



Universidad de Murcia
Grado en Matemáticas
TRABAJO FIN DE GRADO

Atracción local y global en dinámica discreta unidimensional

Realizado por
Alejandro Huertas López

Junio de 2014

Atracción local y global
en dinámica discreta unidimensional

Alejandro Huertas López

dirigido por

Víctor Jiménez López

Resumen

El objetivo del presente trabajo es reunir todos los resultados esenciales de atracción local y global de la dinámica del intervalo. Al tratarse del primer problema en este área, el más natural y simple, este trabajo puede servir como introducción a la teoría de sistemas dinámicos discretos unidimensionales a todo iniciado en ella. Aunque el estudiante del grado de Matemáticas de nuestra universidad no se encuentra familiarizado con este tema, su relativa sencillez y el interés científico que despierta la convierten, según nuestra opinión, en una excelente elección para un trabajo como el presente.

Lo más llamativo de la teoría de sistemas dinámicos discretos es su novedad. Es en la segunda mitad del siglo XX (más específicamente en la década de los 60) cuando se despierta la curiosidad en la dinámica discreta, después del descubrimiento de dos de las “joyas de la corona” de esta teoría: el teorema de Sharkovsky y el caos en el sentido de Li-Yorke. Los ordenadores modernos jugaron también un importante rol, ayudando a descubrir impresionantes fenómenos matemáticos que habían estado ocultos hasta entonces.

A diferencia de lo que ocurre en las ecuaciones diferenciales de una dimensión, los sistemas dinámicos discretos presentan a veces un comportamiento poco predecible (lo que se suele denominar como “caótico”); es más, esta complejidad dinámica no solo surge en los modelos teóricos, sino también suele aparecer en determinadas aplicaciones. Éste es un tema muy fascinante, pero probablemente demasiado complicado para el iniciado en este campo. En su lugar, nos centraremos en el problema más simple (pero ni por asomo trivial) de todos: dilucidar cuando un punto fijo puede atraer las órbitas de todos los puntos cercanos a él, o incluso de todos los puntos del sistema. Solo haremos uso en este trabajo de herramientas del análisis clásico, que el estudiante de grado debe de conocer. A cambio, y salvo en el apéndice A, nuestra intención es dar una prueba rigurosa y legible de todos los resultados que se presenten.

Comenzaremos el trabajo con una pequeña introducción a los sistemas dinámicos en general (sección 1.1), dando en primer lugar una clasificación de los mismos en función del espacio de tiempos y justificando así la aparición de los sistemas dinámicos discretos como un caso particular. Centraremos nuestra atención en aquellos sistemas dinámicos discretos $\{I, f\}$ que presenten una función de evolución f continua, nunca desmarcándonos del campo unidimensional (el intervalo generalizado I de la recta real).

Introducimos entonces el primer método para estudiar sistemas dinámicos discretos: el dibujo en telaraña, principal herramienta gráfica en dinámica discreta la cual aconsejamos al lector que se aventure en estas líneas a usar siempre que no entienda un resultado, noción o demostración particular. Más tarde, damos a conocer la noción de punto de equilibrio (o punto fijo): un punto $x \in I$ tal que $f(x) = x$ (gráficamente, la intersección de la recta $y = x$ con la curva $y = f(x)$ en el dibujo en telaraña). Los puntos fijos serán el objeto central de nuestro estudio, para los cuales damos los resultados básicos de existencia y caracterización (teoremas 1.2.6 y 1.2.7). Además, enumeramos un conjunto de definiciones que usaremos a posteriori: órbita, trayectoria, ciclo y punto periódico, entre otros.

Terminamos el primer capítulo con el teorema de la función contractiva (teorema 1.3.2), un resultado de análisis clásico que en realidad es un caso particular del teorema del punto fijo de Banach. La adaptación de este teorema en dinámica discreta unidimensional lo convierte en nuestro primer resultado de la teoría de atractores globales. Pese a ser un potente resultado, requiere importantes suposiciones que no suelen encontrarse en las aplicaciones; luego nuestro principal reto en este trabajo será encontrar condiciones de atracción global más débiles y prácticas.

Como ya hemos dicho, el cuerpo de la memoria (capítulos 2 y 3) está dedicado al estudio de la atracción local y global de sistemas dinámicos discretos. Por tanto, comenzamos precisamente dando estas definiciones e introduciendo algunos conceptos relacionados (punto fijo estable e inestable, repulsor, etc.).

A diferencia de lo usual en los tratados de dinámica discreta, solo estudiaremos estas propiedades en el caso de puntos fijos. Algunos de nuestros resultados pueden fácilmente ser generalizados a órbitas periódicas de cualquier periodo, únicamente teniendo en cuenta el hecho de que si un punto es periódico de periodo n para la aplicación f , entonces es un punto fijo para la n -ésima iterada de f . Hemos decidido hacerlo de esta manera para simplificar. Sin embargo, como veremos luego, las órbitas periódicas (en especial, las de periodo 2) tendrán un papel importante en la atracción global.

