



UNIVERSIDAD DE MURCIA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

**TEOREMAS DE SINGULARIDAD EN RELATIVIDAD
GENERAL**

Alonso Albaladejo Rojo

Curso 2015/2016

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Alonso Albaladejo Rojo, autor del TFG "*Teoremas de singularidad en la relatividad general*", bajo la tutela del profesor **D. Miguel Ángel Meroño Bayo**,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 10 de julio de 2016.

Fdo.: Alonso Albaladejo Rojo.

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración).

Resumen

Matemáticas y Física son dos ciencias que van unidas de la mano desde que los primeros hombres tuvieron capacidad de raciocinio.

Una, las Matemáticas, se desarrolla debido al estímulo proporcionado por los problemas físicos. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales y el cálculo diferencial adquirieron un gran interés cuando Newton los creó para formular las famosas leyes de Newton.

La otra, la Física, la podemos comprender gracias a las matemáticas. Esta última modela los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza y en todo el universo. La teoría de la relatividad general no puede entenderse ni pudo desarrollarse hasta el punto actual sin los avances en geometría diferencial.

El objetivo de este trabajo es entender dicha teoría, la famosa teoría de la relatividad de Einstein, para poder demostrar los dos grandes teoremas de singularidad de Hawking y Penrose. Estos dos teoremas cambiaron la percepción del universo: se pudo demostrar que, bajo ciertas hipótesis, el universo tuvo un principio en el tiempo y tendrá un fin.

La estructura de esta memoria será la siguiente: primero comenzaré con un resumen del trabajo en Inglés en el que explicaré lo más importante de cada capítulo con alguna reseña histórica sobre los resultados; seguidamente comenzará el trabajo propiamente dicho. En el primer capítulo se tratarán los conceptos matemáticos preliminares que se necesitan y se expondrá una breve introducción a la teoría de la relatividad general de Einstein. El segundo capítulo se centrará en la teoría de la causalidad, es decir, en el estudio de las relaciones de los eventos de un espacio-tiempo mediante la existencia de ciertas curvas. Finalmente, el tercer capítulo culminará el trabajo con la demostración de los teoremas de singularidad y sus consecuencias físicas.

Pasamos a continuación con el resumen más detallado del trabajo en inglés.

Summary

Considering the fact that summarizing a mathematical document could be a very difficult task, whether it is in a foreign language that you are not used to use, the task becomes more demanding. Nevertheless, we shall try to explain in the following pages the content of this final project.

First of all, it shall be stated that the theory of relativity is present throughout this whole document. Despite the fact that you have good knowledge of Mathematics, it is possible that you only know the theory of relativity for being the greatest advance in physics in the XX century, proposed by Albert Einstein in 1905, with the special theory of relativity and the general theory of relativity from 1915. Therefore, we shall start with a historical review of the evolution of physics.

From the XVII century, thanks to Newton's laws, most of the phenomenon that happened in nature could be explained by common sense. Thus, space and time were considered absolute, that is, distances and time measured in any experiment should be the same for all the observers doing the experiment. And certainly, this physical theory predicted diverse phenomenon such as planets' orbits, the trajectory of a projectile, the invention of the steam machine, etc.

However, during the first part of the XIX century, Maxwell confirmed that the light had a wavy nature. His theory was based on the thinking that the light was always moving at some constant velocity with regards to the ether. That speed was $c = 299792$ km/s.

Thanks to Michelson-Morley experiment, it was confirmed that speed light did not vary independently of the speed of the observer in relation to the ether. For instance, if you move at 100km/h and throw a lantern, the light of the lantern will move at c km/h instead of $c + 100$ km/h, as newtonian physics declared.

This took Einstein to write in 1905 his famous article title '*On the electrodynamics of moving bodies*'. Einstein radically changed the way of understanding the universe with his new special theory of relativity. Space and time were relative; they depend on the state of movement of the observer.

A few years later, in 1915, Einstein presented his general theory of relativity. This was more complex than the special theory of relativity. It was based on the '*equivalence principle*': there is no difference between experiments carried out on a small free fall system and experiments carried out on an inertial system.

One of the consequences of this theory was that the mass influenced on the light trajectory, that is, the mass curves the space-time by field equations from Einstein.

Along with advances on the theory of relativity, there were advances on cosmology. Hubble made a great discovery in this field. Galaxies are moving away from us at a proportional speed in relation to the distance in which they are.

This fact is reflected in the following formula $v = H_0d$, where H_0 is the famous Hubble's constant, although some relativistic models suggest that it is not really a constant, but rather it slowly changes with time. This made most physicians think about the expansion of our universe.

Although Einstein could have predicted the expansion of the universe, he introduced a constant in his equations to equilibrate the gravity force and to keep galaxies separated one from another. This is the famous cosmological constant, which after the discovery of the fact that the universe was in expansion, Einstein claimed that it was the 'biggest blunder' of his life.

In 1917, the Russian physician Friedmann realised that Einstein's field equation regarded an universe which was expanding. This solution implied the fact that the universe had to have a beginning, that is, the universe and all its matter must have begun in an instant of time. The British astronomer Fred Hoyle called this theory the 'Big Bang theory' as a joke and this is the name which persists since then.

Then, in 1967, Stephen Hawking proved his famous '*singularity theorem of Hawking*', one of the theorems that we are going to demonstrate in this project. With it, Hawking proved that, under certain hypotheses that seem reasonable on our universe, if we have a globally hyperbolic space-time in expansion, then the universe began to exist due to a singularity, the Big Bang, a finite time ago.

Other physician who worked with Hawking was Roger Penrose, who proved in 1965 the other theorem we are going to focus on, the '*singularity theorem of Penrose*'. What can be demonstrated is that there are regions on space-time with a particular property, that is, that the light cannot escape from them. These regions are called the famous "black holes". In 1970, Hawking and Penrose published their article: '*The singularities of gravitational collapse and cosmology*'. Thanks to that, they proved that black holes are solutions for Einstein's equations.

All this general theory of relativity cannot be perfectly understood whether we do not have some knowledge about the mathematical tools that behind it. Furthermore, thanks to the advances on differential geometry, the general theory of relativity could be built and developed until nowadays.

For this reason, the first chapter is devoted to the study of differential geometry. In the first section, we shall develop some basic concepts of the theory such as the concept of 'smooth manifold', 'tangent vector and tensor', among others. The aim is to understand the concept of 'metric tensor' and know the different types of curvature tensors such as 'Riemann's' or 'Ricci's', a fundamental tensor in the theory of relativity due to the fact that it will indicate that the gravity is an attractive force.

In the second section, we shall introduce the physic preliminaries of the theory of general relativity. We shall discuss the relation about the curvature of space-time and gravity. For this purpose, we shall use the famous Einstein equation $G = 8\pi T$, where G will be a tensor called Einstein's gravitational tensor and T will be called tension-energy tensor. This last one will model the matter of the universe. Thus, this equation will connect the curvature of space-time and the matter.

Once the mathematic preliminaries necessary for the differential geometry are seen, we shall move on to the second chapter: the theory of causality. The theory of causality deals with the study of the relationships among the different points in a Lorentz's manifold; that is, it studies the points that can be connected through causal or temporal curves. Physically speaking, we are referring to the study of the points in space-time that can influence others or that can be influenced by others.

In a temporally oriented submanifold M , the causality can be trivial. However, it can be highly related to the geometrical properties of M . As an example, the study of causality will force us to study the points that can be connected through causal or temporal geodesics.

In the first section of this chapter, we shall deal with the relationships of causality. We shall explain the 'chronological and causal future' of a subset and some immediate properties. Then, we shall move on to the causality conditions. This section is crucial due to the fact that it will explain concepts and results such as the concept of globally hyperbolic space-time or the concept of Cauchy hypersurface. An interesting finding is that in a globally hyperbolic space-time, if we have two connected points through a causal curve, there will be a causal geodesic of maximum length connecting these two events.

The next following sections will be devoted to the study of Cauchy's developments and Cauchy's horizons. We shall introduce definitions, properties and the theorems that can be deduced.

Finally, arriving at the last chapter, we shall demonstrate Hawking and Penrose theorems.

Hawking's theorem, as will be seen, states that:

Let M be a connected time-oriented Lorentz manifold of dimension n . Suppose $Ric(v, v) \geq 0$ for all temporal vector v tangent to M . If S is a spacelike future Cauchy hypersurface with future convergence $k \geq b > 0$, then, every future-pointing timelike curve starting in S has length at most $\frac{1}{b}$.

Although the physical consequences of this theorem will be explained in what follows, we can affirm that this theorem demonstrates that, under certain hypotheses, the universe had a beginning in space and time.

On the contrary, Penrose's theorem states what follows:

Let M be a connected time-oriented Lorentz manifold of dimension n satisfying the following:

1. $Ric(v, v) \geq 0$ for all null vectors v tangent to M .
2. M has a Cauchy hypersurface S .
3. P is a compact acronal spacelike submanifold of dimension $n - 2$ which is future-converging.
4. M is future null complete.

Then, $E^+(P)$ is a Cauchy hypersurface in M .

This theorem is not the one which generates physic consequences; instead, the other ones will state that, under certain hypotheses, our universe will have black holes due to the fact that, according to this theorem, there is a lighting of light that will inevitably fall into a singularity. Nevertheless, with all these concepts and results, we shall demonstrate these two theorems.

We shall start now with the development of the project.

Índice general

Resumen	3
Summary	5
1. Geometría y Relatividad General	11
1.1. Conceptos previos de geometría diferencial	12
1.2. Conceptos previos de geometría de Lorentz	19
1.3. Relatividad general	23
2. Causalidad	27
2.1. Relaciones de causalidad	27
2.2. Condiciones de causalidad	29
2.3. Desarrollos de Cauchy	35
2.4. Horizontes de Cauchy	37
3. Teoremas de singularidad	41
3.1. Teoremas de Stephen Hawking	41
3.2. Teoremas de Ronger Penrose	43
3.3. Consecuencias físicas a los teoremas	45
Bibliografía	49
Índice alfabético	50

Capítulo 1

Geometría y Relatividad General

A partir del siglo XVII y gracias a las leyes de Newton, la mayoría de fenómenos que ocurrían en la naturaleza podían explicarse gracias al sentido común. Por ello, se consideraba que el espacio y el tiempo eran absolutos, es decir, las distancias y el tiempo medidos en cualquier experimento debían ser iguales para todos los observadores. Ciertamente, esta teoría física predijo diversos fenómenos como las órbitas de los planetas, la trayectoria de un proyectil, la invención de la máquina de vapor, etc.

Sin embargo, durante la primera mitad del siglo XIX, Maxwell confirmó que la luz tenía carácter ondulatorio. Su teoría se basaba en que la luz se movía siempre a una velocidad constante $c = 299792$ km/s en relación al *éter*.

Gracias al experimento de Michelson-Morley se comprobó que, efectivamente, la velocidad de la luz era la misma independientemente de la velocidad a la que se moviera el observador respecto a la luz. Por ejemplo: si nos movemos a 100 km/h y lanzamos un rayo de luz, esta sale a una velocidad de c km/h, en lugar de hacerlo a $c + 100$ km/h como afirmaba la física newtoniana.

Esto llevó a Einstein en 1905 a escribir su famoso artículo "*Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento*". Einstein daba un giro radical a la forma de entender el universo con esta nueva teoría de la relatividad especial. El espacio y el tiempo sí eran relativos: dependían del estado de movimiento del observador.

En 1915 Einstein presentó su teoría de la relatividad general, una teoría mucho más compleja que la de la relatividad especial. Se basaba en el *principio de equivalencia*: no hay diferencia entre los experimentos realizados en el ámbito de un pequeño sistema en caída libre y en el ámbito de un sistema inercial.

Una de las consecuencias de esta teoría era que la masa influía en la trayectoria de la luz, es decir, la masa curva el espacio-tiempo mediante las ecuaciones de campo de Einstein.

Con los avances de la teoría de la relatividad llegaron avances en cosmología. Hubble realizó un notable descubrimiento en este campo: las galaxias se alejaban de nosotros a una velocidad proporcional a la distancia en que se encontraban. Este hecho está recogido

en la fórmula $v = H_0 d$, donde H_0 es la famosa constante de Hubble, aunque los modelos cosmológicos relativistas sugieren que no es realmente una constante sino que varía lentamente con el tiempo. Este hecho hizo pensar a los físicos que el universo está en expansión.

Aunque Einstein pudo haber predicho la expansión del universo, introdujo en sus ecuaciones una constante para equilibrar la fuerza gravitatoria y mantener las galaxias separadas: se trata de la famosa constante cosmológica que, tras descubrirse el estado de expansión del universo, Einstein tachó del "mayor error de su vida".

En 1917 el físico ruso Friedmann se percató de que las ecuaciones de Einstein sí contemplaban un universo en expansión. Esta solución implicaba que el universo hubo de tener un principio, es decir, el universo (toda la materia) debía haber nacido en un instante de tiempo. El astrónomo británico Fred Hoyle lo llamó en tono bromista el 'Big Bang', nombre que aún perdura.

Fue entonces, en 1967, cuando Stephen Hawking desarrolló su famoso Teorema de Singularidad, uno de los teoremas que demostraremos en este trabajo. En él, Hawking pudo probar que, bajo ciertas condiciones que parecen aplicables a nuestro universo, este empezó a existir a partir de una singularidad, el Big Bang, hace un tiempo finito.

Otro físico que trabajó con Hawking fue Penrose, quien en 1965 demostró el otro teorema en el que se centra el trabajo. La principal consecuencia de este resultado es que en el universo pueden existir regiones con una propiedad muy peculiar: la luz no puede escapar. Son los llamados agujeros negros. Estos dos físicos publicaron en 1970 su artículo "*Las singularidades del colapso gravitacional y cosmología*". En él probaron que los agujeros negros son soluciones a las ecuaciones de Einstein.

Para que la teoría de la relatividad general se pudiera desarrollar, se necesitó de grandes avances en geometría diferencial, que serán nuestro primer cometido en esta memoria. En el primer capítulo vamos a introducir estos conceptos y resultados, algunos de los cuales estarán demostrados en [1].

