



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Facultad de Matemáticas
Grado en Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

El problema isoperimétrico con restricciones a retículos

Germán García López

Curso 2016/2017

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Germán García López, autor del TFG titulado “*El problema isoperimétrico con restricciones a retículos*”, bajo la tutela de los profesores **María de los Ángeles Hernández Cifre** y **Jesús Yepes Nicolás**,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 12 de Junio de 2017

Fdo.: Germán García López

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha depositado una copia firmada de esta declaración.

*A Sacramentos,
porque siempre bailaremos juntos.*

Índice general

Introducción	IX
Introduction	XI
1. Geometría convexa y retículos	1
1.1. Teoría básica de conjuntos convexos	1
1.1.1. Conjuntos convexos. Propiedades básicas de convexidad	2
1.1.2. Separación de conjuntos convexos. Hiperplanos soporte	4
1.1.3. La suma de Minkowski	6
1.1.4. La métrica de Hausdorff. El teorema de Selección de Blaschke	7
1.1.5. Volumen y área de superficie de un conjunto convexo	10
1.2. Teoría básica de retículos	12
2. El problema isoperimétrico clásico	17
2.1. La simetrización de Steiner y sus propiedades	17
2.2. El teorema de Gross. La desigualdad isoperimétrica	25
2.3. Desigualdades isoperimétricas relativas	28
3. El problema isoperimétrico con restricciones a retículos	31
3.1. Teorema de Bender en el plano	31
3.2. Teorema de Bokowski, Hadwiger y Wills	37
Índice de figuras	41
Bibliografía	43

Introducción

La desigualdad isoperimétrica en el plano viene a decir que, entre todas las curvas simples y cerradas de longitud dada L , la que encierra mayor área es la circunferencia, esto es, si A es el área de la región acotada por una curva simple y cerrada α de longitud L , entonces

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

alcanzándose la igualdad si, y sólo si, α es una circunferencia. Motivados por este hecho, la presente memoria se encarga de obtener resultados de tipo isoperimétrico dentro del ambiente de la geometría convexa y de la teoría de retículos.

La memoria está dividida en tres capítulos claramente distinguibles. El primer capítulo consta de dos partes fundamentales. La primera de ellas se centra en la introducción de los conceptos más importantes que necesitaremos de la geometría convexa. En este sentido, después de introducir la noción de *conjunto convexo* en \mathbb{R}^n , se establece el concepto de *cuerpo convexo*, esencial en este trabajo, y que no es más que un conjunto convexo y compacto no unipuntual. Además, también se estudia la *separación de conjuntos convexos* y los *hiperplanos soporte*, conceptos imprescindibles para abordar algunos resultados principales. Otro detalle importante de este capítulo es la inclusión de la conocida como *métrica de Hausdorff*, que nos permitirá dotar de estructura de espacio métrico a la familia de los conjuntos compactos de \mathbb{R}^n y, en consecuencia, establecer el teorema de selección de Blaschke. Las definiciones de volumen, $\text{vol}(K)$, y área de superficie, $S(K)$, de un cuerpo convexo, K , que serán utilizadas en los capítulos restantes, cierran la primera parte de este primer capítulo. La segunda parte se ocupa de abordar de forma sucinta el concepto de *retículo* y algunas de sus propiedades más importantes. Así, dado un conjunto $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$ de n vectores linealmente independientes, se define el retículo L generado por ellos como

$$L(b_1, \dots, b_n) := \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}.$$

Cuando los vectores b_i son los de la base canónica, se obtiene el conjunto de puntos del espacio con coordenadas enteras, \mathbb{Z}^n , que se denomina *retículo entero*. Finalmente, se introduce la noción de *número de puntos de un retículo L contenidos en el interior de un cuerpo convexo K* , denotado por $G(K, L)$, que jugará un papel esencial en el último de los resultados de este trabajo.

El capítulo dos de esta memoria está precisamente destinado a abordar el problema isoperimétrico en \mathbb{R}^n para cuerpos convexos. Como consecuencia de esta pretensión, aparece una

herramienta realmente útil, conocida como la *simetrización de Steiner*, de la que estudiamos sus propiedades más importantes. Entre otras, destacar que conserva la convexidad, la compacidad y el volumen, y no aumenta el área de superficie. La *simetrización de Steiner* da paso al teorema de esfericidad de Gross, el cual, grosso modo, establece que el límite de una sucesión de simetrizaciones de Steiner aplicadas a un cuerpo convexo es siempre una bola. A partir de él se pueden deducir de forma más o menos inmediata muchas desigualdades geométricas en convexidad. Aprovechándonos de esta peculiaridad, probamos en toda su generalidad la desigualdad isoperimétrica para cuerpos convexos en el espacio euclídeo n -dimensional. El capítulo dos se cierra con la introducción del concepto de *desigualdad isoperimétrica relativa*, así como del de *constante isoperimétrica relativa*, que se deriva directamente del anterior. Este último, aunque no es el objetivo del trabajo, sí que será útil en la demostración de algunos resultados del capítulo tercero.

El capítulo tres es la guinda del pastel, pues yuxtapone dos temas interesantes por sí solos: el problema isoperimétrico para cuerpos convexos, desarrollado en el capítulo dos, con el hecho de contar el número de puntos de un retículo que contiene un cuerpo convexo. Comenzamos el capítulo con el teorema de E. A. Bender (sección 3.1), que se ocupa de este vínculo en el plano. Dicho resultado establece lo siguiente:

Teorema (Bender, 1962). *Sea K un cuerpo convexo de \mathbb{R}^2 , que no contiene puntos del retículo entero \mathbb{Z}^2 en su interior. Entonces*

$$A(K) \leq \frac{1}{2} p(K).$$

En realidad probaremos una desigualdad ligeramente más general, que además será válida para un retículo arbitrario del plano euclídeo. Además, como consecuencia del resultado anterior, se obtiene una condición suficiente para que un cuerpo convexo en el plano contenga puntos del retículo entero en su interior. Finalmente, en la sección 3.2, se da una generalización a dimensiones superiores de este teorema. Concretamente, en 1972, J. Bokowski, H. Hadwiger y J. M. Wills demuestran la relación existente entre el número de puntos del retículo entero contenidos en el interior de un cuerpo convexo, y su volumen y área de superficie:

Teorema (Bokowski, Hadwiger, Wills, 1972). *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo cualquiera, entonces*

$$\text{vol}(K) - \frac{1}{2} S(K) \leq G(K, \mathbb{Z}^n).$$

Introduction

The isoperimetric inequality in the plane says that among all the simple and closed curves with given length L , the circumference is the one which enclosed the greatest area. This is, if A is the area of a region bounded by a simple and closed curve α with length L , then

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

and the equality is obtained if and only if α is a circumference. Motivated by this fact, in the present work we focus on getting results of isoperimetric type in the setting of both convex geometry and the theory of lattices.

The work is divided in three chapters. The first one has two main parts. The first of them contains the most important concepts we will need from convex geometry. In this regard, after introducing the notion of *closed set* in \mathbb{R}^n , we set the concept of *convex body*, crucial in this work, which is just a compact convex set being not a point. Moreover, we also study the *separation of convex sets* and *support hyperplanes*, relevant concepts in order to deal with some of the main results of this work. Another important notion along this chapter will be the so-called *Hausdorff metric*, which will allow us to induce a metric structure on the family of compact sets in \mathbb{R}^n and, consequently, to establish Blaschke's selection theorem. We conclude the first part of the chapter with the definitions of volume, $\text{vol}(K)$, and surface area, $S(K)$, of a convex body K , which will be used throughout this work. The second part of the chapter focuses briefly on the concept of *lattice* and some of its more relevant characteristics. In this way, given a set $\{b_1, \dots, b_n\}$ of n linearly independent vectors, the lattice generated by them is defined as

$$L(b_1, \dots, b_n) := \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}.$$

In particular, we establish the concept of *lattice point enumerator* $G(K, L)$, this is, the number of points of the lattice L which are contained in the interior of the convex body K . It will play a crucial role in the last result of this work.

The second chapter of this work is devoted to studying the isoperimetric problem for convex bodies in \mathbb{R}^n . Consequently, we introduce a very useful tool, known as the *Steiner symmetrization*, and we study its most important properties. Among them, we show that convexity, compactness and volume are preserved, and that the surface area does not increase. The *Steiner symmetrization* leads to the Gross sphericity theorem, which, roughly speaking, states that the

limit of a sequence of Steiner symmetrizations of a convex body is always a ball. From this theorem many geometric inequalities in convexity can be easily deduced. Using this, we prove in full generality the isoperimetric inequality for convex bodies in the n -dimensional Euclidean space. Chapter two ends introducing the concept of *relative isoperimetric inequality*, as well as of *relative isoperimetric constant*. It is not the aim of the work, but it will be crucial in the proof of the last result of the third chapter.

Chapter three is the main goal of this work, because it brings together two topics important on their own: the isoperimetric problem for convex bodies, which we have developed in Chapter 2, and the fact of counting the number of points of a lattice that are contained in a set. We start the chapter showing E. A. Bender's theorem (Section 3.1), which studies this connection in the plane. It states the following:

Theorem (Bender, 1962). *Let K be a convex body in \mathbb{R}^2 containing no points of the integer lattice \mathbb{Z}^2 in its interior. Then*

$$A(K) \leq \frac{1}{2} p(K).$$

Moreover, as a consequence of this result, we obtain a sufficient condition for a convex body in the plane to have points of the integer lattice in its interior. Finally, in Section 3.2, we give a generalization to higher dimensions of this theorem. More precisely, in 1972, J. Bokowski, H. Hadwiger and J. M. Wills, showed the relation between the number of points of the integer lattice contained in the interior of a convex body and its volume and surface area:

Theorem (Bokowski, Hadwiger, Wills, 1972). *Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a convex body. Then*

$$\text{vol}(K) - \frac{1}{2} S(K) \leq G(K, \mathbb{Z}^n).$$

Geometría convexa y retículos

El objetivo principal de este capítulo es establecer los conceptos y resultados básicos de la geometría convexa y de la teoría de retículos. Éstos nos permitirán demostrar los resultados fundamentales de este trabajo, pero, ni mucho menos, son el objetivo principal del mismo; razón por la que no incluiremos ninguna demostración aquí.

Antes de comenzar, es conveniente introducir la notación que seguiremos de aquí en adelante. Como viene siendo usual, representaremos por \mathbb{R}^n al espacio euclídeo ordinario n -dimensional, dotado con el producto escalar estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, la norma euclídea $|\cdot|$ y la función distancia usual $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y por $e_i, i = 1, \dots, n$, a los vectores de la base canónica. $B_n(x, \rho)$ será la bola euclídea n -dimensional (cerrada) de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $\rho \geq 0$. En el caso particular de que el centro de la bola sea el origen, escribiremos simplemente $B_n(\rho)$; para referirnos a la bola unidad cerrada se escribirá B_n . Por otro lado, si $A \subset \mathbb{R}^n$, pondremos $\text{int } A$, $\text{bd } A$ y $\text{cl } A$ para referirnos, respectivamente, al interior, a la frontera y a la clausura de A . Finalmente, se denotará por \mathbb{S}^{n-1} a la esfera unidad $(n - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n .

1.1. Teoría básica de conjuntos convexos

La convexidad tiene una larga historia en el tiempo. Las primeras contribuciones a la materia se pueden encontrar en trabajos de Euclides (≈ 300 a.C) y Arquímedes (287-212 a.C). Concretamente, en los cuatro primeros axiomas del libro *Sobre la Esfera y el Cilindro* de Arquímedes, aparecen las primeras menciones explícitas de la noción de convexidad. Aparte de otras contribuciones a la materia, a finales del siglo XIX, aparecieron resultados importantes en convexidad, principalmente de la mano de H. K. Brunn y H. Minkowski. Sin embargo, puede considerarse que la geometría convexa es una disciplina de la matemática más bien joven. En este sentido, hubo que esperar hasta 1934 para que apareciese un primer estudio sistemático de la misma, desarrollado en el libro *Theorie der konvexen Körper* de T. Bonnesen y W. Fenchel. A lo largo

de los años 40 y 50, y gracias al descubrimiento de numerosas aplicaciones de los conjuntos convexos como, por ejemplo, la optimización geométrica, el estudio de esta teoría se acrecentó notablemente.

En cuanto a las referencias utilizadas en esta sección, podríamos destacar [6]; aunque, de forma ocasional, también se ha recurrido a [3].

1.1.1. Conjuntos convexos. Propiedades básicas de convexidad

Comenzamos el estudio de los *conjuntos convexos* con una serie de definiciones elementales, que nos serán de especial utilidad:

Definición 1.1.1. *Se dice que un vector $x \in \mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de los vectores x_1, \dots, x_k si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$. Además:*

- Si los λ_i verifican $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$, se dice que x es una combinación afín de los x_i .
- Si los λ_i verifican $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, entonces x es una combinación positiva de los x_i .
- Finalmente, si las dos condiciones anteriores se satisfacen para los λ_i , esto es, si

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1 \quad \text{y} \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

entonces se dice que x es una combinación convexa de los x_i .

Estamos ya en condiciones de dar la definición de *conjunto convexo* en \mathbb{R}^n :

Definición 1.1.2. *Se dice que un conjunto K no vacío de \mathbb{R}^n es un conjunto convexo si, dados dos puntos cualesquiera de K , el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto, esto es, si la combinación convexa $(1 - \lambda)x + \lambda y$ pertenece a K , para cada $x, y \in K$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.*

En lo que sigue, denotaremos por $[x, y]$ al segmento de extremos x e y , es decir,

$$[x, y] := \{(1 - \lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

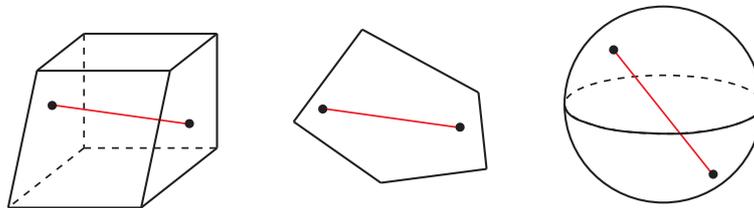


Figura 1.1: Ejemplos típicos de conjuntos convexos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

Un resultado básico que caracteriza a los conjuntos convexos es el siguiente:

Proposición 1.1.1. *Un conjunto K de \mathbb{R}^n es convexo si, y sólo si, cualquier combinación convexa de puntos de K está en K .*

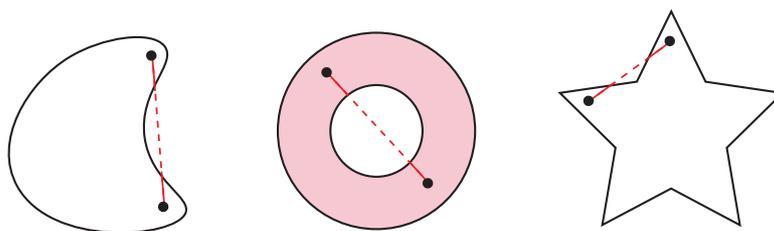


Figura 1.2: Ejemplos típicos de conjuntos no convexos de \mathbb{R}^2 .

La noción de *cono* (*convexo*) tiene especial importancia dentro del marco de los conjuntos convexos:

Definición 1.1.3. *Un cono (convexo) es un subconjunto no vacío A de \mathbb{R}^n que es convexo y tal que, si x está en A , entonces λx también está en A para todo $\lambda \geq 0$.*

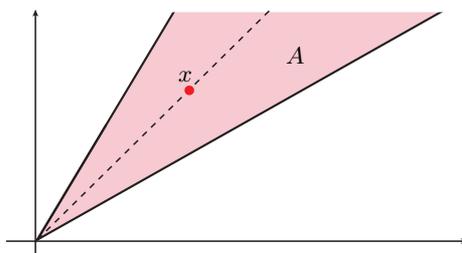


Figura 1.3: Cono convexo en \mathbb{R}^2 situado en el primer cuadrante.

Partiendo de la definición 1.1.2, podemos comprobar que, claramente, la intersección no vacía de conjuntos convexos es de nuevo un conjunto convexo. En efecto, si K y K' son conjuntos convexos tales que $K \cap K' \neq \emptyset$, entonces, dados $x, y \in K \cap K'$, se tiene que $[x, y] \subset K$ y $[x, y] \subset K'$; lo cual implica que $[x, y] \subset K \cap K'$ y, por lo tanto, $K \cap K'$ es un conjunto convexo.

