

La curvatura y su papel en la Geometría

Trabajo Fin de Grado

Víctor Cano Martínez



Departamento de Matemáticas

Universidad de Murcia

Tutora: María de los Ángeles Hernández Cifre

2 de octubre de 2014

Índice general

1. Introducción a la curvatura	1
1.1. Inicio de la curvatura	1
1.2. Curvas en el plano y en el espacio	3
1.2.1. La curvatura y el diedro de Frenet	3
1.2.2. La curvatura, la torsión y el triedro de Frenet	4
1.3. Las curvas en \mathbb{R}^n	7
1.3.1. Definiciones básicas	7
1.3.2. Los ejes móviles	8
1.3.3. Fórmulas de Frenet	9
1.4. Las superficies regulares	12
1.4.1. Funciones diferenciables definidas en superficies y el plano tangente	13
1.4.2. La primera forma fundamental	15
1.4.3. La aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental	15
1.4.4. La curvatura normal y geodésica	19
1.4.5. Las curvaturas principales	20
1.4.6. Integración de superficies	24
1.5. Las curvaturas principales en \mathbb{R}^n	26
2. Geometría extrínseca global	29
2.1. Introducción histórica	29
2.2. Superficies de curvatura positiva	31

2.3. Fórmulas de Minkowski y teoremas sobre ovaloides	41
2.4. El teorema de Alexandrov	45
2.5. Ejercicios	47

Me gustaría dedicar este trabajo M^a Ángeles cuya tutela que empezó antes de pensar en este trabajo. Por supuesto a mi madre por su paciencia y apoyo durante la carrera. También dedicarlo a Laura por su apoyo con el inglés y en el terreno personal, a mis más que compañeros, amigos y su ayuda tanto con L^AT_EX como con el sentimiento familiar que me invade al llegar a la facultad. Por último gracias al profesorado por formarme como matemático.

Gracias.

Resumen

Como en otros muchos textos matemáticos, cuando se propone el hacer un resumen se plantea como algo difícil de elaborar. Por lo tanto, trataremos de dar una visión abreviada y sin entrar en detalles de lo que consiste el trabajo.

El objetivo de este trabajo ha sido escoger —a priori— alguno de los muchos resultados brillantes referentes a la curvatura que hay en el mundo de la geometría y desarrollarlo. Para la elección de dicho resultado ha sido reveladora la lectura del artículo de R. OSSERMAN [7] donde después de mencionar el resultado de Alexandrov —all soap bubbles are spheres— da un repaso rápido por los conceptos básicos —y alguno más— vistos en tercero y comienza a desarrollar algunos resultados referentes a la curvatura. Dicha mención despertó nuestra curiosidad y por ello decidimos enfocar el trabajo a probar dicho resultado. Tras estudiar y desarrollar la información encontrada sobre este resultado en el libro de S. MONTIEL Y A. ROS [5], el trabajo quedaba algo escueto. Por ello en la introducción he decidido añadir el estudio de algunos aspectos de la curvatura en dimensión superior a tres, de esta manera el trabajo queda más completo. En general la finalidad de este trabajo ha sido ir mas allá de los conocimientos adquiridos en la carrera adentrándonos en el mundo de la curvatura.

En este trabajo proponemos comenzar en el Capítulo 1 con una introducción sacada ampliamente de M.A. CIFRE Y J.A. PASTOR [3], libro que nos guió en la asignatura y que hemos escogido como base para la notación en el desarrollo del trabajo por familiaridad con ella.

La introducción histórica nos ha sido facilitada por el libro de S. MONTIEL Y A. ROS [5]. Como es normal en estos casos, hemos comenzado por desarrollar la teoría respecto a una curva plana, ampliando al espacio y recordando algunos de los resultados referentes a la curvatura. Se desarrolla a partir de dichas curvas el *diedro* y *triedro de Frenet* junto con los teoremas fundamentales de curvas planas y curvas en \mathbb{R}^3 que reducen

el estudio de las curvas a trabajar con curvas p.p.a. que facilitan los cálculos —puesto que $|\alpha'(t)| = 1$ —.

Una vez hemos visto esto, nos adentramos en \mathbb{R}^n y extraemos, del libro de W. KLINGENBERG [4], el desarrollo de las curvas que viven en \mathbb{R}^n y de su curvatura, de manera similar a como habíamos hecho en \mathbb{R}^3 .

Continuamos con el siguiente paso, que consiste en pasar de curvas a superficies regulares, donde, tras unos conceptos previos de diferenciabilidad, pasamos a definir la *primera forma fundamental*, la *aplicación de Gauss* o *normal* y la *segunda forma fundamental*, que nos dejan en posición de definir la *curvatura normal* y *geodésica*. Conceptos previos a la definición de *curvaturas principales* que nos dan una idea de lo que viene siendo la "curvatura de una superficie" como una persona con menos nociones de geometría puede entender sobre un dibujo. Con estas curvaturas principales definimos la *curvatura de Gauss* y la *curvatura media* que pueden verse descritas por los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental, lo cual facilita su cálculo aunque no nos sirva de gran ayuda en el desarrollo del trabajo.

Según su curvatura de Gauss y curvatura media podemos caracterizar los puntos de una superficie en *elíptico*, *hiperbólico*, *parabólico* y *plano*. Prestando atención a los *puntos umbilicales* podemos caracterizar las superficies totalmente umbilicales que nos serán de gran ayuda en el Capítulo 2.

Por último, en cuanto a superficies en \mathbb{R}^3 , recordamos los conceptos de integración necesarios para el trabajo con las integrales sobre superficies. Una vez visto esto, en cuanto a superficies, nos ha parecido buena idea el desarrollo de las curvaturas principales en \mathbb{R}^n , lo cual hemos hecho sin apoyo bibliográfico, puesto que ha sido más sencillo de elaborar —con la ayuda de la tutora— que de buscar. Acabamos así el Capítulo 1 con la definición de *curvatura principal* y *curvatura de Gauss* o de *Gauss-Kronecker* en \mathbb{R}^n .

Entrando en materia con el Capítulo 2, el objetivo de dicho capítulo es demostrar el teorema de Alexandrov mencionado anteriormente. La introducción histórica ha venido facilitada una vez más por S. MONTIEL Y A. ROS [5]. Para comenzar ha sido necesario incluir algunas definiciones de conceptos con los que no estábamos acostumbrados a tratar como *ovaloides*, *dominio interior* y *divergencia* de una aplicación diferenciable en dominios regulares. Conociendo esto, nos adentramos en el *Teorema de Hadamard-Stoker* que nos brinda propiedades de las superficies S conexas, cerradas y con curvatura de Gauss positiva en todos sus puntos. Con este resultado y alguno más, consecuencia o fácilmente resoluble por el *Teorema de Hadamard-Stoker*, entramos en el estudio de las *Fórmulas de Minkowski* que nos dejarán en bandeja, prácticamente, el teorema de

Alexandrov. Para ello, se introduce otro nuevo concepto llamado *entorno tubular* que viene a ser algo parecido a un "entorno" de la superficie en \mathbb{R}^3 .

Una vez visto el *Teorema de la divergencia sobre superficies*, es fácil demostrar las *Fórmulas de Minkowski* que nos dan un gran arma contra el acorazado —el Teorema de Alexandrov—. Este teorema nos deja como corolario el *Teorema de Hilbert-Liebmann* —una superficie compacta y conexa con curvatura de Gauss constante debe ser una esfera— que se asemeja a nuestro objetivo. Como corolario aún más cercano a dicho objetivo tenemos el *Teorema de Jellett* —las únicas superficies compactas y conexas, estrelladas respecto de un punto, con curvatura media constante son esferas—. Como último resultado previo a nuestro objetivo tenemos la *Desigualdad de Heintze-Karcher* que viene a decir que:

En una superficie S compacta cuya curvatura media H es positiva. Entonces,

$$\text{vol}(\Omega) \leq \frac{1}{3} \int_S \frac{1}{H(p)} dp,$$

donde Ω es el dominio interior determinado por S . Además, la igualdad se da si y sólo si S es una esfera.

Lo cual nos deja casi solucionado nuestro objetivo pues sólo tenemos que ver que si la curvatura media es constante entonces se da la igualdad y obtenemos el *Teorema de Alexandrov* —Si una superficie compacta y conexa tiene curvatura media constante, entonces es una esfera—.

Summary

As in many other mathematical texts, when one proposes to make a summary it appears like something difficult to develop. Therefore, we will try to give an abbreviated vision, without going into details, of the work.

The aim of this work has been choosing -a priori- one of the many brilliant results concerning the curvature that is in the world of geometry and develop it.

For the election of this result, has been revealing the reading of the R. OSSERMAN's[7] article where, after mentioning the Alexandrov's result —all soap bubbles are spheres—, gives a quick review of the basic concepts —and some more— seen in third and begins to develop some results in relation to the curvature. This mention aroused our curiosity and, consequently, we decided to focus the work to prove this result. After studying and developing the information found about this result in S. MONTIEL AND A. ROS's[5] book, study and develop, work was something brief. Therefore, in the introduction, we have decided to add the study of curvature in dimension greater than three, being the work more completed. In general, the purpose of this work has been going beyond the knowledge acquired in the degree, ushering in the world of the curvature.

Well, in this work we propose to begin in Chapter 1 with an introduction taken widely from M.A. CIFRE AND J.A. PASTOR [3], book that guided us in the subject and that we have chosen as a basis for the notation in the development of the work by the familiarity with it.

The historical introduction has been provided to us by the book of S. MONTIEL AND A. ROS[5]. As usual in these cases, we have started to develop the theory regarding to a flat curve, expanding the space and remembering some of the results concerning the curvature. They are developed, from the above mentioned curves, the *dihedral* and *Frenet trihedron* together with the fundamental theorems of flat and curved curves in \mathbb{R}^3 reducing the work of the curves to work with arclength parametrized curves which facilitate calculations —as $|\alpha'(t)| = 1$ —.

Once we have seen this, we go in depth into \mathbb{R}^n and extract, from the book by W. KLINGENBERG [4], the development of the curves that live in \mathbb{R}^n and its curvature in a similar manner to as we had done in \mathbb{R}^3 .

Continuing with the following step, which involves moving from regular curves to surfaces, we happen to define the *first fundamental form*, the *application of Gauss* or *normal* and the *second fundamental form* after a few prior concepts about differentiability, which leave us in position to define the *normal* and *geodesic curvature*. Previous concepts to the definition of mean curvatures give us an idea of what is still the "curvature of a surface" as a person with less geometry notions can understand on a drawing. With these main curvatures we define the *Gauss curvature* and *mean curvature* that can be described by the coefficients of the first and second fundamental form, which facilitates its calculation although it does not serve to us as big help in the development of the work.

According to its Gauss curvature and mean curvature we can characterize the points of a surface in *elliptical*, *hyperbolic*, *parabolic* and *flat*. Paying attention to the *umbilical points* we can characterize the completely umbilical surfaces which will be as a great help in Chapter 2. Finally, in terms of surfaces in \mathbb{R}^3 , we remember the necessary integration concepts for the work with the integrals on surfaces. Once we have seen this in terms of surfaces, it felt us a very good idea the development of the principal curvatures in \mathbb{R}^n , which we have done without the bibliographic support, since it has been easier to develop —with the support of the tutor— than to search. We finish this way the Chapter 1 with the definition of *main curvature* and *Gauss curvature* or *Gauss-Kronecker* in \mathbb{R}^n . Moving on to Chapter 2, the target of this chapter is to demonstrate the Alexandrov theorem mentioned previously. The historical introduction has come facilitated once again by S. MONTIEL AND A. ROS [5]. To begin with, it has been necessary to include some of the concept definitions which we were not accustomed to dealing with such as *ovaloids*, *inner domain* and *divergence* of differentiable regular domains. Knowing this, we study thoroughly the *Hadamard-Stoker Theorem* that gives us properties of the surfaces S connected, closed and with Gauss curvature positive in all its points. With this result and some more, consequence or easily solvable by the *Hadamard-Stoker Theorem*, we keep on the study of the *Minkowski formula* that will leave us in tray, virtually, the Alexandrov Theorem. This is achieved by introducing another new concept called *tubular neighborhood* that comes to be something like an "environment" of the surface. Once we have seen the *divergence theorem on surfaces*, it is easy to demonstrate the *Minkowski formula* which gives us a great weapon against the battleship —the Alexandrov Theorem—. This theorem leaves us as a corollary of the *Hilbert-Liebmann Theorem* —a compact and

connected surface with constant Gauss curvature must be a sphere— that is alike our target. As a corollary even closer to this goal, we have the *Jellett Theorem* —a compact surface with constant mean curvature, which is star-shaped with respect to a given point, must be a sphere centered at this point—. As a last result prior to our goal, we have the *Heintze-Karcher inequality* which come to say that:

In a compact surface S whose mean curvature H is positive. Then,

$$\text{vol}(\Omega) \leq \frac{1}{3} \int_S \frac{1}{H(p)} dp,$$

where Ω is the inner domain determined by S . Moreover, equality holds if and only if S is a sphere.

This makes our target almost solved to us since only we have to see if the mean curvature is constant then the equality happens and we obtain the *Alexandrov Theorem* —If a compact connected surface has constant mean curvature, then it's a sphere—.

Capítulo 1

Introducción a la curvatura

En éste capítulo trataremos de hacer una introducción a la curvatura recogiendo lo visto en el curso de tercero y añadiremos un complemento para profundizar en el estudio de la curvatura en curvas en \mathbb{R}^n . Comenzaremos con una introducción histórica facilitada en [5] y seguiremos con la introducción desde lo más básico hasta cosas más complejas donde la mayoría de la información la extraeremos de [3] y ampliaremos con [4] con la idea de facilitar la lectura y hacer el trabajo autocontenido.

1.1. Inicio de la curvatura

Desde la invención del cálculo, LEIBNIZ y NEWTON comenzaron a ocuparse de los primeros problemas acerca de curvas planas. En 1684, en su *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi*, el primero de ellos hizo ya un intento serio de definir la curvatura de una curva plana; aunque, al menos de una forma cualitativa, ya lo había intentado en el siglo XIV el obispo de la ciudad francesa de Lisieux, NICOLÁS DE ORESME, en su *Tratado sobre la configuración de cualidades y movimientos*. De hecho, el primer gran estudioso fue LEONHARD EULER (1707-1783), que inició la llamada geometría intrínseca al introducir en 1736 las *coordenadas intrínsecas* de una curva plana: *longitud de arco* y *radio de curvatura*—en vez de curvatura—. Al mismo autor se le debe la definición de *curvatura* como velocidad de cambio del ángulo que forman las tangentes con una dirección dada. La teoría de curvas cerradas con anchura —*width*— constante es también original suya. Además, junto con JOHN y DANIEL BERNOULLI (1667-1748 y 1700-1782 respectivamente) hizo algunas contribuciones a la teoría de superficies; concretamente, fue el primero en caracterizar las *geodésicas* como soluciones de ciertas ecuaciones dife-

renciales y demostró que un punto material sujeto a permanecer sobre una superficie y no sometido a otras fuerzas debe moverse sobre una geodésica.

El ingeniero militar GASPARD MONGE (1746-1818), movido por problemas de tipo práctico —cuestiones de fortificación—, comenzó la teoría de curvas en el espacio en 1771 —sus primeras publicaciones datan, sin embargo, de 1785—. Para ello contaba con el precedente de las *Investigaciones sobre las curvas con doble curvatura* que ALEXIS CLAIRAUT (1713-1765) redactó a sus 16 años, en el que se hace ya un intento notable por estudiar geometría de las curvas alabeadas. MONGE publicó sus resultados sobre curvas en el espacio en 1795, en el que ha sido reconocido como primer texto de geometría diferencial: *Applications de l'analyse à la géométrie*. Una idea de la importancia que este libro llegó a tener es que la quinta edición apareció apenas treinta años después de la muerte de MONGE. Entre sus discípulos se cuentan matemáticos y físicos tales como LAPLACE, MEUSNIER, FOURIER, LANCRET, AMPÈRE, MALUS, POISSON, DUPLIN, PONCELET y OLINDE RODRIGUES. Los métodos analíticos para el estudio de curvas, que habían sido introducidos ya en los trabajos de EULER, no fueron usados por MONGE exactamente en la forma en que lo hacemos hoy. En realidad fue AUGUSTIN CAUCHY (1789-1857) el que expresó por primera vez conceptos tales como los de *curvatura* y *torsión* de una forma verdaderamente moderna en su *Leçons sur l'application du calcul infinitésimal à la géométrie*.

