UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

El Axioma de Determinación

Víctor González López

Dirigido por

Antonio Avilés López

Curso 2015-2016

El Axioma de Determinación

Víctor González López

Dirigido por:

Antonio Avilés López

Declaración de originalidad

Yo, Víctor González López, autor del TFG *El Axioma de Determinación*, bajo la tutela del profesor Antonio Avilés López, declaro que este trabajo es original en el sentido de que he puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 15 de junio de 2016.

Víctor González López.

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración).

"La sabiduría es hija de la experiencia".
— Leonardo da Vinci.

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar las consecuencias de adoptar el Axioma de Determinación (AD) en sustitución del axioma de elección (AC) en lo referente a la medida de Lebesgue en la recta real. Para ello analizaremos el sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel-Choice (ZFC) y las posibles incompatibilidades con AD, haremos uso de la Topología, la medida de Lebesgue y de los conjuntos analíticos. El trabajo está dividido en cuatro capítulos, cada uno de los cuales permite construir una habitación de la casa cuyo tejado acaba siendo la prueba de que todo conjunto de números reales es medible Lebesgue bajo AD.

En 1904, Ernst Zermelo, matemático y lógico alemán, formuló el axioma de elección para probar que todo conjunto puede ser bien ordenado. Zermelo recibió muchas críticas por ello y, célebres colegas como Borel, Baire y Lebesgue se opusieron al axioma, ya que este establece la existencia de un cierto conjunto sin dar una definición explícita del mismo, algo inasumible por muchos en aquel momento.

Cuatro años más tarde, en 1908, con el fin de proteger su demostración, Zermelo publicó la primera axiomatización de la Teoría de Conjuntos, donde los axiomas que postuló eran principios consonantes con su prueba, entre los que se encontraba AC. Lejos de alejar la controversia sobre su prueba, lo que ocurrió es que la propia axiomatización fue cuestionada.

Fue en 1930 cuando Zermelo publicó una nueva axiomatización en la que se modificó la anterior y se incluyeron las sugerencias hechas por Fraenkel unos años antes. Este sistema es muy parecido al usado hoy en día y se conoce por Zermelo-Fraenkel (ZF). En él no está presente AC debido a las diferencias en cuanto a características respecto al resto de axiomas, pese a lo cual cada vez más se consideraba un axioma necesario, dando origen a ZFC.

En el primer capítulo abordaremos el estudio de este último sistema de axiomas. A pesar de estar basado en la lógica de primer orden, no nos centraremos en el desarrollo lógico de los axiomas, sino en explicar las posibles causas y consecuencias de su inclusión. Distinguiremos entre el sistema ZF y el Axioma de Elección. Como durante el último capítulo asumiremos AD, y este resultará a la postre incompatible con AC, es nuestra intención desarrollar el trabajo mediante un sistema de axiomas que no incluya a AC. Es precisamente el estudio de este último, y su carácter dual, el que nos dará pie creer

razonable asumir una versión débil, el Axioma Numerable de Elección (CAC), junto a ZF ya que, CAC nos permite conservar las aplicaciones de AC que sí son necesarias. De hecho, asumiremos el Principio de Elecciones Dependientes, algo más fuerte que CAC y necesario para definir sucesiones de manera recurrente.

Ahora bien, una de las características que ha de tener un sistema de axiomas es la consistencia, es decir, que a partir de ellos no se pueda deducir ninguna contradicción. Existía una creencia de que el sistema de axiomas de Zermelo-Fraenkel era consistente y durante varios años se intentó probar. Sin embargo, entre 1930 y 1936 Gödel probó que la consistencia de ZF no puede ser deducida dentro del propio ZF, sino que para ello es necesario un sistema de axiomas más general en el que a priori es más complicado tener consistencia. Este resultado arrojó un jarro de agua fría sobre aquellos que creían que sería posible encontrar un sistema de axiomas consistente que permitiera desarrollar todas las matemáticas debido a que, como consecuencia, la consistencia de ZF queda supeditada a la experiencia.

Otro problema seguía abierto, y era la consistencia relativa del axioma de elección respecto a ZF. En 1924 se publicó un resultado conocido como la Paradoja de Banach-Tarski, que junto con el hecho de que existieran conjuntos no medibles Lebesgue en la recta real, debido esto último a Vitali, hizo pensar que el axioma de elección había de conducir a alguna contradicción, por lo que los que no creían en él sostenían que el sistema de axiomas ZFC era inconsistente. Sin embargo, de nuevo Gödel, en 1935, durante una visita al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, comunicó a Von Neumann que había demostrado que si ZF es consistente, ZFC es consistente, es decir, la consistencia relativa de AC respecto a ZF. Este resultado cerró el debate existente en torno al axioma de elección durante varias décadas, dándole la razón a Zermelo, el primero que abogó por él. Es en el final del primer capítulo donde enunciaremos los principales resultados relativos a la consistencia de los sistemas de axiomas que tenemos en cuenta.

El segundo capítulo se centra en establecer conceptos previos necesarios para el resto del trabajo. En primer lugar, hablaremos de subbases, de la topología inicial y de la topología producto de un número infinito de espacios topológicos. Posteriormente, particularizaremos esta topología en el espacio de las sucesiones de números naturales, lo que pasará a llamarse espacio de Baire. Por otro lado, introduciremos la medida de Lebesgue en la recta real y algunas de sus propiedades, ya que esta está muy presente a lo largo del resto del trabajo. Intentaremos construir una función medida que generalice las propiedades de la longitud de los intervalos a todo conjunto de números reales. Comenzaremos hablando de la medida exterior, tras lo cual definiremos los conjuntos medibles. Finalmente, hablaremos de diversas propiedades que cumple la medida de Lebesgue, que serán utilizadas posteriormente. Para realizar esta construcción clásica resaltaremos la importancia del axioma de elección, puesto que este es el que da pie a la diferenciación entre conjuntos medibles y no medibles debido a que mediante su uso se construye el Conjunto de Vitali. Cabe resaltar que los resultados de este capítulo no van acompañados de demostración, salvo algunas excepciones, aunque sí de una referencia a dónde se puede consultar, bien porque son conceptos estudiados a lo largo del grado, bien porque son resultados básicos cuya demostración con detalle podría empañar y hacer olvidar el objetivo al que nos dirigimos.

En el tercer capítulo nos centraremos únicamente en el estudio de los conjuntos analíticos, los cuales podremos definir gracias a haber dotado de una topología al conjunto de las sucesiones de números naturales. A pesar de poder definir estos en un contexto mucho más general, como es el de espacios Polacos, lo haremos en $\mathbb{R}$ por ser este el espacio en el que se desarrolla el trabajo. Introduciremos el concepto geométrico de árbol, que nos será de utilidad a la hora de interpretar de manera intuitiva algunas de las definiciones que daremos. Definiremos las nociones de esquema de Souslin y de operación de Souslin y las interpretaremos en términos de árboles. La operación de Souslin será identificada rápidamente con los conjuntos analíticos, al ser todo conjunto analítico una operación de Souslin de un cierto esquema de Souslin de conjuntos cerrados. A continuación estudiaremos las propiedades de dos esquemas de Souslin muy particulares que se definen a partir de otro esquema de Souslin dado, que serán muy importantes a la hora de demostrar que la familia de los conjuntos medibles Lebesgue es cerrada bajo la operación de Souslin. Finalmente, y como consecuencia de esto último, tendremos que todo conjunto analítico es medible Lebesgue.

En el cuarto y último capítulo comenzaremos introduciendo los conceptos indispensables para definir formalmente el Axioma de Determinación, como es el de juego infinito. Este axioma tiene su origen en 1962, cuando dos matemáticos polacos, Jan Mycielski y Hugo Steinhaus, lo introdujeron como una alternativa al Axioma de Elección tras un periodo de calma iniciado con los teoremas de Gödel en el que AC había sido adoptado plenamente. Una vez definido AD, probaremos que este implica que, en $\mathbb{R}$, el Axioma Numerable de Elección es consecuencia de AD. Esto tiene implicaciones tales como que una función real es continua si y solo si es secuencialmente continua. Posteriormente analizaremos en profundidad un cierto juego infinito al que llamaremos juego de los cubrimientos. Estableceremos las consecuencias de que los diferentes jugadores del juego de los cubrimientos posean una estrategia (ganadora), gracias a las que seremos capaces de probar el principal teorema del trabajo, que establece, como ya hemos comentado, que todo subconjunto de números reales es medible Lebesgue bajo la asunción del Axioma de Determinación. Este resultado se debe a Mycielski. Como consecuencia obtendremos la incompatibilidad de AD con AC. Finalmente, comentaremos algunos otros de los resultados que se pueden obtener bajo AD, que no se cumplen bajo AC.

Es nuestro deseo resaltar que en la práctica totalidad de las definiciones y pruebas incluimos la referencia de la que han sido obtenidas. En caso de no ser así, se trata de un resultado propuesto por el tutor y del que no hemos encontrado referencias. Las referencias históricas han sido obtenidas de [13]. Existe un resultado, el teorema de Saks (3.42), para el cual damos una demostración modificada a la presente en [8], que permite eludir la definición de un cierto conjunto que complica la demostración. Respecto a las demostraciones, la manera general de proceder ha sido la de detallar las pruebas presentes en los libros de referencia, de manera que se facilite su comprensión. Finalmente, en el caso en el que no hay referencia o se trata de un ejercicio, se especifica si ha sido resuelto por el autor o en colaboración con el tutor.

Abstract

The aim of this work is to study the consequences of taking on theAxiom of Determinacy (AD) instead of the Axiom of Choice (AC) regarding Lebesgue measure. In order to accomplish that, we will analyze Zermelo-Fraenkel-Choice's system of axioms (ZFC) and the possible incompatibilities with AD, we will use Topology, Lebesgue measure and analytic sets. This work is divided into four chapters, each one of them allows us to build one room of the house whose roof is the proof that every set of real numbers is Lebesgue measurable under AD.

In 1904, Ernst Zermelo, German mathematician and logician, formulated the Axiom of Choice in order to prove that every set can be well-ordered. Zermelo received a lot of criticisms for that and, famous colleagues as Baire, Borel and Lebesgue opposed to the axiom because it establishes the existence of a certain set without giving an explicit definition of it, something unacceptable in that moment.

Four years later, in 1908, in order to protect his proof of the Well-Ordering Theorem, Zermelo published the first axiomatization of Set Theory, where the axioms that he postulated were in harmony with his proof, among those was AC. Rather than dispelling the controversy of his proof, what happened was that the axiomatization itself was questioned.

It was in 1930 when Zermelo published a new axiomatization that modified the previous one and included the suggestions made by Fraenkel some years ago. This system is really similar to the one used today and it is called Zermelo-Fraenkel (ZF). The Axiom of Choice is not present in it due to the differences in characteristics between it and ZF axioms, despite being considered more and more neccesary, giving rise to ZFC.

In the first chapter we will deal with the study of this last axiomatic system. In spite of being based on first order logic, we will not focus on the logical development of the axioms, but on explaining the possible causes and consequences of including them. We will distinguish between ZF and the Axiom of Choice. As in the last chapter we will asume AD, and this will turn out to be incompatible with AC, it is our intention to develop this work through a system of axioms which does not include AC. It is precisely the study of this one, and his dual character, that will lead us to believe reasonable assuming a weaker version, the Countable Axiom of Choice (CAC), together with ZF since CAC allows us to preserve the applications of AC that we do need. In fact, we will take on the principle of dependent choices, stronger than CAC and necessary to define sequences by induction.

However, one of the characteristics that a system of axioms must have is the consistency, that is, that from them it is impossible to deduce a contradiction. There was a belief that ZF was consistent and for several years a proof is sought. Nevertheless, between 1930 and 1936 Gödel proved that the consistency of ZF cannot be deduced in ZF itself. Therefore, a proof for the consistency of ZF could only come from an stronger system whose consistency would be even harder to believe in. This result poured cold water onto those who believed it would be possible to find a system of axiom from which we could develop the whole mathematics as the consistency of ZF is contingent on experience.

Another problem kept opened. It was the relative consistency of the Axiom of Choice with regard to ZF. In 1924 a well known result was published : Banach-Tarski paradox. This, together with the fact that there existed non measurable sets in the real line, the latter due to Vitali, prompted the idea that the Axiom of Choice drove us to a contradiction. Therefore, the ones who did not believe in it mantained that ZFC was inconsistent. However, again Gödel, in 1935, when he visited the Institute for Advanced Study at Princeton, he informed Von Newmann that he had established that if ZF is consistent, ZFC is consistent, that is, the relative consistency of AC. This result closed a discussion opened for several decades, upholding Zermelo's thoughts. It is in the end of the first chapter where we outline the most important results relative to the consistency of the axiomatic systems that we take on during this work.

The second chapter focuses on establishing previous concepts that are needed for the rest of the work. First of all, we will talk about subbases, the initial topology and the product topology of an arbitrary infinite number of topological spaces. Afterwards, we will equip the set of sequences of natural numbers with the product topology. This space will be called the Baire space. On the other hand, we will introduce Lebesgue measure on the real line and some of its properties, because it is very important during the rest of the work. We will try to build a measure function which generalizes the interval length to every set of real numbers. We will begin by talking about outer measure, after what we will define the measurable sets. Finally, we will talk about some properties that Lebesgue measure holds and that will be used later. In order to carry out this construction we will underline the importance of the Axiom of Choice, as it is the cause of having to differentiate measurable sets from non measurable ones, since Vitali Set is built with the Axiom of Choice. It is important to point out that the results of this chapter are not accompanied with their proofs, with the exception of some of them, either because they are concepts studied during the grade, or because they are results whose detailed proof could tarnish our final goal.

In the third chapter our target will only be the study of analytic sets, which we can define thanks to having equipped the set of sequences of natural numbers with a topology. Despite the fact that we can define analytic sets in a much more general context, as it is the one of Polish spaces, we will do it in $\mathbb{R}$ because this is the space in which we work. We will introduce the geometric concept of tree, that will help us to intuitively interpret some of the definitions that we will give. We will define the notions of Souslin scheme and Souslin operation and we will give them a sense in terms of trees. The Souslin scheme will be identified with analytic sets as every analytic set is the Souslin operation of a certain Souslin scheme of closed sets. Subsequently, we will study the properties of two certain Souslin schemes, defined from other Souslin scheme, that will be really important in order to prove that the family of Lebesgue measurable sets is closed under the Souslin operation. Finally, and as a consequence of this latter statement, we will obtain that every analytic set is Lebesgue measurable.

In the fourth and last chapter we will begin by introducing the indispensable concepts that we need to formally define theAxiom of Determinacy, as it is the one of infinite game. This axiom has its origin in 1962, when two Polish mathematicians, Jan Mycielski and Hugo Steinhaus introduced it as an alternative to the Axiom of Choice after a period of calm, iniciated with Gödel theorems, in which the Axiom of Choice had been fully assumed. Once AD is defined, we will prove that the Countable Axiom of Choice in $\mathbb{R}$ is a consequence of it. This has some consequences. For example, under AD, a real function is continuous if and only if it is sequentially continuous. Afterwards, we will deeply analyze a certain infinite game which we will call "the covering game". We will establish the consequences that may have that one of the two players play with a certain (winning) strategy. Thanks to this, we will be able to prove the main theorem of this work, which is, as we have said before, that under AD every set of real numbers is Lebesgue measurable. This result is due to Mycielski. As a consequence we will have the incompatibility of AD and AC. Finally, we will comment some of the others results that can be obtained by using AD that do not hold true under AC.

It is our desire to highlight that almost all of the definitions and proofs are indexed. In other case, it is a result proposed by the tutor for which we have not found any reference. Historical references have been obtained from [13]. There is a result, Sak's Theorem (3.42), for which we give a slightly different proof to the one present in [8], that allows us to avoid the definition of a set that makes the proof more complicated. Regarding the proofs, the general procedure has been detailing the proofs of the reference books in such a way that we can ease the comprehension of them. Finally, in case that there is no reference or the result is an excercise of a certain book, it is specified whether it has been solved by the author or in collaboration with the tutor.

Índice general

Capítulo 1

Axiomática

A finales del siglo XIX, David Hilbert, afamado matemático alemán, afirmaba que la manera adecuada de desarrollar cualquier teoría científica de manera rigurosa era a partir de una axiomatización. Entre estas teorías estaba la Teoría de Conjuntos, rama de las matemáticas que estudia las "colecciones bien definidas, llamadas **conjuntos**, de objetos a los que llamamos miembros o **elementos**"[1], que a su vez son conjuntos. La Teoría de Conjuntos sirve como fundamento de las matemáticas ya que, a partir de ella se pueden desarrollar formalmente las demás teorías matemáticas y sus diferentes estructuras.

