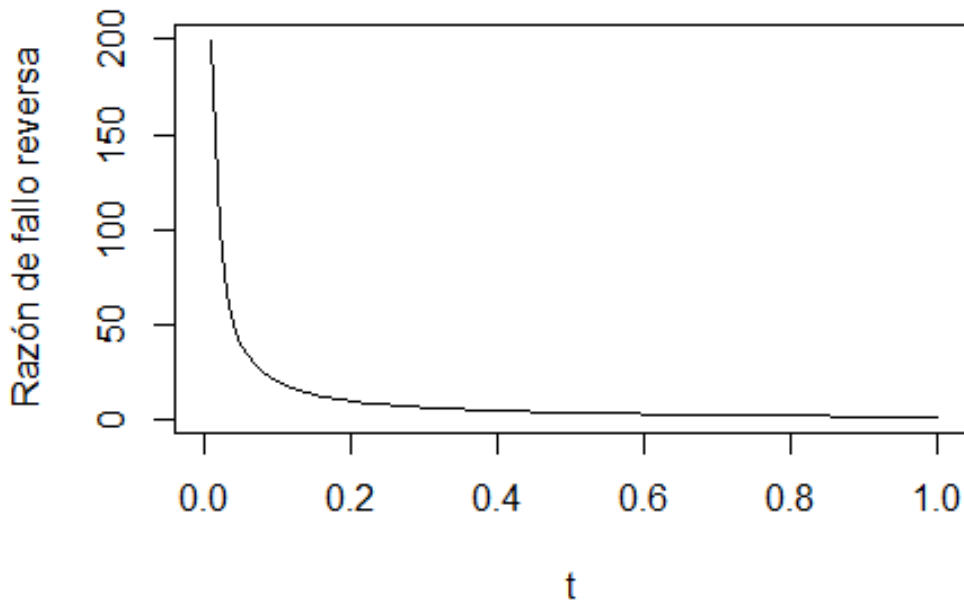


Figura 3.8: Representación gráfica de la razón de fallo reversa del sistema del Ejemplo 3.1.6.

Analíticamente, si calculamos su derivada obtenemos

$$\bar{h}'_T(t) = \frac{9t^2 - 4t - 8}{(2t - t^2)^2}.$$

Calculando las raíces del denominador vemos que no se anula en el intervalo  $(0,1)$ , por tanto, no hay cambios de signo de la derivada y en dicho intervalo es o bien creciente o bien decreciente para cualquier valor de  $t \in (0,1)$ . Entonces, tomando valores en ese intervalo, vemos que  $\bar{h}'_T(t) < 0$ .

Vemos que la clase DMRL no se preserva en el caso de sistemas en serie con componentes independientes e idénticamente distribuidas con un ejemplo obtenido en [5].

**Ejemplo 3.1.7.** Sea el sistema en serie  $X_{1:2} = \min(X_1, X_2)$  con componentes independientes e idénticamente distribuidas. Supongamos que las componentes siguen una distribución que es DMRL pero no IFR. Podemos tomar la siguiente función de

fiabilidad, obtenida de [3]:

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \in [0, 1) \\ e^{-1} & t \in [1, 3/2) \\ e^{-2(t-1)} & t \geq 3/2 \end{cases}$$

A partir de estos datos podemos calcular la vida media residual como

$$m(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 2-t & t \in [1, 3/2) \\ 1/2 & t \geq 3/2 \end{cases}$$

Como vemos en la Figura 3.9 es decreciente y, por ello, las componentes están en la clase DMRL.

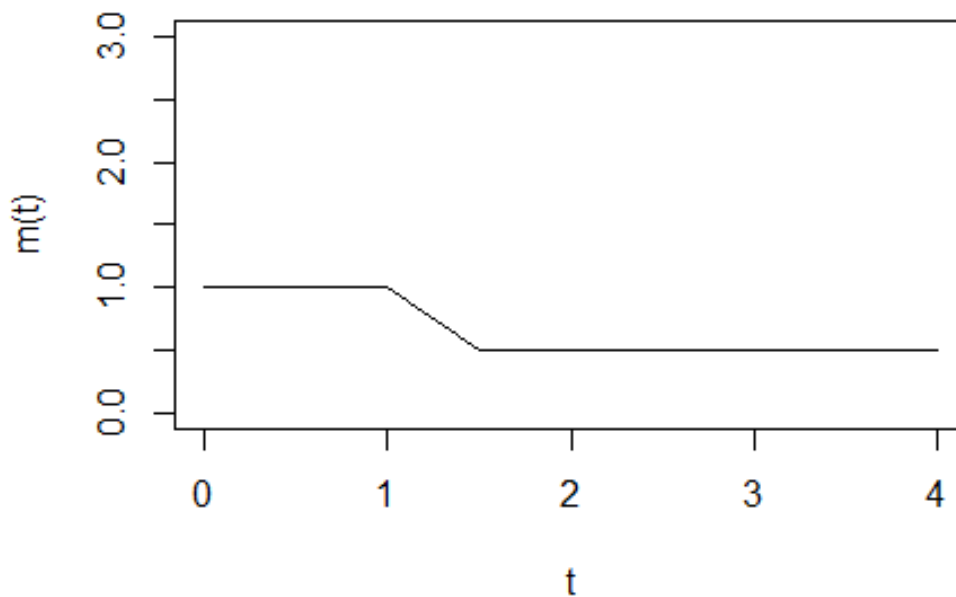


Figura 3.9: Representación gráfica de la vida media residual de las componentes del sistema del Ejemplo 3.1.7.

Mientras que la razón de fallo es

$$h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1) \\ 0 & t \in [1, 3/2) \\ 2 & t \geq 3/2 \end{cases}$$

Por lo que no es IFR, como puede verse en la Figura 3.10.

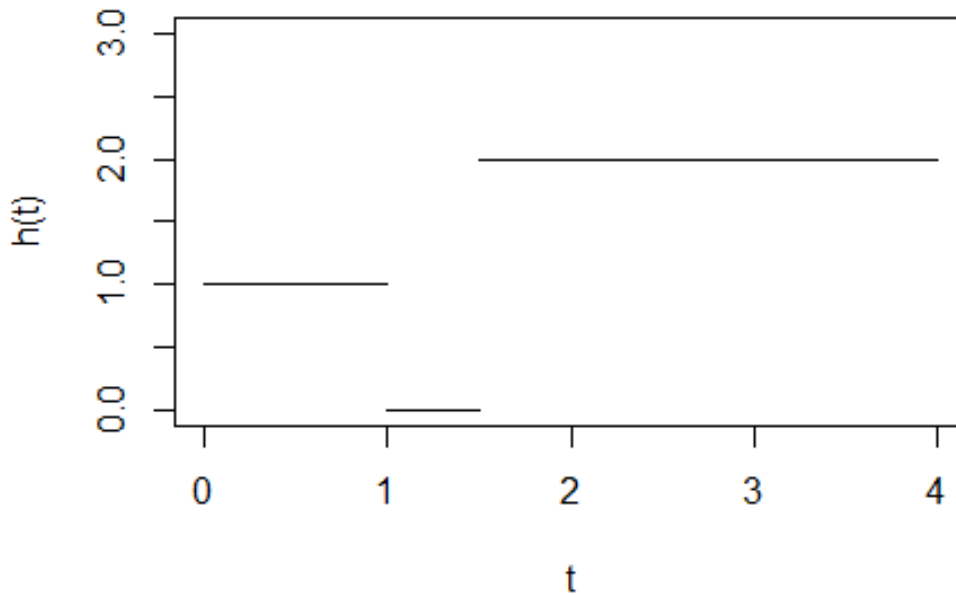


Figura 3.10: Representación gráfica de la razón de fallo del sistema del Ejemplo 3.1.7.