Hasta 1846 no aparece la primera gran recopilación de resultados organizada en forma más legible que la usual por entonces. Es el tratado de curvas en el espacio escrito por BARRÉ DE SAINT-VENANT (1791-1886). Él fue el creador del término *binormal*. La unificación de todos estos esfuerzos se debe a F. FRENET y J. SERRET (1816-1868 y 1819-1885 respectivamente) que, trabajando independientemente insistieron en popularizar, en 1847 y 1851 respectivamente, las que hoy conocemos con el nombre de *ecuaciones de Frenet*, que, en realidad habían sido escritas ya en 1831 por el matemático estonio KARL E. SENFF (1810-1917), a un alumno de M. BARTELS, condiscípulo de GAUSS en Göttingen. A pesar de todo, sus trabajos fueron casi ignorados en el momento de su aparición, debido en gran parte a la escasez de lenguaje de álgebra lineal. Estos tres últimos autores franceses citados pertenecen al grupo de matemáticos asociados al *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, publicado sin interrupción desde 1836, año en que lo fundó JOSEPH BERNOULLI (1809-1882). Por último, cabe citar a GASTON DARBOUX (1824-1927) que, con la introducción del concepto de *triedro móvil*, inicia la teoría de curvas prácticamente como hoy la solemos estudiar.

1.2. Curvas en el plano y en el espacio

En esta sección trataremos de introducir la curvatura desde lo más básico tratando de hacer la lectura sencilla e intentar que el trabajo esté tan autocontenido como se pueda sin excedernos en longitud.

Definición 1.1. Una **curva parametrizada diferenciable** en \mathbb{R}^n es una aplicación $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \in \mathbb{R}$ abierto, que es C^∞ , es decir, que admite derivadas continuas de todos los órdenes. Diremos que dicha curva es **regular** si $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in I$.

Además si $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in I$ diremos que la curva está **parametrizada por la longitud de arco** —p.p.a.—.

Este último concepto nos facilitará el trabajo a la hora de utilizar $|\alpha'(t)|$ en adelante. Cabe decir que toda curva diferenciable se puede reparametrizar por la longitud de arco mediante un sencillo proceso visto en la asignatura de tercero del grado.

1.2.1. La curvatura y el diedro de Frenet

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular p.p.a., su *vector tangente* $\vec{\mathbf{t}}(s) = \alpha'(s)$ es unitario. Esto permite construir una base ortonormal de \mathbb{R}^2 de la siguiente forma:

Definición 1.2. El **vector normal** a una curva plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a., es el vector $\vec{\mathbf{n}}(s) = J(\vec{\mathbf{t}}(s))$, donde $J = R_{\pi/2}$ es la **estructura compleja** en \mathbb{R}^2 , esto es, la rotación positiva de ángulo $\pi/2$.

Puesto que $\{\vec{\mathbf{t}}(s), \vec{\mathbf{n}}(s)\}$ forman una base ortonormal de \mathbb{R}^2 y:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{t}}'(s) &= \langle \vec{\mathbf{t}}'(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle \vec{\mathbf{t}}(s) + \langle \vec{\mathbf{t}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle \vec{\mathbf{n}}(s), \\ \vec{\mathbf{n}}'(s) &= \langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle \vec{\mathbf{t}}(s) + \langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle \vec{\mathbf{n}}(s),\end{aligned}$$

utilizando que $\langle \vec{\mathbf{t}}'(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle = 0 = \langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle$, por ser una base ortonormal, quedan definidos $\vec{\mathbf{t}}'(s)$ y $\vec{\mathbf{n}}'(s)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{t}}'(s) &= \langle \vec{\mathbf{t}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle \vec{\mathbf{n}}(s), \\ \vec{\mathbf{n}}'(s) &= \langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle \vec{\mathbf{t}}(s).\end{aligned}$$

Por otro lado, la ortogonalidad de los vectores $\vec{\mathbf{t}}(s)$ y $\vec{\mathbf{n}}(s)$ nos permite asegurar que $\langle \vec{\mathbf{t}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle = -\langle \vec{\mathbf{t}}(s), \vec{\mathbf{n}}'(s) \rangle$, lo que nos conduce a la siguiente definición:

Definición 1.3. Se llama **curvatura** de una curva plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a. a la función $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$k(s) := \langle \alpha''(s), J(\alpha'(s)) \rangle.$$

Además, si $k(s) > 0$ se llama **radio de curvatura** al valor $\rho(s) = 1/|k(s)|$.

En definitiva, hemos obtenido que

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{t}}'(s) = k(s)\vec{\mathbf{n}}(s), \\ \vec{\mathbf{n}}'(s) = -k(s)\vec{\mathbf{t}}(s), \end{cases}$$

ecuaciones que reciben el nombre de *fórmulas de Frenet* de una curva plana.

Observación 1.4. Hemos desarrollado la curvatura a partir de una curva diferenciable p.p.a., el caso en que no sea p.p.a. no lo barajaremos, se puede ver fácilmente en ([3], Proposición 1.2.3, Pág. 34).

Como Teorema final para el manejo de curvas planas enunciaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.5. (fundamental de curvas planas)([3], Teorema 1.2.4, Pág. 35) Sea $k : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Entonces, existe una curva plana regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ p.p.a. tal que $k_\alpha(s) = k(s)$, para todo $s \in I$. Además, si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ es otra curva regular p.p.a. con curvatura $k_\beta(s) = k(s)$, para todo $s \in I$, entonces existe un movimiento rígido directo $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $Mx = Ax + b$, tal que $\beta = M \circ \alpha$.

1.2.2. La curvatura, la torsión y el triedro de Frenet

El siguiente paso una vez tenemos el diedro de Frenet presumiblemente sería el paso al espacio puesto que viviendo en \mathbb{R}^2 nos vemos bastante más limitados. Y al vivir nosotros en un espacio tridimensional la capacidad de modelización de problemas trabajando en \mathbb{R}^3 sería abrumadoramente mayor. No obstante ciñéndonos al punto de vista geométrica podemos resaltar las siguientes diferencias:

- I. La curvatura de una curva en el espacio no tiene signo y ofrece menos información que en el caso de curvas planas.

- II. La existencia de un vector normal a la curva no está garantizada.
- III. Es necesario contar con una función adicional —la torsión— para explicar y caracterizar cómo se comporta una curva en el espacio.

Siendo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a., vamos a volver a tomar como es natural $\vec{\mathbf{t}}(s) = \alpha'(s)$ el *vector tangente* unitario. Puesto que $\langle \vec{\mathbf{t}}(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle = 1$ se tiene que $\langle \vec{\mathbf{t}}'(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle = 0$, es decir, $\vec{\mathbf{t}}'(s)$ es ortogonal a $\vec{\mathbf{t}}(s)$ y mide su variación. Definimos pues la *curvatura* de α en $\alpha(s)$ como

$$k(s) = |\vec{\mathbf{t}}'(s)| = |\alpha''(s)|.$$

Observación 1.6.

1. Definida así la curvatura es siempre positiva y por lo tanto no depende de la orientación de la curva a diferencia del caso de curvas planas.
2. Veamos que una curva parametrizada regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una línea recta, si y sólo si, su curvatura $k(s) = 0$. Si α es una recta $\alpha(s) = \vec{u}_0 \cdot s + \vec{v}_0$ para algún $\vec{u}_0, \vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$ luego $\alpha'(s) = \vec{u}_0$ de manera que $\alpha''(s) = 0$ entonces $k(s) = |\vec{\mathbf{t}}'(s)| = |\alpha''(s)| = |0| = 0$. Ahora, si $0 = k(s) = |\alpha''(s)|$ se tiene que $\alpha''(s) = 0$ luego $\alpha'(s) = \vec{u}$ y por último $\alpha(s) = \vec{u} \cdot s + \vec{v}$ para algún $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ luego α es una recta.

Definición 1.7. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular p.p.a. Para todo $s \in I$ tal que $k(s) \neq 0$, se define el **vector normal** —unitario— a α en $\alpha(s)$ como

$$\vec{\mathbf{n}}(s) = \frac{\vec{\mathbf{t}}'(s)}{k(s)} = \frac{\alpha''(s)}{|\alpha''(s)|}.$$

Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular p.p.a. tal que $k(s) \neq 0$, para todo $s \in I$, se denomina *plano osculador* en $\alpha(s)$ al plano determinado por los vectores $\vec{\mathbf{t}}(s)$ y $\vec{\mathbf{n}}(s)$. Obteniéndose también que una curva plana en el espacio es una curva cuyo plano osculador se mantiene fijo. Para que tenga sentido la definición de $\vec{\mathbf{n}}(s)$ supondremos que $k(s) \neq 0$, es decir, supondremos que α no es una recta.

Definición 1.8. Dados $\{\vec{\mathbf{t}}(s), \vec{\mathbf{n}}(s)\}$ relativos a una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ p.p.a., se define el **vector binormal** —asociado a α — como $\vec{\mathbf{b}}(s) = \vec{\mathbf{t}}(s) \wedge \vec{\mathbf{n}}(s)$.

El vector binormal es, por definición, ortogonal al plano osculador. Además, es unitario, pues $|\vec{\mathbf{b}}(s)| = |\vec{\mathbf{t}}(s)||\vec{\mathbf{n}}(s)|\text{sen}(\pi/2) = 1$. Por tanto, para todo $s \in I$ con $k(s) > 0$, el conjunto $\{\vec{\mathbf{t}}(s), \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{b}}(s)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 positivamente orientada —esto es, su determinante es positivo—, denominada *triedro de Frenet*.

De nuevo estamos interesados en saber cómo varían los vectores tangente, normal y binormal de una curva. Claramente, por la propia noción de vector normal, se tiene que $\vec{\mathbf{t}}'(s) = k(s)\vec{\mathbf{n}}(s)$. Por otro lado, si derivamos la expresión $\vec{\mathbf{b}}(s) = \vec{\mathbf{t}}(s) \wedge \vec{\mathbf{n}}(s)$ que define el vector binormal, la relación anterior implica que $\vec{\mathbf{b}}'(s) = \vec{\mathbf{t}}'(s) \wedge \vec{\mathbf{n}}(s) + \vec{\mathbf{t}}(s) \wedge \vec{\mathbf{n}}'(s)$, de donde se deduce que $\vec{\mathbf{b}}'(s)$ y $\vec{\mathbf{b}}(s)$ son ortogonales. En consecuencia, $\vec{\mathbf{b}}'(s)$ y $\vec{\mathbf{n}}(s)$ deben ser colineales, lo que nos permite escribir

$$\vec{\mathbf{b}}'(s) = \langle \vec{\mathbf{b}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle \vec{\mathbf{n}}(s) = \langle \vec{\mathbf{t}}'(s) \wedge \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle \vec{\mathbf{n}}(s).$$

El factor que aparece en la fórmula anterior nos lleva a la siguiente definición.

Definición 1.9. Se llama **torsión** de una curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, p.p.a., con curvatura $k(s) \neq 0$, a la función $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\tau(s) := \langle \vec{\mathbf{t}}(s) \wedge \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle = \langle \vec{\mathbf{b}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle.$$

Por lo tanto, $\vec{\mathbf{b}}'(s) = \tau(s)\vec{\mathbf{n}}(s)$. Solo resta calcular la derivada del vector normal a α . Para ello, expresando $\vec{\mathbf{n}}'(s)$ en función de la base $\{\vec{\mathbf{t}}(s), \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{b}}(s)\}$, esto es, $\vec{\mathbf{n}}'(s) = \langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle \vec{\mathbf{t}}(s) + \langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle \vec{\mathbf{n}}(s) + \langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{b}}(s) \rangle \vec{\mathbf{b}}(s)$, y dado que

- $\langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle = 0$ —derivando la relación $\langle \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{n}}(s) \rangle = 1$ —,
- $\langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle = -\langle \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{t}}'(s) \rangle = -k(s)$ —derivando $\langle \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{t}}(s) \rangle = 0$ —,
- $\langle \vec{\mathbf{n}}'(s), \vec{\mathbf{b}}(s) \rangle = -\langle \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{b}}'(s) \rangle = -\tau(s)$ —derivando $\langle \vec{\mathbf{n}}(s), \vec{\mathbf{b}}(s) \rangle = 0$ —,

se tiene finalmente que $\vec{\mathbf{n}}'(s) = -k(s)\vec{\mathbf{t}}(s) - \tau(s)\vec{\mathbf{b}}(s)$. En definitiva, hemos obtenido

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{t}}'(s) = k(s)\vec{\mathbf{n}}(s), \\ \vec{\mathbf{n}}'(s) = -k(s)\vec{\mathbf{t}}(s) - \tau(s)\vec{\mathbf{b}}(s), \\ \vec{\mathbf{b}}'(s) = \tau(s)\vec{\mathbf{n}}(s), \end{cases}$$

ecuaciones que reciben el nombre de *fórmulas de Frenet* para una curva del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 . Por otra parte, y al igual que ocurría en el caso de curvas planas, las dos funciones que aparecen en las fórmulas de Frenet también caracterizan —salvo movimientos rígidos— las curvas en el espacio. Lo que viene recogido en el siguiente teorema:

Teorema 1.10. (*fundamental de curvas en \mathbb{R}^3*) ([3], Teorema 1.3.7, Pág. 44). Sean $k, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, con $k(s) > 0$ para todo $s \in I$. Entonces existe una curva regular p.p.a., $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuya curvatura $k_\alpha(s) = k(s)$ y cuya torsión $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$, para todo $s \in I$. Además si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra curva regular p.p.a. con curvatura $k_\beta(s) = k(s)$ y torsión $\tau_\beta(s) = \tau(s)$, para todo $s \in I$, entonces existe un movimiento rígido directo $M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $Mx = Ax + b$, tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Podríamos añadir para terminar la visión de la curvatura desde el punto de vista de una curva en el espacio la siguiente proposición que caracteriza a las curvas planas mediante la torsión:

Proposición 1.11. ([3], Proposición 1.3.4, Pág. 42) Una curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ con curvatura $k(s) \neq 0$ es plana, si y sólo si, su torsión es nula.

1.3. Las curvas en \mathbb{R}^n

En esta sección ampliaremos los conceptos anteriores para elaborar una teoría más amplia en cuanto al estudio de la curvatura en una dimensión mayor que tres. Nos apoyaremos en [4] para desarrollar dicha teoría. Y facilitaremos el camino al estudio de algunos aspectos de la curvatura en \mathbb{R}^n .

1.3.1. Definiciones básicas

Definición 1.12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo. Entenderemos por una **curva parametrizada** α en \mathbb{R}^n una aplicación indefinidamente diferenciable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Diremos que α es **regular** si para todo $t \in I$ $\alpha'(t) \neq 0$.

Observación 1.13.

1. Si I no es abierto, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciable significa que existe un intervalo abierto $\overset{\circ}{I} \supset I$ y una aplicación diferenciable $\overset{\circ}{\alpha} : \overset{\circ}{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha = \overset{\circ}{\alpha}|_I$.
2. t recibe el nombre de parámetro de la curva.

Definición 1.14. Llamaremos **campo de vectores a lo largo de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$** , a una aplicación diferenciable $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definamos el **campo de vectores tangentes a $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$** como el campo de vectores dado mediante la aplicación $t \rightarrow \alpha'(t)$.

Observación 1.15. En general, interpretaremos también un campo de vectores cualquiera X a lo largo de α , $X(t)$, como elemento de $T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$.

Definición 1.16. Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\bar{\alpha} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas. Si existe un difeomorfismo $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ tal que $\bar{\alpha} = \alpha \circ \varphi$, diremos que $\bar{\alpha}$ procede de α por medio de la **transformación de parámetro** φ . Y si $\varphi' > 0$, diremos que φ **conserva la orientación**.

Observación 1.17. Naturalmente las curvas que se diferencian en una transformación de parámetro forman una clase de equivalencia. Una clase de equivalencia de curvas recibe el nombre de curva no parametrizada.

Definición 1.18. Diremos que la curva $\alpha = \alpha(t)$, $t \in I$, está **parametrizada por la longitud del arco** —p.p.a.— cuando $|\alpha'(t)| = 1$. $L(\alpha) = \int_I |\alpha'(t)| dt$ se denomina **longitud** de la curva α .

Proposición 1.19. ([4] 1.1.5. Proposición, Pág.9) Toda curva regular $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ puede ser p.p.a., es decir, existen transformaciones de parámetro $\varphi : J \rightarrow I$ tales que $|(\alpha \circ \varphi)'(s)| = 1$.

Demostración. Deseamos tener $|\frac{d\alpha}{ds}| = |\frac{d\alpha}{dt}| |\frac{d\varphi}{ds}| = 1$. Definamos $s = \varphi^{-1}(t)$ mediante $s = \int_{t_0}^t |\alpha'(t)| dt$, $t_0 \in I$. Evidentemente s es un parámetro de longitud de arco.

