UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Medida y análisis funcional bajo diferentes axiomas

11 de julio de 2017

Autor:
Clara Corbalán Mirete

Director:
Antonio Avilés López

Medida y análisis funcional bajo diferentes axiomas

Clara Corbalán Mirete

Dirigido por

Antonio Avilés López

Declaración de originalidad

Clara Corbalán Mirete, autora del TFG *Medida y análisis funcional bajo diferentes axiomas*, bajo la tutela del profesor Antonio Avilés López, declara que este trabajo es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

Murcia, a 11 de julio de 2017.

Clara Corbalán Mirete

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración).

"Defiende tu derecho a pensar, porque incluso pensar de manera errónea es mejor que no pensar."
—Hipatia de Alejandría.

Resumen

En 1930 Stalisłav Ulam, discípulo de Banach, planteó el que sería el Problema 99 de lo que pasaría a la historia como *Scottish Book*, un cuaderno utilizado por los matemáticos de la Escuela de Matemáticas de Lwów, en la actual Ucrania, para anotar los problemas que debían resolverse. El cuaderno adoptó el nombre del "Scottish Café", una cafetería frecuentada por los matemáticos de la época y en la que tenían lugar muchas discusiones que, de no haber sido por el cuaderno, habrían caído en el olvido.

El enunciado del problema que es el que sigue:
¿Cualquier subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertenece a la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

Dentro de la axiomática habitual no es posible dar una respuesta afirmativa ni negativa a esta cuestión. Por ello, el objetivo de nuestro trabajo será contestar a este interrogante y a un problema de análisis funcional estrechamente relacionado desde perspectivas alternativas considerando algunos axiomas bien conocidos.

Pero antes de entrar en materia daremos a conocer las coordenadas en las que habitualmente nos encontramos. Por ello, el primer capítulo estará dedicado a la exposición del sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel, a conceptos como buen orden o cardinalidad de un conjunto y al Axioma de Elección; todos herramientas que nos harán falta a medida que avancemos en la empresa que nos ocupa.

A finales del siglo XIX Cantor desarrolló una nueva disciplina a partir de ciertas conclusiones al las que había llegado como fruto del estudio de unos detalles de las series trigonométricas de Fourier, la Teoría de Conjuntos.
Su objetivo era proporcionar un método para lidiar con asuntos relacionados con lo que se conoce actualmente como infinito, un concepto que fue rehuido por algunos matemáticos por considerarlo carente de significado.

Cantor partió de la convicción de que era posible considerar una colección de objetos como una sola entidad, para lo que era necesario aceptar los supuestos siguientes:
i) Un conjunto es una reunión de objetos que cumplen una cierta propiedad, llamados elementos del conjunto, y que, por tanto, queda definido por tal propiedad.
ii) Un conjunto es una sola entidad matemática, de modo que puede a su vez ser contenido por otro conjunto.
iii) Dos conjuntos que tengan los mismos elementos son iguales. Así, puede decirse que un conjunto está determinado por sus elementos.

Sin embargo, este sistema era tan permisivo que dio lugar a resultados contradictorios. Fege trató, sin éxito, de dar una fundamentación adecuada, pues Russell demostró que tal axiomática daba lugar a la conocida paradoja que lleva su nombre.

No fue hasta 1908, cuando E. Zermelo desarrolló su axiomática, que se asentaron las bases de la teoría de conjuntos actual. El objetivo de dicha teoría es determinar la veracidad, falsedad o indecidibilidad de las afirmaciones sobre los conjuntos.

Como parte de este primer capítulo también veremos de manera breve la teoría de los transfinitos de Cantor, pues será la base que usaremos para desarrollar los conceptos de ordinal y cardinal de un conjunto, siendo esta última la más conocida.

Podremos apreciar que la definición de ordinal está íntimamente relacionada con la noción de conjunto bien ordenado, por lo que en el desarrollo del capítulo ésta última le precede.

Los números ordinales son una generalización que amplía la secuencia de los naturales. Por esa razón aunque los números ordinales son propiamente conjuntos inductivos, se denominan "números". Los ordinales constituyen una clase, denominada Ord.

Los naturales se suelen construir como conjuntos tales que cada número natural es el conjunto de todos los números naturales más pequeños. Visto así, cada número natural es un conjunto bien ordenado y es menor que otro si y solo si es un elemento del otro.

Bajo esta convención, se puede demostrar que todo conjunto finito bien ordenado es isomorfo a exactamente un número natural. Este isomorfismo motiva a generalizar esta construcción hacia los conjuntos no finitos y sus correspondientes números que serían más grandes que cualquier número natural.

El concepto de cardinal fue desarrollado y propuesto por Cantor quien, en 1874, lo amplió a conjuntos infinitos, ya que para conjuntos finitos resulta trivial y fue concebido como una herramienta para compararlos. De esta forma, dos conjuntos finitos tendrían la misma cardinalidad si había una relación biyectiva entre sus elementos.

Un cardinal es un ordinal no biyectable con ningún otro ordinal menor. Así, todo ordinal infinito es un cardinal.

Existe una forma de hacer corresponder de una manera biunívoca a cada conjunto un cardinal, conocido como cardinalidad del conjunto, y es tener en cuenta el Principio de Buen Orden, el cual, como veremos, no es otra cosa que el Axioma de Elección.

Formulado por Zermelo en 1904 para demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado, el Axioma de Elección, postula que para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de aquellos.

A diferencia de los axiomas de ZF, el axioma de elección es un axioma no constructivo, en el sentido de que postula la existencia de un conjunto sin dar definición alguna de este. A causa de esto y de que a partir de él se obtienen resultados contraintuitivos, como la paradoja de Banach-Tarski o la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue, fue rechazado tajantemente por la comunidad matemática de la época. Sin embargo, hoy en día es aceptado y usado sin reservas por la mayoría de matemáticos y el sistema axiomático se denota mediante ZFC.

Para concluir el capítulo veremos que este axioma es equivalente a otros principios matemáticos, como son el Principio de Buen Orden y el lema de Zorn.

Nuestro segundo capítulo estará dedicado principalmente al estudio del problema de Ulam. Pero antes de dar la prueba correspondiente será necesario dedicar algunas secciones a la cardinalidad de $\mathbb{R}$, a la construcción de la medida de Lebesgue y a los espacios y medidas producto, pues precisaremos de su uso.

Por una parte, y dado que para demostrar que es posible dar una respuesta afirmativa al problema deberemos considerar la cardinalidad de una serie de conjuntos, entra en juego la Hipótesis del Continuo, CH.

Gracias a Cohen y Gödel sabemos que no se puede demostrar la veracidad o falsedad de CH, por lo que no se podrá demostrar que el problema de Ulam tenga una respuesta afirmativa.

Además de la demostración de que los subconjuntos que considera Ulam pertenecen a la σ-álgebra generada por los rectángulos expondremos un resultado propio al que es posible llegar si se asume CH y, por tanto, que la respuesta al problema es positiva.

Llegar a la respuesta afirmativa del problema no es algo que se pueda hacer únicamente bajo CH. A partir de axiomas más débiles como el Axioma de Martin o que $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}$ se puede llegar a la misma conclusión. Sin embargo, estas pruebas distan demasiado de nuestro objetivo principal, por lo que no las realizaremos. En su lugar, daremos la definición de cardinal $\mathfrak{p}$ y haremos algunas observaciones sobre él.

Por otra parte, una vez hecha la introducción a la medida Lebesgue, dada la existencia de conjuntos que no son medibles, es inevitable plantearse si existe otra medida que coincida con la de Lebesgue y que esté definida para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Es por esto, que se plantea el Axioma de Extensión Total de la Medida.

Gracias a él es posible obtener una respuesta negativa la pregunta planteada por Ulam. Sin embargo, este axioma tiene un grado de consistencia menor que CH, puesto que no es posible demostrar que no se puede demostrar su negación, por lo que para obtener un resultado con mayor solidez deberemos considerar otros axiomas.

Así, veremos que en base a un axioma más débil, como es el del Extensión Parcial de la Media, y haciendo uso del resultado propio que hemos mencionado con anterioridad llegamos a la misma conclusión.

A pesar de ser más débil, la ventaja de este axioma radica en que, a diferencia del anterior, se puede demostrar que ni él ni su negación se pueden probar a partir de la axiomática habitual de la teoría de conjuntos. De esta forma, podemos concluir que es imposible probar que el problema de Ulam tenga una respuesta negativa.

Llegados a este punto del trabajo habremos demostrado que no se puede demostrar ni la veracidad ni la falsedad del enunciado de Ulam, y, por ello, lo podremos considerar como un axioma consistente en ZFC al que llamaremos Axioma de Ulam (UA).

El tercer y último capítulo de este trabajo versará sobre un problema en el campo del análisis funcional que relaciona el problema de Ulam con los espacios universales para los espacios de Banach de cardinal $\mathfrak{c}$.

Gracias a un resultado clásico, y muy avanzado, de Parovichenko en topología, sabemos que bajo CH el espacio cociente ℓ^∞/c_0 es un espacio isométricamente universal para los espacios de Banach de cardinalidad continuo, es decir, que dichos espacios son isométricos a un subespacio del espacio cociente.

Tomando ese resultado como referente nos plantearemos si todo espacio de Banach de cardinalidad continuo es isométrico, o al menos isomorfo, a un subespacio de ℓ^∞/c_0 bajo alguno de los axiomas que habremos desarrollado en el capítulo anterior.

Antes de comenzar con el verdadero problema haremos una introducción a los espacios de Banach y daremos algunos resultados que nos resultarán útiles para afrontar los problemas que se nos plantean. Estudiaremos los espacios de sucesiones ℓ^∞ y c_0 y trabajaremos por primera vez con sumas de espacios de Banach, en concreto, la suma c_0, ya que nos servirá para el caso isomorfo.

El primer caso al que nos enfrentaremos será el isométrico, y demostraremos que bajo la negación de UA se obtiene que ℓ^∞/c_0 no es un espacio universal para todos los espacios de Banach con cardinal $\mathfrak{c}$.

El caso isomorfo requerirá un poco más de dedicación, ya que no es suficiente la negación de UA. Por ello, deberemos enunciar un axioma más fuerte al que llegaremos como resultado de considerar el problema de Ulam en dimensión k y que llamaremos "super no Ulam"(SNU).

A partir de él y de una serie de resultados que iremos probando en la última sección del capítulo demostraremos que bajo SNU ℓ^∞/c_0 no es un espacio isomórficamente universal para los espacios de Banach con cardinal $\mathfrak{c}$.

Concluiremos el trabajo con una serie de observaciones que diferentes matemáticos han hecho sobre estos resultados y que prueban la consistencia de SNU en ZFC.

Abstract

In 1930 Stalisłav Ulam, a Banach's disciple, posed what would become the 99^{th} Problem of what would go down in history as *Scottish Book*, a notebook used by mathematicians of the Lwów School of Mathematics in the present Ukraine for jotting down problems meant to be solved. The notebook was named after the "Scottish Café", a café frequented by mathematicians of the period who would write down the problems and equations directly on the cafe's marble table tops, but these would be erased at the end of each day, and so the record of the preceding discussions would be lost.

Its formulation is the following:
Does every subset of $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ belong to the σ-algebra generated by the sets of the form $A \times B$, where A and B are arbitrary subsets of $\mathbb{R}$?

Within the usual axiomatics it is not possible to give an affirmative nor negative answer to this question. So our main objective would be to give an answer to this issue and also to a related problem in functional analysis from alternative points of view considering some well known axioms.

But before starting our work we will explain the coordinates we usually are. That is why the first chapter is dedicated to the explanation of Zermelo-Fraenkel's axiomatic sistem, of concepts such as well-ordering or cardinality of a set and the Axiom of Choice (CH); all of them necessary tools throughout the progress of the work.

At the end of 19^{th} centrury Cantor developed a new discipline based on some conlusions he reached as a fruit of the study of some details of Fourier's trigonometric series, Set Theory.

His objective of Cantor was to provide a method to deal with issues related with what nowadays we know as infinity, a concept avoided by some mathematicians considering it without meaning.

Cantor started from the conviction that it was possible to consider a collection of objects as a single entity, for which it was necessary to accept the following assumptions:

i) A set is a collection of objects that fulfill a certain property, known as elements of the set, and which, therefore, is defined by such property.
ii) A set is a single mathematical entity, so it can be contained by another set.
iii) Two sets having the same elements are equal. Thus, it can be said that a set is determined by its elements.

However, Cantor's system was so permissive that it gave rise to contradictory results. Fege tried, unsuccessfully, to give an adequate foundation, since Russell demonstrated that such axiomatic caused the well-known paradox that bears his name.

It was not until 1908, when E. Zermelo developed his axiomatics, that the foundations of

current set theory were laid. The purpose of this theory is to determine the truth, falsity or unspeakability of assertions about sets.

As a part of this first chapter we will also briefly look at Cantor's transfinite theory, since it will be the basis we will use to develop the concepts of ordinal and cardinal of a set, being the last one the best known.

We can appreciate that the definition of ordinal is intimately related to the notion of well ordered set, so in the development of the chapter the latter precedes it.

Ordinal numbers are a generalization that extends the sequence of the natural ones. For that reason although ordinal numbers are properly inductive sets, they are called "numbers". Ordinals constitute a class, called Ord.

Natural numbers are usually constructed as sets such that each natural number is the set of all smaller natural numbers. Thus, each natural number is a well ordered set and is smaller than another if and only if it is an element of the other one.

Under this convention, it can be shown that any well-ordered finite set is isomorphic to exactly one natural number. This isomorphism motivates to generalize this construction towards the non finite sets and their corresponding numbers that would be bigger than any natural number.

The concept of cardinal was developed and proposed by Cantor who, in 1874, extended it to infinite sets, since for finite sets it is trivial and was conceived as a tool to compare them. In this way, two finite sets would have the same cardinality if there was a bijective relation between their elements.

A cardinal is a non-bijectable ordinal with no other lower ordinal. Thus, every infinite ordinal is a cardinal.

There is a way to make corresponding in a biunivocal way to each set a cardinal, known as cardinality of the set, and is to consider the Well-Ordering Principle, which, as we shall see, is nothing else than the Axiom of Choice.

Formulated by Zermelo in 1904 to show that any set can be well ordered, the Axiom of Choice postulates that for each family of non-empty sets, there exists another set containing one element of each of those.

Unlike the axioms of ZF, the axiom of choice is a non-constructive axiom, in the sense that it postulates the existence of a set without giving any definition of it. Because of this and from counterintuitive results which are obtained from it, such as the Banach-Tarski paradox or the existence of non Lebesgue measurable sets, it was flatly rejected by the mathematical community of that time. However, today it is accepted and used unreservedly by most mathematicians.

As a final part of this first chapter we shall see that this axiom is equivalent to other mathematical principles, such as the well-ordering principle and Zorn's lemma.

Our second chapter will be mainly dedicated to the study of Ulam's problem. But before giving the corresponding proof it will be necessary to dedicate some sections to the cardinality of $\mathbb{R}$, to the construction of the Lebesgue measure and to the product spaces and product measures, as we will need its use.

On the one hand, and since to demonstrate that it is possible to give an affirmative answer to the problem we must consider the cardinality of a series of sets, the Continuous Hypothesis comes into play.

Thanks to Cohen and Gödel we know neither the veracity nor the insincerity of CH cannot be proven, so we can conclude that it is impossible to prove that Ulam's problem has a positive answer.

In addition to the demonstration the subsets which Ulam considers belong to the σ-algebra generated by the rectangles we will expose an own result to which it is possible to arrive if CH is assumed and therefore the answer to the problem is positive.

Giving an affirmative answer of the problem is not something that can be done only under CH, from weaker axioms such as Martin's Axiom or $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}$ can be reached the same conclusion, nevertheless, those poofs are too far away from our main objective, so we would give the definition of cardinal $\mathfrak{p}$ and some remarks instead.

On the other hand, once the introduction to the Lebesgue measure is made, given the existence of sets that are not measurable, it is inevitable to lay out if there is another measure that coincides with Lebesgue and is defined for all subsets of $\mathbb{R}$. This is why Full Measure Extension Axiom is proposed.

Thanks to it, it is possible to get a negative answer to the question posed by Ulam. However, this axiom has a lower level of consistency, since it is impossible to porve that it is impossible to prove its negation, this is the reason why we consider other axioms.

We will see that considering a weaker axiom, such as the Partial Measure Extension one, and making use of the result that we mentioned earlier, we obtain the same conclusion.

In spite of being weaker, the advantage of this axiom lies in the fact that, unlike the previous one, it can be shown that neither it nor its negation can be proved from the usual axiomatic of set theory. In this way, we can conclude that it is impossible to prove that Ulam's problem has a negative answer.

At this point of the work we will have shown that neither the veracity nor the insincerity of Ulam's statement can be demonstrated and, therefore, we can consider it as a legitimate axiom in ZFC which we will call Ulam's Axiom (UA).