En primer lugar, centramos nuestra atención en el caso local. El capítulo 2 recogerá una colección de resultados y criterios que justifiquen cuándo un punto fijo es estable o atractor local. Lo primero que hacemos es dar una colección de criterios basados en la derivabilidad de f (sección 2.2); nuestra idea es enfatizar que el comportamiento dinámico de las órbitas cercanas al punto fijo está estrechamente relacionado con las propiedades analíticas de la función de evolución.

Una vez visto esto, avanzamos más allá, sin suponer propiedades diferenciales de nuestra aplicación. Sorprendentemente, llegamos a que la atracción local puede ser caracterizada por una propiedad puramente topológica. De este modo, llegamos al segundo gran teorema de este trabajo: la caracterización de atractores locales (teorema 2.3.3). A partir de este teorema, encontramos una propiedad necesaria para todo atractor local (la llamada propiedad RN). Tras añadir a esta condición algunas suposiciones (fácilmente comprobables en la práctica) surgen nuevos criterios de atracción local, recogidos en el apartado 2.3.1. Por último, como consecuencia de la caracterización de atractores locales, llegamos a un sorprendente resultado con el que cerramos el capítulo: todo punto fijo atractor es estable. Aunque esta propiedad parezca natural o incluso una obviedad, es importante subrayar que se trata de una propiedad puramente unidimensional: aplicaciones definidas en el plano, por ejemplo, no tienen por qué satisfacerla.

Una vez realizado nuestro estudio de la teoría local, pasamos a la teoría de atractores globales (capítulo 3). En este último capítulo se establecerán detalladamente los principales resultados de este trabajo. Estos resultados son de especial interés por su uso en las aplicaciones (especialmente las relativas a la derivada schwarziana). Por supuesto, todo atractor

global es también local, por lo que todo lo dicho antes sobre atractores locales sigue siendo cierto. Queremos saber bajo qué condiciones un atractor local es, de hecho, atractor global.

Para empezar, podemos adaptar la caracterización de atractores locales vista anteriormente a atractores globales. La derivada schwarziana, una herramienta esencial en dinámica unidimensional usada por Allwright y Singer en 1978, es estudiada en profundidad en la sección 3.2. En particular, se demuestran el principio del mínimo 3.2.4 y la proposición 3.2.2 (la derivada schwarziana conserva signos por composición).

Como era de esperar, es necesaria una versión global de la propiedad RN para asegurar atracción global. Demostramos entonces un importante resultado (3.3.3): si una aplicación posee como mucho un punto crítico (extremo relativo) y su derivada schwarziana es negativa, entonces la atracción local es suficiente para garantizar que el atractor es global.

Si bien se pueden obtener resultados más generales que los vistos anteriormente, creemos que este enfoque no resultaría tan gratificante. En su lugar, en la sección 3.4 recurrimos a hipótesis sobre el espacio de fases. De hecho, si el intervalo I es compacto, es posible probar un potente resultado demostrado por Coppel (teorema 3.4.3). En él se obtiene la convergencia de toda trayectoria a algún punto fijo, bajo suposición de no existencia de órbitas periódicas de periodo mayor que 1. Merece la pena destacar que no son necesarias condiciones sobre la derivabilidad de f para llegar a este resultado. Como consecuencia (corolario 3.4.4), si I es compacto, un punto fijo es atractor global si y solo si es el único punto periódico de la aplicación f .

Terminamos el cuerpo del trabajo estableciendo un resultado con el cual aseguramos que la no existencia de ciclos de orden 2 garantiza la no existencia de ciclos de cualquier otro periodo mayor que 1 (proposición 3.4.5), simplificando las hipótesis en el teorema 3.4.3. De acuerdo con esto, para ver que un punto fijo α es atractor global de un sistema dinámico discreto con espacio de fases compacto solo tenemos que comprobar la igualdad

$$\{x \in I : f^2(x) = x\} = \{x \in I : f(x) = x\};$$

y ver que ambos conjuntos son degenerados en un punto. En otras palabras, si ambas ecuaciones

$$f^2(x) = x,$$

y

$$f(x) = x,$$

tienen exactamente una (y por tanto la misma) solución, entonces esta solución es el atractor global del sistema dinámico discreto $\{I, f\}$ (recordemos que el teorema 1.2.6 garantiza la existencia de al menos una solución en estas ecuaciones).