En principio, dados dos conjuntos A y B, lo único que podemos decir sobre ellos es si son iguales, lo cual denotaríamos por $A = B$, o si uno pertenece a otro, lo cual denotaríamos por $A \in B$. Estas afirmaciones pueden ser verdaderas o falsas. Sin embargo, estas dos relaciones que podemos establecer entre dos conjuntos han de satisfacer una serie de axiomas, es decir, unos principios fundamentales e indemostrables, que asumimos ciertos, sobre los que se construye la teoría.

Una vez asumido este sistema de axiomas, el objetivo de la Teoría de Conjuntos es determinar qué afirmaciones sobre los conjuntos son verdaderas (pueden demostrarse siguiendo unos razonamientos lógicos), cuáles son falsas (su negación es verdadera) y cuáles son indecidibles (ni ellas ni sus negaciones se pueden deducir de los axiomas).

En este primer capítulo vamos a comenzar enunciando los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Posteriormente, estableceremos el Axioma de Elección, el cual, unido a Zermelo-Fraenkel constituye el sistema de axiomas más utilizado. Así mismo, comentaremos la dualidad de la presencia del Axioma de Elección en las matemáticas. Finalizaremos el capítulo hablando del concepto de consistencia de un sistema de axiomas. Las referencias utilizadas en este capítulo son [12], [7], [10], [6], [14], [5], [13],[2] y [4].

1.1. Los axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF)

Durante décadas se intentó construir un sistema de axiomas satisfactorio para la Teoría de Conjuntos. Sin embargo, no es hasta 1930 cuando Zermelo publica un sistema muy parecido al utilizado hoy en día, conocido como Zermelo-Fraenkel debido a las contribuciones de este último.

[1] Ver [2].

Antes de enunciar y comentar los axiomas de ZF, enunciamos tres postulados, necesarios para cualquier teoría, que no se consideran axiomas de la Teoría de Conjuntos:

1. Reflexividad de la igualdad. $\forall\, x, y\ (x = y) \Leftrightarrow (y = x)$
2. Transitividad de la igualdad. $\forall\, x, y, z\ (x = y\ \wedge y = z) \Rightarrow (x = z)$
3. Si dos conjuntos son iguales, tienen las mismas propiedades.

Hemos enunciado dos de estos tres postulados en términos de lógica de primer orden. Sin embargo, al no ser nuestro objetivo la lógica de primer orden, no vamos a desarrollar los axiomas en términos de esta. Comenzamos ya a discutirlos:

ZF1: Axioma de Extensionalidad

Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

Este axioma nos proporciona la unicidad de los conjuntos.

ZF2: Axioma de Regularidad.

Para cualquier conjunto no vacío x existe $y \in x$ tal que $x \cap y = \varnothing$.

Nota 1.1. Cabe resaltar que aquí $\varnothing$ y la intersección tan solo representan la no pertenencia de ningún elemento de x en y y viceversa. Más adelante podremos definir tanto $\varnothing$ como la intersección como conjuntos.

Estos dos primeros axiomas constituyen restricciones básicas a la relación de pertenencia. El primero de ellos es bastante intuitivo, mientras que al segundo le ocurre todo lo contrario. Uno puede pensar en un conjunto muy importante, como es, por ejemplo, $\mathbb{N}$, y rápidamente llega a la conclusión de que es imposible que exista algún elemento de $\mathbb{N}$ cuya intersección con $\mathbb{N}$ sea vacía, porque ¿qué sentido tiene que un número natural sea disjunto con $\mathbb{N}$? Esta aparente contradicción en realidad no es tal; está inducida por la manera de pensar en los números naturales. Lo que ocurre es que cuando trabajamos a diario con los números naturales, tratamos a estos como eso, números. Sin embargo, estos aún no han sido definidos, por lo que no sabemos lo que es "1". Cuando se definan, serán conjuntos, con sus correspondientes elementos, lo que hará que no exista contradicción alguna.

Para entender la necesidad de varios de los siguientes axiomas de ZF es necesario hablar de la paradoja más famosa de la Teoría de Conjuntos. No es otra que la **Paradoja de Russell**.

Podría parecer lógico introducir el siguiente axioma en el sistema ZF:

Axioma A.

Dada una propiedad $P(t)$, existe un conjunto x cuyos elementos son precisamente los conjuntos t que cumplen la propiedad.

Sin embargo, este axioma lleva a contradicciones ya que, si consideramos la propiedad $t \notin t$, el Axioma A nos dice que existe el conjunto $x = \{t : t \notin t\}$. Si ahora nos preguntamos si $x \in x$, tenemos dos opciones:

1. Si $x \in x$, x no puede ser elemento de sí mismo, por lo que $x \notin x$.
2. Si $x \notin x$, x es elemento de sí mismo, por lo que $x \in x$

Así pues, $x \in x \Leftrightarrow x \notin x$. Esto es absurdo, por lo que nos vemos obligados a descartar este axioma. La explicación intuitiva reside en que un conjunto debe existir después de sus elementos. Así pues, no tiene sentido preguntarse si $x \in x$ antes de que exista. Esto conlleva la inclusión de otra serie de axiomas que lo sustituyan y eviten contradicciones. En concreto, estos son $ZF3 - ZF7$.

ZF3: Axioma de Separación.

Dado un conjunto A y una propiedad $P(t)$ que los elementos t de A pueden cumplir o no, existe el conjunto $x = \{t \in A : P(t)\}$.

Este axioma es diferente a nuestro Axioma A, puesto que así como en el Axioma A se asume la existencia del conjunto x de manera incondicional, en el Axioma de Separación está supeditada a la existencia previa del conjunto A. Esta diferencia conlleva que si consideramos de nuevo la propiedad $t \notin t$, la cual nos llevaba a contradicción con el Axioma A, en este caso no lo hace, ya que tendríamos el conjunto $x = \{t \in A : t \notin t\}$, el cual veremos que es el propio A.

ZF4: Axioma de Pares.

Dados dos conjuntos x, y, existe el conjunto formado únicamente por x e y, al que denotaremos por $\{x, y\}$.

Nota 1.2. En el caso en el que x e y sean iguales, denotaremos a $\{x, y\} = \{x, x\}$ por $\{x\}$.

Este axioma nos permite definir los pares ordenados $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. A partir de estos definimos el producto cartesiano de dos conjuntos x, y como

$$x \times y := \{(a, b) : a \in x \text{ y } b \in y\}$$

ZF5: Axioma de la Unión.

Dado un conjunto x, existe la unión
$\bigcup x := \{t : \exists\, y \in x : t \in y\}$.

Lo que nos dice este axioma es que dado un conjunto x, podemos encontrar un conjunto cuyos elementos son los elementos de los elementos de x.

Una vez que hemos enunciado ZF4 y ZF5, estamos en condiciones de definir la unión y la intersección de dos conjuntos. En efecto, dados a, b conjuntos, definimos $a \cup b := \bigcup\{a, b\}$. Esta definición está justificada porque $x \in \bigcup\{a,b\} \iff \exists\, y \in \{a,b\}$ tal que $x \in y$. Basta notar ahora que los únicos elementos de $\{a,b\}$ son a y b. Así, $x \in \bigcup\{a,b\} \iff (x \in a) \vee (x \in b)$. Tener definida la unión de dos conjuntos nos da pie a definir la intersección de la siguiente manera: $a \cap b := \{x \in a \cup b : (x \in a) \wedge (x \in b)\}$. [2]

Proposición 1.3. *(De [6], pág. 95) Ningún conjunto puede ser elemento de sí mismo.*

Demostración. Sea x conjunto. Por el Axioma de Pares (ZF4), existe el conjunto $\{x\}$. Por el Axioma de Regularidad (ZF2), existe un elemento de $\{x\}$ que es disjunto con $\{x\}$. Ahora bien, como el único elemento de $\{x\}$ es x, $x \cap \{x\} = \varnothing$, lo que implica que el único elemento de $\{x\}$, x, no está en el otro conjunto de la intersección, x, es decir, $x \notin x$. $\square$

De aquí deducimos que el conjunto $x = \{t \in A : t \notin t\}$, considerado tras el Axioma de Separación, es, en efecto, el propio A. Del mismo modo, si consideramos el conjunto $x = \{t \in A : t \in t\}$, no tiene elementos. Será denotado por $\varnothing$.

Definición 1.4. Dados dos conjuntos x, y, diremos que y está **contenido** en x o y es un **subconjunto** de x si $\forall\, z \in y \Rightarrow z \in x$. En tal caso, escribiremos $y \subseteq x$.

ZF6: Axioma de las Partes.

Dado un conjunto x, existe el conjunto $\mathcal{P}(x) := \{y : y \subseteq x\}$.

Así pues, el conjunto $\mathcal{P}(x)$, al que llamaremos "**partes de x**", está formado por los subconjuntos de x.

ZF7: Axioma de Reemplazamiento.

Si x es un conjunto y $F(t)$ una función que permite asignar a cada elemento $t \in x$ un conjunto $F(t)$, entonces existe el conjunto $\{F(t) : t \in x\}$.

Cabe resaltar que a partir de todos los axiomas expuestos hasta el momento no es posible deducir la existencia de ningún conjunto debido a que, en un universo vacío se satisfarían todos ellos debido a que su enunciado formal comienza por "para todo".

Para resolver esto, bastaría incluir un axioma que afirmara la existencia de un conjunto, como puede ser el siguiente:

[2] Ver [6], pág. 85.

Axioma B.

$$\exists\, x : x = x.$$

Sin embargo, incluso así no podríamos demostrar la existencia de conjuntos infinitos. Tomamos el conjunto $\varnothing$ y, usando ZF4, construimos $\{\varnothing\}$. Llamaremos 1 a la unión de $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$. Así, $1 = \varnothing \cup \{\varnothing\}$. Es claro que $1 = \{\varnothing\}$. Del mismo modo, definimos $2 := 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, 1\}$. De manera general, dado n conjunto, definimos "sucesor de n": $\boldsymbol{s(n) := n \cup \{n\} = \{\varnothing, \dots, n\}}$. Denotaremos $s(n)$ como $\boldsymbol{n+1}$. Sin embargo, no tenemos garantizada la existencia del conjunto que los contenga a todos ellos, es decir, $\mathbb{N}$. Esto es precisamente lo que nos proporciona el siguiente axioma, ya que afirma la existencia de un conjunto infinito, lo cual soluciona también el problema de que ningún axioma de los anteriores nos proporcione la existencia de un conjunto.

ZF8: Axioma del Infinito.

Existe un conjunto x tal que

- $\varnothing \in x$
- $\forall\, n : n \in x \Rightarrow s(n) \in x$

Nota 1.5. La intersección de los conjuntos x que satisfacen el Axioma del Infinito también es un conjunto que lo satisface. Esto nos permite definir $\mathbb{N}$ como el menor conjunto que cumple ZF8.

Nota 1.6. ZF4 puede ser deducido a partir de ZF1, ZF3, ZF6 y ZF7.

En efecto, dados x e y conjuntos, consideramos el conjunto $\{y \in x : y \neq y\}$ (por ZF3). Este conjunto es el vacío $\varnothing$. Aplicamos ahora ZF6 y obtenemos $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\} = 1$. De nuevo, por ZF6, $\mathcal{P}(1) = \{\varnothing, 1\} = 2$. Así, ya tenemos un conjunto con dos elementos. Definimos ahora una función de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ccc} \varnothing & \mapsto & x \\ 1 & \mapsto & y \end{array}$$

Basta usar ahora ZF7 y tenemos que existe el conjunto $\{F(t) : t \in 2\} = \{x, y\}$.

Sin embargo, ZF4 se incluye por motivos didácticos, ya que permite clarificar la comprensión de los axiomas.

1.2. El Axioma de Elección (AC)

Pasamos ahora a hablar del Axioma de Elección, un axioma clave en la Teoría de Conjuntos. En la primera axiomatización de esta, también llevada a cabo por Zermelo, en 1908, este aparecía dentro de los axiomas que postuló. Sin embargo, en el sistema ZF, formulado en 1930, fue excluido debido a las diferencias existentes entre el resto de axiomas y él.

Definición 1.7. (De [7], pág. 47) Si S es una familia de conjuntos no vacíos, una función de elección para S es una función $f : S \to \bigcup S$ tal que

$$f(X) \in X \quad \forall X \in S$$

Axioma de Elección (AC).

Toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

Nota 1.8. Dado que el producto cartesiano de una familia de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$ se define como $\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \to \bigcup\{X_i : i \in I\} : f(i) \in X_i \ \forall \ i \in I\}$ [3], tenemos que el Axioma de Elección es equivalente a que, dada una familia de conjuntos no vacíos, el producto cartesiano es no vacío.

Sin embargo, cuando hablamos de una familia finita de conjuntos no vacíos, la existencia de una función de elección es consecuencia de ZF:

Proposición 1.9. *Sea S familia finita de conjuntos no vacía. Entonces, S tiene una función de elección.*

Demostración. Supongamos que S tiene un único conjunto. Al ser este no vacío tenemos ya una función de elección. Basta ahora proceder por inducción. [4] □

El Axioma de Elección fue formulado por Zermelo en 1904 cuando buscaba una prueba de que todo conjunto puede ser bien ordenado. Fue rechazado de manera tajante por aquellos matemáticos que identificaban la existencia de un objeto matemático con su construcción mediante una regla, puesto que AC postula la existencia de un conjunto sin dar definición alguna de este. Por otro lado, a partir de él se obtienen resultados bastante contraintuitivos, como son la Paradoja de Banach-Tarski y la existencia de conjuntos no medibles Lebesgue. Sin embargo, hoy en día es aceptado por la mayoría de los matemáticos y es necesario a la hora de obtener resultados importantes en Álgebra, Análisis, Topología...

1.2.1. Dualidad de AC

Otra característica del Axioma de Elección es que posee un carácter dual: su presencia en Matemáticas se ve claramente dividida en dos papeles. En primer lugar, hay resultados para los cuales AC es necesario tal y como se acaba de enunciar:

Teorema 1.10 (Lema de Zorn). *Si $(P, <)$ es un conjunto parcialmente ordenado tal que todo subconjunto suyo totalmente ordenado tiene una cota superior, entonces P tiene un elemento maximal.*

[3] Ver [4], pág. 158.

[4] El principio de inducción se deduce de ZF. Ver [7], ejercicio 1.9.

Demostración. Para una prueba, ver [10], págs. 161-162. □

Ahora bien, también se cumple el recíproco, lo cual deriva en lo siguiente:

Teorema 1.11. *El lema de Zorn es equivalente al Axioma de Elección.*

Demostración. Para una prueba, ver [10], pág. 162. □

Es gracias al lema de Zorn que podemos obtener resultados tan importantes en Matemáticas como son los siguientes:

- Todo espacio vectorial tiene un base.
- Teorema de Hahn-Banach.
- Teorema de Tichonoff sobre compactos.
- Todo cuerpo tiene una única clausura algebraica.

Así mismo, de la existencia de una función de elección para una familia arbitraria de conjuntos no vacíos se derivan los resultados contraintuitivos de los que hemos hablado:

Teorema 1.12. *(De [3], págs. 109-110) Existen conjuntos no medibles Lebesgue en* $\mathbb{R}$.

Teorema 1.13 (Paradoja de Banach-Tarski)**.** *(De [6], pág. 116) Sea* S *la bola unidad en* $\mathbb{R}^3$. S *puede ser particionada en un número finito de subconjuntos tales que, movidos mediante traslaciones y rotaciones, producen dos bolas unidad.*

Así como el Axioma de Elección se usa para probar ciertos resultados muy importantes, como son los anteriores, existen otro tipo de resultados, pertenecientes sobre todo al Análisis Real y a la Teoría de la Medida para los cuales es suficiente una versión más débil de él:

Axioma Numerable de Elección (CAC).

Toda familia numerable de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

Nota 1.14. Un conjunto S es numerable si existe una aplicación inyectiva $f : S \to \mathbb{N}$. Todo conjunto finito, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ y el producto cartesiano finito de conjuntos numerables son numerables. [5]

Antes de que Zermelo enunciara el Axioma de Elección, este ya había sido usado en diversas pruebas de manera implícita en su versión numerable, debido a que en su versión numerable es más complicada la identificación de su uso. A modo de ejemplo, vamos a demostrar un resultado muy conocido para el que se dio este tipo de situación.