The third and final chapter of this paper will deal with a problem in the field of functional analysis that connects Ulam's problem with the universal spaces for Banach spaces with cardinal $\mathfrak{c}$.

Thanks to a classic, and very advanced, result of Parovichenko in topology, we know that considering CH the quotient space ℓ^∞/c_0 is an isometricaly universal space for Banach spaces with continuum cardinality, that is, spaces are isometric to a subspace of quotient space.

Taking this result as a reference, we will consider whether any Banach space of continuum cardinality is isometric, or at least isomorphic, to a subspace of ℓ^∞/c_0 under some of the axioms we will have developed in the previous chapter.

Before beginning with the real problem we will introduce Banach spaces and give some results which will be useful to face the problems which arise. We will study the spaces of sequences ℓ^∞ and c_0 and we will work for the first time with sums of Banach spaces, specifically, c_0 sum, since it will serve us for the isomorphic case.

The isometric case will be the first we will deal with, and we will show that under negation of UA we get that ℓ^∞/c_0 is not a universal space for all Banach spaces with cardinal $\mathfrak{c}$.

The isomorphic case will require a little more dedication, since the denial of UA is not enough. Therefore, we must formulate a stronger axiom which we will get as a result of considering Ulam's problem in dimension k and which we will call "super no Ulam"(SNU).

From it and from a series of results we will prove in the last section of the chapter that under SNU ℓ^∞/c_0 is not an isomorphically universal space for Banach spaces with cardinal $\mathfrak{c}$.

We will conclude the work with a series of remarks different mathematicians have made on these results and that prove the consistency of SNU in ZFC.

Índice general

Capítulo 1

Axiomática y teoría de conjuntos

El punto de partida de la teoría de conjuntos moderna consiste en admitir que no podemos dar ninguna definición operativa de “conjunto”. Términos como colección, reunión o agrupación se usan en un intento de describir a los conjuntos, pero no constituyen una definición formal. El paso siguiente es darse cuenta de que no necesitamos hacerlo, ya que todo teorema matemático puede ser enunciado como sigue:

Si admitimos que los conjuntos, sean éstos cuales fueren, junto con la relación de pertenencia, sea ésta cual fuere, cumplen unos axiomas dados, entonces tal afirmación es cierta.

Sea como fuere, la lógica permite que estas cuestiones no afecten a la fundamentación de la matemática; tanto si los conjuntos son algo como si no son nada, podemos dar unos axiomas y deducir cosas de ellos con todo rigor.

Por ello, parece natural introducir una relación de pertenencia. El símbolo usual para representar dicha relación es $\in$, de forma que si a es un elemento del conjunto X lo expresaremos como $a \in X$ y su negación como $a \notin X$.

Bajo estos supuestos puede desarrollarse de una manera muy elemental la teoría de conjuntos ya que no es posible obtener resultados tan elaborados como pudiera desearse. Aquí es cuando se hace palpable la necesidad de axiomatizar y formalizar esta teoría, lo cual conlleva renunciar a la definición intuitiva de conjunto, y en su lugar postular una serie de principios que determinen el comportamiento de éste, de forma que los resultados no sean consecuencia de razonamientos intuitivos, sino que se obtienen a partir de tales principios.

En este primer capítulo enunciaremos los axiomas de Zermelo-Fraenkel, el Axioma de Elección y veremos conceptos como el de cardinalidad y el buen orden. Las fuentes utilizadas serán [1], [2], [4] y [6].

1.1. Axiomas de Zermelo-Fraenkel

Fraenkel intentó entre 1922 y 1925 perfeccionar la obra de Zermelo eliminando las paradojas y creando así la axiomática que lleva su nombre (ZF). Además demostró formalmente la independencia del axioma de elección (ZFC).

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel parte de los conceptos de conjunto y pertenencia y consta de los axiomas siguientes:

1. **Axioma de extensionalidad**
   Dos conjuntos x e y son iguales, $x = y$, si y sólo si contienen los mismos elementos. Más

formalmente

$$\forall a(a \in x \leftrightarrow a \in y) \leftrightarrow x = y$$

2. **Axioma del conjunto vacío**
   Existe un conjunto, representado por $\emptyset$ que no posee elementos, esto es

$$\exists\, \emptyset\; \forall a(a \notin \emptyset)$$

3. **Axioma de pares**
   Dados cualesquiera conjuntos x e y, existe otro conjunto, representado por X, Y, cuyos únicos elementos son x e y. Esto es,

$$\forall x, y \exists z \forall a(a \in z \leftrightarrow a = x \vee a = y)$$

4. **Axioma de la unión**
   Dada cualquier colección de conjuntos C, existe un conjunto, representado por $\cup C$ y llamado unión de C, que contiene todos los elementos de cada conjunto de C. Esto es,

$$\forall x \exists y \forall a(a \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \vee a \in z))$$

5. **Axioma de las partes**
   Para cualquier conjunto x existe otro conjunto, representado por $\mathcal{P}(x)$, que contiene todos los subconjuntos de x. Formalmente sería así

$$\forall x \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall a(a \in z \to a \in x))$$

6. **Axioma de reemplazamiento**
   Si $\phi(a, b)$ es una sentencia tal que para cualquier elemento a de un conjunto x el conjunto $y = \{b|\phi(a, b)\}$ existe, entonces existe una función $f : x \to y$ tal que $f(a) = y$.
   Formalmente, si

$$\forall x \forall y \forall z \exists v(x \in v \vee \phi(x, y) \wedge (\phi(x, z) \Rightarrow y = z))$$

   entonces

$$\exists \omega \forall y(y \in \omega \leftrightarrow \exists x(x \in v \wedge \phi(x, y)))$$

7. **Axioma de infinitud**
   Existe un conjunto x tal que $\emptyset \in x$ y tal que si $y \in x$, entonces $y \cup \{y\} \in x$. Es decir,

$$\exists x(\emptyset \in x \vee \forall y(y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$$

8. **Axioma de regularidad**
   Para todo conjunto no vacío x existe un conjunto $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$. En términos formales

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \vee \forall z(z \in y \to z \notin x)))$$

Curiosamente, los axiomas del conjunto vacío y de los pares se deducen del resto de axiomas de ZF, por lo que se pueden omitir.

1.2. Orden

Esta sección estará dedicada a introducir los números ordinales y probar el teorema de la Recursión Transfinita, conceptos que nos resultarán útiles a lo largo del desarrollo del trabajo.

1.2.1. Orden lineal y parcial

Definición 1.1. *Sea X un conjunto dado no vacío y $\mathcal{R}$ una relación binaria definida en X, entonces se dice que $\mathcal{R}$ es:*

i) Reflexiva si $\forall x \in X, x\mathcal{R}x$.

ii) Simétrica si $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

iii) Antisimétrica si se cumple que si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$.

iv) Asimétrica si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}x$ nunca ocurre.

v) Transitiva si $x\mathcal{R}y$ e $y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Se dice que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva. Será de orden si es reflexiva, antisimétrica y transitiva; en tal caso diremos que el par $(X, \mathcal{R})$ es un conjunto ordenado. El orden será estricto si la relación es asimétrica y transitiva.

Notación. Una relación de orden la denotaremos, en lugar de $\mathcal{R}$, por $\leq$. Y a la correspondiente relación de orden estricto por $<$.

Definición 1.2. ***(Orden parcial)*** *Una relación binaria $<$ en un conjunto X es un orden parcial de X si:*

i) $x \not< x$ para cualquier $x \in X$

ii) Si $x < y$ e $y < z$, entonces $x < z$

Entonces $(X, <)$ se dice que es un conjunto parcialmente ordenado. Un orden parcial $<$ de X es un orden lineal si además se cumple que

iii) O bien $x < y$, o bien $x = y$ o bien $y < x$ para cualesquiera $x, y \in X$.

Si $<$ es un orden parcial (lineal), entonces la relación $\leq$ (donde $x \leq y$ si $x < y$ o $x = y$) también se dice que es un orden parcial (lineal).

Definición 1.3. *Sea Y un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(X, <)$.*

- *Se llama elemento minimal (resp. maximal) de Y a un elemento $y \in Y$ para el que no exista $y' \in Y$ tal que $y' < y$ (resp. $y < y'$).*
- *Se llama cota inferior (resp. cota superior) de Y a un elemento $x \in X$ tal que $x \leq y$ (resp. $y \leq x$) para todo $y \in Y$.*
- *Se llama mínimo (resp. máximo) de Y a una cota inferior (resp. superior) que esté en Y. Si existe, es necesariamente único.*
- *Se llama ínfimo (resp. supremo) de Y a la menor (resp. mayor) de las cotas inferiores (resp. superiores) de Y.*

El ínfimo (resp. supremo) de Y, si existe, se denota con $inf\ Y$ (resp. $sup\, Y$). Nótese que si Y es un conjunto con un orden lineal $<$ entonces un elemento minimal (resp. maximal) de Y es el mínimo (resp. máximo).

Definición 1.4. *Si $(X, <)$ e $(Y, <)$ son conjuntos parcialmente ordenados y $f : X \longrightarrow Y$, entonces f conserva el orden si $x < y$ implica que $f(x) < f(y)$. En el caso de que X e Y posean órdenes lineales si f conserva el orden, se dirá que es creciente.*

Definición 1.5. *Una función $f : X \longrightarrow Y$ diremos que es un isomorfismo si tanto f como f^{-1} conservan el orden; $(X, <)$ será isomorfo a $(Y, <)$.*
Un isomorfismo de X en sí mismo es un automorfismo de $(X, <)$.

1.2.2. Buen orden

Definición 1.6. *Un orden lineal de un conjunto X es considerado un* **buen orden** *si todo subconjunto no vacío de X tiene elemento mínimo.*

El concepto de buen orden resultará ser gran relevancia en el desarrollo del trabajo. Más adelante veremos que dos conjuntos bien ordenados pueden ser comparados por sus tamaños; introduciremos los números ordinales como tipos de conjuntos bien ordenados.

Ejemplo 1.7. *Buen orden en $\mathbb{N}$*
Todo conjunto X de $(\mathbb{N}, \leq)$ tiene como elemento mínimo el 0, dado que $\forall x \in X, 0 \leq x$. Veamos que $\leq$ se trata de un buen orden:
Consideremos un subconjunto $X \in \mathbb{N}$ no vacío. Si X no poseyese primer elemento existiría un conjunto $Y = \mathbb{N} \setminus X$ de forma que $0 \in Y$, pues de no ser así 0 sería el elemento mínimo de X. Además si todo natural menor o igual que n está en Y, entonces $n + 1 \in Y$, de lo contrario $n + 1$ sería un elemento mínimo de X.
Por tanto, por inducción $Y = \mathbb{N},\ X = \emptyset$ lo cual contradice que $X \neq \emptyset$. Por lo tanto, X debe tener elemento mínimo.

□

Lema 1.8. *Si $(X, <)$ es un conjunto bien ordenado y $f : X \longrightarrow X$ es una función creciente, entonces $f(x) \geq x, \forall x \in X$.*

Demostración. (De [1], pág 18)
Supongamos que el conjunto $A = \{x \in X : f(x) < x\}$ es no vacío y sea z el elemento mínimo de A. Si $w = f(z)$, entonces $f(w) < w$, lo cual supone una contradicción.

□

Como corolarios de este lema, los cuales se pueden encontrar en [1] pág. 18, se obtiene que el único automorfismo de un conjunto bien ordenado es la identidad y que si dos conjuntos bien ordenados son isomorfos entonces el isomorfismo entre ellos es único.

Definición 1.9. *Dado un conjunto X, $x \in X$, y un buen orden $\prec$ en X, sea $I_\prec(x) = \{t \in X : t \prec x\}$ el segmento inicial de los elementos que son más pequeños que x.*

Lema 1.10. *Ningún conjunto bien ordenado es isomorfo a un segmento inicial de sí mismo.*

Demostración.(De [1], pág 18)
Si consideramos como buen orden $<$ y el segmento inicial $I_<(u)$, se tiene que $f(u) < u$, lo que contradice el lema 1.8.

□

Teorema 1.11. *Si X_1, X_2 son dos conjuntos bien ordenados, entonces se cumple exactamente una de las siguientes afirmaciones:*
(i) X_1 es isomorfo a X_2.
(ii) X_1 es isomorfo a un segmento inicial de X_2.
(iii) X_2 es isomorfo a un segmento inicial de X_1.

Demostración. Se puede consultar en [1] pág. 18.

□

Por tanto, si dos conjuntos son isomorfos diremos que tienen la misma clase de orden. Visto esto, pasemos ahora a definir los números ordinales, los cuales, informalmente, consideraremos las clases de orden de los conjuntos bien ordenados.

1.2.3. Números ordinales

En ZFC podemos desarrollar la teoría cantoriana de los ordinales transfinitos y los números cardinales. Siguiendo la definición dada por Von Neumann en los años 20, los números ordinales se obtienen partiendo de un conjunto vacío y llevando a cabo dos operaciones: tomar el sucesor y hacer el paso al límite. Así, el primer ordinal es $\emptyset$. Veamos su construcción formal:

Definición 1.12. *Un conjunto T se dirá* ***transitivo*** *si todo elemento de T es subconjunto de T. Equivalentemente, $\bigcup T \subset T$ o $T \subset P(T)$.*

Definición 1.13. *Un conjunto es un número ordinal, u* ***ordinal****, si es transitivo y está bien ordenado por la relación $\in$.*

Es decir, un conjunto S es un ordinal si y solo si S está totalmente ordenado con respecto a la inclusión de conjuntos y todo elemento de S es también un subconjunto de S.

Denotaremos los ordinales con letras minúsculas griegas, y la clase de los ordinales mediante *Ord*. De esta forma definimos

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta, \text{ donde } \alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}.$$

Lema 1.14. *Los ordinales cumplen las siguientes propiedades:*
i) $0 \neq \emptyset$ es un ordinal.
ii) Si α es un ordinal y $\beta \in \alpha$ entonces β es un ordinal.
iii) Si $\alpha \neq \beta$ son ordinales y $\alpha \subset \beta$, se tiene que $\alpha \in \beta$.
iv) Si α, β son ordinales o bien $\alpha \subset \beta$ o bien $\beta \subset \alpha$.

Demostración. Se puede consultar en [1], pág 19.

□

Gracias a este lema podemos observar lo siguiente:
- $<$ es un orden lineal para la clase *Ord*.
- Para todo α, $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$.
- La clase de los ordinales es cerrada bajo uniones e intersecciones y además $\bigcap C = \inf C$ y $\bigcup C = \sup C$ para todo C conjunto no vacío de la clase de los ordinales.
- Para todo α, se tiene que $\alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal y $\alpha \cup \{\alpha\} = \inf \{\beta : \beta > \alpha\}$.

De esta forma definimos el sucesor de α como $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Ahora podemos pasar a probar que la definición anterior de ordinales nos proporciona clases de orden de los conjuntos bien ordenados.

Teorema 1.15. *Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.*

Demostración. (De [1], pág 20)
La unicidad se sigue del lema 1.10. Dado un conjunto bien ordenado W, podemos encontrar un ordinal isomorfo de la siguiente forma:
Definimos $F(x) = \alpha$ si α es isomorfo al segmento inicial $W_<(x)$. Si α, así definido, existe entonces es único. Por el axioma de reemplazamiento sabemos que $F(W)$ es un conjunto.
Entonces tenemos que para cada $x \in W$ existe un α en esas condiciones, si no fuese así considérese el menor x para el cual α no existe. Si γ es el menor elemento tal que $\gamma \notin F(W)$, entonces $F(W) = \gamma$, lo cual nos da un isomorfismo de W en γ.

□

Definición 1.16. *Si $\alpha = \beta + 1$ diremos que es un* ***sucesor ordinal****. Si α no es un sucesor ordinal, entonces $\alpha = \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \bigcup \alpha$; un* ***ordinal límite****. El 0 se considera un ordinal límite, y se define como sup $\emptyset = 0$.*

Definición 1.17. ***(Números naturales)*** *Denotaremos el menor ordinal límite no nulo como ω, o $\mathbb{N}$. Los ordinales menores que ω, elementos de $\mathbb{N}$, son los ordinales finitos, o números naturales.*

Definición 1.18. *Un conjunto X es* ***finito*** *si existe una correspondencia biunívoca de X en algún $n \in \mathbb{N}$. Diremos que X es infinito si no es finito.*

1.2.4. Inducción y recursión transfinitas

La inducción transfinita es una extensión de la inducción usual a conjuntos bien ordenados, tales como conjuntos de ordinales o cardinales.

Supóngase que si para todo $\beta < \alpha$ es válida una cierta propiedad $P(\beta)$, entonces $P(\alpha)$ también es cierta. Así, por inducción transfinita, P vale para todos los ordinales.

En términos prácticos, esto significa que para probar una propiedad P para todos los ordinales α, se puede asumir que ya está demostrada para todos los $\beta < \alpha$.