Del hecho de que la intersección de conjuntos convexos sea de nuevo un conjunto convexo, se deduce que, dado cualquier conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$, podemos considerar el menor conjunto convexo de \mathbb{R}^n , para el orden dado por la inclusión usual de conjuntos, que contiene a A . Llegamos, pues, al concepto de *envoltura convexa*:

Definición 1.1.4. *Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$, se define la envoltura convexa de A , y se representa por $\text{conv } A$, como la intersección de todos los subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n que lo contienen (véase la figura 1.4).*

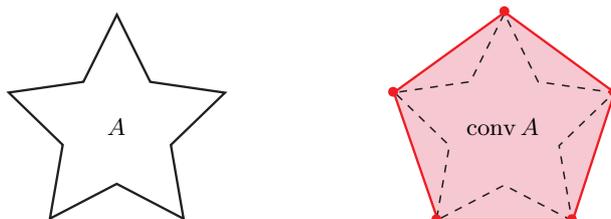


Figura 1.4: La envoltura convexa de la estrella de cinco puntas es el pentágono.

Análogamente, se definen la envoltura afín y la envoltura positiva de A , y se representan por $\text{aff } A$ y $\text{pos } A$, respectivamente, como la intersección de todos los subespacios afines, en el primer caso, o de todos los conos convexos, en el segundo, de \mathbb{R}^n que contienen a A (véase la figura 1.5). Finalmente, la dimensión de A no es más que la dimensión del menor subespacio afín que lo contiene, y se representa por $\dim A$.

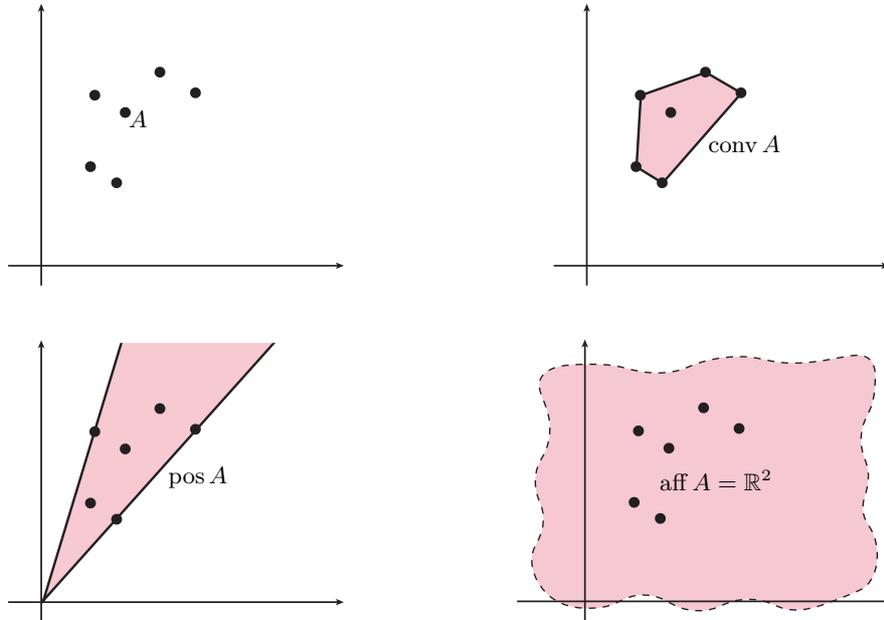


Figura 1.5: Envoltura convexa, envoltura positiva y envoltura afín de un conjunto A .

El resultado que sigue es una consecuencia directa de la definición 1.1.4:

Proposición 1.1.2. *Sea K un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Entonces K es convexo si, y sólo si, $\text{conv } K = K$.*

Finalmente, definimos un tipo especial de conjunto convexo, que será el que utilizaremos en gran parte de los resultados de esta memoria:

Definición 1.1.5. *Decimos que un conjunto convexo K de \mathbb{R}^n es un cuerpo convexo si es compacto y no es un punto. Denotaremos por \mathcal{K}^n y \mathcal{K}_0^n a la familia formada por todos los cuerpos convexos de \mathbb{R}^n , en el primer caso, y a la formada por todos los cuerpos convexos de \mathbb{R}^n con interior no vacío, en el segundo.*

1.1.2. Separación de conjuntos convexos. Hiperplanos soporte

En esta parte de la memoria nos centramos en la separación de dos conjuntos convexos por medio de un *hiperplano (afín)*, y en la definición de *hiperplano soporte*. Comencemos, pues, recordando el concepto de *hiperplano (afín)* en \mathbb{R}^n :

Definición 1.1.6. *Un hiperplano (afín) H de \mathbb{R}^n es un subespacio afín de \mathbb{R}^n de dimensión $n - 1$. En particular, se tiene que*

- si $n = 1$, entonces un hiperplano es un punto;
- si $n = 2$, un hiperplano es una recta;
- si $n = 3$, un hiperplano es un plano en \mathbb{R}^3 .

Un hiperplano H de \mathbb{R}^n puede expresarse en la forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$, donde $u \neq 0$ es un vector (unitario) normal a H , y c es un número real fijo. El hiperplano H dividirá el espacio euclídeo n -dimensional, \mathbb{R}^n , en dos semiespacios cerrados, a saber,

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq c\} \quad \text{y} \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq c\}.$$

Estamos ya en condiciones de definir la separación de conjuntos, así como los tipos de separación que existen:

Definición 1.1.7. Sean A y B dos subconjuntos de \mathbb{R}^n y H un hiperplano.

- Se dice que un hiperplano H separa A y B si $A \subset H^-$ y $B \subset H^+$, o viceversa. En este caso, H se denomina hiperplano de separación de A y B .
- La separación es propia si A y B no están ambos en H .
- Decimos que A y B están estrictamente separados por H si $A \subset \text{int } H^-$ y $B \subset \text{int } H^+$, o viceversa.
- Finalmente, diremos que A y B están fuertemente separados por $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que $H_{c-\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c - \varepsilon\}$ y $H_{c+\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c + \varepsilon\}$ separan A y B .

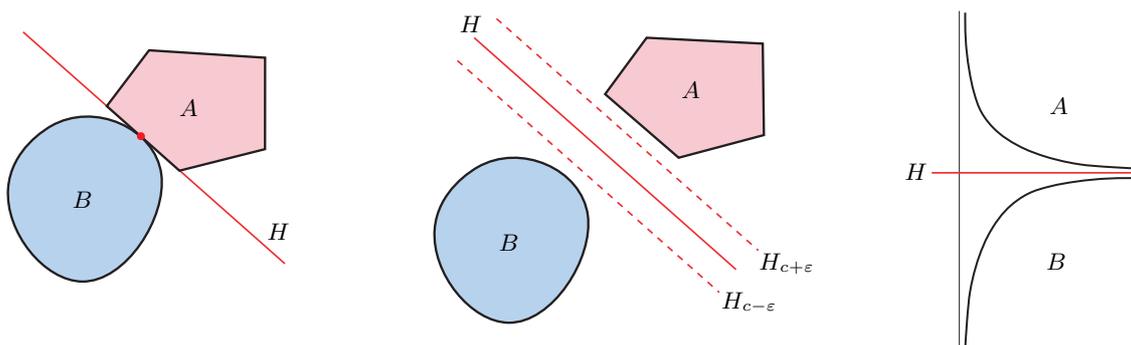


Figura 1.6: De izquierda a derecha: separación propia, separación fuerte y separación estricta.

De entre todos los resultados existentes que muestran condiciones suficientes para que dos conjuntos puedan separarse, nos centraremos en un caso especial, que será el que utilizaremos más tarde: el de un conjunto y un punto.

Teorema 1.1.1 (de separación). Si K es un conjunto convexo y $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, entonces K y x pueden separarse. Además, si K es cerrado, entonces K y x pueden separarse fuertemente.

Es el momento de dejar de lado la separación de conjuntos convexos, y centrarnos en los hiperplanos soporte, que serán de especial utilidad en la demostración del teorema 3.1.1 de Bänder.

Definición 1.1.8. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y cerrado. Se dice que un hiperplano H soporta a K en un punto $x \in K$ si $x \in K \cap H$ y, además, K está contenido en uno de los dos semiespacios que dicho hiperplano determina, H^+ o H^- . Finalmente, diremos que H es un hiperplano soporte a K si H soporta a K en algún punto x , el cual será, necesariamente, un punto de su frontera.

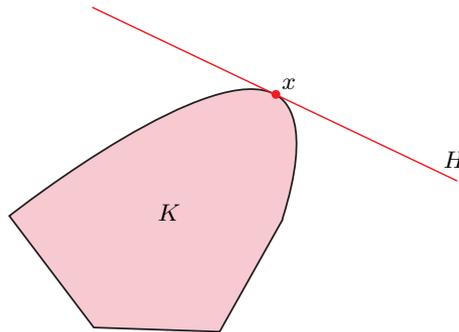


Figura 1.7: El hiperplano H soporta a K en $x \in \text{bd } K \cap H$.

Veamos un resultado sobre hiperplanos soporte, que necesitaremos más adelante:

Teorema 1.1.2. Si K es un conjunto convexo y cerrado de \mathbb{R}^n , entonces por cada punto frontera de K existe un hiperplano soporte a K .

1.1.3. La suma de Minkowski

En esta parte nos ocupamos de introducir la definición, y algunas propiedades básicas, de la suma vectorial de conjuntos o *suma de Minkowski*:

Definición 1.1.9. La suma de Minkowski de dos conjuntos no vacíos A y B de \mathbb{R}^n se define como

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b) = \bigcup_{a \in A} (a + B).$$

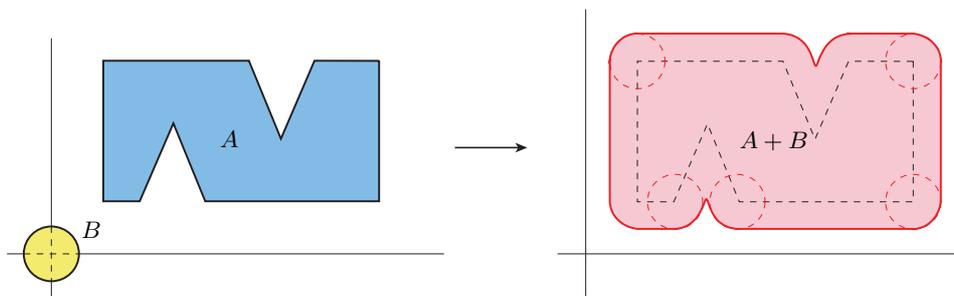


Figura 1.8: Suma de Minkowski.

A continuación presentamos una serie de propiedades fundamentales sobre la suma de Minkowski:

Proposición 1.1.3. Sean A y B conjuntos no vacíos de \mathbb{R}^n y $K \in \mathcal{K}^n$. Se verifican las siguientes propiedades:

- (1) Si A y B son conjuntos convexos, entonces $A + B$ es convexo.
- (2) Si A y B son conjuntos compactos, entonces $A + B$ es compacto.
- (3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda A + \lambda B = \lambda(A + B)$, donde $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$.
- (4) Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \geq 0$, entonces $(\lambda + \mu)K = \lambda K + \mu K$.
- (5) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda K \in \mathcal{K}^n$ (esto es, \mathcal{K}^n es un «cono»).
- (6) Para la bola B_n se tiene que

$$A + \lambda B_n = \bigcup_{a \in A} (a + \lambda B_n) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \lambda\}.$$

El área de superficie de un cuerpo convexo, tal y como se va a definir próximamente, hace uso de la suma de Minkowski de dicho cuerpo y una bola euclídea:

Definición 1.1.10. Sea K un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n . Llamamos cuerpo paralelo de K a distancia λ a la suma de Minkowski $K + \lambda B_n$, que se representará, cuando convenga, por K_λ .

1.1.4. La métrica de Hausdorff. El teorema de Selección de Blaschke

El objetivo fundamental de este apartado consiste en definir una métrica sobre la familia \mathcal{K}^n que sea compatible con nuestras aspiraciones más próximas: comparar cuerpos convexos atendiendo, no sólo a su «posición» en el espacio euclídeo, sino también a su «forma». Básicamente, queremos introducir una métrica de forma que la distancia entre dos conjuntos sea pequeña sólo si los dos conjuntos son «prácticamente el mismo», esto es, si difieren «poco» en su forma y posición. Consideremos la función distancia usual $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) := |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$. Esta distancia nos permite definir de forma natural la distancia entre dos conjuntos A y B del espacio euclídeo \mathbb{R}^n como

$$d(A, B) := \inf \{d(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Es fácil observar que esta distancia mide, en cierto sentido, cuán separados están los conjuntos en el espacio euclídeo \mathbb{R}^n , es decir, aporta información sobre la «menor» de las distancias existentes entre puntos de A y de B . En la figura 1.9 podemos ver que, aunque los conjuntos A y B están lejos de ser el mismo, se tiene que $d(A, B) = 0$.

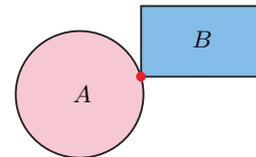


Figura 1.9: $d(A, B) = 0$ y $A \neq B$.

Así pues, la noción anterior de distancia se escapa del cumplimiento de nuestras pretensiones fundamentales: comparar tanto la forma como la posición de los conjuntos, y dar una medida conjunta de ambas propiedades.

Tras el descarte de la distancia usual, llegamos a una noción de distancia mucho más sensata en cuanto a nuestros objetivos se refiere: la *distancia de Hausdorff*. Esta distancia se define dentro de la familia formada por los conjuntos compactos de \mathbb{R}^n , que representaremos a partir de ahora por \mathcal{C}^n .

Definición 1.1.11. *Dados dos conjuntos compactos A y B de \mathbb{R}^n , se define la distancia de Hausdorff entre A y B como*

$$\delta(A, B) = \text{mín} \{ \lambda \geq 0 : A \subset B + \lambda B_n, B \subset A + \lambda B_n \}. \quad (1.1)$$

A continuamos vamos a justificar que la función $\delta : \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por (1.1) está bien definida y que, además, satisface las propiedades que se exigen en la definición de distancia. Con el fin de abreviar la notación cuando sea necesario, pondremos

$$L(A, B) := \{ \lambda \geq 0 : A \subset B + \lambda B_n, B \subset A + \lambda B_n \}.$$

Comprobamos por partes que se satisface lo anterior:

(1) $L(A, B) \neq \emptyset$:

Como $A, B \in \mathcal{C}^n$, se pueden encontrar dos números reales λ_1 y λ_2 , $\lambda_i \geq 0$, tales que

$$A \subset B + \lambda_1 B_n \quad \text{y} \quad B \subset A + \lambda_2 B_n.$$

Tomando $\lambda_0 = \text{máx} \{ \lambda_1, \lambda_2 \}$, se satisface que

$$A \subset B + \lambda_0 B_n \quad \text{y} \quad B \subset A + \lambda_0 B_n;$$

luego $\lambda_0 \in L(A, B)$ y, por lo tanto, $L(A, B) \neq \emptyset$, como se quería comprobar.

(2) *Existe el ínfimo del conjunto $L(A, B)$ y, de hecho, es un mínimo:*

Por el apartado anterior, tenemos que $L(A, B)$ es un conjunto no vacío de números reales no negativos, por lo que $L(A, B)$ está acotado inferiormente y, por ende, existe el ínfimo de dicho conjunto, que denotaremos por $\alpha \geq 0$. Veamos que, de hecho, α es un mínimo (el único, claro está) de $L(A, B)$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $\alpha \notin L(A, B)$. Como $\alpha = \text{ínf} L(A, B)$, existirá una sucesión de números reales $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset L(A, B)$, de forma que $\alpha = \text{lím}_i \alpha_i$. Además, la suposición de que $\alpha \notin L(A, B)$, implica que $A \not\subset B + \alpha B_n$ ó $B \not\subset A + \alpha B_n$. Imaginemos, sin pérdida de generalidad, que $A \not\subset B + \alpha B_n$. Existirá, pues, $y \in A$ tal que

$$y \notin B + \alpha B_n = \{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, B) \leq \alpha \},$$

es decir, $d(y, B) > \alpha$ y, como $\alpha = \text{lím}_i \alpha_i$ y $\alpha_i \geq \alpha$, existirá $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i \geq i_0$, entonces $d(y, B) > \alpha_i$. Así pues, si $i \geq i_0$, se tiene que $A \not\subset B + \alpha_i B_n$, lo cual contradice el hecho de que $\alpha_i \in L(A, B)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Finalmente, $\alpha \in L(A, B)$ y, de esta manera, $\alpha = \text{mín} L(A, B)$.

(3) *La distancia de Hausdorff es una distancia:*

Tenemos que ver que, efectivamente, δ cumple las tres propiedades que se le exigen a una distancia. Comprobemos esto mismo:

- i) Como todos los números del conjunto $L(A, B)$ son no negativos, se deduce, según la expresión (1.1), que $\delta(A, B) \geq 0$. Comprobemos ahora que $\delta(A, B) = 0$ si, y sólo si, $A = B$.
- Supongamos que $A = B$. En este caso, $\lambda = 0$ cumple la condición $A \subset A + \lambda B_n$; por lo que $\delta(A, B) = 0$. Supongamos, recíprocamente, que $\delta(A, B) = 0$. Entonces, de la expresión (1.1), se deduce que $A = B$.
- ii) El hecho de que $\delta(A, B) = \delta(B, A)$ es consecuencia directa de la expresión (1.1), que depende únicamente de los conjuntos que se estén considerando.
- iii) Sean $A, B, C \in \mathcal{C}^n$, y pongamos $\delta_1 = \delta(A, C)$ y $\delta_2 = \delta(C, B)$. Se tiene, entonces, que $A \subset C + \delta_1 B_n$ y $C \subset B + \delta_2 B_n$, de donde $A \subset B + \delta_2 B_n + \delta_1 B_n = B + (\delta_1 + \delta_2) B_n$. De forma enteramente análoga, se deduce que $B \subset A + (\delta_1 + \delta_2) B_n$ y, por tanto, $\delta_1 + \delta_2 \in L(A, B)$, con lo que $\delta(A, B) \leq \delta_1 + \delta_2 = \delta(A, C) + \delta(C, B)$.