1.1. Conceptos previos de geometría diferencial

Cuando tenemos un espacio topológico, podemos darle una estructura para obtener un nuevo objeto llamado variedad diferenciable. Este nuevo objeto nos permitirá medir distancias entre dos elementos del espacio topológico, calcular ángulos, longitudes, etc. Esta tarea es el principal objetivo de la geometría diferencial, por lo que en esta sección vamos a estudiar los conceptos previos para darle la estructura citada.

Definición 1.1. Sea M un espacio topológico. Un **sistema de coordenadas** n -dimensional o carta en M es un par (U, x) , donde $U \subset M$ es un abierto de M y x es un homeomorfismo de U sobre un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$. De esta forma, a cada punto $p \in U$ le asignamos unas coordenadas $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$.

Dado que en general no es posible cubrir todo el conjunto M con una sola carta, tenemos

que considerar colecciones de cartas de manera que haya además una cierta compatibilidad entre ellas. Definimos entonces el siguiente concepto.

Definición 1.2. Un **atlas diferenciable** \mathcal{A} sobre un espacio topológico M es una colección $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ de cartas en M satisfaciendo:

1. $M = \cup_{i \in I} U_i$.
2. Para cada $i, j \in I$ con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, los subconjuntos $x_i(U_i \cap U_j)$ y $x_j(U_i \cap U_j)$ son abiertos en \mathbb{R}^n y la aplicación $x_j \circ x_i^{-1}$ es un difeomorfismo de $x_i(U_i \cap U_j)$ en $x_j(U_i \cap U_j)$. Esta condición se resume en que las cartas (U_i, x_i) y (U_j, x_j) son **compatibles diferenciablemente**.

Una **estructura diferenciable sobre** M es un atlas \mathcal{A} sobre M maximal en el sentido de que si (U, x) es una carta en M compatible con cualquier carta de \mathcal{A} entonces (U, x) está en \mathcal{A} .

Definición 1.3. Una **variedad diferenciable** de dimensión n es un par (M, \mathcal{A}) formado por un espacio topológico M de Hausdorff, $2\mathbb{A}\mathbb{N}$, y una estructura diferenciable \mathcal{A} sobre M .

Definición 1.4. Un **vector tangente** a M en p es una forma lineal sobre el espacio vectorial $\mathcal{C}^\infty(p)$ que verifica la propiedad de Leibniz. Es decir, $v : \mathcal{C}^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ es un vector tangente si es una forma lineal verificando

$$v(fg) = v(f)g + fv(g),$$

para toda $f, g \in \mathcal{C}^\infty(p)$.

Al conjunto formado por todos los vectores tangentes a M en p lo denominaremos **espacio tangente** y lo denotaremos por $T_p M$.

Sean (U, x) una carta en M , $p \in U$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(p)$. Se define la derivada parcial de f respecto a x^i , $i = 1, \dots, n$ en el punto p como

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial (f \circ x^{-1})}{\partial u^i}(x(p)),$$

donde (u^1, \dots, u^n) son las coordenadas naturales de \mathbb{R}^n . De esta manera podemos definir los llamados **vectores coordenados** como

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : \mathcal{C}^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$$

Estos vectores tienen una gran utilidad en geometría diferencial ya que cualquier v vector tangente a M en p se puede expresar como una combinación lineal de los vectores coordenados. Es decir, los vectores coordenados forman una base de $T_p M$ tal y como afirma el siguiente teorema.

Teorema 1.5. Sea (U, x) una carta en M y p un punto de U . El conjunto formado por todos los vectores coordenados $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ es una base de T_pM y además se tiene que

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_p,$$

para todo $v \in T_pM$.

Definición 1.6. Dada una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, se define la **diferencial** de f en $p \in M$ como el covector df_p dado por

$$df_p(v) = v(f),$$

para todo $v \in T_pM$.

Definición 1.7. Se define el **fibrado tangente** de M como el conjunto

$$TM = \cup_{p \in M} T_pM.$$

Un **campo de vectores** es una aplicación diferenciable $X : M \rightarrow TM$ tal que a cada punto $p \in M$ le asociamos un vector tangente $X_p \in T_pM$. El conjunto de todos los campos de vectores diferenciables sobre M se denota por $\mathfrak{X}(M)$.

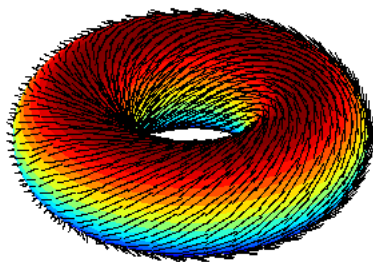


Figura 1.1: Campo de vectores sobre el toro

Definición 1.8. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Se define el corchete de Lie de X e Y como la aplicación $[X, Y] : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ dada por

$$[X, Y](f)(p) = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)),$$

para toda $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y todo $p \in M$.

De la misma manera que tenemos los conceptos de fibrado tangente y campo de vectores diferenciables, tenemos los siguientes para los covectores. Sea $p \in M$. Se define el **espacio cotangente** a M en p como el conjunto formado por todos los covectores en p y se denota por T_p^*M .

Definición 1.9. Se define el **fibrado cotangente** de M como el conjunto

$$T^*M = \cup_{p \in M} T_p^*M.$$

Una **uno-forma** ω es una aplicación diferenciable $\omega : M \rightarrow T^*M$ tal que a cada punto $p \in M$, le hace corresponder un covector $\omega_p \in T_p^*M$.

Definición 1.10. Un tensor de tipo (r, s) sobre $T_p M$ es una aplicación \mathbb{R} -multilineal

$$t : (T_p^* M)^r \times (T_p M)^s \rightarrow \mathbb{R}.$$

Un **campo de tensores** o, sencillamente, un tensor de tipo (r, s) es una aplicación diferenciable T que asigna a cada $p \in M$ un tensor T_p de tipo (r, s) sobre $T_p M$.

Otra forma de interpretar un tensor de tipo (r, s) es verlo como una aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$ -multilineal

$$T : \mathfrak{X}^*(M)^r \times \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M),$$

de forma que $T(X, Y)(p) = T_p(X_p, Y_p)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y para todo $p \in M$. El conjunto formado por todos los tensores de tipo (r, s) sobre M se denota por $\mathcal{T}_s^r(M)$ y, con las operaciones usuales, es un módulo sobre $\mathcal{C}^\infty(M)$.

Veamos ahora cómo trabajar en coordenadas con el concepto de tensor. Si (U, x) es una carta en M , $p \in U$, $x(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ y $T \in \mathcal{T}_s^r(M)$, entonces T se puede expresar en términos de la carta como

$$T = \sum_{1 \leq i_k, j_k \leq n} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s},$$

donde $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})$ son las llamadas componentes del tensor y denotamos $T = (T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r})$.

Existe una operación con los tensores que permite obtener, a partir de un tensor de tipo (r, s) , otro tensor de tipo $(r-1, s-1)$.

Se define la **contracción** del tensor T sobre los índices (a, b) , $1 \leq a \leq r, 1 \leq b \leq s$ como $C_b^a(T) \in \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(M)$ y, en términos de coordenadas, se define por

$$C_b^a(T) = \left(\sum_{k=1}^n \overbrace{T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}^{\substack{\text{a-ésimo} \\ \text{b-ésimo}}} \right).$$

Definición 1.11. Un **tensor métrico** g (usualmente denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$) sobre una variedad diferenciable M es un tensor de tipo $(0,2)$ de forma que g_p es un producto escalar¹ sobre $T_p M$ y el índice² de g_p es constante para todo $p \in M$. Una **variedad pseudo-riemanniana** es un par (M, g) formado por una variedad diferenciable M y un tensor métrico g sobre M . Cuando el índice de g sea 0 diremos que (M, g) es una **variedad de Riemann** mientras que si el índice es 1 (M, g) se tratará de una **variedad de Lorentz**.

Veamos cómo se puede expresar la métrica en términos de coordenadas. Como acabamos de ver, $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$. Por tanto, si (U, x) es una carta en M , g se puede expresar como

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

¹Un producto escalar es una forma bilineal simétrica y no degenerada.

²El índice de un producto escalar es la dimensión del mayor subespacio para el cual el producto escalar es definido negativo

donde $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$, $1 \leq i, j \leq n$ son las componentes de g . Así pues, podemos representar una métrica mediante una matriz de tamaño $n \times n$ cuyas entradas son las componentes de g , como vemos a continuación:

$$g \equiv \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

Normalmente se prescinde de la notación \otimes para el producto tensorial y denotamos a $dx \otimes dx$ por dx^2 .

Vistos ya algunos conceptos básicos de geometría diferencial, pasamos a estudiar la llamada conexión de Levi-Civita. Este objeto no va a ser más que una forma de derivar unos campos de vectores tangentes respecto a otros con ciertas ciertas propiedades relacionadas con la métrica que estemos usando. Para ello empezaremos definiendo el concepto de conexión afín.

Definición 1.12. Una **conexión afín** sobre una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M),$$

denotada por $\nabla_X Y \equiv \nabla(X, Y)$, que cumple las siguientes propiedades:

1. $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$ (\mathbb{R} -lineal en la segunda componente),
2. $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ (\mathcal{C}^∞ -lineal en la primera componente),
3. $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$ (Regla de Leibniz),

para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Definición 1.13. En cualquier variedad pseudo-riemanniana existe una conexión afín ∇ que cumple las siguientes propiedades:

- $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ (Simétrica),
- $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$ (Compatible con la métrica).

A esta conexión la llamaremos la **conexión de Levi-Civita**.

Usando esta conexión tenemos la propiedad siguiente.

Sea (U, x) una carta en M . Entonces existen funciones diferenciables Γ_{ij}^k de manera que

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

para todos $i, j = 1, \dots, n$. Estas funciones se conocen con el nombre de **símbolos de Christoffel**.

Una vez que tenemos una conexión con buenas propiedades, podemos definir el conocido tensor curvatura de Riemann, introducido en 1862 por Riemann. Este tensor es una generalización de la famosa curvatura de Gauss para superficies.

Definición 1.14. Sean M una variedad pseudo-riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. Se define el **tensor curvatura de Riemann** como el tensor de tipo $(1, 3)$ dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Como el tensor curvatura de Riemann es un tensor muy complicado al ser de tipo $(1, 3)$, se suele trabajar con una variante suya: el tensor curvatura de Ricci.

Definición 1.15. Se define el **tensor curvatura de Ricci** como la contracción sobre los índices $(1, 3)$ del tensor curvatura de Riemann

$$\text{Ric} = C_3^1(R) \in \mathcal{T}_2^0(M).$$

El siguiente concepto es muy importante, tanto en geometría diferencial como en teoría de la relatividad, como veremos más adelante.

Definición 1.16. Una **curva** es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow M$, donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R} . Se define el **vector velocidad** de α en $t \in I$ como $\alpha'(t) = d\alpha_t(\frac{d}{dt})$ que, en un sistema de coordenadas, se puede expresar como $\alpha'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d\alpha^i}{dt}(t) \partial_i|_{\alpha(t)}$. Un **campo de vectores a lo largo de una curva** α es una aplicación diferenciable $V : I \rightarrow TM$ de manera que $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$, para todo $t \in I$. El conjunto formado por todos los campos de vectores diferenciable a lo largo de una curva α se denota por $\mathfrak{X}(\alpha)$. Así pues, $\alpha' \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

Definición 1.17. Sea α una curva en una variedad pseudo-riemanniana M y sea V un campo de vectores a lo largo de α . Entonces existe otro campo de vectores $V' \equiv \frac{DV}{dt} \in \mathfrak{X}(\alpha)$, llamado la **derivada covariante** de V a lo largo de α , tal que

1. $(aV_1 + bV_2)' = aV_1' + bV_2'$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$;
2. $(hV)' = (dh/dt)V + hV'$, para toda $f \in C^\infty(I)$; y
3. $(X_\alpha)' = \nabla_{\alpha'}X$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Se define la **aceleración** de una curva como $\alpha'' = \frac{D\alpha'}{dt}$.

Las curvas más interesantes en la geometría diferencial son las llamadas geodésicas. En variedades de Riemann, estas curvas tienen la propiedad de que localmente minimizan la distancia; sin embargo, en variedades de Lorentz ocurre todo lo contrario: las geodésicas maximizan la longitud, como veremos más adelante en el capítulo 2.

Definición 1.18. Sea M una variedad pseudo-riemanniana. Una **geodésica** es una curva $\lambda : I \rightarrow M$ que cumple que su aceleración es cero. Es decir, $\lambda'' = \frac{D\lambda'}{dt} = 0$.

En términos de coordenadas, encontrar una geodésica $\lambda(t)$ es encontrar una solución al

sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2\lambda^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d\lambda^i}{dt} \frac{d\lambda^j}{dt} = 0, \forall k = 1, \dots, n$$

Llegados a este punto, ya tenemos una idea muy general del estudio de las variedades pseudo-riemannianas. Sin embargo, para comprender los teoremas de singularidad, debemos dar unas cuantas definiciones más que se encuentran en el marco de la geometría de subvariedades.

Definición 1.19. Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ se dice que es una **inmersión** si df_p es inyectiva para todo punto $p \in M$. Si además f es un homeomorfismo en la imagen, se dice que f es un **embebimiento**.

Sea M una variedad y $P \subset M$. Se dice que P es una **subvariedad** de M si la aplicación inclusión $j : P \rightarrow M$ es un embebimiento. Si la dimensión de P es $n - 1$, se dice que P es una **hipersuperficie**.

Sea P una subvariedad de M y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Se dice que X es tangente a P si

$$X_p \in T_p P \subset T_p M.$$

A partir de ahora M será una subvariedad de \overline{M} . El espacio tangente a p en \overline{M} se descompone como suma directa de la forma

$$T_p(\overline{M}) = T_p(M) \oplus T_p(M)^\perp,$$

para todo $p \in \overline{M}$, donde $T_p(M)^\perp$ es el llamado **espacio normal** a p en M .

Se define el **fibrado normal** de M como

$$NM = \cup_{p \in M} T_p(M)^\perp.$$

Denotamos por $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ al conjunto de las aplicaciones diferenciables $X : M \rightarrow T\overline{M}$ tales que $X_p \in T_p\overline{M}$, para todo $p \in M$.