[5] Ver capítulo 4 de [9].

Teorema 1.15. *(De [14], pág. 163) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es continua si y solo si es continua por sucesiones, es decir, si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$ se cumple que $f(x_n) \to f(x)$.*

En concreto, CAC es necesario para probar que la continuidad por sucesiones implica la continuidad:

Proposición 1.16. *(De [14], pág. 163) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua por sucesiones. Entonces, f es continua.*

Demostración. Supongamos que f no es continua en a. Por tanto, existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in B(a, \delta)$ tal que $f(x) \notin B(f(a), \epsilon)$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir $x_n \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ tal que $f(x_n) \notin B(f(a), \epsilon)$. Hemos construido una sucesión que converge a a cuya imagen no converge a $f(a)$. Esto es una contradicción, por lo que f es continua en a. □

Notemos que el Axioma Numerable de Elección está siendo usado en el momento en el que se dice "podemos elegir x_n tal que...", puesto que tenemos la familia numerable de conjuntos no vacíos $\mathcal{F}_n = \{x : x \in (a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) \text{ y } f(x) \notin B(f(a), \epsilon)\}$, la cual posee una función de elección que nos permite "elegir x_n tal que...".

Otro resultado muy conocido en el que también es necesario el uso de CAC es el siguiente:

Proposición 1.17. *La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

Demostración. Para consultar una prueba, ver [13], pág. 9. □

1.3. Una alternativa a AC

Como sabemos, el objetivo de este trabajo es probar que, bajo la asunción del Axioma de Determinación (AD), todo subconjunto de números reales es medible Lebesgue. Esto lleva a preguntarse bajo qué marco axiomático vamos a trabajar ya que, a priori, desconocemos por completo la compatibilidad del sistema ZFC con AD. Esto lo resolveremos en el último capítulo, donde veremos que AD es incompatible con AC. Así pues, queda descartado asumir ZFC a lo largo de este trabajo.

Por otro lado, como veremos en el último capítulo, en el contexto de los números reales el Axioma Numerable de Elección es consecuencia del Axioma de Determinación. Podríamos entonces adoptar ZF+CAC, porque esto nos permitiría utilizar resultados relativos a conjuntos numerables que, sin este axioma, no sería posible usar, como hemos visto en la sección anterior.

Sin embargo, en lugar de CAC, vamos a considerar otro axioma más fuerte que este y consecuencia de AC, llamado Principio de Elecciones Dependientes, necesario para definir sucesiones de manera inductiva.

Definición 1.18. (De [7], pág. 10) Dados dos conjuntos A, B, una relacion binaria R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Así, si $(a, b) \in R$, diremos que aRb.

Principio de Elecciones Dependientes (DC).

Sea E una relación binaria en un conjunto no vacío A. Si para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $b\,E\,a$, entonces existe una sucesión $(a_0, a_1, \ldots)$ de elementos de A tal que $a_{n+1}\,E\,a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.19. *(Ejercicio 5.7 de [7]. En colaboración con el tutor) El Principio de Elecciones Dependientes implica el Axioma Numerable de Elección.*

Demostración. Sea $S = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ familia numerable de conjuntos no vacíos. Sea

$$A = \{ \text{ funciones de elección para algún } S_n \}$$

donde $S_n = \{A_i : i \leq n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideramos también la relación binaria $\supsetneq$.

Sea ahora $f \in A$ (existe porque estamos en el caso finito). ¿Existe $g \in A$ tal que $g \supsetneq f$? (Cuando decimos que una función contiene otra nos estamos refiriendo a que una es una extensión de la otra).

Como $f \in A$, f es una función de elección en un cierto S_{n_0}. Por otro lado, como S es una familia de subconjuntos no vacíos, existe $x \in A_{n_0+1}$. Defino ahora g de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccc} g & : & S_{n_0+1} & \to & \cup S_{n_0+1} \\ & & A_1 & \mapsto & f(A_1) \\ & & A_2 & \mapsto & f(A_2) \\ & & \vdots & \mapsto & \vdots \\ & & A_{n_0} & \mapsto & f(A_{n_0}) \\ & & A_{n_0+1} & \mapsto & x \end{array}$$

Así, tenemos g función de elección tal que $g \supsetneq f$. Ahora, por hipótesis, existe sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $f_0 \subsetneq f_1 \subsetneq \ldots \subsetneq f_n \subsetneq \ldots$ Sea ahora

$$\begin{array}{rcccc} F & : & S & \to & \cup S \\ & & A_n & \mapsto & f_n(A_n) \end{array}$$

F es una función de elección porque, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que f_n es una función de elección de S_m con $m \geq n$. $\square$

Proposición 1.20. *(De [14], pág. 243) El Axioma de Elección implica el Principio de Elecciones Dependientes.*

Demostración. Sea R relación binaria en un conjunto no vacío A. Supongamos que para todo $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $b\,R\,a$. Veamos que existe una sucesión $(a_0, a_1, \ldots)$ de elementos de A tal que $a_{n+1}\,R\,a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideramos ahora, para todo $x \in A$ el conjunto

$$R(x) = \{y \in A : yRx\}$$

Tenemos, pues, una familia de conjuntos $T := (R(x))_{x \in A}$ no vacíos. Ahora, por hipótesis, existe

$$\begin{array}{rccc} F & : & T & \to & \cup T \\ & & R(x) & \mapsto & F(R(x)) \in R(x) \end{array}$$

Esto nos permite construir la función

$$\begin{array}{rcccccc} f & : & A & \to & T & \to & \cup T \\ & & x & \mapsto & R(x) & \mapsto & F(R(x)) \in R(x) \end{array}$$

Sea ahora, para todo $x \in A$, la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. Gracias a que F es una función de elección se cumple que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x)) \in R(f^n(x))$, por lo que $f^{n+1}(x) R f^n(x)$. □

Así pues, a lo largo de este trabajo asumiremos el sistema de axiomas **ZF+DC**.

1.4. Consistencia

Ahora bien, una vez establecido un sistema de axiomas, ¿cómo sabemos que no engloba contradicciones? ¿Cómo sabemos que no nos va a llevar a un absurdo? Esta es una cuestión abierta también durante décadas, en lo que se refiere al sistema de axiomas de la Teoría de Conjuntos, y brillantemente resuelta por Gödel.

Definición 1.21. Dado un sistema de axiomas, si de ellos no se deriva ninguna contradicción, diremos que es **consistente**.

Como hemos comentado, Gödel puso fin al debate sobre la consistencia de ZF y de ZFC. Más concretamente, probó los siguientes teoremas:

Teorema 1.22. *(De [5], pág. 45) Bajo ZF, es imposible demostrar que ZF sea consistente.*

Teorema 1.23. *(De [5] pág. 99) Si ZF es consistente, entonces ZFC es consistente.*

El primero de estos resultados supuso un fracaso para la comunidad matemática porque limita el debate de la consistencia de ZF al empirismo. El segundo de ellos cerró el debate abierto sobre el Axioma de Elección. Muchos matemáticos seguían creyendo que este axioma llevaría a contradicciones. Sin embargo, la consistencia de ZFC es equivalente a la de ZF. Y la consistencia de ZF, pese a no poderse probar, es aceptada. Así pues, la de ZFC habría de serlo también.

Si introducimos en el debate de la consistencia el exioma de determinación, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1.24. *Si ZF es consistente, no se puede demostrar que ZF+DC+AD sea consistente.*

Nota 1.25. La prueba de este teorema es consecuencia del teorema 33.27, del teorema 12.12 y de la definición 20.31 de [7].

Podríamos decir, en definitiva, que para asumir ZF+DC+AD es necesaria una mayor convicción que para asumir ZF o ZFC. A modo de resumen, tenemos el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\text{Consistencia } ZF \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow, shift left, "?"] & \text{Consistencia } ZFC \\
\text{Consistencia } ZF + DC + AD \arrow[u, Rightarrow, shift left] &
\end{tikzcd}
$$

Capítulo 2

Conceptos previos

En este capítulo vamos a hablar de dos temas necesarios para desarrollar el trabajo: el conjunto de las sucesiones de números naturales, dotado de la topología producto, y la medida de Lebesgue en el conjunto de los números reales.

A lo largo de este capítulo cada resultado va acompañado de una referencia al lugar donde se puede consulta su prueba, puesto que no esta no se da. Esto se debe a que las nociones aquí tratadas, o ya han sido vistas durante el grado, o bien consideramos que su demostración detallada puede empañar el objetivo al que nos dirigimos. No obstante, hay algunas excepciones presentes al final del capítulo. Esto se debe a que son resultados propuestos por el tutor respecto de los cuales no hemos encontrado una referencia bibliográfica a la que remitir al lector.

2.1. Topología y el espacio de Baire

El objetivo de esta primera parte del capítulo es dotar al conjunto de las sucesiones de números naturales, usualmente denotado por $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, de la topología producto. Para ello es necesario introducir la topología producto de una cantidad infinita de espacios topológicos. A lo largo de esta sección trataremos con productos cartesianos, por lo que, debido a que no asumimos AC, no tenemos garantizado que el producto cartesiano de una familia de conjuntos no vacíos sea no vacío, como podemos ver en 1.8. Sin embargo, esto no va a suponer ningún problema, puesto que particularizaremos en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, es decir, trabajaremos con un producto cartesiano numerable, y las propiedades que necesitamos de los productos numerables son demostrables en ZF+DC. A lo largo de esta sección hemos usado como referencia principal [4], aunque puntualmente usamos también [11] y [1]. Comenzamos pues, recordando el concepto de base de un espacio topológico, el cual dará pie a introducir el de subbase.

2.1.1. Subbase de un espacio topológico

Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, es interesante obtener una cierta familia de abiertos (elementos de $\mathcal{T}$) que nos permita conocer el resto de la topología. Esto es conocido como base de la topología $\mathcal{T}$.

Definición 2.1. (De [4], pág. 6) Dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, diremos que una familia β de conjuntos abiertos de $(X, \mathcal{T})$ es una **base** de $(X, \mathcal{T})$ si todo conjunto abierto es unión de elementos de la base β, es decir, si para todo $O \in \mathcal{T}$ existe un conjunto de índices I tal que

$$O = \bigcup_{i \in I} B_i, \ B_i \in \beta$$

A continuación damos una caracterización de las bases muy utilizada:

Proposición 2.2. *Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y β una familia de abiertos. Entonces, β es una base de $\mathcal{T}$ si y solo si para todo $O \in \mathcal{T}$ y para todo $x \in O$ existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subseteq O$.*

Demostración. Se puede consultar en [4] pág. 6. □

De manera análoga nos planteamos la siguiente pregunta:

Dado X conjunto sin estructura de espacio topológico y dada S una familia de subconjuntos de X, ¿qué tiene que cumplir S para ser base de alguna topología en X? La respuesta la da el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Sea X un conjunto y sea β una familia de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. $X = \bigcup_{B \in \beta} B$.
2. *Para todo $B_1, B_2 \in \beta$ y para todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Entonces existe una única topología $\mathcal{T}$ en X que tiene como base a β.

Demostración. Se puede consultar en [4], pág. 9. □

Sin embargo, el concepto de base no es la única manera de conocer una cierta topología mediante una cierta familia de abiertos. Es posible hacer esto con un número menor de abiertos que el usado en una base, gracias a las subbases.

Definición 2.4. (De [4], pág. 20) Dado $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico, una familia S de subconjuntos abiertos se llama **subbase** de $\mathcal{T}$ si

$$\beta(S) = \left\{ \bigcap_{j \in J} B_j \ : B_j \in S \ \forall j \in J, J \text{ finito} \right\}$$

es una base de $\mathcal{T}$.

Por tanto, dada S subbase de $\mathcal{T}$, tenemos que

$$\mathcal{T} = \left\{ \bigcup_{i \in I} \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) : B_j \in S \ \forall j \in J, J \text{finito} \right\}$$

Nota 2.5. Notar que toda base es una subbase, ya que, por definición de espacio topológico, la intersección finita de abiertos es abierto y una familia de abiertos que contiene a una base de $\mathcal{T}$ es una base de $\mathcal{T}$. [1]

Nos planteamos ahora la pregunta análoga a la que nos hicimos con las bases. Dado X conjunto y dada S una familia de subconjuntos de X, ¿qué tiene que cumplir S para ser subbase de alguna topología en X? La respuesta es similar, aunque en este caso no hay que imponer ningún requisito.

Proposición 2.6. *Sea X conjunto y S familia de subconjuntos de X. Entonces, existe una única topología $\mathcal{T}$ en X para la que S es una subbase.*

Demostración. Se puede consultar en [4], pág. 21. □

2.1.2. Topología inicial

Una vez establecidos estos conceptos, introducimos la topología inicial, clave a la hora de definir la topología producto de un número arbitrario de espacios topológicos, ya que esta es un caso particular de la inicial.

Para motivar la definición de la topología inicial vamos a recordar cómo se define la topología producto de dos espacios topológicos y a dar una propiedad suya.

Definición 2.7. (De [11]) Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ dos espacios topológicos. La topología producto sobre $X_1 \times X_2$ es la topología que tiene como base la colección β de todos los subconjuntos de $X_1 \times X_2$ de la forma $U \times V$, donde $U \subseteq X_1$ es abierto en X_1 y $V \subseteq X_2$ es abierto en X_2 . Se denota por $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.

Proposición 2.8. *Sean $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ espacios topológicos y sean $\{p_i : i = 1, 2\}$ las proyecciones. Entonces:*

1. *El conjunto $\mathcal{S} = \{p_i^{-1}(O_i) : O_i \in \mathcal{T}_i, \ i = 1, 2\}$ es una subbase de $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$.*
2. *La topología producto $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ es la topología menos fina en $X_1 \times X_2$ que hace continuas a las proyecciones.*

Demostración. La demostración se puede consultar en [4], pág. 156. □

Definimos ahora la topología inicial generalizando lo que cumple la topología producto en la proposición anterior.

Definición 2.9. (De [4], pág. 156) Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos y X conjunto. Dada una familia de aplicaciones $\{f_i : X \to X_i : i \in I\}$, se llama **topología inicial** en X inducida por $\{f_i : i \in I\}$ a la topología en X que tiene como subbase

$$S = \{f_i^{-1}(O_i) : O_i \in \mathcal{T}_i, \ i \in I\}$$

Denotamos entonces a la topología inicial por $\mathcal{T}(f_i)$.

[1] Para una prueba completa, consultar [4], pág. 20.

Nota 2.10. De aquí deducimos que las aplicaciones

$$f_i : (X_i, \mathcal{T}(f_i)) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$$

son continuas, pues los elementos de S son abiertos en $\mathcal{T}(f_i)$.

Definición 2.11. (De [4], pág. 159) Sea $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ una familia de espacios topológicos. Se llama **topología producto** en $\prod_{i\in I} X_i$ a la topología inicial para la familia de las proyecciones $\{p_i : i \in I\}$.

Por definición, una subbase de la topología producto es

$$S = \{p_i^{-1}(O_i) : \ O_i \in \mathcal{T}_i, \ i \in I\}$$

Así pues, una base es

$$\beta = \left\{p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k}) : \ O_{i_j} \in \mathcal{T}_{i_j}, \ i_j \in I, \ k \in \mathbb{N}\right\}$$

Por otro lado,

$$p_{i_j}^{-1}(O_{i_j}) = \prod_{i\in I} G_i \text{ con } G_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \neq i_j \\ O_{i_j} & \text{if } i = i_j \end{cases}$$

Por tanto,

$$p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k}) = \prod_{i\in I} O_i \text{ con } O_i = \begin{cases} X_i & \text{if } i \neq i_j \\ O_{i_j} & \text{if } i = i_j \end{cases}$$

Concluimos que

$$\beta = \left\{\prod_{i\in I} O_i : \ O_i \in \mathcal{T}_i \text{ y } O_i = X_i \text{ excepto un n}^{\text{o}} \text{ finito de índices}\right\}$$

es una base de la topología producto.

De hecho, como dentro de cualquier abierto podemos meter uno básico, por la proposición 2.2, otra base es

$$\prod_{i\in I} \beta_i = \left\{\prod_{i\in I} B_i : \ B_i \in \beta_i, \ B_j = X_j \text{ si } j \notin J, \ J \subset I, \ J \text{ finito}\right\}$$

donde β_i es base de $\mathcal{T}_i$ para todo $i \in I$.