La función de fiabilidad del sistema es

$$\bar{F}_{1:2}(t) = \begin{cases} e^{-2t} & t \in [0, 1) \\ e^{-2} & t \in [1, 3/2) \\ e^{-4(t-1)} & t \geq 3/2 \end{cases}$$

y su vida media residual es

$$m_{1:2}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{t-1} & t \in [0, 1) \\ \frac{7}{4} - t & t \in [1, 3/2) \\ 1/4 & t \geq 3/2 \end{cases}$$

Luego  $X_{1:2}$  no es DMRL porque no es una función decreciente si  $t \in [0, 1)$ , como puede verse en la Figura 3.11.

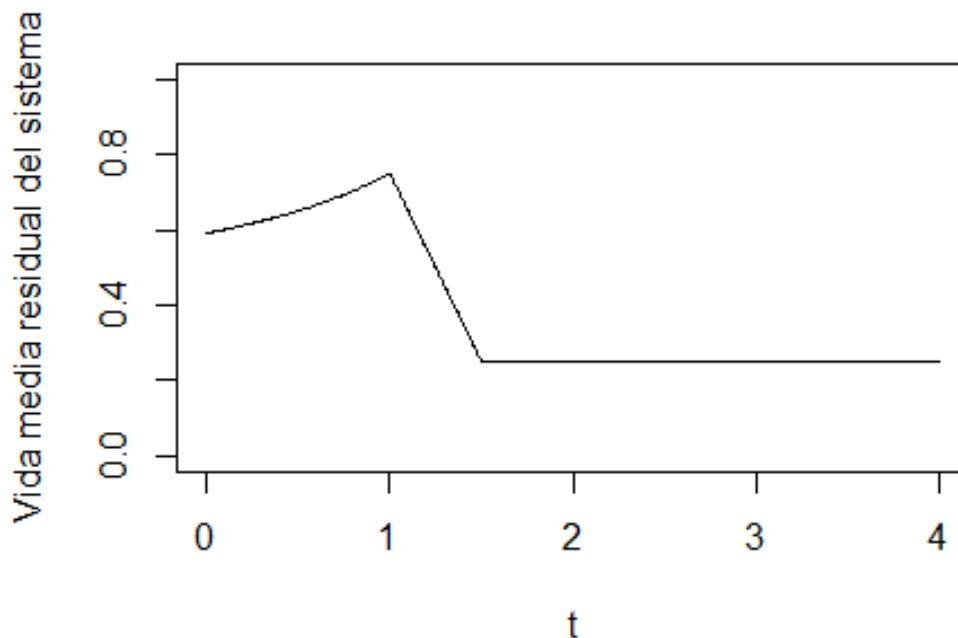


Figura 3.11: Representación gráfica de la vida media residual del sistema del Ejemplo 3.1.7.

Vemos ahora ejemplos propios sobre sistemas de tipo k-out-of-n. Consideramos un sistema cuyas componentes son independientes e idénticamente distribuidas y pertenecen a la clase IFR.

**Ejemplo 3.1.8.** Vamos a comprobar que, bajo dichas hipótesis,  $X_{2:n}$  pertenece también a la clase IFR, tal y como afirma la Proposición 2.6.1. Consideramos que las componentes tienen función de supervivencia común

$$\bar{F}(t) = e^{-t} \text{ si } t \geq 0.$$

Su densidad sería  $f(t) = e^{-t}$  para  $t \geq 0$  y 0 en otro caso, que corresponde a una exponencial de parámetro 1. Por tanto, su razón de fallo es constante  $h(t) = 1$ . Luego es IFR y DFR.



Para la variable  $X_{2:8}$  su razón de fallo es

$$\begin{aligned} h_{2:8}(t) &= \frac{2\binom{8}{2}}{\sum_{j=0}^1 \binom{8}{j} (1 - e^{-t})^{j-1} e^{-t(-j+1)}} \\ &= \frac{2\binom{8}{2}}{\binom{8}{1} + \binom{8}{0} (1 - e^{-t})^{-1} e^{-t}} \\ &= \frac{8 \cdot 7}{8 + (1 - e^{-t})^{-1} e^{-t}} \end{aligned}$$

que gráficamente en la Figura 3.12 se puede ver que es creciente y que tiende a 7 cuando  $t$  tiende a infinito. Por lo tanto, el sistema es IFR.

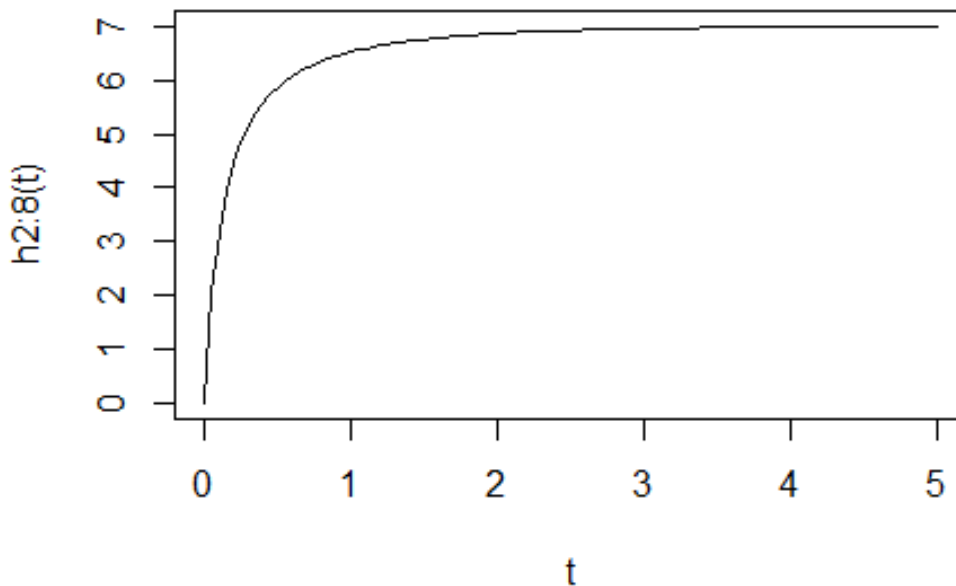


Figura 3.12: Representación gráfica de la razón de fallo del sistema del Ejemplo 3.1.8

Comprobamos que si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son independientes e idénticamente distribuidas y pertenecen a la clase ILR, entonces  $X_{i:n}$  pertenece a la clase ILR.

**Ejemplo 3.1.9.** Consideramos el caso en el que el sistema es el  $X_{3:7}$  todas las componentes siguen una distribución normal de media 0 y desviación típica 1 truncada en cero.

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

si  $t \geq 0$  y comprobamos que dicho sistema es ILR.