De la misma forma que hemos hecho en el espacio tangente se tiene que

$$\overline{\mathfrak{X}}(M) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(M)^\perp.$$

Definición 1.20. Sea $\overline{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de \overline{M} . Se define la **conexión inducida** $\overline{\nabla} : \overline{\mathfrak{X}}(M) \times \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \overline{\mathfrak{X}}(M)$, y se denota por $\overline{\nabla}_X Y$, como la restricción de $\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y}$ a M , para todo $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(M)$.

De esta forma se tiene que la conexión de Levi-Civita de la subvariedad M es

$$\nabla_X Y = \tan \overline{\nabla}_X Y,$$

para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Se define el **tensor forma** o segunda forma fundamental como la aplicación

$$II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp,$$

dada por $II(X, Y) = \text{nor } \overline{\nabla}_X Y$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Así pues, se tiene la siguiente descomposición:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

De igual modo que en geometría de superficies tenemos la curvatura media de una superficie, en geometría diferencial tenemos el mismo concepto: la curvatura media es una propiedad extrínseca a la subvariedad M , es decir, depende de dónde se encuentre la subvariedad.

Definición 1.21. Sea M una subvariedad de \bar{M} con tensor forma II . Se define el campo normal **curvatura media** de M en un punto $p \in M$, y se denota por H , como

$$H_p = \frac{1}{\dim M} \sum_{i=1}^n \epsilon_i II(e_i, e_i),$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una referencia ortonormal de M en p y $\epsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle$.

Definición 1.22. Sea $M \subset \bar{M}$ una subvariedad con curvatura media H . Se define la **convergencia** de M como la función $k : NM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $k(z) = \langle z, H_p \rangle$, para todo $z \in T_p(M)^\perp$

1.2. Conceptos previos de geometría de Lorentz

Como hemos definido anteriormente, una variedad de Lorentz es una variedad diferenciable cuya métrica tiene índice 1 constante. Esto significa que la dimensión del mayor subespacio para el cual g_p es definido negativo es 1. Sabemos, gracias al álgebra lineal, que esto es equivalente a decir que para cualquier base ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de $T_p M$ ordenada convenientemente siempre se tiene que $\langle e_1, e_1 \rangle < 0$ y $\langle e_i, e_i \rangle \geq 0$, para todo $i \geq 2$.

Así pues, $T_p M$ tiene estructura de espacio vectorial lorentziano. En un espacio de este tipo no se cumple siempre que $\langle v, v \rangle > 0$, lo cual nos lleva a plantearnos la siguiente definición.

Definición 1.23. Sea (V, \langle, \rangle) un espacio vectorial con producto escalar de índice 1 (espacio vectorial de Lorentz), y sea $v \in V$ un vector cualquiera

- Si $\langle v, v \rangle < 0$ se dice que v es un **vector temporal**.
- Si $\langle v, v \rangle > 0$ ó $v = 0$ se dice que v es un **vector espacial**.
- Si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$ se dice que v es un **vector luminoso** o **vector nulo**.
- Si v es un vector temporal o un vector luminoso, se dice que v es un **vector causal**.

A la vista de esta definición, el subconjunto de V formado por todos los vectores temporales tiene dos componentes conexas denominadas **conos temporales**. Por otra parte, el conjunto de los vectores luminosos también está formado por dos componentes conexas denominadas **conos de luz**. Así pues, si consideramos el subconjunto formado por todos los vectores causales de V , tenemos los llamados **conos causales** de V .

Ejemplo 1.24. El ejemplo más simple de variedad Lorentziana es el espacio de **Lorentz-Minkowski**, denotado por \mathbb{L}^n , que no es más que \mathbb{R}^n dotado con el producto

$$\langle v, w \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

Este espacio es el que modela la teoría de la relatividad especial de Einstein. Vamos a encontrar los conos causales en el espacio de Lorentz-Minkowski para $n = 2$. Hay que ver cuáles son los vectores nulos, por lo que, si $v \in T_p M$ es un vector nulo, entonces $\langle v, v \rangle = 0$. En términos de las componentes de v se tiene que $-v_1^2 + v_2^2 = 0$, es decir, $v_1 = \pm v_2$. A la vista de estos resultados se puede afirmar que los conos de luz están formados por todos los vectores que se encuentran en las rectas $y = \pm x$.

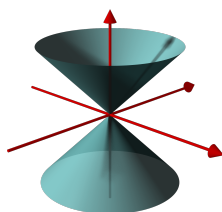


Figura 1.2: Conos causales en \mathbb{L}^3

Llegados a este punto, es legítimo preguntarse si los espacios vectoriales lorentzianos tienen las mismas propiedades que los espacios vectoriales usuales. Por tanto, estudiaremos algunos resultados de estos espacios y demostraremos los más importantes.

Proposición 1.25. Dos vectores temporales $v, w \in V$ están en el mismo cono temporal si, y solo si, $\langle v, w \rangle < 0$.

En geometría euclídea estamos acostumbrados a usar la famosa desigualdad de Cauchy-Schwarz, pero en espacios vectoriales lorentzianos se da la desigualdad justo en el sentido opuesto. Como este resultado es peculiar, vamos a enunciarlo y demostrarlo.

Proposición 1.26. Sean $v, w \in V$ dos vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz. Entonces se tiene $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$ y se da la igualdad si, y solo si, v y w son colineales.

Demostración. Escribimos $w = av + \vec{w}$, donde $\vec{w} \in v^\perp$. Como w es un vector temporal, $\langle w, w \rangle < 0$. Por tanto, $\langle w, w \rangle = \langle av + \vec{w}, av + \vec{w} \rangle = a^2 \langle v, v \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle < 0$. Ahora bien, $\langle v, w \rangle^2 = \langle v, av + \vec{w} \rangle^2 = a^2 \langle v, v \rangle^2 = (\langle w, w \rangle - \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle) \langle v, v \rangle \geq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle = |v|^2 |w|^2$.

Por lo que $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$ y se da la igualdad si, y solo si, $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$, lo cual equivale a que $\vec{w} = 0$, que equivale a su vez a que $w = av$. \square

Definición 1.27. Una **orientación temporal** de V es una elección de uno de los dos conos temporales de V , y lo denotamos por \mathcal{T} . A este cono lo llamaremos el cono futuro y a $-\mathcal{T}$, el cono pasado.

Volvemos al estudio de las variedades lorentzianas. Como en estas cada $T_p M$ es un espacio vectorial de Lorentz, podemos preguntarnos si es posible asignar a cada $p \in M$ una orientación temporal $\mathcal{T}_p \subset T_p M$ de manera que esa aplicación $p \rightarrow \mathcal{T}_p$ sea buena en algún sentido diferenciable. Esto conduce a la siguiente definición.

³Esto implica que \vec{w} será un vector espacial, por tanto, $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \geq 0$

Definición 1.28. Una aplicación $p \rightarrow \mathcal{T}_p$ que a cada $p \in M$ le asigna un cono temporal en T_pM es diferenciable si para todo $p \in M$ existe U entorno de p y $X \in \mathfrak{X}(U)$ campo de vectores tal que $X_q \in \mathcal{T}_q$, para todo $q \in U$. Una aplicación de este tipo se llama **orientación temporal de M** . Decimos que M es **orientable temporalmente** si admite una orientación temporal de M .

Un resultado muy potente respecto a la orientación temporal en variedades de Lorentz es el siguiente.

Proposición 1.29. Una variedad de Lorentz M es orientable temporalmente si, y solo si, existe un campo de vectores temporales $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que, en una variedad de Lorentz que admite una orientación temporal, elegir una orientación temporal es lo mismo que fijar un campo de vectores temporales $X \in \mathfrak{X}(M)$ que se puede tomar unitario sin pérdida de generalidad.

Por otra parte, el que una variedad admita una métrica de Lorentz es una condición muy restrictiva topológicamente hablando. Por ejemplo, las únicas superficies compactas que admiten métricas lorentzianas son el toro y la botella de Klein. Además, la esfera \mathbb{S}^n admite una métrica de Lorentz si, y solo si, n es impar (Ver [3], página 149).

La siguiente definición es fundamental para comprender el capítulo 2 (teoría de la causalidad). Vamos a definir las diferentes curvas que podemos encontrar en las variedades de Lorentz y a explicar un resultado que se utilizará en demostraciones posteriores.

Definición 1.30. Una curva diferenciable a trozos $\alpha : I \rightarrow M$ se dice que es una curva **temporal (nula o causal)** si su velocidad $\alpha'(t)$ es un vector temporal (nulo o causal) en los puntos que no son vértices, y en los vértices $\alpha'(t_i^-)$ y $\alpha'(t_i^+)$ son vectores temporales (nulos o causales) en el mismo cono temporal.

El resultado que vamos a enunciar a continuación parece intuitivo ya que, si tenemos una curva causal que no es nula, entonces parece lógico que podamos encontrar una curva temporal con extremos los de la curva causal.

Proposición 1.31. Sea M una variedad de Lorentz. Si $\alpha : I \rightarrow M$ es una curva causal no nula de p a q , entonces existe una curva temporal de p a q arbitrariamente cercana a α .

Definición 1.32. Sea M una variedad de Lorentz orientada temporalmente por \mathcal{T} . Diremos que un vector causal $v \in T_pM$ **apunta hacia el futuro** si $v \in \overline{\mathcal{T}}_p$. De forma dual, diremos que v apunta hacia el pasado si $v \in -\overline{\mathcal{T}}_p$.

Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ **apunta hacia el futuro** si $\alpha'(t)$ apunta hacia el futuro para todo $t \in I$. Respectivamente, α apunta al pasado si $\alpha'(t)$ **apunta al pasado** para todo $t \in I$.

A continuación vamos a explicar las definiciones más importantes para comprender los teoremas de singularidad, es decir, vamos a definir el concepto de singularidad.

Definiciones importantes para comprender los teoremas

Definición 1.33. Sea $\alpha : [0, B) \rightarrow M$ una curva diferenciable. Se dice que α es **extendible** si admite una extensión continua $\bar{\alpha} : [0, B] \rightarrow M$. El punto $q = \bar{\alpha}(B)$ se dice que es un punto final de α . Si α no es extendible, se dice que α es **inextendible**.

Definición 1.34. Una geodésica inextendible $\lambda : I \rightarrow M$ es **completa** si $I = \mathbb{R}$. Si λ no es completa, se dice que λ es **incompleta**.

Definición 1.35. Diremos que M es **geodésicamente completa o completa** si cada geodésica inextendible es completa.

Una observación que debemos hacer es que el concepto de geodésica completa depende de la métrica que estemos utilizando puesto que, como hemos visto en la definición 1.18, las geodésicas en una variedad pseudo-riemanniana M se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen de los símbolos de Christoffel y estos, a su vez, dependen exclusivamente de la métrica de la variedad M . Así pues, en una variedad de Lorentz tenemos lo siguiente.

Definición 1.36. Sea M una variedad de Lorentz. Entonces se dice que

- M es **espacialmente completa** si cada geodésica espacial es completa.
- M es **temporalmente completa** si cada geodésica temporal es completa.
- M es **luminosamente completa** si cada geodésica nula es completa.
- M es **espacialmente incompleta** si existe una geodésica espacial incompleta.
- M es **temporalmente incompleta** si existe una geodésica temporal incompleta.
- M es **luminosamente incompleta** si existe una geodésica nula incompleta.

A la vista de esta definición, si tenemos un variedad de Lorentz M que es luminosamente incompleta es porque existe una geodésica nula incompleta. Pues bien, si esta geodésica apunta hacia el futuro diremos que M es **luminosamente incompleta hacia el futuro**. Del mismo modo se puede definir la incompletitud hacia el pasado.

Definición 1.37. Sea M una variedad de Lorentz. Se dice que M tiene una **singularidad futura** si admite una geodésica causal incompleta apuntando hacia el futuro. En particular, si M es temporalmente o luminosamente incompleta apuntando hacia el futuro, entonces M tiene una singularidad futura. Dualmente se define el concepto de **singularidad pasada**.

La definición anterior es la más importante para entender los teoremas de singularidad ya que una de las consecuencias de estos teoremas es que nuestro universo tiene una singularidad pasada, como veremos en el capítulo 3.

Al igual que en geometría de Riemann, en una variedad de Lorentz podemos medir longitudes de curvas del mismo modo en que lo hacemos en una variedad de Riemann. De esta forma, dada una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$, definimos su longitud como:

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

En realidad, como veremos más adelante, esta definición de longitud medirá el tiempo que ha pasado para un observador que se mueve siguiendo la trayectoria de α para llegar desde $\alpha(a)$ hasta $\alpha(b)$.

Finalmente, para acabar este capítulo, vamos a explicar un resultado que nos ayudará a demostrar el teorema de singularidad de Hawking. Para ello vamos a necesitar definir el concepto de punto focal.

Definición 1.38. Sean M una variedad pseudo-riemanniana y $P \subset M$ una subvariedad. Sea $\lambda : [0, 1]$ una geodésica con $\lambda(0) \in P$, $\lambda'(0) \perp P$ y $r \in (0, 1]$. Entonces, $\lambda(r)$ es un **punto focal** de P a través de λ si existe un campo de Jacobi⁴ J no nulo a lo largo de λ tal que $J(r) = 0$.

Proposición 1.39. Sean P una hipersuperficie espacial⁵ y λ una geodésica normal a P en $p = \lambda(0)$. Supongamos que se tiene:

- $k(\lambda'(0)) > 0$.
- $Ric(\lambda', \lambda') \geq 0$.

Entonces existe un punto focal $\lambda(r)$ de P con $0 < r \leq 1/k(\lambda'(0))$, siempre que λ esté definida en ese intervalo.

1.3. Relatividad general

En esta sección vamos a desarrollar los conceptos físicos fundamentales en los que se basa la teoría de la relatividad general de Einstein. La teoría de la relatividad general modela aspectos físicos del universo mediante lo que se denomina el espacio-tiempo M .

Definición 1.40. Un **espacio-tiempo** M es una variedad de Lorentz conexa 4-dimensional y orientada temporalmente. A cada punto del espacio-tiempo se le denomina **evento**.

Veamos los fundamentos de esta teoría.