2.1.3. El espacio de Baire

Consideramos ahora el conjunto $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, es decir, el conjunto de las sucesiones de números naturales. Podemos entonces aplicarle la topología producto, donde dotamos a $\mathbb{N}$ de la topología discreta. Este espacio será conocido como espacio de Baire y lo denotaremos como $\mathcal{N}$. Una base del espacio $\mathcal{N}$ es

$$\left\{\prod_{n\in\mathbb{N}} m_n : m_n \in \beta_n,\ m_n = \mathbb{N} \text{ si } n \notin J,\ J \subset \mathbb{N},\ J \text{ finito}\right\}$$

donde $\beta_n = \{\{m\} : m \in \mathbb{N}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ya que una base en la topología discreta es el conjunto formado por los conjuntos unipuntuales del espacio. Sin embargo, esta base podemos convertirla en otra más cómoda:

$$\left\{\prod_{n\in\mathbb{N}} m_n : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ m_n \in \beta_n\ \forall n \leq k \text{ y } m_n = \mathbb{N}\ \forall n > k\right\}$$

Para ello, basta tomar el mayor $n_0 \in \mathbb{N}$ con $m_{n_0} \in \mathbb{N}$ y para todos los $s \leq n_0$ con $m_s = \mathbb{N}$ colocar un número natural en ese lugar, ya que son elementos de la base. Este conjunto lo podemos escribir de una manera más visual como

$$\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists\, k \in \mathbb{N} :\ a_i \text{ fijo } \forall i \leq k\}$$

De esta forma, un elemento de la base, es decir, un **abierto básico**, es el conjunto de sucesiones de números naturales cuyas primeras k coordenadas, con k fijo, coinciden. Así, dado $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, un **entorno básico** de x es el conjunto de sucesiones que comparten los primeros m elementos de x, para un cierto $m \in \mathbb{N}$ fijo.

Pasamos ahora a ver un par de propiedades sobre continuidad y convergencia en $\mathcal{N}$, que serán usadas posteriormente:

Proposición 2.12. *(Resuelto por el autor) Sea $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$. Entonces, f es continua en $b \in \mathcal{N}$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si la sucesión b y una cierta sucesión b' coinciden en los primeros m términos, entonces $|f(b) - f(b')| < \epsilon$*

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$

Sea $\epsilon > 0$. Al ser f continua, existe $V \in \mathcal{E}(b)$ tal que $f(V) \subseteq B(f(b), \epsilon)$ [2]. Podemos tomar V básico sin pérdida de generalidad, gracias a la proposición 2.2. Como acabamos de ver, un entorno básico de b está formado por las sucesiones para las cuales existe $m \in \mathbb{N}$ (fijo) de modo que comparten los primeros m elementos de x. Este m es precisamente el que buscábamos.

$\boxed{\Leftarrow}$

Sea $U = B(f(b), \epsilon) \in \mathcal{E}(f(b))$. Por hipótesis, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de manera que toda sucesión de números naturales que comparta los primeros m_0 elementos de b tiene su imagen contenida en $B(f(b), \epsilon)$. Si denotamos por V al conjunto formado por estas sucesiones, tenemos que V es un abierto básico de b por la caracterización que hemos visto anteriormente de ellos. Así, tenemos un entorno V de b para el cual $f(V) \subseteq B(f(b), \epsilon)$. Hemos probado que f es continua en b. □

[2]Ver [1] pág. 118

Proposición 2.13. *(Resuelto por el autor) Sea $y \in \mathcal{N}$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de elementos de $\mathcal{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, y_n comparte los primeros n elementos con y. Entonces, $y_n \longrightarrow y$.*

Demostración. Sabemos que $y_n \longrightarrow y$ si y solo si para todo $U \in \mathcal{E}(y)$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $y_n \in U$ [3]. Veamos esto último.

Sea $U \in \mathcal{E}(y)$. Sin pérdida de generalidad podemos tomarlo básico, de manera que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que un elemento x de $\mathcal{N}$ pertenece a U si y solo si comparte con y los primeros m_0 elementos. Por hipótesis, y_n comparte los primeros n elementos con y para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto quiere decir que a partir del término m_0, y_n comparte los primeros m_0 términos con y, es decir, para todo $n \geq m_0$, $y_n \in U$. $\square$

2.2. Medida de Lebesgue en la recta real

La medida de Lebesgue juega un papel importante en este trabajo porque los principales resultados que se demuestran están relacionados con ella. Más concretamente, con la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Es por ello que en esta sección vamos a desarrollar una construcción clásica de esta medida en $\mathbb{R}$. Cabe resaltar que, como veremos, la definición de conjunto medible está motivada por el Axioma de Elección, pero el resto de resultados de esta sección son válidos también en ZF+DC. Así pues, cuando, al final del trabajo, probemos que todo conjunto de números reales es medible bajo AD, habremos probado que, usando el sistema de axiomas ZF+DC+AD, la distinción entre conjuntos medibles y no medibles no es necesaria. A lo largo de esta sección los libros de referencia son [3] y [15], con alguna referencia puntual a [14].

2.2.1. Introducción

Sabemos que la longitud $\mu(I)$ de un intervalo I es la diferencia en valor absoluto de sus extremos, sin importar si es abierto, cerrado o semiabierto. Esta función μ nos permite asignar a cada intervalo de números reales un número no negativo de la recta real extendida que representa su tamaño. Surge ahora una pregunta de manera natural: ¿podemos extender esta noción a todo subconjunto de $\mathbb{R}$? ¿Existe una función que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ le hace corresponder su tamaño? En caso de existir, una condición necesaria para que esta definición fuera consistente sería que a cada intervalo le asignara su longitud.

Por otro lado, la longitud de los intervalos cumple ciertas propiedades que serían deseables de extender a todo subconjunto de números reales, como son la invarianza por traslaciones y el hecho de que dados dos intervalos disjuntos cuya unión es un intervalo, la longitud de su unión es la suma de las longitudes de los intervalos.

Desafortunadamente, la generalización de la función longitud a todo subconjunto de $\mathbb{R}$ de manera que se satisfaga todo lo anterior no es posible en ZFC. Sin embargo, sí lo es para una mayoría de los subconjuntos de $\mathbb{R}$, a los que llamaremos medibles Lebesgue y que formarán una σ-álgebra.

[3] Ver [1] pág. 62

2.2.2. Medida exterior

Una posible manera de determinar el tamaño de un conjunto de números reales es la de considerar todas las familias numerables de intervalos abiertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cuya unión cubren al conjunto y para cada una de estas familias considerar la suma de las longitudes de los intervalos de cada familia. Se define, entonces, una función que a cada subconjunto de $\mathbb{R}$ le asigna el ínfimo de estas sumas. Formalmente:

Definición 2.14. (De [3], pág. 87). Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Se define la **medida exterior** (de Lebesgue) de A, a la que denotamos por $\mu^*(A)$, mediante la fórmula

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=0}^{\infty} \mu(I_n) : A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n\}$$

donde $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de intervalos abiertos.

Nota 2.15. Esta definición nos proporciona una función $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$

Nota 2.16. Como todo número real a puede ser cubierto por $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$, tenemos que para todo $a \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$, $\mu^*(a) < \epsilon$, es decir, $\mu^*(a) = 0$.

De manera inmediata tenemos las siguientes propiedades:

Teorema 2.17. *Si μ^* es la medida exterior, entonces:*

1. *μ^* es monótona creciente en el sentido de que $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.*
2. *$\mu^*(\varnothing) = 0$*

Demostración. Se puede consultar en [3], pág. 88. □

Como podemos comprobar mediante la siguiente proposición, la medida exterior satisface una de las principales propiedades necesarias para medir de manera adecuada el tamaño de los subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.18. *$\mu^*(I) = \mu(I)$ para todo intervalo acotado I de $\mathbb{R}$.*

Demostración. Se puede consultar en [15], pág. 56. □

De hecho, la medida exterior también satisface la invarianza por traslaciones:

Proposición 2.19. *$\mu^*(A + c) = \mu^*(A)$ para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Se puede consultar en [3], pág. 90. □

Una propiedad muy importante que cumple la medida exterior es que es numerablemente subaditiva:

Proposición 2.20.

$$\mu^*(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$$

para toda sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}$.

Demostración. Se puede consultar en [15], pág. 57. □

Nota 2.21. De aquí se deduce que todo conjunto numerable A cumple que $\mu^*(A) = 0$.

Introducimos ahora una clase de conjuntos muy importantes en la Teoría de la Medida. Estos son los conjuntos de medida nula:

Definición 2.22. (De [3], pág. 87). Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene **medida nula** si para todo $\epsilon > 0$ existe una sucesión $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de intervalos abiertos tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} I_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mu(I_n) < \epsilon$$

En otras palabras, un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene medida nula si puede ser cubierto por una sucesión de intervalos abiertos cuya suma de longitudes es arbitrariamente pequeña. Esto equivale a decir que todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de medida nula cumple que $\mu^*(A) = 0$.

Proposición 2.23. *La unión numerable de conjuntos de medida nula tiene medida nula.*

Demostración. Se puede consultar en [14], pág. 163. □

Nota 2.24. Cabe resaltar que en esta prueba es necesario el uso del Axioma Numerable de Elección a la hora de elegir los intervalos que cubren al conjunto. Este resultado, por tanto, entra dentro de los resultados que siguen siendo ciertos bajo ZF+DC.

Como comentamos en la introducción, sería deseable que la medida exterior fuera aditiva, es decir, que dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$ con $A \cap B = \varnothing$ tuviéramos que

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

Sin embargo, esto no se cumple. Un ejemplo de ello es el conjunto de Vitali [4]. Es en este lugar donde se está usando el Axioma de Elección, puesto que este es necesario para construir el conjunto de Vitali.

2.2.3. Conjuntos medibles

El hecho de que la medida exterior no sea aditiva nos lleva a restringirnos a ciertos conjuntos donde sí se "comporta bien", a los que llamaremos conjuntos medibles Lebesgue. Como para construir el conjunto de Vitali es necesario el Axioma de Elección, esta distinción no será necesaria bajo AD.

[4] Ver págs. 109 y 110 de [3]

Definición 2.25. (De [3], pág. 93). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ se dice **medible (Lebesgue)** si para todo $B \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

Nota 2.26. Como $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^{\mathsf{C}})$, siempre se tiene

$$\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

gracias a la subaditividad. Por tanto, para ver que un conjunto A es medible, basta probar la otra desigualdad.

Nota 2.27. La familia de los conjuntos medibles Lebesgue será denotada por $\mathcal{M}$.

2.2.4. Propiedades

Pasamos ahora a enunciar propiedades de los conjuntos medibles y de la medida de Lebesgue.

Proposición 2.28. *Si μ^* es la medida exterior, entonces:*

1. *Para todo $c \in \mathbb{R}$, el intervalo $(-\infty, c)$ es medible.*
2. *Si un conjunto A es medible, también lo es su complementario.*
3. *Todo conjunto de medida nula es medible.*
4. *Si un conjunto A es medible, también lo es $E + c$ y cE para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Se puede consultar en [3], pág. 93. □

Definición 2.29. (De [3], pág. 101) Sea X un conjunto. Una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X se llama ***σ*-álgebra** si:

1. $\varnothing \in \mathcal{S}$.
2. $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^{\mathsf{C}} \in \mathcal{S}$.
3. Si $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{S}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{S}$.

Veamos que la familia de los conjuntos medibles Lebesgue $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra: El apartado 2 de la proposición 2.28 nos da la segunda condición. Como el vacío es un conjunto de medida nula, gracias al apartado 3 de la proposición 2.28, este pertenece a $\mathcal{M}$. Basta ver que la unión numerable de conjuntos medibles es medible. Ahora bien, esto se obtiene del siguiente teorema:

Teorema 2.30. *Dada $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de conjuntos medibles, consideramos*

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \qquad F = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n$$

Entonces, E y F son medibles, es decir, la unión numerable y la intersección numerable de conjuntos medibles son medibles. Si, además, los E_n son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu^*(A \cap E) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n)$$

para todo $A \subseteq \mathbb{R}$.

Demostración. Se puede consultar en [3], pág. 94. □

Nota 2.31. Tomando $A = \mathbb{R}$ queda probado que los conjuntos medibles Lebesgue son numerablemente aditivos.

Proposición 2.32. *Dada una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X, existe la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{S}$.*

Demostración. Se puede consultar en [15], pág. 19. □

Definición 2.33. (De [15], pág. 52) La σ-álgebra más pequeña que contiene a los abiertos se llama la familia $\mathcal{B}$ de conjuntos de Borel.

Proposición 2.34. *Todo conjunto de Borel es medible Lebesgue. En particular, los abiertos y cerrados son medibles Lebesgue.*

Demostración. Se puede consultar en [15], pág. 61. □

Terminamos viendo varias propiedades que nos serán útiles posteriormente:

Proposición 2.35. *Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión monótona creciente con $B = \bigcup_n B_n$. Entonces, $\lim_n \mu(B_n) = \mu(B)$.*

Demostración. Para una prueba consultar [3] pág. 96. □

Teorema 2.36. *Para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U : U \textit{ abierto}\}$$

Demostración. Consultar en [3] pág. 103. □

Proposición 2.37. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S \cap [n, n+1]$ tiene medida nula para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, S tiene medida nula.*

Demostración. Se cumple que $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (S \cap [n, n+1]) = S$. Basta ahora usar la proposición 2.23 y queda probado. □

Proposición 2.38. *(En colaboración con el tutor) Sea $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente de conjuntos. Entonces, $\mu^*(\bigcup_n B_n) = \lim_n \mu^*(B_n) = \sup_n \mu^*(B_n)$.*

Demostración.

$\boxed{\geq}$

$\mu^*(B_n) \geq \mu^*(\bigcup_n B_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta tomar supremo.

$\boxed{\leq}$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Sea ahora $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de conjuntos medibles tales que $B_n \subseteq A_n$ y $\mu(A_n) - \mu^*(B_n) < \epsilon$ (esto es posible por el teorema 2.36).

Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, los conjuntos $C_n := \bigcap_{m\geq n} A_m$. Tenemos que $B_n \subseteq A_n \subseteq C_n$. Notemos que, gracias a la proposición 2.30,

$$\mu(C_n) \leq \mu(\bigcap_{m\geq n} A_m) \leq \mu(A_n) \leq \mu^*(B_n) + \epsilon$$

Sea ahora $C = \bigcup_n C_n$. Esta unión es creciente ya que las intersecciones son cada vez más pequeñas. Tenemos entonces que $B = \bigcup_n B_n \subseteq \bigcup_n C_n = C$. Así,

$$\mu(B) \leq \mu(C) = \sup_n \mu(C_n) \leq \sup_n \mu^*(B_n) + \epsilon$$

Como ϵ es arbitrario, $\mu(B) \leq \sup_n \mu^*(B_n)$. $\square$

Proposición 2.39. *(En colaboración con el tutor) Para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ existe A medible con $X \subseteq A$ y $\mu^*(X) = \mu(A)$.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Por el teorema 2.36, existe $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de conjuntos medibles que contienen a X y $\mu(A_n) - \mu^*(X) < \frac{1}{n}$. Sea $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Como $X \subseteq A$, basta probar que $\mu^*(X) \geq \mu(A)$. Ahora bien, $\mu(A) - \mu^*(X) < \mu(A_n) - \mu^*(X) < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $\mu(A) - \mu^*(X) \leq 0$. $\square$

Proposición 2.40. *(En colaboración con el tutor) Dados $X \subseteq \mathbb{R}$ y A medible con $X \subseteq A$ y $\mu^*(X) = \mu(A)$, se cumple que todo conjunto medible $Z \subseteq A \setminus X$ tiene medida nula.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Por la proposición 2.39, podemos tomar A como en el enunciado. Sea ahora $Z \subseteq A \setminus X$ medible. Por definición,

$$\mu(A) = \mu(A \cap Z) + \mu(A \cap Z^{\complement}) = \mu(Z) + \mu(A \setminus Z)$$

Por otro lado,

$$\mu(A) = \mu^*(X) \leq \mu(A \setminus Z) \leq \mu(A)$$

Así, $\mu(A \setminus Z) = A$, lo que implica que $\mu(Z) = 0$. $\square$

Capítulo 3

Conjuntos analíticos

El objetivo de este capítulo es probar que todo conjunto analítico es medible Lebesgue. A pesar de poder desarrollar este capítulo en el contexto de los Espacios Polacos, nos vamos a restringir al conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, por ser este espacio en el que llevamos a cabo este trabajo. La principal referencia utilizada en este capítulo es [8].

Comenzaremos dando una serie de definiciones. En la siguiente sección hablaremos de la relación existente entre los conjuntos analíticos y la operación de Souslin. Posteriormente, estableceremos que los conjuntos medibles son cerrados bajo la operación de Souslin para acabar demostrando que todo conjunto analítico es medible Lebesgue.