Una vez comprobado que la expresión (1.1) tiene sentido, tenemos que (\mathcal{C}^n, δ) tiene estructura de espacio métrico. Como consecuencia, de aquí en adelante, todas las nociones métricas y topológicas que se refieran a \mathcal{C}^n o \mathcal{K}^n , tales como la continuidad o la convergencia, serán las correspondientes a la distancia de Hausdorff, y a la topología que ésta induce sobre \mathcal{C}^n o \mathcal{K}^n .

Vamos a ver unos cuantos ejemplos que nos familiaricen con esta distancia:

Ejemplo 1.1.1. Consideremos los conjuntos $A = B_2$ y $B = [0, 1]^2$. Veamos cuál es la distancia de Hausdorff entre A y B , esto es, $\delta(A, B)$. Es fácil ver que el menor escalar $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \geq 0$, que cumple $A \subset B + \lambda_1 B_2$ es $\lambda_1 = 1$. Por otro lado, la diagonal del cuadrado B vale $d = \sqrt{2}$ y, como el radio de la circunferencia $bd A$ es $r = 1$, se deduce que el menor $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \geq 0$, que cumple $B \subset A + \lambda_2 B_2$, es $\lambda_2 = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414 < 1$. Se llega, finalmente, a que $\delta(A, B) = 1$. Observemos cómo $d(A, B) = 0$, en contraste con $\delta(A, B)$.

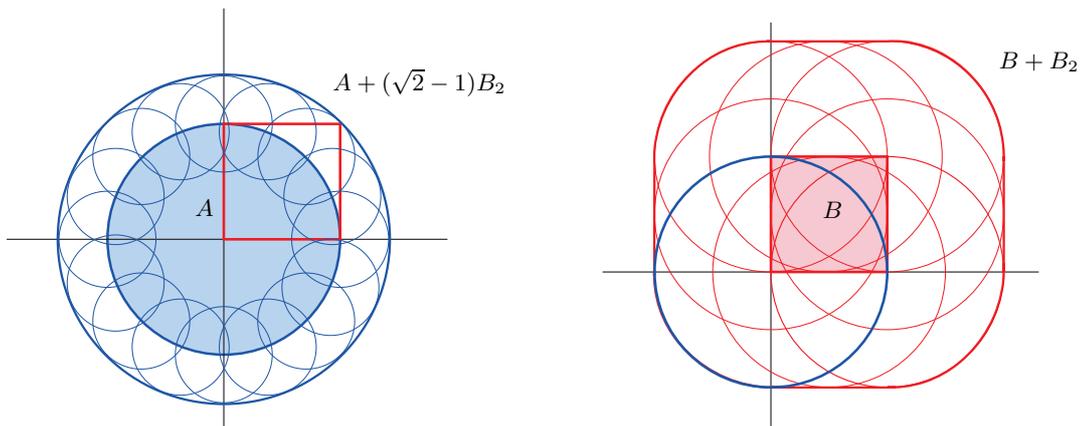


Figura 1.10: Cálculo de la distancia de Hausdorff del ejemplo 1.1.1.

Ejemplo 1.1.2. La distancia de Hausdorff generaliza la distancia euclídea en \mathbb{R}^n , en el sentido de que, si $A = \{x\}$ y $B = \{y\}$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces $\delta(A, B) = d(x, y)$; en efecto, el menor $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$, que satisface que $x \in B_n(y, \lambda)$ e $y \in B_n(x, \lambda)$, es $\lambda = d(x, y)$.

El objetivo principal de esta sección es establecer el teorema 1.1.4 de selección de Blaschke, que hace uso del siguiente concepto clave:

Definición 1.1.12. *Se dice que una subfamilia de conjuntos de \mathcal{C}^n es uniformemente acotada si existe una bola de un determinado radio en \mathbb{R}^n que contiene a todos los elementos de la subfamilia.*

Veamos unas cuantas propiedades que se satisfacen para la distancia de Hausdorff en \mathcal{C}^n :

Teorema 1.1.3. *La distancia de Hausdorff en \mathcal{C}^n , $\delta : \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, satisface las siguientes propiedades:*

- (1) *El espacio métrico (\mathcal{C}^n, δ) es completo.*
- (2) *De cada sucesión uniformemente acotada en \mathcal{C}^n se puede extraer una subsucesión convergente.*
- (3) *El espacio métrico (\mathcal{C}^n, δ) verifica el teorema de Heine-Borel: todo subconjunto cerrado y acotado de (\mathcal{C}^n, δ) es compacto, y viceversa.*
- (4) *El espacio \mathcal{K}^n es un subconjunto cerrado de (\mathcal{C}^n, δ) .*

Estas propiedades permiten probar el teorema de selección de Blaschke, que usaremos en la demostración de algunos de los resultados fundamentales de esta memoria:

Teorema 1.1.4 (de selección de Blaschke). *De cualquier sucesión uniformemente acotada de conjuntos convexos y compactos se puede extraer una subsucesión convergente a un conjunto convexo y compacto.*

1.1.5. Volumen y área de superficie de un conjunto convexo

En esta sección introducimos los conceptos de *volumen* y *área de superficie* de un cuerpo convexo, que resultan claves en el estudio isoperimétrico. Comencemos, pues, recordando la definición de *volumen*:

Definición 1.1.13. *Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n . El volumen (n -dimensional) de K , denotado por $\text{vol}(K)$ ó $\text{vol}_n(K)$, cuando sea necesario especificar la dimensión, es la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n asociada a dicho conjunto, esto es,*

$$\text{vol}(K) = \text{vol}_n(K) = \int_K dx_1 \dots dx_n \in [0, +\infty).$$

*En particular, si $n = 2$, $\text{vol}(K)$ se denomina *área* de K , y se representará por $A(K)$.*

A continuación enumeramos algunas de las propiedades del volumen:

Proposición 1.1.4. *Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$. Se verifican las siguientes propiedades:*

- (1) *$\text{vol}(K)$ se mantiene inalterado bajo movimientos (rígidos) de K .*
- (2) *$\text{vol}(\mu K) = \mu^n \text{vol}(K)$, para $\mu \geq 0$; es decir, el volumen es homogéneo de grado n .*

- (3) $\text{vol}(K) = 0$ si, y sólo si, K tiene dimensión menor o igual que $n - 1$.
- (4) El volumen depende continuamente de K (métrica de Hausdorff).
- (5) Si K está contenido en K' , entonces $\text{vol}(K) \leq \text{vol}(K')$, dándose la igualdad únicamente cuando $\text{vol}(K') = 0$ ó cuando K y K' coinciden.
- (6) Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación afín dada por $Tx = Mx + b$, donde M es una matriz $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$, entonces $\text{vol}(TK) = |\det M| \text{vol}(K)$.

Una vez definido el volumen de un cuerpo convexo K , estamos en condiciones de establecer la definición de *área de superficie* de K . Existen diversas formas de definir el área de superficie de un cuerpo convexo, todas ellas equivalentes, y que obviamente dan como resultado la medida de la frontera del conjunto. Aquí hemos optado por dar la definición de «contenido de Minkowski», pues nos será de utilidad en demostraciones posteriores.

Definición 1.1.14. Sea K un cuerpo convexo en \mathbb{R}^n . Se llama *área de superficie* de K , y se denota por $S(K)$, al límite

$$S(K) := \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda} \in [0, +\infty). \quad (1.2)$$

En particular, si $n = 2$, $S(K)$ se denomina *perímetro* de K , y se representa por $p(K)$.

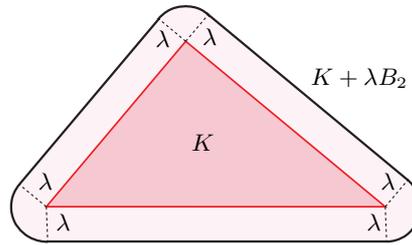


Figura 1.11: El área de superficie coincide con la «derivada» del volumen.

Ejemplo 1.1.3. Con el único objetivo de adaptarnos al cálculo del área de superficie, exponemos unos sencillos ejemplos sobre el cálculo de ésta para cuerpos convexos típicos:

- Sea $K = B_2(x, r) \subset \mathbb{R}^2$. En esta situación, $K + \lambda B_2 = B_2(x, r + \lambda)$ y, como $A(K) = \pi r^2$ y $A(K + \lambda B_2) = \pi(r + \lambda)^2$, se tiene que

$$p(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{A(K + \lambda B_2) - A(K)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\lambda^2 + 2r\lambda)}{\lambda} = 2\pi r,$$

es decir, $p(K)$ es la medida 1-dimensional de la frontera de la bola.

- Calculemos ahora el valor del área de superficie de la bola unidad n -dimensional. Como

$$\text{vol}(B_n + \lambda B_n) = \text{vol}((1 + \lambda)B_n) = (1 + \lambda)^n \text{vol}(B_n),$$

se tiene entonces que

$$S(B_n) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(B_n + \lambda B_n) - \text{vol}(B_n)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(B_n) [(1 + \lambda)^n - 1]}{\lambda} = n \text{vol}(B_n).$$

- Sea $K = [a, b] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. En primer lugar, es evidente que $A(K) = 0$. Por otro lado, para el cuerpo paralelo $K + \lambda B_2$ se verifica, como puede observarse en la figura 1.12, que

$$A(K + \lambda B_2) = 2\lambda(b - a) + \pi\lambda^2;$$

en consecuencia, el valor de $p(K)$ coincide con el doble de la medida 1-dimensional del segmento, es decir,

$$p(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{A(K + \lambda B_2)}{\lambda} = 2(b - a).$$

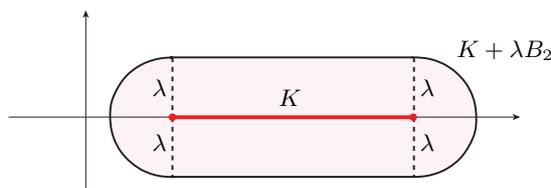


Figura 1.12: Área de superficie de un segmento en \mathbb{R}^2 .

Como en el caso del volumen, enumeramos una serie de propiedades del área de superficie:

Proposición 1.1.5. Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$. Se verifican las siguientes propiedades:

- (1) $S(K)$ permanece inalterada por movimientos de K .
- (2) $S(\mu K) = \mu^{n-1} S(K)$, para $\mu \geq 0$.
- (3) El área de superficie depende continuamente de K (métrica de Hausdorff).
- (4) Si $\dim K = n - 1$, entonces $S(K) = 2 \text{vol}_{n-1}(K)$.
- (5) Si $\dim K = n$, entonces $S(K)$ es la medida $(n - 1)$ -dimensional de $\text{bd } K$.
- (6) $S(K) = 0$ si, y sólo si, $\dim K \leq n - 2$.
- (7) Si $K \subset K'$, entonces $S(K) \leq S(K')$, dándose la igualdad si, y sólo si, $K' \equiv K$ ó $S(K') = 0$.

1.2. Teoría básica de retículos

La noción de *retículo* apareció ya implícitamente en uno de los trabajos de J. Kepler, concretamente, dentro del contexto del empaquetamiento de bolas. Además, en el siglo XIX, muchos cristalógrafos basaron sus investigaciones en el uso de retículos. Actualmente, la teoría de retículos está íntimamente relacionada con la geometría de números. Nosotros, con el objetivo principal de abordar el problema isoperimétrico con restricciones a retículos, utilizaremos [3] para establecer aquí los conceptos fundamentales que necesitaremos de esta teoría.

Definición 1.2.1. Sea $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ un conjunto de n vectores linealmente independientes del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . El conjunto formado por todas las combinaciones lineales con coeficientes

enteros de dichos vectores, se llamará **retículo generado por ellos**, y se denotará por $L(B)$ ó $L(b_1, \dots, b_n)$. Así,

$$L(b_1, \dots, b_n) = \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}\}.$$

El conjunto de vectores $\{b_1, \dots, b_n\}$ es una **base de L** , y el **paralelepípedo determinado por tales vectores**, esto es, aquél cuyos 2^n vértices son de la forma $a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$, con $a_i \in \{0, 1\}$ para todo i , se denomina **paralelepípedo fundamental de L asociado a la base $\{b_1, \dots, b_n\}$** , y se denotará por $P_{L|B}$.

Como bien sabemos, si L es un retículo y $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ es una base de L , entonces

$$\text{vol}(P_{L|B}) = |\det(b_1, \dots, b_n)|.$$

Ejemplo 1.2.1. Algunos ejemplos de retículos importantes son los siguientes:

- El retículo entero \mathbb{Z}^n es el formado por todos los puntos de \mathbb{R}^n con coordenadas enteras, esto es, el generado por los vectores de la base canónica $B = \{e_1, \dots, e_n\}$.
- Un retículo de \mathbb{R}^n generado por los vectores $b_i = (0, \dots, k_i, \dots, 0)$, donde $k_i \in \mathbb{Z}$, para $i = 1, \dots, n$, es un retículo rectangular u ortogonal.
- El retículo hexagonal (en el plano) es el generado por los vectores $\{(1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)\}$.

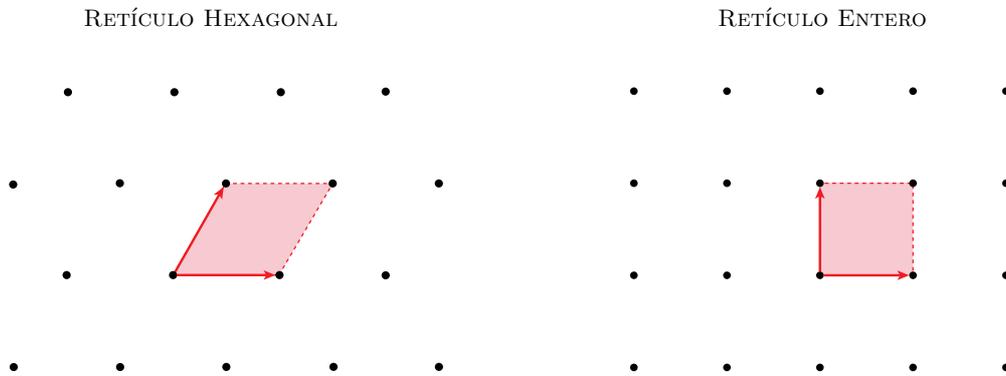


Figura 1.13: Ejemplos de retículos en el plano euclídeo.

Desde luego, un mismo retículo puede estar generado de formas muy diversas, es decir, L puede estar generado por medio de bases diferentes y, en consecuencia, L puede tener varios paralelepípedos fundamentales. Así, por ejemplo, los conjuntos

$$B = \{(1, 0), (1/2, \sqrt{3}/2)\} \quad \text{y} \quad B' = \{(0, \sqrt{3}), (-1/2, -\sqrt{3}/2)\}$$

constituyen dos bases diferentes del retículo hexagonal y, como puede comprobarse en la figura 1.14, los paralelepípedos fundamentales asociados a éstas son diferentes. Sin embargo, a pesar de que $P_{L|B}$ y $P_{L|B'}$ son paralelepípedos distintos, se tiene que

$$\text{vol}(P_{L|B}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{vol}(P_{L|B'}). \quad (1.3)$$

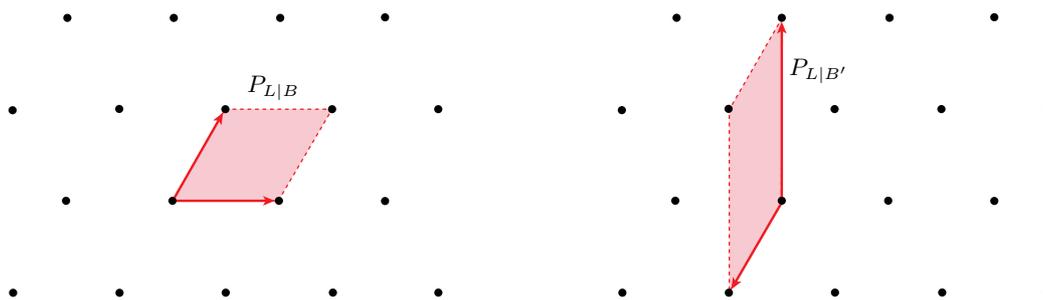


Figura 1.14: Distintos paralelepípedos fundamentales del retículo hexagonal.