□

1.3.2. Los ejes móviles

Definición 1.20. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva. Llamaremos **ejes móviles** de α a n aplicaciones diferenciables $e_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$, tales que para todo $t \in I$ se tenga

$$\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Se dice que un sistema de ejes móviles es de **Frenet** cuando la derivada $\alpha^{(k)}(t)$ de α está en el espacio generado por $e_1(t), \dots, e_k(t)$, para $1 \leq k \leq n$.

Proposición 1.21. (Existencia de un sistema canónico de ejes de Frenet)
([4] 1.2.2. Proposición, Pág.11) Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para todo t los vectores $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(n-1)}(t)$ son linealmente independientes. Entonces existe un único sistema de ejes de Frenet, el llamado sistema canónico de ejes de Frenet, que satisface: para $k = 1, \dots, n-1$ los sistemas $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(k)}(t)$ y $e_1(t), \dots, e_n(t)$ tienen la misma orientación, y el sistema $e_1(t), \dots, e_n(t)$ tiene una orientación positiva.

Recordamos que dos bases de un espacio vectorial real tienen la misma orientación cuando la transformación lineal que pasa de una base a la otra tiene determinante positivo. Además se dice que una base tiene orientación positiva cuando tiene la misma orientación que la base canónica de \mathbb{R}^n .

Demostración. Utilizamos el método de ortogonalización el método de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$e_1(t) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \text{ con } |\alpha'(t)| \neq 0,$$

por ser los vectores $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(n-1)}(t)$ linealmente independientes. Sea $j < n$ y supongamos que ya tenemos construidos los vectores $e_1(t), \dots, e_{j-1}(t)$. Definimos $\tilde{e}_j(t)$ mediante

$$\tilde{e}_j := \alpha^{(j)}(t) - \sum_{k=1}^{j-1} \langle \alpha^{(j)}(t), e_k(t) \rangle e_k(t),$$

a continuación

$$e_j(t) := \frac{\tilde{e}_j(t)}{|\tilde{e}_j(t)|}.$$

Así, a partir de $e_1(t)$ podemos construir los $e_j(t)$ para $j < n$, y, por último, $e_n(t)$ queda unívocamente determinado por las exigencias del teorema.

La diferenciabilidad de los $e_j(t)$ para $j < n$ se deduce directamente de la construcción, y la de $e_n(t)$ se obtiene teniendo en cuenta que sus componentes $e_n^i(t)$, $1 \leq i \leq n$, pueden ser expresadas como determinantes de orden $n - 1$ de la matriz

$$(e_j^i(t))_{n \times (n-1)} \text{ con } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - 1,$$

formada por las componentes de los e_j con $1 \leq j \leq n - 1$.

□

1.3.3. Fórmulas de Frenet

Proposición 1.22. ([4] 1.3.1. Proposición, Pág.12) Sea $\alpha(t)$, $t \in I$, una curva de \mathbb{R}^n con ejes móviles $(e_i(t))$, $1 \leq i \leq n$, $t \in I$. Se tiene entonces:

$$\alpha'(t) = \sum_i \beta_i(t) e_i(t) \quad e_i'(t) = \sum_j \omega_{ij}(t) e_j(t),$$

verificándose

$$a) \quad \omega_{ij}(t) = \langle e'_i(t), e_j(t) \rangle = -\omega_{ji}(t).$$

En particular, si $(e_i(t))$ es un sistema canónico de ejes móviles de Frenet como en la Proposición 1.21, se tiene, además,

$$b) \quad \begin{aligned} \beta_1(t) &= |\alpha'(t)|, \quad \beta_i(t) = 0 \text{ para } i > 1, \\ \omega_{ij}(t) &= 0 \text{ para } j > i + 1. \end{aligned}$$

Demostración. a) es una consecuencia inmediata de $\langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \delta_{ij}$. En cuanto a b), basta tener en cuenta que $e_i(t)$ es combinación lineal de $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(i)}(t)$, y que, por tanto, $e'_i(t)$ es combinación lineal de $\alpha'(t), \dots, \alpha^{(i+1)}(t)$, es decir, combinación lineal de $e_1(t), \dots, e_{i+1}(t)$.

□

Expresaremos en la proposición siguiente lo que llamaremos *invarianza de las fórmulas de Frenet* ante movimientos y transformaciones de parámetros.

Proposición 1.23. ([4] 1.3.2. Proposición, Pág.13)

1. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva y $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un movimiento rígido con rotación R . Sea $\tilde{\alpha} = B \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Sean $e_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, $i \in I$, los ejes móviles de α . Entonces $\tilde{e}_i(t) = R e_i(t)$, $1 \leq i \leq n$, $t \in I$ es un sistema de ejes móviles de $\tilde{\alpha}$, y para los coeficientes de las fórmulas de Frenet, se tiene

$$\tilde{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) \quad |\tilde{\alpha}'(t)| = |\alpha'(t)|.$$

2. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva, y $\tilde{\alpha} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva que procede de α por medio de la transformación de parámetro que conserva la orientación $\varphi : J \rightarrow I$, es decir,

$$\tilde{\alpha} = \alpha \circ \varphi \quad \text{con} \quad \varphi'(s) > 0.$$

Sea $(e_i(t))$, $1 \leq i \leq n$, un sistema de ejes móviles de α . Entonces $(\tilde{e}_i(s)) = (e_i \circ \varphi(s))$, $1 \leq i \leq n$, es un sistema de ejes móviles de $\tilde{\alpha}$ y si $|\tilde{e}'_i(s)| \neq 0$, se tiene

$$\frac{\tilde{\omega}_{ij}(s)}{|\tilde{\alpha}'(s)|} = \frac{\omega_{ij}(t)}{|\alpha'(t)|} \quad \text{con} \quad t = \varphi(s).$$

Demostración. Para la parte primera se tiene que:

$$\tilde{\omega}_{ij}(t) = \langle \tilde{e}'_i(s), \tilde{e}_j(t) \rangle = \langle Re'_i(t), Re_j(t) \rangle = \langle e'_i(t), e_j(t) \rangle = \omega_{ij}(t),$$

y para la segunda:

$$\frac{\tilde{\omega}_{ij}(s)}{|\tilde{\alpha}'(s)|} = \frac{\langle \tilde{e}'_i(s), \tilde{e}_j(s) \rangle}{|\tilde{\alpha}'(s)|} = \frac{\langle e'_i(t)\varphi'(s), e_j(t) \rangle}{|\alpha'(t)|\varphi'(s)} = \frac{\omega_{ij}(t)}{|\alpha'(t)|}.$$

□

Definición 1.24. Sea $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva que satisface las hipótesis de la Proposición 1.21. La función

$$k_i(t) = \frac{\omega_{i,i+1}(t)}{|\alpha'(t)|},$$

se denomina *i-ésima curvatura* de α , $1 \leq i \leq n-1$.

El siguiente teorema muestra que una curva del tipo considerado queda determinada, salvo movimientos, por sus curvaturas.

Teorema 1.25. ([4] 1.3.4. Teorema, Pág.14) Sean $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos curvas que satisfacen las hipótesis de la Proposición 1.21 para la existencia de un sistema canónico de ejes de Frenet. Sean $(e_i(t))$, $1 \leq i \leq n$, y $(\tilde{e}_i(t))$, $1 \leq i \leq n$, estos sistemas, y supongamos que respecto de ellos se tiene $k_i(t) = \tilde{k}_i(t)$, $1 \leq i \leq n-1$, así como $|\alpha'(t)| = |\tilde{\alpha}'(t)|$. Entonces existe un único movimiento rígido $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{\alpha} = B \circ \alpha$. Además B es propio, es decir, su rotación tiene determinante 1.

Demostración. Fijemos $t_0 \in I$. Existe un único movimiento B que satisface

$$B\alpha(t_0) = \tilde{\alpha}(t_0) \quad y \quad Re_i(t_0) = \tilde{e}_i(t_0), \quad 1 \leq i \leq n,$$

siendo R la rotación de B . Evidentemente, B es un movimiento propio.

De las hipótesis se deduce que $\tilde{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t)$, por tanto,

$$\tilde{e}'_i(t) = \sum_j \omega_{ij}(t)\tilde{e}_j(t).$$

Por otra parte, se tiene

$$Re'_i(t) = \sum_j \omega_{ij}(t)Re_j(t).$$

Así, $\tilde{e}_i(t)$ y $Re_i(t)$ satisfacen el mismo sistema de ecuaciones diferenciables lineales, y además para $t = t_0$ coinciden, por lo que coincidirán para todo $t \in I$ luego $Re_i(t) = \tilde{e}_i(t)$.

En particular, $R\alpha'(t) = |\alpha'(t)|Re_1(t) = |\tilde{\alpha}'(t)|\tilde{e}_1(t) = \tilde{\alpha}'(t)$. Y de aquí se obtiene que,

$$B\alpha(t) - B\alpha(t_0) = \int_{t_0}^t R\alpha'(t) dt = \int_{t_0}^t \tilde{\alpha}'(t) dt = \tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t_0),$$

por lo que se ha de tener $B\alpha(t) = \tilde{\alpha}(t)$.

Por último, este movimiento es único, pues si \tilde{B} es otro movimiento que satisface $\tilde{B} \circ \alpha = \tilde{\alpha}$, \tilde{B} llevará el sistema de ejes de Frenet, dado por la Proposición 1.21, de α en el de $\tilde{\alpha}$, y como además $\tilde{B}\alpha(t_0) = \tilde{\alpha}(t_0)$, se ha de tener que $\tilde{B} = B$.

□

Proposición 1.26. ([4] 1.3.5. Proposición, Pág.15) Sean $k_i(t)$, $1 \leq i \leq n-1$, las curvaturas de la Definición 1.24. Entonces, $k_i(t) > 0$ para $1 \leq i \leq n-2$.

Demostración. A partir de la construcción seguida en la Proposición 1.21, se tiene,

$$\alpha^{(k)} = \sum_{l=1}^k a_{kl}e_l, e_k = \sum_{l=1}^k b_{kl}\alpha^{(l)}, \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} a_{kk} > 0 \\ b_{kk} = \frac{1}{a_{kk}} > 0 \end{array} \right\} \text{ para } 1 \leq k \leq n-1.$$

Por tanto, para $i \leq n-2$, se tiene que

$$\omega_{i,i+1} = \langle e'_i, e_{i+1} \rangle = b_{ii} \langle \alpha^{(i+1)}, e_{i+1} \rangle = b_{ii} a_{i+1,i+1} > 0.$$

□

1.4. Las superficies regulares

Ahora vamos a añadir un poco más de complejidad al estudio de la curvatura. El estudio desde el punto de vista de las curvas se nos queda bastante corto tras cuatro años de grado. Introduciremos pues ahora el estudio de las superficies, comenzando por la siguiente definición:

Definición 1.27. Un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para todo punto p de S existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno V de p en S —con la topología relativa de $S \subset \mathbb{R}^3$ — y una aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tales que

S1) $X(U) = V$ y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable en el sentido ordinario.

S2) $X : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo —es decir, la inversa $X^{-1} : V \rightarrow U$ también es continua—.

S3) Para todo $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es inyectiva.

La aplicación X se llama **parametrización, carta o sistema de coordenadas**. El entorno V se llama **entorno coordinado**.

1.4.1. Funciones diferenciables definidas en superficies y el plano tangente

Con vistas a efectuar cálculo en superficies necesitamos definir lo que se entiende como función diferenciable en una superficie. Para ello la táctica adoptada consiste en «llevar» los objetos al plano de coordenadas mediante una parametrización cualquiera y aplicar lo que sí conocemos de cálculo elemental en varias variables.

Sean S una superficie regular y $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m \geq 1$. Sea (U, X) una parametrización de S . Entonces, la composición $\tilde{f} = f \circ X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ es la *expresión en coordenadas de f respecto de la parametrización (U, X)* .

Definición 1.28. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es **diferenciable** —sobre S — si, para toda parametrización (U, X) , la función $f \circ X$ es diferenciable sobre el abierto U .

Definición 1.29. Sean S_1 y S_2 superficies regulares y $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación. Diremos que F es **diferenciable** si, para todo $p \in S_1$ y cualesquiera parametrizaciones (U_1, X_1) de S_1 en p y (U_2, X_2) de S_2 en $F(p)$, la **expresión en coordenadas de F** , $\tilde{F} = X_2^{-1} \circ F \circ X_1$, es diferenciable en el sentido ordinario sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Como es lógico nos será de gran utilidad que la composición de funciones diferenciables sea diferenciable, lo cual viene recogido en el siguiente lema.

Lema 1.30. ([3], Corolario 2.2.8, Pág. 77) *Supongamos que $F : S_1 \rightarrow S_2$ y $G : S_2 \rightarrow S_3$ son aplicaciones diferenciables entre superficies regulares. Entonces la composición $G \circ F : S_1 \rightarrow S_3$ es también diferenciable.*

Una vez hemos refrescado el concepto de diferenciability queremos recordar el concepto de $T_p S$ y para ello debemos empezar por la siguiente definición.

Definición 1.31. Una **curva diferenciable** en una superficie regular S es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Utilizando este concepto podemos definir el concepto de vector tangente que viene a ser de lo que está compuesto el $T_p S$.

Definición 1.32. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. Diremos que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tangente** a S en p , si existe una curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$ diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$.

Definimos pues el **espacio tangente a S en p** como

$$T_p S = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \vec{v}\}.$$

Para ayudarnos en lo que sigue daremos la caracterización del $T_p S$ que parece bastante lógica después de como lo hemos definido.

Lema 1.33. ([3], Lema 2.3.3, Pág. 79) Sean S una superficie regular y $p \in S$. Sea (U, X) una parametrización con $X(q) = p$ y $q \in U$. Entonces, se tiene

$$T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2).$$

Ahora para obtener una base del $T_p S$ tomamos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ una base de \mathbb{R}^2 entonces por la inyectividad de dX_q implica que $\{dX_q(1, 0), dX_q(0, 1)\} = \{X_u(q), X_v(q)\}$ es una base de $T_p S$. Por lo tanto,

$$T_p S = \{aX_u(q) + bX_v(q) : a, b \in \mathbb{R}\},$$

donde, como es habitual, (U, X) es una parametrización de S con $X(q) = p$.

Observación 1.34. Puesto que $T_p S$ tiene dimensión 2, podemos definir $\mathbb{R}^3 = T_p S \oplus (T_p S)^\perp$ y de manera que $(T_p S)^\perp = \text{span}\{N(p)\}$. El vector $N(p)$ está unívocamente determinado —salvo el signo— y se denomina **vector normal —unitario—** a S en p . Finalmente, como $\{X_u(q), X_v(q)\}$ es una base de $T_{X(q)} S$, entonces se tiene que

$$N(X(q)) = \pm \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{|X_u(q) \wedge X_v(q)|},$$

lo que va a permitir calcular este vector de forma explícita.

1.4.2. La primera forma fundamental

Sin mas preámbulo daremos la definición de *la primera forma fundamental*, la cual nos será muy útil en lo que sigue, no como tal su definición pero sí los coeficientes de dicha forma.

Definición 1.35. *La aplicación $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $I_p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_p$ se denomina la **primera forma fundamental** de S .*

En lo que sigue, y salvo que queramos precisar con exactitud el punto sobre el que estamos trabajando, escribiremos simplemente $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en lugar de $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$.

Sean $\vec{v} \in T_p S$ y $\alpha : I \rightarrow S$ con condiciones iniciales p y \vec{v} . Tomamos una parametrización (U, X) de S y consideramos $\tilde{\alpha}(t) = (u(t), v(t))$ la expresión en coordenadas de α . Entonces $\vec{v} = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q) = aX_u(q) + bX_v(q)$, donde a, b son números reales y $X(q) = p$. Si ahora calculamos

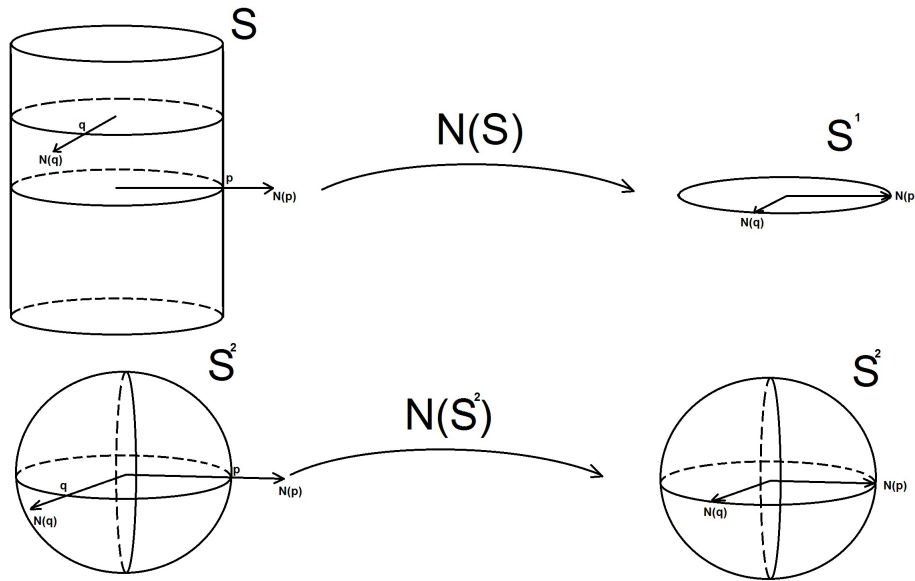
$$I_p(\vec{v}) = |aX_u + bX_v|^2 = a^2 \langle X_u, X_u \rangle + 2ab \langle X_u, X_v \rangle + b^2 \langle X_v, X_v \rangle,$$

donde, por simplicidad, hemos suprimido el punto q en el que se evalúan la parametrización y sus parciales. A partir de ahora, y siempre que no haya lugar a confusión, omitiremos habitualmente las variables (u, v) en las fórmulas.