Si tomamos el logaritmo obtenemos

$$\ln(f(t)) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right) - \frac{t^2}{2},$$

que es una función cóncava y, por tanto, pertenece a la clase ILR. Mientras que

$$\eta(t) = -[\ln(f(t))]' = \frac{-f'(t)}{f(t)} = t$$

Tal y como hemos calculado en la Proposición 2.6.3, la función de Glaser del sistema  $X_{3:7}$  es

$$\eta_{3:7}(t) = t + 4h(t) - 2\bar{h}(t)$$

donde  $h(t)$  es la razón de fallo de las componentes, que no puede calcularse de forma explícita en este caso, por seguir las componentes una distribución normal truncada. Lo mismo ocurre con la razón de fallo reversa  $\bar{h}(t)$ . Para estudiar ambas podemos aplicar el Teorema de Glaser (Teorema 1.7.1) obteniendo que  $h$  crece y  $\bar{h}$  decrece, con lo cual, es ILR.

Comprobamos mediante un ejemplo propio que si las componentes de un sistema son independientes e idénticamente distribuidas con soporte positivo y pertenecen a la clase IFRA, entonces el sistema pertenece a la clase IFRA, como afirma la Proposición 2.4.2.

**Ejemplo 3.1.10.** Consideramos el sistema  $X_{2,2}$ , con componentes cuya distribución es uniforme  $(0,1)$ . Como ya hemos calculado anteriormente, la distorsión dual es  $\bar{q}(u) = 2u - u^2$

. Además, la razón de fallo de una uniforme  $(0,1)$  es  $h(t) = \frac{1}{1-t}$  con  $t \in (0,1)$ . Las componentes pertenecen a la clase IFRA, puesto que

$$g(t) = \frac{\int_0^t \frac{1}{1-u} du}{t} = \frac{-\ln(1-t)}{t}$$

es creciente en  $t \in (0,1)$ , ya que

$$g'(t) = \frac{t(1-t)^{-1} + \ln(1-t)}{t^2} > 0$$

por ser suma de términos positivos con  $t \in (0,1)$ .

En la Figura 3.13 puede comprobarse gráficamente que  $g(t)$  es creciente.

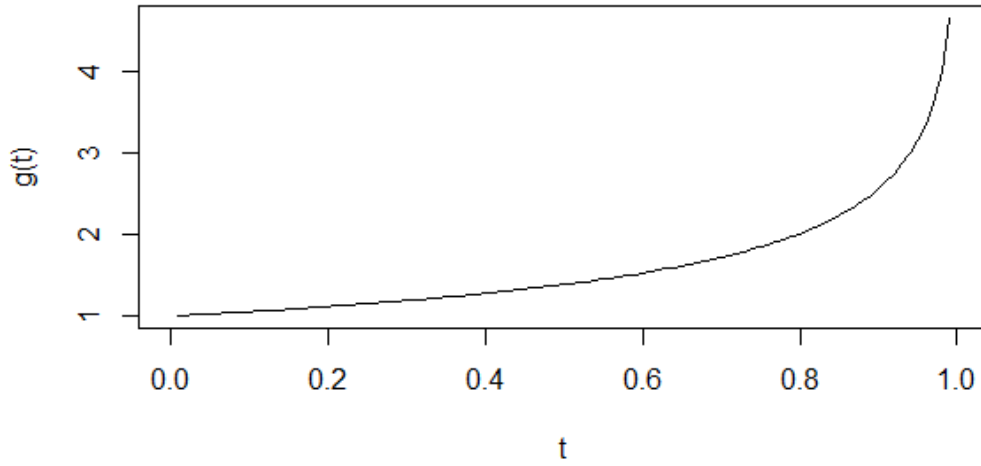


Figura 3.13: Representación gráfica de  $g(t)$  para las componentes del sistema del Ejemplo 3.1.10.

En cuanto al sistema, debemos probar que

$$\frac{\int_0^t h_{2:2}(t) dt}{t} = \frac{\int_0^t h_{2:2}(t) dt}{t} = \frac{\int_0^t h(t) \frac{\bar{q}'(\bar{F}(t))}{\bar{q}(\bar{F}(t))} \bar{F}(t) dt}{t}$$

es creciente. En este caso nos quedaría

$$g_{2:2}(t) = \frac{\int_0^t \frac{(2-2u)u}{(2-u)u} du}{t} = \frac{-2t - 4 \ln(2-t) + 4 \ln(2)}{t}.$$

Gráficamente se ve que  $g_{2:2}(t)$  es creciente en la Figura 3.14. Por lo tanto, el sistema pertenece a la clase IFRA.

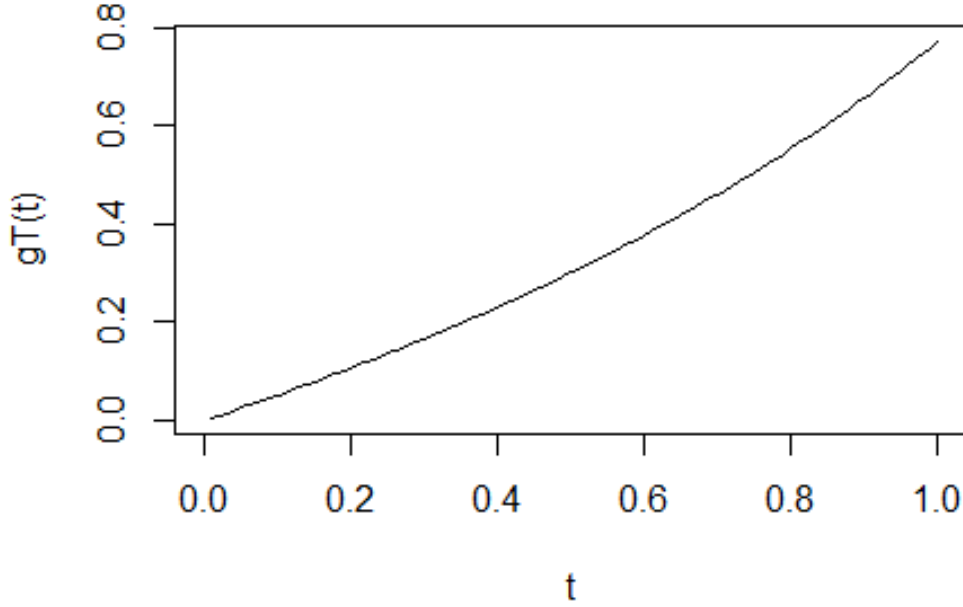


Figura 3.14: Representación gráfica de  $g_{2:2}(t)$  para el sistema del Ejemplo 3.1.10.

## 3.2. Sistemas con componentes independientes

Veamos primero un ejemplo propio en el que no se preservan ni IFR ni DFR.

**Ejemplo 3.2.1.** El sistema en paralelo con componentes independientes pero no idénticamente distribuidas no preserva necesariamente las clases IFR o DFR.

Por las Proposiciones 2.7.2 y 2.7.1, dado que el sistema en paralelo tiene por distorsión dual generalizada

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{2:2}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)) &= \hat{C}(\bar{F}_1(t), 1) + \hat{C}(1, \bar{F}_2(t)) - \hat{C}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)) \\ &= \bar{F}_1(t) + \bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t),\end{aligned}$$

entonces  $\bar{Q}_{2:2}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - u_1u_2$  y

$$\alpha_1(u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_1u_2}{u_1 + u_2 - u_1u_2}.$$

Derivando respecto  $u_1$  vemos que

$$\frac{\partial \alpha_1(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \frac{(1 - u_2)(u_1 + u_2 - u_1u_2) - (u_1 - u_1u_2)(1 - u_2)}{(u_1 + u_2 - u_1u_2)^2} = \frac{(1 - u_2)u_2}{(u_1 + u_2 - u_1u_2)^2} > 0.$$

Respecto a  $u_2$  obtenemos

$$\frac{\partial \alpha_1(u_1, u_2)}{\partial u_2} = \frac{(-u_1)(u_1 + u_2 - u_1 u_2) - (u_1 - u_1 u_2)(1 - u_1)}{(u_1 + u_2 - u_1 u_2)^2} = \frac{-u_1}{(u_1 + u_2 - u_1 u_2)^2} < 0.$$

Luego es creciente en  $u_1$  y decreciente en  $u_2$  y no preserva necesariamente las clases IFR o DFR.