Para concluir esta memoria, exponemos en el anexo A dos de los principales teoremas de la dinámica discreta unidimensional, que, pese a estar fuera de nuestro alcance, es casi “obligatorio” incluirlos en un trabajo como éste. Hablamos, por supuesto, del teorema de Sharkovsky (apéndice A.1) y de la definición de caos dada por Li-Yorke (apéndice A.2). Para amenizar

la lectura, excluimos sus demostraciones y añadimos unas breves anotaciones históricas. Por último, pero no menos significativo, se incluye un importante teorema de clasificación de funciones continuas del intervalo demostrado por Smítal en los ochenta (apéndice A.3).

Abstract

The aim of the present work is to collect all the essential results on local and global attraction in interval dynamics. Since this is the first, more natural, and simplest problem to deal with in the area, it can also be seen as a beginner introduction to the theory of one-dimensional discrete dynamical systems. Although students of the degree in Mathematics of our university are not acquainted with this subject, its relative simplicity and great scientific interest makes it, in our opinion, an excellent choice for a work like the present one.

Novelty is the most striking aspect of the theory of discrete dynamical systems. The interest in discrete dynamics grew spectacularly in the sixties, after the discovery of two of the “crown jewels” of the theory, Sharkovsky’s theorem and chaos in the sense of Li-Yorke. Modern computers played also an important role, helping to discover amazing mathematical phenomena that had laid hidden until then.

In contrast to one-variable differential equations, discrete dynamics in dimension one often features unpredictable (“chaotic”) behaviour; moreover, this dynamical complexity not only arises in theoretical models but also in concrete applications. This is a fascinating issue, but it is probably too hard for a beginner in the subject. Instead, we will concentrate in the simplest (but still far from trivial) problem of all: elucidating when a fixed point may attract the orbits of all neighbouring points, or even all points. Only standard classical analysis tools, easily available to any pregraduate student, will be used in the work. In return, with the sole exception of appendix A, we will provide complete and (we hope) readable proofs of all results herein.

For starters, a short introduction to general dynamical systems is given, first classifying them according to the nature of their sets of time, and then deriving discrete dynamical systems as a particular case. We will focus our attention in those discrete dynamical systems $\{I, f\}$ having a continuous evolution function f , and always restrict ourselves to the simplest phase space, that is, when I is a subinterval of the real line.

Following on, the main graphical tool in discrete dynamics in dimension one (the cobweb plot) is introduced. The non-specialist reader is strongly encouraged to resort to it when trying to understand a particularly subtle result, concept or proof. Then we present the notion of fixed point: a point $x \in I$ such that $f(x) = x$ (graphically, fixed points are the intersection points between the straight line $y = x$ and the curve $y = f(x)$ in the cobweb plot). Fixed points will be the central object of our study, which starts with some basic results of existence and characterization (theorems 1.2.6 and 1.2.7). Also, we list here several basic notions: orbit, trajectory, cycle and periodic point, among others.

We conclude the first chapter with the contraction mapping theorem (theorem 1.3.2), a result from classical analysis that is a particular case of the Banach fixed point theorem. When translated to the one-dimensional setting can be seen as the first nontrivial result in the theory of global attractors. While still useful, it requires some strong assumptions not often found in applications; finding weaker and more practical conditions for global attraction will be our main challenge in this work.

As already indicated, the core of the memoir (chapters 2 and 3) is devoted to local and global attraction for one-dimensional discrete dynamical systems. Thus we begin by defining precisely these notions and introducing some related concepts (stable and unstable fixed point, repeller, etc.).

In contrast to what it is usually done in the standard monographs on the subject, we will only study these properties in the case of fixed points. True, some of our results can be easily generalized to periodic orbits of any period, basically taking advantage of the fact that if a point is periodic of period n for a map f , then it is a fixed point of the n -th iterate of f . We have chosen not to do this for the sake of simplicity. Still, as we will see later, periodic orbits (specially those of period 2) have an important say as far as global attraction is concerned.

Firstly, we focus on the local case. Chapter 2 collects a number of results and criteria clarifying when a fixed point is stable or a local attractor. We begin by establishing some criteria based on the differentiability of f (section 2.2); our aim is to emphasize that the dynamical behaviour of the orbits near a fixed point is closely related to the analytical properties of the map.

After this we go further, assuming no differentiability properties for our map. Surprising enough, it turns out that local attraction can be characterized by a purely topological property. In this way, we arrive to the second important result of this work: the characterization of local attractors (theorem 2.3.3). As a consequence, a necessary condition for local attraction (the so-called NF -property) is identified. After adding to this condition some extra hypotheses (easy to check in practice) a number of sufficient criteria for local attractivity arise, as listed in paragraph 2.3.1. Then, as a consequence, we arrive to the remarkable result closing the chapter: all locally attracting fixed points are stable. While this may seem a natural or even obvious fact, it is important to stress that is a purely one-dimensional property: maps from the plane into itself, for instance, need not have it.