Teorema 1.19. ***(Inducción transfinita)*** *Sea C una clase de ordinales y asumamos que:*
i) $0 \in C$.
ii) Si $\alpha \in C$ entonces $\alpha + 1 \in C$.
iii) Si α es un ordinal límite no nulo y $\beta \in C$ para todo $\beta < \alpha$ entonces $\alpha \in C$.
Entonces C es la clase de todos los ordinales.

Demostración. (De [1], pág 21)
Supóngase que no es así. Sea α el menor ordinal $\alpha \notin C$ y aplíquese i), ii) o iii).

□

Definición 1.20. *Una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$ diremos que es una* ***sucesión infinita*** *y la denotaremos como $\langle a_n : n < \omega \rangle$.*

Una ***sucesión finita*** *será una función s tal que $dom(s) = \{i : i < n\}$ para algún $n \in \mathbb{N}$, de esta forma la sucesión tendrá longitud n.*

Una ***sucesión transfinita*** *será una función cuyo dominio sea un ordinal: $\langle a_\xi : \xi < \alpha \rangle$ y diremos que es una sucesión de longitud α. Si s es una de ellas entonces sx denota la sucesión de longitud $\alpha + 1$ que extiende s y cuyo α-ésimo término es x: $sx = s \cup \{(\alpha, x)\}$.*

La **recursión transfinita** es un método de construcción o definición estrechamente relacionado con el concepto de inducción transfinita. Por lo general, la definición por recursión transfinita se da del siguiente modo:

Dada una función G perteneciente a la clase de las sucesión transfinitas existe una única θ-sucesión $\langle a_\alpha : \alpha < \theta \rangle$ para todo θ de forma que $a_\alpha = G(\langle a_\xi : \xi < \alpha \rangle)$ para cualquier $\alpha < \theta$.

Existe una versión más general de este teorema de forma que podemos construir sucesiones $\langle a_\alpha : \alpha \in Ord \rangle$.

Teorema 1.21. ***(Recursión transfinita).*** *Sea G una función, entonces*

$$F(\alpha) = x \Leftrightarrow \text{ existe una sucesión } \langle a_\xi : \xi < \alpha \rangle \text{ tal que:}$$

i) $a_\xi = G(\langle a_\eta : \eta < \xi \rangle)$, $\forall \xi < \alpha$
ii) $x = G(\langle a_\eta : \eta < \xi \rangle)$
define una única función F en Ord tal que

$$F(\alpha) = G(F \restriction \alpha)$$

para todo α.

Demostración. Se puede consultar en [1] pág. 22.

□

En otras palabras, si $a_\alpha = F(\alpha)$, entonces para todo α se tiene

$$a_\alpha = G(\langle a_\xi : \xi < \alpha \rangle).$$

Es posible extender las operaciones de suma y producto de los números naturales a todos los ordinales mediante recursión transfinita. Por ejemplo, el ordinal $\alpha + \beta$ es la clase de orden del conjunto bien ordenado que se obtiene como resultado de concatenar dos conjuntos bien ordenados con clases de orden α y β. De esta forma la secuencia de los ordinales bien ordenados por la relación $\in$ es la que sigue:

$$0,\ 1,\ 2, ...,\ \omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2, ...,\ \omega + \omega, ...,\ n\omega, ...,\ \omega\omega, ...,\ \omega^n, ...,\ \omega^\omega, ...$$

Recordemos que un conjunto infinito es numerable si se puede establecer una correspondencia biunívoca con ω. Todos los ordinales que hemos descrito son finitos o numerables. Sin embargo, el conjunto de todos los ordinales finitos y numerables es también un ordinal, llamado ω_1, y éste es no numerable.

De manera similar, el conjunto de todos los ordinales que son biyectables con algún ordinal menor o igual que ω_1 es también un ordinal, llamado ω_2, el cual no es biyectable con ω_1. De esta forma vamos obteniendo el resto de ordinales no biyectables.

1.3. Cardinalidad

Dados con conjuntos X e Y, diremos que tienen la misma cardinalidad,

$$|X| = |Y| \tag{1.1}$$

si existe una biyección entre ellos. Ésta es una relación de equivalencia, por tanto a cada conjunto X se le puede asignar su cardinal $|X|$ y a dos conjuntos se les asignará la misma cardinalidad únicamente en caso de que cumplan la condición 1.1.

Los cardinales se pueden definir tanto utilizando el Axioma de regularidad como el de Elección. En esta sección definiremos los números cardinales de los conjuntos bien ordenados; se sigue del Axioma de Elección que cada conjunto puede estar bien ordenado, esto define los cardinales en ZFC.

Recordemos que un conjunto X es finito si $|X| = |n|$ para algún $n \in \mathbb{N}$; en tal caso diremos que X tiene n elementos. Es evidente que $|n| = |m|$ si y sólo si $n = m$, por lo que definimos los cardinales finitos como números naturales, es decir, $|n| = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. El orden de los números cardinales se define como sigue:

Definición 1.22. *Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva si en X no existen dos o más elementos a los que les corresponda la misma imagen en Y.*

Definición 1.23. *Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es suprayectiva si cada elemento de Y es imagen de al menos un elemento de X. En este caso diremos que la imagen de f coincide con Y, y lo denotaremos como $Im(f) = Y$.*

Definición 1.24. *Dados dos conjuntos X e Y diremos que el cardinal de X es menor o igual que el cardinal de Y, y escribiremos $|X| \leq |Y|$, si existe una función inyectiva $f : X \longrightarrow Y$.*

Teorema 1.25. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es suprayectiva se cumple que $|X| \geq |Y|$.*

Demostración.
Supongamos que tenemos $Im(f) = Y$, sabemos que para todo $y \in Y$ existe un conjunto no vacío de X, al que llamaremos preimagen de y y denotaremos como $f(\{y\})^{-1}$, tal que $f(x) = y$ para todo $x \in f(\{y\})^{-1}$.

Haciendo uso de AC podemos elegir un único elemento de $f(\{y\})^{-1}$ para asociarlo a cada $y \in Y$. De esta forma aseguramos la existencia de una función $g : Y \longrightarrow X$ inyectiva y por definición $|Y| \leq |X|$.

□

Teorema 1.26. ***(Cantor).*** *Para todo conjunto X se cumple que $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$.*

Demostración. Se puede consultar en [1], pág 27.

□

La relación $\leq$ de la definición anterior es claramente transitiva, y el siguiente teorema nos muestra que es también asimétrica y, por tanto, que tal orden es un orden parcial:

Teorema 1.27. ***(Cantor-Bernstein).*** *Si $|X| \leq |Y|$ y $|Y| \leq |X|$ existe una biyección entre X e Y, i.e., $|X| = |Y|$.*

Demostración. (De [1], pág. 28)
Si $f_1 : X \longrightarrow Y$ y $f_2 : Y \longrightarrow X$ son biyecciones y tomamos $Y' = f_2(Y)$ y $X_1 = f_2(f_1(X))$, se tiene que $X_1 \subset Y' \subset X$ y $|X_1| = |X|$.
Supongamos que $X_1 \subset Y \subset X$ y que f es una función biyectiva de X en X_1. Debemos probar que $|X| = |Y|$.
Definamos por inducción para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$X_0 = X, \quad X_{n+1} = f(X_n)$$

$$Y_0 = Y, \quad Y_{n+1} = f(Y_n)$$

Sea g una función en X tal que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X_n - Y_n \text{ para algún n} \\ x, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es fácil comprobar que g es una biyección entre X y Y, por lo que se deduce que $|X| = |Y|$.

□

Teorema 1.28. *Para cada conjunto X existe una relación de buen orden en X de manera que $|I_\prec(x)| < |X|$ para todo $x \in X$.*

Demostración. (De [4], pág. 2)
Sea $\prec$ un buen orden en X. Si $\prec$ no cumple la propiedad sea y el mínimo de todos los x de forma que $|I_\prec(x)| \geq |X|$. Entonces existe una función inyectiva $f : X \longrightarrow I_\prec(y)$ con lo que se puede definir un nuevo orden $\prec_1$ en X asumiendo que $x \prec_1 x'$ si y sólo si $f(x) \prec f(x')$. Por tanto, $\prec_1$ es el orden buscado.

□

La aritmética con cardinales para $|A| = \kappa, |B| = \lambda$, con A, B disjuntos se define como sigue
- $\kappa + \lambda = |A \cup B|$
- $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$
- $\kappa^\lambda = |A^B|$

Evidentemente estas definiciones son válidas si y sólo si son independientes de la elección de A y B.

Lema 1.29. *Si $|A| = \kappa$ entonces $\mathcal{P}(A) = 2^\kappa$.*

Demostración. (De [1], pág 28)
Para todo $X \subset A$, sea la función característica

$$\chi_X(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in X \\ 0, & \text{si } x \in A - X \end{cases}$$

La aplicación $f : X \longrightarrow \chi_X$ es una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{P}(A)$ y $\{0,1\}^A$.

□

Esto nos lleva a plantearnos que el teorema de Cantor 1.26 se puede formular del siguiente modo:

$$\kappa < 2^\kappa, \text{ para todo cardinal } \kappa$$

1.3.1. Alephs

Diremos que un ordinal es un cardinal si no existe una biyección con un ordinal menor, es decir, $|\alpha| \neq |\beta|$ para todo $\beta < \alpha$. De esta forma, todos los ordinales finitos se consideran cardinales, y de igual modo, también lo son $\omega,\ \omega_1,\ \omega_2, \ldots$.

Los cardinales infinitos se representan con la letra hebrea $\aleph$ y se tiene que $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_1 = \omega_1$, $\aleph_2 = \omega_2$,...

Aquellos conjuntos cuyo cardinal sea $\aleph_0$ se considerarán **numerables**, un conjunto será a lo sumo numerable si es finito o numerable. Los conjuntos infinitos con un cardinal mayor se dirá que son **no numerables**.

1.4. El axioma de elección

Pasemos ahora a hablar del Axioma de Elección, el cual resulta clave en la Teoría de Conjuntos. En la primera axiomatización de ésta, también llevada a cabo por Zermelo, en 1908, éste aparecía dentro de los axiomas que postuló. Sin embargo, en el sistema ZF, formulado en 1930, fue excluido debido a las diferencias existentes entre el resto de axiomas y él.

Axioma de elección (AC). Toda familia de conjuntos no vacíos posee una función de elección.

Definición 1.30. *Si S es una familia de conjuntos no vacíos, una función de elección para S es una función $f : S \longrightarrow \cup S$ tal que*

$$f(X) \in X, \ \forall X \in S$$

Gracias a la investigación llevada a cabo por Gödel y Cohen se sabe que AC es lógicamente independiente del resto de axiomas de la teoría de conjuntos y muchos de los teoremas que hoy conocemos son indemostrables en ZF sin AC.

La existencia de una función de elección puede ser probada en algunos casos triviales únicamente con ZF:
i) Si todo $X \in S$ es un conjunto con un solo elemento, $X = \{x\}$
ii) Si S es finito; por inducción en el tamaño de S
iii) Si todo $X \in S$ es un subconjunto finito de $\mathbb{R}$; tomando $f(X) =$"primer elemento de X"

Porposición 1.31. *Sea S familia finita de conjuntos no vacía. Entonces, S posee una función de elección.*

Demostración.
Supongamos que S tiene un único conjunto. Al ser este no vacío existe una función de elección. Por inducción se obtiene el resultado[1].

□

La dificultad aparece cuando no hay una elección natural de elementos de cada conjunto. Un ejemplo de esto es suponer que X sea el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de los reales. En este caso ni por inducción ni tomando el elemento mínimo de cada conjunto obtendríamos el resultado deseado, ya que hay subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no tienen mínimo con el orden usual.

Usando AC podemos probar que todo conjunto puede ser bien ordenado y, por tanto, que todo conjunto infinito tiene cardinalidad igual a algún $\aleph_\alpha$. En particular, cualesquiera dos conjuntos tienen cardinales comparables y el orden $\leq$ es un buen orden para la clase de los cardinales.

Teorema 1.32. ***Buen orden de Zermelo (WO)*** *Todo conjunto puede estar bien ordenado.*

Demostración. (De [1], pág 48)
Sea A un conjunto cualquiera. Para que A esté bien ordenado es suficiente construir una sucesión transfinita $\langle a_\alpha : \alpha < \theta \rangle$ de forma que enumere A. Esto lo podemos hacer por inducción, usando una función de elección f para la familia S de los subconjuntos no vacíos de A.

[1] El principio de inducción se deduce de ZF. Ver [1], ejercicio 1.9

Pongamos para cada α
$$a_\alpha = f(A - \{a_\xi : \xi < \alpha\})$$
si $A - \{a_\xi : \xi < \alpha\}$ es no vacío, y sea θ el menor ordinal tal que $A = \{a_\xi : \xi < \theta\}$. Evidentemente, $\langle a_\alpha : \alpha < \theta \rangle$ enumera A.

□

Llegados a este punto nos surge el siguiente interrogante: aunque con el orden usual de los reales no se pueda encontrar tal función ¿podría darse un orden diferente de forma que la función de elección pueda ser tomar el elemento mínimo de cada conjunto respecto a este nuevo orden?
De esta forma el problema se reduciría a encontrar un buen orden en $\mathbb{R}$, es decir, todo conjunto está bien ordenado si y sólo si es cierto el axioma de elección.

Resulta de gran relevancia el hecho de que el conjunto de los reales pueda estar bien ordenado, pues de esto se deduce que $2^{\aleph_0}$ es un aleph y que $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$.

La existencia de un buen orden en $\mathbb{R}$ da lugar a algunos contraejemplos curiosos, como el conjunto de Vitali o el conjunto no numerable de reales que carece de subconjunto perfecto.

1.4.1. Uso el axioma de elección

Existen varias versiones de AC, pero la más utilizada es el lema de Zorn, aquí tenemos algunos ejemplos de teoremas en los que se hace uso de él:
- Todo espacio vectorial posee una base.
- Todo cuerpo posee una única clausura algebraica.
- El Teorema de Extensión de Hahn-Banach.

Veamos ahora su enunciado, una de las muchas pruebas que existen y que efectivamente es equivalente al axioma de elección.

Recordemos que si $(P, <)$ es un conjunto no vacío parcialmente ordenado, entonces un elemento $a \in P$ se dirá que es maximal si no existe $x \in P$ tal que $a < x$. Y si X es un subconjunto no vacío de P, entonces $c \in P$ es una cota superior de X si $x \leq c$ para todo $x \in X$.

Definición 1.33. *Si C es un conjunto ordenado y $S \subseteq C$, decimos que S es una cadena si se cumple que $\forall x, y \in S \ \ (x \leq y \text{ o } y \leq x)$.*

Porposición 1.34. *No existe ningún conjunto ordenado no vacío tal que toda cadena tenga una cota superior estricta.*

Demostración. Se puede consultar en [5], pág 17.

□

Teorema 1.35. ***Lema de Zorn (ZL)*** *Sea C un conjunto ordenado no vacío. Si toda cadena de C tiene cota superior, entonces C posee algún elemento maximal.*

Demostración. (De [5], pág 18)
Sea C un conjunto ordenado tal que toda cadena admite cotas superiores. Por la proposición anterior sabemos que existe alguna cadena S de C que tiene cotas superiores, pero no estrictas.

Sea m una cota superior de S. Como no es estricta, $m \in S$. Sea $m \leq x$ con $x \in C$. Si $x \notin S$, sería x una cota superior estricta de S, lo que resulta imposible.

Luego $x \in S$, y $x \leq m$ por ser m cota superior de S. De esto se deduce que $x = m$, de forma que m es maximal en C.

□

Teorema 1.36. *El lema de Zorn es equivalente al Axioma de Elección.*

Demostración. Se puede consultar en [7], pág 162.

□

Esto lo podríamos expresar con el siguiente esquema a modo de resumen:

$$(AC) \Leftrightarrow (ZL) \Leftrightarrow (WO)$$

Capítulo 2

El problema de Ulam

Como ya hemos mencionado con anterioridad, Ulam planteó un problema que resulta interesante desde la perspectiva del análisis funcional ya que para poder dar una respuesta es necesario hacerlo desde el punto de vista de una axiomática distinta a la que estamos acostumbrados, de hecho, dependiendo del axioma que estemos considerando podremos dar una respuesta afirmativa o negativa. Recordemos el enunciado:

¿Cualquier subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertenece a la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$?

Los conjuntos del del plano del tipo $A \times B$ los llamaremos rectángulos. La σ-álgebra que generan los conjuntos de la forma $(a, b) \times (c, d)$ es la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}^2$, por lo que el problema que planteó Ulam es en realidad acerca de rectángulos arbitrarios.

En este segundo capítulo comenzaremos dando la respuesta positiva, para lo cual nos valdremos de CH. Por ello, será necesario dar unas nociones básicas acerca del cardinal del continuo y de la consistencia de CH o su negación con la axiomática de Zermelo-Fraenkel. Igualmente, expondremos un resultado original que se deduce del supuesto de que el problema de Ulam tenga una respuesta afirmativa.