3.1. Definiciones

Durante este capítulo va a estar presente constantemente el espacio de Baire, $\mathcal{N}$, introducido en el capítulo anterior. Es por ello que son necesarias ciertas definiciones relativas a las sucesiones. [1]

Definición 3.1. Sean $A \neq \emptyset$ conjunto y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos al conjunto de las **sucesiones** $s = (s(0), \ldots, s(n-1)) = (s_0, \ldots, s_{n-1})$ **de longitud n de elementos de A** por A^n. En el caso $n = 0$, $A^0 = \{\emptyset\}$ que denota la sucesión vacía.

Definición 3.2. Dada s sucesión finita de elementos de A, llamaremos **length(s)** a su **longitud**. En tal caso, $\text{length}((s_0, \ldots, s_{n-1})) = n$.

Definición 3.3. Dada $s \in A^n$ y $m \leq n$, denotamos por $\boldsymbol{s|m} = (s_0, \ldots, s_{m-1})$ a la **restricción** de la sucesión s a las primeras m coordenadas. En el caso $m = 0$, $x|0 = \{\emptyset\}$.

Definición 3.4. Dadas s, t sucesiones finitas de A, diremos que s es un **segmento inicial** de t si $s = t|m$ para algún $m \leq \text{length}(t)$. En tal caso diremos que $\boldsymbol{s \subseteq t}$. Por tanto, $\emptyset \subseteq s$ para todo s.

[1] Estas definiciones están basadas en las hechas en la página 5 de [8].

Definición 3.5. Denotaremos de la siguiente manera al conjunto de las **sucesiones finitas de elementos de A**:

$$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$$

Definición 3.6. Dadas dos sucesiones finitas $s = (s_i)_{i<n}$ $t = (t_j)_{j<m}$, la **concatenación** de ambas se denota por $\boldsymbol{s}^\frown\boldsymbol{t} = (s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{m-1})$.

Definición 3.7. Para referirnos al conjunto de las **sucesiones** (infinitas) **de elementos de A** usaremos el símbolo $A^{\mathbb{N}}$.

Definición 3.8. Sean $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\boldsymbol{x|n} = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in A^n$ a la **restricción** de x a la n-ésima coordenada. En el caso $n = 0$, $x|0 = \{\varnothing\}$.

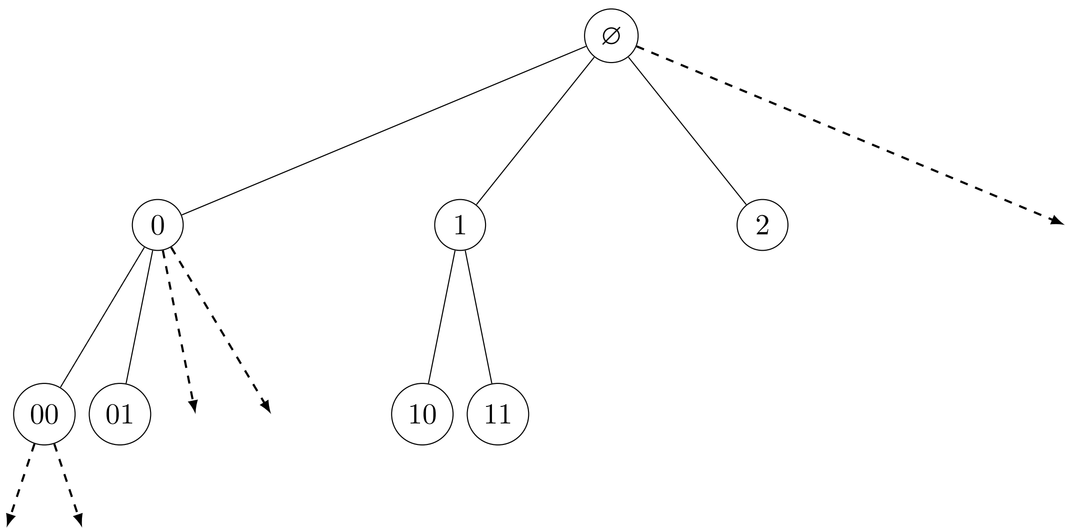
Definición 3.9. Diremos que $s \in A^n$ es un **segmento inicial** de $x \in A^{\mathbb{N}}$ si $s = x|n$. En tal caso, diremos que $\boldsymbol{s \subseteq x}$.

Definición 3.10. Dada $x = (x_i)_{i<n} \in A^n$ y $s = (s_0, \dots, s_n, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$, denotaremos la **concatenación** de ambas por $\boldsymbol{x}^\frown\boldsymbol{s} = (x_0, \dots, x_{n-1}, s_0, \dots)$.

3.2. Operación de Souslin

En esta sección vamos a introducir los conceptos de operación de Souslin y de conjunto analítico, los cuales veremos que están íntimamente relacionados. Con el motivo de facilitar la comprensión de los conceptos vamos a realizar una analogía entre la operación de Souslin y un concepto geométrico llamado árbol. Comenzamos, pues, definiendo la noción de árbol:

Definición 3.11. (Basado en la def. 2.1 pág. 5 de [8]) Un **árbol** en un conjunto $A \neq \varnothing$ es un subconjunto $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ tal que si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$. En otras palabras, si está una sucesión finita, está cualquier segmento inicial suyo. Llamaremos **nodos** a los elementos de T. Una **rama infinita** de T es una sucesión $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $x|n \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El conjunto de los nodos con una misma longitud pertenecerán al mismo **nivel**. Una **rama finita** es una sucesión finita s tal que $\nexists\, x \in A$ de manera que $s^\frown x \in T$.



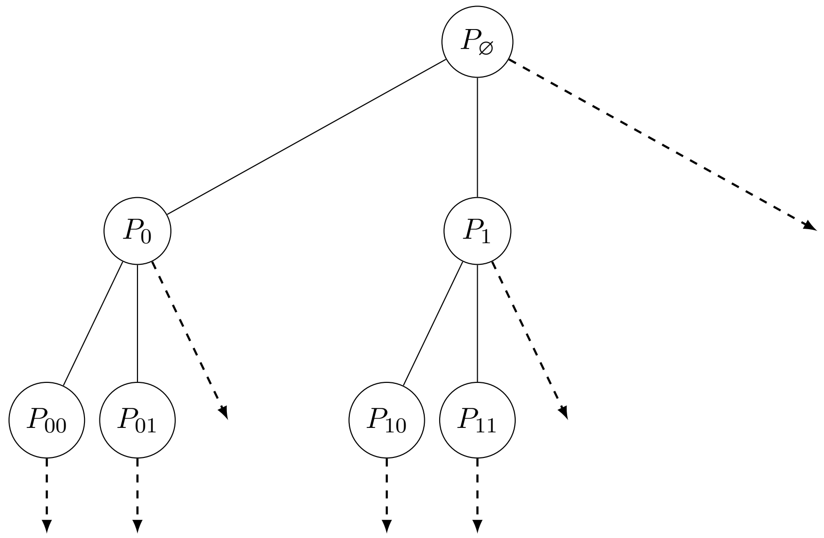
Definición 3.12. (De [8] pág. 198) Un **esquema de Souslin** en $\mathbb{R}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ indexada por el conjunto $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Lo representaremos por $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$.

Nota 3.13. El conjunto $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ es numerable, ya que $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}^n$.

Nota 3.14. Como trabajamos siempre en $\mathbb{R}$, a partir de ahora simplemente diremos "esquema de Souslin".

Podemos conectar esta definición de manera directa con la noción de árbol, puesto que, así como en la figura anterior podemos ver la representación geométrica de un árbol para un cierto A, considerando $A = \mathbb{N}$ y $T = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, obtenemos un árbol con infinitos (numerable) niveles y en cada uno de estos niveles hay infinitos (numerable) nodos.

Es importante resaltar que en este caso los nodos no son sucesiones finitas, sino conjuntos indexados por sucesiones finitas. Del mismo modo, cuando hablemos a partir de ahora de rama, rama infinita... estaremos refiriéndonos a la sucesión de índices de los conjuntos, puesto que todos los árboles que consideraremos representarán un cierto esquema de Souslin. Gráficamente:

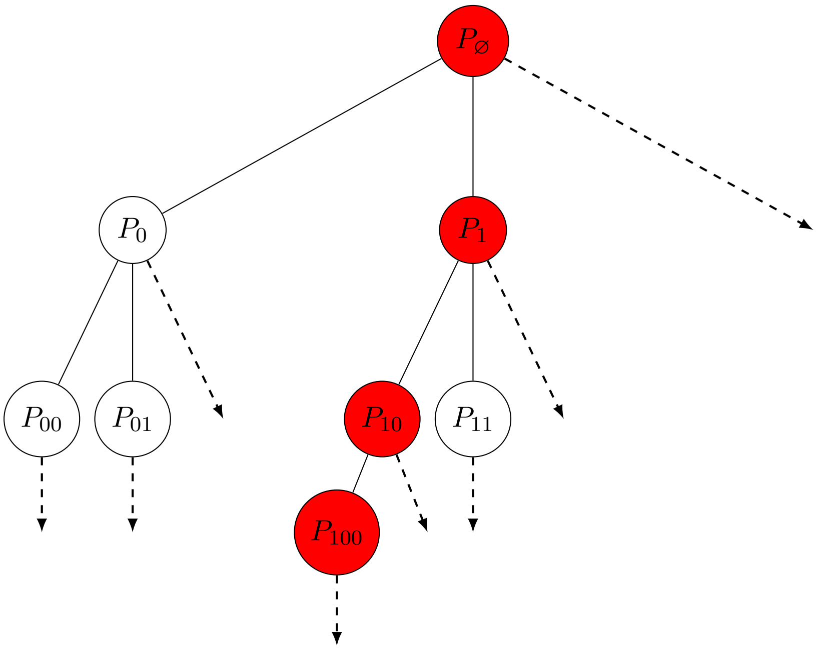


Definición 3.15. (De [8] pág. 198) Dado $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ un esquema de Souslin, la **operación de Souslin** $\mathcal{A}$ aplicada al esquema anterior da como resultado el conjunto

$$\mathcal{A}_s P_s = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} P_{x|n}$$

donde $x|n = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

La operación de Souslin también podemos interpretarla en términos de árboles. Como dice la definición, aplicar la operación de Souslin a un cierto esquema de Souslin $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ da como resultado un subconjunto de $\mathbb{R}$ al que llamamos $\mathcal{A}_s P_s$. Sea $x \in \mathcal{A}_s P_s$. Si consideramos el árbol que representa nuestro esquema de Souslin, nos podemos preguntar lo siguiente: dentro de nuestro árbol, ¿en qué nodos está x? Por definición, existe $y \in \mathcal{N}$ tal que $x \in P_{y|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En términos de árboles esto, significa que hay una rama (infinita) para la cual x está en cada uno de sus nodos. A modo de ejemplo, supongamos que $y = (1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{N}$. En la figura inferior podemos ver que x estaría en los nodos coloreados en rojo. Del mismo modo, si el dibujo continuara, veríamos el nodo P_{1000} coloreado en rojo, así como el nodo P_{10000} y sus correspondientes sucesores.



Definición 3.16. (De [8] pág. 198) Decimos que un esquema de Souslin $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es **regular** si

$$s \subseteq t \Rightarrow P_s \supseteq P_t$$

donde s, t son sucesiones finitas de números naturales.

Nota 3.17. Un esquema de Souslin $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ regular es equivalente a tomar un conjunto que será $P_\varnothing$, e ir construyendo subconjuntos suyos, cada uno de los cuales será un sucesor suyo en el árbol. Si volvemos a construir subconjuntos de cada uno de los sucesores y los convertimos a su vez en sucesores suyos, repitiendo el proceso obtenemos un árbol.

Proposición 3.18. *(En colaboración con el tutor) Sea $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin. Entonces, el esquema de Souslin $(P'_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$, donde $P'_s := P_\varnothing \cap P_{(s_0)} \cap \dots \cap P_{(s_0,\dots,s_{n-2})} \cap P_s$ para toda $s = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$, con $n \in \mathbb{N}$, es un esquema de Souslin regular tal que*

$$\mathcal{A}_s P_s = \mathcal{A}_s P'_s$$

Demostración. Sea $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin. Sea $s = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{N}^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Definimos $P'_s := P_\varnothing \cap P_{(s_0)} \cap \dots \cap P_{(s_0,\dots,s_{n-2})} \cap P_s$. Este nuevo esquema de Souslin $(P'_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es regular porque, dadas dos sucesiones finitas de números naturales $s \subseteq t$,

$$P'_t = P_\varnothing \cap \dots \cap P_s \cap \dots P_t \subseteq P_\varnothing \cap \dots \cap P_s = P'_s$$

Veamos ahora que $\mathcal{A}_s P_s = \mathcal{A}_s P'_s$:

$\boxed{\subseteq}$

Sea $p \in \mathcal{A}_s P_s$. Existe $x \in \mathcal{N}$ de manera que $p \in P_{x|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, dado $m \in \mathbb{N}$, $p \in P_{x|n}$ para todo $n \leq m$. Así, $p \in P'_{x|m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\subseteq}$

Sea $p \in \mathcal{A}_s P'_s$. Existe $x \in \mathcal{N}$ de manera que $p \in P'_{x|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $P'_{x|n} \subseteq P_{x|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, queda probado que $p \in \mathcal{A}_s P_s$. □

3.2.1. Relación con los conjuntos analíticos

Definición 3.19. (Basado en [8], pág. 85) Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **analítico** si es vacío o si existe

$$f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$$

continua tal que $f(\mathcal{N}) = A$.

Nota 3.20. Aunque la definición que damos no es exactamente la misma que en [8], cabe resaltar que el hecho de que $\mathcal{N}$ sea un espacio Polaco, junto con el teorema 7.9 de [8] (pág. 38), implica que estas definiciones son equivalentes.

Definición 3.21. Sea $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Definimos $N_s := \{y \in \mathcal{N} : \ y_i = s_i \ \forall \ i = 0, \ldots, k-1\}$ donde $k = \text{length}(s)$.

Nota 3.22. Esta definición nos proporciona un esquema de Souslin $(N_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$.

Lema 3.23. *(Parte de 3.26 en [8]) El esquema de Souslin $(N_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es regular.*

Demostración. Sean $s \subseteq t$ sucesiones finitas de números naturales. Veamos que $N_s \supseteq N_t$.

Sea $x \in N_t$. x es una sucesión que comparte los primeros $\text{length}(t)$ términos con t. Como $s \subseteq t$, es decir, s es un segmento inicial de t, $\text{length}(s) \leq \text{length}(t)$. Por tanto, x comparte los primeros $\text{length}(s)$ términos con s, es decir, $x \in N_s$. □

Nota 3.24. Dada $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, el conjunto N_s es no vacío, ya que bastaría concatenar s con una sucesión infinita de ceros $(s^\frown(0,0,\ldots))$ y esta sucesión resultante estaría en N_s.

Definición 3.25. (Basado en [8] pág. 199) Decimos que un esquema de Souslin $(P_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ tiene **diámetro decreciente** si $diam\left(P_{x|n}\right) \to 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$, donde

$$diam\left(P_{x|n}\right) = \sup\{|a-b| : \ a, b \in P_{x|n}\}$$

A continuación, vamos a probar que todo conjunto analítico es la operación de Souslin aplicada a un cierto esquema, es decir, ser la imagen por una aplicación continua de $\mathcal{N}$ equivale a ser el conjunto de elementos que está en alguna rama infinita de un cierto árbol.

Teorema 3.26. *(De [8] pág. 199) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ analítico. Entonces, $A = \mathcal{A}_s F_s$ con F_s cerrado para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$; $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ regular y con diámetro decreciente; y $F_s \neq \varnothing$ si $A \neq \varnothing$*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ analítico. Si $A = \varnothing$ entonces $A = \mathcal{A}_s F_s$ con $F_s = \varnothing$ para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, y como el conjunto vacío siempre es cerrado, lo tenemos.

Por tanto, supongamos que $A \neq \varnothing$. Como A es analítico, existe una función continua $f : \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ con $f(\mathcal{N}) = A$. Por otro lado, dada $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, consideramos el esquema de Souslin $(N_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$. Por el lema 3.23, este esquema es regular. Como tomar imágenes conserva inclusiones y ocurre lo mismo con la clausura, si definimos $F_s = \overline{f(N_s)}$ para todo$s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, el esquema de Souslin resultante $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es regular y F_s es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Por la nota 3.24, N_s es no vacío. Así pues, $F_s \neq \varnothing$.