After completing our study of local attraction, we turn our attention to the theory of global attractors (chapter 3). In this last chapter the main results in this area will be proved in detail. They are of special interest as they are often used in applications (specially that concerning the schwarzian derivative). Of course, a global attractor is local as well, so much of what we have said before still stands true. Now we want to know under what conditions a local attractor is indeed global.

To begin with, global attractors can be characterized very much in the same fashion as local attractors earlier. The schwarzian derivative, an essential tool in one-dimensional dynamics first used by Allwright and Singer in 1978, is then studied in deep in section 3.2. In particular, the Minimum Principle (theorem 3.2.4) and proposition 3.2.2 (the sign of schwarzian derivative is preserved under composition) are proved there.

Not surprisingly, a global version of the NF -property is needed to ensure global attraction. Now a very nice result holds (theorem 3.3.3): if a map has at most one critical (turning) point and its schwarzian derivative is negative, then local attraction is sufficient to guarantee that the attractor is global.

While more general results than those previously described can be obtained, we do not feel that this is a particularly rewarding approach. Instead, in section 3.4 the emphasis is put on the phase space itself. Indeed, if the interval I is compact, then it is possible to prove a very powerful result due to Coppel (theorem 3.4.3). It states that if a map has no periodic orbits of periods greater than 1, then all trajectories converge to fixed points. It is worth emphasizing that no differentiability conditions must be imposed on f . As a consequence (corollary 3.4.4), a fixed point is a global attractor if and only if it is the only periodic point of the map f .

We complete the main body of this work formulating a proposition that ensures that the nonexistence of cycles of order 2 implies that there is no cycle of any order except 1, thus simplifying the statement of theorem 3.4.3. According to this, to show that a fixed point α is the global attractor of a discrete dynamical system with compact phase space we just have to check the equality

$$\{x \in I : f^2(x) = x\} = \{x \in I : f(x) = x\};$$

and show that this set consists of the single point α . In other words, if both equations

$$f^2(x) = x,$$

and

$$f(x) = x,$$

have exactly one (and hence the same) solution, then this solution is the global attractor of the discrete dynamical system $\{I, f\}$ (recall that by theorem 1.2.6 the above-mentioned equations always have at least one solution).

To conclude this memoir we recall two of the landmarks of one-dimensional discrete dynamics in appendix A; this is beyond our bounds but it is almost “compulsory” in a work like this. We are speaking, of course, of Sharkovsky’s theorem (appendix A.1), and Li-Yorke’s definition of chaos (appendix A.2). To ease the reading, detailed proofs are generally avoided and some brief historical remarks have been included. Last, but not least, an important classification theorem of continuous mappings of the interval proved by Smítal in the eighties is added as well (appendix A.3).

Índice general

Introducción	13
1. Nociones básicas y primeros resultados	15
1.1. La noción de sistema dinámico	15
1.2. Sistemas dinámicos discretos	16
1.3. El teorema de la función contractiva	21
2. Teoría local de sistemas dinámicos discretos	24
2.1. La noción de estabilidad	24
2.2. Condiciones de estabilidad basadas en la derivabilidad	26
2.3. Caracterización de atractores locales	34
2.3.1. Criterios de atracción basados en la propiedad RN	39
2.4. Atracción frente a estabilidad	41
3. Teoría global de sistemas dinámicos discretos	43
3.1. Caracterización de atractores globales	43
3.2. Propiedades de la derivada schwarziana	44
3.3. Condiciones de atracción global	47
3.4. Atracción global en intervalos compactos	51
A. Los grandes teoremas de la dinámica discreta unidimensional	55
A.1. El teorema de Sharkovsky	56
A.2. Caos según Li-Yorke	59
A.3. Clasificación de las funciones continuas del intervalo en función del teorema de Sharkovsky	62
Bibliografía	65

Introducción

Desde la segunda mitad del siglo XX están apareciendo nuevas disciplinas dentro de las matemáticas convencionales. Estos nuevos campos de estudio surgen debido a la aparición de las nuevas tecnologías y demás herramientas sofisticadas de cálculo, y la consiguiente necesidad de adaptar las matemáticas a estos ámbitos para aportar todos sus conocimientos. Una de estas nuevas doctrinas son los sistemas dinámicos.

La dinámica es la ciencia que estudia la evolución de un sistema con respecto al tiempo, dando a conocer el comportamiento asintótico del mismo, es decir, hacia qué estado tiende el sistema. Surgen así las nociones de caos y estabilidad de un sistema, como si del yin y el yang de la dinámica se tratasen. Desde un punto de vista puramente teórico, al científico le interesa saber el proceder del sistema en cualquier tiempo o intervalo de tiempo, no dejando “huecos” en su estudio. A veces, esta metodología es imposible de llevar a cabo en la práctica. Surge así la necesidad de elegir dónde interesa estudiar y conocer el comportamiento del sistema. De esta necesidad de elección aflora la aparición de la partición del tiempo, que no es más que una forma de discretizarlo, dando lugar a lo que conocemos como dinámica discreta.