Asimismo, dedicaremos una sección a la definición del cardinal $\mathfrak{p}$ y a demostrar algunas de sus propiedades, ya que éste se puede utilizar en una prueba alternativa del problema. Sin embargo, como ya hemos mencionado con anterioridad, esto último difiere demasiado de la temática del trabajo, por lo que no la realizaremos.

Tras esto veremos la demostración de la respuesta negativa al problema que nos ocupa. Para ello nos será útil el Axioma de Extensión Total de la Medida, por lo que dedicaremos un par de secciones a la construcción de la medida de Lebesgue y el espacio y medida producto.

Además de esto, daremos una prueba alternativa para la respuesta negativa en la que usaremos una versión más débil del axioma anterior y nos apoyaremos en el resultado propio que hemos mencionado antes.

2.1. Una respuesta afirmativa

2.1.1. Cardinalidad de $\mathbb{R}$

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es el único cuerpo en el que todo subconjunto no vacío posee una cota superior. La demostración del siguiente teorema marcó el inicio del desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor.

Teorema 2.1. ***(Cantor).*** *El conjunto de todos los números reales es no numerable.*

Demostración. (De [1], pág 37.)
Supongamos que $\mathbb{R}$ es numerable, y sea $c_0,\ c_1, ...,\ c_n, ...$ con $n \in \mathbb{N}$ una enumeración de $\mathbb{R}$. Debemos encontrar un número real diferente de cada c_n.

Sea $a_0 = c_0$ y $b_0 = c_{k_0}$ donde k_0 es el menor k tal que $a_0 < c_k$. Para cada n, sea $a_{n+1} = c_{t_n}$ donde i_n es el menor i tal que $a_n < c_i < b_n$, y $b_{n+1} = c_{k_n}$ donde k_n es el menor k tal que $a_{n+1} < c_k < b_n$. Si tomamos $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $a \neq c_k$ para todo k.

□

Cardinal $\mathfrak{c}$

Denotemos la cardinalidad de $\mathbb{R}$ con $\mathfrak{c}$. Dado que el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, todo número real r es igual a $\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ y dado que $\mathbb{Q}$ es numerable se tiene que $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$.

Sea C el conjunto de Cantor de todos los reales de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$, donde cada $a_n = 0$ o 2. El conjunto C se obtiene eliminando del intervalo cerrado $[0,1]$ la los intervalos abiertos $(\frac{1}{3},\frac{2}{3}),\ (\frac{1}{9},\frac{2}{9}),(\frac{7}{9},\frac{8}{9}),....$ Se tiene que existe una correspondencia biunívoca entre C y el conjunto de todas las ω-sucesiones de ceros y doses, de forma que $|C| = 2^{\aleph_0}$.

Por tanto, se tiene que $\mathfrak{c} \geq 2^{\aleph_0}$ y por el teorema de Cantor-Bernstein 1.27, se cumple que

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$$

Por el Teorema de Cantor 2.1 sabemos que $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Cantor conjeturó que todo conjunto de números reales es a lo sumo numerable o tiene la cardinalidad del continuo. En ZFC, todo cardinal infinito es un aleph, por tanto $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$.

Así, la conjetura de Cantor deriva en el siguiente enunciado:

Axioma 1. Hipótesis del continuo (CH)
Para cualquier conjunto infinito $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que o bien $|A| = |\mathbb{N}|$ o bien $|A| = |\mathfrak{c}|$, lo cual es equivalente a $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Éste constituye el primer problema la lista de Hilbert. En 1883 Cantor demostró que los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ poseían esta propiedad, de lo que se deduce que todo subconjunto cerrado no numerable de $\mathbb{R}$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$. Por tanto, CH se sostiene para subconjuntos cerrados.

Más de treinta años después Pavel Aleksandrov extendió el resultado para los conjuntos de Borel y Suslin a todos los conjuntos analíticos. Sin embargo, los esfuerzos para probar que los conjuntos coanalíticos satisfacían CH fueron en vano, pues es indemostrable bajo ZFC.

Teorema 2.2. ***(Gödel)*** *Asumiendo que ZFC es consistente, entonces $ZFC{+}CH$ es consistente.*

Demostración. Se puede consultar en [10].

□

Para demostrarlo, Gödel, aceptando que ZF es consistente, construyó un modelo de ZFC conocido como universo constructible, en donde CH se sostiene. Así, la prueba muestra que si ZF es consistente, también lo es junto con AC y CH. Por lo tanto, asumiendo que ZF es consistente y dado que AC no puede ser refutado en ZF se tiene que CH no puede ser rechazado en ZFC.

Teorema 2.3. *(Cohen) Asumiendo que ZFC es consistente, entonces $ZFC+\neg CH$ es consistente.*

Demostración. Se puede consultar en [8] y [9].

□

Con este teorema, en 1963, Cohen probó la independencia de CH. Así vemos la indecidibilidad de este enunciado.

Notación. Denotaremos mediante $A^{\mathbb{N}}$ al conjunto de funciones $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

Lema 2.4. *Sea A un conjunto tal que $|A| = \mathfrak{c}$, entonces se cumple $|A^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.*

Demostración.
Como hemos visto antes, sabemos que la cardinalidad del continuo es la cardinalidad del conjunto de Cantor, el cual se biyecta con $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Por ello, podemos suponer sin pérdida de generalidad, que A es el conjunto de Cantor, ya que se puede establecer una biyección.

Así, se tiene que

$$A^{\mathbb{N}} = (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

de forma que como $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tiene la cardinalidad $\mathbb{N}$ existe una biyección entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = A$.
Por tanto, se cumple que $|A^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

□

Lema 2.5. *Si dos conjuntos A, B tienen cardinal $\mathfrak{c}$ entonces $|A \times B| = \mathfrak{c}$.*

Demostración.
Evidentemente $|A \times A| = |A \times B|$ y se cumple que

$$\mathfrak{c} = |A| \leq |A \times A| \leq |A^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$$

□

2.1.2. La hipótesis el continuo

Pasemos ahora a una de las demostraciones centrales del capítulo. Veamos que CH da una respuesta afirmativa para el problema de Ulam. Pero antes de ello recordemos la definición de σ-álgebra.

Definición 2.6. *Una familia de subconjuntos de X, representada por Σ, diremos que es una σ-álgebra si cumple las siguientes condiciones:*

- $\emptyset \in \Sigma$
- *Si $A \in \Sigma$ se tiene que $A^c \in \Sigma$.*
- *Es cerrado para uniones numerables de elementos de Σ.*

Ahora ya damos paso a la demostración que nos ocupa. Los primeros en realizarla fueron Kunen y Rao.

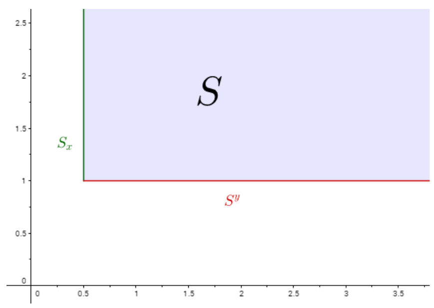
Demostración. (De [4], pág 2)
Consideremos convenientemente un buen orden $\prec$ como en el teorema 1.28. Nótese que bajo CH todo segmento inicial $I_{\prec}(x)$ es numerable, pues por este teorema sabemos que $|I_{\prec}(x)| < |X|$ para todo conjunto X.

Tomando $X = \mathbb{R}$ tendremos que $|I_{\prec}(x)| < \mathfrak{c}$ y por CH sabemos que todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ tiene o bien la cardinalidad de $\mathbb{N}$ o la del continuo. Por ello, se deduce que $|I_{\prec}(x)| = |\mathbb{N}|$ y por tanto que es numerable.

Consideremos el conjunto D en el plano, donde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y \prec x\}$$

Sea S un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y $x, y \in \mathbb{R}$, entonces las secciones vertical S_x y horizontal S^y se definen como $S_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in S\}$, $S^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in S\}$. Podemos verlas en color verde y rojo respectivamente para $x = 0{,}5$ e $y = 1$.



Sea $S \subseteq D$ cualquiera. Entonces $S_x \subseteq I_{\prec}(x)$, así que, S_x es numerable para todo x. Por tanto, si ponemos $A = \{x \in \mathbb{R} : S_x \neq \emptyset\}$ podemos numerar S_x mediante una sucesión $y_1(x), y_2(x), \ldots$. Nótese que si S_x es finito el argumento sería el mismo pero repitiendo elementos.

Así, hemos definido las funciones $y_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que S es la unión de sus gráficas. La gráfica de toda función y_n, $G_{y_n} = \{(x, y_n(x)) : x \in A\}$ se puede expresar del siguiente modo:

$$G_{y_n} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} y_n^{-1}([q - 1/m, q]) \times [q - 1/m, q]$$

de modo que $|y_n(x) - y| \leq 1/m$ para todo m y, por tanto, $y = y_n(x)$.

Así, concluimos que S puede ser expresado en términos de rectángulos mediante una cantidad numerable de operaciones. Esto constituye la mitad de la prueba, la otra mitad es equivalente por simetría.

Consideremos ahora S cualquier subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sea C el subconjunto por encima de la diagonal, es decir, $C = \{(x, y) : x \prec y\}$. Mediante un argumento similar al anterior intercambiando los roles de las dos variables podemos demostrar que $S \cap C$ pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos.

Finalmente, sea $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$, se tiene que $S \cap \Delta$ es la gráfica de una función, por lo que se puede expresar como hemos visto y por tanto pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos.

Así, obtenemos que $S = (S \cap D) \cup (S \cap \Delta) \cup (S \cap C)$ pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos.

$\square$

Como vemos gracias a CH se ha probado que cualquier subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ está contenido en la σ-álgebra generada por los rectángulos, lo que da una respuesta afirmativa al problema de Ulam. En base a esto, podemos ir un paso más allá y demostrar un resultado original más fuerte, para el que nos hará falta el siguiente lema:

Lema 2.7. *Si un conjunto $D \in \sigma(\mathcal{F})$ existe $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ numerable tal que $D \in \sigma(\mathcal{F}_0)$.*

Demostración.
Sea $\mathcal{F} \in \mathcal{P}(\Omega)$ una familia cualquiera y consideremos $S = \bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{F}_i)$, con $\mathcal{F}_i \in \mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_i$ numerable para todo $i \in I$

Se tiene que $\mathcal{F} \subset S$ ya que si tomamos $\mathcal{F}_j$ para un cierto $j \in I$ un conjunto unitario, se tiene que cualquier elemento de $\mathcal{F}$ está contenido en $\sigma(\mathcal{F}_j)$ y ésta es, en particular, numerable.

Se tiene, además, que S es una σ-álgebra, pues:
- $\emptyset \in \sigma(\mathcal{F}_i)$, $\forall i \in I$, por tanto, $\emptyset \in S$.
- Si $A \in S \Rightarrow A \in \sigma(\mathcal{F}_i)$ para algún $i \in I$, por tanto, $A^c \in \sigma(\mathcal{F}_i) \Rightarrow A^c \in S$
- Sea $A_1, A_2, ... \in S$ una sucesión de elementos, se tiene que cada $A_i \in \sigma(\mathcal{F}_i)$ para un cierto $i \in I$. La unión numerable de los A_i es numerable, por lo que pertenece a S.

Ahora falta comprobar que $S = \sigma(\mathcal{F})$. Sabemos que $S \subset \sigma(\mathcal{F})$ porque $\sigma(\mathcal{F}_i) \subset \sigma(\mathcal{F})$, ya que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$, $\forall i \in I$ y, por tanto, $\bigcup_{i\in I} \sigma(\mathcal{F}_i) \subset \sigma(\mathcal{F})$.

Para comprobar el otro contenido basta percatarse de que S es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$, así, $\sigma(\mathcal{F}) \subset S$, dado que $\sigma(\mathcal{F})$ es la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$.

□

Teorema 2.8. *Si todo subconjunto de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos, $\mathcal{R}$, es decir, si la respuesta al problema de Ulam es afirmativa, entonces para cualquier familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con $|\mathcal{F}| \leq \mathfrak{c}$ existe un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ numerable tal que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{A})$.*

Demostración.
Sea $S \subset \mathbb{R}$, dado que $|\mathcal{F}| \leq \mathfrak{c}$ sabemos que se biyecta con un subconjunto de $\mathbb{R}$, es decir, que existe una biyección $f : S \longrightarrow \mathcal{F}$.

Consideremos el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y \in f(x),\ \forall x \in S\}$, entonces, por hipótesis, $E \in \mathcal{R}$. Ahora, por el lema 2.7 sabemos que existe un conjunto numerable $\mathcal{A}$ de forma que $E \in \sigma(\mathcal{A}) \times \sigma(\mathcal{A})$.

El conjunto E cumple que las secciones verticales $E_x = f(x)$ para todo $x \in S$, entonces se cumple que $E_x \in \sigma(\mathcal{A})$ y, por tanto, $\mathcal{F} \in \sigma(\mathcal{A})$, ya que estas secciones son precisamente $\mathcal{F}$.

□

A parte de CH podemos considerar otros axiomas más débiles pero que igualmente proporcionan una respuesta afirmativa al problema que nos ocupa.

2.1.3. Cardinal $\mathfrak{p}$

Es posible obtener la misma conclusión a partir de un axioma más débil, como es que $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$, donde $\mathfrak{p}$ es el número de pseudointersección. Sin embargo, esto se desvía demasiado del objetivo principal del trabajo, por lo que en lugar de realizar una demostración alternativa lo que haremos será explicar qué es el cardinal $\mathfrak{p}$ y veremos algunas propiedades que cumple. Comencemos con algunas definiciones:

Definición 2.9. *Dados $A, B \subset \mathbb{N}$ diremos que A está* ***casicontenido*** *en B y lo denotaremos con $A \subset^* B$ si $A \setminus B$ es es finito, es decir, si todos los elementos de A están contenidos en B salvo una cantidad finita.*

Propiedad 2.10. *Diremos que una familia F cumple la* ***propiedad fuerte de la intersección finita (PFIF)*** *si para todo $A_1, ..., A_n \in F$ se cumple que $A_1 \cap ... \cap A_n$ es infinita, es decir, las intersecciones finitas son infinitas.*

Definición 2.11. *Sea F una familia de subconjuntos de $\mathbb{N}$ que cumple PFIF. Entonces una* ***pseudointersección*** *para F es un conjunto infinito A de forma que $A \subset^* B$ para todo $B \in F$, es decir, A está casicontenido en todos los elementos de la familia F.*

Definición 2.12. *El* ***cardinal*** $\mathfrak{p}$ *se define del siguiente modo:*

$\mathfrak{p} = min\{|F| : F$ *es una familia que cumple PFIF sin ninguna pseudointersección, A, infinita*$\}$

Propiedad 2.13. *Si A está casicontenido en una cantidad finita de elementos también está en su intersección.*

Demostración.
Sabemos que $A \subset^* B$ si $A \setminus B$ es finito, i.e. los elementos de A están contenidos en B salvo una cantidad finita.

Supongamos que A está casicontenido en una cantidad finita de elementos $B_1, ..., B_n$, entonces se tendrá que $B_1 \setminus A, ..., B_n \setminus A$ son finitos. Para que A esté casicontenido en la intersección se debe cumplir que $(B_1 \cap ... \cap B_n) \setminus A$ sea finito. Se cumple que

$$(B_1 \cap ... \cap B_n) \setminus A = (B_1 \setminus A) \cap ...(B_n \setminus A) = \bigcap_{i=1}^{n} (B_i \setminus A)$$

Y dado que la intersección finita de elementos finitos es finita se obtiene el resultado.

□

Observación 2.14. *El cardinal* $\mathfrak{p}$ *está bien definido.*

Es decir, tiene sentido ya que tales familias existen puesto que si consideramos el conjunto

$$Z = \{F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : F \text{ cumple PFIF y ordenada por } \subset\}$$

cumple el lema de Zorn.

Demostración.
Consideremos una cadena C en Z ordenada por la inclusión. La cadena C es una familia de familias en la que los elementos son comparables dos a dos. Debemos comprobar que posee una cota superior y que ésta cumple PFIF.

Sea una cantidad finita de elementos $B_1, B_2, ..., B_n$ contenidos en la unión de las familias de C. Veamos si su intersección es finta.

Cada B_i estará contenido en una de las familias de C y dado que ésta está ordenada por la inclusión existe una familia máxima, F_k, que contiene al resto. Como F_k cumple PFIF se cumple que $\bigcap_{i=1}^{n} B_i$ es infinita.

Por el lema de Zorn, dado que existe una cota superior, sabemos que existe una familia maximal M. Comprobemos ahora que M no posee pseudointersección.