Veamos ahora que $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es de diámetro decreciente. Sea $x \in \mathcal{N}$ y sea $\epsilon > 0$. Como f es continua, existe $V \in \mathcal{E}(x)$ tal que $f(V) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. Usando ahora la forma que tienen los entornos básicos de la topología producto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N_{x|n} \subseteq V$. Esto implica, tomando imágenes, que $f(N_{x|n}) \subseteq f(V) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. Finalmente, tomando clausuras, tenemos que $F_{x|n} = \overline{f\left(N_{x|n}\right)} \subseteq \overline{B(f(x), \epsilon)}$.

Así, para todo $x \in \mathcal{N}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $diam\left(F_{x|n}\right) \leq \epsilon$. Usando la regularidad de $(F_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$, para todo $m > n$, $F_{x|m} \subseteq F_{x|n}$, lo que implica que $diam\left(F_{x|m}\right) \leq diam\left(F_{x|n}\right) \leq \epsilon$ para todo $m > n$. Por tanto, para todo $x \in \mathcal{N}$ y para todo $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n$ $\ diam\left(F_{x|m}\right) \leq \epsilon$.

Basta probar ahora que $A = \mathcal{A}_s F_s$.

$\boxed{\subseteq}$

Sea $x \in A$. $x = f(y)$ con $y \in \mathcal{N}$. Notar que $y \in N_{y|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ porque comparte los primeros n términos consigo mismo. Por tanto, $x \in f(N_{y|n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta tomar clausuras y tenemos que $x \in \bigcap_n \overline{f(N_{y|n})}$.

$\boxed{\supseteq}$

Sea ahora $x \in \bigcap_n \overline{f(N_{y|n})}$ con $y \in \mathcal{N}$. Por definición de clausura, dado $n \in \mathbb{N}$, existe $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k \in f(N_{y|n})$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo k mayor o igual que un cierto k_0 se tiene que $|x - x_k| < \frac{1}{2^n}$. Esto nos permite construir otra sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \in f(N_{y|n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo n se tiene que $|x - x_n| < \frac{1}{2^n}$. Tomamos ahora $y_n \in N_{y|n}$ tal que $f(y_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la proposición 2.13, $y_n \longrightarrow y$. Como f es continua, por el teorema 1.15, $x_n = f(y_n) \longrightarrow f(y)$. Pero, como $x_n \longrightarrow x$, por la unicidad del límite, $x = f(y)$. Acabamos, pues, de probar, que $\bigcap_n \overline{f(N_{y|n})} = \{f(y)\} \subseteq A$. □

3.3. Dos esquemas de Souslin

Vamos a estudiar dos nuevos esquemas de Souslin que se definen a partir de otro dado y algunas de sus propiedades, que nos serán de gran utilidad al final del capítulo.

Definición 3.27. (De [8] pág. 201) Dadas dos sucesiones $s, t \in \mathbb{N}^n$, para un cierto $n \in \mathbb{N}$, diremos que $s \le t \iff \forall\, i < n,\ s(i) \le t(i)$.

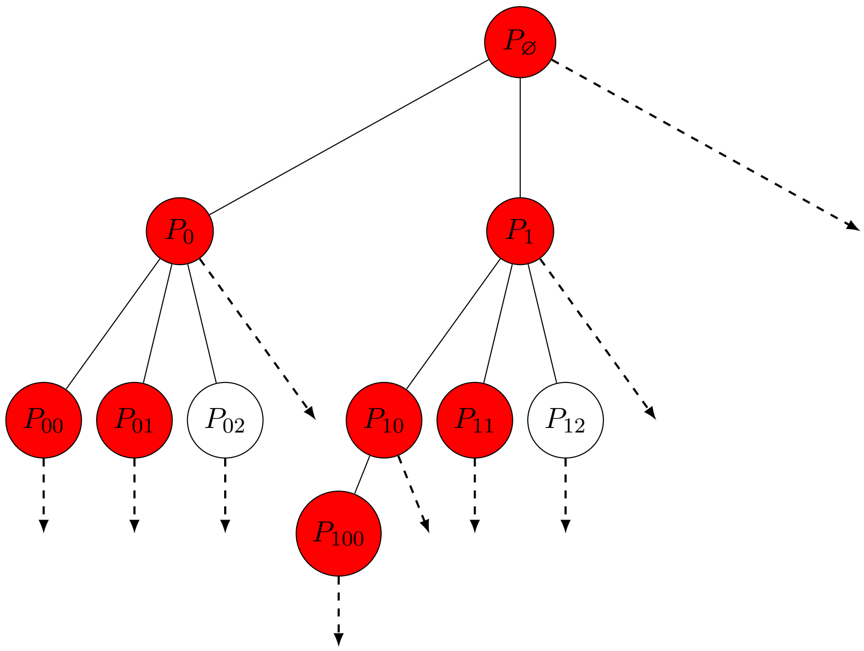
Definición 3.28. (De [8] pág. 201) Dados $s \in \mathbb{N}^n$ y $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin, definimos

$$Q^s := \bigcup_{x;x|n\le s}\bigcap_{i\in\mathbb{N}} P_{x|i}$$

Nota 3.29. $(Q^s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ conforma un esquema de Souslin.

Nota 3.30. Para toda $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ se tiene que $Q^s \subseteq \mathcal{A}_s P_s$, puesto que un elemento de Q_s cumple todas las condiciones necesarias para estar en $\mathcal{A}_s P_s$.

Consideramos el árbol correspondiente al esquema de Souslin $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$. Fijamos $s \in \mathbb{N}^n$. Un número real pertenecerá a Q^s si está en una rama infinita que cumple que el término n-ésimo tiene índice menor o igual que s. A modo de ejemplo, si $s = (1,1)$, un número real pertenece a Q^s si y solo si pertenece a una de las ramas infinitas que se construyen siguiendo los nodos coloreados en rojo en la siguiente figura:



Proposición 3.31. *(De [8], pág. 201. Resuelto por el autor) El esquema de Souslin $(Q^s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es monótono creciente en el sentido de que si $s \le t$, entonces $Q^s \subseteq Q^t$.*

Demostración. Sean $s, t \in \mathbb{N}^n$ con $s \le t$. Veamos que $Q^s \subseteq Q^t$. Sea $x \in Q^s$. Por definición, existe $y \in \mathcal{N}$ con $y|n \le s$ tal que $x \in P_{y|i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Así, $y|n \le s \le t$, por lo que $x \in Q^t$. $\square$

Proposición 3.32. *(De [8], pág. 201. Resuelto por el autor) Para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ se tiene que*

$$Q^s = \bigcup_{n=0}^{+\infty} Q^{s^\frown n}$$

Demostración. Sea $s \in \mathbb{N}^m$.

$\boxed{\subseteq}$

Sea $p \in Q^s$. Por definición, existe $y \in \mathcal{N}$ con $y|m \leq s$ tal que $p \in P_{y|i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sea $n_0 := y|(m+1)$. Consideramos la sucesión finita $s\widehat{\ }n_0$. Tenemos que $y|(m+1) \leq s\widehat{\ }n_0$. Por tanto, existe $y \in \mathcal{N}$ con $y|(m+1) \leq s\widehat{\ }n_0$ tal que $p \in P_{y|i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, con lo que concluimos que $p \in Q^{s\widehat{\ }n_0}$.

$\boxed{\supseteq}$

Sea $p \in Q^{s\widehat{\ }n}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$. Existe $y \in \mathcal{N}$ con $y|(m+1) \leq s\widehat{\ }n$ tal que $p \in P_{y|i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. En particular, $y|m \leq s$, por lo que $p \in Q^s$. □

Nota 3.33. Si consideramos el árbol correspondiente al esquema de Souslin $(Q^s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$, esto nos dice que un cierto nodo es la unión de todos sus inmediatos sucesores.

Proposición 3.34. *(De [8], pág. 201. Resuelto por el autor) Se cumple que*

$$Q^{\varnothing} = \mathcal{A}_s P_s$$

Demostración. Por la proposición 3.32, $Q^{\varnothing} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} Q^{(n)}$. Probemos entonces que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} Q^{(n)} = \mathcal{A}_s P_s$.

$\boxed{\subseteq}$

Sea $p \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} Q^{(n)}$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p \in Q^{(n_0)}$. Usando la nota 3.30, $p \in \mathcal{A}_s P_s$.

$\boxed{\supseteq}$

Sea $p \in \mathcal{A}_s P_s$. Por definición existe $x \in \mathcal{N}$ tal que $p \in P_{x|i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Definimos ahora $n_0 := x|1$. Claro que $x|1 \leq (n_0)$. Por tanto, $p \in Q^{(n_0)}$. □

Introducimos ahora el segundo de nuestros dos nuevos esquemas de Souslin.

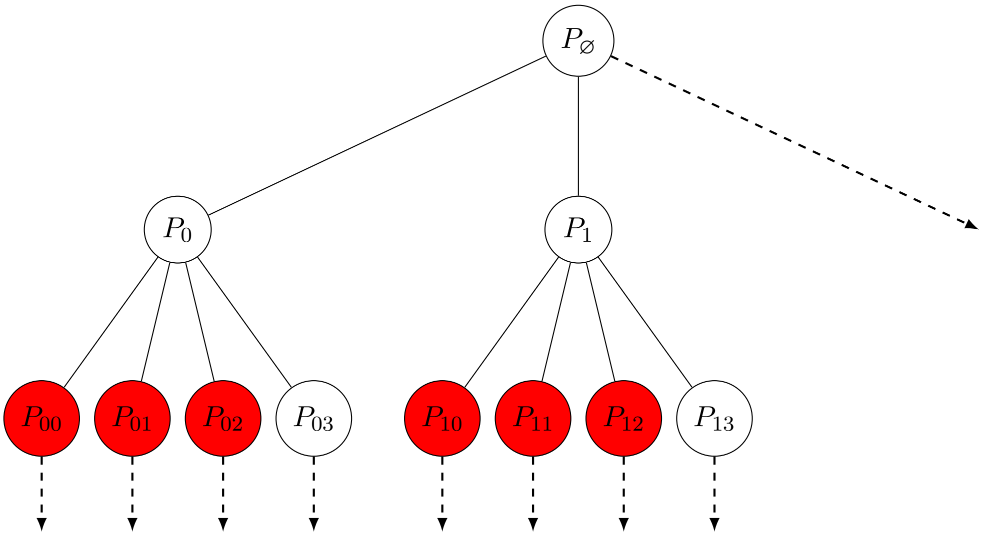
Definición 3.35. (De [8] pág. 201) Dada $s \in \mathbb{N}^n$ y $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin, definimos

$$Q_s := \bigcup_{t\in\mathbb{N}^n; t\leq s} P_t$$

Nota 3.36. $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ conforma un esquema de Souslin.

¿Qué interpretación tiene este conjunto? Tomando de nuevo como referencia el árbol del esquema de Souslin $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$, Q_s consiste en los números reales presentes en alguno de los nodos cuyo índice es menor o igual al s dado. En particular, estos nodos han de ser del nivel correspondiente a la longitud de s. Si tomamos $s = (1,2)$,

$$Q_s = \bigcup\{P_{00}, P_{01}, P_{02}, P_{10}, P_{11}, P_{12}\}$$



Proposición 3.37. *(Resuelto por el autor) Dado $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin de conjuntos medibles Lebesgue, los conjuntos Q_s son medibles Lebesgue.*

Demostración.

$$Q_s := \bigcup_{t\in\mathbb{N}^n;t\leq s} P_t$$

Como los conjuntos P_t son medibles Lebesgue, al ser Q_s una unión finita de conjuntos numerables, y ser la unión numerable de conjuntos medibles medible (teorema 2.30), queda probado que Q_s es medible para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. □

Proposición 3.38. *(De [8] pág. 201. Resuelto por el autor) Sea $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin regular. Entonces, el esquema de Souslin $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es regular.*

Demostración. Sean $s \subseteq t$ sucesiones finitas de números naturales. Veamos que $Q_t \subseteq Q_s$.

Sea $x \in Q_t$. Entonces, existe una sucesión finita r del mismo tamaño que t y menor o igual que esta, tal que $x \in P_r$. Restringimos ahora r a la longitud de s, y a la sucesión finita resultante la llamamos r'. Usando la regularidad de (P_s), como $r' \subseteq r$, $P_r \subseteq P_{r'}$. Como $x \in P_r$, tenemos que $x \in P_{r'}$. □

Corolario 3.39. *Sea $x \in \mathcal{N}$. Entonces, para todo $m \geq n$ se tiene que*

$$Q_{x|m} \subseteq Q_{x|n}$$

En otras palabras, $(Q_{x|n})_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente.

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior notando que para todo $m \geq n$, $x|n \subseteq x|m$. □

Proposición 3.40. *(De [8] pág. 201. En colaboración con el tutor) Dado $(P_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin regular, consideramos el esquema de Souslin $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$. Se cumple que*

$$\mathcal{A}_s P_s = \mathcal{A}_s Q_s$$

Demostración.

$\boxed{\subseteq}$

Sea $p \in \mathcal{A}_s P_s$. Entonces, existe $x \in \mathcal{N}$ tal que $p \in P_{x|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Buscamos $y \in \mathcal{N}$ tal que $p \in Q_{y|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, por definición de Q_s, $P_s \subseteq Q_s$. Basta, pues, tomar $y = x$.

$\boxed{\supseteq}$

Sea $p \in \mathcal{A}_s Q_s$. Entonces, existe $x \in \mathcal{N}$ tal que $p \in Q_{x|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Buscamos $y \in \mathcal{N}$ tal que $p \in P_{y|n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En primer lugar, sea $T = \{t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : t \leq x_{|\mathrm{length(t)}} \text{ y } p \in P_t\}$. Observemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, como $p \in Q_{x|n}$, por definición de $Q_{x|n}$, existe sucesión finita $t_n \leq x|n$ de manera que $p \in P_{t_n}$. Esto nos garantiza que p está en una cantidad numerable de conjuntos P_t de diferentes niveles. Así pues, el conjunto T es infinito.

Ahora, fijado $t \in T$, definimos $T_t = \{s \in T : t \subseteq s\}$. Vamos a definir $y = (y_o, y_1, \ldots) \in \mathcal{N}$ de manera inductiva, de forma que $(y_0, \ldots, y_n) \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $T_{(y_0,\ldots,y_n)}$ sea infinito.

Comenzamos buscando $y_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $(y_0) \in T$ y $T_{(y_0)}$ sea infinito. Gracias a la igualdad $T = \bigcup\limits_{r \leq x_0} T_{(r)}$ obtenemos que existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{(r_0)}$ es infinito. Basta tomar $y_0 = r_0$.

Supongamos ahora que tenemos $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \leq (x_0, \ldots, x_{n-1})$ tal que $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in T$ y $T_{(y_0,\ldots,y_{n-1})}$ es infinito. Como se cumple que $T_{(y_0,\ldots,y_{n-1})} = \bigcup\limits_{r \leq x_n} T_{(y_0,\ldots,y_{n-1},r)}$, aplicamos el argumento anterior y queda probado. $\square$

Proposición 3.41. *(De [8] pág. 201. Resuelto por el autor) Sea $(P_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin regular. Entonces, para $s \in \mathbb{N}^n$ se tiene que*

$$Q^s \subseteq Q_s$$

Demostración. Sea $p \in Q^s$. Entonces, existe $x \in \mathcal{N}$ con $x|n \leq s$ tal que $p \in P_{x|m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Busco $t \in \mathbb{N}^n$ con $t \leq s$ tal que $p \in P_t$. Tomando $t = x|n$, queda probado. $\square$

3.4. Conjuntos analíticos y medida

En esta última sección establecemos que aplicar la operación de Souslin a un esquema de Souslin de conjuntos medibles da como resultado un conjunto medible. Como corolario tendremos que todo conjunto analítico es medible Lebesgue.

Teorema 3.42 (Saks). *(Basado en [8] pág. 229) Sea μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Entonces, la familia de los conjuntos medibles Lebesgue es cerrada bajo la operación de Souslin.*

Demostración. Sea $(P_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ esquema de Souslin de conjuntos medibles. Por la proposiciones 3.18 y 2.30, podemos considerar $(P_s)_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ regular sin pérdida de generalidad.