La dinámica discreta tiene sus orígenes en el siglo XIX (e incluso antes). Sin embargo, no es hasta bien entrado el siglo XX cuando se desata un verdadero interés por esta rama de las matemáticas. Uno de los principales usos de la dinámica discreta es adaptar los conocimientos teóricos matemáticos a la práctica. Mención especial al respecto merecen los métodos numéricos. La gran mayoría de métodos numéricos tienen como fundamento la idea de partición del tiempo, convertir algo infinito e incontable en algo finito (de un tamaño considerable, eso es cierto, pero finito al fin y al cabo) y contable, y “facilitar” así los cálculos aplicados.

Una de las herramientas más útiles de las matemáticas son las ecuaciones diferenciales (y de forma más general, las ecuaciones en derivadas parciales), básicas en la modelización matemática. En el argot que asumiremos en este trabajo, las ecuaciones diferenciales son un tipo de sistemas dinámicos donde el espacio de tiempos es continuo. El principal problema que plantean estas ecuaciones es que no se dispone de soluciones analíticas para todas (entiéndasenos, existen brillantes resultados que aseguran la existencia de soluciones de la gran mayoría de ecuaciones diferenciales, pero no así que dicha solución tenga nombre en el lenguaje matemático). No obstante, la ecuación de por sí puede aportar más significado al modelo que su solución. No es tan importante encontrar dicha solución si poseemos herramientas para poder simular su comportamiento. Entran en juego entonces los ya mencionados métodos numéricos, en cuyo trasfondo teórico se hallan los sistemas dinámicos discretos.

Existen además muchos procesos en las ciencias aplicadas que no se pueden modelar mediante sistemas continuos. Una gran cantidad de modelos matemáticos para la biología o la economía se basan en sistemas dinámicos discretos. El más famoso, el logístico, viene dado por

$$h_a(x_n) = ax_n(1 - x_n) \quad a \in [0, 4],$$

y suele aplicarse a poblaciones de carácter estacional (pensemos en los molestos mosquitos del verano). Aquí, sin duda, tiene mucho más sentido hacer un conteo años por año que un estudio continuo.

Mucho han tenido que ver también los modernos ordenadores en el reciente interés por la dinámica discreta. Según autores tales como Richard A. Holmgren, los sistemas dinámicos discretos son esencialmente funciones iteradas, y si hay algo que los ordenadores sepan hacer bien, es iterar. El ordenador dio sencillez al uso de los métodos numéricos, es cierto, pero también generó un gran desconcierto cuando puso de manifiesto comportamientos hasta entonces no imaginados. Surge así el deseo de intentar explicar estos procesos “caóticos”, lo que ha generado toda la doctrina de la que aquí solo se expondrá una pequeña parte. Hablamos, como se ve, de una disciplina altamente no trivial y con grandes aplicaciones prácticas: ¡no es de extrañar que haya suscitado el interés de la comunidad matemática!

Este trabajo es una colección de resultados clásicos de dinámica discreta unidimensional, y podría servir de introducción a esta disciplina a un neófito en la misma. No es nuestra intención complicar la lectura con difíciles resultados y complejas demostraciones; no obstante, como buena introducción que esperamos que sea, intentaremos ser lo más riguroso posible en nuestros cálculos. Centraremos nuestro estudio en el problema más sencillo de todos, aunque no por ello ni mucho menos trivial: analizar la dinámica provocada por la atracción a puntos fijos.

La lectura de este trabajo es completamente lineal: comenzamos estableciendo los conocimientos básicos de esta teoría, a partir de los cuales vamos desarrollando nuestro estudio, estableciendo condiciones de atracción (es decir, convergencia de las trayectorias generadas mediante iteración que comienzan en cualquier punto del sistema), en primer lugar local (es decir, en un determinado entorno del punto), para después poder formular los grandes teoremas de la atracción global (esto es, en todo el sistema). Como añadido, se establece un apéndice donde se dan a conocer dos de los resultados “estrella” de la dinámica discreta unidimensional: el teorema de Sharkovsky y el teorema de Li-Yorke, junto con algunas consecuencias de los mismos.

Alejandro Huertas López
Murcia, junio de 2014

Capítulo 1

Nociones básicas y primeros resultados

1.1. La noción de sistema dinámico

Comenzaremos este trabajo dando a conocer al lector las nociones básicas de sistema dinámico y, en particular, de sistema dinámico discreto (s.d.d. para abreviar):

Definición 1.1.1. *Un **sistema dinámico** es una terna (S, T, Φ) formada por un espacio topológico S , llamado **espacio de fases**, un semigrupo aditivo T de \mathbb{R} (con elemento neutro), llamado **espacio de tiempos** y una aplicación*

$$\Phi : T \times S \longrightarrow S$$

que satisface:

1. Φ es una aplicación continua.
2. $\Phi(0, x) = x$, para todo $x \in S$.
3. $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$, para todo $t, s \in T$, y todo $x \in S$

A la aplicación Φ se le conoce como **evolución del sistema**.