Supongamos, por reducción al absurdo, que M posee una pseudointersección A. La definición de pseudointersección no especifica si A pertenece a M o no, por ello tomaremos $A' \subset A$ infinito tal que $A' \notin M$. Así, $A' \subset^* M$ ya que A está casicontenido en M.

Debemos tomar $A' \notin M$ porque de no ser así, dado que $A \subset^* X$ para todo $X \in M$ se tendría que $A \subset^* A'$ y sabemos que $A \setminus A'$ es infinito.

Tomemos $M \cup \{A'\}$, sabemos que $M \subsetneq M \cup \{A'\}$ porque $A' \notin M$ y cumple FIF, ya que cualquier intersección finita de elementos será una intersección finita de elementos de M intersecada con A', el cual es infinito.

$$A_1 \cap ... \cap A_n \cap A'$$

Sabemos que $A' \subset^* X$ para todo $X \in M$, pero si A' está casicontenido en una cantidad finita de elementos también está en la intersección. Entonces si tomo una intersección finita no sólo es infinita sino que contiene a casi todos los elementos de A', el cual es infinito.

$$A' \subset^* A_1 \cap ... \cap A_n \cap A'$$

Lo cual supone una contradicción, puesto que M era maximal y se ha añadido un elemento de forma que se sigue cumpliendo PFIF. Así, como queríamos demostrar, M no posee pseudointersección.

□

Observación 2.15. $\mathfrak{p} \leq 2^{\aleph_0}$

Lo cual resulta evidente dado que las familias están en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Observación 2.16. $\aleph_0 < \mathfrak{p}$

Para probarlo bastará ver que toda familia numerable tiene pseudointersección.

Demostración.
Supongamos que $F \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ es numerable y que cumple PFIF. Construyamos una pseudointersección.
Dado que F es numerable $F = \{A_1, A_2, A_3, ...\}$ y se cumple que

$$A_1 \supset A_1 \cap A_2 \supset A_1 \cap A_2 \cap A_3 \supset ...$$

Como se cumple PFIF sabemos que todas las intersecciones finitas son numerables, por tanto todas ellas lo son.
Consideremos la siguiente sucesión:
$n_1 \in A_1$
$n_2 \in A_1 \cap A_2 \setminus \{n_1\}$
$n_3 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \setminus \{n_1, n_2\}...$
Así, el conjunto $A = \{n_1, n_2, n_3, ...\}$ es una pseudointersección. Lo cual prueba que efectivamente $\aleph_0 < \mathfrak{p}$.

□

2.2. Una respuesta negativa

Esta sección estará dedicada al desarrollo de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y al problema que surge cuando se pretende extenderla a los conjuntos no medibles, el cual nos permitirá dar una respuesta contraria a la anterior.

2.2.1. Medida de Lebesgue en la recta real

La medida de Lebesgue resulta crucial en esta parte del trabajo porque la demostración que proporciona una respuesta negativa al problema de Ulam se encuentra fuertemente relacionada con ella. Más concretamente con su extensión a los conjuntos no medibles Lebesgue. Por ello en esta subsección desarrollaremos la construcción clásica de esta medida en $\mathbb{R}$ tomando como referencia principalmente las fuentes [11], [13], [14] y puntualmente [12] .

Introducción

Se define la longitud de un intervalo acotado I en $\mathbb{R}$ cuyos extremos son a, b como el número real $\lambda(I) = |b-a|$, sin tener en cuenta si se trata de un intervalo cerrado, abierto o semiabierto. De esta forma, podemos asignar a cada intervalo de $\mathbb{R}$ un elemento de la recta real extendida que representará su tamaño. Pero llegados a este punto nos surge el siguiente interrogante: ¿esto es válido para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$? ¿Existe una función que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ le asigne su tamaño?

La longitud de los intervalos cumple ciertas propiedades que, en caso de ser posible, deberán extenderse a todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ como es la invarianza por traslaciones o que la longitud de un intervalo resultado de la unión intervalos disjuntos sea la suma de las longitudes de dichos intervalos. Sin embargo, la generalización de la función longitud a todo subconjunto de la recta real bajo estas condiciones no es factible en ZFC, pero sí que lo es para una gran mayoría, a los cuales llamaremos medibles Lebesgue y formarán una σ-álgebra.

Medida exterior de Lebesgue

Como ya hemos mencionado antes, la longitud de un intervalo I se define como $\lambda(I) = |b-a|$, siendo a, b los extremos de dicho intervalo, y sin tener en cuenta si pertenecen o no a I, pues $\lambda([a,b]) = \lambda((a,b))$. De hecho, el conjunto finito $\{a,b\}$ se considera despreciable, en lo que a teoría de la medida se refiere.

Definición 2.17. *Sea $A \subset \mathbb{R}$, diremos que es de* ***medida nula*** *si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos tales que*

$$A \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \varepsilon$$

En otras palabras, un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene medida nula si se puede recubrir por una sucesión de intervalos abiertos cuya longitud total es arbitrariamente pequeña.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tendrá, por tanto, medida nula si y sólo si el ínfimo de las sumas $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$ es 0. Esto sugiere la siguiente definición de medida de un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}$.

Definición 2.18. *(De [11], pág 87) Para todo $A \subset \mathbb{R}$ se define la* ***medida exterior*** *de Lebesgue de A , a la que denotaremos por $\lambda^*(A)$ como*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

donde $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos abiertos.

Como vemos la idea de la definición se basa en que para determinar el tamaño de un conjunto de $\mathbb{R}$ se consideran todas las familias numerables de intervalos abiertos $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuya unión contiene al conjunto en cuestión y se estima la suma de las longitudes de los intervalos.

Observación 2.19. *A partir de esta definición podemos comentar lo siguiente:*
- *$\lambda^*(A)$ es el ínfimo de un subconjunto no vacío de $[0, \infty]$.*
- *$0 \leq \lambda^*(A) \leq \infty$ para todo $A \subset \mathbb{R}$, lo que nos proporciona la función $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty]$.*
- *$A \subset \mathbb{R}$ tendrá medida nula $\Leftrightarrow \lambda^*(A) = 0$.*

En el siguiente teorema podemos ver que la medida exterior de Lebesgue cumple algunas propiedades básicas para dar un valor adecuado del tamaño de los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.20. *Sea λ^* la medida exterior de Lebesgue como hemos definido antes, entonces*
i) $0 \leq \lambda^*(A) \leq \infty$ *para todo* $A \subset \mathbb{R}$.
ii) $\lambda^*(\emptyset) = 0$.
iii) λ^* *es una función monótona creciente en el sentido de que si* $A \subset B \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.
iv) λ^* *es numerablemente subaditiva, es decir,*

$$\lambda^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$$

para toda sucesión (A_n) *de subconjuntos de* $\mathbb{R}$.
v) $\lambda^*(I) = \lambda(I)$ *para todo intervalo acotado* I *de* $\mathbb{R}$.

Demostración. Se puede consultar en [11], pág 88.

□

Corolario 2.21. *Todo subconjunto de un conjunto de medida nula tiene medida nula, y la unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.*

Demostración. (De [11], pág 90).
Resulta inmediato a partir de *iii*) y *iv*) del teorema anterior.

□

Corolario 2.22. *Si* I *es un intervalo no acotado, entonces* $\lambda^*(I) = \infty$.

Demostración. (De [11], pág 90).
Tomemos por ejemplo $I = (-\infty, c]$, entonces, para todo entero positivo n se cumple $I \supset [c-n, c]$, por lo tanto $\lambda^*(I) \geq n$ por *iii*) y *v*) del teorema anterior.

□

Como hemos dicho antes, una propiedad clave es que la medida exterior de Lebesgue debe ser invariante bajo traslaciones. Veámoslo:

Teorema 2.23. *Para todo* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *se cumple*

$$\lambda^*(A + c) = \lambda^*(A)$$

Demostración. (De [11], pág 90).
El conjunto $A + c = \{x + c : x \in A\}$ es la imagen de A bajo el isomorfismo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + c$. Para un intervalo abierto $I = (a, b)$ se tiene que $I + c = (a + c, b + c)$ y que $\lambda(I + c) = \lambda(I)$.

Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de intervalos abiertos tales que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, entonces $A + c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n + c)$ y

$$\lambda^*(A + c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n + c) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$$

por tanto $\lambda^*(A + c) \leq \lambda^*(A)$.

La desigualdad contraria se prueba del siguiente modo

$$\lambda^*(A) = \lambda^*((A + c) + (-c)) \leq \lambda^*(A + c)$$

Por tanto, se da la igualdad.

□

Como ya hemos mencionado con anterioridad, resultaría interesante que la medida exterior de Lebesgue fuese aditiva, es decir, que dados dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ tales que $A \cap B = \emptyset$ se cumpliese que

$$\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$$

Sin embargo, esto no se cumple. Un ejemplo de esto es el conjunto de Vitali, en cuya construcción se requiere del Axioma de Elección.

Conjuntos medibles

El remedio al hecho de que la media exterior no sea aditiva es restringir λ^* a aquellos conjuntos en donde sí tiene esta propiedad, a los que llamaremos conjuntos medibles Lebesgue.

Definición 2.24. *(De [11], pág 93). Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice* ***medible Lebesgue*** *si para todo $B \subset \mathbb{R}$ se cumple*

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A)$$

Observación 2.25. *Como $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$ y dado que λ^* es subaditiva*

$$\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \setminus A)$$

Por tanto, para ver que un conjunto A es medible será suficiente con probar la otra desigualdad.

Propiedades

Las propiedades de los conjuntos medibles Lebesgue son las que pasamos a enunciar.

Porposición 2.26. *Si λ^* es la medida exterior, entonces:*
i) Para todo $c \in \mathbb{R}$, el intervalo $(-\infty, c)$ es medible.
ii) Si un conjunto A es medible, también lo es su complementario.
iii) Todo conjunto de medida nula es medible.
iv) Si un conjunto A es medible también lo son $E + c$ y cE para todo $c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Se puede consultar en [11], pág 93.

□

Veamos ahora que la familia de los conjuntos medibles Lebesgue $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra, cuya definición es la 2.6 y que dimos al principio del capítulo.

• Por *ii*) de la proposición anterior se cumple que el complementario de todo conjunto está contenido en la σ-álgebra.

• Dado que el vacío es un conjunto de medida nula, por el apartado *iii*) de la proposición anterior éste pertenece a $\mathcal{M}$.

• Únicamente queda por ver que la unión numerable de conjuntos medibles es medible. Este resultado lo obtenemos gracias al siguiente teorema:

Teorema 2.27. *Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos medibles y consideremos*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ y } F = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$$

Entonces, E y F son medibles, es decir, la unión numerable y la intersección numerable de conjuntos medibles son medibles. Si, además, los E_n son disjuntos dos a dos entonces

$$\lambda^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap E_n)$$

para todo $A \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Se puede consultar en [11], pág 94.

□

Corolario 2.28. *Todo intervalo de $\mathbb{R}$ es medible.*

Demostración. Se puede consultar en [11], pág 95.

□

Definición 2.29. *La familia de conjuntos medibles Lebesgue se denotará con $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\lambda^*)$. Dado que $\lambda^*(I) = \lambda(I)$ para todos los intervalos acotados, podemos definir la función*

$$\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow [0, \infty]$$

dada por $\lambda^*(E) = \lambda(E)$, para todo conjunto $E \in \mathcal{M}$, es decir, $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}}$. A esta función se la llamará medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$.

2.2.2. Espacio y medida producto

Productos cartesianos

Si X e Y son dos conjuntos cualesquiera, no necesariamente subconjuntos del mismo espacio, el producto cartesiano $X \times Y$ es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y), donde $x \in X$ e $y \in Y$. El ejemplo más conocido de producto cartesiano es el plano euclídeo.

Así, por ejemplo, si $A \subset X$ y $B \subset Y$, llamaremos al conjunto $A \times B$ **rectángulo** y nos referiremos a A y B como los **lados**.

Teorema 2.30. *Un rectángulo será vacío si y sólo si uno de sus lados lo es.*

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 137.

□

Teorema 2.31. *Si $E_1 = A_1 \times B_1$ y $E_2 = A_2 \times B_2$ son rectángulos no vacíos, entonces $E_1 \subset E_2$ si y sólo si $A_1 \subset A_2$ y $B_1 \subset B_2$.*

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 137.

□

Teorema 2.32. *Si $A_1 \times B_1 = A_2 \times B_2$ es un rectángulo no vacío, entonces $A_1 = A_2$ y $B_1 = B_2$.*

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 138.

□

Teorema 2.33. *Si $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ son espacios medibles, entonces $(X \times Y,\ \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ es un espacio medible.*

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 140

□

Así pues, un rectángulo en el producto cartesiano de dos espacios medibles $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ será medible si pertenece a $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Observación 2.34. *Una condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sea una σ-álgebra es que tanto $\mathcal{A}$ como $\mathcal{B}$ sean σ-álgebras.*

Secciones

Sean $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles y sea $(X \times Y,\ \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ su producto cartesiano. Si E es un subconjunto de $X \times Y$ y x es un elemento cualquiera de X llamaremos sección vertical al conjunto $E_x = \{y : (x, y) \in E\}$ y sección horizontal al conjunto $E^y = \{x : (x, y) \in E\}$ para un $y \in Y$ cualquiera. Nótese que una sección de un conjunto del espacio producto no es un conjunto de dicho espacio sino un subconjunto de uno de los espacios componentes.

Definición 2.35. *Sea f una función cualquiera definida en un subconjunto E del espacio producto $X \times Y$ y x un elemento cualquiera del X, llamaremos **sección de f determinada por x** a la función definida en E_x y dada por $f_x(y) = f(x, y)$.*

*El concepto de **sección de f determinada por y** es similar y se define como $f^y(x) = f(x, y)$.*

Lema 2.36. *Sean $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles:*
a) Si E es un subconjunto de $X \times Y$, entonces la sección $E_x \in \mathcal{B}$ y $E^y \in \mathcal{A}$.
b) Si f es una función que toma valores reales, $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-medible, definida sobre $X \times Y$, entonces cada sección f_x es $\mathcal{B}$-medible y cada f^y es $\mathcal{A}$-medible.

Demostración. (De [14], pág 155)
Supongamos que x pertenece a X, y sea $\mathcal{F}$ la colección de los subconjuntos E de $X \times Y$ tales que E_x pertenece a $\mathcal{B}$. Entonces $\mathcal{F}$ contiene a todos los rectángulos $A \times B$ para cada $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Nótese que $(A \times B)_x$ es o bien B o bien $\emptyset$. En particular, $X \times Y \in \mathcal{F}$.

Además, dado que $(E^c)_x = (E_x)^c$ y $(\bigcup_n E_n) = \bigcup_n (E_n)_x$ se tiene que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo complementarios y uniones numerables y, por tanto, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

De aquí se sigue que $\mathcal{F}$ incluye a la σ-álgebra $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ y por tanto E_x pertenece a $\mathcal{B}$ siempre que E pertenezca a $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Por un argumento similar se comprueba que E^y pertenece a $\mathcal{A}$ siempre que E pertenezca a $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$; así queda probado el primer apartado.

La segunda parte de la demostración se sigue del primer apartado y de que $(f_x)^{-1}(D) = (f^{-1}(D))_x$ y $(f^y)^{-1}(D) = (f^{-1}(D))^y$.

□

Medidas producto

Continuando con el estudio de los productos cartesianos, veamos ahora el caso en el que los espacios componentes no son sólo espacios medibles, sino que son espacios de medida. Es decir, que además de la σ-álgebra de conjuntos medibles tendremos una función medida que asigna un valor real a cada elemento de la σ-álgebra. El más conocido es $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$, donde $\mathscr{B}$ es la σ-álgebra de Borel y λ la medida de Lebesgue.

Teorema 2.37. *Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son espacios de medida σ-finitos, y si E es cualquier subconjunto de $X\times Y$, entonces las funciones f y g definidas en X e Y respectivamente como $f(x)=\nu(E_x)$ y $g(y)=\mu(E^y)$ son funciones medibles no negativas tales que*

$$\int f d\mu = \int g d\nu$$

.

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 144.

□

Definición 2.38. *Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son espacios de medida σ-finitos, entonces la función λ definida para todo conjunto E en $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ por*

$$\lambda(E)=\int \nu(E_x)d\mu(x)=\int \mu(E^y)d\nu(y)$$

*se llama **medida producto**, $\lambda=\mu\times\nu$. Así el espacio de medida $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B},\lambda)$ es el producto cartesiano de los espacios de medida dados.*

Teorema 2.39. *Si $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son espacios de medida σ-finitos, entonces la función λ es una medida σ-finita tal que para todo rectángulo medible $A\times B$ se tiene*

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\cdot\nu(B)$$

Lo cual determina λ de forma única.

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 145.