Denotamos por $E = \langle X_u, X_u \rangle$, $F = \langle X_u, X_v \rangle$ y $G = \langle X_v, X_v \rangle$. Estas tres funciones —toman valores en \mathbb{R} — son claramente diferenciables y se denominan los *coeficientes de la primera forma fundamental*. Por otra parte remarcamos el hecho de que E , F y G son objetos dependientes de la parametrización que estamos considerando.

1.4.3. La aplicación de Gauss y la segunda forma fundamental

Cambemos un poco la tónica del trabajo. Imaginemos por un momento que somos seres bidimensionales que viven dentro de dos superficies ambas a priori idénticas puesto que ambos habitantes creen que viven en un plano. Supongamos que sabemos calcular el normal en un punto de nuestra superficie. Los habitantes de ambas superficies calculan todos sus normales y los recogen en una gráfica:



¡Eureka!. ¡Ambas superficies eran distintas!. Y así es cómo funciona la aplicación de Gauss.

Definición 1.36. Sea S una superficie regular orientada por un campo normal $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$. Como N es unitario, podemos verlo como una aplicación diferenciable entre dos superficies, de la forma $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Esta aplicación se denomina **aplicación de Gauss** de S . Su imagen, $\text{Im}N = N(S) \subset \mathbb{S}^2$, es la imagen esférica de S , esto es, el conjunto de direcciones que son normales a la superficie.

Más que la propia aplicación N en sí, es mucho más interesante estudiar su variación conforme nos movemos por S , pues nos dice cómo se «dobla» la superficie en todas las direcciones. En otras palabras, nos interesa estudiar la diferencial

$$dN_p : T_p S \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2, \quad dN_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t),$$

donde $p \in S$, $\vec{v} \in T_p S$ y α es una curva con condiciones iniciales p y \vec{v} . Ahora bien, observemos que, para un punto cualquiera $p' \in \mathbb{S}^2$, dado que $N(p') = \pm p'$, se tiene que $T_{p'} \mathbb{S}^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle N(p), \vec{v} \rangle = 0\}$. De esta forma,

$$T_{p'} \mathbb{S}^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle N(p), \vec{v} \rangle = 0\} = T_p S.$$

Por tanto, podemos ver la diferencial dN_p como un endomorfismo del plano tangente, $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$. En este sentido, damos la siguiente definición.

Definición 1.37. Sea S una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Se llama **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en $p \in S$ a la aplicación lineal $A_p = -dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$, esto es, $A_p\vec{v} = -dN_p(\vec{v})$.

Proposición 1.38. ([3], Proposición 3.2.2, Pág. 111) El operador forma A_p es autoadjunto, es decir, para cualesquiera $\vec{v}, \vec{w} \in T_pS$ se tiene que $\langle A_p\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A_p\vec{w} \rangle$.

Sean S una superficie regular orientada y $p \in S$, y consideramos el operador forma $A_p : T_pS \rightarrow T_pS$ de S en p , que es un endomorfismo de espacios vectoriales, autoadjunto respecto del producto escalar definido en T_pS . Por tanto, esta aplicación lineal tiene asociada, de forma unívoca, una forma bilineal simétrica

$$\sigma_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } \sigma_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle A_p\vec{v}, \vec{w} \rangle.$$

Además, a toda forma bilineal simétrica $\sigma_p : T_pS \times T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ se le asocia —también de forma unívoca— una forma cuadrática

$$II_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R} \text{ dada por } II_p(\vec{v}) = \sigma_p(\vec{v}, \vec{v}) = \langle A_p\vec{v}, \vec{v} \rangle.$$

Definición 1.39. La aplicación $II_p : T_pS \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $II_p(\vec{v}) = \langle A_p\vec{v}, \vec{v} \rangle$ se denomina la **segunda forma fundamental** de S en p .

Sean S una superficie regular orientada, $p \in S$ y (U, X) una parametrización p . Dado un vector $\vec{v} \in T_pS$, nos preguntamos por el valor de la segunda forma fundamental $II_p(\vec{v})$ en términos de dicha parametrización. Para responder a esta cuestión, consideramos una curva α en S con condiciones iniciales p y \vec{v} , de modo que $\vec{v} = \alpha'(0) = u'(0)X_u(u(0), v(0)) + v'(0)X_v(u(0), v(0))$ y $p = X(u(0), v(0))$. En lo que sigue, X_u, X_v y demás funcionales estarán evaluados en el punto $(u(0), v(0))$, aunque lo omitiremos por brevedad. Entonces,

$$dN_p(\vec{v}) = dN_p(\alpha'(0)) = u'(0)dN_p(X_u) + v'(0)dN_p(X_v) = u'(0)N_u + v'(0)N_v.$$

Como N_u y N_v son vectores tangentes a S en p , podemos escribir

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}X_u + a_{21}X_v, \\ N_v &= a_{12}X_u + a_{22}X_v, \end{aligned}$$

y de esta forma, $dN_p(\vec{v}) = u'(0)(a_{11}X_u + a_{21}X_v) + v'(0)(a_{12}X_u + a_{22}X_v)$. Es decir,

$$dN_p(\vec{v}) = (a_{11}u'(0) + a_{12}v'(0))X_u + (a_{21}u'(0) + a_{22}v'(0))X_v.$$

Como $\vec{v} = u'(0)X_u + v'(0)X_v$, la matriz de dN_p respecto a la base $\{X_u, X_v\}$ es

$$dN_p \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Nuestro objetivo es calcular de forma explícita los coeficientes a_{ij} de esta matriz. Para ello, observemos que

$$\text{II}_p(\vec{v}) = \langle A_p \vec{v}, \vec{v} \rangle = -\langle dN_p(\vec{v}), \vec{v} \rangle = -\langle u'(0)N_u + v'(0)N_v, u'(0)X_u + v'(0)X_v \rangle,$$

y la bilinealidad del producto escalar nos lleva a

$$\text{II}_p(\vec{v}) = -u'(0)^2 \langle N_u, X_u \rangle - u'(0)v'(0) \langle N_u, X_v \rangle - u'(0)v'(0) \langle N_v, X_u \rangle - v'(0)^2 \langle N_v, X_v \rangle.$$

Por otro lado, sabemos que $\langle N, X_u \rangle = \langle N, X_v \rangle = 0$. Si derivamos ambas expresiones respecto a u y v obtenemos

$$\begin{aligned} \langle N_u, X_u \rangle + \langle N, X_{uu} \rangle = 0 & \quad \langle N_v, X_u \rangle + \langle N, X_{uv} \rangle = 0, \\ \langle N_u, X_v \rangle + \langle N, X_{vu} \rangle = 0 & \quad \langle N_v, X_v \rangle + \langle N, X_{vv} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Así, despejando los primeros sumandos de estas cuatro igualdades se tiene que

$$\begin{aligned} -\langle N_u, X_u \rangle &= \langle N, X_{uu} \rangle := e, \\ -\langle N_v, X_u \rangle &= \langle N, X_{uv} \rangle := f, \\ -\langle N_u, X_v \rangle &= \langle N, X_{vu} \rangle := f, \\ -\langle N_v, X_v \rangle &= \langle N, X_{vv} \rangle := g. \end{aligned}$$

Las funciones e, f, g , están definidas sobre el abierto U , y se denominan los *coeficientes de la segunda forma fundamental*. Así, en términos de estos coeficientes, la segunda forma fundamental se expresa de la forma

$$\text{II}_p(\vec{v}) = \text{II}_p(\alpha'(0)) = u'(0)^2 e + 2u'(0)v'(0)f + v'(0)^2 g.$$

En general, si $\vec{v} = v_1 X_u + v_2 X_v$, se tendrá $\text{II}_p(\vec{v}) = v_1^2 e + 2v_1 v_2 f + v_2^2 g$. Además,

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, X_u \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_u \rangle = a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= \langle N_v, X_u \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_u \rangle = a_{12}E + a_{22}F, \\ -f &= \langle N_u, X_v \rangle = \langle a_{11}X_u + a_{21}X_v, X_v \rangle = a_{11}F + a_{21}G, \\ -g &= \langle N_v, X_v \rangle = \langle a_{12}X_u + a_{22}X_v, X_v \rangle = a_{12}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Si escribimos el sistema anterior en forma matricial obtenemos

$$\begin{pmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & F \\ F & E \end{pmatrix}.$$

La matriz de los coeficientes de la primera forma fundamental es invertible, ya que su determinante, $EG - F^2$, es siempre estrictamente positivo. Por tanto, podemos despejar la matriz de las variables, y se tiene que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}.$$

Haciendo las operaciones oportunas en estas matrices, e igualando coeficiente a coeficiente, se llega finalmente a que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

1.4.4. La curvatura normal y geodésica

Para facilitar el trato con la segunda forma fundamental enunciaremos el siguiente teorema demostrado ya en cursos anteriores.

Proposición 1.40. ([3], Proposición 3.3.1, Pág. 114) *Sea S una superficie regular orientada por el normal N . Sean $p \in S$ y $\vec{v} \in T_p S$. Si $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva con condiciones iniciales p y \vec{v} , entonces*

$$II_p(\vec{v}) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle.$$

Una vez tenemos la segunda forma fundamental así descrita, parece más sencillo introducir el siguiente concepto.

Definición 1.41. *Sea $\vec{v} \in T_p S$ un vector unitario. El valor $II_p(\vec{v})$ se denomina **curvatura normal de S en p en la dirección de \vec{v}** y se representa por $k_n(\vec{v}, p)$.*

Por tanto, $k_n(\vec{v}, p) = II_p(\vec{v}) = \langle \alpha''(0), N(p) \rangle$, siendo $\alpha : I \rightarrow S$ cualquier curva con condiciones iniciales p y \vec{v} .

Definición 1.42. Sea S una superficie regular y $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva p.p.a., en cada punto $\alpha(s)$ podemos considerar el triedro de Darboux $\{\vec{t}(s) = \alpha'(s), J\alpha'(s) = N(s) \wedge \alpha'(s), N(s)\}$. Recordemos que, como $|\vec{t}(s)| = 1$, entonces $\alpha''(s) = \vec{t}'(s)$ es ortogonal a $\vec{t}(s)$, y por tanto, $\alpha''(s) \in \text{span}\{J\alpha'(s), N(s)\}$. En consecuencia, $\alpha''(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle J\alpha'(s) + k_n(\alpha'(s), \alpha(s))N(s)$, siendo el coeficiente de $J\alpha'(s)$ la **curvatura geodésica** de α en $\alpha(s)$:

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), N(s) \wedge \alpha'(s) \rangle.$$

Como curiosidad, el nombre de **curvatura geodésica** le viene dado puesto que las geodésicas se caracterizan por tener dicha curvatura igual a cero en todos sus puntos.

Finalmente, si $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva parametrizada por la longitud de arco s , podemos escribir $\alpha''(s) = k_g(s)J\alpha'(s) + k_n(s)N(\alpha(s))$, siendo

$$k_n(s) := k_n(\alpha'(s), \alpha(s)) = \text{II}_{\alpha(s)}(\alpha'(s)) = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle,$$

la curvatura normal de la curva α en s y $k_g(s)$ su curvatura geodésica. Si ahora tomamos módulos, se obtiene la importante relación

$$k(s)^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2,$$

la cual nos dice que la curvatura de una curva en el espacio se descompone como la suma de la curvatura geodésica —intrínseca— y la curvatura normal —extrínseca—.

1.4.5. Las curvaturas principales

Sean S una superficie orientada por N y $p \in S$ un punto arbitrario. El operador $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ es una aplicación lineal autoadjunta. Por tanto, su matriz respecto a cualquier base ortonormal es simétrica y, en consecuencia, diagonalizable. Sean entonces \vec{e}_1, \vec{e}_2 dos vectores que diagonalizan A_p . Si en la diagonalización los valores propios son distintos, es un ejercicio inmediato probar que los dos vectores son ortogonales —si los valores propios son idénticos, todos los vectores son propios, y siempre podemos escoger dos ortogonales— y, sin pérdida de generalidad, supondremos que son unitarios. Si $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son los valores asociados a dichos vectores propios, entonces $A_p \vec{e}_1 = k_1(p)\vec{e}_1$, y $A_p \vec{e}_2 = k_2(p)\vec{e}_2$. Estos dos números se denominan las **curvaturas principales** de S en p , y, por convenio, supondremos que $k_1(p) \leq k_2(p)$. ¿Tienen estos valores algún significado preciso? Observemos que

$$k_n(\vec{e}_1, p) = \text{II}_p(\vec{e}_1) = \langle A_p \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle k_1(p)\vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = k_1(p),$$

y $k_n(\vec{e}_2, p) = k_2(p)$, por lo que $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son las curvaturas normales en las direcciones \vec{e}_1 y \vec{e}_2 . Además, se puede demostrar que $k_1(p)$ y $k_2(p)$ son extremos de la función real $k_n(\cdot, p) : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Los vectores \vec{e}_1 y \vec{e}_2 que determinan las curvaturas principales se denominan *direcciones principales* —cuando $k_1(p) = k_2(p)$ todas las direcciones son direcciones principales—.

Observación 1.43. *Las curvaturas principales están determinadas salvo el signo, pues éste depende de la orientación escogida para la superficie.*

A continuación vamos a ver que, esencialmente, las curvaturas principales determinan por completo la curvatura normal en cualquier dirección, siempre y cuando conozcamos el ángulo que forma dicho vector con una de las direcciones principales.

Teorema 1.44. (La fórmula de Euler) ([3], Teorema 3.4.2, Pág. 120). *Sea S una superficie regular orientada por N , sean $k_1(p) \leq k_2(p)$ las curvaturas principales de S en un punto $p \in S$ y sean \vec{e}_1, \vec{e}_2 las direcciones principales asociadas a dichas curvaturas, respectivamente. Si $\vec{v}_\theta \in T_p S$*

$$k_n(\vec{v}_\theta, p) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta,$$

donde θ es el ángulo tal que $\cos\theta = \langle \vec{e}_1, \vec{v}_\theta \rangle$.

Una vez hemos visto las curvaturas principales, estamos en disposición de introducir nuevos conceptos de curvaturas.

Definición 1.45. *Sea S una superficie regular orientada por N . Se denomina **curvatura de Gauss** de S en $p \in S$ al valor*

$$K(p) = \det A_p = \det(-dN_p).$$

En definitiva,

$$K(p) = k_1(p)k_2(p).$$

Además, se llama **curvatura media** de S en $p \in S$ al valor

$$H(p) = \frac{1}{2}\text{tr} A_p = \frac{1}{2}\text{tr}(-dN_p).$$

En otros términos,

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Recordemos que los a_{ij} son los coeficientes de la matriz de la aplicación dN_p respecto a la base $\{X_u, X_v\}$. Por tanto, podemos calcular su determinante y su traza en términos de los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales. Así,

$$K(p) = \det(dN_p) = \frac{1}{(EG - F^2)^2} [(fF - eG)(fF - gE) - (gF - fG)(eF - fE)],$$

simplificando esta expresión se llega a que la curvatura de Gauss viene dada por

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Por otra parte, la curvatura media es

$$H(p) = -\frac{1}{2}\text{tr}(dN_p) = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}.$$

Ahora nos preguntamos: ¿es posible calcular las curvaturas principales a partir de $K(p)$ y de $H(p)$? Observemos que λ es un valor propio del operador forma A_p si, y sólo si, $-dN_p(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, lo que equivale a su vez a que $dN_p(\vec{v}) + \lambda\vec{v} = 0$; en definitiva si, y sólo si,

$$(dN_p + \lambda 1_{T_pS})(\vec{v}) = 0,$$

para un cierto $\vec{v} \in T_pS$. Pero existirá $\vec{v} = (v_1, v_2)$ en tales condiciones si, y sólo si, el sistema anterior, con incógnitas v_1, v_2 , admite solución no trivial; esto es, si

$$\det(dN_p + \lambda 1_{T_pS}) = \begin{vmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Desarrollando el determinante anterior se llega a que

$$0 = (a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ahora, recordando que $a_{11} + a_{22} = -2H(p)$ y $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = K(p)$, la ecuación anterior se reescribe

$$\lambda^2 - 2H(p)\lambda + K(p) = 0,$$

siendo sus soluciones $\lambda = H(p) \pm \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$. Por lo tanto, las curvaturas principales son

$$k_1(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)}, \quad k_2(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)}.$$

Proposición 1.46. ([3], Proposición 3.4.4, Pág. 120) *La curvatura de Gauss no depende de la orientación escogida para la superficie. La curvatura media cambia de signo al cambiar la orientación.*

Teorema 1.47. (Interpretación geométrica de la curvatura de Gauss)([3], Teorema 3.6.1, Pág. 131). Sean S una superficie regular orientada, con aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$, y $p \in S$ tal que $K(p) \neq 0$. Entonces,

$$K(p) = \pm \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A(N(V_\epsilon))}{A(V_\epsilon)},$$

donde $V_\epsilon = X(B_\epsilon)$, siendo $B_\epsilon = \{q' \in \mathbb{R}^2 : |q' - q| < \epsilon\} \subset U$ y (U, X) una parametrización de S que cubre a $p = X(q)$

Dependiendo del signo de la curvatura de Gauss, los puntos de una superficie se clasifican de la siguiente forma.