La igualdad (1.3) no es una mera casualidad, sino que es un caso particular de la interesante propiedad siguiente:

Proposición 1.2.1. *Si B y B' son dos bases de un mismo retículo L de \mathbb{R}^n , entonces*

$$\text{vol}(P_{L|B}) = \text{vol}(P_{L|B'}).$$

La proposición 1.2.1 nos permite establecer la definición siguiente:

Definición 1.2.2. *Sea L un retículo de \mathbb{R}^n . Se llama determinante del retículo L , y se denota por $\det L$, al volumen del paralelepípedo fundamental de L asociado a cualquier base B de L . Finalmente, denotaremos por \mathcal{L}^n al conjunto formado por los retículos $L \subset \mathbb{R}^n$ con $\det L \neq 0$.*

Definición 1.2.3. *Se dice que un subconjunto L' de un retículo L es un subretículo de L si L' también es un retículo (véase la figura 1.15).*

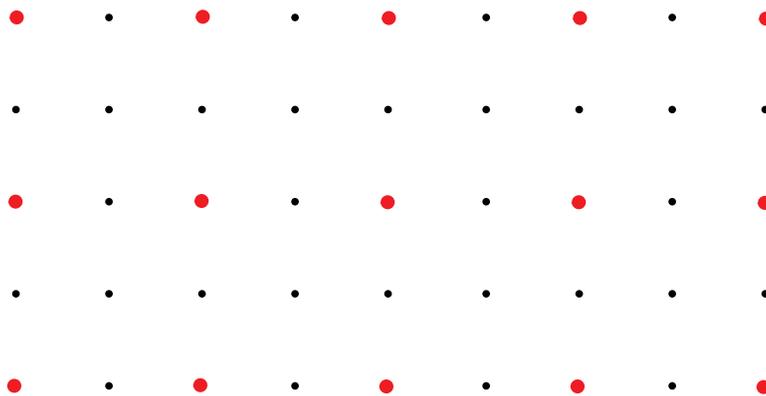


Figura 1.15: Subretículo del retículo entero \mathbb{Z}^2 en el plano.

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos el retículo entero $L = \mathbb{Z}^2$, y sea L' el subconjunto de L formado por todos los puntos del plano con coordenadas pares. En esta situación, L' también es un retículo en \mathbb{R}^2 , que está generado, por ejemplo, por la base $\{(2, 0), (0, 2)\}$. Por lo tanto, L' es un subretículo de L (véase la figura 1.15).*

Con el objetivo de enunciar más adelante la conjetura 3.2.1 de Wills, establecemos aquí la siguiente definición:

Definición 1.2.4. *Dado un retículo arbitrario $L \in \mathcal{L}^n$, se define el i -ésimo determinante minimal de L , denotado por $D_i(L)$, como*

$$D_i(L) := \min \{ \det L_i : L_i \text{ es un subretículo } i\text{-dimensional de } L \}.$$

En particular, $D_n(L) = \det L$.

Terminamos esta sección con el concepto más utilizado en este trabajo dentro del ambiente de la teoría de retículos:

Definición 1.2.5. *Sean $K \in \mathcal{K}^n$ y L un retículo en \mathbb{R}^n . Se define el número de puntos del retículo L en K (en inglés, lattice point enumerator), y se denota por $G(K, L)$, como*

$$G(K, L) := \text{card}(\text{int } K \cap L).$$

El problema isoperimétrico clásico

En este capítulo nos centramos en estudiar el problema isoperimétrico clásico dentro del marco de los cuerpos convexos, pero sin restricciones a retículos, y en el concepto de *desigualdad isoperimétrica relativa*. La bibliografía fundamental que se utilizará en este capítulo la componen las referencias [3] y [7] (para la simetrización de Steiner), y [5] (para el estudio de las desigualdades isoperimétricas relativas).

Una de las demostraciones de la desigualdad isoperimétrica para cuerpos convexos (en dimensión n), utiliza como herramienta fundamental la *simetrización de Steiner* de un conjunto. Comenzaremos, pues, con una sección dedicada a ella.

2.1. La simetrización de Steiner y sus propiedades

Si H es un hiperplano en \mathbb{R}^n , éste puede escribirse como $H = x + W$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y W es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n con $\dim W = n - 1$. Por lo tanto, $\mathbb{R}^n = W \oplus L$, donde L es el complemento ortogonal de W que, en lo que sigue, también se llamará *complemento ortogonal de H* . Como, para cierto $a \in \mathbb{R}^n$, $L = \text{span}\{a\}$, se puede definir la aplicación $\pi_H : \mathbb{R}^n \rightarrow H$ que, a cada punto del espacio, le asigna su proyección ortogonal sobre el hiperplano H , esto es, $\pi_H(x)$ es la proyección ortogonal de x sobre H .

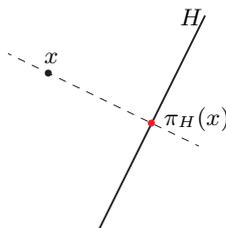


Figura 2.1: Proyección de un punto sobre el hiperplano H .

Definición 2.1.1. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío y sea H un hiperplano de \mathbb{R}^n . Llamamos proyección de A sobre H , y lo denotamos por $A|H$, al conjunto

$$A|H := \pi_H(A) = \{\pi_H(x) : x \in A\}.$$

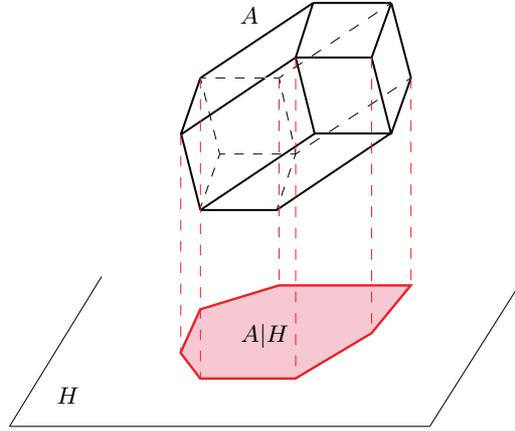


Figura 2.2: Proyección de un cuerpo convexo A sobre un hiperplano H .

Observemos que, si K es un cuerpo convexo, y H es un hiperplano de \mathbb{R}^n , para cada $x \in K|H$, la recta $x + L$ corta al conjunto K en un segmento de longitud $\text{vol}_1(K \cap (x + L))$. Así pues, para cada $x \in K|H$, denotaremos por $s(x + L)$ al segmento de $x + L$ de longitud $\text{vol}_1(K \cap (x + L))$ cuyo punto medio es x .

Utilizando los comentarios precedentes, llegamos a un concepto clave:

Definición 2.1.2. Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo, H un hiperplano de \mathbb{R}^n y $L = \text{span}\{a\}$ el complemento ortogonal de H . Se define la simetrización de Steiner de K respecto a H como el conjunto

$$\sigma_H(K) = \bigcup_{x \in K|H} s(x + L).$$

Atendiendo a la definición 2.1.2, $\sigma_H(K)$ es el resultado de simetrizar K respecto al hiperplano H (véase la figura 2.3).

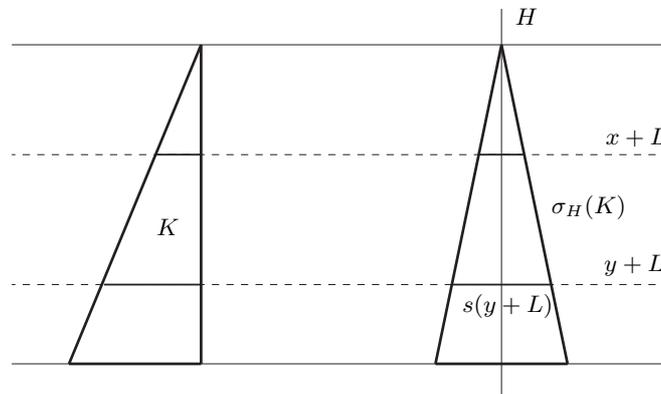


Figura 2.3: Ejemplo de simetrización de Steiner.

Observemos que, dado un hiperplano H de \mathbb{R}^n , siempre se puede elegir $a \in \mathbb{R}^n$, con $|a| = 1$, tal que el complemento ortogonal de H sea $L = \text{span}\{a\}$. Esta observación nos permite definir la simetrización de Steiner de otra forma útil:

$$\sigma_H(K) = \left\{ x + \lambda a : x \in K|H, |\lambda| \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + L)) \right\}.$$

La simetrización de Steiner establece, como es fácil intuir, una aplicación biyectiva del cuerpo convexo K en $\sigma_H(K)$, a saber, a cada $x \in K$ se le asigna el punto $\sigma_H(x)$ que se encuentra sobre la recta $x + L$, y cuya distancia (con signo) a H coincide con la distancia de x al punto medio del segmento $(x + L) \cap K$.

Exponemos a continuación una serie de propiedades fundamentales de la simetrización de Steiner, que utilizaremos más adelante:

Proposición 2.1.1. *Sean $K, K' \in \mathcal{K}^n$ dos cuerpos convexos.*

- (1) $\sigma_H(K)$ es simétrico respecto a H .
- (2) La simetrización de Steiner es invariante por traslaciones.
- (3) Si $K' \subset K$, entonces $\sigma_H(K') \subset \sigma_H(K)$.
- (4) Si $0 \in H$, entonces $\sigma_H(B_n) = B_n$.
- (5) Si $0 \in H$, entonces $\sigma_H(\lambda K) = \lambda \sigma_H(K)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ es no negativo.
- (6) $\sigma_H(K)$ es convexo y compacto, es decir, es un cuerpo convexo.
- (7) Si $0 \in H$, entonces $\sigma_H(K) + \sigma_H(K') \subset \sigma_H(K + K')$.
- (8) Si $0 \in H$ y $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de cuerpos convexos convergente a un cuerpo convexo K con $\text{int } K \neq \emptyset$, entonces la sucesión $(\sigma_H(K_i))_{i \in \mathbb{N}}$ converge a $\sigma_H(K)$.
Si $\text{int } K = \emptyset$, no es cierto, en general, que $\lim_i \sigma_H(K_i) = \sigma_H(K)$.

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son consecuencia directa de la definición de simetrización de Steiner. Veamos (3). La inclusión $K' \subset K$ implica claramente que $K'|H \subset K|H$; por tanto, si $x' \in K'|H$, entonces $K' \cap (x' + L) \subset K \cap (x' + L)$. Sean $s'(x' + L)$ y $s(x' + L)$ los segmentos en $x' + L$ de longitudes $\text{vol}_1(K' \cap (x' + L))$ y $\text{vol}_1(K \cap (x' + L))$, respectivamente, cuyo punto medio es x' . Como $\text{vol}_1(K' \cap (x' + L)) \leq \text{vol}_1(K \cap (x' + L))$, se deduce que $s'(x' + L) \subset s(x' + L)$. Así,

$$\sigma_H(K) = \bigcup_{x' \in K'|H} s'(x' + L) \subset \bigcup_{x \in K|H} s(x + L) = \sigma_H(K).$$

Para ver (4), observemos, en primer lugar, que la bola B_n es simétrica respecto a cualquier hiperplano H con $0 \in H$. De esta manera, si $x \in B_n|H$, entonces el segmento $B_n \cap (x + L)$ tiene a x como punto medio. Lo anterior implica que $s(x + L) = (x + L) \cap B_n$ y, así,

$$\sigma_H(B_n) = \bigcup_{x \in B_n|H} s(x + L) = \bigcup_{x \in B_n|H} ((x + L) \cap B_n) = B_n.$$

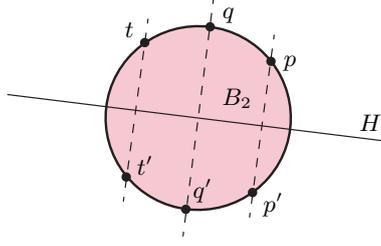


Figura 2.4: Simetría de la bola B_2 respecto al hiperplano H .

Probemos ahora la propiedad (5). Al tenerse $0 \in H$, si $\lambda = 0$, entonces $\sigma_H(\lambda K) = \lambda \sigma_H(K) = \{0\}$. Vayamos al caso $\lambda \neq 0$. En primer lugar, como $0 \in H$, es fácil comprobar, mediante un sistema de ecuaciones lineales, que se verifica la igualdad $\lambda(K|H) = (\lambda K)|H$. Por otro lado, si $x \in K|H$,

$$\text{vol}_1(\lambda K \cap (\lambda x + L)) = \text{vol}_1(\lambda K \cap \lambda(x + L)) = \text{vol}_1(\lambda(K \cap (x + L))) = \lambda \text{vol}_1(K \cap (x + L)).$$

Sea $x \in K|H$, y consideremos los segmentos

$$\lambda s(x + L) = \left\{ \lambda x + \gamma(\lambda a) : |\gamma| \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + L)) \right\} \quad y$$

$$s'(\lambda x + L) = \left\{ \lambda x + \beta a : |\beta| \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(\lambda K \cap (\lambda x + L)) = \frac{\lambda}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + L)) \right\}.$$

Por la definición de ambos conjuntos, se tiene que $s'(\lambda x + L) = \lambda s(x + L)$; lo cual permite obtener la igualdad

$$\sigma_H(\lambda K) = \bigcup_{x \in K|H} s'(\lambda x + L) = \bigcup_{x \in K|H} \lambda s(x + L) = \lambda \sigma_H(K).$$

(6) Para demostrar que $\sigma_H(K)$ conserva la convexidad y compacidad, vamos a proceder por partes. Como $K \in \mathcal{K}^n$, se tendrá que $K \subset B_n(x, r)$, para cierto $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$; con lo cual $\sigma_H(K)$ es acotado, pues $\sigma_H(K) \subset \sigma_H(B_n(x, r))$ y $\sigma_H(B_n(x, r))$ es una bola en \mathbb{R}^n . Para justificar que $\sigma_H(K)$ es cerrado, comprobaremos que cualquier punto de $\text{cl } \sigma_H(K)$ también está en $\sigma_H(K)$. Sea $y_0 \in \text{cl } \sigma_H(K)$. En esta situación, se tiene garantizada la existencia de una sucesión $(y_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \sigma_H(K)$ con $y_m \rightarrow y_0$. Con el fin de facilitar el manejo, supondremos fijado un sistema de coordenadas cartesianas de manera que H coincida con el hiperplano $x_n = 0$. Esta suposición no es restrictiva, basta tomar como nuevo origen cualquier punto de H y, como base del espacio vectorial, la determinada por una base del subespacio asociado a H , y un vector de su complemento ortogonal. Por la simetría de $\sigma_H(K)$ y del hecho de que $y_m \rightarrow y_0$, podemos suponer que $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e y_0 están contenidos en el semiespacio $x_n \geq 0$.