□

Teorema de Fubini

En esta sección estudiaremos la relación entre las integrales en un espacio producto y las integrales en los espacios componentes. A lo largo de esta parte asumiremos que $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ son son espacios de medida σ-finitos y que λ es la medida producto en $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

Si tenemos una función h en $X\times Y$ cuya integral está definida, ésta se denota mediante

$$\int h(x,y)d\lambda(x,y)$$

y es conocida como la **integral doble** de h. Si h_x es tal que

$$\int h_x(y)d\nu(y)=f(x)$$

está definida, y si $\int f d\mu$ lo está también, entonces se suele poner

$$\int f d\mu=\int\int h(x,y)d\nu(y)d\mu(x)=\int d\mu(x)\int h(x,y)d\nu(y)$$

De manera similar si la función g en Y definida como $g(y)=\int h^y(x)d\mu(x)$ se tiene igualmente $\int g d\nu=\int\int h(x,y)d\mu(x)d\nu(y)=\int d\nu(y)\int h(x,y)d\mu(x)$.

Las integrales $\int\int h d\nu d\mu$ y $\int\int h d\mu d\nu$ son llamadas **integrales iteradas**.

Teorema 2.40. *Una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto E de $X \times Y$ tenga medida nula es que casi toda sección vertical E_x, o casi toda sección horizontal E^y, tenga medida nula.*

Demostración. (De [13], pág 147)
Por definición de medida producto se tiene que

$$\lambda(E) = \int \nu(E_x) d\mu(x) = \int \mu(E^y) d\nu(y)$$

Si $\lambda(E) = 0$, entonces las integrales anteriores son finitas y por tanto los integrandos no negativos se deben anular en casi todo punto.
Si, por otra parte, alguno de los integrandos se anula en casi todo punto, entonces $\lambda(E) = 0$.

□

Teorema 2.41. *Si h es una función medible no negativa en $X \times Y$, entonces*

$$\int h d\lambda = \int \int h d\mu d\nu = \int \int h d\nu d\mu$$

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 147

□

Los dos teoremas anteriores en ocasiones son referidos comos parte del teorema de Fubini; sin embargo, el resultado que más comúnmente se conoce así es el siguiente:

Teorema 2.42. ***(Fubini)*** *Si h es una función integrable en $X \times Y$, entonces casi toda sección de h es integrable. Si las funciones f y g están definidas como $f(x) = \int h(x,y) d\nu(y)$ y $g(y) = \int h(x,y) d\mu(x)$, entonces f y g son integrables y*

$$\int h d\lambda = \int f d\mu = \int g d\nu$$

Demostración. Se puede consultar en [13], pág 148

□

2.2.3. El Axioma de Extensión Total de la Medida

Hecho esto, y dado que hemos visto que la medida exterior de Lebesgue no es extensible a todos los conjuntos de $\mathbb{R}$, nos aparece la siguiente duda: *¿es posible definir otra medida $\bar{\lambda} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que coincida con la de Lebesgue en los conjuntos medibles?*

Esto fue planteado por Banach después de que Vitali probase que tal medida $\bar{\lambda}$ invariante bajo traslaciones no existe. En 1929, de manera independiente y simultánea, Banach y Kuratowski probaron que si se asume CH la respuesta al problema anterior es negativa, como podemos ver en [15], uno de los primeros tomos de la revista *Fundamenta Mathematicae*. Es, por tanto, imposible probar que dicha medida exista.

Esto nos deja dos escenarios posibles o bien se puede demostrar que tal medida no existe, o bien no se puede. Sin embargo, lo cierto es que es imposible demostrar que es imposible demostrar que no existe $\bar{\lambda} : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

A pesar de esto, la comunidad matemática, por consenso, asume que efectivamente no se puede demostrar que no existe tal medida.

Por tanto, y dado que consideraremos que no se puede demostrar ni ella ni su negación, podemos tomar la siguiente sentencia como axioma.

Axioma 2. Axioma de Extensión Total de la Medida (FMEA)
Existe una medida $\bar{\lambda}$ definida en todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que coincide con la medida de Lebesgue en los conjuntos medibles.

Veamos ahora la demostración de que este axioma implica una respuesta negativa al problema de Ulam que nos planteábamos al inicio del capítulo. La siguiente prueba es obra de Kunen y Rao.

Demostración. (De [4], pág 3)
Sea $\prec$ un buen orden en $\mathbb{R}$ como el del teorema 1.28. Si todo segmento inicial $I_\prec(x)$ tuviese medida nula, entonces $X = \mathbb{R}$. De lo contrario, tomemos x el primer elemento tal que $\bar{\lambda}(I_\prec(x)) > 0$ y $X = I_\prec(x)$.

En cualquier caso, tenemos un conjunto X con medida estrictamente positiva cuyos segmentos iniciales tendrán todos medida nula. En el segundo caso se debe a que estamos considerando x de forma que sea el primero tal que $\bar{\lambda}(I_\prec(x)) > 0$, ya que, de no ser así, existiría un $x' \prec x$ tal que $\bar{\lambda}(I_\prec(x')) > 0$ y x no sería el primero.

Ahora ya podemos pasar al plano, donde tenemos la medida producto $\bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}$ definida en la σ-álgebra $\mathcal{R}$ generada por los rectángulos y que satisface $\bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}(A \times B) = \bar{\lambda}(A) \cdot \bar{\lambda}(B)$ para todos los rectángulos, y por tanto se cumple la siguiente fórmula de Fubini:

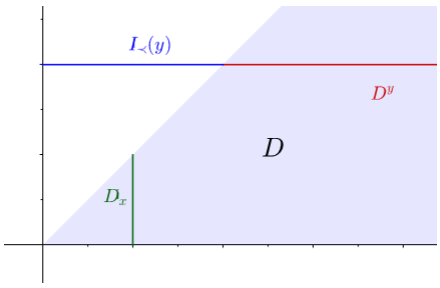
$$\bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}(S) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\lambda}(S_x) d\bar{\lambda}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\lambda}(S^y) d\bar{\lambda}(y)$$

para todo S de $\mathcal{R}$. Recordemos que las secciones vertical S_x y horizontal S^y se definen como $S_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in S\}$, $S^y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in S\}$ y los podemos ver representados en la prueba afirmativa al problema que nos ocupa.

Tomemos $D = \{(x, y) \in X^2 : y \prec x\}$. Definimos $D_x = \{(x, y) \in X^2 : y \prec x\}$ para un x fijo y $D^y = \{(x, y) \in X^2 : y \prec x\}$ para un y dado.

Se tiene que $\bar{\lambda}(D_x) = 0$ para toda sección vertical dado que D_x es un segmento inicial de X para el orden tomado, que no es el habitual, y por tanto tiene medida nula.

Por otra parte, $D^y = X \setminus I_\prec(y)$, y por lo que ninguna sección horizontal es segmento inicial. Entonces $\bar{\lambda}(D^y) = \bar{\lambda}(X \setminus I_\prec(y)) = \bar{\lambda}(X) > 0$ para todo $y \in X$.



Por lo tanto, si pudiésemos calcular la medida de D obtendríamos por una parte que $\bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}(D) = 0$ y por otra que $\bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}(D) > 0$ a la vez.

Finalmente, llegamos a la conclusión de que D no pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos.

$\square$

2.2.4. El Axioma de Extensión Parcial de la Medida

La demostración anterior nos proporciona una respuesta negativa al problema planteado por Ulam apoyándose en el Axioma de Extensión Total de Medida. Sin embargo, es posible obtener el mismo resultado basándose en una versión más débil de dicho axioma:

Axioma 3. Axioma de extensión parcial de la medida (PMEA)
Para toda familia numerable $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$, existe una extensión de la medida de Lebesgue a la medida $\bar{\lambda}$ en la σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$.

Demostración.
Procederemos por reducción al absurdo, por ello, supondremos que la respuesta al problema de Ulam es positiva.

Por AC sabemos que $\mathbb{R}$ es biyectable con el cardinal del continuo, por ello, expresaremos $\mathbb{R}$ como una enumeración $\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha \leq \mathfrak{c}\}$. Una vez hecho esto, consideraremos un buen orden $\prec$ como el del teorema 1.28 y para cada α sea el conjunto

$$X_\alpha = \{x_\beta : \beta \prec \alpha\}$$

Consideremos ahora el conjunto

$$\tilde{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \prec y\}$$

Fijado un α, y dado que estamos suponiendo que la respuesta al problema de Ulam es afirmativa, se tiene que $\tilde{D} \in \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ es la σ-álgebra generada por los rectángulos.

Por el lema 2.7 sabemos que existe $\tilde{R} \subset \mathcal{R}$ numerable tal que $\tilde{D} \in \sigma(\tilde{R})$, y se cumple que $\sigma(\tilde{R}) \subset \sigma(\{A \times B : A, B \in \mathcal{A}\}) = \sigma(\mathcal{A}) \otimes \sigma(\mathcal{A})$, donde $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ numerable.

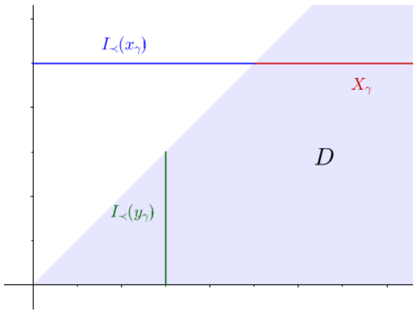
Ahora, por el Axioma 3, sabemos que existe $\bar{\lambda} : \sigma(\mathcal{A}) \longrightarrow [0, \infty]$ tal que coincide con la medida de Lebesgue.

Como $|X_\alpha| \leq \mathfrak{c}$ en virtud del teorema 2.8 sabemos que $X_\alpha \in \sigma(\mathcal{A})$, por lo que es medible y podemos poner

$$X_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : (x, x_\alpha) \in \tilde{D}\}$$

Así tendremos que $X_\alpha \times X_\alpha \in \sigma(\mathcal{A}) \otimes \sigma(\mathcal{A})$.

Sea $\gamma = min\{\alpha : \bar{\lambda}(X_\alpha) > 0\}$, ahora tiene sentido tomar $D = \tilde{D} \cap (X_\gamma \times X_\gamma)$ y podemos aplicar el mismo argumento que en la prueba anterior.



Se tiene que $D^y = X_\gamma$, entonces por definición de γ se tiene que $\bar{\lambda}(D^y) = \bar{\lambda}(X_\gamma) > 0$. Para todo x.
Por otra parte, consideramos el segmento inicial $I_\prec(x_\gamma) = \{x \in \mathbb{R} : x \prec x_\gamma\} = \{X_\mu : \mu \prec \gamma\}$ el cual, por definición de γ tiene medida nula, y se tiene que $D_x = I_\prec(y_\gamma)$, por lo que $\bar{\lambda}(D_x) = \bar{\lambda}(I_\prec(y_\gamma)) = 0$ para todo y.

Por lo tanto, si pudiésemos calcular la medida de D obtendríamos, al igual que antes, que por una parte que $\bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}(D) = 0$ y por otra que $\bar{\lambda} \otimes \bar{\lambda}(D) > 0$.
De esta forma llegamos a la conclusión de que D no pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos habiéndonos basado en un axioma más débil que en la prueba anterior.

$\square$

A pesar de ser más débil, la ventaja de este axioma radica en que, a diferencia del anterior, se puede demostrar que ni él ni su negación se pueden probar a partir de la axiomática habitual de la teoría de conjuntos. De esta forma, podemos concluir que es imposible probar que el problema de Ulam tenga una respuesta negativa.

Dado que no se puede demostrar que el problema de Ulam tenga una respuesta afirmativa ni negativa podemos añadirlo como un axioma legítimo a ZFC.

Axioma 4. Axioma de Ulam (UA)
Cualquier subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pertenece a la σ-álgebra generada por los conjuntos de la forma $A \times B$, donde A y B son subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}$.

A modo de resumen, tenemos los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} CH \arrow[r, Rightarrow] \arrow[rrr, bend left, "\text{Banach-Kuratowski}"] & \text{UA} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[r, bend right, "\text{Teorema 2.8}"'] & \neg PMEA \arrow[r, Rightarrow] & \neg FMEA \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} FMEA \arrow[r, Rightarrow] & PMEA \arrow[r, Rightarrow] & \neg \text{UA} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, bend left, "\neg\text{Teorema 2.8}"] & \neg CH \arrow[lll, bend right, "\neg\text{Banach-Kuratowski}"'] \end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Análisis funcional

El problema de Ulam está estrechamente relacionado con algunos problemas dentro del campo del análisis funcional. En este capítulo nos centraremos en uno en concreto, pero antes expondremos una serie de resultados sobre los espacios de Banach que nos resultarán de utilidad más adelante.

Tras esto, pasaremos al estudio del espacio cociente ℓ^∞/c_0, ya que gracias a una serie de resultados de Parovichenko sabemos que bajo CH todo espacio de Banach cuya cardinalidad sea $\mathfrak{c}$ es isométrico a un subespacio de este espacio cociente, es decir, que ℓ^∞/c_0 es un espacio isométricamente universal para los espacios de Banach con cardinal continuo. Esta demostración en concreto se escapa de los objetivos del trabajo, por lo que en su lugar demostraremos que bajo $\neg\, UA$ dicha afirmación es errónea.

Por último, veremos que considerando una generalización de la cuestión de Ulam en dimensión k se obtiene un resultado similar al anterior pero teniendo en cuenta isomorfismos en lugar de isometrías.

3.1. Espacios de Banach

Llamados así en honor al matemático polaco Stefan Banach, es uno de los objetos de estudio más importantes en análisis funcional. La obra de Banach *Théorie des opérations linéaires* marcó el comienzo del estudio de los espacios vectoriales normados.

Esta sección estará dedicada a desarrollar los conceptos básicos sobre dichos espacios que nos harán falta a lo largo de este capítulo. Las principales fuentes de referencia serán [4] y [16].

Definición 3.1. *Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que la aplicación $||\cdot|| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una norma si cumple:*
i) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, para todo $x, y \in X$.
ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.
iii) $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 3.2. *Si $||\cdot||$ es una norma en X, diremos que $(X, ||\cdot||)$ es un **espacio normado**. Un **espacio métrico** (X, d) es un espacio normado en el que se define una distancia como $d(x,y) = ||y-x||, \forall x, y \in X$.*

Definición 3.3. *Sea X un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión en X. Diremos que que $(x_n)_{n=1}^\infty$ es de **Cauchy** si $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ tal que $\forall\ n, m \geq n_\varepsilon$ se cumple $||x_m - x_n|| \leq \varepsilon$*

Definición 3.4. *Diremos que un espacio normado es de **Banach** si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Definición 3.5. *Sea $Y \subset X$ un subespacio del espacio X. Diremos que Y es cerrado si y sólo si todo punto que sea límite en X de una sucesión de elementos de Y pertenece a Y.*

Porposición 3.6. *Sea X un espacio normado. Si $(X, ||\cdot||)$ es de Banach e Y es un subespacio de X, entonces $(Y, ||\cdot||)$ es Banach si y sólo si Y es cerrado.*

Demostración.
Supongamos que $(Y, ||\cdot||)$ es Banach, sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en Y. Por ser Y Banach sabemos que será convergente en Y. Dado que $Y \subset X$ tenemos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de Y cuyo límite en X es $y \in Y$. Por tanto, Y es cerrado.

Recíprocamente, supongamos Y cerrado subespacio de X, Banach. Por la caracterización de los cerrados mediante sucesiones sabemos que si $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in Y$ será convergente a un punto $y \in Y$. Tomando $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in Y$ una sucesión de Cauchy, por ser X Banach e Y cerrado, convergerá a un punto de Y. Por ello, $(Y, ||\cdot||)$ es Banach.

□

Observación 3.7. *Toda sucesión de Cauchy en un espacio métrico está acotada y si posee una subsucesión convergente es convergente.*

Observación 3.8. *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy.*

Definición 3.9. *Sea $\ell^{\infty} = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{K} : |x_n| \leq L, \ \forall n\}$, el espacio de las sucesiones en $\mathbb{K}$ acotadas.*
Sea $x \in \ell^{\infty}$, si consideramos la norma infinito $||x||_{\infty} = \sup_{n \geq 1} |x_n|$ se tiene que $(\ell^{\infty}, ||\cdot||_{\infty})$ es un espacio normado.

Teorema 3.10. *$(\ell^{\infty}, ||\cdot||_{\infty})$ es un espacio de Banach.*

Demostración. (De [16])
Sea $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^{∞}, debemos comprobar si es convergente.
Tenemos que $x^k = x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k, ... = (x_n^k)_{n=1}^{\infty}$. Demostremos que para un n_0 fijo $(x_{n_0}^k)_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ para todo n.

Sea $\varepsilon > 0$, por ser $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy existe un k_ε tal que si $l \geq k \geq k_\varepsilon$ se cumple $||x^l - x^k||_{\infty} \leq \varepsilon$.
Lo que es equivalente a que $\sup_{n \geq 1} |x_n^l - x_n^k| \leq \varepsilon$ y para el caso particular de n_0 que $|x_{n_0}^k - x_{n_0}^l| \leq \varepsilon$. Por tanto, se tiene que $(x_{n_0}^k)_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy, y se cumple para todo n.
Como $\mathbb{K}$ es completo $(x_n^k)_{k=1}^{\infty}$ converge a x_n. Ahora podemos tomar la sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ y debemos comprobar que $\mathbf{x}$ está acotada y que verdaderamente es el límite.