Definición 1.48. Sea S una superficie regular orientada y sea $p \in S$. Entonces,

- se dice que $p \in S$ es **elíptico** si $K(p) > 0$,
- se dice que $p \in S$ es **hiperbólico** si $K(p) < 0$,
- se dice que $p \in S$ es **parabólico** si $K(p) = 0$ pero $H(p) \neq 0$, esto es, $A_p \neq 0$,
- se dice que $p \in S$ es **plano** cuando $A_p \equiv 0$, esto es, si $k_1(p) = k_2(p) = 0$.

Además de clasificar los puntos de una superficie en términos del signo de la curvatura de Gauss, podemos plantearnos qué pasa cuando las dos curvaturas principales coinciden.

Definición 1.49. Se dice que un punto p de una superficie regular orientada S es un **punto umbilical** si $k_1(p) = k_2(p)$. Una superficie S se dice que es **totalmente umbilical** si todos sus puntos son umbilicales.

Sabiendo que $k_1(p) = H(p) - \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$, $k_2(p) = H(p) + \sqrt{H(p)^2 - K(p)}$ se deduce que p es umbilical si, y sólo si, $H(p)^2 = K(p)$.

Observación 1.50. Ningún punto parabólico o hiperbólico puede ser umbilical. El primero por definición; el segundo porque, si fuera umbilical, el producto de sus curvaturas principales sería no negativo.

Teorema 1.51. (Caracterización de las superficies totalmente umbilicales)([3], Teorema 3.4.7, Pág. 122). Sea S una superficie regular, orientable, conexa y totalmente umbilical. Entonces S es un trozo de esfera o un trozo de plano.

1.4.6. Integración de superficies

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función real definida sobre una superficie regular orientada S . El soporte de f es el conjunto

$$\text{sop}(f) = \overline{\{p \in S : f(p) \neq 0\}},$$

que, en general, supondremos compacto por razones técnicas —fundamentalmente, para poder integrar y que el valor de estas integrales no se haga infinito—.

Definición 1.52. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función con soporte compacto, definida sobre una superficie regular orientada S . tal que existe una parametrización (U, X) de S de forma que $\text{sop}(f) \subset X(U)$. Se define la **integral de f en S** como

$$\int_S f dA := \int \int_U (f \circ X)(u, v) \sqrt{EG - F^2}(u, v) du dv,$$

siempre y cuando la integral sobre $U \subset \mathbb{R}^2$ esté definida.

Teorema 1.53. (del cambio de variable) ([3], Teorema 4.2.4, Pág. 161) Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares, conexas orientadas, cuyos elementos de área representamos por dA_1 y dA_2 , respectivamente. Sea $f : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función con soporte compacto. Si $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo, entonces

$$\int_{S_2} f dA_2 = \int_{S_1} (f \circ \phi) |\det(d\phi)| dA_1.$$

Teorema 1.54. ([3], Teorema 4.2.5, Pág. 162) Sean S una superficie regular orientada, N su aplicación de Gauss y $p \in S$ con $K(p) \neq 0$. Si $V \subset S$ es un entorno de p donde $N|_V : V \rightarrow N(V)$ es un difeomorfismo,

$$A(N(V)) = \int_V |K| dA,$$

siempre y cuando esta integral, conocida como la **curvatura total** del entorno V , tome un valor finito.

Ahora sean O un abierto de \mathbb{R}^3 relativamente compacto, $\phi : \bar{O} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable y $f : O \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable en O . Si $x \in \mathbb{R}^3$ es un valor regular de la aplicación ϕ — x es un valor *valor regular* de ϕ si para todo $p \in \bar{O}$ tal que $\phi(p) = x$ se tiene que $(d\phi)_p \neq 0$ —, el conjunto de preimágenes por ϕ del punto x es un conjunto

discreto, como consecuencia del teorema de la función inversa del cálculo. Como O es relativamente compacto, el conjunto de preimágenes en O es finito. Por eso, podemos definir una nueva función

$$n(\phi, f) : \mathbb{R}^3 \setminus \phi(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde $\mathcal{N} \subset O$ es el conjunto de puntos de O que no son regulares para ϕ , es decir,

$$\mathcal{N} = \{x \in O \mid (Jac\phi)(x) = 0\},$$

por la igualdad

$$n(\phi, f)(x) = \sum_{p \in \phi^{-1}(x)} f(p),$$

entendiendo que la suma es cero cuando $x \notin \phi(O)$. Se puede demostrar que $\phi(\mathcal{N})$ es un conjunto de medida nula en \mathbb{R}^3 —[5], Proposición 4.11, Pág.153—, de forma que la función $n(\phi, f)$ está definida en todo \mathbb{R}^3 excepto un conjunto de medida nula. Notemos que, si ϕ fuera un difeomorfismo sobre su imagen, entonces $n(\phi, f)$ estaría definida en todo \mathbb{R}^3 y coincidiría con la composición $f \circ \phi^{-1}$ en $\phi(O)$. Por esta razón el resultado siguiente puede verse como una generalización de la fórmula del cambio de variables de la integral de Lebesgue en \mathbb{R}^3 .

Teorema 1.55. ([5], Teorema 5.6, Pág. 178) *Sea $\phi : \bar{O} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación diferenciable, donde O es un abierto de \mathbb{R}^3 relativamente compacto y sea $f : O \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable sobre O . La función $n(\phi, f)$ es integrable en \mathbb{R}^3 y*

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(\phi, f) = \int_O f(x) |Jac\phi|(x) dx.$$

1.5. Las curvaturas principales en \mathbb{R}^n

En esta sección desarrollaremos el concepto de curvatura normal para dimensión n , para ello trabajaremos con hipersuperficies y la aplicación de Gauss de dichas hipersuperficies. Para ello nos apoyaremos en una parte de [7].

Definición 1.56. De manera análoga a como trabajamos en el caso de superficies en \mathbb{R}^3 , diremos que la superficie S es una **hipersuperficie** de \mathbb{R}^n si $S \subset \mathbb{R}^n$ y $\dim(S) = n - 1$.

En estas condiciones podemos rescatar la Definición 1.37 y la adaptamos a nuestras condiciones.

Definición 1.57. Sea S una hipersuperficie orientada por la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se llama **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en $p \in S$ a la aplicación lineal $A_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, esto es, $A_p \vec{v} = -dN_p(\vec{v})$.

Sabiendo esto podemos volver la mirada a la Sección 1.4.5 de curvaturas principales pero ahora tenemos que A_p es una forma cuadrática autoadjunta de dimensión $(n - 1) \times (n - 1)$ y por lo tanto existe una base ortonormal $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}\}$ que diagonaliza a A_p .

Definición 1.58. Estamos en posición de definir las **curvaturas principales** $k_1(p), \dots, k_{n-1}(p)$ de S como

$$II_p(\vec{e}_i) = \langle A_p \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = \langle k_i(p) \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle = k_i(p) \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

para todo $p \in S$. Donde los vectores $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}$ son las **direcciones principales** mencionadas anteriormente.

Definición 1.59. Una vez definidas las curvaturas principales pasamos a definir la función H_i llamada la **curvatura media de orden i** como

$$H_i(p) = S_i(k_1(p), \dots, k_{n-1}(p)),$$

donde la función S_i viene definida por

$$S_i(k_1(p), \dots, k_{n-1}(p)) = \frac{1}{\binom{n-1}{i}} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n-1} k_{j_1}(p) \dots k_{j_i}(p).$$

De manera que podemos definir, utilizando las funciones H_i , la **curvatura media** como

$$H(p) = H_1(p) = \frac{1}{n-1}(k_1(p) + \dots + k_{n-1}(p)),$$

y la **curvatura de Gauss** o de **Gauss-Kronecker** como

$$K(p) = H_{n-1}(p) = k_1(p) \dots k_{n-1}(p).$$

Capítulo 2

Geometría extrínseca global

Este capítulo recoge una adaptación a los conceptos estudiados en la carrera, algo extendidos, para facilitar la demostración de resultados referentes a la geometría extrínseca global del libro de Curvas y Superficies [5] con intención de concluir con el famoso Teorema de Alexandrov que dice "*all soap bubbles are spheres*" —todas las pompas de jabón son esferas—.

2.1. Introducción histórica

Una vez convencidos de que la segunda forma fundamental y las correspondientes curvaturas asociadas a la aplicación de Gauss son instrumentos eficaces para conseguir algún control sobre la forma de una superficie y habiendo desarrollado una teoría de integración de funciones sobre superficies compactas para la cual se mantienen válidas las propiedades usuales de la integración de Lebesgue, tenemos pues sentadas bases suficientes para un estudio más profundo de la geometría de las superficies del espacio euclídeo \mathbb{R}^3 .

Desde nuestro punto de vista, y de la moderna Geometría Diferencial, notablemente influida por la Topología, *más profundo* significa ser capaces, aunque sea en pequeña medida, de saltar de lo local a lo global. En este capítulo pretendemos tratar el tipo de teoremas y demostraciones que nosotros consideramos están en el núcleo de la Geometría Diferencial, en este caso concreto, de la clásica.

Siempre que se abordan problemas globales en geometría se impone sobre los objetos en cuestión alguna condición de totalidad que evite que aparezcan como soluciones trozos

de superficies más grandes, o sea, superficies que sean abiertos de otra superficie que las contenga estrictamente. Una de esas condiciones es claramente la compacidad. Desde nuestro punto de vista, que prima a la geometría extrínseca, debería ser el carácter de cerrada en \mathbb{R}^3 . Nosotros nos restringiremos en este capítulo, pues, al estudio de las superficies cerradas e insistiremos en el de las compactas. De esta manera, podremos utilizar nuestra teoría de integración del capítulo anterior como herramienta analítica.

El primer problema a plantearse, que repite interrogantes ya que nos hacíamos a propósito de las curvas, es determinar aquellas superficies —compactas— para las que alguna o varias curvaturas tengan un comportamiento más simple. Por ejemplo, ¿cuáles son las superficies compactas con curvatura de Gauss o curvatura media constantes? Pensemos primero en la curvatura de Gauss. Las superficies con curvatura de Gauss constante fueron estudiadas en primer lugar, en cuanto a su geometría local, por F. MINDING (1838) en su relación con las geometrías no euclídeas. En cuanto al caso compacto, la respuesta es la esfera, como afirma el teorema de HILBERT-LIEBMANN, demostrado primeramente por H. LIEBMANN en 1899 y redemostrado por D. HILBERT en 1901. Cabe entonces generalizar el problema de preguntarse por la superficies compactas cuya curvatura de Gauss no cambia de signo. Sabemos por lo ya visto que ese signo debe ser positivo. Nos encontramos pues ante el estudio de las superficies compactas con curvatura de Gauss positiva, los llamamos *ovaloides*, e incluso de las superficies cerradas curvadas positivamente. Todas ellas comenzaron a estudiarse a comienzos de siglo XX por H. MINKOWSKI y W. BLASCHKE, en relación con la teoría de convexos. Demostraremos el teorema de J. HADAMARD (1857) que asegura que los ovaloides son topológicamente esferas y el de STOKER (1936) que demuestra que las superficies cerradas no compactas de curvatura de Gauss positiva son difeomorfas a \mathbb{R}^2 . Además, ambas se caracterizan geoméricamente como la frontera de una región convexa del espacio euclídeo. Precisamente toda esta información sobre los ovaloides nos permitirá redemostrar el teorema de HILBERT-LIEBMANN usando como herramienta las fórmulas integrales llamadas de MINKOWSKI. Asimismo obtendremos una versión del teorema de J.H. JELLET (1853) que, en este contexto, puede enunciarse diciendo que una superficie compacta que sea estrellada respecto de un punto y con curvatura media constante debe ser una esfera.

Estos últimos resultados acerca de los ovaloides nos introducen en la segunda cuestión que planteábamos: ¿cuáles son las superficies compactas con curvatura media constante? A pesar de que, la curvatura de Gauss y la curvatura media nacieron en el siglo XVIII compitiendo por convertirse en hegemónicas y de que, en cierta forma, esa batalla inicial fuera ganada por GAUSS para su curvatura al demostrar su carácter intrínseco, los problemas globales sobre la curvatura media han resultado ser más complicados y, por

ende, más interesantes. De hecho, no fue sino hasta el quinquenio entre 1956 y 1962 que A.D. ALEXANDROV demostró su célebre teorema que, en nuestra situación, dice que la única superficie compacta con curvatura media constante es, de nuevo, la esfera. Este teorema fue verdaderamente sorprendente, no por lo que afirma, sino más bien por el método que ALEXANDROV inventó para demostrarlo, completamente diferente de los de LIEBMANN y de JELLETT, y que se apoya en una ingeniosa utilización de las propiedades de las soluciones de ciertas ecuaciones en derivadas parciales. Esta demostración no es asequible al nivel del curso que desarrollamos y, por ello, este teorema, aun siendo fundamental en la teoría global de superficies, no aparece en los textos más prestigiosos. En 1978, R.REILLY descubrió una nueva demostración que, aunque menos geométrica, era más fácil de entender y sobre todo de explicar, aunque tampoco asequible en un primer curso de Geometría Diferencial Clásica.

Aunque puede que este capítulo sirva de introducción suficiente a la teoría global de superficies en el espacio euclídeo, la hipótesis de la compacidad que ha exigido nuestra teoría de integración y nuestra necesidad de no complicar excesivamente el trabajo, nos impedirá detenernos en el estudio de las superficies que están curvadas negativamente o que tienen curvatura de Gauss cero. Así pues, una buena continuación podría ser la de buscar demostraciones asequibles a los teoremas de HILBERT y de EFIMOV sobre la inexistencia en \mathbb{R}^3 de superficies cerradas curvadas negativamente y el teorema de HARTMANN-NIRENBERG y MASSEY que afirma que las únicas que tienen curvatura cero son los cilindros cuya directriz es una curva cualquiera.

2.2. Superficies de curvatura positiva

En nuestro camino para determinar cuáles son las superficies compactas que tienen curvatura de Gauss o curvatura media constante, vamos a detenernos en el estudio de aquellas superficies cuya curvatura de Gauss no cambia de signo. Sabemos por el Ejercicio 1 —del final del capítulo— que, en una superficie compacta, siempre existe un punto elíptico. Por lo tanto, si en una superficie compacta no cambia el signo de la curvatura, ésta debe ser siempre positiva.

Definición 2.1. *Llamaremos **ovaloide** a una superficie compacta y conexa cuya curvatura de Gauss sea positiva en todo punto.*

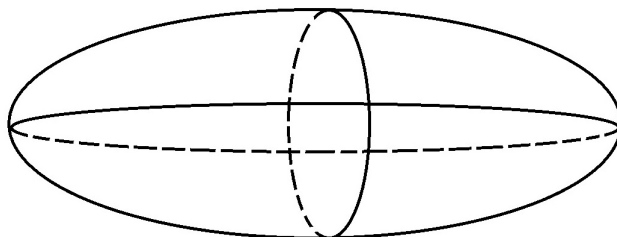


Figura 2.1: Ovaloide.

Más generalmente, en esta sección vamos a dar una descripción completa de la forma que tienen las *superficies cerradas de curvatura positiva*. En lo que sigue, pues, S representará una superficie conexa, cerrada en el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y con curvatura de Gauss positiva en cada punto. Elegimos como orientación en S la determinada por la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ para la cual la segunda forma fundamental es definida positiva en cada punto. Entonces, todas las semirrectas que salen de un punto $p \in S$ con dirección $N(p)$ están localmente a un mismo lado de la superficie, ya que cada dos puntos de S están en un abierto relativamente compacto de S . A esa componente conexa Ω de $\mathbb{R}^3 \setminus S$ hacia la que apuntan inicialmente todas las semirrectas que salen en la dirección determinada por la aplicación de Gauss N que hace definida positiva a la segunda forma fundamental la llamaremos el *dominio interior* de la superficie S . Para hacernos a la idea veamos un ejemplo de dominio interior en la Figura 2.2.