Sea l_m la recta perpendicular a H que pasa por el punto y_m , y l_0 la recta perpendicular a H que pasa por el punto límite y_0 . Las rectas l_m , $m \in \mathbb{N}$, determinarán los segmentos $[p_m, q_m] = l_m \cap K$, cuyos extremos pertenecerán a $\text{bd } K$. Tenemos, pues, dos sucesiones de puntos de $\text{bd } K$, a saber, $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ y $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$, que verifican $[p_m, q_m] = l_m \cap K$. Como $\text{bd } K$ es compacta, podemos encontrar subsucesiones de $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ y $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $(p_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(q_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$, que sean convergentes, y tal que $[p_{m_k}, q_{m_k}] = l_{m_k} \cap K$. Como $(y_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ también converge a

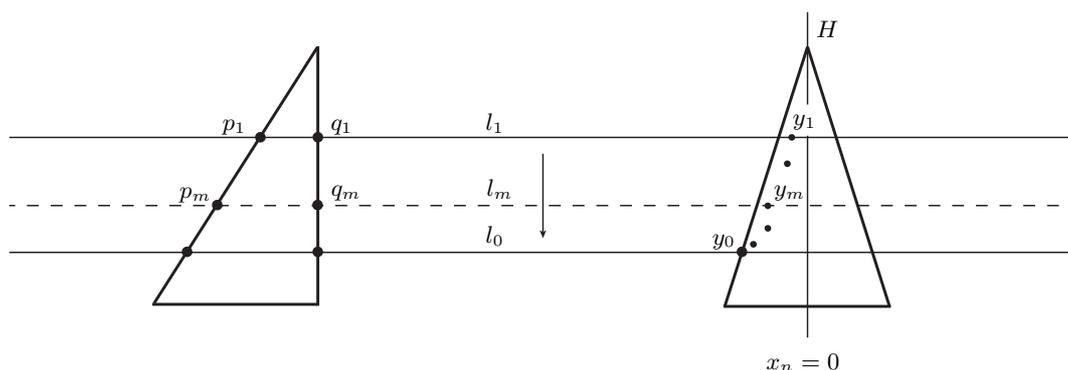


Figura 2.5: Si $K \in \mathcal{K}^n$, entonces $\sigma_H(K)$ es cerrado.

y_0 , podemos suponer que las subsucesiones $(p_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y $(q_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ son las propias sucesiones de partida, es decir, $(p_m)_{m \in \mathbb{N}}$ y $(q_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Sea $\lim_m p_m = p_0 \in \text{bd } K$ y $\lim_m q_m = q_0 \in \text{bd } K$. Del hecho de que la proyección sobre H es una aplicación continua, se sigue que $p_0, q_0 \in l_0$. Como $p_0, q_0 \in \text{bd } K \subset K$, tenemos que $[p_0, q_0] \subset l_0 \cap K$. Las coordenadas de los extremos del segmento $l_m \cap K$ son $(x_1(p_m), \dots, x_{n-1}(p_m), x_n(p_m))$ y $(x_1(q_m), \dots, x_{n-1}(q_m), x_n(q_m))$, donde, gracias al sistema elegido, $x_i(p_m) = x_i(q_m)$, para $1 \leq i \leq n-1$. Si tomamos

$$z_m = \frac{|x_n(p_m) - x_n(q_m)|}{2},$$

entonces las coordenadas de los extremos del segmento $l_m \cap \sigma_H(K)$ son

$$(x_1(p_m), \dots, x_{n-1}(p_m), z_m) \quad \text{y} \quad (x_1(p_m), \dots, x_{n-1}(p_m), -z_m).$$

Como $y_m \in l_m \cap \sigma_H(K)$ e y_m pertenece al semiespacio $x_n \geq 0$, $x_n(y_m) \leq z_m$. Al igual que antes, sean $(x_1(p_0), \dots, x_{n-1}(p_0), x_n(p_0))$ y $(x_1(q_0), \dots, x_{n-1}(q_0), x_n(q_0))$ las coordenadas de los extremos del segmento $[p_0, q_0]$, donde $x_i(p_0) = x_i(q_0)$, para $1 \leq i \leq n-1$. Si tomamos

$$z_0 = \frac{|x_n(p_0) - x_n(q_0)|}{2},$$

entonces las coordenadas de los extremos del segmento $\sigma_H([p_0, q_0])$ son

$$(x_1(p_0), \dots, x_{n-1}(p_0), z_0) \quad \text{y} \quad (x_1(p_0), \dots, x_{n-1}(p_0), -z_0).$$

Como $y_0 = \lim_m y_m$, $p_0 = \lim_m p_m$ y $q_0 = \lim_m q_m$, entonces $x_n(y_m) \rightarrow x_n(y_0)$, $x_n(p_m) \rightarrow x_n(p_0)$ y $x_n(q_m) \rightarrow x_n(q_0)$; por lo que $z_m \rightarrow z_0$. Todo lo anterior implica que

$$x_n(y_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} x_n(y_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} z_m = z_0.$$

Así, se obtiene que $y_0 \in \sigma_H([p_0, q_0]) \subset \sigma_H(l_0 \cap K) = l_0 \cap \sigma_H(K)$; luego $y_0 \in \sigma_H(K)$, como se quería ver.

Veamos ahora que el simetrizado de un conjunto convexo es convexo. Para ello, sean $\sigma_H(x)$ y $\sigma_H(y)$ dos puntos del simetrizado $\sigma_H(K)$, y comprobemos que $[\sigma_H(x), \sigma_H(y)]$ está en $\sigma_H(K)$. Evidentemente, si $y \in (x + L)$, entonces el resultado es trivialmente cierto; en caso contrario, los segmentos $(x + L) \cap K$ e $(y + L) \cap K$ son distintos, y su envoltura convexa, contenida en K ,

es el trapecoide $T = \text{conv} \{(x + L) \cap K, (y + L) \cap K\}$. La imagen de T por la simetrización de Steiner de T será el trapecio $\sigma_H(T) = \text{conv} \{\sigma_H((x + L) \cap K), \sigma_H((y + L) \cap K)\}$. Ahora bien, como $[\sigma_H(x), \sigma_H(y)] \subset \sigma_H(T)$ y $\sigma_H(T) \subset \sigma_H(K)$, se deduce que el segmento $[\sigma_H(x), \sigma_H(y)]$ está contenido en $\sigma_H(K)$. Las líneas anteriores demuestran la propiedad (6).

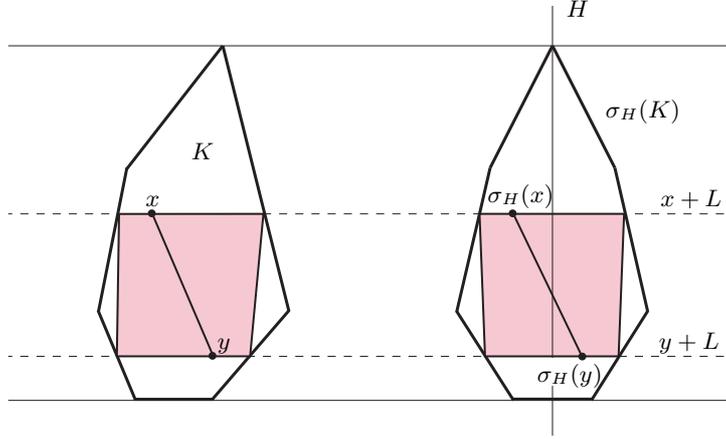


Figura 2.6: Si K es convexo, entonces $\sigma_H(K)$ también lo es.

Para demostrar (7), observemos primero que, si $K, K' \in \mathcal{K}^n$ y $0 \in H$, se tiene $K|H + K'|H = (K + K')|H$. Sea $x + y \in \sigma_H(K) + \sigma_H(K')$, donde $x \in \sigma_H(K)$ e $y \in \sigma_H(K')$. De esta forma, existen $\bar{x} \in K|H$ e $\bar{y} \in K'|H$ tales que $x = \bar{x} + \lambda_x a$ e $y = \bar{y} + \lambda_y a$, donde $\lambda_x, \lambda_y \in \mathbb{R}$ y, además,

$$|\lambda_x| \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + L)) \quad \text{y} \quad |\lambda_y| \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (y + L)).$$

Como $x + y = (\bar{x} + \bar{y}) + (\lambda_x + \lambda_y)a$, con $\bar{x} + \bar{y} \in (K + K')|H$, y

$$\begin{aligned} |\lambda_x + \lambda_y| &\leq |\lambda_x| + |\lambda_y| \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + L)) + \frac{1}{2} \text{vol}_1(K' \cap (y + L)) \\ &= \frac{1}{2} \text{vol}_1(K \cap (x + L) + K' \cap (y + L)) \leq \frac{1}{2} \text{vol}_1((K + K') \cap (x + y + L)), \end{aligned}$$

se sigue, por la definición de $\sigma_H(K + K')$, que $x + y \in \sigma_H(K + K')$.

Para demostrar (8) necesitaremos hacer uso del lema siguiente, cuya demostración exponemos después de la que nos ocupa:

Lema 2.1.1. *Sea $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cuerpos convexos y $K \in \mathcal{K}^n$ con $0 \in \text{int } K$. Entonces $\lim_i K_i = K$ si, y sólo si, $(1 - \varepsilon)K \subset K_i \subset (1 + \varepsilon)K$ para todo $0 < \varepsilon < 1$ e i suficientemente grande.*

Sea $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cuerpos convexos convergente a un cuerpo convexo K con $\text{int } K \neq \emptyset$. Veamos que $\lim_i \sigma_H(K_i) = \sigma_H(K)$. No es restrictivo suponer que $0 \in \text{int } K$ pues, en caso contrario, bastará realizar una traslación de los cuerpos convexos, lo que no afectará a la convergencia. Utilizando el hecho de que $K_i \rightarrow K$, tenemos que $(1 - \varepsilon)K \subset K_i \subset (1 + \varepsilon)K$, para cualquier $0 < \varepsilon < 1$ e i suficientemente grande. Usando las propiedades (3) y (5), se deduce que $(1 - \varepsilon)\sigma_H(K) \subset \sigma_H(K_i) \subset (1 + \varepsilon)\sigma_H(K)$, para $0 < \varepsilon < 1$ e i suficientemente grande. Así pues,

como $0 \in \text{int } \sigma_H(K)$, utilizando de nuevo el lema precedente, se sigue que $\sigma_H(K_i) \rightarrow \sigma_H(K)$, como queríamos ver.

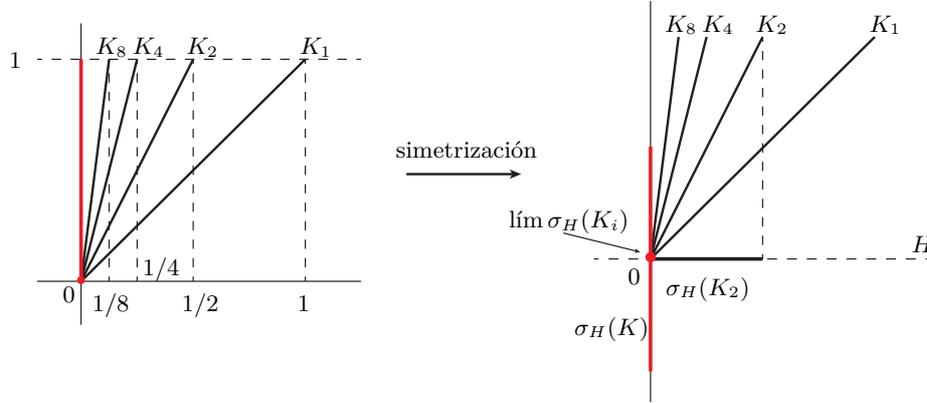


Figura 2.7: Si $\text{int } K = \emptyset$, entonces puede ser que $\lim_i \sigma_H(K_i) \neq K$.

Finalmente, veamos que, si $\text{int } K = \emptyset$, no es cierto, en general, que $\lim_i \sigma_H(K_i) = \sigma_H(K)$. Consideremos en \mathbb{R}^2 la sucesión de cuerpos convexos $K_i = [0, (1/i, 1)]$, es decir, la sucesión de segmentos que tienen como extremos al origen de coordenadas y a los puntos $(1/i, 1)$. Cuando $i \rightarrow \infty$, la sucesión de puntos $(1/i, 1)$ tiende al punto $(0, 1)$, por lo que la sucesión $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ converge al cuerpo convexo $K = [(0, 0), (0, 1)]$. Claramente, si H es el hiperplano determinado por el eje de abscisas, entonces $\sigma_H(K)$ consiste en el segmento vertical $\sigma_H(K) = [(0, -1/2), (0, 1/2)]$. Ahora bien, como $\sigma_H(K_i) = [(0, 0), (1/i, 0)]$, se deduce que $\lim_i \sigma_H(K_i) = \{(0, 0)\}$. Por lo tanto, $\lim_i \sigma_H(K_i) \subsetneq \sigma_H(K)$. \square

Demostración del lema 2.1.1. Sea $0 < \varepsilon_0 < 1$. Como $0 \in \text{int } K$, existirá $r > 0$ de forma que $rB_n \subset K$. Además, como $K_i \rightarrow K$, se tendrá que $rB_n \subset K_i$, para $i \geq i_0$. Tomemos $\varepsilon = r\varepsilon_0 < r$. Por definición de convergencia (métrica de Hausdorff), se tendrá, para $i \geq i_\varepsilon$, que $K_i \subset K + \varepsilon B_n$ y $K \subset K_i + \varepsilon B_n$. Así, para $i \geq \max\{i_0, i_\varepsilon\}$,

$$K_i \subset K + \varepsilon B_n = K + \frac{\varepsilon}{r} rB_n \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K.$$

Repetiendo los mismos argumentos, conseguimos, para $i \geq \max\{i_0, i_\varepsilon\}$, el contenido

$$K \subset K_i + \varepsilon B_n = K_i + \frac{\varepsilon}{r} rB_n \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K_i.$$

Finalmente, como $(r - \varepsilon)/r \leq r/(r + \varepsilon)$, se obtiene que

$$\frac{r - \varepsilon}{r} K \subset \frac{r}{r + \varepsilon} K \subset K_i,$$

lo que implica, para todo $i \geq \max\{i_0, i_\varepsilon\}$, que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right) K \subset K_i \subset \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) K.$$

Poniendo ahora $\varepsilon = r\varepsilon_0$, y cancelando términos, llegamos, para $i \geq \max\{i_0, i_\varepsilon\}$, a la cadena de contenidos del enunciado

$$(1 - \varepsilon_0) K \subset K_i \subset (1 + \varepsilon_0) K.$$

Veamos el recíproco. Por definición de convergencia, dado $0 < \varepsilon_0 < 1$, debemos determinar $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $i \geq i_0$, entonces

$$\delta(K, K_i) = \min \{ \lambda \geq 0 : K \subset K_i + \lambda B_n, K_i \subset K + \lambda B_n \} \leq \varepsilon_0.$$

Como $K \in \mathcal{K}^n$, se tiene garantizada la existencia de $r > 0$ tal que $K \subset rB_n$. De esta forma, si $0 < \varepsilon < 1$, existirá $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, si $i \geq i_\varepsilon$, entonces

$$K_i \subset (1 + \varepsilon)K \subset K + (\varepsilon r)B_n \quad \text{y} \quad K \subset \frac{1}{1 - \varepsilon}K_i = \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)K_i \subset K_i + \left(\frac{\varepsilon(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon}r\right)B_n.$$

Poniendo $\alpha = \max \{ r\varepsilon, \varepsilon(1 + \varepsilon)r/(1 - \varepsilon) \}$, se tiene, para $i \geq i_\varepsilon$, que

$$K_i \subset K + \alpha B_n \quad \text{y} \quad K \subset K_i + \alpha B_n.$$

Como $\max \{ r\varepsilon, \varepsilon(1 + \varepsilon)r/(1 - \varepsilon) \} \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, si $0 < \varepsilon_0 < 1$, tomando ε suficientemente pequeño tal que $\alpha < \varepsilon_0$, se tendrá, para $i \geq i_\varepsilon$, que $\delta(K, K_i) < \varepsilon_0$. Esto implica de forma clara la convergencia de $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ a K . \square

Nos interesará posteriormente que el volumen de un cuerpo convexo $K \in \mathcal{K}^n$ permanezca inalterado al realizar simetrizaciones de Steiner, y que el área de superficie de $\sigma_H(K)$ no supere a $S(K)$. Esto es efectivamente lo que ocurre:

Proposición 2.1.2. *Si $K \in \mathcal{K}^n$ es un cuerpo convexo y H es un hiperplano, entonces:*

- $\text{vol}(\sigma_H(K)) = \text{vol}(K)$ (*invarianza del volumen*).
- $S(\sigma_H(K)) \leq S(K)$ (*acotación del área de superficie del simetrizado*).

Demostración. Para ver que el volumen es invariante por simetrizaciones de Steiner, supondremos que H coincide con el hiperplano $\{x_n = 0\}$ (en caso contrario, basta realizar una rotación, y una posible traslación). Consideremos, para cada $x \in K|H$, el conjunto

$$A^x = \{s \in \mathbb{R} : (x, s) \in K\}.$$

Utilizando la definición de volumen, y el teorema de Fubini, se llega a que

$$\begin{aligned} \text{vol}(K) &= \int_K dx_1 \cdots dx_n = \int_{x \in K|H} \left(\int_{x_n \in A^x} dx_n \right) dx_1 \cdots dx_{n-1} \\ &= \int_{x \in K|H} \text{vol}_1((x + L) \cap K) dx_1 \cdots dx_{n-1} = \text{vol}(\sigma_H(K)). \end{aligned}$$

Veamos ahora que $S(\sigma_H(K)) \leq S(K)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $0 \in H$ pues, en caso contrario, con una simple traslación se conseguiría satisfacer dicha condición. Para cualquier $\lambda > 0$,

$$\sigma_H(K) + \lambda B_n = \sigma_H(K) + \lambda \sigma_H(B_n) \subset \sigma_H(K + \lambda B_n);$$

luego, $\text{vol}(\sigma_H(K) + \lambda B_n) \leq \text{vol}(\sigma_H(K + \lambda B_n)) = \text{vol}(K + \lambda B_n)$. De esta forma, para cualquier $\lambda > 0$, se tiene que

$$\frac{\text{vol}(\sigma_H(K) + \lambda B_n) - \text{vol}(\sigma_H(K))}{\lambda} \leq \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

Haciendo $\lambda \rightarrow 0^+$ en ambos lados, se llega a que $S(\sigma_H(K)) \leq S(K)$, como queríamos ver. \square

2.2. El teorema de Gross. La desigualdad isoperimétrica

En esta sección nos ocupamos de enunciar y demostrar el teorema 2.2.1 de esfericidad de Gross, resultado que refleja la importancia de la simetrización de Steiner. Como consecuencia fundamental del citado teorema, obtenemos que, dado cualquier cuerpo convexo con interior no vacío, es posible aplicarle una sucesión adecuada de simetrizaciones de Steiner de tal forma que el conjunto resultante se aproxime a una bola.

A la postre, este resultado nos permitirá demostrar sin mucho esfuerzo importantes desigualdades geométricas, entre ellas, como veremos más adelante, la desigualdad isoperimétrica.