Dado que $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ es de Cauchy sabemos que está acotada en ℓ^{∞}, por tanto existe M tal que

$$||x^k||_{\infty} \leq M \ \forall k \Rightarrow |x_n^k| \leq M \ \forall k, n \Rightarrow |x_n| \leq M \ \forall n$$

por tanto $\mathbf{x} \in \ell^{\infty}$.

Veamos ahora que dado un $\varepsilon > 0$ existe k_ε tal que si $k \geq k_\varepsilon$ se cumpla que $||x^k - \mathbf{x}|| \leq \varepsilon$, lo cual sabemos que es equivalente a que $\sup_{n \geq 1} |x_n^k - x_n^l| \leq \varepsilon$.
Tomando un n_0 fijo se tiene que $\sup_{n \geq 1} |x_{n_0}^k - x_{n_0}^l| \leq \varepsilon$. Ahora tomando límites con $l \longrightarrow \infty$ se tiene $|x_{n_0}^k - x_{n_0}| \leq \varepsilon$ para todo $k \geq k_\varepsilon$.
Como n_0 es arbitrario se da que $||x^k - \mathbf{x}||_{\infty} \leq \varepsilon$, $k \geq k_\varepsilon$.

$\square$

Definición 3.11. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, definimos la siguiente norma:*

$$||f||_E = \text{máx}\left(\sup_a |f(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)|\right)$$

donde E es un conjunto de $\mathbb{R}^2$ que no pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos.

Debemos comprobar que efectivamente es una norma, para ello basta ver que cumple las condiciones de la definición 3.1:

- $||f||_E = 0 \Leftrightarrow f = 0$
  Si $||f||_E = \text{máx}\left(\sup_a |f(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)|\right) = 0 \Rightarrow \sup_a |f(a)| = \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)| = 0$ dado que se usa el valor absoluto. Por tanto, se tiene que $f(a) = 0,\ \forall a$ y $f(a) = f(b) = 0,\ \forall (a,b) \in E \Rightarrow f = 0$
  La otra implicación resulta trivial.

- $||kf||_E = k||f||_E, \forall k \in \mathbb{R}$
  $||kf||_E = \text{máx}\left(\sup_a |kf(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |kf(a)+kf(b)|\right) =$
  $= \text{máx}\left(k\sup_a |f(a)|,\ k\sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)|\right) = k\,\text{máx}\left(\sup_a |f(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)|\right) =$
  $k||f||_E$

- $||f+g||_E \leq ||f||_E + ||g||_E$
  $||f+g||_E = \text{máx}\left(\sup_a |f(a)+g(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)+g(a)+g(b)|\right) \leq$
  $\text{máx}\left(\sup_a |f(a)| + \sup_a |g(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)| + \sup_{(a,b)\in E} |g(a)+g(b)|\right) \leq$
  $\text{máx}\left(\sup_a |f(a)| + \sup_a |g(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)| + \sup_{(a,b)\in E} |g(a)+g(b)|\right) \leq$
  $\text{máx}\left(\sup_a |f(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |f(a)+f(b)|\right) + \text{máx}\left(\sup_a |g(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |g(a)+g(b)|\right) =$
  $||f||_E + ||g||_E$

De aquí en adelante y hasta el final de esta sección nos dedicaremos a probar resultados que nos serán de gran utilidad en el espacio cociente que veremos más adelante.

Teorema 3.12. *El espacio de las funciones acotadas $(B(\mathbb{R}), ||\cdot||_E)$ es un espacio de Banach.*

Demostración.
Sea $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy de funciones acotadas en $B(\mathbb{R})$.

Por la definición de la norma se cumple que $|f_n(x)| \leq ||f_n||_E$ y por ser $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy se tiene que $\forall \varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $||fn - fm||_E \leq \varepsilon$.

Por tanto, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq ||fn - fm||_E \leq \varepsilon$. Así se tiene que $(f(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y al ser éste un espacio completo $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge.

Sea $f(x) = \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x)$, debemos comprobar que f está en $B(\mathbb{R})$ y que es el límite.

Sea $\varepsilon > 0$ como $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy se cumple que $\forall x \in \mathbb{R}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$.

Fijamos n y hacemos tomamos el límite cuando $m \longrightarrow \infty$, así $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N,\ x \in \mathbb{R}$ se cumple $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ como f_N es acotada se tiene que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_N(x) \leq K$, con $K \in \mathbb{R}$. Entonces se cumple que $|f_N(x) - f_N(y)| < K$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Veamos que f es acotada, sean $x, y \in \mathbb{R}$ cualesquiera:

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) \pm f_N(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(y)| \leq \varepsilon + |f_N(x) - f(y)|$$

$$= \varepsilon + |f_N(x) \pm f_N(y) - f(y)| \leq \varepsilon + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \leq \varepsilon + K + \varepsilon = K + 2\varepsilon$$

Por tanto, f está acotada.

Ahora faltaría comprobar que $f = \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n$. Sea $\varepsilon > 0$, sabemos que $\exists N$ tal que $\forall n, m \geq N$ y $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Entonces

$$||f_n - f||_E = \max\left(\sup_a |f_n(a) - f(a)|, \sup_{(a,b)\in E} |f_n(a) - f(a) + f_n(b) - f(b)|\right) \leq 2\varepsilon$$

Por tanto, f es el límite y queda demostrado que es un espacio de Banach.

□

Lema 3.13. *Sea X un espacio de Banach y G un subespacio tal que $|G| = \mathfrak{c}$. Se cumple entonces que $|\overline{span}(G)| = \mathfrak{c}$.*

Demostración.
Trivialmente se cumple que $|\overline{span}(G)| \geq \mathfrak{c}$ puesto que $\overline{span}(G)$ contiene a G.

Para probar la otra desigualdad consideremos $G^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, el cual sabemos que tiene cardinalidad por los lemas 2.4 y 2.5, y $\mathcal{Z} \subset G^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, por lo que que $|\mathcal{Z}| \leq \mathfrak{c}$.

Ahora buscamos $\varphi : \mathcal{Z} \longrightarrow \overline{span}(G)$ suprayectiva para poder aplicar el teorema 1.25 y probar que $|\overline{span}(G)| \leq |\mathcal{Z}|$.

Llamaremos $(x_1, x_2, ..., r_1, r_2, ..., p_1, p_2, ...)$ a los vectores de $G^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, con $x_i \in G^{\mathbb{N}}$, $r_j \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $p_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

De esta forma tomaremos

$$\varphi(x_1, x_2, ..., r_1, r_2, ..., 1, p_2, ...) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}} r_k x_k \tag{3.1}$$

y consideraremos

$$\mathcal{Z} = \{(x_1, x_2, ..., r_1, r_2, ..., 1, p_2, ...) \in G^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : p_1 < p_2 < p_3 < ... \wedge \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}} r_k x_k\}$$

de forma que $\mathcal{Z}$ es el conjunto donde la expresión 3.1 tiene sentido. Así, φ está bien definida por la propia definición de $\mathcal{Z}$ y es suprayectiva puesto que los elementos del $\overline{span}(G)$, que son los límites de combinaciones lineales de elementos de G, se pueden expresar como la imagen por φ de un elemento de $\mathcal{Z}$.

□

Lema 3.14. *Sea un conjunto $E \in \mathbb{R}^2$ tal que no pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos. Entonces existe un espacio de Banach X_E con cardinal $\mathfrak{c}$ y vectores $\{e_a : a \in \mathbb{R}\}$ de X_E tales que para todo $a < b$:*

i) $||e_a + e_b||_E = 2$, *si* $(a, b) \in E$

ii) $||e_a + e_b||_E = 1$, *si* $(a, b) \notin E$

Demostración.
Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y cuya norma definimos como en 3.11, es decir, $f \in (B(\mathbb{R}),\ ||\cdot||_E)$. Por el teorema 3.12 sabemos que éste es un espacio de Banach.

Para cada $a \in \mathbb{R}$, sea $e_a \in B(\mathbb{R})$ la función característica del punto a; esto es, $e_a(a) = 1$ y $e_a(b) = 0$, si $a \neq b$. Nótese que los vectores e_a satisfacen las condiciones del enunciado, pues

$$||e_a+e_b||_E = \max\left(\sup_a |e_a(a)+e_b(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |e_a(a)+e_b(a)+e_a(b)+e_b(b)|\right) = 2,\ \text{si } (a,b) \in E$$

$$||e_a+e_b||_E = \max\left(\sup_a |e_a(a)+e_b(a)|,\ \sup_{(a,b)\in E} |e_a(a)+e_b(a)+e_a(b)+e_b(b)|\right) = 1,\ \text{si } (a,b) \notin E$$

Tomaremos X_E como el subespacio cerrado de $B(\mathbb{R})$ generado por $G = \{e_a : a \in \mathbb{R}\}$, es decir, $X_E = \overline{span}(G)$.

Así, por el lema 3.13 como sabemos que $|G| = \mathfrak{c}$ se tiene que $|X_E| = |\overline{span}(G)| = \mathfrak{c}$.

□

Definición 3.15. *Definimos X_E como el subespacio cerrado de $B(\mathbb{R})$ generado por $G = \{e_a : a \in \mathbb{R}\}$, es decir, $X_E = \overline{span}(G)$, el cual tendrá cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Definición 3.16. *Denotaremos como c_0 al subespacio de ℓ^∞ de las sucesiones convergentes a 0.*

$$c_0 = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0\}$$

Teorema 3.17. *c_0 es un subespacio cerrado de $(\ell^\infty, ||\cdot||_\infty)$.*

Demostración.
Sea $(x^k)_{k=1}^\infty \in c_0$ una sucesión convergente a $\mathbf{x} \in \ell^\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||\mathbf{x} - x^k||_\infty \leq \varepsilon$, lo cual es equivalente a que $\sup_{n\geq 1} |\mathbf{x}_n - x_n^k| \leq \varepsilon,\ \forall k \geq n_0$.

Para cada k sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_1,\ |x_n^k| \leq \varepsilon$, entonces

$$|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{x}_n \pm x_n^k| \leq |\mathbf{x}_n - x_n^k| + |x_n^k| \leq 2\varepsilon$$

Por tanto, $\mathbf{x}_n$ converge a 0 y $\mathbf{x} \in c_0$.

□

Teorema 3.18. *$(c_0, ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración.
Por la proposición 3.6 sabemos que un subespacio de un espacio de Banach es de Banach si y sólo si es cerrado. Hemos demostrado en el teorema anterior que c_0 es subespacio cerrado de $(\ell^\infty, ||\cdot||)$ el cual sabemos que es un espacio de Banach por el teorema 3.10.

□

Definición 3.19. *Sea $X_1, X_2, ...$ una sucesión de espacios de Banach. Definimos el espacio suma c_0 como*

$$(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_{c_0} = \{(x_1, x_2, ...) \in X_1 \times X_2 \times ... : \lim_{n\longrightarrow\infty} ||x_i|| = 0\}$$

Definimos también la norma

$$||(x_1, x_2, ...)||^\infty = \sup\{||x_n|| : n \in \mathbb{N}\}$$

Teorema 3.20. *El espacio* $((X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_{c_0}, ||\cdot||^\infty)$ *donde* $X_1, X_2, ..$ *son espacios de Banach es un espacio de Banach.*

Demostración.
Consideremos $(x^k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_{c_0}$ debemos comprobar si es convergente.

Se tiene que $x^k = x_1^k, x_2^k, ... = (x_n^k)_{n=1}^\infty$. Demostremos que para un n_0 fijo $(x_{n_0}^k)_{k=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en X_{n_0}, para todo n.

Sea $\varepsilon > 0$, por ser $(x^k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy existe un k_ε tal que si $l \geq k \geq k_\varepsilon$ se cumple $||x^l - x^k||^\infty \leq \varepsilon$.

Lo que es equivalente a que $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n^l - x_n^k|| \leq \varepsilon$ y para el caso particular de n_0 que $||x_{n_0}^l - x_{n_0}^k|| \leq \varepsilon$. Por tanto, se tiene que $(x_{n_0}^k)_{k=1}^\infty$ es de Cauchy, y se cumple para todo n.

Como para todo n se tiene que X_n es Banach $(x_n^k)_{k=1}^\infty$ converge a x_n. Ahora podemos tomar la sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^\infty$ y debemos comprobar que $\mathbf{x}$ converge a 0.

$$||x_n|| \leq ||x_n - x_n^k|| + ||x_n^k|| = \lim_{l\longrightarrow\infty} ||x_n^l - x_n^k|| + ||x_n^k|| \leq \lim_{l\longrightarrow\infty} ||x^l - x^k||^\infty + ||x_n^k||$$

Como $x^k \in (X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_{c_0}$, dado un $\varepsilon > 0$ podemos tomar un n_ε tal que $||x_n^k|| \leq \varepsilon$.

Dado que x^k converge a $\mathbf{x}$, $\forall n \geq n_\varepsilon$, sea k_ε tal que $||x^l - x^k||^\infty \leq \varepsilon,\ \forall l, k \geq k_\varepsilon$. Tomando límites se tiene que $\lim_{l\longrightarrow\infty} ||x^l - x^k||^\infty \leq \varepsilon, \forall k \geq k_\varepsilon$.

Así, considerando $K = k_{k_\varepsilon}$ se tiene que

$$||x_n|| \leq \lim_{l\longrightarrow\infty} ||x^l - x^K||^\infty + ||x_n^K|| \leq 2\varepsilon$$

□

El teorema que acabamos de demostrar nos será útil en la última sección de este capítulo y también nos permite dar una demostración alternativa al teorema 3.18. Para ello bastará tomar los espacios $X_i = \mathbb{R}$, de esta forma $(X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots)_{c_0} = c_0$ y las normas coincidirán..

3.2. El espacio cociente ℓ^∞/c_0 y el problema de Ulam

3.2.1. Isometrías con ℓ^∞/c_0

Lema 3.21. *El espacio cociente* X/Y *de un espacio de Banach* X *y un subespacio cerrado* Y *es el espacio cociente dotado de la norma* $||x + Y|| = \inf\{||x + Y|| : y \in Y\}$.

Demostración.
Dado que estamos trabajando en el espacio cociente ℓ^∞/c_0 únicamente lo demostraremos para este caso. Para ello bastará comprobar que $\limsup |x_n| = \inf\{\sup |x_n + y_n : |y_n| \longrightarrow 0\}$, con $x_n \in \ell^\infty, y_n \in c_0$.

Sabemos que $\limsup |x_n| = \inf_{m>0} \sup\{x_k : k > m\} = \inf_{m>0}\{\sup\{(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}\}\}$ entonces, tomando como sucesión $(y^m)_{m\in\mathbb{N}} = (y_n^m)_{n,m\in\mathbb{N}} = (-x_1, -x_2, ..., -x_m, 0, 0, 0, ...) \in c_0$ tendremos que $(x_n + y_n) = (0, 0, 0, ..., 0, x_{m+1}, x_{m+2}, ...)$. De esta forma es evidente la desigualdad $\geq$.

Para ver la otra desigualdad, basta comprobar que $\forall(y_n) \in c_0$ y $\forall\varepsilon > 0$ se cumple $\limsup |x_n| < \sup_n\{|x_n + y_n| + \varepsilon\}$, es decir, que $\forall\varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \sup |x_n + y_n| + \varepsilon, \forall n > m$.

Como $y_n \longrightarrow 0$ se tiene que $|y_n| < \varepsilon\ \forall n > m_\varepsilon$, por tanto, $|x_n| < |x_n + y_n - y_n| \leq |x_n + y_n| + |y_n| \leq |x_n + y_n| + \varepsilon$.

□

Gracias a un resultado de Parovichenko en topología, el cual está muy alejado de nuestra meta y que se puede consultar en [17], [20] y [21], sabemos que bajo CH el espacio cociente ℓ^∞/c_0 sirve como espacio universal para todos los espacios de Banach con cardinalidad $\mathfrak{c}$. Lo cual, se traduce en el siguiente teorema:

Teorema 3.22. *Bajo CH todo espacio de Banach X con $|X| = \mathfrak{c}$ es isométrico a un subespacio del espacio cociente ℓ^∞/c_0.*

La demostración de este teorema no la realizaremos ya que, como hemos dicho, escapa a nuestras posibilidades. En su lugar lo que haremos será demostrar que el teorema resulta ser falso si el problema de Ulam resulta tener una respuesta negativa, es decir, si bajo $\neg\, UA$.