Por ejemplo, si consideramos el caso en el que una de las componentes sigue una distribución de Pareto con  $\alpha = 2$ , es decir, que  $\bar{F}_1(t) = u_2 = 1/t^2$  con  $t \geq 1$  y la otra componente sigue una distribución de Pareto con  $\alpha = 1$ , es decir, que  $\bar{F}_2(t) = u_2 = 1/t$  con  $t \geq 1$ . Ambas componentes pertenecen a la clase DFR, la primera tiene por razón de fallo

$$h_1(t) = \frac{2/t^3}{1/t^2} = \frac{2}{t}$$

y

$$h_2(t) = \frac{1/t^2}{1/t} = \frac{1}{t}.$$

En ambos casos se trata de funciones decrecientes.

Considerando que las componentes son independientes y a partir de la distorsión dual generalizada, obtenemos

$$\bar{F}_{2:2}(t) = \bar{Q}_{2:2}(u_1, u_2) = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}.$$

Podemos calcular la razón de fallo del sistema, obteniendo

$$h_{2:2}(t) = \frac{2/t^3 + 1/t^2 - 3/t^4}{1/t^2 + 1/t - 1/t^3},$$

gráficamente en la Figura 3.15 se puede ver que no es decreciente para todos los valores de  $t$ . Por lo tanto, en ese caso concreto no se preservaría la clase DFR por ser la razón de fallo del sistema de tipo bañera.

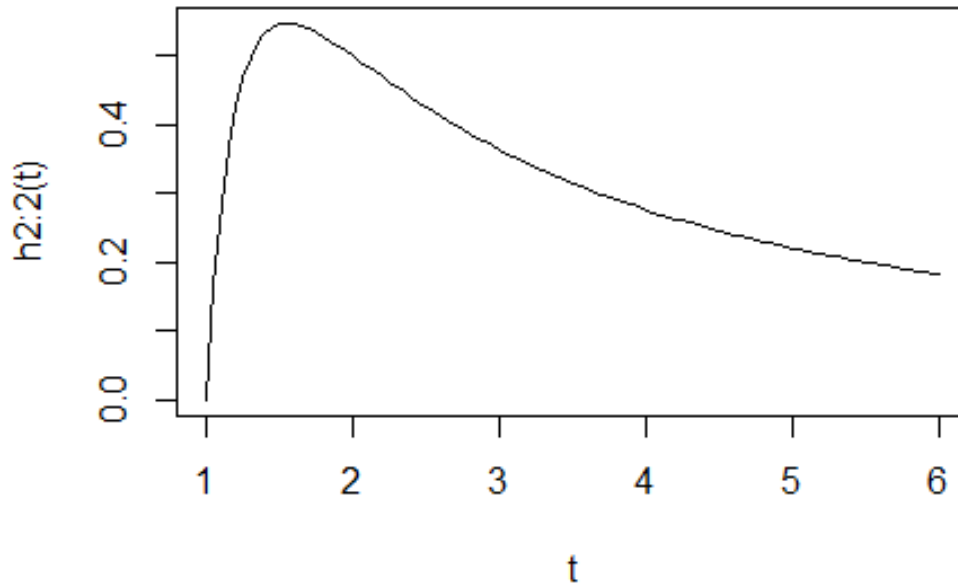


Figura 3.15: Representación gráfica de  $h_{2:2}(t)$  para el sistema del Ejemplo 3.2.1.

Podemos comparar ahora las razones de fallo de las componentes con la del sistema. En la Figura 3.16 podemos ver la razón de fallo de la primera componente en rojo, de la segunda, en azul y del sistema, en verde. Siendo la razón de fallo del sistema menor que la de sus componentes.

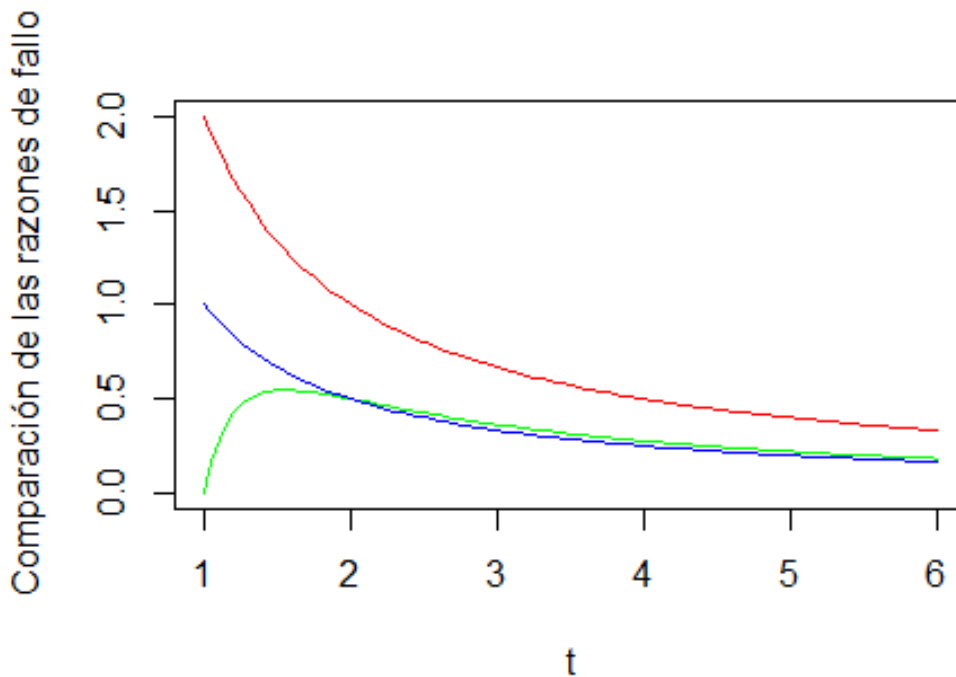


Figura 3.16: Comparación de las razones de fallo de las componentes y el sistema del Ejemplo 3.2.1.

Estudiamos a continuación, mediante un ejemplo propio, la preservación de la clase NBU.

**Ejemplo 3.2.2.** Consideramos el sistema  $X_{2:3}$ , con tres componentes que siguen una distribución exponencial de parámetros  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = 2$  y  $\lambda = 3$ , respectivamente. Vamos a probar que el sistema preserva la clase NBU.

Primero comprobamos que las componentes pertenecen a la clase NBU, es decir, que cumplen que

$$\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y).$$

Para el caso de una exponencial de parámetro  $\lambda = j$  con  $j > 0$ , su función de fiabilidad es  $\bar{F}(x) = e^{-jx}$  con  $x \geq 0$ . Entonces  $\bar{F}(x+y) = e^{-j(x+y)} = e^{-jx}e^{-jy} = \bar{F}(x)\bar{F}(y)$  con  $x, y \geq 0$ , que cumple la desigualdad anterior y, por tanto, es NBU.