- La teoría de la relatividad especial es un caso particular de la teoría de la relatividad general. Como sabemos, la teoría de la relatividad especial se modela mediante el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^4 . Por lo tanto, en sitios suficientemente alejados de cualquier masa donde la curvatura sea nula, el universo se modelará mediante esta teoría.
- La teoría de la relatividad general se aproxima localmente a la teoría de la relatividad

⁴Un campo de Jacobi es un campo $J \in \mathfrak{X}(\lambda)$ que cumple $\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V, \lambda')\lambda' = 0$ en el dominio de definición de λ .

⁵Una subvariedad P es espacial si para todo $p \in P$ y para todo $v \in T_p P$ se tiene que v es un vector espacial.

dad especial. Sea p un evento de un espacio-tiempo M . Entonces el espacio tangente $T_p M \approx \mathbb{L}^4$. Por lo tanto, con la aplicación exponencial podemos aproximar localmente la teoría de la relatividad general a la teoría de la relatividad especial. Un ejemplo visual de este argumento es la Tierra, una esfera que a simple vista no parece tener forma esférica ya que la vemos como un plano.

- La gravedad domina en la distancia. Como es sabido, entre las fuerzas nucleares, el electromagnetismo y la gravedad, esta última es la más débil de todas. Sin embargo, las fuerzas nucleares trabajan en una escala tan pequeña que una teoría que modela el universo podría ignorarlas a priori. El electromagnetismo, en cambio, a gran escala sí que es más fuerte que la gravitación, pero al aparecer las cargas positivas y negativas, esta fuerza podría cancelarse. La gravedad, en cambio, no se cancela nunca y es una fuerza de atracción. La principal función de la teoría de la relatividad general es dar una explicación a la gravedad.
- La materia curva el espacio-tiempo. La idea que tuvo Einstein fue que la materia debía curvar el espacio-tiempo, es decir, una masa modifica la geometría del espacio y del tiempo. A partir de aquí, las geodésicas serán partículas que están en caída libre, esto es, partículas afectadas únicamente por la fuerza de la gravedad.

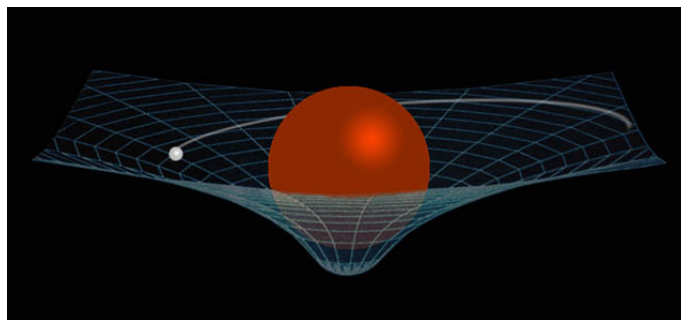


Figura 1.3: Curvatura del espacio-tiempo

- La gravedad es curvatura. Supongamos que tenemos dos cuerpos cayendo hacia la tierra en caída libre. Como podemos comprobar, la distancia entre esos dos cuerpos se hace cada vez más pequeña. En física clásica, este hecho se produce porque la gravedad es una fuerza central; sin embargo, en relatividad, como los cuerpos están en caída libre, siguen geodésicas y estas curvas están determinadas por la curvatura del espacio-tiempo. Es por ello que afirmamos que gravedad es curvatura.



Figura 1.4: Caída libre de dos cuerpos

- Fuentes de gravedad. ¿De dónde viene la gravedad? En la teoría de la relatividad general, proviene del momento-energía de la materia. Para una forma de materia modelada en un espacio-tiempo M , el momento-energía que contiene está descrito en el tensor tensión-energía. Como veremos más adelante, este tensor medirá la densidad de energía.

Ejemplo 1.41. A continuación vamos a ver algunos ejemplos de espacio-tiempos.

- El espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^4 modela la relatividad especial.
- Espacio-tiempos cosmológicos simples, definidos por $M = (a, b) \times_f \mathbb{R}^3$, donde $f : (a, b) \rightarrow (0, +\infty)$ es una función diferenciable. La métrica viene dada por $g = -dt^2 + f(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)$.
- Espacio-tiempo de Schwarzschild, que modela un universo con una sola estrella.
- Espacio-tiempos de Robertson-Walker, definidos por $M = (a, b) \times_f S$, donde S es un espacio tridimensional de curvatura constante.

Definición 1.42. Una **partícula material** en un espacio-tiempo M es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ parametrizada por el arco⁶, temporal y apuntando hacia el futuro. El parámetro τ se denomina **tiempo propio** de la partícula y físicamente representa el tiempo que mide un observador que se mueve siguiendo la trayectoria de α .

Definición 1.43. Veamos algunos términos relacionados con las partículas materiales.

- Una partícula material está en **caída libre** si es una geodésica.
- Una **partícula luminosa** es una geodésica nula apuntando hacia el futuro.
- Un **observador** es simplemente una partícula material con ese roll. Puede o no estar en caída libre. Si lo está, se dice que es un observador en caída libre.
- Un **observador instantáneo** de M es un par (p, u) donde $p \in M$ es un evento y $u \in T_p M$ es un vector temporal y unitario, y apunta hacia el futuro.

Por lo tanto, un observador $\omega : I \rightarrow M$ no es más que un conjunto de observadores instantáneos indexados por el tiempo propio $\{(\omega(\tau), \omega(\tau)')\}_{\tau \in I}$.

Veamos cómo mide un observador instantáneo (p, u) la velocidad de una partícula material cuando pasa por p . Sea α una partícula material con velocidad α' . Cuando la partícula pasa por p se puede hacer la siguiente descomposición:

$$\alpha' = au + \vec{\alpha}' ,$$

donde $a = \cosh \phi$, siendo ϕ el ángulo hiperbólico entre α' y u . Se define la **velocidad de la partícula α medida por el observador instantáneo (p, u)** como $\vec{v} = \vec{\alpha}'/a$.

⁶Esto significa que $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$

Definición 1.44. Un tensor **tensión-energía** en un espacio-tiempo M es un tensor simétrico $T \in \mathcal{T}_2^0(M)$ que cumple $T_p(v, v) \geq 0$, para todo $p \in M$ y para todo $v \in T_p M$ vector causal.

Un **fluido perfecto** en un espacio-tiempo M es una terna (U, ρ, μ) donde:

- U es un campo de vectores unitario temporal llamado campo de flujo.
- $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es la función de densidad de energía y $\mu \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es la función de presión.
- El tensor tensión-energía es

$$T = (\rho + \mu)U^* \otimes U^* + \mu g$$

Se tiene entonces que $T(U, U) = \rho$ y que $T(X, Y) = \mu \langle X, Y \rangle$, donde $X, Y \perp U$.

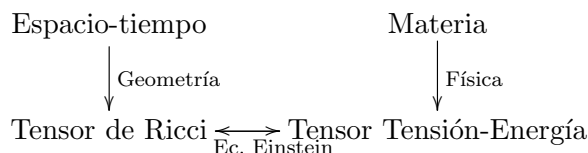
Físicamente, el tensor-tensión energía mide la densidad de energía y la tensión. Si (p, u) es un observador instantáneo, $T(u, u)$ es la función de densidad de energía que mide el observador. En cambio, si tenemos $w \in u^\perp$, $T(w, w)$ representa la tensión o presión en la dirección w que mide el observador.

Como hemos visto anteriormente, la fuente de la gravedad viene del tensor tensión-energía pero, como también sabemos que la gravedad es curvatura, se puede decir que el tensor tensión-energía está relacionado con la curvatura del espacio-tiempo. En esta idea estuvo trabajando Albert Einstein hasta dar con la solución. Él propuso la fórmula $G = kT$, donde G sería alguna variante del tensor curvatura de Ricci y k , una constante. El procedimiento de obtención de esta formula puede verse en [2].

Definición 1.45. Se define el **tensor gravitacional de Einstein** como $G = Ric - \frac{Sg}{2}$, donde $S = C(Ric)$ es la contracción del tensor curvatura de Ricci. Si M es un espacio-tiempo con materia modelada por el tensor tensión-energía T , la siguiente ecuación se llama **ecuación de Einstein**

$$G = 8\pi T.$$

Esta ecuación combina la materia con la curvatura del espacio-tiempo, nos dice cómo la materia determina el tensor curvatura de Ricci, ya que $Ric = G - \frac{C(G)g}{2}$. Del mismo modo, al despejar el tensor tensión-energía obtenemos que $T = \frac{Ric - \frac{1}{2}Sg}{8\pi}$. Por tanto, el siguiente esquema resume la unificación de la curvatura con la materia:



Einstein unificó la materia con la curvatura del espacio-tiempo en 1915 y, a partir de ahí, los físicos más importantes del siglo XX comenzaron a hacer investigaciones en la teoría que cambió el pensamiento científico y filosófico.

Capítulo 2

Causalidad

La teoría de la causalidad se dedica al estudio de las relaciones que hay entre los diferentes puntos de una variedad de Lorentz, esto es, estudia los puntos que se pueden unir mediante curvas causales o temporales. Físicamente hablando nos referimos al estudio de los puntos del espacio-tiempo que pueden influenciar a otros o que pueden ser influenciados por otros.

En una variedad de Lorentz M orientada temporalmente, la causalidad puede ser trivial; sin embargo, puede estar muy íntimamente relacionada con las propiedades geométricas de M . A modo de ejemplo, el estudio de la causalidad nos obligará a estudiar los puntos que se pueden unir mediante geodésicas causales.

Algunos conceptos y resultados de lo que veremos a continuación fueron desarrolladas por los físicos Hawking y Penrose en un intento por entender por qué los modelos relativistas más famosos poseían singularidades.

Como es imposible demostrar todos los teoremas y proposiciones debido a la limitación de este trabajo, el lector puede buscar las pruebas de algunos resultados en [1], pues este capítulo se guiará por dicho libro.

Durante todo este capítulo y el siguiente, M denotará una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente.

2.1. Relaciones de causalidad

Definición 2.1. Las relaciones de causalidad en M están definidas de la siguiente manera:

- $p \ll q$ significa que hay una curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en p y acaba en q .
- $p < q$ significa que hay una curva causal apuntando hacia el futuro que empieza en p y acaba en q .

- $p \leq q$ significa que $p < q$ o $p = q$.

Evidentemente, como toda curva temporal es una curva causal, se tiene que si $p \ll q$ entonces $p < q$.

Definición 2.2. Sea $A \subset M$, definimos el **futuro cronológico** de A como

$$I^+(A) = \{q \in M : \exists p \in A \text{ tal que } p \ll q\}.$$

Del mismo modo, se define el **futuro causal** de A como

$$J^+(A) = \{q \in M : \exists p \in A \text{ tal que } p \leq q\}.$$

Análogamente, se define el **pasado cronológico** de A como

$$I^-(A) = \{q \in M : \exists p \in A \text{ tal que } q \ll p\}.$$

Y, por último, se define el **pasado causal** de A como

$$J^-(A) = \{q \in M : \exists p \in A \text{ tal que } q \leq p\}.$$

$I^+(A)$ es el conjunto de todos los puntos de M a los que se puede llegar mediante una curva temporal futura que empiece en A . Por otra parte, $J^+(A)$ serán los puntos a los que se puede llegar mediante una curva causal futura que empiece en A . Respectivamente, $I^-(A)$ es el conjunto de todos los puntos de M tales que, si partimos de ellos, existe una curva temporal futura que acaba en A . Finalmente, $J^-(A)$ serán los puntos tales que partiendo de ellos, existe una curva causal futura que acaba en A .

Nota 2.3. A partir de ahora nos centraremos en el futuro, pues hablar del pasado es lo mismo que cambiar la orientación temporal y, por tanto, todo lo que hagamos, salvo que se diga lo contrario, valdrá tanto para futuro como para pasado.

Evidentemente, el futuro cronológico de A está contenido en el futuro causal de A ; es más, A está contenido también en el futuro causal de A . Esto implica que

$$A \cup I^+(A) \subset J^+(A).$$

Si $p \in M$, en vez de escribir $I^+(\{p\})$, por comodidad, usaremos la notación $I^+(p)$. Haremos lo mismo con el futuro causal.

Ejemplo 2.4. Veamos qué son el futuro y el pasado causal del punto 0 en \mathbb{L}^2 . Como los conos causales en el espacio-tiempo de Minkowski siempre tienen una inclinación de 45° , cualquier curva causal apuntando hacia el futuro que empiece en 0 debe quedarse dentro del cono futuro como puede observarse en la figura 2.1. Por tanto, el futuro cronológico de 0 es su cono temporal futuro y el futuro causal es el cono causal futuro.

Proposición 2.5. La relación \ll es transitiva. Es decir, $p \ll q$, y $q \ll r$, entonces $p \ll r$.

Proposición 2.6. Si $p \ll q$, y $q \leq r$, entonces $p \ll r$. Análogamente, si $p \leq q$, y $q \ll r$, entonces $p \ll r$.

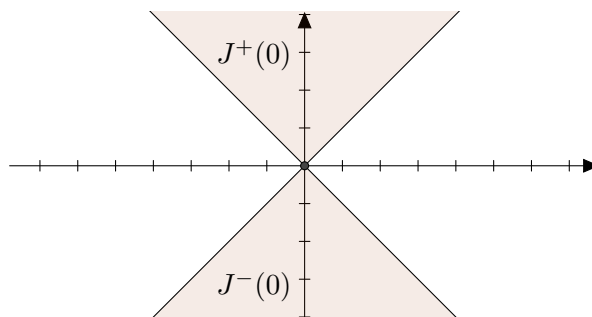


Figura 2.1: Futuro y pasado causal

A la vista de estas dos proposiciones, tenemos las siguientes relaciones:

$$I^+(A) = I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A)) \subset J^+(J^+(A)) = J^+(A).$$

Veamos ahora un lema que nos permite unir la teoría de la causalidad con la topología de M .

Proposición 2.7. La relación \ll es abierta, es decir, si $p \ll q$, entonces existen entornos U de p y V de q tales que $p' \ll q'$, para todo $p' \in U$, $q' \in V$.

Como corolario de esta proposición, podemos deducir que todo futuro cronológico es un conjunto abierto en M ; sin embargo, no podemos afirmar que el futuro causal sea cerrado. Por ejemplo, si a \mathbb{L}^2 le quitamos el punto $(1, 1)$, $J^+(0)$ es la unión de $I^+(0)$ con la imagen de la curva $\alpha(t) = (-t, t)$, $t \in [0, +\infty)$ y la curva $\beta(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1)$ que, claramente, no es un conjunto cerrado.