De una manera menos formal, un sistema dinámico es una manera de describir la evolución en el tiempo de todos los puntos de un sistema S . Un semigrupo aditivo T de \mathbb{R} es un subconjunto de \mathbb{R} cerrado para la suma que contiene al 0. Con esta definición, el espacio de tiempos T puede ser tanto un subconjunto discreto de \mathbb{R} (los números naturales, por ejemplo) como un intervalo o unión de intervalos de \mathbb{R} . La aplicación Φ determina la evolución del sistema con respecto al tiempo, propiciando todos los cambios que desarrolle el sistema en un futuro.

Acabamos de ver una clasificación básica de los sistemas dinámicos según la naturaleza del espacio de tiempos T . Diremos que un sistema dinámico es **continuo** cuando su espacio

de tiempos sea \mathbb{R} , $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ o $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, principalmente. Un sistema dinámico se considerará **discreto** cuando el espacio de tiempos T sea \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$. Es fácil ver que el flujo de un sistema de ecuaciones diferenciales lineal y autónomo

$$Y' = AY,$$

con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ genera un sistema dinámico continuo, donde el espacio de fases es \mathbb{R}^n , el espacio de tiempos es \mathbb{R} y el flujo del sistema diferencial es la evolución del sistema dinámico. Se puede mejorar este resultado para un sistema $Y' = F(Y)$, con $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $F \in C^1(\Omega)$, añadiendo hipótesis sobre el dominio de definición de las soluciones. Esto último establece un primer contacto entre la teoría de ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos.

1.2. Sistemas dinámicos discretos

Más arriba se ha dado una ligera intuición de lo que es un sistema dinámico discreto. Los sistemas dinámicos discretos en los que centraremos nuestra atención son aquellos en los que el espacio de tiempos es numerable. Más en particular, nos centraremos en sistemas en donde el espacio de tiempos será $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Obtenemos un primer resultado interesante para este tipo de sistemas dinámicos discretos:

Teorema 1.2.1. *Sea $(S, \mathbb{N} \cup \{0\}, \Phi)$ un sistema dinámico discreto. Entonces existe una función continua $f : S \rightarrow S$ tal que*

$$\Phi(n, x) = f^n(x) \quad \forall x \in S.$$

Entendiéndose por f^n la composición de f n veces y $f^0 = Id$.

Demostración.

Definimos la aplicación f de forma natural como sigue:

$$f(x) := \Phi(1, x)$$

para cada $x \in S$. Es claro que f es continua (por definición, ya que Φ lo es). Por otro lado, y haciendo uso de las propiedades de Φ , se tiene que

$$f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = \Phi(1, f(x)) = \Phi(1, \Phi(1, x)) = \Phi(2, x).$$

Actuando por inducción y suponiendo cierto para $n - 1$,

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = \Phi(1, \Phi(n-1, x)) = \Phi(n, x),$$

lo cual es cierto para cada $x \in S$ y para todo $n > 0$. Para el caso $n = 0$ se sigue que

$$\Phi(0, x) = x = f^0(x),$$

lo cual se toma por convenio. □

En lo sucesivo y en todos los sistemas dinámicos discretos que consideremos, $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y S será un intervalo de la recta real \mathbb{R} . Por lo tanto, y en virtud del teorema anterior, formalizamos la definición de sistema dinámico discreto como sigue:

Definición 1.2.2. *Sea I un intervalo contenido en \mathbb{R} que contiene al menos dos puntos distintos y sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. La dupla $\{I, f\}$ se conoce como **sistema dinámico discreto sobre I de primer orden y autónomo**.*

Un s.d.d. es de orden k si $x_k = f(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$, o, de forma más general,

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}).$$

Decimos también que el sistema es autónomo si el tiempo no influye de forma explícita en la definición de la función de evolución f . El sistema es no autónomo si $f = f(n, x_n)$.