Por la Proposición 2.4.1, al pertenecer las componentes a la clase NBU y ser independientes el sistema ha de pertenecer también a la clase NBU.

Al ser un sistema 2-out-of-3, vemos que tiene por caminos minimales  $P_1 = \{1,2\}$ ,  $P_2 = \{1,3\}$  y  $P_3 = \{2,3\}$ . De lo que se obtiene que la función de fiabilidad

del sistema es

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{2:3}(x) &= \hat{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(x), 1) + \hat{C}(\bar{F}_1(x), 1, \bar{F}_3(x)) + \hat{C}(1, \bar{F}_2(x), \bar{F}_3(x)) \\
&\quad - 2\hat{C}(\bar{F}_1(x), \bar{F}_2(x), \bar{F}_3(x)) = \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(x) + \bar{F}_2(x)\bar{F}_3(x) + \bar{F}_1(x)\bar{F}_3(x) \\
&\quad - 2\bar{F}_1(x)\bar{F}_2(x)\bar{F}_3(x) \\
&= e^{-3x} + e^{-5x} + e^{-4x} - 2e^{-6x}.
\end{aligned}$$

Entonces hemos de probar que

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{2:3}(x+y) &= e^{-3x-3y} + e^{-5x-5y} + e^{-4x-4y} - 2e^{-6x-6y} \\
&\leq \bar{F}_{2:3}(x)\bar{F}_{2:3}(y) = (e^{-3x} + e^{-5x} + e^{-4x} - 2e^{-6x})(e^{-3y} + e^{-5y} + e^{-4y} - 2e^{-6y}) \\
&= e^{-3x-3y} + e^{-5x-5y} + e^{-4x-4y} + 4e^{-6x-6y} + e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} \\
&\quad + e^{-5x-3y} + e^{-5x-4y} + e^{-4x-3y} + e^{-4x-5y} - 2e^{-6x-3y} - 2e^{-6x-5y} - 2e^{-6x-4y} \\
&= (e^{-3x-3y} + e^{-5x-5y} + e^{-4x-4y} - 2e^{-6x-6y}) + (6e^{-6x-6y} + e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} \\
&\quad + e^{-5x-3y} + e^{-5x-4y} + e^{-4x-3y} + e^{-4x-5y} - 2e^{-6x-3y} - 2e^{-6x-5y} - 2e^{-6x-4y}) \\
&= \bar{F}_{2:3}(x+y) + (6e^{-6x-6y} + e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} + e^{-5x-3y} + e^{-5x-4y} + e^{-4x-3y} \\
&\quad + e^{-4x-5y} - 2e^{-6x-3y} - 2e^{-6x-5y} - 2e^{-6x-4y}).
\end{aligned}$$

Bastaría probar que

$$\begin{aligned}
&6e^{-6x-6y} + e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} + e^{-5x-3y} + e^{-5x-4y} + e^{-4x-3y} + e^{-4x-5y} \\
&\quad - 2e^{-6x-3y} - 2e^{-6x-5y} - 2e^{-6x-4y} \geq 0.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
&6e^{-6x-6y} + e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} + e^{-5x-3y} + e^{-5x-4y} + e^{-4x-3y} + e^{-4x-5y} \\
&\quad - 2e^{-6x-3y} - 2e^{-6x-5y} - 2e^{-6x-4y} = 6e^{-6x-6y} + e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} + e^{-5x-3y} \\
&\quad + e^{-5x-4y} + e^{-4x-3y} + e^{-4x-5y} - (2e^{-6x-6y})e^{3y} - (2e^{-6x-6y})e^y - (2e^{-6x-6y})e^{2y} \\
&\geq 6e^{-6x-6y} + e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} + e^{-5x-3y} + e^{-5x-4y} + e^{-4x-3y} + e^{-4x-5y} \\
&\quad - (2e^{-6x-6y}) - (2e^{-6x-6y}) - (2e^{-6x-6y}) = e^{-3x-5y} + e^{-3x-4y} + e^{-5x-3y} + e^{-5x-4y} \\
&\quad + e^{-4x-3y} + e^{-4x-5y} \geq 0
\end{aligned}$$

por ser  $e^y$ ,  $e^{2y}$  y  $e^{3y}$  mayores o iguales que 1, ya que  $y \geq 0$ . Con lo cual hemos probado la desigualdad.

Comprobamos, con un ejemplo propio, que un sistema con tres componentes en serie independientes pero no idénticamente distribuidas preserva la clase IFRA.

**Ejemplo 3.2.3.** Tomamos como ejemplo el caso en el que las componentes sigan una distribución Rayleigh de parámetros  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 2$  y  $\sigma = 3$ .

La distribución Rayleigh es aquella que tiene por función de densidad

$$f(t) = \frac{t}{\sigma^2} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$



con  $t \geq 0$  y función de fiabilidad.

$$\bar{F}(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}.$$

Las componentes pertenecen a la clase IFRA, ya que tienen como razón de fallo  $h(t) = \frac{t}{\sigma^2}$  para cualquier valor de su parámetro  $\sigma$  y entonces

$$g(t) = \frac{\int_0^t u du}{t\sigma^2} = \frac{t}{2\sigma^2}$$

es creciente para cualquier valor de  $\sigma$  y cumple la definición de IFRA.

Para el caso del sistema  $X_{1:3}$  con tres componentes en serie, tenemos que su único camino es  $P = \{1, 2, 3\}$  y, por tanto

$$\bar{F}_{1:3}(t) = \hat{C}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t), \bar{F}_3(t)) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) = e^{-(49/72)t^2}.$$

Calculamos ahora la razón de fallo del sistema, obteniendo

$$h_{1:3}(t) = \frac{f_{1:3}(t)}{\bar{F}_{1:3}(t)} = \frac{(49/36)te^{-(49/72)t^2}}{e^{-(49/72)t^2}} = \frac{49t}{36}$$

Comprobamos ahora si pertenece a la clase IFRA. Vemos que

$$\frac{49 \int_0^t u du}{36t} = \frac{49t}{72}$$

es creciente. Por lo tanto, pertenece a la clase IFRA.

### 3.3. Sistemas con componentes dependientes

En los casos en los que hay dependencia de las componentes, la preservación de una clase depende de la cópula y de la estructura del sistema. Pasamos ahora a ver algunos ejemplos en los que se usan las cópulas definidas en la Sección 1.4. El primero de estos ejemplos se ha obtenido de [5] mientras que el resto son propios.

**Ejemplo 3.3.1.** Consideramos el sistema en serie  $X_{1:n}$  con componentes idénticamente distribuidas con la siguiente cópula de supervivencia del tipo Clayton-Oakes

$$\hat{C}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left( \sum_{i=1}^n u_i^{1-\theta} - (n-1) \right)^{1/(1-\theta)}$$

con  $\theta > 1$ .

Considerando que  $F_1(t) = F_2(t) = \dots = F_n(t)$ . Tenemos que

$$\bar{q}(u) = \hat{C}(u, u, \dots, u) = \left( nu^{1-\theta} - (n-1) \right)^{1/(1-\theta)}.$$

Podemos aplicar ahora las Proposiciones 2.3.1 y 2.3.2, obteniendo.

$$\alpha(u) = \frac{n}{n - (n-1)u^{\theta-1}}$$

que es creciente para  $n > 1$ . Por tanto se preserva la clase DFR pero no la IFR, cuando en el caso de independencia se preservaban ambas por ser  $\alpha$  constante.