Proposición 2.8. Sea $A \subset M$, se tiene que $\text{int}(J^+(A)) = I^+(A)$, y $J^+(A) \subset \overline{I^+(A)}$.

2.2. Condiciones de causalidad

Definición 2.9. Decimos que M es **cronológico** si M no contiene ninguna curva temporal cerrada. De la misma forma decimos que M es **causal** si M no contiene ninguna curva causal cerrada.

Se tiene entonces que si M es causal, entonces M es cronológico.

Si el espacio-tiempo que modela nuestro universo no fuera cronológico podríamos tener hechos verdaderamente incongruentes. Por ejemplo, un observador podría viajar hasta el momento y el lugar en los que empezó el viaje, por lo que podría verse partir. Es más: podría matarse a sí mismo antes de viajar, con lo cual no viajaría, sin embargo ¡ya ha viajado!

Es por esto que los espacio-tiempos cronológicos son los que se estudian en relatividad, porque se supone que en el universo no se pueden dar fenómenos como el explicado.

Proposición 2.10. Si M es compacto, M no es cronológico.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{I^+(p) : p \in M\}$. \mathcal{A} es un recubrimiento por abiertos de M . Como M es compacto, existe un subrecubrimiento finito, $\{I^+(p_1), \dots, I^+(p_k)\}$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $I^+(p_1)$ no está contenido en ningún otro $I^+(p_i)$. Veamos que $p_1 \in I^+(p_1)$.

Si p_1 no está en $I^+(p_1)$, debe estar en un $I^+(p_i)$, por tanto, $I^+(p_1) \subset I^+(p_i)$, y esto hemos supuesto que no ocurre. Tenemos entonces que $p_1 \in I^+(p_1)$, y esto quiere decir que existe una curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en p_1 y acaba en p_1 . Por lo tanto, existe una curva temporal cerrada y M no es cronológico. □

Definición 2.11. Decimos que M es **fuertemente causal en** $p \in M$ siempre que dado cualquier entorno U de p exista otro entorno $V \subset U$ tal que toda curva causal con extremos en V permanezca siempre dentro de U . Si M es fuertemente causal en todo $p \in M$, se dice que M es **fuertemente causal**.

Informalmente, lo que significa la definición anterior es que las curvas causales que empiezan suficientemente cerca de p y se van de un entorno de éste no pueden volver a estar cerca de p , es decir, no existen curvas causales casi cerradas cerca de p . Es evidente que si M es fuertemente causal es causal, ya que al no existir curvas causales casi cerradas en M , no pueden existir curvas causales cerradas. El recíproco no es cierto y lo veremos con un ejemplo.

Ejemplo 2.12. Sea M un espacio-tiempo construido a través de $\mathbb{S}_1^1 \times \mathbb{R}$ (cilindro de Lorentz) en el que eliminamos dos semirrectas cuyos puntos finales están en una geodésica nula (Rectas a 45°). En la Figura 2.2¹ se observa cómo son los conos temporales y la orientación temporal. L y L' son la misma recta ya que estamos representando un cilindro en un plano.

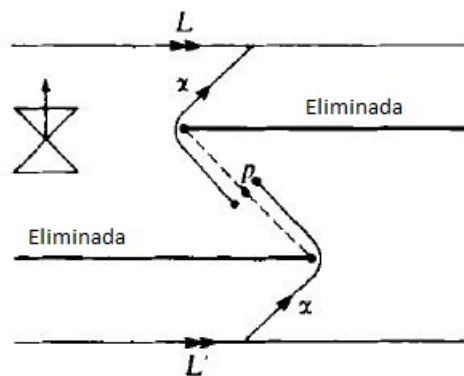


Figura 2.2: Cilindro de Lorentz

Obviamente, M es causal ya que cualquier curva causal cerrada debería cortar a una de las rectas eliminadas; sin embargo, estas rectas no están, por lo que no existen curvas causales cerradas y, por tanto, M es causal. A pesar de que M sea causal, M no es

¹Imagen extraída de [1].

fuertemente causal en p ya que la curva α es una curva causal casi cerrada cerca de p , por lo cual llegamos a que M no es fuertemente causal.

Proposición 2.13. Sea $K \subset M$ un compacto fuertemente causal. Entonces, toda curva causal inextendible apuntando hacia el futuro empezando en K lo abandona en algún momento, es decir, existe un $s > 0$ tal que $\alpha(t) \notin M$, para todo $t \geq s$.

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que no se cumple la conclusión. Si el dominio de α es $[0, B)$, con $B \leq \infty$, existe una sucesión $\{s_i\} \subset [0, B)$ convergente a B tal que $\{\alpha(s_i)\} \subset K$. Al ser K compacto, existe una subsucesión (por llevar una notación más clara no usaremos subíndices) $\{\alpha(s_k)\} \subset K$ convergente a un punto $p \in K$. Como α es inextendible, no tiene un punto final y, por tanto, existe otra sucesión $\{t_i\} \subset [0, B)$ convergente a B tal que $\{\alpha(t_i)\}$ no converge a p . Entonces existen un entorno U de p y una subsucesión $\{t_n\}$ tales que $\alpha(t_n) \notin U$, para todo t_n . Como $\{t_n\}$ y $\{s_k\}$ convergen a B , de nuevo podemos encontrar otra subsucesión que cumpla que $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots$. De aquí deducimos que $\alpha|_{[s_k, s_{k+1}]}$ es una curva causal que empieza y acaba en U , pero sale de U ya que $\alpha(t_k) \notin U$. Por tanto, M no es fuertemente causal en p , lo cual es una contradicción ya que K es fuertemente causal. \square

Proposición 2.14. Sea K un compacto fuertemente causal. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales apuntando hacia el futuro en K tales que $\{\alpha_n(0)\} \rightarrow p$ y $\{\alpha_n(1)\} \rightarrow q \neq p$. Entonces existe una geodésica a trozos² causal λ de p a q y una subsucesión $\{\alpha_m\}$ de $\{\alpha_n\}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} L(\alpha_m) \leq L(\lambda)$.

La proposición anterior será de gran utilidad a la hora de construir geodésicas causales que vayan de p a q , con $p < q$. Lo que quiere decir esta proposición es que si tenemos una sucesión de curvas causales en un compacto se puede encontrar una geodésica a trozos uniendo los puntos p y q que tiene una longitud mayor que las curvas de la sucesión.

Ahora vamos a estudiar la noción de separación temporal entre dos puntos $p \leq q$. Es una manera de trasladar el concepto de distancia en una variedad de Riemann a una variedad de Lorentz.

Definición 2.15. Si $p, q \in M$, se define la **separación temporal** entre p y q como

$$\tau(p, q) := \sup\{L(\alpha) : \alpha \text{ es una curva causal apuntando hacia el futuro uniendo } p \text{ con } q\}.$$

Si $\tau(p, q) = \infty$ es porque el conjunto de las longitudes de todas las curvas causales apuntando hacia el futuro que unen p con q no está acotado. De igual manera decimos que $\tau(p, q) = 0$ si no hay curvas causales apuntando hacia el futuro uniendo p con q , es decir, si $q \notin J^+(p)$. Si M no es cronológico la separación temporal falla. Por ejemplo, en el cilindro de Lorentz $M = \mathbb{S}_1^1 \times \mathbb{R}$, $\tau(p, q) = \infty$ para todos los eventos $p, q \in M$.

Debido a la orientación temporal, τ no es simétrico en general, es decir, $\tau(p, q) \neq \tau(q, p)$ normalmente. Físicamente, la separación temporal entre dos puntos es el tiempo propio que mide un observador que se mueve de p a q de la manera más lenta posible.

²Esto no es más que una curva compuesta por geodésicas salvo en unos ciertos puntos llamados vértices.

Lema 2.16. Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Entonces se cumple que

1. $\tau(p, q) > 0$ si, y solo si, $p \ll q$.
2. Se tiene la desigualdad triangular invertida, es decir, si $p \leq q \leq r$, entonces $\tau(p, r) \geq \tau(p, q) + \tau(q, r)$.

Demostración. Demostremos primero un apartado y luego el otro.

1. Si $\tau(p, q) > 0$ es porque existe una curva causal α apuntando hacia el futuro que une p con q tal que $L(\alpha) > 0$. Entonces, α no puede ser una geodésica nula y la proposición 1.31 afirma que existe una deformación de α a una curva temporal con extremos p y q . Por tanto, $p \ll q$. Recíprocamente, si $p \ll q$ es porque existe una curva temporal α que va de p a q pero entonces $L(\alpha) > 0$ y, por tanto, $\tau(p, q) > 0$.
2. Sea $\epsilon > 0$. Como $p \leq q \leq r$, si suponemos que existen curvas causales uniendo p con q y q con r , entonces podemos encontrar una curva α de p a q y una curva β de q a r , tal que $\tau(p, q) - L(\alpha) \leq \epsilon/2$ y $\tau(q, r) - L(\beta) \leq \epsilon/2$. Entonces, $\tau(p, r) \geq L(\alpha + \beta) \geq L(\alpha) + L(\beta) \geq \tau(p, q) + \tau(q, r) - \epsilon$. Como ϵ es arbitrario, obtenemos el resultado.

Si, por el contrario, no hay curvas causales, entonces $p = q$ y $\tau(p, q) = 0$ y, por tanto, $\tau(p, r) = 0 + \tau(p, r) = \tau(p, q) + \tau(p, r) = \tau(p, q) + \tau(q, r)$ y se da el resultado.

□

Definición 2.17. Sean $A, B \subset M$. Se define la separación temporal de A y B como

$$\tau(A, B) := \sup\{\tau(a, b), a \in A, b \in B\}.$$

Al igual que antes, si el supremo se alcanza, $\tau(A, B)$ medirá, para un observador que vaya de A a B , el tiempo propio del viaje más lento posible entre todos los que hay.

Definición 2.18. Sean $p, q \in M$ dos eventos cualesquiera. Definimos el conjunto

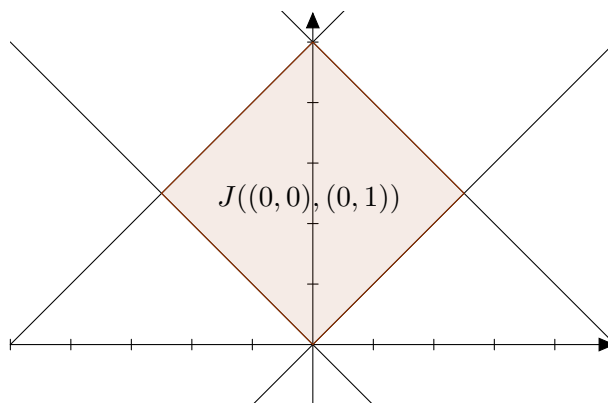
$$J(p, q) := J^+(p) \cap J^-(q).$$

Este conjunto es el formado por los eventos que están a la vez en el futuro causal de p y en el pasado causal de q y es el menor conjunto que contiene a todas las curvas causales uniendo p con q .

Obviamente, la definición de $J(p, q)$ sólo tiene sentido cuando $p \leq q$, ya que en otro caso no existen curvas causales que vayan de p a q y, por consiguiente, $J(p, q) = \emptyset$.

Ejemplo 2.19. En \mathbb{L}^2 , el conjunto $J((0, 0), (0, 1))$ es el conjunto de todos los puntos que están en el cuadrado cuyos vértices opuestos son el $(0, 0), (0, 1)$, tal y como se puede observar en la Figura 2.3.

Ya estamos dispuestos a dar un resultado sobre la existencia de geodésicas causales de mayor longitud que van desde p hasta q .

Figura 2.3: $J((0,0), (0,1))$

Teorema 2.20. Sea $p < q$ en M . Si $J(p, q)$ es compacto y fuertemente causal, entonces existe una geodésica causal λ de p a q tal que $L(\lambda) = \tau(p, q)$.

Demostración. Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de curvas causales apuntando hacia el futuro que unen p con q , tales que $L(\alpha_n) \rightarrow \tau(p, q)$. Por la proposición 2.13, como $J(p, q)$ es compacto y fuertemente causal, estas curvas están contenidas en $J(p, q)$. Entonces, por la proposición 2.14, existe una geodésica a trozos causal λ de p a q tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} L(\alpha_n) \leq L(\lambda)$, es decir, $\tau(p, q) \leq L(\lambda)$. Pero como $\tau(p, q) \geq L(\lambda)$, por definición de τ , se tiene que $L(\lambda) = \tau(p, q)$. Ahora bien, si λ fuera una geodésica a trozos, por la proposición 1.32, existiría una curva temporal uniendo p con q con longitud mayor que $L(\lambda) = \tau(p, q)$ y esto no puede ocurrir. Por lo tanto, λ es geodésica. \square

Este teorema nos lleva a pensar si en una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente, dos eventos $p < q$ se pueden unir mediante una geodésica causal de mayor longitud. Desde luego, si M es fuertemente causal y cada $J(p, q)$ es compacto, sí que se tendría lo que queremos. Por lo tanto tenemos la siguiente definición.

Definición 2.21. Decimos que M es **globalmente hiperbólico** si M es fuertemente causal y $J(p, q)$ es compacto, para cada $p, q \in M$ tales que $p < q$.

Corolario 2.22. Sea M globalmente hiperbólico. Si $p < q$, entonces existe una geodésica causal de longitud máxima uniendo p con q .

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.20 ya que, al ser M globalmente hiperbólico, se cumplen todas las hipótesis. \square

El espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski es globalmente hiperbólico, al igual que las esferas de Lorentz, y los espacio-tiempos de Robertson-Walker con S un espacio tridimensional y completo. Aunque decir que M es globalmente hiperbólico es suponer muchas condiciones, podemos definir el concepto localmente para obtener conclusiones más débiles.

Definición 2.23. Sea $\mathcal{H} \subset M$. Decimos que \mathcal{H} es globalmente hiperbólico siempre que \mathcal{H} sea fuertemente causal y $J(p, q) \subset \mathcal{H}$ sea compacto, para todo $p, q \in \mathcal{H}$ con $p < q$.