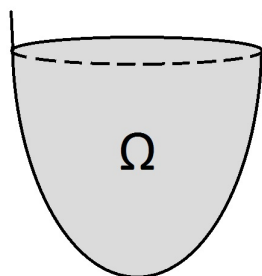


Figura 2.2: Dominio Interior.

Aprovechando la definición de dominio interior introduciremos un concepto y un teorema que quedan lejos del estudio de esta materia en concreto pero nos será bastante útil.

Definición 2.2. Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^3 , un campo —diferenciable— en A es, por definición, una aplicación diferenciable $X : A \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Se define la **divergencia** del campo X como la función $\operatorname{div}X : A \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\operatorname{div}X(p) = \operatorname{traza}(dX)_p \quad p \in A.$$

Teorema 2.3. (Teorema de la divergencia)([5], Teorema 5.7, Pág. 184) Sea S una superficie compacta y conexa y Ω el dominio interior determinado por ella. Si $X : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de vectores, entonces,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}X = - \int_S \langle X, N \rangle,$$

donde $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es el campo normal interior.

Sea S una superficie compacta y $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una aplicación diferenciable. Ahora para lo que sigue definiremos un nuevo concepto.

Definición 2.4. La unión $N_{\delta}(S)$ de todos los segmentos normales de radio $\delta > 0$ centrados en los puntos de una superficie orientable S se llamará **entorno tubular** de radio $\delta > 0$ si es un abierto de \mathbb{R}^3 y la aplicación $F : S \times (-\delta, \delta) \rightarrow N_{\delta}(S)$ definida por

$$F(p, t) = p + tN(p) \quad \text{para cada } (p, t) \in S \times \mathbb{R},$$

es un difeomorfismo.

Llamaremos dominio regular en \mathbb{R}^3 a cualquier abierto Ω conexo y acotado tal que $\partial\Omega$ sea una superficie compacta —no necesariamente conexa—. Por ejemplo, si S_1 y S_2 son superficies compactas y conexas disjuntas tales que sus dominios interiores cumplen que $\Omega_2 \subset \Omega_1$, entonces $\Omega = \Omega_1 - \bar{\Omega}_2$ es un dominio regular tal que $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$. Un ejemplo particularmente importante de esta situación es el siguiente: si S es una superficie compacta y S_t es una superficie paralela suya con $t > 0$ suficientemente pequeño, el abierto $V_t(S)$ definido tal que

$$V_t(S) = F(S \times (0, \epsilon)) \mid \text{subset } N_{\epsilon}(S),$$

es un dominio regular con $\partial V_t(S) = S \cup S_t$ y tal que $\Omega - \bar{\Omega}_t = V_t(S)$, donde Ω y Ω_t son los dominios interiores determinados por S y S_t respectivamente.

Corolario 2.5. (*Teorema de la divergencia en dominios regulares*)([5], Nota 2, Pág. 186) *Para este tipo de dominios Ω tiene sentido hablar de normal interior y entornos tubulares de $\partial\Omega$ y se sigue cumpliendo el teorema de la divergencia*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X = - \int_{\partial\Omega} \langle X, N \rangle,$$

donde la integral sobre $\partial\Omega$ significa la suma de las integrales en cada una de las superficies que son sus componentes conexas.

Un concepto que aparecerá relacionado, de manera natural, con la curvatura de Gauss positiva es el de convexidad de superficies. Normalmente se dice que una superficie es *convexa* cuando queda en el semiespacio cerrado determinado por el plano tangente afín de cada uno de sus puntos. Además se dice que es *estrictamente convexa* cuando es convexa y toca a cada plano tangente sólo en un punto. Hay que precisar que, en principio, este concepto de convexidad para superficies no tiene mucho que ver con la noción de conjunto convexo de la geometría afín. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado que los relaciona. Lo que se refiere a superficies compactas fue demostrado primeramente por Hadamard en 1857 y lo análogo para superficies cerradas no compactas es consecuencia de un resultado de Stoker de 1936.

Teorema 2.6. (*Primera parte del teorema de Hadamard-Stoker*)([5], Teorema 6.1, Pág. 206) *Sea S una superficie convexa, cerrada en \mathbb{R}^3 y con curvatura de Gauss positiva en cada punto y sea Ω su dominio interior. Entonces,*

- A) *Para cada $x, y \in \bar{\Omega}$ se cumple que $\{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in (0, 1)\} \subset \Omega$. En particular Ω es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^3 .*
- B) *La intersección de S con el plano tangente afín a S en cada punto suyo es el propio punto. Además $\bar{\Omega}$ está contenido en todos los semiespacios cerrados de \mathbb{R}^3 determinados por los planos tangentes afines y los normales interiores en los puntos de la superficie.*

Observación 2.7. *La demostración no la incluimos por ser muy extensa y utilizar técnicas que exceden el objetivo del trabajo. Como conclusiones de este teorema podemos destacar que, para $p \in S$ un punto de la superficie, representaremos por Π_p el plano tangente afín a S y por Π_p^+ el semiespacio cerrado de \mathbb{R}^3 determinado por ese plano Π_p y el vector normal interior $N(p)$, es decir,*

$$\Pi_p^+ = h_p^{-1}[0, +\infty) \text{ donde } h_p(q) = \langle q - p, N(p) \rangle \text{ para cada } q \in \mathbb{R}^3.$$

1. Si $p \in S$, la afirmación B) del Teorema, $\bar{\Omega} \subset \Pi_p^+$ es equivalente a

$$h_p(q) = \langle q - p, N(p) \rangle \geq 0 \quad \text{para cada } q \in \bar{\Omega},$$

y la igualdad implica que $q = p$. Por tanto

$$\langle p - q, N(p) \rangle < 0 \quad p \in S \quad q \in \Omega,$$

Esto nos dice que S es estrellada respecto de cualquier punto de su dominio interior, es decir, para cualquier punto p de su dominio interior se tiene que

$$\{\lambda p + (1 - \lambda)q : \lambda \in (0, 1)\} \subset S \quad \text{para todo } q \in S.$$

2. *Intersección de una recta interior con un ovaloide.* Supongamos que S es un ovaloide y Ω el dominio interior que determina. Sea \mathbf{R} una recta de \mathbb{R}^3 que corta al interior del ovaloide, o sea, con $\mathbf{R} \cap \Omega \neq \emptyset$. Como consecuencia del teorema $\mathbf{R} \cap \Omega$ es un convexo no vacío, acotado y abierto en la recta \mathbf{R} . Pero los únicos convexos de una recta son los intervalos. Esto, junto con el hecho de que \mathbf{R} no puede ser tangente en ningún punto a S , por el apartado B), por cortar a Ω nos dice que $\mathbf{R} \cap S$ está formado por exactamente dos puntos, o bien, una recta que toque el interior de un ovaloide lo corta exactamente en dos puntos, cosa que se verá en el Ejercicio 3 del final del trabajo.

El Teorema 2.6 precedente afirma, por lo tanto, que el dominio interior de una superficie cerrada, conexa y con curvatura de Gauss positiva es convexo y que, además, la propia superficie es estrictamente convexa. Para seguir obteniendo resultados acerca de este tipo de superficies necesitamos el lema que sigue, en el que emplearemos la notación que describimos ahora. Si $x \in \mathbb{R}^3$ es un punto del espacio y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ un vector no nulo, representaremos por $\mathbf{R}(x, \vec{v})$ la recta que pasa por x en dirección de \vec{v} y por $\mathbf{R}^+(x, \vec{v})$ el conjunto

$$\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) = \{x + t\vec{v} \mid t \geq 0\},$$

o sea, la semirrecta con origen en x y con dirección y sentido dados por \vec{v} .

Lema 2.8. ([5], Lema 6.2, Pág. 209) *Sea S una superficie cerrada, conexa y con curvatura de Gauss positiva y sea Ω su dominio interior. Entonces,*

a) *Si $\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$ para ciertos $x \in \bar{\Omega}$ y $\vec{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, entonces $\mathbf{R}^+(y, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$ y, además, $\mathbf{R}^+(y, \vec{v}) - \{y\} \subset \Omega$, para cada $y \in \bar{\Omega}$.*

b) No hay rectas contenidas en $\bar{\Omega}$.

Demostración. a) Si suponemos que, para cierto $x \in \bar{\Omega}$ y cierto vector no nulo, $\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$, entonces $x + t\vec{v} \in \bar{\Omega}$ para cada $t \geq 0$. Si $y \in \bar{\Omega}$, por el apartado A) del Teorema 2.5 anterior, vemos que $\{\lambda y + (1 - \lambda)(x + t)\vec{v} : \lambda \in (0, 1)\} \subset \Omega$, para $t \geq 0$. Tomando límite cuando $t \rightarrow \infty$ se tiene que $\mathbf{R}^+(y, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$. Si esa semirrecta tuviera algún punto z en S distinto de su origen y , entonces S y la recta $\mathbf{R}(y, y - z)$ tendrían en z un punto de primer contacto y, esa recta sería tangente en z a la superficie. De nuevo, como z es un punto de curvatura positiva, hay puntos en esa recta próximos y a ambos lados de z que están en el exterior de S . Esto contradice el hecho de que la semirrecta $\mathbf{R}^+(y, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}$. La contradicción desaparece si aceptamos que $\mathbf{R}^+(y, \vec{v})$ no corta a S , salvo quizás en y . Por tanto $\mathbf{R}^+(y, \vec{v}) - \{y\} \subset \Omega$ como queríamos.

b) Supongamos que existe una recta \mathbf{R} dentro de $\bar{\Omega}$. Elegimos un punto $x \in \mathbf{R}$ y sea $\vec{v} \in \mathbb{S}^2$ un vector director de \mathbf{R} . Entonces las dos semirrectas $\mathbf{R}^+(x, \vec{v})$ y $\mathbf{R}^+(x, -\vec{v})$ están en $\bar{\Omega}$. Por lo tanto, si $p \in S \subset \bar{\Omega}$, por el apartado a) que ya hemos probado, las semirrectas $\mathbf{R}^+(p, \vec{v})$ y $\mathbf{R}^+(p, -\vec{v})$ están contenidas en $\bar{\Omega}$. Así pues

$$p + \vec{v} \in \mathbf{R}^+(p, \vec{v}) \subset \bar{\Omega}, \quad p - \vec{v} \in \mathbf{R}^+(p, -\vec{v}) \subset \bar{\Omega}.$$

Usando la parte A) del Teorema 2.6 de Hadamard-Stoker, tendríamos

$$p \in \{\lambda(p - \vec{v}) + (1 - \lambda)(p + \vec{v}) : \lambda \in (0, 1)\} \subset \Omega,$$

que es imposible. □

Teorema 2.9. (Segunda parte del teorema de Hadamard-Stoker)([5], Teorema 6.3, Pág. 210) *Sea S una superficie conexa, cerrada en \mathbb{R}^3 y con curvatura de Gauss positiva en cada punto. Entonces,*

- C) *Si S es un ovaloide, o sea S es compacta, la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo. Por tanto, S es difeomorfa a una esfera.*
- D) *Si S no es compacta, la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es inyectiva y S es un grafo sobre un subconjunto abierto y convexo de un plano.*

Demostración. Estamos suponiendo que nuestra superficie tiene curvatura de Gauss positiva en todo punto. Por la definición de curvatura de Gauss, la aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo local, por el teorema de la función inversa. Veamos ahora que, con nuestras hipótesis, N ha de ser inyectiva. En efecto, si $p, q \in S$ son dos puntos de la superficie con $N(p) = N(q)$, los dos planos tangentes afines Π_p y Π_q son paralelos. Por el apartado B) de la primera parte del teorema, tenemos que $S \subset \bar{\Omega} \subset \Pi_p^+ \cap \Pi_q^+$. Esta intersección coincide con uno de los dos semiespacios, por ser paralelos los planos frontera, por ejemplo, con el Π_p^+ . Por tanto $q \in \Pi_q^+ \subset \Pi_p^+$ y así $q \in \Pi_p^+ \cap \Pi_p^- = \Pi_p$ y, así $\Pi_p = \Pi_q$. Esa misma afirmación B) del teorema nos da

$$\{p\} = S \cap \Pi_p = S \cap \Pi_q = \{q\}.$$

Entonces $p = q$ y N es inyectiva, sea S compacta o no lo sea.

C) Si suponemos ahora que S es compacta, entonces $N(S) \subset \mathbb{S}^2$ es un compacto y, por tanto, cerrado en la esfera unidad. Como N es difeomorfismo local, esa imagen es también un abierto de \mathbb{S}^2 y, por conexión, $N(S) = \mathbb{S}^2$, o sea, N es sobreyectiva. Como conclusión, la aplicación de Gauss N es un difeomorfismo entre S y la esfera \mathbb{S}^2 .

D) Consideramos ahora el caso que S no es compacta y, por tanto, no es acotada. Se puede entonces tomar una sucesión $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos $q_n \in S$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} |q_n| = +\infty$. Entonces, si fijamos un punto cualquiera $q \in S$, como $q, q_n \in S \subset \bar{\Omega}$, por el apartado A) del teorema anterior, tenemos que $\{\lambda q + (1 - \lambda)q_n, \lambda \in [0, 1]\} \subset \bar{\Omega}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si es preciso se puede encontrar un $\vec{a} \in \mathbb{S}^2$ tal que $\mathbf{R}^+(q, \vec{a}) \subset \bar{\Omega}$. Podemos aplicar el Lema 2.8 anterior, parte a), y deducir que

$$\mathbf{R}^+(p, \vec{a}) - \{p\} \subset \Omega \text{ para cada } p \in S.$$

De aquí, si $p \in S$ y existiera otro punto $p' \in S$ en $\mathbf{R}(p, \vec{a})$, uno de los dos p o p' ha de estar en la semirrecta abierta que sale del otro en la dirección de \vec{a} y, así, debería estar en Ω . Por lo tanto

$$\mathbf{R}(p, \vec{a}) \cap S = \{p\} \text{ para todo } p \in S.$$

Además ninguna de estas rectas puede ser tangente a S . La razón es que, si $\mathbf{R}(p, \vec{a})$ fuera tangente a S , por supuesto en p , habría un entorno de p en la recta que estaría contenido, salvo el propio p , en el exterior de S y ello contradiría el hecho de que $\mathbf{R}^+(p, \vec{a}) - \{p\} \subset \Omega$. Por consiguiente, la proyección ortogonal P de \mathbb{R}^3 sobre el plano

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, \vec{a} \rangle = 0\},$$

que pasa por el origen y es perpendicular a \vec{a} es inyectiva restringida a S . Además, si $p \in S$ y $\vec{v} \in T_p S$ está en el núcleo de $(dP)_p$, tenemos

$$0 = (dP)_p(\vec{v}) = P(\vec{v}) = \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{a} \rangle \vec{a}.$$

Como $a \notin T_p S$, se llega a que $\vec{v} = 0$. O sea, que la proyección P es también un difeomorfismo local, por el teorema de la función inversa. La conclusión final es que P es un difeomorfismo entre S y su imagen en Π que es un abierto convexo de ese plano. De otra forma: S es un grafo sobre ese abierto —de una función que ha de ser necesariamente convexa, por serlo Ω —.

□

Los dos teoremas de Hadamard-Stoker son los resultados más fuertes a los que se puede aspirar para superficies cerradas curvadas positivamente. Sin embargo, se puede obtener más información acerca de este tipo de superficies si uno supone que alguna de las curvaturas de la superficie, de Gauss o media, no se aproxima al cero. Para llegar a este tipo de resultados, necesitamos ver que algunas regiones de nuestras superficies se pueden expresar como grafos.

Lema 2.10. ([5], Lema 6.4, Pág. 213) *Sea P un plano que corta al dominio interior Ω de una superficie S cerrada, conexa y con curvatura de Gauss positiva. Entonces existe un abierto V de S que es un grafo sobre $P \cap \Omega$.*

Demostración. Representemos por U al abierto no vacío $P \cap \Omega$ del plano P y supongamos que, dado $\vec{v} \in \mathbb{S}^2$, normal a P , existe un punto $y \in U$ tal que la semirrecta $\mathbf{R}^+(y, \vec{v})$ no corta a la superficie S . Entonces $\mathbf{R}^+(y, \vec{v})$, que es conexo, estará en una de las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^3 \setminus S$ y, ya que $y \in \mathbf{R}^+(y, \vec{v}) \cap \Omega$ se tendrá que $\mathbf{R}^+(y, \vec{v}) \subset \Omega$. Así, por el apartado a) del Lema 2.8, tendremos que $\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) \subset \Omega$ para cada $x \in U$. Pero el apartado b) del mismo lema nos asegura que Ω no contiene rectas. Por consiguiente ninguna semirrecta $\mathbf{R}^+(x, -\vec{v})$ puede estar completamente contenida en Ω , sea cual sea $x \in U$. Sin embargo cada una de ellas tiene el punto $x \in \mathbf{R}^+(x, -\vec{v})$ en Ω . Como consecuencia tendremos que $\mathbf{R}^+(x, -\vec{v}) \cap S \neq \emptyset$ para cada $x \in U$.