Tomamos $(Q_s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ y $(Q^s)_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ como en 3.35 y 3.28, respectivamente. Sea $P = \mathcal{A}_s P_s$. Tenemos que probar que, para todo $A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \smallsetminus P)$$

La subaditividad de la medida exterior nos garantiza que $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \smallsetminus P)$. Así, si $\mu^*(A) = +\infty$, se da trivialmente. Suponemos, pues, sin pérdida de generalidad, que $\mu^*(A) < +\infty$.

Fijamos ahora $\epsilon > 0$ y $A \subseteq \mathbb{R}$. Vamos a definir de manera recursiva $x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathcal{N}$. Como vimos en la proposición 3.31, $(Q^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente. Además, $\bigcup\limits_n Q^{(n)} = P$ por las proposiciones 3.34 y 3.32. Ahora, por el lema 2.38, obtenemos que $\sup_n \mu^*(A \cap Q^{(n)}) = \lim_n \mu^*(A \cap Q^{(n)}) = \mu^*(A \cap P)$. Por definición de supremo, existe $x_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu^*(A \cap P) - \mu^*(A \cap Q^{(x_0)}) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Reescribiendo,

$$\mu^*(A \cap Q^{(x_0)}) \geq \mu^*(A \cap P) - \frac{\epsilon}{2}$$

De manera general, para todo $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, $\sup \mu^*(A \cap Q^{s^\frown n}) = \lim \mu^*(A \cap Q^{s^\frown n}) =$
$= \mu^*(A \cap \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q^{s^\frown n}) = \mu^*(A \cap Q^s)$ (Notar que si $s = \varnothing$ tenemos el caso anterior). Así pues, dados los primeros n términos de la sucesión x, elijo x_n de manera que

$$\mu^*(A \cap Q^t) - \mu^*(A \cap Q^{t^\frown x_n}) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$$

donde $t = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. De nuevo, reescribiendo

$$\mu^*(A \cap Q^{t^\frown x_n}) \geq \mu^*(A \cap Q^t) - \frac{\epsilon}{2^n}$$

Una vez construida la sucesión $x = (x_0, \ldots, x_n, \ldots)$ agrupamos las desigualdades anteriores y obtenemos que para todo $n \geq 1$

$$\mu^*(A \cap Q^{x|n}) \geq \mu^*(A \cap Q^{x|n-1}) - \frac{\epsilon}{2^n} \geq \ldots \geq \mu^*(A \cap P) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^i} > \mu^*(A \cap P) - \epsilon$$

Por otro lado, gracias a la proposición 3.41, $(A \cap Q^{x|n}) \subseteq (A \cap Q_{x|n})$, por lo que $\mu^*(A \cap Q^{x|n}) \leq \mu^*(A \cap Q_{x|n})$. Esto nos permite obtener que

$$\mu^*(A \cap Q_{x|n}) \geq \mu^*(A \cap Q^{x|n}) > \mu^*(A \cap P) - \epsilon$$

Así mismo, gracias a la proposición 3.37, $Q_{x|n}$ es medible. Debido a esto,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap Q_{x|n}) + \mu^*(A \smallsetminus Q_{x|n}) > \mu^*(A \cap P) - \epsilon + \mu^*(A \smallsetminus Q_{x|n})$$

Por el corolario 3.39, $(Q_{x|n})$ es decreciente. Además, por definición de operación de Souslin tenemos que $\bigcap_n Q_{x|n} \subseteq \mathcal{A}_s Q_s$. Esto, unido a que, por la proposición 3.40, $\mathcal{A}_s Q_s = \mathcal{A}_s P_s = P$, implica que $\bigcap_n Q_{x|n} \subseteq P$. Tomando complementarios, $\bigcup_n Q_{x|n}^{\complement} \supseteq P^{\complement}$, donde $(Q_{x|n}^{\complement})$ es creciente. Por tanto, por la proposición 2.38,

$$\mu^*(A \smallsetminus Q_{x|n}) = \mu^*(A \cap Q_{x|n}^{\complement}) \longrightarrow \mu^*(A \cap \bigcup_m Q_{x|m}^{\complement}) \geq \mu^*(A \cap P^{\complement}) = \mu^*(A \smallsetminus P)$$

Esto último nos permite afirmar que a partir de un n_0 suficientemente grande

$$\mu^*(A \smallsetminus P) - \mu^*(A \smallsetminus Q_{x|n}) \leq \epsilon$$

Finalmente, obtenemos que, a partir de un cierto n_0 suficientemente grande

$$\mu^*(A) > \mu^*(A \cap P) - \epsilon + \mu^*(A \smallsetminus Q_{x|n}) \geq \mu^*(A \cap P) - \epsilon + \mu^*(A \smallsetminus P) - \epsilon$$

Como esto es para todo $\epsilon > 0$, queda probado que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap P) + \mu^*(A \smallsetminus P)$. □

Nota 3.43. Como se menciona en la introducción, esta demostración ha sido modificada respecto a la presente en [8]. Si el lector consulta la fuente, podrá comprobar que no hacemos uso del conjunto $\mu_A^*(B)$.

Corolario 3.44. *Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ analítico es medible Lebesgue.*

Demostración. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ analítico. Por la proposición 3.26, A es la operación de Souslin de un cierto esquema de conjuntos cerrados. Ahora bien, como estos son medibles (proposición 2.34), usando el teorema 3.42, obtenemos que A es medible Lebesgue. □

Capítulo 4

El Axioma de Determinación

A pesar de haber sido finalmente aceptado el Axioma de Elección tras los teoremas de Gödel, las implicaciones "no desesadas"de este seguían ahí. En 1962, Jan Mycielski y Hugo Steinhaus, matemáticos polacos, formulan el Axioma de Determinación (AD) como una alternativa al Axioma de Elección. Dos años más tarde, Mycielski demuestra que bajo AD todo conjunto de números reales es medible Lebesgue. Además, en $\mathbb{R}$, el Axioma Numerable de Elección es consecuencia de AD. Sin embargo, como comentamos en el final del primer capítulo, la desventaja de AD respecto a AC está en la consistencia del sistema de axiomas asumido.

Durante este capítulo, basado en el capítulo 33 de [7] y en [8], vamos a tratar todos estos aspectos de este nuevo axioma. Comenzaremos dando una definición formal de él, para la cual serán necesarias varias definiciones previas. Continuaremos probando que CAC es consecuencia de AD en $\mathbb{R}$, tras lo cual definiremos un cierto juego infinito que será de utilidad para demostrar que todo conjunto de números reales es medible Lebesgue bajo la asunción del Axioma de Determinación. Finalizaremos el capítulo comentando otras consecuencias de este axioma.

4.1. Definiciones

Definición 4.1. Sea $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ un subconjunto del espacio de las sucesiones de números naturales $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Definimos **juego infinito** para el conjunto A, que vamos a denotar por G_A, como un juego que tiene las siguientes reglas: [1]

- Participan dos jugadores, a los que llamaremos **jugador I** y **jugador II**, a los que usualmente denotaremos por I y II.
- El jugador I elige un número natural a_o. Acto seguido, el jugador II elige un número natural b_o. Ahora, I escoge otro número natural a_1, a lo que II responde de nuevo tomando un número natural b_1. El juego termina tras **infinitos** pasos.

[1] Tanto esta como el resto de definiciones de esta sección han sido obtenidas de [7], pág. 627.

- Si la sucesión resultante $(a_o, b_o, a_1, b_1, ...) \in A$, gana el jugador I. En caso contrario, gana II.

I	a_0		a_1		a_2		$\cdots$
II		b_0		b_1		b_2	$\cdots$

Definición 4.2. Diremos que una **partida** es una sucesión $(a_o, b_o, a_1, b_1, ...) \in \mathcal{N}$.

Definición 4.3. Para todo n $\in \mathbb{N}$, denotamos por a_n el n-ésimo movimiento del jugador I y por b_n el n-ésimo movimiento del jugador II.

Definición 4.4. Denotaremos por $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión formada por los movimientos de I. Del mismo modo, denotaremos por $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión formada por los movimientos de II.

Intuitivamente, una **estrategia** (para I o para II) es una regla que dice al jugador correspondiente qué hacer en función de lo que ha hecho el otro jugador y de sus propios movimientos anteriores. Ahora bien, formalmente, hay que distinguir la definición para cada uno de los jugadores.

Definición 4.5. Una **estrategia** para I es una función

$$\sigma = \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \text{s tiene longitud par}\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Diremos que I juega mediante la estrategia σ si sus movimientos los marca esta función, es decir, si $a_n = \sigma((a_0, b_0, ..., a_{n-1}, b_{n-1}))$ para todo n.

Ejemplo 4.6. Supongamos que tenemos una partida $(a_o, b_o, a_1, b_1, ...) \in \mathcal{N}$. Si el jugador I juega mediante σ, entonces el juego se desarrolla de la siguiente manera:

- I juega $\sigma((\varnothing)) = a_0$.
- II juega b_0.
- I juega $\sigma((a_0, b_0)) = a_1$.
- II juega b_1.

$\vdots$

I	$\sigma((\varnothing))$		$\sigma((a_0, b_0))$		$\cdots$
II		b_0		b_1	$\cdots$

De manera análoga tenemos lo siguiente:

Definición 4.7. Una **estrategia** para II es una función

$$\tau = \{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} : \text{s tiene longitud impar}\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

Diremos que II juega mediante la estrategia τ si sus movimientos los marca esta función, es decir, si $b_n = \tau((a_0, b_0, ..., a_n))$.

Ejemplo 4.8. Supongamos que tenemos una partida $(a_o, b_o, a_1, b_1, ...)$. Si el jugador II juega mediante τ, entonces el juego se desarrolla de la siguiente manera:

- I juega a_0.
- II juega $\sigma((a_0)) = b_0$.
- I juega a_1.
- II juega $\sigma((a_0, b_0, a_1)) = b_1$.

$\vdots$

I	a_0	a_1	$\cdots$
II	$\sigma((a_0))$	$\sigma((a_0, b_0, a_1))$	$\cdots$

De nuevo, de manera intuitiva, diremos que una estrategia es una **estrategia ganadora** si el jugador que siga esta estrategia gana siempre el juego.

Para formalizar este concepto, tendremos que volver a distinguir entre jugadores. Supongamos, pues, que el jugador I juega mediante la estrategia σ. Entonces, la partida está totalmente determinada por σ y por la sucesión $b = (b_n)_n \in \mathcal{N}$. En este caso, denotaremos la partida por $\sigma * b$.

Definición 4.9. Una estrategia σ es una **estrategia ganadora para I** si

$$\{\sigma * b : b \in \mathcal{N}\} \subseteq A$$

De manera análoga, si II juega mediante la estrategia τ. Entonces, la partida está totalmente determinada por τ y por la sucesión $a = (a_n)_n \in \mathcal{N}$. En este caso, denotaremos la partida por $a * \tau$.

Definición 4.10. Una estrategia τ es una **estrategia ganadora para II** si

$$\{a * \tau : a \in \mathcal{N}\} \subseteq \mathcal{N} \setminus A$$

Definición 4.11. Dado $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, se dice que el juego G_A está **determinado** si uno de los jugadores tiene una estrategia ganadora.

Estamos ahora en condiciones de enunciar el **Axioma de Determinación**:

Axioma de Determinación (AD)

Para todo $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, el juego infinito G_A está determinado.

Recordemos que a lo largo de este trabajo estamos asumiendo el sistema de axiomas ZF+DC. Así pues, cuando en posteriores resultados asumamos AD, el sistema de axiomas pasará a ser ZF+AD+DC.

Veamos ahora que en el contexto en el que nos movemos, es decir, en los números reales, el Axioma de Determinación implica el numerable de elección, por lo que AD es suficiente para demostrar la mayoría de resultados que necesitamos que son consecuencia de AC.

Proposición 4.12. *Existe $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ inyectiva.*

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$. Basta asignar a x la sucesión en cuya primera entrada tiene el número de cifras que preceden a la coma decimal y en las demás entradas se colocan en orden los decimales, rellenando con ceros en caso de ser x decimal exacto o número entero. □

Teorema 4.13. *(Basado en [7] pág. 628) El Axioma de Determinación implica que toda familia numerable de conjuntos no vacíos de reales tiene una función de elección.*

Demostración. Sea $\mathcal{X} = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ familia de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{N}$ inyectiva. Sea $\phi(\mathcal{X}) = \{\phi(X_n) : n \in \mathbb{N}\}$ familia de subconjuntos no vacíos de $\mathcal{N}$. Veamos que existe f definida en $\phi(\mathcal{X})$ tal que $f(\phi(X_n)) \in \phi(X_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideramos el siguiente juego:

Si el jugador I juega $a = (a_0, a_1, \dots)$ y el jugador II juega $b = (b_0, b_1, \dots)$, II gana si y solo si $b \in \phi(X_{a_0})$.

En este juego, I no tiene una estrategia ganadora porque si I comienza jugando a_0, II tiene identificado el conjunto $\phi(X_{a_0})$, que es no vacío. Sea $b \in \phi(X_{a_0})$. Así, a II le basta jugar de manera que la sucesión de sus movimientos sea b para ganar (Notar que estamos usando el Axioma de Elección en el caso finito, que es consecuencia de ZF). Por tanto, como todo juego está determinado por hipótesis, II tiene una estrategia ganadora τ. Definimos $f : \phi(\mathcal{X}) \to \bigcup \phi(\mathcal{X})$ de manera que a cada $\phi(X_n)$ le asocio la sucesión b formada por sus jugadas, que están dictadas por la estrategia ganadora cuando el jugador I juega $(n, 0, 0, \dots)$.

f es una función de elección debido a que τ es una estrategia ganadora. Basta ahora considerar la función $\tilde{f}(X_n) = \phi^{-1}(f(\phi(X_n)))$, donde ϕ^{-1} es la inversa de ϕ sobre su imagen. □

Nota 4.14. Podríamos pensar que, además de afirmar que I no tiene estrategia ganadora, II la tiene sin necesidad de la hipótesis. Sin embargo, esto no es así, porque para que II tuviera una estrategia ganadora sin la hipótesis, haría falta poder elegir un elemento de cada conjunto de la familia $\mathcal{F}_n = \{b \in \mathcal{N} : b \in \phi(X_n)\}$ y para esto es necesario el Axioma Numerable de Elección.

Del mismo modo que el Axioma Numerable de Elección para conjuntos de números reales es consecuencia del Axioma de Determinación, cabe resaltar que una versión débil del Axioma de Determinación se cumple en ZF+DC:

Teorema 4.15. *Si asumimos ZF+DC, para todo conjunto A de la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{N}$ (σ-álgebra generada por los abiertos de la topología producto), el juego G_A está determinado.*

Demostración. Se puede consultar en [8], pág. 141. □

4.2. El juego de los cubrimientos

En esta última sección vamos a definir un juego infinito (ver 33.5 en [7]) al que llamaremos **"juego de los cubrimientos"**. Este juego va a tener un papel fundamental en el devenir del capítulo. A pesar de tener una definición un tanto compleja, veremos que posee una interpretación geométrica que facilita la comprensión de su funcionamiento.

Sean $S \subseteq [0,1]$ y $\epsilon > 0$. Consideramos ahora la sucesión de conjuntos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$K_n := \{G : \text{G unión finita de intervalos abiertos con extremos racionales y } \mu(G) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}}\}$$

Proposición 4.16. *(De [7], pág. 629) Para todo $n \in \mathbb{N}$ el conjunto K_n es numerable.*

Demostración. El conjunto de los intervalos abiertos con extremos racionales se puede inyectar con $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Por otro lado, $K_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_{n_p}$, donde

$$K_{n_p} = \{G : G \text{ unión de p intervalos abiertos con extremos racionales y } \mu(G) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}}\}$$

K_{n_p} se puede inyectar con $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})^p$, que también es numerable. Basta usar ahora que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable (proposición 1.17) y queda probado. □

Nota 4.17. Como, dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto K_n es numerable podemos enumerar sus elementos. Sea entonces $(G_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ una enumeración de K_n.

En estas condiciones, una partida $(a_o, b_o, a_1, b_1, ...) \subseteq \mathcal{N}$ la gana el jugador I si y solo si consigue los siguientes tres requisitos:

1. $a_n = 0, 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. $\overline{a} \in S$, donde
$$\overline{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

3. $\overline{a} \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{b_n}^n$.

Con el propósito de esclarecer la dinámica del juego vamos a explicar las consecuencias de cada una de las condiciones anteriores. Evidentemente, asumiremos que ambos jugadores desean alzarse con la victoria.

La primera condición establece que el jugador I ha de poner en juego tan solo $0's$ y $1's$ si no quiere perder. Esto es algo que depende única y exclusivamente de él, por lo que asumiremos que siempre lo consigue.