Lema 2.24. Si $\mathcal{H} \subset M$ es abierto y globalmente hiperbólico, entonces la relación \leq es cerrada en \mathcal{H} .

Demostración. Hay que probar que si $\{p_n\} \rightarrow p$ y $\{q_n\} \rightarrow q$ son sucesiones tales que $p_n \leq q_n$, entonces $p \leq q$. Si $p_n = q_n$, se tiene que $p = q$ y, por tanto, $p \leq q$. Supongamos entonces que $p_n < q_n$. Sea α_n una curva causal apuntando hacia el futuro que una p_n con q_n . Supongamos que $p_n \in I^+(p^-)$ y $q_n \in I^-(q^+)$, con p^- y q^+ dos eventos de \mathcal{H} que existen ya que \mathcal{H} es abierto. Entonces, α_n está contenida en $J(p^-, q^+)$. Si $p \neq q$ podemos aplicar la proposición 2.14 al compacto $J(p^-, q^+)$ y obtenemos que existe una geodésica a trozos causal uniendo p con q , por tanto, $p < q$. \square

En particular, si M es globalmente hiperbólico, los conjuntos $J^+(p)$ y $J^-(q)$ son cerrados y, por tanto, $J(p, q)$ es cerrado ya que es intersección de cerrados.

Ahora nos vamos a centrar en el estudio de los llamados conjuntos acronales y acausales. Estos subconjuntos serán de gran relevancia en relatividad ya que ningún observador podrá viajar de un punto a otro del mismo subconjunto.

Definición 2.25. Un conjunto $A \subset M$ es **acronal** siempre que para todo $p, q \in A$ no se tenga que $p \ll q$, es decir, siempre que ninguna curva temporal apuntando hacia el futuro corte a A más de una vez o siempre que para cualquier $p, q \in A$, $q \notin I^+(p)$.

Sea $A \subset M$ un conjunto acronal. Se define el **borde de A** como los puntos $p \in \bar{A}$, tales que para cada abierto U de p , existe una curva temporal de $I^-(p, U)$ a $I^+(p, U)$ que no corta a A . Se denota por **borde(A)** al borde de A .

A modo de ejemplo, sea $A = (0, 1) \times \{0\}$ en \mathbb{L}^2 que es acronal puesto que una curva temporal apuntando hacia el futuro que corte a A no puede regresar a A . Se tiene entonces que el borde del segmento serán los dos puntos extremos de ese segmento, es decir $\text{borde}(A) = \{(0, 0), (1, 0)\}$.

Definición 2.26. Sea $S \subset M^n$. Se dice que S es una **hipersuperficie topológica** si para todo $p \in S$, existe un entorno U de p , un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $\Phi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\Phi(U \cap S) = \Phi(U) \cap \Pi$, donde Π es un hiperplano de \mathbb{R}^n .

Una propiedad interesante que relaciona el concepto de hipersuperficie topológica con el concepto de borde de un conjunto acronal es el siguiente lema.

Lema 2.27. Sea A un conjunto acronal. A es una hipersuperficie topológica si, y solo si, A no tiene puntos del borde, es decir, $A \cap \text{borde}(A) = \emptyset$.

Corolario 2.28. Un conjunto acronal A es una hipersuperficie topológica cerrada si, y solo si, $\text{borde}(A) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que A es una hipersuperficie topológica cerrada. Entonces, por el lema 2.27, $A \cap \text{borde}(A) = \emptyset$. Sin embargo, $\text{borde}(A) \subset \bar{A} = A$. Por tanto, $\text{borde}(A) = \emptyset$. Recíprocamente, si $\text{borde}(A) = \emptyset$, entonces $\text{borde}(A) \cap A = \emptyset$, por lo que A es una hipersuperficie topológica. Veamos que es cerrada. Como $\bar{A} - A \subset \text{borde}(A) = \emptyset$, se tiene $\bar{A} = A$, de donde se obtiene el resultado. \square

Pasemos ahora a otro concepto importante en la teoría de causalidad: las llamadas

hipersuperficies de Cauchy.

Definición 2.29. Una **hipersuperficie de Cauchy** en M es un subconjunto $S \subset M$ en el que toda curva temporal inextendible hacia el pasado corta a S una única vez. En particular, toda hipersuperficie de Cauchy es un conjunto acronal. Por otra parte, no todas las variedades de Lorentz n -dimensionales, conexas y orientadas temporalmente tienen obligatoriamente una hipersuperficie de Cauchy.

Ejemplos de hipersuperficies de Cauchy son los hiperplanos con t constante en el espacio-tiempo de Minkowsky, ya que cualquier curva temporal inextendible al pasado corta a ese hiperplano una sólo vez.

Lema 2.30. Una hipersuperficie de Cauchy S es una hipersuperficie topológica cerrada y acronal. Además, cada curva causal inextendible corta a S .

La siguiente proposición será de gran utilidad a la hora de demostrar el teorema de Penrose. Es más, la prueba del teorema se fundamentará en el uso de la aplicación ρ construida mediante curvas integrales.

Proposición 2.31. Sean S una hipersuperficie de Cauchy, X un campo de vectores temporales en M y $p \in M$. Entonces una curva integral³ inextendible que comience en p corta a S en un único punto $\rho(p)$. La aplicación $\rho : M \rightarrow S$ es una retracción continua, abierta y suprayectiva. En particular, S es conexas.

Teorema 2.32. Dos hipersuperficies de Cauchy en M son homeomorfas.

Demostración. Sean S y T dos hipersuperficies de Cauchy en M y sea X un campo de vectores temporal. Entonces, por la proposición anterior, tenemos que ρ_S es la retracción de M a S y ρ_T , la retracción de M a T . Vamos a probar que $\rho_S|_T$ y $\rho_T|_S$ son inversas mutuas y, por tanto, homeomorfismos. Sea $s \in S$. Entonces $\rho_T|_S(s) = t \in T$ es el único punto de T cortado por una curva integral inextendible que empieza en $s \in S$. Invirtiendo la orientación obtenemos una curva integral que empieza en $t \in T$ y acaba en $s \in S$. Ahora bien, $\rho_S|_T(t) = s$ ya que de lo contrario podríamos encontrar una curva integral inextendible que empieza en t y acaba en $s' \neq s \in S$ pero, por la proposición anterior, una curva que empieza en $t \in T$ sólo corta a S en un único punto. Por lo tanto, hemos probado que son inversas y continuas. En definitiva, son homeomorfismos y se tiene que $S \approx T$.

□

2.3. Desarrollos de Cauchy

Definición 2.33. Sea A un conjunto acronal. Se define el **desarrollo de Cauchy futuro** de A como

$$D^+(A) := \{p \in M : \text{toda curva causal inextendible al pasado que parte de } p \text{ corta a } A\}.$$

En particular, se tiene que $A \subset D^+(A) \subset J^+(A)$. Este subconjunto representa todos los puntos del futuro causal de A que son predecibles desde A , es decir, ninguna curva

³Una curva integral de un campo de vectores es una curva que cumple que $\alpha'(t) = X_{\alpha(t)}$

temporal o nula inextendible hacia el pasado puede alcanzar un evento $q \in D^+(A)$ sin pasar antes por A . De igual manera se define el **desarrollo de Cauchy** pasado de A como

$$D^-(A) := \{p \in M : \text{toda curva causal inextendible al futuro que parte de } p \text{ corta a } A\}$$

Se define el **desarrollo de Cauchy** de A como

$$D(A) = D^+(A) \cup D^-(A)$$

Corolario 2.34. Sea A un conjunto acronal. $D(A) = M$ si, y solo si, A es una hipersuperficie de Cauchy.

Demostración. Usando el lema 2.30., A es una hipersuperficie de Cauchy si, y solo si, cada curva causal inextendible corta a A , lo cual equivale a que cada curva causal inextendible hacia el pasado o el futuro corta a A , que a su vez equivale a que $D(A) = M$. \square

Nota 2.35. Una curva causal apuntando hacia el pasado que empieza en $D^+(A)$ no puede abandonar $D^+(A)$ sin pasar antes por A . A este fenómeno lo denominamos **regresión** y la prueba es sencilla: si $\alpha(s) \notin D^+(A)$ es porque existe una curva causal β inextendible hacia el pasado que empieza en $\alpha(s)$ y no corta a A pero, entonces, la curva $\alpha|_{[0,s]} + \beta$ es una curva causal inextendible hacia el pasado que empieza en $D^+(A)$, por lo que debe cortar a A . Como β no lo corta, entonces α corta a A .

Teorema 2.36. Si A es un conjunto acronal e $\text{int}(D(A)) \neq \emptyset$, entonces $\text{int}(D(A))$ es globalmente hiperbólico.

Corolario 2.37. Si M tiene una hipersuperficie de Cauchy entonces es globalmente hiperbólico.

Demostración. Si S es una hipersuperficie de Cauchy, entonces $D(S) = M$ y, por el teorema 2.37., $\text{int}(D(S)) = M$ es globalmente hiperbólico. \square

A la vista de este corolario se puede afirmar que en cualquier variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente que contenga una hipersuperficie de Cauchy, si tenemos dos eventos $p < q$, existe una geodésica causal de longitud máxima uniendo esos puntos. Esto es así porque, al tener una hipersuperficie de Cauchy, M es globalmente hiperbólico y, por el corolario 2.22., dos eventos cualesquiera con $p < q$ se podrán unir con una geodésica causal de longitud máxima.

Este hecho hace que algunos autores definan el concepto de variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente globalmente hiperbólica como una que contiene una hipersuperficie de Cauchy.

Lema 2.38. Sea A un conjunto acronal. Si $p \in \text{int}(D(A)) - I^-(A)$, entonces $J^-(p) \cap D^+(A)$ es compacto.

Definición 2.39. Sea $A \subset M$. Decimos que A es **acausal** siempre que para cualquier par de puntos $p, q \in A$ no se tenga que $p < q$, es decir, siempre que no exista ninguna curva causal apuntando hacia el futuro uniendo dos puntos de A o, lo que es lo mismo, que ninguna curva causal apuntando hacia el futuro corte a A más de una vez.

Se tiene que si A es acausal entonces es acronal. Sin embargo, el recíproco no se cumple

en general. Un contraejemplo sencillo es que, en \mathbb{L}^2 , el conjunto formado por un rayo luminoso es acronal pero no es acausal.

Lema 2.40. Una hipersuperficie espacial y acronal es acausal.

Demostración. Sea S una hipersuperficie espacial y acronal. Supongamos que existe una curva α causal apuntando hacia el futuro con extremos en S . Si α no es una geodésica nula admite una deformación a una curva temporal con puntos finales $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ en S . Pero S es acronal, por lo que no puede existir dicha curva. Consideremos que α una geodésica nula. Entonces $\alpha'(0)$ no puede ser normal a S debido a que $\alpha'(0)$ es un vector nulo y, para ser normal a S , el vector debe ser temporal, ya que S una hipersuperficie espacial. Por tanto⁴, existe una curva temporal muy próxima a α con extremos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ en S , por lo que S no sería acronal. Esto es una contradicción con el hecho de que S sea acausal. \square

Lema 2.41. Si S es una hipersuperficie topológica acausal en M , entonces $D(S)$ es abierto y globalmente hiperbólico.

Veamos ahora el teorema de la existencia de geodésicas que maximizan la distancia entre S y su desarrollo de Cauchy futuro. De nuevo tenemos que este resultado será de gran utilidad cuando demostremos el teorema de singularidad de Hawking.

Teorema 2.42. Sea S una hipersuperficie espacial cerrada y acronal. Si $q \in D^+(S)$, existe una geodésica λ de S a q de longitud $\tau(S, q)$. Entonces, λ es temporal, normal a S y no tiene puntos focales de S antes de q (siempre que $q \notin S$).

Demostración. Como S es una hipersuperficie espacial, cerrada y acronal, el lema 2.40. nos dice que S es una hipersuperficie espacial, cerrada y acausal. Aplicando el lema anterior obtenemos que $D(S)$ es un conjunto abierto globalmente hiperbólico.

Como $q \in D^+(S)$, $q \in D(S)$ y, al ser abierto, se tiene que $q \in \text{int}(D(S)) - I^-(S)$, por lo que podemos usar el lema 2.39. y obtener así que $J^-(q) \cap D^+(S)$ es compacto. Si lo intersecamos con S tenemos que $K = J^-(q) \cap D^+(S) \cap S = J^-(q) \cap S$ es compacto. Entonces se tiene que la función $\tau : K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\tau(p) = \tau(p, q)$ es una función continua que alcanza el máximo en un $p \in K$. Por tanto, $\tau(p, q) = \tau(S, q)$ ya que, si $\tau(S, q) = \tau(r, q) \geq \tau(p, q)$, se tendría que $r \in J^-(q) \cap S$ y, por el argumento anterior, se obtendría la igualdad.

El teorema 2.20. nos afirma entonces que existe una geodésica λ causal uniendo p con q de longitud $\tau(p, q) = \tau(S, q)$. Si suponemos $q \notin S$, se tiene $p \ll q$ y $\tau(p, q) > 0$, por lo que λ es temporal y normal a S ⁵. Finalmente, la proposición 1.39. nos asegura que no hay puntos focales de S antes de q .

\square

2.4. Horizontes de Cauchy

Veamos ahora unos subconjuntos notables que aparecen en la teoría de causalidad. Son los llamados horizontes de Cauchy, unos subconjuntos de M que marcarán regiones con unas propiedades bastante interesantes.

⁴En este paso se usa el lema 50 de [1], pág. 298

⁵Este argumento se puede encontrar en el corolario 26 de [1], pág. 280

Definición 2.43. Sea A un conjunto acronal. Se define el **horizonte de Cauchy futuro** como

$$H^+(A) := \overline{D^+(A)} - I^-(D^+(A)) = \{p \in \overline{D^+(A)} : I^+(p) \text{ no corta a } D^+(A)\}.$$

En términos físicos, el horizonte de Cauchy futuro es el límite de la región controlada por A . Dualmente se define el horizonte de Cauchy pasado como

$$H^-(A) := \overline{D^-(A)} - I^+(D^-(A)) = \{p \in \overline{D^-(A)} : I^-(p) \text{ no corta a } D^-(A)\}.$$

Llamamos horizonte de Cauchy de A a

$$H(A) = H^+(A) \cup H^-(A).$$

Ejemplo 2.44. Consideremos en \mathbb{L}^2 un segmento horizontal A . Se tiene que $H^+(A)$ son las dos rectas rosas que se ven en la figura 2.4. y $H^-(A)$ son las dos rectas verdes.