Teorema 3.23. *Considerando $\neg\, UA$ se tiene que no todos los espacios de Banach X con $|X| = \mathfrak{c}$ son isométricos a un subespacio del espacio cociente ℓ^∞/c_0.*

Demostración.
Supongamos que tenemos un subconjunto $E \in \mathbb{R}^2$ tal que no pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos $\mathcal{R}$.

Podemos expresar este subconjunto del siguiente modo:

$$E = \{(a,b) \in E : a < b\} \cup \{(a,b) \in E : a = b\} \cup \{(a,b) \in E : a > b\}$$

Dado que $E \notin \mathcal{R}$ uno de los tres conjuntos anteriores no pertenece a esta σ-álgebra.

Sabemos que no puede ser el conjunto central, puesto que por un argumento que se dio en la demostración de la respuesta afirmativa al problema de Ulam los grafos de una función pertenecen siempre a $\mathcal{R}$.

Por tanto habrá de ser el primero o el tercero. Por simetría, podemos suponer que es el primero el que no pertenece a la σ-álgebra, de forma que estaremos suponiendo que de hecho $E \subset \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$.

Sea $T : X_E \longrightarrow \ell^\infty/c_0$ una isometría y para todo $a \in \mathbb{R}$, sea $S(a) = (S(a)_n)_n \in \ell^\infty$ el representante de $T(e_a)$ en el espacio cociente ℓ^∞/c_0.

Por el lema 3.21 sabemos que podemos calcular la $||T(e_a)||$ en ℓ^∞/c_0 como $\limsup_n |S(a)_n|$.

De esta forma, definimos $S : \mathbb{R} \longrightarrow \ell^\infty$ y consideramos los conjuntos

$$A_n = \{a \in \mathbb{R} : S(a)_n > 2/3\}, \quad B_n = \{a \in \mathbb{R} : S(a)_n < -2/3\}$$

En base a esto, probaremos que

$$E = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n \times A_n \cup \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} B_n \times B_n \tag{3.2}$$

lo cual supondrá una contradicción, puesto que nuestra hipótesis era que $E \notin \mathcal{R}$.

" $\subseteq$ "
Sea $a < b$ tal que $(a,b) \in E$, así que por el lema 3.14 sabemos que $||e_a + e_b||_E = 2$. Dado que T es un isometría se ha de cumplir $||T(e_a + e_b)|| = \limsup_n |S(a)_n + S(b)_n| = 2$.

Si consideramos el caso $\limsup_n (S(a)_n + S(b)_n) = 2$ se ha de cumplir que $S(a)_n > 2/3$ y $S(b)_n > 2/3$ para casi todo n y como T es una isometría y $||e_a||_E = 1$ se cumple que $||T(e_a)|| = \limsup_n |S(a)_n| = 1$ y por tanto $|S(a)_n| \leq 7/6$.

De no ser así, se tendría que $S(a)_n \leq 2/3$ para casi todo n, entonces $|S(a)_n + S(b)_n| \leq |S(a)_n| + |S(b)_n| \leq 2/3 + 7/6 < 2$, lo cual es imposible.

Por un razonamiento análogo se obtiene lo mismo para $S(b)_n$. Así que, $(a,b) \in A_n \times A_n$ para casi todo n, lo cual se traduce en que (a,b) pertenece al conjunto de la izquierda de la expresión (3.2).

Para el otro caso, cuando $\limsup_n (S(a)_n + S(b)_n) = -2$, se sigue un argumento simétrico y se obtiene la inclusión.

" $\supseteq$ "
Sea $a < b$ tal que $(a,b) \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n \times A_n$. De esta forma, se cumple que $a, b \in A_n$ para casi todo n y, por tanto,

$$||e_a + e_b||_E = ||T(e_a + e_b)|| = \limsup_n |S(a)_n + S(b)_n| > 1 \Rightarrow (a,b) \in E$$

dado que $a, b \in A_n \Rightarrow S(a)_n > 2/3,\ S(b)_n > 2/3$.

$\square$

3.2.2. Isomorfismos con ℓ^∞/c_0

Dedicando un esfuerzo adicional a nuestro trabajo, y considerando una generalización del problema de Ulam en $\mathbb{R}^n$ en lugar de en $\mathbb{R}^2$, es posible probar un resultado similar al anterior pero utilizando isomorfismos en lugar de isometrías.

Definición 3.24. *Dado un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ definimos*

$$E^{[k]} := \{(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{R}^k : a_i \neq a_j, (a_i, a_j) \in E\ \forall i < j\}$$

Axioma 5. Super No Ulam (SNU)
Existe $E \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\forall k$ $E^{[k]}$ y $(E^c)^{[k]}$ no se pueden separar por elementos de la σ-álgebra generada por $A_1 \times ... \times A_k$.

Definición 3.25. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la siguiente norma:*

$$||f||_{E,k} = \max\left(\sup_{a_1} |f(a_1)|, \sup_{(a_1,...,a_k)\in E^{[k]}} |f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_k)|\right)$$

donde E es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Es sencillo comprobar que efectivamente se trata de una norma, basta con ver que se cumplen las condiciones de la definición 3.1 y resulta análoga a la demostración que se da en 3.11.

Lema 3.26. *Sea un conjunto $E \in \mathbb{R}^2$ tal que no pertenece a la σ-álgebra generada por los rectángulos. Entonces existe un espacio de Banach $X_{E,k}$ con cardinal $\mathfrak{c}$ y vectores $\{e_{a_i} : a \in \mathbb{R}, i = 1, .., k\}$ de $X_{E,k}$ tales que para todo $a_1 < a_2 < ... < a_k$:*
i) $||e_{a_1} + e_{a_2} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = k$, si $(a_1, a_2, .., a_k) \in E^{[k]}$
ii) $|e_{a_1} + e_{a_2} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = 1$, si $(a_1, a_2, ..., a_k) \in (E^c)^{[k]}$

Demostración.
Para cada $a_i \in \mathbb{R}$, sea e_{a_i}la función característica del punto a_i; esto es, $e_{a_i}(a_i) = 1$ y $e_{a_i}(a_j) = 0$, si $a_i \neq a_j$. Nótese que los vectores e_{a_i} satisfacen las condiciones del enunciado, pues

$$||e_{a_1}+...+e_{a_k}||_{E,k} = \text{máx}\begin{cases} \sup_{a_1} |e_{a_1}(a_1) + e_{a_2}(a_1) + ... + e_{a_k}(a_1)| \\ \sup_{(b_1,...,b_k)\in E^{[k]}} |e_{b_1}(a_1) + ... + e_{b_k}(a_1) + ... + e_{b_1}(a_k) + ... + e_{b_k}(a_k)| \end{cases}$$

Si $(a_1, ..., a_k) \in E^{[k]}$ entonces $||e_{a_1} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = \text{máx}(1, k) = k$

Si $(a_1, ..., a_k) \in (E^c)^{[k]}$ se tendrá que $||e_{a_1} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = \text{máx}(1, 1) = 1$, puesto que existirá algún $(b_1, ..., b_k) \in E^k$ de forma que $a_i = b_j$ para un único par (i, j). Esto es lo que hace que $\sup_{(b_1,...,b_k)\in E^{[k]}} |e_{b_1}(a_1) + ... + e_{b_k}(a_1) + ... + e_{b_1}(a_k) + ... + e_{b_k}(a_k)| = 1$

Sabemos que se da esta posibilidad porque estamos considerando el supremo para $(b_1, ..., b_k) \in E^k$. Y tenemos garantizado que no tome valor 2 porque para eso debería haber dos elementos de la k-upla de E^k, (b_i, b_j) que fuesen iguales a dos de la k-upla de $(E^c)^{[k]}$, (a_i, a_j), por lo que ambos pares deberían pertenecer al conjunto E, lo cual supone una contradicción puesto que $(a_i, a_j) \in E^c$ por definición.

$$||e_{a_1} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = \begin{cases} k, \text{ si } (a_1, a_2, ..., a_k) \in E^{[k]} \\ 1, \text{ si } (a_1, a_2, ..., a_k) \in (E^c)^{[k]} \end{cases}$$

Tomaremos $X_{E,k}$ como el espacio generado por $G = \{e_{a_i} : a \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k\}$, es decir, $X_{E,k} = \overline{span}(G)$.

Por el lema 3.13 como sabemos que $|G| = \mathfrak{c}$ se tiene que $|X_{E,k}| = |\overline{span}(G)| = \mathfrak{c}$.

□

Definición 3.27. *Definimos $X_{E,k}$ como el espacio generado por $G = \{e_{a_i} : a \in \mathbb{R}, i = 1, ..., k\}$, es decir, $X_{E,k} = \overline{span}(G)$ y sabemos por la demostración anterior que tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Notación. Denotaremos como $\mathcal{R}_k$ a a σ-álgebra generada por $A_1 \times ... \times A_k$.

Lema 3.28. *Si $E^{[k]}$ y $(E^c)^{[k]}$ no se pueden separar mediante dos subconjuntos de $\mathbb{R}^k$ en la σ-álgebra $\mathcal{R}_k$ entonces existe un espacio de Banach $X_{E,k}$ con $|X_{E,k}| = \mathfrak{c}$ tal que para todo isomorfismo $T : X_{E,k} \longrightarrow \ell^\infty/c_0$ que lleva $X_{E,k}$ a un subespacio de ℓ^∞/c_0 se tiene que $||T|| \cdot ||T^{-1}|| \geq k$.*

Demostración.
Consideremos el espacio $X_{E,k}$ de la definición 3.27, el cual sabemos que tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Supongamos que existe un isomorfismo $T : X_{E,k} \longrightarrow \ell^\infty/c_0$, donde $T(X_{E,k}) \subset \ell^\infty/c_0$ tal que $||T|| \cdot ||T^{-1}|| < k$.

Al igual que antes, podemos considerar una aplicación $S : X_{E,k} \longrightarrow \ell^\infty$ tal que sea $S(a_k) = (S(a_k)_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty$ el representante de $T(e_{a_k})$ en el espacio cociente ℓ^∞/c_0.

Si tomamos $(a_1, ..., a_k) \in E^{[k]}$ sabemos que $||e_{a_1} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = k$ y, dado que T es un isomorfismo podemos afirmar que

$$\limsup_n |S(a_1)_n + ... + S(a_k)_n| = ||T(e_{a_1}) + ... + T(e_{a_k})|| \geq \frac{||e_{a_1} + ... + e_{a_k}||_{E,k}}{||T^{-1}||} = \frac{k}{||T^{-1}||}$$

Si ahora tomamos $(a_1, ..., a_k) \in (E^c)^{[k]}$ sabemos que $||e_{a_1} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = 1$ y podemos afirmar que

$$\limsup_n |S(a_1)_n + ... + S(a_k)_n| = ||T(e_{a_1}) + ... + T(e_{a_k})|| \leq ||T|| \cdot ||e_{a_1} + ... + e_{a_k}||_{E,k} = ||T||$$

de esta forma tendríamos que

$$E^{[k]} \subset \{(a_1, ..., a_k) : \limsup_n |S(a_1)_n + ... + S(a_k)_n| \geq \frac{k}{||T^{-1}||}\}$$

mientras que

$$(E^c)^{[k]} \subset \{(a_1, ..., a_k) : \limsup_n |S(a_1)_n + ... + S(a_k)_n| \leq ||T||\}$$

Pero por hipótesis $||T|| \cdot ||T^{-1}|| < k$, lo cual es incompatible con las desigualdades de arriba.

Por ello, se tiene que $E^{[k]}$ y $(E^c)^{[k]}$ son disjuntos. Veamos ahora si se pueden separar por elementos de la σ-álgebra. Para ello será suficiente comprobar que uno de ellos está contenido en ella.

$$(E^c)^{[k]} \subset \{(a_1, ..., a_k) : \limsup_n |S(a_1)_n + ... + S(a_k)_n| \leq ||T||\} =$$

$$= \{(a_1, ..., a_k) : \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \text{ tal que } \forall n > n_\varepsilon \ |S(a_1)_n + ... + S(a_k)_n| < ||T|| + \varepsilon\} =$$

$=$

$$= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{q > p} \{(a_1, ..., a_k) : |S(a_1)_q + ... + S(a_k)_q| < ||T|| + 1/m\} =$$

$=$

$$= \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{q > p} \bigcup_{I_1, ..., I_k} \{a : S(a_1)_q \in I_1\} \times ... \times \{a : S(a_k)_q \in I_k\}$$

donde $I_1, ..., I_k$ son intervalos con extremos racionales tales que $\forall x_1 \in I_1, ..., x_k \in I_k$ se cumple que $|x_1 + ... + x_k| \leq ||T|| + 1/m$, lo cual implica que dicho conjunto está en la σ-álgebra.

□

Teorema 3.29. *Considerando SNU podemos obtener espacios de Banach con cardinalidad $\mathfrak{c}$ que no son isomorfos a ningún subespacio de ℓ^∞/c_0.*

Consideremos el siguiente espacio

$$X = (X_{E,1} \oplus X_{E,2} \oplus \cdots)_{c_0}$$

con la norma $||(x_1, x_2, ...)||^\infty = sup\{||x_n|| : n \in \mathbb{N}\}$ donde $X_{E,i}$ son espacios de Banach con cardinalidad $\mathfrak{c}$ y cumplen el lema 3.28.
Sabemos que X es un espacio de Banach por el teorema 3.20.
En virtud del lema 2.5 sabemos que $|X| = \mathfrak{c}$ ya que $|X_{E,i}| = \mathfrak{c}$.

Entonces si existiese un isomorfismo $T : X \hookrightarrow \ell^\infty/c_0$ dado que $X_{E,i} \subset X \hookrightarrow \ell^\infty/c_0$ se tendría que $||T|| \cdot ||T^{-1}|| \geq k, \ \forall k$, lo cual supone una contradicción con el hecho de que sea un isomorfismo.

□

Observación 3.30. *Llegados a este punto, y ya para cerrar el capítulo, podemos realizar una serie de comentarios:*

- *Sabemos que bajo CH se puede demostrar UA y considerando PMEA se demuestra* $\neg\, UA$. *Por tanto, el enunciado de Ulam resulta ser indecidible, es decir, no es posible demostrar ni él ni su negación.*

$$CH \Longrightarrow \text{UA} \Longrightarrow \neg\text{UA no se puede demostrar}$$

$$PMEA \Longrightarrow \neg\text{UA} \Longrightarrow \text{UA no se puede demostrar}$$

- *Existe una forma alternativa de demostrar que UA no se puede demostrar en la que se hace uso de los llamados reales de Cohen, la cual está muy por encima de nuestras posibilidades. Fue expuesta por el matemático estadounidense K. Kunen en [18].*

- *S. Todorčević, matemático serbio, realizó un estudio relacionado con el tema que nos ocupa. Así, en el remark 3.5 de [19] afirma que, de una manera sencilla, es posible modificar la demostración que da Kunen en [18] y demostrar SNU.*
  Por tanto, no sólo da una demostración de que UA no se puede demostrar, sino que prueba que $\neg\, SNU$ *no se puede demostrar.*
  Por ello, podemos afirmar que SNU *es consistente en ZFC.*

Bibliografía

[1] Jech, Thomas J., *Set Theory*. Springer, 2003.

[2] Bagaria, Joan, *Set Theory*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/set-theory/

[3] Koellner, Peter, *The Continuum Hypothesis*, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/continuum-hypothesis/

[4] Avilés, A. y Plebanek, G. *A little ado about rectangles*, 2014.

[5] García Hernández, J.L. Apuntes de Álgebra Conmutativa, 2016.

[6] Roitman, J, *Introduction to Modern Set Theory*, 2013.

[7] Levy, A. *Basic Set Theory*. Springer-Verlag, 1979.

[8] Cohen, P. *The Independence of the Continuum Hypothesis*. Stanford University, 1963.

[9] Cohen, P. *The Independence of the Continuum Hypothesis II*. Stanford University, 1963.

[10] Gödel, K., *The Consistency of the Continuum Hypothesis*. Princeton University Press, 1940

[11] Sterling K. Berberian. *Fundamentals of Real Analysis*. Springer, 1999.

[12] Royden, H. L.. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, 1988.

[13] Halmos, P. R.. *Measure Theory*. Spinger-Verlag, 1974.

[14] Cohn, Donald L.. *Measure Theory*. Birkhäuser Boston, 1980.

[15] Banach, S. y Kuratowski, C.. *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 14, 1929.

[16] Jiménez López, V. Apuntes de Análisis Funcional, 2016.

[17] López Serrano, F. *Espacios de Banach Universales*, TFM, 2012.

[18] Kunen, K.. *Inaccesisibility properties of cardinals*, PhD thesis, Stanford University, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1968.

[19] Todorčević, S.. *Embedding function spaces into* ℓ^∞/c_0, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 384 (2011), no. 2, 246-251.

[20] Ryszard E.. *A topological proof parovichenko's characterization of* $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, Topology Proceedings **10** (1985), no. 1, 47-53.

[21] Ryszard E.. *General topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[22] Malduin. D.. *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston, 1981.