La segunda condición nos dice que si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de movimientos de I, entonces $\overline{a} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$ tiene que pertenecer al conjunto S fijado al inicio de la sección. Antes incluso de plantearnos si I puede conseguir que $\overline{a} \in S$ es necesario saber si la serie converge. Ahora bien, como sabemos que la primera condición siempre se satisface, tenemos que

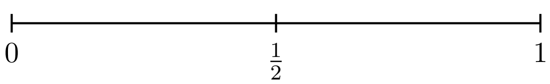
$$\overline{a} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 < +\infty$$

Resuelta esta cuestión volvemos a la pregunta de si depende de I que $\overline{a} \in S$. La cota anteriormente establecida nos permite afirmar que $\overline{a} \in [0, 1]$. Esto, unido a que S está fijo nos podría llevar a que, en efecto, I también puede cumplir siempre la segunda condición. Sin embargo, esto no es cierto, pues podría ocurrir que, conforme se van eligiendo movimientos el jugador I, forzado por los movimientos de II, (que estudiaremos ahora) no fuera capaz de construir $\overline{a}$ que estuviera en S.

Profundicemos en el significado de esta serie. La sucesión de movimientos $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la podemos ver como un número binario con parte entera 0. En otras palabras, dada la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la cual está formada por $0's$ y $1's$, consideramos el número cuya expresión binaria es $0.a_0a_1a_2\ldots$. Entonces, $\overline{a}$ no es más que la conversión a base 10 de $0.a_0a_1a_2\ldots$. De hecho, en cada movimiento el jugador I está eligiendo entre dos intervalos. Ilustremos esto con un ejemplo:

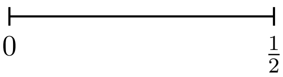
Ejemplo 4.18. Al inicio del juego, tenemos el intervalo $[0, 1]$:

Inicio del juego



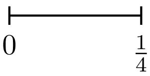
En la primera tirada, I puede elegir un 0 o un 1. Si elige un 0, el número final, es decir, a, estará en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Si, por el contrario, elige un 1, $a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (basta ver la forma de la serie para comprobarlo). Supongamos, sin pérdida de generalidad, que en la primera tirada elige un 0.

I elige $a_0 = 0$



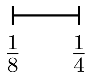
En su segunda tirada procederá de manera análoga, por lo que, de nuevo sin pérdida de generalidad, podemos suponer que elegirá un 0. Por tanto, tras dos tiradas, sabemos que $a \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Por tanto, al estar fijo el conjunto S, I puede ir eligiendo los números necesarios para que $a \in S$, una vez repetido este proceso infinitas veces.

I elige $a_1 = 0$



Si ahora, en su tercera tirada, el jugador I eligiera $a_2 = 1$, el intervalo resultante sería $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$:

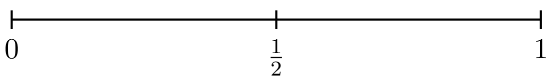
I elige $a_2 = 1$



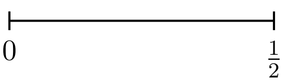
Para explicar el significado de la tercera condición vamos a cambiar el punto de vista y vamos a explicarla en términos de lo que hace el jugador II. Sabemos que I gana si se cumple las condiciones arriba escritas. Por tanto, II lo hará si puede cubrir $\overline{a}$ mediante $\bigcup_{n=0}^{\infty} G_{b_n}^n$ o si con estos abiertos puede hacer que $\overline{a} \notin S$. Para ello, en la tirada n_0-ésima II elige un número natural b_{n_0}. Con este número natural está eligiendo el conjunto b_{n_0}-ésimo del conjunto K_{n_0}, el cual podíamos enumerar por ser numerable (proposición 4.16). El propósito de II es cubrir $\overline{a}$ mediante $G_{b_{n_0}}^{n_0}$. De hecho, le basta conseguirlo en uno solo de sus movimientos.

De nuevo, ilustremos esto con un ejemplo, que en este caso constituye una simulación de los dos primeros movimientos de cada jugador:

Inicio del juego

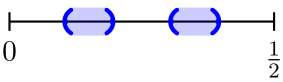


I elige $a_0 = 0$

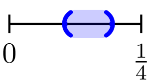


II elige b_0. Con ello está eligiendo $G_{b_0}^0$, que es el conjunto que podemos ver en azul.

II elige conjunto

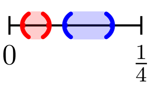


I elige $a_1 = 0$



II elige b_1. Con ello está eligiendo $G_{b_1}^1$, que es el conjunto que podemos ver en rojo.

II elige conjunto



4.3. AD y medida

En el segundo capítulo vimos una construcción clásica de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. En ella tuvimos que distinguir entre conjuntos medibles y no medibles. El objetivo de esta sección, y del trabajo, es probar que bajo AD no es necesario realizar esta distinción. Para ello, vamos a ver que todo conjunto de números reales es medible Lebesgue.

Comenzamos con el siguiente lema, que nos proporciona una manera especial de cubrir conjuntos de medida nula.

Lema 4.19. *(De [7], pág. 630) Dado Z conjunto de medida nula, este puede ser cubierto mediante una unión numerable de conjuntos H_n con $H_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como Z es un conjunto de medida nula,

$$Z \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mu(G_n) < \epsilon_0$$

donde $\epsilon_n = \dfrac{\epsilon}{2^{2(n+1)}}$ y los G_n son intervalos abiertos. Gracias a que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, podemos tomar los G_n con extremos racionales.

Por otro lado, como $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(G_n)$ es convergente, existe un n_1 suficientemente grande a partir del cual

$$\sum_{n=n_1}^{\infty} \mu(G_n) < \epsilon_1$$

Podemos aplicar el mismo argumento de manera inductiva, obteniendo una sucesión $0 = n_0 < n1 < \ldots < n_k < \ldots$ tal que

$$\sum_{n=n_k}^{\infty} \mu(G_n) < \epsilon_k$$

Definimos ahora $H_m = \bigcup_{n=n_m}^{n_{m+1}} G_n$, que cumplen que $H_m \in K_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. □

Vamos a ver ahora dos proposiciones que estudian las posibles consecuencias de que los respectivos jugadores cumplan algunas o todas las condiciones para ganar el juego de los cubrimientos descrito anteriormente.

Proposición 4.20. *(De [7], pág. 629) Sea $(a_o, b_0, a_1, b_1, \ldots) \subseteq \mathcal{N}$ partida del juego de los cubrimientos. Supongamos que el jugador I juega $0's$ y $1's$ mediante una estrategia. Entonces, la función*

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & b & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$

donde $\overline{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{2^{n+1}}$, es continua.

Demostración. Para probar que es continua basta probar que dado $b \in \mathcal{N}$, f es continua en b. Así mismo, notemos que $f = h \circ g$, donde

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathcal{N} & \to & \mathcal{N} \\ & & b & \mapsto & (a_o, a_1, a_2, ...) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcccc} h & : & \mathcal{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & (a_o, a_1, a_2, ...) & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$

Esta función está bien definida en el sentido de que $\overline{a} < +\infty$ gracias a que I juega $0's$ y $1's$. Al ser la serie convergente, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m' \geq N$ $\sum_{n=m'}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} < \frac{\epsilon}{2}$.

Sean, entonces, $\epsilon > 0$ y $m \geq N$. Para probar que f es continua en b basta ver que existe U_m entorno básico de b tal que $f(U_m) \subseteq B(f(b), \epsilon)$. Como vimos en el capítulo 2,

$$U_m := \{b' = \left(b'_o, b'_1, b'_2, ...\right) : b'_i = b_i \ \forall i = 0, \dots, m-1\}$$

es un entorno básico de b. Por otro lado,

$$g(U_m) \subseteq \{a_o\} \times \{a_1\} \times \cdots \times \{a_m\} \times \{\mathbb{N}\} \times \{\mathbb{N}\} \times \cdots$$

porque dadas m tiradas de II, tenemos $m+1$ de I al estar jugando mediante una estrategia.

Componiendo de nuevo,

$$f(U_m) = h(g(U_m)) = \{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{2^{n+1}} : a'_i = a_i \ \forall i = 0, \dots, m\}$$

Basta probar que para todo $z \in U_m$ se tiene que $|f(z) - f(b)| < \epsilon$. Ahora bien,

$$|f(z) - f(b)| = |f(z) - \overline{a}| = |\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}| =$$

$$|\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a'_n}{2^{n+1}} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}| \leq |\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a'_n}{2^{n+1}}| + |\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \qquad \square$$

Veamos ahora el siguiente resultado sobre la medida del conjunto S:

Proposición 4.21. *(Basado en [7], pág. 629) Supongamos que el jugador II tiene una estrategia ganadora τ. Entonces, dado $\epsilon > 0$, $\mu^*(S) < \epsilon$, es decir, S tiene medida nula.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y sea τ una estrategia ganadora de II. Para toda $s = (a_o, a_1, ..., a_n)$ sucesión finita de $0's$ y $1's$, denotamos por $G_s \in K_n$ al conjunto $G^n_{b_n}$ que juega el jugador II, donde $(b_o, b_1, ..., b_n)$ son los movimientos del jugador II en respuesta a $a_o, a_1, ..., a_n$.

Como τ es estrategia ganadora, dado $\overline{a} \in S$ el número formado a partir de los movimientos de I, obtenemos que

$$\overline{a} \in \bigcup_{s \subseteq \overline{a}} G_s$$

Tomando uniones:

$$S \subseteq \bigcup_{\overline{a} \in S} \bigcup_{s \subseteq \overline{a}} G_s \subseteq \bigcup_{s \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} G_s = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s$$

Por otro lado, sabemos que para todo $n \geq 1$, si $s \in \{0,1\}^n$, entonces $\mu(G_s) \leq \frac{\epsilon}{2^{2(n+1)}} < \frac{\epsilon}{2^{2n}}$. Así, gracias a las subaditividad de la medida

$$\mu\Big(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s\Big) < 2^n \frac{\epsilon}{2^{2n}} = \frac{\epsilon}{2^n}$$

Finalmente, y usando de nuevo la subaditividad, llegamos a lo siguiente:

$$\mu^*(S) \leq \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\Big(\bigcup_{s \in \{0,1\}^n} G_s\Big) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \epsilon$$

□

Teorema 4.22. *(Basado en [7], pág. 629) Supongamos cierto El Axioma de Determinación. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que si $Z \subseteq S$ es medible, tiene medida nula. Entonces, S tiene medida nula.*

Demostración. Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ cumpliendo lo del enunciado. Gracias a la proposición 2.37 y a que lo que realicemos en un cierto intervalo podemos llevarlo a otro mediante una traslación, podemos restringirnos al $[0,1]$. Así, supongamos que $S \subseteq [0,1]$. Veamos que $\mu^*(S) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Sea $\epsilon > 0$. Consideramos el juego de los cubrimientos descrito antes. Afirmo que I no tiene estrategia ganadora. Supongamos que I tiene una estrategia ganadora σ. Sea

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{N} & \to & \mathbb{R} \\ & & b & \mapsto & \overline{a} \end{array}$$

donde $(a_o, b_o, a_1, b_1, \ldots) = \sigma * b$ y $\overline{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$.

Por la proposición 4.20, f es continua. Por tanto, el conjunto $Z = f(\mathcal{N})$ es analítico (imagen por una función continua de $\mathcal{N}$ a $\mathbb{R}$). Por el Teorema 3.44, todo conjunto analítico es medible, por lo que Z es medible. Por otro lado, como σ es una estrategia ganadora para I, $Z \subseteq S$. Además, por hipótesis, Z tiene medida nula. Por el lema 4.19, podemos cubrir Z mediante $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$ con $H_n \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, si II juega $(b_o, b_1, b_2, \ldots)$, con $H_n = G^n_{b_n}$, y I juega mediante σ, entonces gana II. Por tanto, I no tiene una estrategia ganadora. Ahora, por AD, como todo juego está determinado, concluimos que II tiene una estrategia ganadora. Pero esto, por la proposición 4.21, hemos visto que implica que $\mu^*(S) = 0$. □

Corolario 4.23. *El teorema 4.22 implica que todo conjunto de números reales es medible Lebesgue.*

Demostración. Sea $X \subseteq \mathbb{R}$. Tomamos $A \supseteq X$ un conjunto medible con la propiedad de que todo conjunto medible $Z \subseteq A \setminus X$ tiene medida nula (esto es posible gracias a las proposiciones 2.39 y 2.40). Entonces, por el teorema 4.22, $A \setminus X$ tiene medida nula. Por tanto, es medible, al igual que su complementario $\mathbb{R} \setminus (A \setminus X) = (\mathbb{R} \setminus A) \cup X$. Pero como $X \subseteq A$, $((\mathbb{R} \setminus A) \cup X) \cap A = X$, que resulta medible por serlo A. Así, X es medible. □

Corolario 4.24. *El Axioma de Elección y el Axioma de Determinación son incompatibles.*

Demostración. Por el corolario 4.23, si asumimos el Axioma de Determinación, todo subconjunto de números reales es medible Lebesgue. Ahora bien, usando el Axioma de Elección se puede construir un conjunto de números reales no medible, como es el conjunto de Vitali. Así pues, estos axiomas no son compatibles. □

4.4. Otras consecuencias

En esta última sección vamos a enunciar otras dos consecuencias de trabajar con el sistema de axiomas ZF+DC+AD, como son que todo conjunto de números reales tiene la propiedad de Baire, y, en el caso de ser no numerable, tiene un subconjunto perfecto. Por tanto, si no se especifica lo contrario, usaremos este sistema.

En 1970, Solovay propuso un modelo de ZF+DC en el que todo conjunto de números reales es medible Lebesgue y se cumplen las dos consecuencias de AD de las que acabamos de hablar. Sin embargo, este modelo es más complejo y no posee un axioma como es AD del que se puedan deducir estas propiedades.[2]

Definición 4.25. (De [7], pág. 41) Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **denso en ninguna parte** si el interior de su clausura es vacío, es decir, si $\mathring{\overline{A}} = \varnothing$.

Definición 4.26. (De [7], pág. 148) Diremos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es **meager** o **de primera categoría** si es unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Todo conjunto que no es de primera categoría se llama **de segunda categoría**.

Definición 4.27. (De [7], pág. 148) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene la **propiedad de Baire** si existe un abierto O tal que $A \triangle O = (A \setminus O) \cup (O \setminus A)$ es de primera categoría.

Teorema 4.28. *Todo conjunto de números reales tiene la propiedad de Baire.*

Demostración. Se puede consultar en [7], pág. 629. □

Definición 4.29. Decimos que un conjunto no vacío $A \subseteq \mathbb{R}$ cerrado es **perfecto** si no tiene puntos aislados, es decir, si para todo $x \in A$ y para todo $U \in \mathcal{E}(x)$, $x \subsetneq U \cap A$.

[2]Ver [7], págs. 519 y 540.

Proposición 4.30. *(ZF+DC) Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ perfecto. Entonces es no numerable.*

Demostración. Se puede consultar en [8], pág. 32. □

Teorema 4.31. *Todo conjunto no numerable de números reales tiene un subconjunto perfecto.*

Demostración. Se puede consultar en [7], pág. 629. □

Bibliografía

[1] Colin Adams and Robert Franzosa. *Introduction to Topology pure and applied.* Pearson, 2008.

[2] Joan Bagaria. Set Theory. `http://plato.stanford.edu/entries/set-theory/`, 2014.

[3] Sterling K. Berberian. *Fundamentals of Real Analysis.* Springer, 1999.

[4] Rafael López Camino. *Topología.* eug, 2014.

[5] Paul J. Cohen. *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* The Benjamin/Cummings Publishing Company, INC., 1966.

[6] Derek Goldrei. *Classic Set Theory For Guided Independent Study.* Champman & Hall, 1996.

[7] Thomas J. Jech. *Set Theory.* Springer, 2003.

[8] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* Springer-Verlag, 1994.

[9] Víctor Fernández Laguna. *Teoría básica de conjuntos.* ANAYA, 2003.

[10] Azriel Levy. *Basic Set Theory.* Springer-Verlag, 1979.

[11] Luis Alías Linares. Apuntes de topología de superficies, 2014.

[12] Antonio Avilés López. Notas manuscritas sobre axiomática.

[13] Gregory H. Moore. *Zermelo's Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence.* Springer-Verlag New York, 1982.

[14] Michael Potter. *Set Theory and Its Philosophy.* Oxford University Press, 2009.

[15] H. L. Royden. *Real Analysis.* Macmillan Publishing Company, 1988.