Vemos ahora un ejemplo concreto en el que  $\bar{F}(t) = e^{-t}$  con  $n=4$  y  $\theta = 3$ . Sabemos que  $h(t)=1$  por seguir las componentes una distribución exponencial. Por tanto pertenecen a las clases IFR y DFR y  $h_{1:n}(t) = h(t)\alpha(e^{-t}) = \alpha(e^{-t})$ . En la Figura 3.17 vemos que  $h_{1:n}(t)$  es decreciente, por lo que solo se preserva la clase DFR.

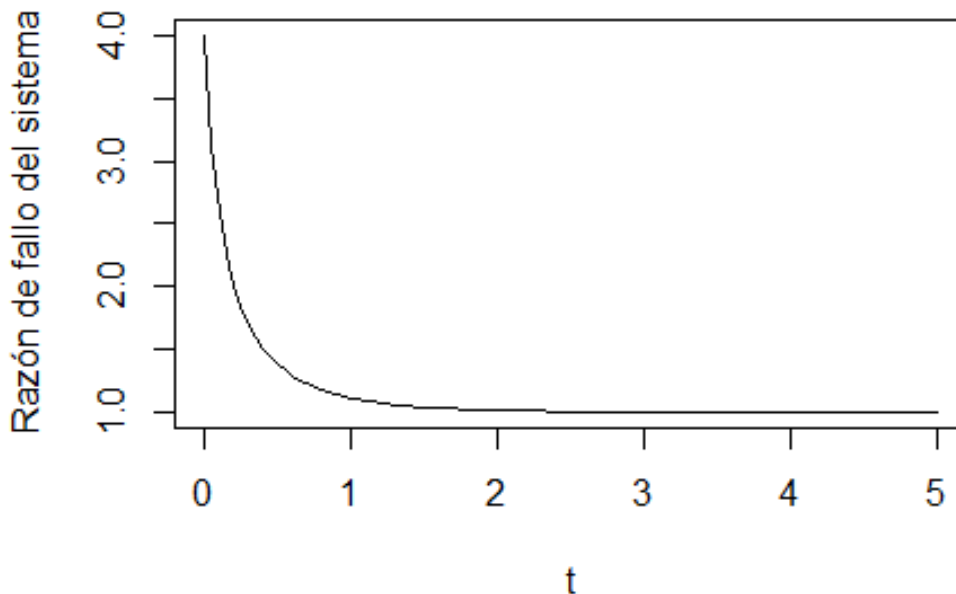


Figura 3.17: Representación gráfica de la razón de fallo del sistema del Ejemplo 3.3.1

**Ejemplo 3.3.2.** Consideramos el sistema en paralelo  $X_{2:2}$ , que tendrá por único corte  $C = \{1, 2\}$  y vamos a probar que si las componentes no son independientes pero sí idénticamente distribuidas y siguen una cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern con  $\theta = -1$  (ver Ejemplo 1.4.7) el sistema no preserva necesariamente la clase DRFR.

La distorsión es

$$q(u) = C(u, u) = u^2 - u^2(1-u)^2 = (u^2 - 2u + 2)u^2.$$

Por la Proposición 2.3.3

$$\bar{\alpha}(u) = \frac{4u^3 - 6u^2 + 4u}{u(u^2 - 2u + 2)} = \frac{4u^2 - 6u + 4}{u^2 - 2u + 2}.$$

En el intervalo (0,1) la función  $\bar{\alpha}$  es decreciente en un tramo y creciente en otro, como se puede comprobar en la Figura 3.18.

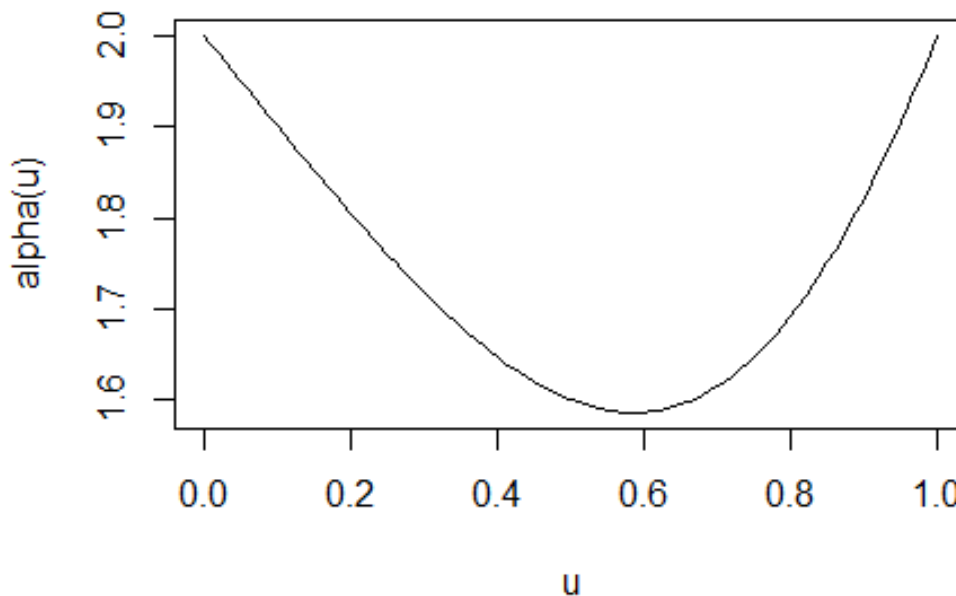


Figura 3.18: Representación gráfica de  $\bar{\alpha}(u)$  para el sistema del Ejemplo 3.3.2.

Por lo tanto, no se preservaría necesariamente la clase DRFR al no cumplir las condiciones suficientes de la o la Proposición 2.3.4. Esto contrasta con el caso en el que la cópula sea la cópula de independencia ( $\theta = 0$ ) y que las componentes sean idénticamente distribuidas. En ese caso tendríamos que  $q(u) = u^2$  y

$$\bar{\alpha}(u) = 2,$$

que es constante. Por tanto, preservaría la clase DRFR.

Estudiamos ahora el caso concreto en el que  $F(t) = t$  si  $t \in (0, 1)$ , es decir, el caso en el que las componentes siguen una distribución uniforme en el intervalo (0,1). Su razón de fallo reversa sería

$$\bar{h}(t) = \frac{1}{t}$$

con  $t \in (0, 1)$ , que es una función decreciente y, por tanto, las componentes pertenecen a la clase DRFR.

Calculamos ahora la razón de fallo reversa del sistema. En la demostración de la Proposición 2.3.4 hemos visto que se verifica

$$\bar{h}_{2:2}(t) = \bar{h}(t)\bar{\alpha}(F(t))$$

si ahora tomamos  $F(t) = t$  con  $t \in (0, 1)$ , tendremos que

$$\bar{h}_{2:2}(t) = \bar{h}(t)\bar{\alpha}(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{4t^2 - 6t + 4}{t^2 - 2t + 2}.$$

En la Figura 3.19 se puede ver que es decreciente. Por tanto, el sistema es DRFR y en este ejemplo concreto se preservaría dicha clase.