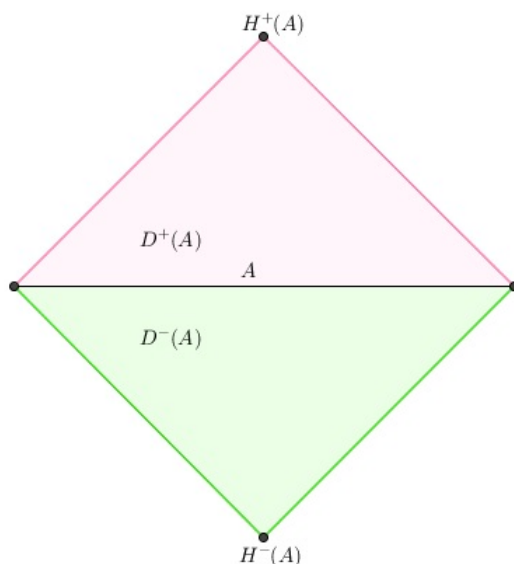


Figura 2.4: Horizontes de Cauchy en \mathbb{L}^2

A partir de la definición, obtenemos que $H^+(A)$ es cerrado por ser diferencia de un cerrado y un abierto. Además, veamos que es acronal.

Proposición 2.45. Sea A acronal. Entonces, $H^+(A)$ es acronal.

Demostración. Hay que probar que $I^+(H^+(A)) \cap H^+(A) = \emptyset$. $I^+(H^+(A)) \cap D^+(A) = \emptyset$ ya que, si no fuera así, existiría un $p \in I^+(H^+(A))$ y $p \in D^+(A)$. Si $p \in I^+(H^+(A))$, existiría una curva α temporal apuntando hacia el futuro que empezaría en $q \in H^+(A)$ y llegaría a p . Si, además, $p \in D^+(A)$, la curva empezaría en $q \in H^+(A)$ y llegaría a $D^+(A)$. Por tanto, $I^+(q)$ cortaría a $D^+(A)$ y esto implicaría que $q \notin H^+(A)$, lo cual es una contradicción. $I^+(H^+(A)) \cap D^+(A) = \emptyset$ y, por tanto, $I^+(H^+(A)) \cap \overline{D^+(A)} = \emptyset$ por lo que $I^+(H^+(A)) \cap H^+(A) = \emptyset$ y se obtiene el resultado. \square

Lema 2.46. Sea A un conjunto cerrado y acronal. Entonces $\overline{D^+(A)}$ es el conjunto de todos los puntos p tales que cada curva temporal inextendible al pasado que empieza en p corta a A .

Lema 2.47. Si A es un conjunto cerrado y acronal, entonces $\partial D^+(A) = A \cup H^+(A)$.

Demostración. Sea $p \in A$. Entonces, como A es acronal y cerrado, $p \in \partial D^+(A)$. Por otro lado, sea $p \in H^+(A)$. Entonces $p \in \overline{D^+(A)}$ y p no puede estar en $\text{int}(D^+(A))$, ya que tendríamos $p \notin H^+(A)$. Por tanto, se tiene la inclusión $A \cup H^+(A) \subset \partial D^+(A)$.

Probemos la otra inclusión. Supongamos que $p \in \partial D^+(A) - A - H^+(A)$. Entonces, $p \in \overline{D^+(A)} - A$ y, por el lema anterior, $p \in I^+(A)$. También se tiene que $p \in \overline{D^+(A)} - H^+(A)$, por lo que existe un $q \in I^+(p) \cap D^+(A)$. Entonces $I^+(A) \cap I^-(q)$ es un entorno de p que, por regresión, está contenido en $D^+(A)$ y, por tanto, $p \notin \partial D^+(A)$. \square

De nuevo, esta proposición será fundamental en la demostración del teorema de Hawking, como veremos en el siguiente capítulo.

Proposición 2.48. Sea S una hipersuperficie topológica cerrada y acausal. Entonces:

1. $H^+(S) = I^+(S) \cap \partial D^+(S) = \overline{D^+(S)} - D^+(S)$. En particular, $H^+(S)$ y S son disjuntos.
2. $H^+(S)$ es una hipersuperficie topológica, cerrada y acronal, siempre que no sea el vacío.
3. Sea $p \in H^+(S)$. Entonces existe una geodésica nula inextendible hacia el pasado que empieza en p , no tiene puntos conjugados y está contenida en $H^+(S)$.

Lema 2.49. S es una hipersuperficie de Cauchy si, y solo si, $H(S) = \emptyset$.

Demostración. Tenemos que

$$\partial(D(S)) = \partial(D^+(S) \cup D^-(S)) \subset \partial D^+(S) \cup \partial D^-(S) = S \cup H(S),$$

por el lema 2.47. Al ser S una hipersuperficie de Cauchy, es una hipersuperficie topológica y, por el lema 2.41., $D(S)$ es abierto y contiene a S . Por tanto, $\partial(D(S))$ no contiene a puntos de S y esto implica que $\partial(D(S)) \subset H(S)$. Por otro lado, siempre se tiene que $H(S) \subset \partial D(S)$. Tenemos pues que $H(S) = \partial D(S)$. Ahora bien, $H(S) = \emptyset$ si, y solo si, $\partial D(S) = \emptyset$, lo cual implica $D(S) = M$, que a su vez implica que S es una hipersuperficie de Cauchy, por el corolario 2.34. \square

Corolario 2.50. Sea S una hipersuperficie topológica cerrada y acausal. Si cada geodésica nula inextendible corta a S , entonces S es una hipersuperficie de Cauchy.

Demostración. Vamos a demostrar que $H(S) = \emptyset$. Supongamos que existe $p \in H^+(S)$. Entonces, por la proposición 2.48., existe una geodésica λ nula inextendible hacia el pasado que está contenida en $H^+(S)$ y, por tanto, no corta a S . Como $p \in H^+(S)$ se tiene que $p \in I^+(S)$. Si la extensión de λ en algún momento cortara a S , entonces S no sería acronal. Esto es una contradicción, ya que estamos suponiendo que cada geodésica nula inextendible corta a S . Por tanto, $H(S) = \emptyset$ y S es una hipersuperficie de Cauchy. \square

Capítulo 3

Teoremas de singularidad

Llegados a este punto, ya estamos preparados para comprender el enunciado y la demostración de los teoremas de singularidad. En primer lugar explicaremos los teoremas de Hawking en sus dos versiones: la fuerte y la débil. Lo que vamos a demostrar es que, bajo ciertas hipótesis, nuestro universo contiene singularidades, es decir, existirán geodésicas causales inextendibles e incompletas.

3.1. Teoremas de Stephen Hawking

Teorema 3.1 (Stephen Hawking. Fuerte. Versión futuro). Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Supongamos que $Ric(v, v) \geq 0$, para cualquier vector temporal v tangente a M . Sea S una hipersuperficie de Cauchy espacial con convergencia futura $k \geq b > 0$. Entonces cada curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en S tiene una longitud a lo sumo de $1/b$.

Demostración. Como S es una hipersuperficie de Cauchy, S es una hipersuperficie topológica cerrada y acronal. Aplicando el teorema 2.42 con $q \in D^+(S) - S$, existe λ geodésica temporal y normal a S que empieza en S , acaba en q , cumple que $L(\lambda) = \tau(S, q)$ y, además, no hay puntos focales de S a través de λ antes de q . Si $L(\lambda) > 1/b$, entonces podríamos aplicar la proposición 1.39 y existiría un punto focal $\lambda(r)$ de S , con $r \in (0, 1/k(\lambda'(0))]$, pero esto no puede ocurrir. Por tanto,

$$D^+(S) \subset \{q \in M : \tau(S, q) \leq 1/b\}.$$

Como S es una hipersuperficie de Cauchy, $H^+(S) = \emptyset$. Ahora bien, una curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en S y deja $D^+(S)$ debe cortar a $\partial D^+(S)$ pero, por la proposición 2.48, se tendría que $H^+(S) \neq \emptyset$. Por lo tanto, ninguna curva temporal que empieza en S puede dejar $D^+(S)$. En términos de subconjuntos, se tiene que

$$I^+(S) \subset D^+(S) \subset \{q \in M : \tau(S, q) \leq 1/b\},$$

es decir, cualquier curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en S tiene a lo sumo longitud $1/b$.

□

La siguiente versión se demuestra cambiando la orientación temporal y es la que produce el famoso resultado de la existencia de un Big Bang en el universo.

Teorema 3.2 (Stephen Hawking. Fuerte. Versión pasado). Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Supongamos que $Ric(v, v) \geq 0$, para cualquier vector temporal v tangente a M . Sea S una hipersuperficie de Cauchy espacial con convergencia pasada $k \leq b < 0$. Entonces cada curva temporal apuntando hacia el pasado que empieza en S tiene una longitud a lo sumo de $1/b$.

A continuación vamos a demostrar una versión más débil del teorema. Las hipótesis que se utilizan en esta versión son menos fuertes que las del anterior, pero nos servirán para probar que M será temporalmente incompleto hacia el futuro, es decir, existirá una geodésica temporal incompleta apuntando hacia el futuro.

Teorema 3.3 (Stephen Hawking. Débil). Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente. Supongamos que $Ric(v, v) \geq 0$, para todo vector temporal v tangente a M . Sea S una hipersuperficie espacial compacta con convergencia futura $k > 0$. Entonces M es temporalmente incompleta hacia el futuro.

Demostración. La parte fundamental de la prueba será encontrar una geodésica temporal inextendible apuntando al futuro que sea normal a S y tenga una longitud menor o igual que $1/b$, donde $b := \min\{k(z) : z \in NS\} > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que S es acronal. Como en la prueba del teorema de Hawking, versión fuerte, se tiene que $D^+(S) \subset \{q \in M : \tau(S, q) \leq 1/b\}$. Si $H^+(S) = \emptyset$, estamos en las condiciones del teorema anterior y, por tanto, se tendría el resultado. Supongamos pues que $H^+(S) \neq \emptyset$ y, por reducción al absurdo, que no hay ninguna geodésica temporal inextendible apuntando hacia el futuro con una longitud menor o igual que $1/b$. A esta suposición la vamos a denotar por (a) para usarla más adelante.

Para probar esto vamos a necesitar demostrar primero que si $q \in H^+(S)$, entonces existe una geodésica normal que empieza en S y llega a q cuya longitud es $\tau(S, q) \leq 1/b$. La demostración es la siguiente.

Sea

$$B := \{z \in NS, z \text{ es nulo o } z \text{ es temporal con } |z| \leq 1/b\}.$$

Como S es compacto, B es compacto. Como $q \in H^+(S) \subset \overline{D^+(S)}$, existe una sucesión $\{q_n\} \subset D^+(S)$ tal que $q_n \rightarrow q$. Aplicando el teorema 2.42 obtenemos que para cada q_n existe λ_n geodésica con las propiedades requeridas. Por tanto, existe un $v_n \in B$ tal que $\exp(v_n) = q_n$. Como B es compacto, $v_n \rightarrow v \in B$ y, por continuidad, $q_n \rightarrow \exp(v)$, es decir, $q = \exp(v)$. Ahora bien, $|v_n| \rightarrow |v| \leq 1/b$ y, como $|v_n| = \tau(S, q_n)$ y la función τ es semicontinua por la izquierda, $|v| \geq \tau(S, q)$. Como hemos supuesto (a), la geodésica λ está definida en $[0, 1]$. Por tanto, tiene longitud $|v|$, pero por definición de τ debe cumplirse que $\tau(S, q) = |v| \leq 1/b$.

También necesitamos demostrar que la función $p \rightarrow \tau(S, p)$ es estrictamente decreciente en geodésicas nulas apuntando hacia el pasado, contenidas en $H^+(S)$ y extendidas al futuro al máximo (estas curvas se llaman generadores de $H^+(S)$). De nuevo, la prueba de esto es la siguiente.

Supongamos que α es generador y sea $s < t$ en el dominio de α . Por el lema anterior,

existe una geodésica λ temporal apuntando al pasado que empieza en S y llega a $\alpha(t)$ de longitud $L(\lambda) = \tau(S, \alpha(t))$. Tomamos ahora la curva $\alpha|_{[s,t]} + \lambda$. Entonces, $\tau(S, \alpha(s)) > L(\alpha|_{[s,t]} + \lambda) = L(\lambda) = \tau(S, \alpha(t))$ y se tiene el resultado.

Retomamos entonces la prueba del teorema y tenemos que si hemos supuesto (a), entonces la aplicación exponencial está definida en todo B . Por otra parte, $H^+(S)$ es cerrado y está contenido en $\exp(B)$, que es compacto. Por tanto, $H^+(S)$ es compacto. Como $p \rightarrow \tau(S, p)$ es una aplicación semicontinua por la izquierda, su restricción a $H^+(S)$ alcanza un mínimo en un punto p . Esto es una contradicción pues, por el lema anterior, la función $p \rightarrow \tau(S, p)$ es estrictamente decreciente y no puede alcanzar un mínimo. \square

3.2. Teoremas de Ronger Penrose

En 1965 Penrose consiguió relacionar lo que pasaba cuando una estrella colapsaba a un agujero negro con las llamadas superficies atrapadas. Físicamente, estas superficies son las regiones del espacio-tiempo a través de las cuales caerá a la singularidad, sin ninguna opción de escapatoria, una partícula que se encuentre en un lado de la superficie.

Definición 3.4. Una subvariedad espacial es **convergente hacia el futuro** siempre que su campo vectorial curvatura media sea temporal apuntando hacia el pasado. En el caso particular en el que la dimensión de la subvariedad sea 2 se dirá que es una **superficie atrapada**.

Definición 3.5. Sea A un subconjunto de M . Definimos $E^+(A) = J^+(A) - I^+(A)$. Un subconjunto cerrado y acronal se dice que está **atrapado hacia el futuro** siempre que $E^+(A)$ sea compacto.