Surgen varias observaciones a tener en cuenta a partir de la definición anterior. En primer lugar, es directo comenzar a clasificar los s.d.d. en función del tipo de aplicación que los define. Así, diremos que un s.d.d. $\{I, f\}$ es **lineal** si f es lineal; **afín** si f es afín; y **no lineal** si f es no lineal. Por otro lado, a partir de un s.d.d. $\{I, f\}$ y un valor inicial $x_0 \in I$, queda unívocamente determinada una sucesión x_n definida por recurrencia como sigue:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n \in \mathbb{N},$$

para la cual

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = (f \circ f)(x_0), \\ \dots & \\ x_n &= f(x_{n-1}) = \dots = f(f(\dots(f(x_0))\dots)) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x_0), \end{aligned}$$

donde todas las evaluaciones de f se encuentran bien definidas ya que $f(I) \subseteq I$. Siguiendo la nomenclatura utilizada en la demostración del teorema 1.2.1, la n -ésima iteración de f la denotaremos como f^n . Luego por el comentario de arriba, se tiene que

$$x_n = f^n(x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Surge así la definición de órbita y trayectoria:

Definición 1.2.3. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d., la sucesión*

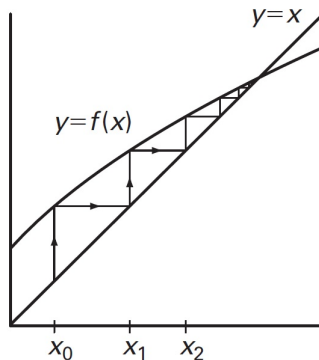
$$(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots)$$

*se conoce como **trayectoria** (o **solución**) del s.d.d. correspondiente al valor inicial x_0 . La denotaremos como $\gamma(I, f, x_0)$. Al conjunto de puntos que constituyen esta trayectoria se le conoce como **órbita** del s.d.d. correspondiente al valor inicial x_0 :*

$$\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\} = \{x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}.$$

*De igual forma, se define el **diagrama de fases** del s.d.d. $\{I, f\}$ como el conjunto de todas las órbitas del sistema al variar $x_0 \in I$.*

Es frecuente tomar como sinónimos órbita y trayectoria. Nuestra intención es hacer notar la distinción entre la trayectoria (la sucesión de puntos surgidos al iterar f) y la órbita (el conjunto de todos estos puntos) del s.d.d. correspondiente a un valor inicial. Utilizaremos ambas nociones sin distinción cuando no sea relevante distinguir entre conjunto y sucesión. La diferencia entre estas dos se hará más notable cuando introduzcamos la noción de órbita periódica. Antes, veamos que es de destacada utilidad para la comprensión de la noción de órbita de un sistema el uso de gráficas. Una forma muy usual de visualizar órbitas es mediante la iteración gráfica, tal y como detallan en [8]. Este procedimiento es usualmente llamado en la bibliografía como **dibujo en telaraña**. La idea es sencilla: superponemos en la misma gráfica la curva $y = f(x)$ y la recta diagonal $y = x$. Comenzamos en el punto (x_0, x_0) en la recta diagonal y dibujamos una recta vertical que corta la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$. Realizamos una recta horizontal que corta de nuevo en la diagonal en el punto (x_1, x_1) , e iteramos el proceso llevado en (x_0, x_0) . Podemos observar que en el eje-x este proceso da lugar a la sucesión $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$. Visualmente, el método de la iteración gráfica queda como sigue:



El astuto lector se habrá fijado que en la figura anterior hay un punto especial donde se cortan la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x$, donde, como es obvio, si hubiésemos empezado a iterar desde ese punto, no nos habríamos movido de él. Este tipo de puntos, en analogía con los puntos críticos en ecuaciones diferenciales, tienen una vital importancia en la teoría de sistemas dinámicos discretos.

Definición 1.2.4. Dado un sistema dinámico discreto $\{I, f\}$, un punto $\alpha \in \mathbb{R}$ se llama **punto de equilibrio** (o **punto fijo**) para el s.d.d. si

$$\alpha = f(\alpha), \quad \alpha \in I.$$

Obviamente, si α es un punto de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f\}$, entonces α es un punto fijo para el s.d.d. $\{I, f^n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como ya se ha mencionado antes, la trayectoria de un punto fijo α viene dada por $\gamma(I, f, \alpha) = (\alpha, \alpha, \alpha, \dots)$. A este tipo de trayectorias se les llama **estacionarias**.

De forma más general, si para un cierto $x_0 \in I$ existe un n tal que $f^n(x_0) = \alpha$, siendo α un punto fijo del sistema, entonces a su trayectoria se le llama **finalmente estacionaria**:

$$\gamma(I, f, x_0) = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), \alpha, \alpha, \dots),$$

es decir, la trayectoria del punto x_0 llega a un punto fijo y se hace estacionaria.

Definición 1.2.5. Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Un **ciclo de orden s** (u **órbita periódica de periodo s**) es un conjunto de s valores de I , $\{x_0, x_1, \dots, x_{s-1}\}$, distintos entre sí, que verifican

$$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad \dots, \quad x_{s-1} = f(x_{s-2}), \quad x_0 = f(x_{s-1})$$

y s es el menor valor para el que ocurre esto.

Análogamente, decimos que un punto $p \in I$ es un **punto periódico de periodo s** si pertenece a una órbita periódica de periodo s .