Teorema 2.2.1 (de esfericidad de Gross). *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$, y sea \mathcal{S}_K el conjunto formado por todos los cuerpos convexos que se obtienen al realizar una cantidad finita de simetrizaciones de Steiner a K respecto a hiperplanos que contienen al origen de coordenadas. Bajo estas condiciones, existe una sucesión $K_i \in \mathcal{S}_K$, $i \in \mathbb{N}$, de forma que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = \left(\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(B_n)} \right)^{1/n} B_n. \quad (2.1)$$

Demostración. Sea $\rho : \mathcal{K}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\rho(M) = \min \{R > 0 : M \subset RB_n\}$, para cualquier $M \in \mathcal{K}_0^n$. Como $\{\rho(M) : M \in \mathcal{S}_K\}$ es un conjunto de números reales positivos, tiene sentido definir

$$\rho := \inf \{\rho(M) : M \in \mathcal{S}_K\}.$$

Por la definición de ρ , existe una sucesión $(K_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_K$ tal que $\lim_i \rho(K_i) = \rho$. Partiendo de que $K \subset \rho(K)B_n$, utilizando las propiedades del teorema 2.1.1, se tiene que $\sigma_H(K) \subset \rho(K)B_n$, para cualquier hiperplano H conteniendo al origen. Usando de forma iterada la propiedad anterior, se llega a que $M \subset \rho(K)B_n$, para cualquier $M \in \mathcal{S}_K$; es decir, $\rho(M) \leq \rho(K)$, para cualquier $M \in \mathcal{S}_K$. Aplicando este hecho a $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$, se tiene que $K_i \subset \rho(K_i)B_n \subset \rho(K)B_n$, lo cual implica que la sucesión $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es uniformemente acotada. Utilizando ahora el teorema 1.1.4 de selección de Blaschke, tenemos asegurada la existencia de una subsucesión de $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ convergente a un conjunto convexo y compacto de \mathbb{R}^n , que denotamos por K_0 . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $K_0 = \lim_i K_i$. El cuerpo límite K_0 cumple que $\text{int } K_0 \neq \emptyset$, es decir, $K_0 \in \mathcal{K}_0^n$: haciendo uso de la invarianza del volumen por simetrizaciones de Steiner (proposición 2.1.2), y de la continuidad de éste (proposición 1.1.4), se llega a que

$$\text{vol}(K_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}(K_i) = \text{vol}(K) > 0,$$

lo cual implica que $\text{int } K_0 \neq \emptyset$. El valor $\rho(K_0)$ se calcula fácilmente a partir de la continuidad de la función $\rho(\cdot)$, pues

$$\rho(K_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(K_i) = \rho.$$

En consecuencia, $K_0 \subset \rho B_n$. Centrémonos ahora en comprobar que $K_0 = \rho B_n$. Supongamos, por reducción al absurdo, que $K_0 \subsetneq \rho B_n$ (estrictamente). En tal caso, la convexidad de K_0 garantiza la existencia de un punto $x \in \rho S^{n-1}$ tal que $x \notin K_0$; razón por la cual existe, utilizando el teorema 1.1.1 de separación, un hiperplano $H = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle z, u \rangle = \alpha\}$ separando fuertemente K_0 y x (véase la figura 2.8).

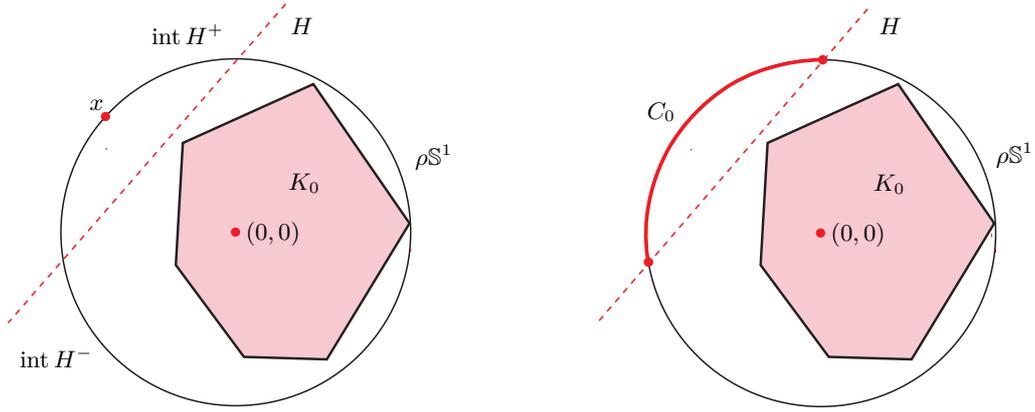


Figura 2.8: Hiperplano H separando fuertemente K_0 y x .

Supongamos que $\langle x, u \rangle > \alpha$, y consideremos $C_0 = \{y \in \rho\mathbb{S}^{n-1} : \langle y, u \rangle \geq \alpha\}$. La compacidad de la esfera $\rho\mathbb{S}^{n-1}$, asegura la existencia de una cantidad finita de hiperplanos H_1, \dots, H_m de tal forma que, si C_j es la reflexión del casquete C_0 respecto al hiperplano H_j , la unión de las reflexiones C_1, \dots, C_m cubre $\rho\mathbb{S}^{n-1}$. Entonces, las simetrizaciones de Steiner de K_0 respecto a H_1, \dots, H_m , dan un cuerpo convexo $\overline{K} = \sigma_{H_m} \sigma_{H_{m-1}} \cdots \sigma_{H_1}(K_0)$.

Veamos ahora que $\overline{K} \subset \text{int } \rho B_n$. En primer lugar, observemos que, tras aplicar a K_0 la simetrización de Steiner respecto al hiperplano H_1 , la imagen de los puntos de $K_0 \cap \text{int } \rho B_n$ pertenecerá, según la definición 2.1.2, a $\text{int } \rho B_n$. Por otro lado, supongamos que existe un punto $z_0 \in K_0 \cap C_1$. Si fuese $\sigma_{H_1}(z_0) \in \rho\mathbb{S}^{n-1}$, entonces $z_0 = \sigma_{H_1}(z_0)$, y la reflexión de z_0 respecto al hiperplano H_1 , z'_0 , deberá pertenecer, de nuevo por la definición 2.1.2, al conjunto K_0 ; sin embargo, ello implica que $z'_0 \in K_0 \cap C_0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\sigma_{H_1}(z_0) \in \text{int } \rho B_n$. Hemos comprobado, pues, que $\sigma_{H_1}(K_0) \cap C_1 = \emptyset$ (véase la figura 2.9). Procediendo de forma iterativa, se demuestra que

$$\sigma_{H_m} \sigma_{H_{m-1}} \cdots \sigma_{H_1}(K_0) \cap \rho\mathbb{S}^{n-1} = \emptyset,$$

lo que implica que $\overline{K} \subset \text{int } \rho B_n$, como queríamos comprobar.

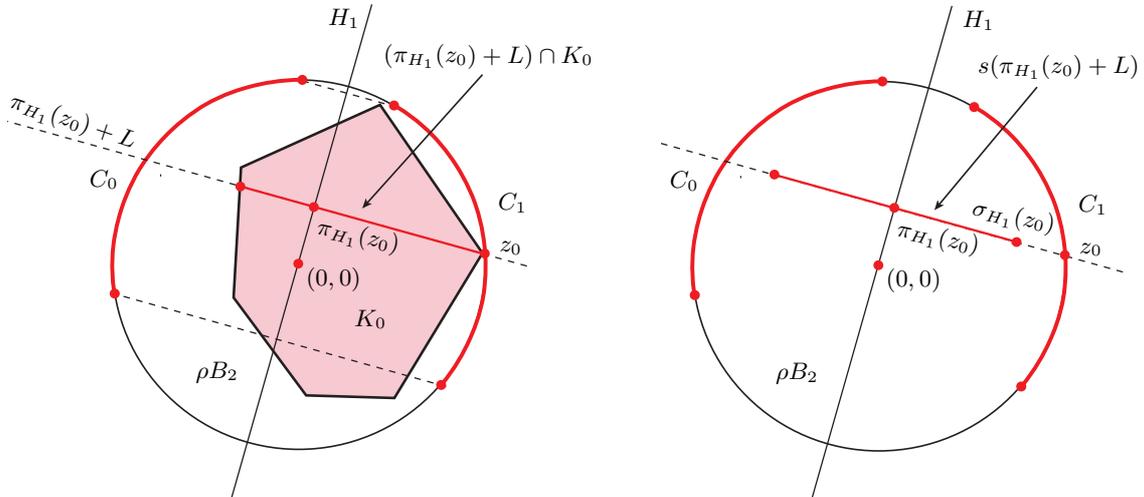


Figura 2.9: Simetrización de Steiner de K_0 respecto a H_1 .

Por otra parte, la compacidad de \overline{K} y $\rho\mathbb{S}^{n-1}$, junto al hecho de que $\overline{K} \cap \rho\mathbb{S}^{n-1} = \emptyset$, aseguran que $\ell' = d(\overline{K}, \rho\mathbb{S}^{n-1}) > 0$. Si $0 < \ell < \ell'$, entonces $(\rho\mathbb{S}^{n-1} + \ell B_n) \cap \overline{K} = \emptyset$, esto es, $\overline{K} \subset (\rho - \ell)B_n$; lo que implica $\rho(\overline{K}) < \rho$ (véase la figura 2.10).

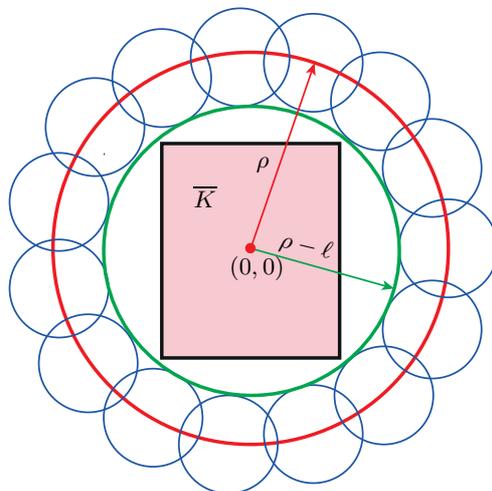


Figura 2.10: \overline{K} está contenido en la bola $(\rho - \ell)B_n$.

Sean ahora $\overline{K}_i = \sigma_{H_m} \sigma_{H_{m-1}} \cdots \sigma_{H_1}(K_i)$, $i \in \mathbb{N}$. Evidentemente, como $K_i \in \mathcal{S}_K$, para cada $i \in \mathbb{N}$, se sigue que $\overline{K}_i \in \mathcal{S}_K$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Así pues, $\rho(\overline{K}_i) \geq \rho$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $K_i \rightarrow K_0$, aplicando la proposición 2.1.1, se tiene que $\overline{K}_i \rightarrow \overline{K}$ y, por la continuidad de $\rho(\cdot)$, se sigue que $\rho(\overline{K}_i) < \rho$ para i suficientemente grande, lo cual produce una contradicción. De esta manera, obtenemos que $K_0 = \rho B_n$, como andábamos buscando. Finalmente, haciendo uso de las propiedades del volumen, se deduce que $\text{vol}(K) = \text{vol}(K_0) = \text{vol}(\rho B_n) = \rho^n \text{vol}(B_n)$; luego

$$\lim_{i \rightarrow \infty} K_i = \left(\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(B_n)} \right)^{1/n} B_n,$$

que es lo que deseábamos establecer. \square

El teorema de esfericidad permite demostrar importantes desigualdades geométricas como, por ejemplo, la desigualdad isoperimétrica en el caso de cuerpos convexos con interior no vacío; una pieza clave en la demostración del teorema 3.1.1 de Bender en el plano.

Teorema 2.2.2 (Desigualdad isoperimétrica). *Sea $K \in \mathcal{K}_0^n$. Entonces*

$$\frac{S(K)^n}{\text{vol}(K)^{n-1}} \geq \frac{S(B_n)^n}{\text{vol}(B_n)^{n-1}}. \quad (2.2)$$

Demostración. Una consecuencia evidente del teorema 2.2.1 de esfericidad de Gross, es la siguiente:

Lema 2.2.1. *Si $K \in \mathcal{K}_0^n$, entonces existe una sucesión de hiperplanos H_i , $i \in \mathbb{N}$, conteniendo al origen, tal que*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_{H_i} \cdots \sigma_{H_1}(K) = \left(\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(B_n)} \right)^{1/n} B_n.$$

Utilizando el lema 2.2.1, la proposición 2.1.2, y la continuidad del área de superficie, se sigue que

$$S(K) \geq S(\sigma_{H_1}(K)) \geq \dots \geq S\left(\left(\frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(B_n)}\right)^{1/n} B_n\right) = \frac{\text{vol}(K)^{(n-1)/n}}{\text{vol}(B_n)^{(n-1)/n}} S(B_n),$$

de donde se obtiene la desigualdad (2.2). \square

Realicemos ahora una serie de observaciones interesantes sobre la desigualdad isoperimétrica:

- Si $K \in \mathcal{K}_0^2$, entonces $\text{vol}(B_2) = A(B_2) = \pi$ y $S(B_2) = p(B_2) = 2\pi$, y la desigualdad (2.2) se reescribe como

$$4\pi A(K) \leq p(K)^2, \quad (2.3)$$

que es la llamada *desigualdad isoperimétrica en el plano*.

- La desigualdad (2.2) suele escribirse en la forma

$$\text{vol}(K)^{n-1} \leq \frac{\text{vol}(B_n)^{n-1}}{S(B_n)^n} S(K)^n, \quad (2.4)$$

que la hace válida para cualquier cuerpo convexo $K \in \mathcal{K}^n$, pues si $K \notin \mathcal{K}_0^n$, entonces $\text{vol}(K) = 0$, y la desigualdad es válida.

- En muchas ocasiones suele ser útil usar que $S(B_n) = n \text{vol}(B_n)$, lo cual permite escribir de forma más compacta la desigualdad (2.4):

$$\text{vol}(K)^{n-1} \leq \frac{1}{n^n} \frac{S(K)^n}{\text{vol}(B_n)}.$$

2.3. Desigualdades isoperimétricas relativas

Dentro del marco de la *optimización geométrica*, que no es otra cosa que la búsqueda, entre una familia de objetos determinados por ciertas características geométricas comunes, de aquéllos que maximizan o minimizan alguna magnitud concreta, se sitúa el conocido *problema isoperimétrico*, cuyo origen es legendario, y está asociado a la fundación de Cartago.



Figura 2.11: La leyenda de reina Dido.

Cuenta la leyenda que, tras una guerra civil en la ciudad fenicia de Tiro, en la que el rey Pigmalión vence y da muerte al sumo sacerdote Acerbas, Dido –hermana del rey Pigmalión, y esposa de Acerbas– sale huyendo con sus partidarios atravesando el Mediterráneo en una embarcación. Al llegar a las costas del actual Túnez, Dido negocia con el rey de la tribu local la adquisición de tierras para fundar una ciudad, y éste, reacio a la intrusión, les concede la porción de tierra que puedan abarcar con una piel de toro. La ingeniosa Dido corta la piel en tiras muy finas,

y las une para formar una larga cuerda, con la que delimita un terreno de gran extensión. Ahora bien, ¿qué curva Γ debió dibujar Dido con la cinta de la que disponía para abarcar un recinto de área máxima, considerando además que se encontraban junto a las costas del Mediterráneo? La desigualdad isoperimétrica clásica en el plano, junto a un argumento de reflexión, demuestran que el área del recinto será máxima cuando la curva Γ sea una semicircunferencia. Esta solución se expresa además mediante la relación $p(\Gamma)^2 \geq 2\pi A(\Gamma)$, donde $p(\Gamma)$ y $A(\Gamma)$ son, respectivamente, el perímetro de la curva Γ , y el área de la región encerrada por la curva Γ y la línea del mar. La igualdad en la desigualdad anterior se alcanza si, y sólo si, Γ es una semicircunferencia.

El interés producido por el problema isoperimétrico ha suscitado la publicación de numerosos trabajos que comparan el volumen con el área de superficie relativa de la frontera. Tales desigualdades se llaman *desigualdades isoperimétricas relativas*, y su definición rigurosa precisa introducir una notación adecuada. Así pues, si K es un cuerpo convexo de \mathbb{R}^n y E es un subconjunto medible de K con frontera medible (medida $(n-1)$ -dimensional de Lebesgue en \mathbb{R}^n), denotaremos por $S(E, K)$ a la medida $(n-1)$ -dimensional de $\text{bd } E \cap \text{int } K$. Estamos ya en condiciones introducir la definición siguiente:

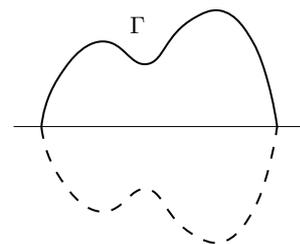


Figura 2.12: Reflexión de una curva

Definición 2.3.1. Sean $K \in \mathcal{K}^n$ y $\alpha \in \left(0, \frac{n}{n-1}\right]$. Si existe una constante C positiva de forma que la desigualdad

$$\min \{\text{vol}(E), \text{vol}(K \setminus E)\} \leq C [S(E, K)]^\alpha \quad (2.5)$$

se verifica para cualquier subconjunto E medible de K con frontera medible e interior no vacío, se dice que dicha desigualdad es una desigualdad isoperimétrica relativa a K . Además, en este caso, llamaremos constante isoperimétrica relativa a K y α , y se denotará por $C(K, \alpha)$, al menor número C para el cual la desigualdad (2.5) es válida.