A la vista de esta definición, no es difícil probar que $E^+(A)$ es acronal ya que si $p, q \in E^+(A)$ cumplen que $p \ll q$ entonces $q \in I^+(A)$ y, por tanto, $q \notin E^+(A)$. Por otro lado, $A \subset E^+(A)$ si, y solo si, A es acronal.

El paso principal de la prueba del teorema de Penrose es demostrar que, bajo ciertas hipótesis razonables, una superficie atrapada (concepto de geometría diferencial) es un conjunto atrapado hacia el futuro. Para ello necesitamos un último lema.

Lema 3.6. Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente cumpliendo

- $Ric(v, v) \geq 0$, para todos los vectores luz v tangentes a M y
- M es luminosamente completa hacia el futuro.

Si P es una subvariedad $(n - 2)$ -dimensional compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro, entonces P está atrapada hacia el futuro.

Ahora ya sí que estamos totalmente dispuestos para demostrar el famoso teorema de Roger Penrose.

Teorema 3.7 (Roger Penrose). Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente cumpliendo

1. $Ric(v, v) \geq 0$, para todos los vectores luz v tangente a M ,
2. M tiene una hipersuperficie de Cauchy S ,
3. M admite una subvariedad $(n - 2)$ -dimensional P compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro y
4. M es luminosamente completa hacia el futuro.

Entonces $E^+(P)$ es una hipersuperficie de Cauchy en M .

Demostración. Como M tiene una hipersuperficie de Cauchy, por el corolario 2.37, M es globalmente hiperbólico y, por el lema 2.24, $J^+(p)$ y $J^-(p)$ son conjuntos cerrados para cualquier $p \in M$. Como P es compacto, $J^+(P)$ es un conjunto cerrado. Por la proposición 2.8, $\text{int}(J^+(P)) = I^+(P)$ y, por tanto, $E^+(P) = J^+(P) - I^+(P) = \partial J^+(P)$. Como es una frontera, $E^+(P)$ es una subvariedad topológica y, por el lema anterior, es compacto.

Sea $\rho : E^+(P) \rightarrow S$ la restricción de $E^+(P)$ a la retracción de la proposición 2.31. Entonces, ρ es continua y como $E^+(P)$ es acronal, la unicidad de las curvas integrales implica que ρ es inyectiva. Como $E^+(P)$ es compacto, $\rho(E^+(P))$ es compacto y, por tanto, cerrado en S . La proposición 2.31 también dice que ρ es abierta, por lo cual $\rho(E^+(P))$ es abierto. Pero S es conexo, así que los únicos abiertos y cerrados a la vez son el total y el vacío. Es por eso que $\rho(E^+(P)) = S$ y, como ρ es un homeomorfismo de $E^+(P)$ en algún subconjunto de S , se tiene que ρ es homeomorfismo. Al ser S una hipersuperficie de Cauchy y $E^+(P)$ homeomorfo a S , $E^+(P)$ es una hipersuperficie de Cauchy. \square

Aunque a simple vista no se pueden apreciar conclusiones inmediatas del teorema 3.7, los siguientes corolarios nos las mostrarán ya que serán aplicados a espacio-tiempos para demostrar la existencia de agujeros negros.

Corolario 3.8. Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente cumpliendo

1. $Ric(v, v) \geq 0$, para todos los vectores luz v tangentes a M ,
2. M tiene una hipersuperficie de Cauchy S no compacta y
3. M admite una subvariedad $(n - 2)$ -dimensional P compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro.

Entonces M es luminosamente incompleta hacia el futuro.

Demostración. Supongamos que M no es luminosamente incompleta hacia el futuro. Entonces, podemos usar el teorema anterior y obtener así que $E^+(P)$ es una hipersuperficie de Cauchy en M . Por el teorema 2.32, las hipersuperficies de Cauchy son homeomorfas y, como S es una hipersuperficie de Cauchy, no es compacta, por lo que $E^+(P)$ no es compacto. Sin embargo, se dan todas las hipótesis del lema 3.6 y, por tanto, P está atrapada hacia el futuro y $E^+(P)$ es compacto. Así llegamos a una contradicción. \square

Corolario 3.9. Sea M una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente cumpliendo

1. $Ric(v, v) \geq 0$ para todos los vectores luz v tangentes a M ,
2. M tiene una hipersuperficie de Cauchy S ,
3. M admite una subvariedad $(n - 2)$ -dimensional P compacta, espacial y acronal que es convergente hacia el futuro y
4. Existe una curva causal inextensible que no corta a $E^+(P)$.

Entonces M es luminosamente incompleta hacia el futuro.

Demostración. Supongamos que M no es luminosamente incompleta al futuro. Entonces, $E^+(P)$ es una hipersuperficie de Cauchy en M . Pero por el lema 2.30, cada curva causal inextensible corta a $E^+(P)$, y esto es una contradicción. \square

3.3. Consecuencias físicas a los teoremas

Una vez vistos los teoremas matemáticos, que son nociones totalmente abstractas y que pueden o no tener relación con nuestro universo, vamos a unir la física con las matemáticas para ver los resultados aplicables que desprenden estos teoremas.

Teoremas de Hawking

En el teorema de Hawking, M representa una variedad de Lorentz n -dimensional, conexa y orientada temporalmente, sin embargo, para poder aplicarlo a nuestro universo necesitamos que la variedad sea de dimensión 4, es decir, que M sea un espacio-tiempo.

Según [1], el universo puede ser modelado como un espacio-tiempo que tiene un flujo cuyas partículas son las galaxias. El tensor tensión-energía se podría obtener mediante la masa de estas galaxias. Sin embargo, el hecho más decisivo para modelar el universo de esta manera es que no se tienen evidencias de asimetrías importantes en las distribuciones de las galaxias por lo que, si observáramos el universo desde "fuera", veríamos lo mismo en todas las direcciones.

Por tanto, vamos a suponer que M es un espacio-tiempo de Robertson-Walker. Recordemos que los espacio-tiempos de Robertson-Walker son variedades producto torcido definidas por $M = (a, b) \times_f S$, donde S es un espacio tiempo tridimensional de curvatura constante. La métrica de esta variedad está definida por $ds^2 = -dt^2 + f(t)^2 d\sigma$, donde $d\sigma$ es la métrica de S .

Consideremos $t_0 \in (a, b)$ fijo. Entonces se tiene que $S_0 := \{t_0\} \times S$ es una hipersuperficie de Cauchy. Esta hipersuperficie se denomina comúnmente espacio presente en t_0 , por lo que la componente temporal de cualquier curva temporal inextensible al pasado pasa por

t_0 exactamente una sólo vez y, por consiguiente, efectivamente, es una hipersuperficie de Cauchy.

Veamos qué se necesita para que se cumplan las hipótesis del teorema de Hawking versión pasado. Lo primero que se debe tener es que $Ric(v, v) \geq 0$, para todo vector temporal v tangente a M . Físicamente esta condición representa que la gravedad en media es una fuerza atractora, sin embargo, matemáticamente, esto es equivalente a que $\rho + 3\mu \geq 0$, donde ρ es la función de densidad de energía y μ la función de presión vistas en la definición 1.40. Basándonos en evidencias científicas, la densidad de energía de nuestro universo es muchísimo mayor que la presión, aunque ambas cantidades son positivas, por lo que se cumple que $\rho + 3\mu > 0$ y podemos dar como válida esta hipótesis.

Por otro lado, necesitamos para aplicar el teorema que la convergencia pasada sea $k \leq b < 0$. Sin embargo, la convergencia pasada de S_0 es la constante $H_0 = -\frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$, por lo que si suponemos que $f'(t_0) > 0$, ya tendremos todas las condiciones requeridas. Ahora bien, suponer $f'(t_0) > 0$ es lo mismo que suponer que el universo está en expansión, y por la Ley de Hubble sabemos que esto cierto ya que las galaxias se separan a una velocidad proporcional a la distancia que las separan. Así, la convergencia pasada cumple $k = H_0 < 0$ y, de nuevo, podemos decir que esta hipótesis es válida.

Aplicamos pues el teorema 3.2 y obtenemos que cualquier curva temporal apuntando hacia el pasado que empieza en S tiene una longitud de a lo sumo $1/b$. Recordemos que las curvas temporales modelan partículas materiales. Así pues, esa partícula material no ha estado existiendo indefinidamente, por lo que cuando decimos que todas las curvas temporales apuntando hacia el pasado tienen una longitud finita estamos afirmando que el universo tuvo un principio en el tiempo, luego hubo un Big-Bang.



Figura 3.1: Representación de un Big Bang

Teoremas de Penrose

El objetivo ahora es probar que las hipótesis del corolario 3.8 son aplicables a nuestro universo para poder demostrar la existencia de singularidades.

Los mismos comentarios realizados en la subsección anterior son aplicables ahora y, por tanto, vamos a suponer que M es un espacio-tiempo de Robertson-Walker y se puede suponer que $Ric(v, v) \geq 0$, para todo vector nulo v tangente a M . Por lo tanto, la hipótesis 1. es válida.

En cuanto a la hipótesis 2., según [3], el que la hipersuperficie de Cauchy sea compacta no es un impedimento grande ya que bajo ciertas restricciones más débiles, el teorema seguiría siendo válido aún sin la condición de compacidad. Sin embargo, la debilidad del teorema es que hay que asegurar que S es una hipersuperficie de Cauchy. De nuevo, Hawking y Penrose probaron en 1970 que esta condición se podía quitar para probar que M es luminosamente incompleta, tal y como se puede ver en [4].

Veamos ahora la hipótesis 3. Necesitamos encontrar una subvariedad de dimensión 2 que sea convergente hacia el futuro, es decir, una superficie atrapada. Según [3], esta condición indica que el campo gravitatorio de la región por la que pasa la superficie atrapada es enorme, por lo tanto, dar como válida esta hipótesis es encontrar regiones del espacio-tiempo con esas características (Agujeros negros).

Hay evidencias físicas de la existencia de agujeros negros. Por ejemplo, en 1964 se detectó una binaria de rayos X, sistema compuesto por un objeto compacto (que puede ser un agujero negro o una estrella de neutrones) y por una estrella compañera. Tras realizar los estudios necesarios, se llegó a la conclusión de que el objeto compacto era un agujero negro, bautizado con el nombre de Cygnus X-1.

Aplicamos ahora el corolario 3.8 y obtenemos que M es luminosamente incompleta hacia el futuro, es decir, existe una geodésica nula inextendible e incompleta. Según la definición 1.37, tenemos entonces que M tiene una singularidad futura y físicamente representa la existencia de un agujero negro. Es decir, el universo contiene regiones las cuales no puede escapar ni la luz ni ninguna partícula material.

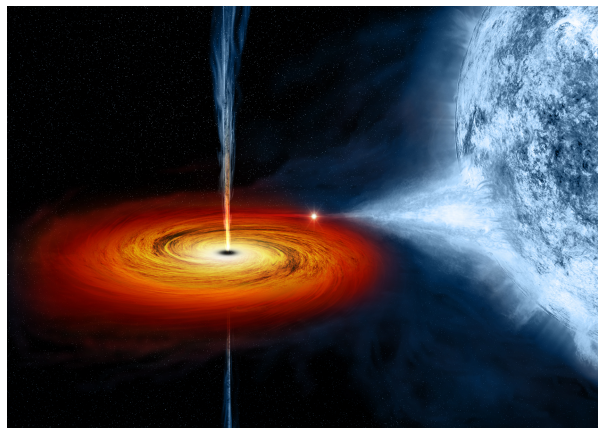


Figura 3.2: Representación de un agujero negro

Bibliografía

- [1] O'NEILL, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego (California), 1983.
- [2] SCHUTZ, B., *A first course in General Relativity*, Cambridge University Press, New York, 2009.
- [3] HAWKING, S. y ELLIS, G., *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, New York, 1973.
- [4] HAWKING, S. y PENROSE, R. *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. Lon. A. **314** (1970), 529-548.

Índice alfabético

- Acausal, 36
- Aceleración, 17
- Acronal, 34
- Atlas diferenciable, 13
- Atrapado hacia el futuro, 43

- Caída libre, 25
- Campo de vectores, 14
- Complejidad espacial, 22
- Complejidad luminosa, 22
- Complejidad temporal, 22
- Conexión afín, 16
- Conexión de Levi-Civita, 16
- Cono causal, 19
- Cono de luz, 19
- Cono temporal, 19
- Contracción, 15
- Convergencia, 19
- Convergente hacia el futuro, 43
- Cronológico, 29
- Curva, 17
- Curvatura de Riemann, 17
- Curvatura media, 19

- Derivada covariante, 17
- Desarrollo de Cauchy, 35
- Diferencial, 14

- Embebimiento, 18
- Espacio cotangente, 14
- Espacio de Lorentz-Minkowski, 20
- Espacio normal, 18
- Espacio tangente, 13
- Espacio-tiempo, 23
- Estructura diferenciable, 13
- Evento, 23
- Extendible, curva, 22

- Fibrado cotangente, 14
- Fibrado normal, 18
- Fibrado tangente, 14
- Fluido perfecto, 26

- Fuertemente causal, 30
- Futuro causal, 28
- Futuro cronológico, 28

- Geodésica, 17
- Geodésica completa, 22
- Globalmente hiperbólico, 33

- Hipersuperficie de Cauchy, 35
- Hipersuperficie, 18
- Hipersuperficie topológica, 34
- Horizonte de Cauchy, 38

- Inextendible, curva, 22
- Inmersión, 18

- Luminosamente incompleto hacia el futuro, 22

- Observador, 25
- Orientación temporal, 20

- Partícula luminosa, 25
- Partícula material, 25
- Punto focal, 23

- Símbolos de Christoffel, 16
- Separación temporal, 31
- Singularidad futura, 22
- Sistema de coordenadas, 12
- Superficie atrapada, 43

- Tensión-energía, tensor, 26
- Tensor, 15
- Tensor curvatura de Ricci, 17
- Tiempo propio, 25

- Uno-forma, 14

- Variedad completa, 22
- Variedad de Lorentz, 15
- Variedad de Riemann, 15
- Variedad diferenciable, 13
- Variedad pseudo-riemanniana, 15

Vector tangente, 13

Vectores coordenados, 13