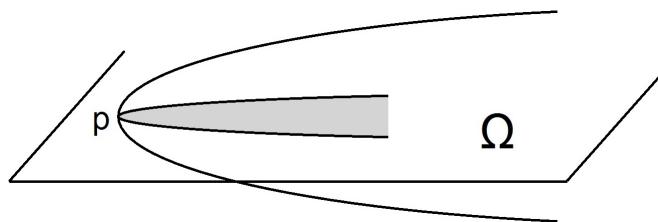


Figura 2.3: Lema 2.10.

Por lo anterior podemos entonces suponer que existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{S}^2$, normal a P , tal que todas las semirrectas $\mathbf{R}^+(x, \vec{v})$ que salen de los puntos x de U en la dirección de \vec{v} cortan a la superficie S . Tenemos pues, por el Teorema 2.6 de Hadamard-Stoker, que cada intersección $\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) \cap \Omega$ es un convexo no vacío, acotado y abierto de la semirrecta $\mathbf{R}^+(x, \vec{v})$ que además contiene al origen x , y esto para cada $x \in U$. Entonces cada $\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) \cap S$ tiene un solo punto para cada $x \in U$ y además la recta $\mathbf{R}(x, \vec{v})$ no es tangente a S en ese punto, ya que, por B) del Teorema 2.6, en ese caso $\mathbf{R}(x, \vec{v})$ no podría tener puntos del interior Ω . Esto quiere decir que, si $f : S \rightarrow P$ es la restricción a S de la proyección ortogonal sobre el plano P , tenemos que f es un difeomorfismo del abierto $V = f^{-1}(U)$ de S en U , o lo que es igual que V es un grafo sobre U .

□

Veremos ahora que, en una superficie cerrada, conexa y curvada positivamente que no sea compacta, la curvatura de Gauss debe acercarse a cero en el infinito y también que el hecho de que la curvatura media no se aproxime a cero en este tipo de superficies, nos da propiedades de acotación.

Teorema 2.11. ([5], Teorema 6.5, Pág. 214) *Sea S una superficie conexa que es cerrada en \mathbb{R}^3 . Son ciertas las afirmaciones siguientes:*

- A) *Si $\inf_{p \in S} K(p) > 0$, entonces S es compacta, o sea, S es un ovaloide.*
- B) *Si S es no compacta, tiene curvatura de Gauss positiva y suponemos también que $\inf_{p \in S} H(p) = h > 0$, entonces S es un grafo sobre un abierto convexo de un plano con diámetro menos o igual que $\frac{2}{h}$.*

Demostración. A) Supongamos que S no fuera compacta y representemos por $k > 0$ al ínfimo de la curvatura de Gauss en S . Por el apartado D) del Teorema de Hadamard-Stoker, sabemos que S es un grafo sobre un abierto convexo de un plano P y que la aplicación de Gauss es un difeomorfismo de S sobre un abierto de \mathbb{S}^2 . Entonces, si \mathcal{R} es una región cualquiera de la superficie S , se tiene

$$kA(\mathcal{R}) = \int_{\mathcal{R}} k \leq \int_{\mathcal{R}} K(p) dp = \int_{\mathcal{R}} |(JacN)(p)| dp.$$

Usando el Teorema de cambio de variables, se tiene entonces que

$$kA(\mathcal{R}) \leq \int_{N(\mathcal{R})} 1 = A(N(\mathcal{R})) \leq 4\pi,$$

y esta cota sirve para cada región \mathcal{R} de la superficie S . Por otra parte, si $\{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in (0, 1)\}$ es un segmento abierto del dominio interior Ω de S , para un $\vec{v} \in \mathbb{S}^2$ normal al plano P , tendremos que $\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) \subset \Omega$ para cada $x \in \{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in (0, 1)\}$. Pero, si $n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$U_n = \{x + t\vec{v} \mid x \in \{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in (0, 1)\}, 0 < t < n\},$$

es un abierto del plano \mathcal{Q} determinado por $\{\lambda a + (1 - \lambda)b : \lambda \in (0, 1)\}$ y por el vector \vec{v} . Aplicando el Lema 2.7 a ese plano \mathcal{Q} , deducimos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un abierto \mathcal{R}_n de la superficie que es un grafo sobre el abierto U_n del plano \mathcal{Q} . Por lo tanto, puesto que la proyección ortogonal sobre un plano disminuye el área —Ejercicio 3—, llegamos a que

$$\frac{4\pi}{k} \geq A(\mathcal{R}_n) \geq A(U_n) = n|a - b|,$$

para todo número natural n . Esto es absurdo y, por tanto, S debe ser una superficie compacta.

B) Como en el caso A) anterior, con nuestras hipótesis y por el apartado D) del Teorema de Hadamard-Stoker, sabemos que S es un grafo sobre un abierto convexo U de un cierto plano P . Sean q_1 y q_2 dos puntos cualesquiera de U y sean p_1 y p_2 los dos puntos de S que se proyectan sobre ellos. Uno de los dos vectores unitarios normales al plano P , que representaremos por \vec{v} , cumple que $\mathbf{R}^+(p_1, \vec{v}) \subset \Omega$ y, por el Lema 2.7, $\mathbf{R}^+(x, \vec{v}) \subset \Omega$ para cada $x \in \{\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 : \lambda \in (0, 1)\}$. Entonces el conjunto

$$V = \{x + t\vec{v} \mid x \in \{\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 : \lambda \in (0, 1)\}, t > 0\},$$

es un abierto del plano \mathcal{Q} determinado por el segmento $\{\lambda p_1 + (1 - \lambda)p_2 : \lambda \in (0, 1)\}$ y el vector \vec{v} . Aplicando el Lema 2.10 a este plano \mathcal{Q} , llegamos a la existencia de un abierto S' de la superficie S que es un grafo sobre este abierto V de \mathcal{Q} . Ahora bien, este V está dentro de una banda plana cuya anchura es $|q_1 - q_2|$. Se concluye entonces por el Ejercicio 4.

□

Observación 2.12. *El Teorema anterior nos asegura que, para superficies cerradas y curvadas positivamente, hay dos o tres direcciones del espacio, según que no se permita a la curvatura media o a la de Gauss aproximarse a cero, respecto de las cuales la superficie está acotada. La afirmación A) concerniente a la curvatura de Gauss es una versión débil de un teorema de Bonnet, del cual es muy conocida una generalización a Geometría de Riemann: el teorema de Bonnet-Myers.*

2.3. Fórmulas de Minkowski y teoremas sobre ovaloides

Si $N_\epsilon(S) \subset \mathbb{R}^3$, para algún $\epsilon < 0$, es un entorno tubular de la superficie, definimos en él, un campo X sin más que extender de forma constante el campo V a lo largo de los segmentos normales. O sea, que

$$(X \circ F)(p, t) = X(p + tN(p)) = V(p) \quad \text{para cada } (p, t) \in S \times (-\epsilon, \epsilon)$$

donde la aplicación F es la descrita en la definición de entorno tubular. Como consecuencia de esta expresión, X es también diferenciable. Le aplicamos ahora a este campo X el Corolario 2.5 de la divergencia en el dominio regular $V_a(S)$, $a \in (0, \epsilon)$, y obtenemos

$$\int_{V_a(S)} \operatorname{div} X = - \int_S \langle X, N \rangle - \int_{S_a} \langle X, N_a \rangle,$$

donde N y N_a son los campos normales interior y exterior de la superficie S y de la paralela S_a a distancia $a \in (0, \epsilon)$. Aplicando la fórmula del cambio de variables a la segunda integral de la derecha para el difeomorfismo $F_a : S \rightarrow S_a$ definido tal que

$$F_a(p) = F(p, a) = p + aN(p),$$

y teniendo en cuenta que $N_a \circ F_a = -N$ y que $X \circ F_a = V$, tenemos

$$\int_{S_a} \langle X, N_a \rangle = - \int_S \langle V, N \rangle (1 - 2aH + a^2K).$$

Por lo tanto

$$\int_{V_a(S)} \operatorname{div} X = -2a \int_S \langle V, N \rangle H + a^2 \int_S \langle V, N \rangle K, \quad (2.1)$$

para todo a tal que $0 < a < \epsilon$. Por otro lado, procedemos a calcular la divergencia del campo X que hemos construido en el entorno tubular $N_\epsilon(S)$ a partir del campo V sobre la superficie S . Para cada $p \in S$ y $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, se tiene por la definición del campo X ,

$$(dX)_{p+tN(p)}(N(p)) = 0 \quad (dX)_{p+tN(p)}(e_i) = \frac{(dV)_p(e_i)}{1 - tk_i(p)} \quad i = 1, 2,$$

donde $\{e_1, e_2, N(p)\}$ es la base de \mathbb{R}^3 formada por el normal a S en p y las direcciones principales en ese punto de la superficie. Así pues

$$(\operatorname{div} X)(p + tN(p)) = \operatorname{traza}(dX)_{p+tN(p)} = \frac{\langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle}{1 - tk_1(p)} + \frac{\langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle}{1 - tk_2(p)},$$

para cada $p \in S$ y cada $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. El lado izquierdo de (2.1) por la definición de integral y el Teorema de Fubini para integrales, es,

$$\int_{V_a(S)} \operatorname{div} X = \int_0^a \int_S [(\operatorname{div} X) \circ F](p, t) |JacF|(p, t) dp dt.$$

Pero, sustituyendo la igualdad $|JacF|(p, t) = (1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p))$ en el valor de la divergencia de X que acabábamos de calcular, se consigue,

$$[(\operatorname{div} X) \circ F](p, t) |JacF|(p, t) =$$

$$\langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle - t[k_2(p)\langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + k_1(p)\langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle].$$

De paso, este cálculo demuestra que las siguientes funciones definidas en la superficie S a partir del campo V

$$p \in S \longmapsto \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle,$$

$$p \in S \longmapsto k_2(p)\langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + k_1(p)\langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de direcciones principales de $T_p S$, son diferenciables. A la primera de ellas la representaremos por $\operatorname{div} V$ y la llamaremos divergencia del campo V . La razón es obvia si se recuerda la Definición 2.2 de divergencia de un campo definido en el espacio euclídeo. Sustituyendo todo en (2.1), queda lo siguiente,

$$\begin{aligned} a \int_S \operatorname{div} V - \frac{1}{2} a^2 \int_S [k_2(p)\langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + k_1(p)\langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle] dp, \\ = -2a \int_S \langle V, N \rangle H + a^2 \int_S \langle V, N \rangle K, \end{aligned}$$

y esto vale para cada $a \in (0, \epsilon)$. Igualando coeficientes en esta igualdad polinómica, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 2.13. (*Teorema de la divergencia sobre superficies*)([5], Teorema 6.6, Pág. 217) *Sea S una superficie compacta y $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo diferenciable de vectores definido en ella. Entonces,*

$$A) \int_S \operatorname{div} V = -2 \int_S \langle V, N \rangle H.$$

$$B) \int_S [k_2(p) \langle (dV)_p(e_1), e_1 \rangle + k_1(p) \langle (dV)_p(e_2), e_2 \rangle] dp = -2 \int_S \langle V, N \rangle K, \text{ donde } \{e_1, e_2\} \text{ es una base ortonormal de direcciones principales en el punto } p \in S.$$

Como consecuencia inmediata podemos obtener las fórmulas integrales de Minkowski.

Teorema 2.14. (*Fórmulas de Minkowski*)([5], Teorema 6.7, Pág. 218) *Sea S una superficie compacta cualquiera, N su aplicación de Gauss interior, H y K sus curvaturas media y de Gauss. Entonces las dos fórmulas integrales que siguen son ciertas:*

$$A) \int_S (1 + \langle p, N(p) \rangle H(p)) dp = 0.$$

$$B) \int_S (H(p) + \langle p, N(p) \rangle K(p)) dp = 0.$$

Demostración. Basta aplicar las dos versiones del Teorema 2.13 anterior, de la divergencia en superficies, al campo $V : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $V(p) = p$ para cada $p \in S$.

□

De estas fórmulas de Minkowski se pueden extraer los dos teoremas globales de Jellett-Liebmann y de Hilbert-Liebmann.

Corolario 2.15. (*Teorema de Hilbert-Liebmann*)([5], Corolario 6.8, Pág. 218) *Una superficie compacta y conexa con curvatura de Gauss constante debe ser una esfera.*

Demostración. Sea S una superficie en esas condiciones. Sabemos que, por el Ejercicio 1, K es una constante positiva —al ser constante y positiva en un punto—. Entonces S es un ovaloide al que le podemos aplicar el Teorema 2.9 de Hadamard —segunda parte—. Si lo hacemos, podemos asegurar que la función soporte con base en cualquier punto interior es negativa. Ahora bien, podemos suponer que el origen de \mathbb{R}^3 está en Ω . Si no fuera así, una traslación lo llevaría a esa situación sin que se alteraran las hipótesis ni la tesis del teorema. Las fórmulas de Minkowski —la última dividida por la constante \sqrt{K} — nos dan

$$\int_S (1 + \langle p, N(p) \rangle H(p)) dp = 0, \quad \int_S \left(\frac{H(p)}{\sqrt{K}} + \langle p, N(p) \rangle \sqrt{K} \right) dp = 0.$$

Restando esas dos igualdades tenemos

$$\int_S \left(\left(1 - \frac{H(p)}{\sqrt{K}}\right) + \langle p, N(p) \rangle (H(p) - \sqrt{K}) \right) dp = 0.$$

Pero como $H^2 \geq K$, tenemos que $H(p) \geq \sqrt{K}$ o bien que $H(p) \leq -\sqrt{K}$, para cada $p \in S$. La alternativa correcta es la primera por el Ejercicio 5. Por tanto

$$1 - \frac{H(p)}{\sqrt{K}} \leq 0 \quad (H(p) - \sqrt{K}) \langle p, N(p) \rangle \leq 0,$$

en cada punto p de S . Así, el integrando anterior es no positivo y tiene integral nula. Utilizando las propiedades de integral, deducimos que ese integrando es nulo. Pero eso obliga a que $H^2 = K$ y entonces S es totalmente umbilical. Se acaba, por lo tanto, utilizando el Teorema 1.51 y añadiendo que la superficie es cerrada tenemos que la superficie S es una esfera. □

Corolario 2.16. (Teorema de Jellett) ([5], Corolario 6.9, Pág. 219) *Las únicas superficies compactas y conexas, estrelladas respecto de un punto, con curvatura media constante son esferas.*

Demostración. Si S es una superficie compacta y convexa y estrellada, por ejemplo, del origen de \mathbb{R}^3 , entonces $0 \in \Omega$, donde Ω es el dominio interior de S . Si no fuera así, por el Ejercicio 7, existirían rectas tangentes a S pasando por el origen. Como la curvatura media H de S es constante, escribimos las fórmulas de Minkowski —la primera de ellas multiplicada por la constante H — y tenemos

$$\int_S (H + H^2 \langle p, N(p) \rangle) dp = 0, \quad \int_S (H + K(p) \langle p, N(p) \rangle) dp = 0.$$

Restando ambas igualdades se consigue

$$\int_S (H^2 - K(p)) \langle p, N(p) \rangle dp = 0.$$

Puesto que $K(p) \leq H(p)^2$ se tiene que el integrando es no positivo. Ahora se acaba como en el teorema anterior. □

2.4. El teorema de Alexandrov

El estudio y caracterización de las superficies compactas de curvatura media constante es quizás algo más elaborado que el caso de la curvatura de Gauss constante. El teorema de Alexandrov resuelve por completo el problema. Como en el caso de la curvatura de Gauss, antes de elaborar directamente la hipótesis de curvatura media constante, consideraremos el caso en que esa curvatura no cambia de signo. Hay que notar que el hecho de que ese signo sea positivo o negativo no es significativo, sino que depende de la orientación que tome la superficie. De todas formas, cuando en una superficie compacta se considera el normal interior, si la curvatura media no cambia de signo, ha de ser positiva, por el Ejercicio 5.