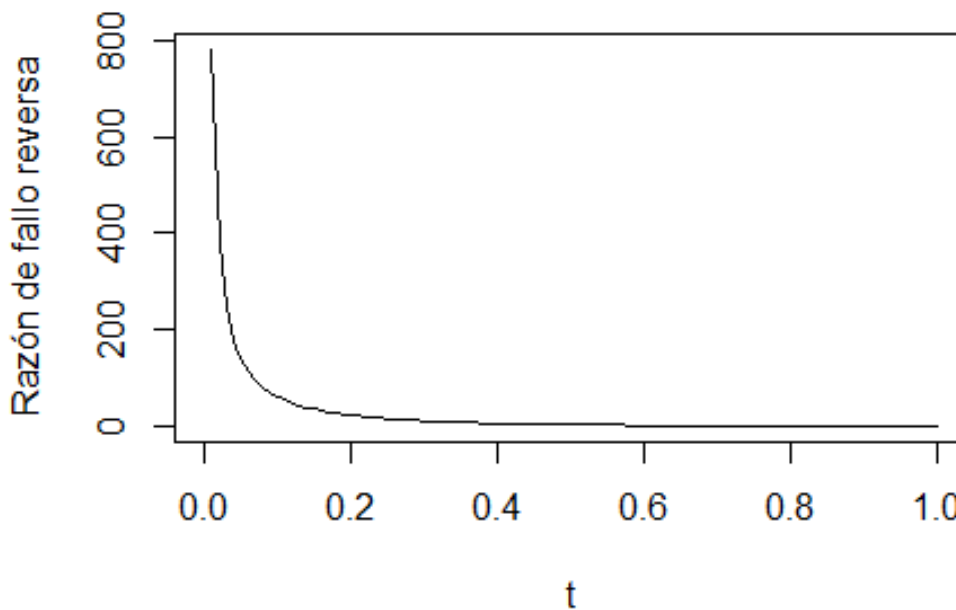


Figura 3.19: Representación gráfica de  $\bar{h}_{2:2}(t)$  para el sistema del Ejemplo 3.3.2.

**Ejemplo 3.3.3.** Comprobamos si el sistema en serie  $X_{1:2}$  preserva la clase DLR si sus componentes no son independientes pero sí idénticamente distribuidas con función de fiabilidad  $\bar{F}(t)$  y, además, siguen una cópula de supervivencia de Ali-Mikhail-Haq (ver Ejemplo 1.4.6) con  $\theta = 1$ .

El único camino del sistema en serie es  $P = \{1, 2\}$ , entonces podemos escribir la fiabilidad del sistema a partir de su distorsión dual como

$$\bar{q}(u) = \hat{C}(u, u) = \frac{u^2}{1 - (1 - u)^2} = \frac{u^2}{-u^2 + 2u} = \frac{u}{2 - u}.$$

Calculamos ahora  $\beta(u)$  para aplicar la Proposición 2.3.6.

$$\beta(u) = \frac{u\bar{q}''(u)}{\bar{q}'(u)} = \frac{2u}{2 - u}$$

que es una función creciente y positiva porque su derivada es

$$\beta'(u) = \frac{4}{(2 - u)^2} > 0.$$

Podemos ver su gráfica en la Figura 3.20.

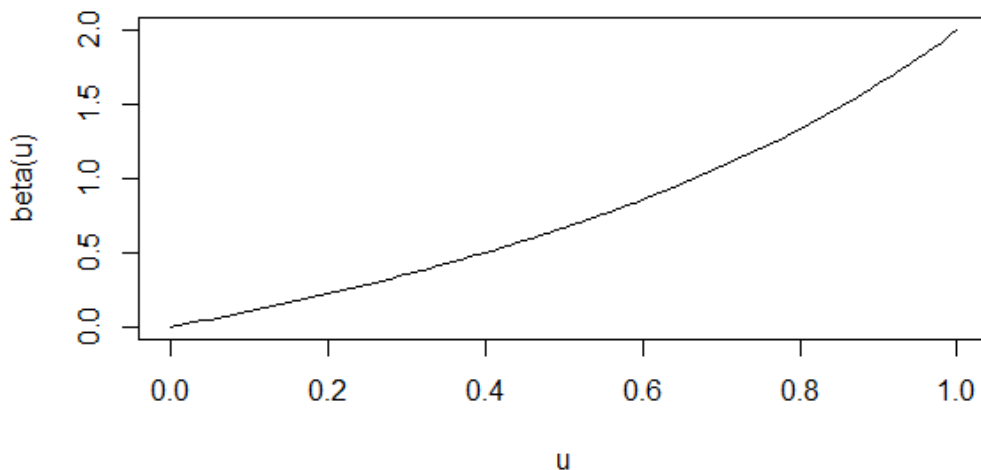


Figura 3.20: Representación gráfica de  $\beta(u)$  para el sistema del Ejemplo 3.3.3.

Como es positiva y creciente, entonces preserva la clase DLR pero no necesariamente la ILR. El resultado contrasta con el caso de componentes independientes e idénticamente distribuidas, donde por ser un sistema del tipo 1-out-of-2 (k-out-of-n) se preserva la clase ILR por la Proposición 2.6.3.

Vemos ahora un ejemplo concreto donde no se preserve la clase ILR pero sí la DLR dado este sistema en el caso de dependencia y con la cópula de Ali-Mikhail-Haq como cópula de supervivencia. Estudiamos el caso en el que las componentes siguen una distribución exponencial de parámetro  $\lambda = 1$  que, por ser su función de

densidad  $f(t) = e^{-t}$  tanto log-cóncava como log-convexa, pertenece tanto a la clase DLR como a la ILR. La función de Glaser del sistema es

$$\eta_{1:2}(t) = \frac{-f'_{1:2}(t)}{f_{1:2}(t)} = \eta(t) + h(t)\beta(\bar{F}(t)).$$

Para calcularla por un lado tenemos que

$$\eta(t) = \frac{-f'(t)}{f(t)} = 1$$

y por otro

$$h(t) = 1$$

por la propiedad de falta de memoria de la exponencial. Entonces nos quedaría que la función de Glaser del sistema es

$$\eta_{1:2}(t) = 1 + \beta(e^{-t}).$$

por ser  $\beta$  una función creciente, entonces  $\eta_T$  es decreciente. También puede comprobarse gráficamente en la Figura 3.21. Lo anterior implica que el sistema es DLR pero no ILR.

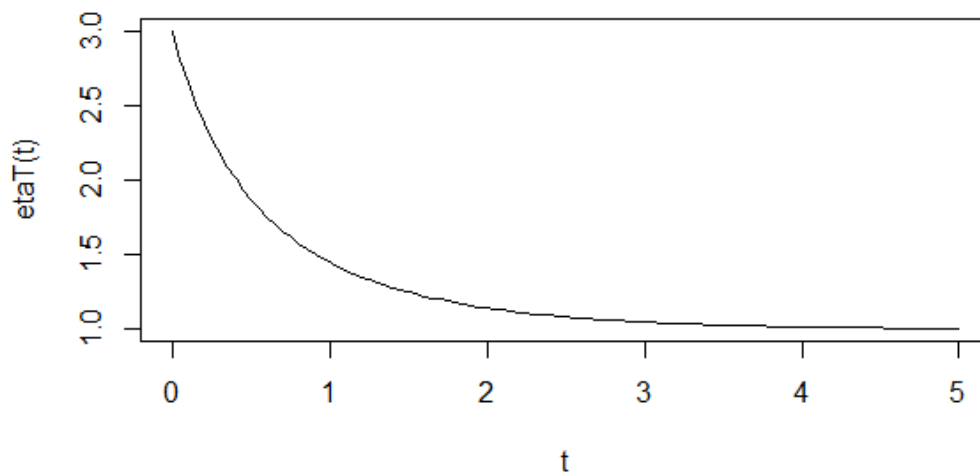


Figura 3.21: Representación gráfica de  $\eta_{1:2}(t)$  para el sistema del Ejemplo 3.3.3.