La condición de que $\alpha \leq n/(n-1)$ no es arbitraria, y requiere de una explicación concluyente. De acuerdo con la definición 2.3.1, si se desea establecer una desigualdad isoperimétrica relativa no trivial, entonces $\text{int } K \neq \emptyset$. Sea $E \subset \text{int } K$ una bola de radio $r > 0$. Para r suficientemente pequeño, se tendrá que $\min \{\text{vol}(E), \text{vol}(K \setminus E)\} = \text{vol}(E) = \text{vol}(rB_n) = r^n \text{vol}(B_n)$ y, por otro lado, $S(E, K) = S(E) = S(rB_n) = r^{n-1}n \text{vol}(B_n)$. Así, si $\alpha > n/(n-1)$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\min \{\text{vol}(E), \text{vol}(K \setminus E)\}}{S(E, K)^\alpha} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(E)}{S(E, K)^\alpha} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^n \text{vol}(B_n)}{[r^{n-1}n \text{vol}(B_n)]^\alpha} = +\infty,$$

y será imposible, pues, determinar una constante C que satisfaga la desigualdad (2.5). Consecuentemente, $\alpha \leq n/(n-1)$.

Dada una desigualdad isoperimétrica relativa a K , es interesante conocer el valor de la constante isoperimétrica $C(K, \alpha)$. Como, evidentemente, $S(E, K) = S(K \setminus E, K)$ para cualquier $E \subset K$ medible con frontera medible, tenemos que

$$C(K, \alpha) = \sup \left\{ \frac{\text{vol}(E)}{S(E, K)^\alpha} : 0 < \text{vol}(E) \leq \frac{1}{2} \text{vol}(K) \right\}. \quad (2.6)$$

La determinación de la constante isoperimétrica relativa a K es un problema realmente complejo. Se conoce muy poco sobre $C(K, \alpha)$ para dominios o valores de α arbitrarios. En esta línea, se ha demostrado que, en el caso de la bola unidad, B_n , y $\alpha = n/(n-1)$, se tiene que

$$C\left(B_n, \frac{n}{n-1}\right) = \frac{\text{vol}(B_n)}{2 \text{vol}_{n-1}(B_{n-1})^{n/(n-1)}};$$

para el cubo unidad $C_n = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ y $\alpha = 1$, se tiene que

$$C(C_n, 1) = \frac{1}{2}. \tag{2.7}$$

La importancia de este resultado radica en que $C(C_n, 1)$ es una constante de carácter *universal*, es decir, una constante que no depende de la dimensión del espacio que se esté considerando. La prueba de la igualdad (2.7) fue realizada en el año 1972 por el matemático alemán Hadwiger. Ésta puede encontrarse en [4] y, hasta donde sabemos, no ha sido traducida al inglés. Debido, pues, a la dificultad que supone traducir el artículo original, que está escrito en alemán, no incluimos aquí la demostración de este hecho fundamental para la prueba del teorema 3.2.1 de este trabajo.

El problema isoperimétrico con restricciones a retículos

Después de introducir los conceptos de cuerpo convexo y retículo, y una vez abordado el problema isoperimétrico clásico para cuerpos convexos, llega el momento de estudiar las relaciones existentes entre el área de superficie y el volumen de un cuerpo convexo, y el número de puntos que éste contiene de un determinado retículo.

Para la sección 3.1, hemos seguido principalmente la referencia [1] y, para la sección 3.2, se ha utilizado [5].

3.1. Teorema de Bender en el plano

Sea $L = L(w_1, w_2) \subset \mathbb{R}^2$ un retículo arbitrario generado por el par de vectores no colineales w_1 y w_2 con $|w_1| \leq |w_2|$, y sea $0 < \theta < \pi$ el ángulo formado por éstos. Bajo estas condiciones, construimos un retículo rectangular asociado a L , $L'(w'_1, w'_2)$, que llamamos *retículo adjunto* de L , de la siguiente forma: ponemos $w'_1 = w_1$, y definimos w'_2 como un vector ortogonal a $w'_1 = w_1$, cuyo módulo sea $|w_2| \sin \theta$.

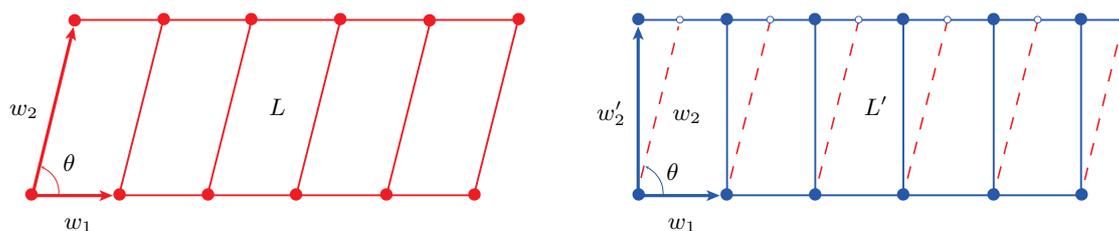


Figura 3.1: Construcción del retículo adjunto de $L = L(w_1, w_2)$.

A continuación presentamos un resultado de vital importancia en la demostración del teorema de Bender, que nos permitirá reducir el problema al caso de retículos rectangulares:

Lema 3.1.1. *Sea $L = L(w_1, w_2) \subset \mathbb{R}^2$ un retículo arbitrario generado por el par de vectores no colineales w_1 y w_2 , y sea $0 < \theta < \pi$ el ángulo formado por éstos. Además, supongamos que $|w_1| \leq |w_2|$. Si $K \in \mathcal{K}^2$ es un cuerpo convexo que no contiene puntos de L en su interior, entonces existe otro cuerpo convexo $K' \in \mathcal{K}^2$, que no contiene puntos del retículo adjunto L' en su interior, tal que*

$$(1) \ p(K') \leq p(K) \text{ y } A(K') = A(K).$$

$$(2) \ K' \text{ es simétrico respecto a las rectas } x' = 1/2 \text{ e } y' = 1/2, \text{ donde las coordenadas } x' \text{ e } y' \text{ vienen dadas en la base } \{w'_1, w'_2\}.$$

Demostración. Sea K_0 el conjunto obtenido a partir de K mediante la simetrización de Steiner respecto a la recta $x' = 1/2$. Utilizando la proposición 2.1.1, el conjunto K_0 será un cuerpo convexo que, por la proposición 2.1.2, cumplirá que $A(K_0) = A(K)$ y $p(K_0) \leq p(K)$. Veamos que, además, K_0 no contiene puntos del retículo L' en su interior. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $p = mw'_1 + nw'_2 \in L'$ con $p \in \text{int } K_0$. Como K_0 es simétrico respecto a la recta $x' = 1/2$, si p' es el simétrico de p respecto a dicha recta, entonces $p' \in \text{int } K_0$.

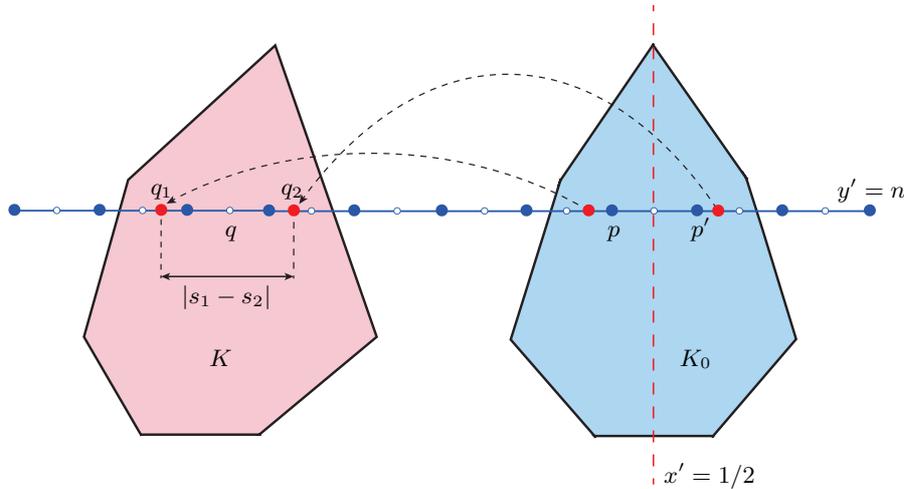


Figura 3.2: K_0 no contiene puntos de L' en su interior.

Además, como $p \in \text{int } K_0$, se tiene asegurada la existencia, sobre la recta $y' = n$, de un segmento en K_0 de longitud mayor que 1 ($p \neq p'$). Como K_0 ha sido obtenido a partir de K tras una simetrización de Steiner, se deduce que K también contiene (sobre la recta $y' = n$) un segmento de longitud mayor que 1. El razonamiento anterior, y la forma en que se construye el retículo adjunto, garantizan la existencia de dos puntos $q_1 = s_1 w'_1 + n w_2$ y $q_2 = s_2 w'_1 + n w_2$ tales que $|s_1 - s_2| > 1$ y $[q_1, q_2] \subset \text{int } K$. Como $|s_1 - s_2| > 1$, deberá existir $s \in \mathbb{Z}$ tal que $s_1 < s < s_2$ (se está suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $s_1 < s_2$). Así, el punto $q = s w'_1 + n w_2$ cumple que $q \in [q_1, q_2] \subset \text{int } K$, esto es, K contiene un punto del retículo L en su interior. Lo

anterior contradice la hipótesis del lema, por lo que K_0 no contiene puntos de L' en su interior. De esta forma, K_0 es un cuerpo convexo, simétrico respecto a la recta $x' = 1/2$, y cuyo interior no contiene puntos del retículo L' .

Procediendo de forma análoga con K_0 , obtenemos un cuerpo convexo K' , cuyo interior no contiene puntos del retículo L' , que es simétrico respecto de las rectas $x' = 1/2$ e $y' = 1/2$, y tal que $A(K') = A(K_0) = A(K)$ y $p(K') \leq p(K_0) \leq p(K)$. Esto termina la prueba. \square

Teorema 3.1.1 (de Bender, 1962). *Sea $L = L(w_1, w_2) \subset \mathbb{R}^2$ un retículo arbitrario generado por el par de vectores linealmente independientes w_1 y w_2 , y sea θ el ángulo formado por éstos, donde $0 < \theta < \pi$. Bajo estas condiciones, existe el supremo de los cocientes $A(K)/p(K)$, calculado sobre todos los cuerpos convexos $K \in \mathcal{K}^2$ que no contienen puntos del retículo L en su interior, y lo denotamos por $s(L)$. Además, si $|w_1| \leq |w_2|$, se verifica la cadena de desigualdades*

$$\frac{1}{2}|w_2| \operatorname{sen} \theta \leq s(L) \leq \frac{1}{2} \max\{|w_1|, |w_2| \operatorname{sen} \theta\}. \quad (3.1)$$

Demostración. En primer lugar, demostraremos que, para cualquier cuerpo convexo K tal que $G(K, L) = 0$, se tiene

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq \frac{1}{2} \max\{|w_1|, |w_2| \operatorname{sen} \theta\},$$

por lo que tendremos garantizada la existencia del supremo, $s(L)$, y demostrada la cota superior de la desigualdad (3.1). Comencemos observando que, si K es un cuerpo convexo que no contiene puntos del retículo L en su interior, utilizando el lema 3.1.1, podemos asegurar la existencia de un cuerpo convexo K' verificando las condiciones siguientes:

- $\operatorname{int} K'$ no contiene puntos del retículo adjunto L' .
- $p(K') \leq p(K)$ y $A(K') = A(K)$.
- K' es simétrico respecto a las rectas $x' = 1/2$ e $y' = 1/2$, donde las coordenadas x' e y' vienen dadas en la base $\{w'_1, w'_2\}$.

Por lo tanto, se deduce que

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq \frac{A(K')}{p(K')};$$

por lo que probar la cota superior del enunciado, es equivalente a demostrar que, si $L = L(w_1, w_2)$ es un retículo rectangular, y K es un cuerpo convexo, simétrico respecto a las rectas $x = 1/2$ e $y = 1/2$ (coordenadas asociadas a la base dada por w_1 y w_2), que no contiene puntos de L en su interior, entonces

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq \frac{1}{2} \max\{|w_1|, |w_2|\}. \quad (3.2)$$

Al ser K un cuerpo convexo, tenemos que K es un conjunto acotado de \mathbb{R}^2 , por lo que tiene sentido considerar los máximos

$$\alpha = \max \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda w_1 + \frac{1}{2} w_2 \in K \right\} \quad \text{y} \quad \beta = \max \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} w_1 + \gamma w_2 \in K \right\}.$$

A partir de este momento, realizamos la demostración de la desigualdad (3.2) distinguiendo tres casos, según los valores que tomen α y β :

CASO I ($\alpha, \beta \leq 3/2$). Utilizando la desigualdad isoperimétrica en el plano (2.3), se tiene que

$$\frac{A(K)^2}{p(K)^2} \leq A(K)^2 \frac{1}{4\pi A(K)} = \frac{A(K)}{4\pi},$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq \sqrt{\frac{A(K)}{4\pi}}. \quad (3.3)$$

Centrémonos ahora en la búsqueda de una cota superior para $A(K)$. Como K es convexo, y simétrico respecto a las rectas $x = 1/2$ e $y = 1/2$, se deduce que éste ha de estar contenido en la región con forma de cruz, C , que se muestra en la figura 3.3.

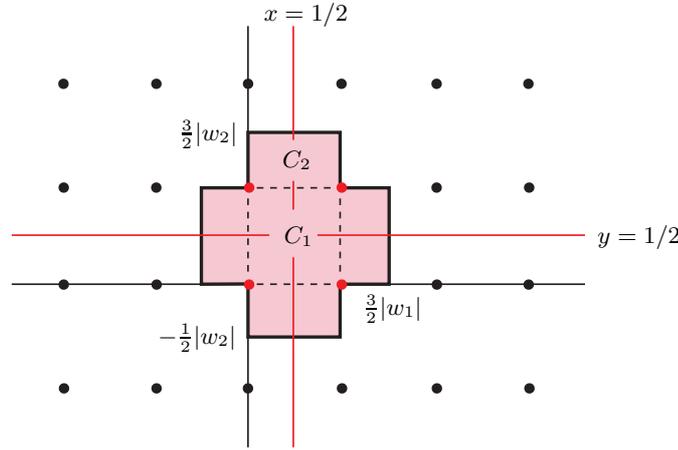


Figura 3.3: Caso I ($\alpha, \beta \leq 3/2$) de la demostración del teorema de Bender.

Utilizando las propiedades fundamentales del volumen de un cuerpo convexo (véase la proposición 1.1.4), tenemos la acotación

$$A(K) \leq A(C) = A(C_1) + 4A(C_2) = |w_1||w_2| + 2|w_1||w_2| = 3|w_1||w_2|.$$

Sustituyendo la desigualdad anterior en (3.3), se obtiene la acotación (3.2):

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq \sqrt{\frac{A(K)}{4\pi}} \leq \sqrt{\frac{3|w_1||w_2|}{4\pi}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sqrt{|w_1||w_2|} \leq \frac{1}{2} \max\{|w_1|, |w_2|\}.$$

CASO II ($\alpha > 3/2$). Consideremos la región de K contenida en el cuadrante $x \geq 1/2$ e $y \geq 1/2$, la cual denotamos como K' . Gracias a la simetría del cuerpo convexo K respecto a las rectas $x = 1/2$ e $y = 1/2$, K' será la cuarta parte de K . La convexidad y simetría del conjunto K , junto al hecho de que éste no contiene puntos del retículo L en su interior (en particular, no contiene al $(1, 1)$), aseguran que en el interior de K' no hay puntos del conjunto no acotado, D , de la figura 3.4.

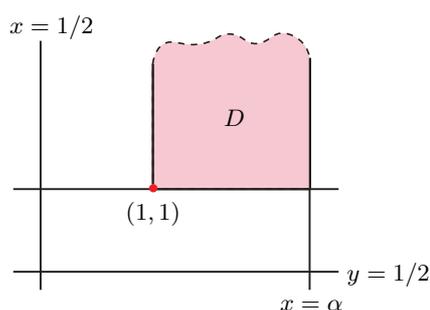


Figura 3.4: Conjunto no acotado, D , que no contiene puntos de K' .