Teorema 2.17. (*Desigualdad de Heintze-Karcher*)([5], Teorema 6.10, Pág. 220)
Sea S una superficie compacta cuya curvatura media H es positiva. Entonces,

$$\text{vol}\Omega \leq \frac{1}{3} \int_S \frac{1}{H(p)} dp,$$

donde Ω es el dominio interior determinado por S . Además, la igualdad se da si y solo si S es una esfera.

Demostración. Definimos un subconjunto A de $S \times \mathbb{R}$ por

$$A = \{(p, t) \in S \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq \frac{1}{k_2(p)}\},$$

donde k_2 es la curvatura principal mayor de S correspondiente al normal interior que, por cumplir $k_1 \leq H \leq k_2$, es positiva en todo punto. Si representamos por $a > 0$ un número mayor que el máximo de la función continua $1/k_2$ en S , entonces A es un compacto contenido en $S \times (0, a)$. El Ejercicio 6 nos dice que el dominio de Ω determinado por S cumple

$$\Omega \subset F(A),$$

donde $F : S \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la recogida en la Definición 2.4 que cumple que $F(p, t) = p + tN(p)$ para cada $p \in S$ y cada $t \in \mathbb{R}$. Aplicamos el Teorema 1.55, en $S \times (0, a)$, a esta aplicación F y a la función χ_A característica del conjunto A y conseguimos la siguiente igualdad integral

$$\int_{\mathbb{R}^3} n(F, \chi_A) = \int_{S \times (0, a)} \chi_A |JacF|.$$

Claramente $n(F, \chi_A) \geq 1$ sobre $F(A) \supset \Omega$ y, entonces aplicando Fubini,

$$\text{vol}\Omega \leq \int_S \left(\int_0^a \chi_A(p, t) |JacF|(p, t) dt \right) dp.$$

Ahora sustituimos el valor absoluto del determinante jacobiano de F y tenemos en cuenta la definición del conjunto A , y llegamos a

$$\text{vol}\Omega \leq \int_S \left(\int_0^{1/k_2(p)} |(1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p))| dt \right) dp.$$

Pero cuando $0 \leq t \leq 1/k_2(p)$, el integrando anterior es no negativo y además, usando la desigualdad $K(p) \leq H(p)^2$,

$$|(1 - tk_1(p))(1 - tk_2(p))| = 1 - 2tH(p) + t^2K(p) \leq (1 - tH(p))^2,$$

y la igualdad se cumple sólo en los puntos umbilicales. Así pues, observando que $1/k_2(p) \leq 1/H(p)$ para cada $p \in S$ y que la función $(1 - tH(p))^2$ es no negativa,

$$\text{vol}\Omega \leq \int_S \left(\int_0^{1/H(p)} (1 - tH(p))^2 dt \right) dp,$$

con igualdad sólo si la superficie S es totalmente umbilical. La demostración se acaba haciendo la integral de la derecha y aplicando la caracterización de superficies totalmente umbilicales —Teorema 1.51— se tiene que la igualdad se cumple si y sólo si S es una esfera.

□

Esta desigualdad de Heintze-Karcher que acabamos de probar en el Teorema 2.17, nos da, en el caso de las superficies de curvatura media constante, información complementaria a la proporcionada por la primera fórmula de Minkowski. Ambas se combinan para dar lugar a uno de los teoremas más bellos de la Geometría Diferencial Clásica.

Teorema 2.18. (*Teorema de Alexandrov*)([5], Teorema 6.11, Pág.221) *Si una superficie compacta y conexa tiene curvatura media constante, entonces es una esfera.*

Demostración. Si S es una superficie en las condiciones del teorema, el Teorema 2.17 anterior nos dice que

$$\text{vol}\Omega \leq \frac{A(S)}{3H},$$

donde Ω es el dominio interior de S y $H > 0$ el valor de la curvatura media respecto del normal interior. Además, si se da la igualdad, es que S es una esfera. Pero esa igualdad se da efectivamente, ya que, la primera fórmula de Minkowski del Teorema 2.14 nos da en este caso

$$A(S) + H \int_S \langle p, N(p) \rangle dp = 0.$$

Basta tener en cuenta que

$$\int_S \langle p, N(p) \rangle dp = -3\text{vol}\Omega,$$

puesto que si S es una superficie compacta y Ω es su dominio interior, considerando el campo identidad $X : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $X(x) = x$ para cada $x \in \bar{\Omega}$, su divergencia es la función constantemente igual a 3. Por tanto, por el Teorema 2.3 de la divergencia se cumple la igualdad.

□

2.5. Ejercicios

En este punto recogeremos algunos ejercicios cuya resolución quizás no sea obvia a priori y nos han ayudado en el desarrollo del capítulo. Algunos de ellos pueden verse como ejercicio de tercero de grado —alguno que otro viene recogido en el libro guía del curso—, pero añadiremos la resolución o al menos unas indicaciones reveladoras de dichos ejercicios con el objetivo de lograr la mayor autocontención posible del trabajo.

Ejercicio 1. Demostrar que toda superficie regular compacta tiene, al menos, un punto elíptico.

Demostración. Como S es compacta, en particular está acotada. Luego existe $r > 0$ tal que $S \subset \mathbb{S}^2(r)$. Además, si disminuimos el radio de la esfera de forma continua, existirá un $r_0 > 0$ de forma que $\mathbb{S}^2(r_0)$ toca a la superficie en un punto p . Vamos a demostrar que p es elíptico.

Como S y $\mathbb{S}^2(r_0)$ se tocan en p , es sencillo ver que $T_p S \equiv T_p \mathbb{S}^2(r_0)$. En efecto, si consideramos la función $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ que da el cuadrado de la distancia al origen, $f(p) = |p|^2$, claramente $df_p(\vec{v}) = 2\langle \vec{v}, p \rangle$ para todo $\vec{v} \in T_p S$, y al ser p un máximo relativo de f , entonces $2\langle \vec{v}, p \rangle = df_p(\vec{v}) = 0$ para todo $\vec{v} \in T_p S$. Luego p es ortogonal a $T_p S$. Pero, dado que $p \in \mathbb{S}^2(r_0)$ y en la esfera el vector posición es siempre ortogonal al tangente, se deduce que el normal $N(p) = \pm p/|p|$ es el mismo para ambas superficies; o equivalentemente, que $T_p S \equiv T_p \mathbb{S}^2(r_0)$.

Sin pérdida alguna de generalidad, elegimos el —común— vector normal $N(p) \llcorner$ apuntando \llcorner hacia el interior. Dado $\vec{v} \in T_p S \equiv T_p \mathbb{S}^2(r_0)$, representamos por $\Pi_{\vec{v}} = \text{span}\{\vec{v}, N(p)\}$, y por $C_{\vec{v}}^1 = \Pi_{\vec{v}} \cap S$ y $C_{\vec{v}}^2 = \Pi_{\vec{v}} \cap \mathbb{S}^2(r_0)$ las correspondientes secciones normales. Sean $\alpha_1 : I \rightarrow C_{\vec{v}}^1$ y $\alpha_2 : I \rightarrow C_{\vec{v}}^2$ parametrizaciones —por el arco— de dichas secciones normales, con $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = p$ y $\alpha_1'(0) = \alpha_2'(0) = \vec{v}$. Como $S \subset \mathbb{S}^2(r_0)$, entonces α_1 está por encima de α_2 y, en consecuencia, $k_{\alpha_1}(0) \geq k_{\alpha_2}(0)$. Además, $k_{\alpha_2}(0) = k_n(\vec{v}, p) = 1/r_0$ —medida en la esfera—, mientras que $k_{\alpha_1}(0) = k_n(\vec{v}, p)$ medida en S . En definitiva, llegamos a que, en la superficie, $k_n(\vec{v}, p) \geq 1/r_0$. Como esto es cálido para todo $\vec{v} \in T_p S$, en particular $k_1(p), k_2(p) \geq 1/r_0$ y, por tanto, $K(p) \geq 1/r_0^2 > 0$ —el punto es elíptico—.

Ejercicio 2. Demostrar que,

$$\int_S K(p) dp = 4\pi,$$

en cualquier ovoide S .

Demostración. Si S es un ovoide, la afirmación C) del Teorema 2.8 de Hadamard, nos asegura que $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es un difeomorfismo. Podemos aplicar la fórmula del cambio de variables a la función definida sobre la esfera unidad y obtener

$$4\pi = A(\mathbb{S}^2) = \int_{\mathbb{S}^2} 1 = \int_S |JacN|.$$

Pero, si $p \in S$

$$|(JacN)(p)| = |(dN)_p(\vec{e}_1) \wedge (dN)_p(\vec{e}_2)|,$$

donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base ortonormal cualquiera de $T_p S$. Por ejemplo, tomando como \vec{e}_1 y \vec{e}_2 las direcciones principales de S en el punto p , tenemos

$$|(JacN)(p)| = |k_1(p)k_2(p)| |\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2| = K(p),$$

ya que la curvatura de Gauss es positiva. Se concluye que

$$\int_S K(p) dp = 4\pi,$$

en cualquier ovoide S .

Ejercicio 3. Sean S una superficie y P un plano de forma que la proyección ortogonal sobre P restringida a S sea un difeomorfismo sobre un abierto $U \subset P$. Demostrar que $A(U) \leq A(S)$. Es decir, la proyección ortogonal sobre un plano disminuye el área.

Demostración. Por el Teorema 1.53 del cambio de variable,

$$A(U) = \int_U 1 = \int_S |Jac\phi|,$$

donde $\phi : S \rightarrow U$ es la restricción de la proyección ortogonal citada. Pero,

$$|Jac\phi| = |\langle N, \vec{a} \rangle| \leq 1,$$

donde N es una aplicación de Gauss de S y \vec{a} es un vector unitario perpendicular al plano P .

Ejercicio 4. *Comparación de dos superficies en un punto.* Sean S_1 y S_2 dos superficies orientables tangentes en un punto $p \in S_1 \cap S_2$ y sean N_1 y N_2 sendas aplicaciones de Gauss tales que $N_1(p) = N_2(p)$. Expresamos S_1 y S_2 , localmente alrededor de p , como grafos de dos funciones f_1 y f_2 respectivamente sobre el plano tangente común. Decimos que S_1 está por encima de S_2 en p si existe un entorno de p en el que $f_1 \geq f_2$.

- a) Si S_1 está por encima de S_2 en p demostrar que $\sigma_1(\vec{v}, \vec{v}) \geq \sigma_2(\vec{v}, \vec{v})$ —donde la aplicación σ_i es la definida antes de la Definición 1.39— para cada $v \in T_p S_1 = T_p S_2$. En particular, $H_1(p) \geq H_2(p)$.
- b) Si $\sigma_1(\vec{v}, \vec{v}) > \sigma_2(\vec{v}, \vec{v})$ para cada $\vec{v} \neq 0$, probar que S_1 está por encima de S_2 en p .

Demostración.

- a) La función $h = f_1 - f_2$ diferencia de las alturas respecto al plano tangente común en $p \in S_1 \cap S_2$, que podemos suponer es el plano $z = 0$, tiene, por hipótesis un mínimo en el origen. Por tanto, su hessiano en el sentido del cálculo es semidefinido positivo. Pero, el hessiano de f_1 y el de f_2 en el origen son las matrices de las segundas formas fundamentales de S_1 y de S_2 en p respecto de la base del plano tangente formada por los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$. Se acaba viendo que el hessiano de h es la diferencia de los de f_1 y de f_2 .
- b) En este caso, la hipótesis implica que $h = f_1 - f_2$ tiene en el origen un punto crítico con hessiano definido positivo. Por lo tanto, tiene ahí un mínimo local. Esto basta para terminar.

Ejercicio 5. Demostrar que, si S es una superficie compacta, existen puntos suyos cuya segunda forma fundamental respecto del normal interior es definida positiva.

Demostración. Veamos que todo punto p de S en donde se alcance un máximo global para una función distancia al cuadrado a un punto fijo $a \in \mathbb{R}^3$ ha de tener segunda forma fundamental definida positiva, respecto del normal interior. En efecto, todos los puntos de la semirecta que sale de a y pasa por p que están más allá de p no pueden ser de S . O sea,

$$p + t(p - a) \notin S \quad \text{para cada } t > 0.$$

Como ese conjunto no es acotado, se tiene que $p + t(p - a) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ para cada $t > 0$. Por otro lado, sabemos que, para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$a = p + \lambda N(p) \quad |\vec{v}|^2 - \lambda \sigma_p(\vec{v}, \vec{v}) \leq 0 \quad \vec{v} \in T_p S.$$

Así pues, se tiene que

$$p + t(p - a) = p - t\lambda N(p) \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \quad t > 0.$$

Luego, si N es el normal interior, $t\lambda > 0$ para cada $t > 0$ pequeño y, así, $\lambda = |p - a| > 0$. Por consiguiente

$$\sigma_p(\vec{v}, \vec{v}) \geq \frac{1}{|p - a|} |\vec{v}|^2 \quad \vec{v} \in T_p S.$$

Ejercicio 6. Sea S una superficie compacta y conexa con curvatura media positiva en cada punto y Ω el dominio interior que determina. Sea $q \in \Omega$ un punto interior a la superficie. Demostrar que si $p \in S$ es el punto de S más cercano a q , entonces $q = p + tN(p)$, donde $N(p)$ es el normal interior y $0 \leq t \leq (1/k_2(p))$.

Demostración. Consideramos la función distancia al cuadrado $f(p) = |p - q|^2$, $p \in S$. Es fácil ver que p es un punto crítico para f si y sólo si q está en la recta normal a S en p —véase [5], Ejemplo 3, Pág.59—. Supongamos que este es el caso, es decir, que

$$q = p + tN(p) \quad \text{para cierto } t \in \mathbb{R},$$

y donde N es una aplicación de Gauss para S . Sea ahora $\vec{v} \in T_p S$ y α una curva en S que represente al vector \vec{v} . Tenemos

$$(d^2 f)_p(\vec{v}) = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} |\alpha(t) - q|^2 = 2|\vec{v}|^2 + 2\langle \alpha''(0), p - q \rangle = 2|\vec{v}|^2 - 2t\langle \alpha''(0), N(p) \rangle.$$

Supongamos que $1 - tk_2(p) \geq 0$, como $k_2(p) \geq H(p) > 0$, se deduce que $t \leq 1/k_2(p)$. Solo falta ver que $t \geq 0$. Como p es el punto de S más cercano a $q \in \Omega$, el segmento que une p con q —y no contiene a p — no corta a S . Como es conexo y corta a Ω , se tiene que dicho segmento está contenido en Ω . Si $t \leq 0$, entonces $p + \lambda N(p) \in \Omega$ para $\lambda \in [t, 0)$, que es imposible. Por lo tanto $t \geq 0$.

Ejercicio 7. Sea S una superficie compacta y conexa y Ω su dominio interior. Demostrar que si $x \notin \bar{\Omega}$, existen al menos dos rectas tangentes a S que pasan por x .

Demostración. Consideremos la función:

$$f(p) = \langle p - x, N(p) \rangle \quad \text{para cada } p \in S.$$

Como S es compacta se encuentran dos puntos distintos $p, q \in S$ en los que la distancia al punto x es máxima y mínima respectivamente. Trabajando de forma parecida a como se ha hecho en el Ejercicio 6 anterior, se ve, usando que $x \notin \bar{\Omega}$, que $f(p) = -|p - x| < 0$ y que $f(q) = |q - x| > 0$. Por ser S conexa, debe existir un punto $r \in S$ en donde $0 = f(r) = \langle r - x, N(r) \rangle$. Además uno puede trazar una curva continua que una p con q en S y que evite el punto r . De esa forma, se obtiene otro punto distinto de r que anula a f . Basta ahora ver que cada punto que anule a la función f proporciona un punto desde donde se traza una tangente que pasa por el punto x .

Bibliografía

- [1] B. Cascales Salinas, P. Lucas Saorín, J. M. Mira Ros, A. J. Pallarés Ruiz, S. Sánchez-Pedreño Guillén: *El libro de LATEX*, Pearson Educación, Madrid, 2003.
- [2] M. P. do Carmo: *Geometría Diferencial de Curvas y Superficies*, Versión española de J. C. Sabina de Lis, Alianza Editorial, Madrid, 1990.
- [3] M. A. Hernández Cifre y J. A. Pastor González: *Un curso de Geometría Diferencial*, Ediciones Doce Calles, CSIC, 2010.
- [4] W. Klingenberg: *Curso de Geometría Diferencial*, Versión española de J.L. Andrés Yebra, Editorial Alhambra, 1978.
- [5] S. Montiel y A. Ros: *Curvas y superficies*, Proyecto Sur de Ediciones, Granada, 1997.
- [6] B. O'Neill: *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, California, 1983.
- [7] R. Osserman: *Curvature in the Eighties*, Amer, Math, Monthly 97(1990), 731-756.
- [8] J. A. Pastor González: *Apuntes de Geometría de Riemann*, Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, 2003.