**Ejemplo 3.3.4.** Consideramos el sistema en paralelo  $X_{2:2}$  con componentes dependientes e idénticamente distribuidas que tienen por cópula la cópula de Joe con  $\theta = 2$  (ver Ejemplo 1.4.8). Vamos a estudiar si preserva la clase IMIT aplicando la Proposición 2.3.9.

Haciendo las operaciones necesarias y teniendo en cuenta que  $C = \{1, 2\}$  es el único corte del sistema en paralelo, obtenemos que la distorsión dual es

$$q(u) = C(u, u) = 1 - [2(1 - u)^2 - (1 - u)^4]^{1/2} = 1 - (1 - u)[-u^2 + 2u + 1]^{1/2}.$$

Gráficamente se puede ver en la Figura 3.22 que  $\frac{q(u)}{u}$  es creciente, por tanto,  $\sup_{(0,v]} \frac{q(u)}{u} = \frac{q(v)}{v}$ .

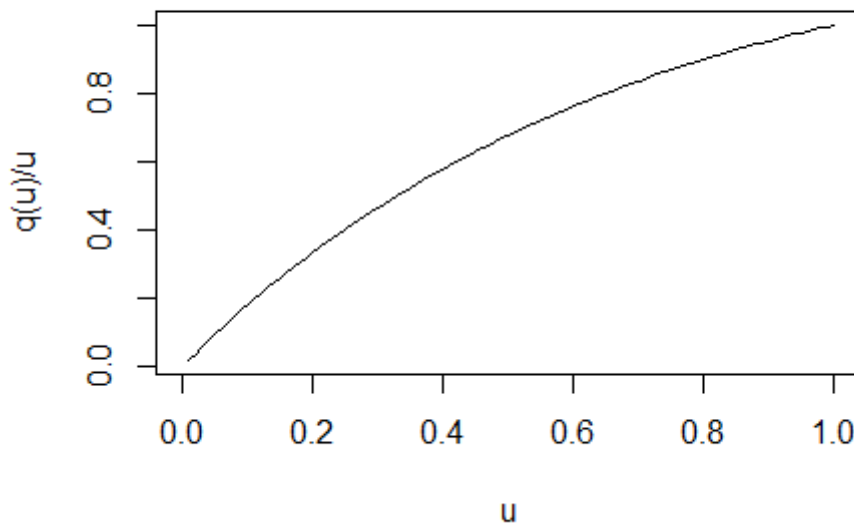


Figura 3.22: Representación gráfica de  $\frac{q(u)}{u}$  en el sistema del Ejemplo 3.3.4.

Debemos ver si

$$\frac{q(v)}{v} \leq \frac{q^2(v)}{v^2 q'(v)}.$$

Para ello, primero calculamos

$$q'(v) = (-v^2 + 2v + 1)^{1/2} - \frac{(v-1)^2}{(-v^2 + 2v + 1)^{1/2}}$$

y vemos que si tomamos  $v=1$ , entonces

$$\frac{q(v)}{v} = 1$$

mientras que

$$\frac{q^2(v)}{v^2 q'(v)} = \frac{1}{q'(v)} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 = \frac{q(v)}{v}.$$

Por lo tanto, no podemos asegurar que se preserve la clase IMIT al no cumplirse la condición suficiente.





# Capítulo 4

## Conclusiones

Como conclusión de trabajo podemos destacar que en este campo es posible obtener resultados muy diversos que pueden ir ampliándose con nuevas investigaciones.

A modo de resumen del trabajo, podemos decir que en el caso de componentes idénticamente distribuidas se preservan, bajo determinadas circunstancias las clases IFR/DFR, DRFR, ILR/DLR, IMRL/DMRL e IMIT. Se puede seguir investigando y encontrar nuevas condiciones necesarias o suficientes para la preservación de estas clases, como se ha hecho en el caso de la clase IMIT.

En el caso de las componentes independientes podemos asegurar que se preservan siempre las clases IFRA y NBU.

También hemos probado en el caso concreto de los sistemas k-out-of-n con componentes independientes se preservan siempre las clases IFR, ILR y DRFR.

Por otra parte, si las componentes son independientes e idénticamente distribuidas se ha obtenido una condición necesaria y otra suficiente para la preservación de la clase NBUE. En este caso, aunque el artículo original exigía que las componentes fuesen independientes el mismo resultado obtenido puede aplicarse en el caso de componentes que sean únicamente idénticamente distribuidas.

Además, en el caso con componentes no idénticamente distribuidas hay resultados que nos dan una serie de condiciones para la preservación de las clases NBU, IFRA, IFR, DFR y DRFR. Estos resultados son una generalización de algunos resultados en el caso de componentes idénticamente distribuidas.

Por último, también se han obtenido algunos resultados para sistemas con componentes dependientes no idénticamente distribuidas con cópula conocida.

En este campo hay mucho trabajo por hacer y se puede seguir avanzando para obtener nuevos resultados especialmente en el caso de sistemas con componentes dependientes.



# Bibliografía

- [1] ABOUAMMOH, A. y EL-NEWEIHI, E. *Closure of the NBUE and DMRL Classes under Formation of Parallel Systems*. Statistics and Probability Letters. 1986. Vol. 4. Páginas 223-225.
- [2] BARLOW, R. E. y PROSCHAN, F. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Estados Unidos. Holt, Rinehart and Winston. 1975.
- [3] BRYSON, M.C. y SIDDIQUI, M.M. *Some Criteria for Aging*. Journal of the American Statistical Association. Vol. 64. Páginas 1472-1483. 1969.
- [4] LINDQVIST, B.H. y SAMANIEGO, F.J. *Some new results on the preservation of the NBUE and NWUE aging classes under the formation of coherent systems*. Journal of Applied Probability. 2019. Vol. 66. Páginas 430-438.
- [5] NAVARRO, J. DEL ÁGUILA, Y. SORDO M. A. y SUÁREZ-LLORENS, A. *Preservation of reliability classes under the formation of coherent systems*. John Wiley and Sons. 2014. Vol. 30. Páginas 445-454.
- [6] NAVARRO, J. *Preservation of DMRL and IMRL aging classes under the formation of order statistics and coherent systems*. Elsevier. 2018. Vol. 137. Páginas 264-268.
- [7] NAVARRO, J. DEL ÁGUILA, Y. SORDO M. A. y SUÁREZ-LLORENS, A. *Preservation of Stochastic Orders under the Formation of Generalized Distorted Distributions. Applications to Coherent Systems*. Methodology and Computing in Applied Probability. 2016. Vol 18. Páginas 529–545.
- [8] NELSEN, R.B. *An Introduction to Copulas*. Estados Unidos. Springer. 2006.
- [9] SHAKED, M. y SHANTHIKUMAR, J.G. *Stochastic Orders*. Estados Unidos. Springer. 2007.
- [10] YAARI, M.E. *The Dual Theory of Choice under Risk*. Econometrica. 1987. Vol. 55. Páginas 95-115.
- [11] Recurso web  
<https://support.minitab.com/es-mx/minitab/18/help-and-how-to/modeling-statistics/reliability/supporting-topics/distribution-models/hazard-functions/>