Como K' es no vacío, convexo y cerrado, y el punto $(1, 1)$ no pertenece al interior de dicho conjunto, aplicando, según convenga, el teorema 1.1.1 de separación o el teorema 1.1.2 de existencia de hiperplanos soporte en puntos de la frontera, podemos asegurar la existencia de una recta que pasa por $(1, 1)$, con pendiente no positiva, de forma que K' está contenido en el semiplano inferior que ésta delimita. En consecuencia, K' debe ser un subconjunto de la región sombreada, B , que se muestra en la figura 3.5.

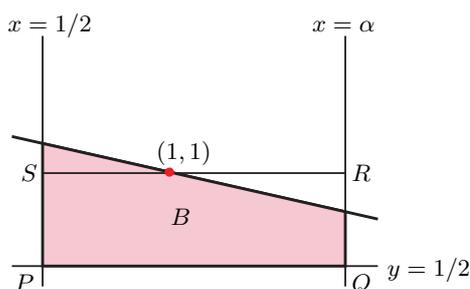


Figura 3.5: Caso II ($\alpha > 3/2$) de la demostración del teorema de Bender.

Como $\alpha - 1 > 1/2$, se deduce que

$$A(K) = 4A(K') \leq 4A(B) \leq 4A(PQRS)$$

y, como $A(PQRS) = (1/2)|w_2|(\alpha - 1/2)|w_1|$, se llega a la acotación del área

$$A(K) \leq 2|w_1||w_2| \left(\alpha - \frac{1}{2} \right). \quad (3.4)$$

Busquemos ahora una cota inferior de $p(K)$. La definición de α , y el hecho de que K' es un conjunto convexo, implican que el segmento $[P, Q]$ está contenido en K' . Así, debido a la simetría de K , el segmento $[P, Q]$ ha de estar contenido dos veces en K , por lo que K contiene un segmento cuya longitud es dos veces la de $[P, Q]$. Utilizando ahora las propiedades del perímetro, obtenemos que

$$p(K) \geq 2p([P, Q]) = 4 \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) |w_1|. \quad (3.5)$$

Combinando las acotaciones (3.4) y (3.5), llegamos finalmente a la cota buscada:

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq \frac{2|w_1||w_2|(\alpha - \frac{1}{2})}{4(\alpha - \frac{1}{2})|w_1|} = \frac{1}{2}|w_2| \leq \frac{1}{2} \max\{|w_1|, |w_2|\}.$$

CASO III ($\beta > 3/2$). Mediante un procedimiento análogo al del CASO II ($\alpha > 3/2$), llegamos a

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq \frac{1}{2}|w_1| \leq \frac{1}{2} \max\{|w_1|, |w_2|\}.$$

Las líneas anteriores garantizan la existencia del supremo, $s(L)$, y demuestran la cota superior en la cadena de desigualdades (3.1). Para probar la cota inferior, consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el paralelogramo $D_n = \{(\lambda w_1, \beta w_2) : 0 \leq \lambda \leq n, 0 \leq \beta \leq 1\}$ (véase la figura 3.6).

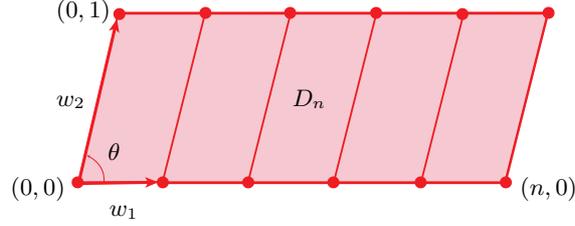


Figura 3.6: Paralelogramo D_n

Como $A(D_n) = n|w_1||w_2| \sin \theta$ y $p(D_n) = 2|w_2| + 2n|w_1|$, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(D_n)}{p(D_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{n|w_1||w_2| \sin \theta}{|w_2| + n|w_1|} = \frac{1}{2} \frac{|w_1||w_2| \sin \theta}{|w_1|} = \frac{1}{2}|w_2| \sin \theta.$$

Utilizando la definición de supremo, se obtiene

$$\frac{1}{2}|w_2| \sin \theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(D_n)}{p(D_n)} \leq s(L) = \sup \left\{ \frac{A(K)}{p(K)} : K \in \mathcal{K}^2, G(K, L) = 0 \right\},$$

que es la cota inferior de $s(L)$ buscada. □

Teorema 3.1.2 (de Bender para el retículo entero). *Sea K un cuerpo convexo de \mathbb{R}^2 , que no contiene puntos del retículo entero \mathbb{Z}^2 en su interior. Entonces*

$$A(K) \leq \frac{1}{2} p(K).$$

Demostración. Como \mathbb{Z}^2 está generado por los vectores $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$ se sigue, utilizando la notación del teorema 3.1.1 de Bender, que $\theta = \pi/2$; luego

$$\frac{A(K)}{p(K)} \leq s(L) \leq \frac{1}{2} \max\{|e_1|, |e_2| \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\} = \frac{1}{2},$$

de donde se deduce la desigualdad que muestra el enunciado. □

La desigualdad del teorema 3.1.2 es óptima «asintóticamente», en el sentido de que la constante $1/2$ no puede reemplazarse por un valor más pequeño. En efecto, si consideramos un rectángulo de base a y altura 1 que sólo tenga puntos de \mathbb{Z}^2 en su frontera, se tiene que

$$\frac{A(K)}{p(K)} = \frac{a}{2a + 2},$$

por lo que, si $a \rightarrow \infty$, el límite de este cociente es, precisamente, $1/2$.

Como consecuencia de este teorema se deduce una condición suficiente para que un cuerpo convexo en el plano contenga puntos del retículo entero en su interior. Concretamente, se tiene el siguiente criterio:

Proposición 3.1.1. *Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ un cuerpo convexo tal que*

$$\frac{1}{2} p(K) < A(K).$$

Entonces K contiene puntos del retículo \mathbb{Z}^2 en su interior.

La desigualdad que se ha obtenido en el teorema 3.1.2, como aplicación directa del teorema 3.1.1 de Bender, publicado en el año 1962, ya era conocida entonces por sus coetáneos. Sin ir más lejos, la matemática M. Nosarzewska publicó en 1948 un trabajo en el que se probaba, para cualquier cuerpo convexo del plano, K , la cadena de desigualdades

$$A(K) - \frac{1}{2} p(K) \leq G(K, \mathbb{Z}^2) \leq A(K) + \frac{1}{2} p(K).$$

Por tanto, si $G(K, \mathbb{Z}^2) = 0$, entonces la desigualdad inferior prueba el teorema 3.1.2.

3.2. Teorema de Bokowski, Hadwiger y Wills

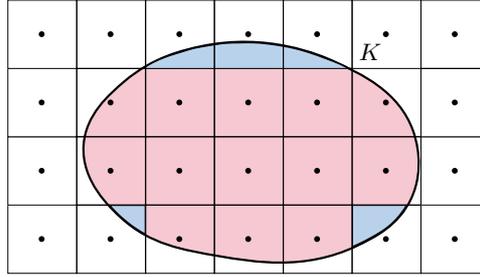
En esta sección nos preguntamos si es posible obtener para el retículo entero una generalización de teorema de Bender a dimensiones superiores. La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y viene de la mano de Bokowski, Hadwiger y Wills, que prueban, gracias a una demostración realmente ingeniosa, uno de los resultados más importantes de este tipo, del que se obtiene como caso particular el teorema de Bender en dimensión arbitraria. Para escribir la prueba, hemos hecho uso de [5], aunque la demostración original, escrita en alemán, se encuentra en [2].

Teorema 3.2.1 (Bokowski, Hadwiger y Wills, 1972). *Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo cualquiera, entonces*

$$\text{vol}(K) - \frac{1}{2} S(K) \leq G(K, \mathbb{Z}^n).$$

Demostración. Sea $C_{\mathbb{Z}^n} = [-1/2, 1/2]^n$ el cubo unidad n -dimensional centrado en el origen. Para cada $g_i \in \mathbb{Z}^n$, representaremos por $C_{\mathbb{Z}^n}(i)$ al cubo n -dimensional obtenido a partir de $C_{\mathbb{Z}^n}$ mediante la aplicación traslación que lleva el origen al punto g_i , esto es, $C_{\mathbb{Z}^n}(i) := g_i + C_{\mathbb{Z}^n}$. En esta situación, la familia $\{C_{\mathbb{Z}^n}(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ forma una teselación del espacio euclídeo \mathbb{R}^n (véase la figura 3.7), es decir, cubre todo el espacio, y cualesquiera dos elementos de la familia tienen interiores disjuntos. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $K_i = K \cap C_{\mathbb{Z}^n}(i)$. Gracias a la compacidad del conjunto K , se tiene garantiza la existencia de dos enteros no negativos r y s tal que, tras un posible reordenamiento de los g_i , si fuera necesario, se verifique lo siguiente:

- (1) $g_i \in \text{int } K_i$, $i = 1, \dots, r$;
- (2) $g_i \notin \text{int } K_i$ y $\text{vol}(K_i) > 0$, $i = r + 1, \dots, s$;
- (3) $g_i \notin \text{int } K_i$ y $\text{vol}(K_i) = 0$, $i > s$.

Figura 3.7: Los conjuntos K_i .

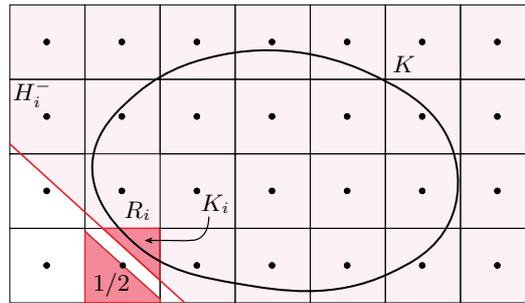
Con esta notación, es evidente que $G(K, \mathbb{Z}^n) = r$, y que

$$\text{vol}(K) = \sum_{i=1}^r \text{vol}(K_i) + \sum_{i=r+1}^s \text{vol}(K_i) \leq r \text{vol}(C_{\mathbb{Z}^n}) + \sum_{i=r+1}^s \text{vol}(K_i).$$

Combinando lo anterior, y usando que $\text{vol}(C_{\mathbb{Z}^n}) = 1$, se llega a la desigualdad

$$\text{vol}(K) - \sum_{i=r+1}^s \text{vol}(K_i) \leq G(K, \mathbb{Z}^n). \quad (3.6)$$

Centrémonos en ver que $\text{vol}(K_i) \leq 1/2$, para $i = r + 1, \dots, s$. En efecto, como $g_i \notin \text{int } K_i$ y K es convexo, el teorema 1.1.1 de separación asegura la existencia de un hiperplano H_i que separa el punto g_i y el conjunto K_i . Supongamos, por ejemplo, que H_i^- es el semiespacio que contiene a K_i , y sea $R_i = H_i^- \cap C_{\mathbb{Z}^n}(i)$. Como, claramente, $K_i \subset R_i$, y dado que el punto central del cubo $C_{\mathbb{Z}^n}(i)$ no se encuentra en el interior de R_i , se deduce que $\text{vol}(K_i) \leq \text{vol}(R_i) \leq 1/2$, como queríamos comprobar.

Figura 3.8: Si $i = r + 1, \dots, s$, entonces $\text{vol}(K_i) \leq 1/2$.

Utilizando el resultado (2.7) de Hadwiger en relación a la constante isoperimétrica del cubo unidad, tenemos que $C(C_{\mathbb{Z}^n}(i), 1) = 1/2$. Como $\text{vol}(K_i) \leq 1/2$, para $i = r + 1, \dots, s$, utilizando la definición de constante isoperimétrica dada en (2.6), concluimos que $\text{vol}(K_i) \leq (1/2) S_i(K)$, $i = r + 1, \dots, s$, donde $S_i(K)$ representa el área de superficie de la frontera de K contenida en el interior del cubo $C_{\mathbb{Z}^n}(i)$. Además, como $\sum_{i=r+1}^s S_i(K) \leq S(K)$, se tiene entonces que

$$\sum_{i=r+1}^s \text{vol}(K_i) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=r+1}^s S_i(K) \leq \frac{1}{2} S(K). \quad (3.7)$$

Combinando ahora las desigualdades (3.6) y (3.7), se obtiene la desigualdad

$$\operatorname{vol}(K) - \frac{1}{2}S(K) \leq \operatorname{vol}(K) - \sum_{i=r+1}^s \operatorname{vol}(K_i) \leq G(K, \mathbb{Z}^n),$$

que es justo lo que establece el enunciado. \square

En esta situación, podríamos preguntarnos por la existencia de una generalización del teorema 3.2.1 a cualquier retículo L del espacio euclídeo \mathbb{R}^n . La siguiente generalización fue conjeturada por Wills en [8]:

Conjetura 3.2.1 (Wills, 1990). *Sea L un retículo de \mathbb{R}^n . Entonces, para cualquier cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$, se tiene que*

$$\frac{\operatorname{vol}(K)}{D_n(L)} - \frac{S(K)}{2D_{n-1}(L)} \leq G(K, L). \quad (3.8)$$

Finalmente, como consecuencia directa del teorema 3.2.1, podemos establecer el siguiente resultado, que generaliza, en el caso del retículo entero, el teorema 3.1.2 de Bender en el plano:

Teorema 3.2.2. *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo con $G(K, \mathbb{Z}^n) = 0$. Entonces*

$$\operatorname{vol}(K) \leq \frac{1}{2}S(K).$$

Índice de figuras

1.1. Ejemplos típicos de conjuntos convexos de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	2
1.2. Ejemplos típicos de conjuntos no convexos de \mathbb{R}^2	3
1.3. Cono convexo en \mathbb{R}^2 situado en el primer cuadrante.	3
1.4. La envoltura convexa de la estrella de cinco puntas es el pentágono.	3
1.5. Envoltura convexa, envoltura positiva y envoltura afín de un conjunto A	4
1.6. De izquierda a derecha: separación propia, separación fuerte y separación estricta.	5
1.7. El hiperplano H soporta a K en $x \in \text{bd } K \cap H$	6
1.8. Suma de Minkowski.	6
1.9. $d(A, B) = 0$ y $A \neq B$	7
1.10. Cálculo de la distancia de Hausdorff del ejemplo 1.1.1.	9
1.11. El área de superficie coincide con la «derivada» del volumen.	11
1.12. Área de superficie de un segmento en \mathbb{R}^2	12
1.13. Ejemplos de retículos en el plano euclídeo.	13
1.14. Distintos paralelepípedos fundamentales del retículo hexagonal.	14
1.15. Subretículo del retículo entero \mathbb{Z}^2 en el plano.	14
2.1. Proyección de un punto sobre el hiperplano H	17
2.2. Proyección de un cuerpo convexo A sobre un hiperplano H	18
2.3. Ejemplo de simetrización de Steiner.	18
2.4. Simetría de la bola B_2 respecto al hiperplano H	20
2.5. Si $K \in \mathcal{K}^n$, entonces $\sigma_H(K)$ es cerrado.	21
2.6. Si K es convexo, entonces $\sigma_H(K)$ también lo es.	22
2.7. Si $\text{int } K = \emptyset$, entonces puede ser que $\lim_i \sigma_H(K_i) \neq K$	23
2.8. Hiperplano H separando fuertemente K_0 y x	26

2.9. Simetrización de Steiner de K_0 respecto a H_1	26
2.10. \overline{K} está contenido en la bola $(\rho - \ell)B_2$	27
2.11. La leyenda de reina Dido.	28
2.12. Reflexión de una curva	29
3.1. Construcción del retículo adjunto de $L = L(w_1, w_2)$	31
3.2. K_0 no contiene puntos de L' en su interior.	32
3.3. Caso I ($\alpha, \beta \leq 3/2$) de la demostración del teorema de Bender.	34
3.4. Conjunto no acotado, D , que no contiene puntos de K'	35
3.5. Caso II ($\alpha > 3/2$) de la demostración del teorema de Bender.	35
3.6. Paralelogramo D_n	36
3.7. Los conjuntos K_i	38
3.8. Si $i = r + 1, \dots, s$, entonces $\text{vol}(K_i) \leq 1/2$	38

Bibliografía

- [1] E. A. Bender: Area-perimeter relations for two-dimensional lattices, *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 742–744.
- [2] J. Bokowski, H. Hadwiger, J. M. Wills: Eine Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Gitterpunktanzahl konvexer Körper im n -dimensionalen Raum, *Math. Z.* **127** (1972), 363–364.
- [3] P. M. Gruber: *Convex and Discrete Geometry*. Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [4] H. Hadwiger: Gitterperiodische Punktmengen und Isoperimetrie, *Monatsh. Math.* **76** (1972), 410–418.
- [5] C. Peri: On relative isoperimetric inequalities, *Conf. Semin. Mat. Univ. Bari* **279** (2001), 1–14.
- [6] R. Schneider: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Second expanded edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.
- [7] F. Vidal Mendoza: *La simetrización de Steiner*. Tesina de Licenciatura. Publicaciones del departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia, 1992.
- [8] J. M. Wills: Kugellagerungen und Konvexgeometrie, *Jahresber. Deutsch. Math-Verein* **92** (1990), 21–46.