En estas condiciones, es claro que la trayectoria de un punto periódico de periodo s es:

$$\gamma(I, f, x_0) = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_0, \dots).$$

Volviendo a la distinción entre órbita y trayectoria, en el caso anterior, mientras que la trayectoria sería $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}, x_0, \dots)$, su órbita sería $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{s-1}\}$, y por ser un conjunto, no importaría el orden en el que se diesen.

Al igual que ocurre con los puntos fijos, decimos que una órbita que comienza en un punto x_0 de un s.d.d. es **finalmente periódica de periodo s** si existe $h \in \mathbb{N}$ y un conjunto de puntos $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}\}$ distintos entre sí tal que

$$x_h = \alpha_0, \quad x_{h+1} = \alpha_1, \quad \dots, \quad x_{h+s} = \alpha_0,$$

es decir, la trayectoria de x_0 “cae” en una órbita periódica de periodo s donde permanece para todo tiempo posterior.

Es el momento idóneo para hacer una breve parada. En este trabajo, hemos de tener siempre presente el paralelismo existente entre puntos fijos y puntos periódicos: sea $\{I, f\}$ un s.d.d., todo punto fijo es un punto periódico de periodo 1 y todo punto periódico de periodo s es un punto fijo para el s.d.d. $\{I, f^s\}$ (en realidad, es un punto de equilibrio para $\{I, f^{ks}\}$, con $k \geq 1$).

Muchos autores hacen uso de esta equivalencia y únicamente realizan un estudio de órbitas periódicas, dejando el estudio de puntos de equilibrio como un caso particular. Aquí, actuaremos de forma contraria: basándonos en esta dualidad, nos centraremos en el estudio de puntos fijos del sistema, escudándonos en que tienen un punto de vista más atractivo en las aplicaciones y dejaremos el estudio de puntos periódicos como una generalización. Haremos mención a esta dualidad entre puntos fijos y puntos periódicos en los futuros resultados donde creamos que es importante remarcar este hecho.

Nuestro objetivo ahora es calcular cuándo un punto cualquiera de un s.d.d. es un punto fijo y bajo qué condiciones una órbita será periódica. Antes de nada, debemos garantizar la existencia de puntos fijos para un s.d.d. Se tiene que, bajo la definición de s.d.d. 1.2.2 (se da por supuesto que $f : I \rightarrow I$ siempre será continua), solo es necesario que el intervalo de definición I sea cerrado y acotado para asegurar la existencia de puntos fijos.

Teorema 1.2.6. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. con $I = [a, b]$ compacto. Entonces existe un punto $\alpha \in I$ tal que $\alpha = f(\alpha)$. Luego α es un punto fijo para el s.d.d. $\{I, f\}$.*

Demostración.

Consideramos la función $g(x) = x - f(x)$, la cual es continua en I por ser diferencia de funciones continuas en I . Como $f(I) \subseteq I$, se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$g(a) = a - f(a) \leq 0 \leq b - f(b) = g(b),$$

ya que $f(a) \in [a, b]$ luego $f(a) \geq a$ por ser a ínfimo de I y $f(b) \in [a, b]$ luego $f(b) \leq b$ por ser b supremo de I .

Por lo tanto, se tiene que, o $g(a) = 0$, o $g(b) = 0$ o, si no se da ninguna de éstas, por el teorema de Bolzano sobre la existencia de ceros para funciones continuas con extremos negativos y positivos, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$. Luego, ya valga cualquiera de las anteriores, se ha demostrado la existencia de un $\alpha \in [a, b]$ tal que $g(\alpha) = 0$, o equivalentemente, $f(\alpha) = \alpha$.

□

Con este teorema hemos probado la existencia de puntos fijos para cualquier s.d.d. donde el espacio de fases sea cerrado y acotado. Las tesis de este teorema son totalmente necesarias, ya que, si I es abierto o no acotado, no tenemos garantizada la existencia de puntos fijos, como ocurre, por ejemplo, con los s.d.d. $\{\mathbb{R}, e^x\}$ y $\{(0, \pi), \text{sen } x\}$.

Se puede apreciar que el resultado anterior 1.2.6 es un caso particular del teorema del punto fijo de Brouwer, el cual afirma que en un espacio euclideo, cualquier aplicación continua de una bola cerrada en sí misma admite un punto fijo (ver [6]). Probamos ahora un resultado con el que se conectan las nociones de punto fijo y límite de una sucesión.

Teorema 1.2.7. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y $f : A \rightarrow A$ una función continua. Dado un punto $x_0 \in A$ y la sucesión definida por recurrencia $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, si existe $l = \lim_n x_n$ y $l \in A$, entonces l es un punto fijo de f .*

Demostración.

Teniendo en cuenta que si $x_n \rightarrow l \in A$, entonces $x_{n+1} \rightarrow l$, tenemos que:

$$l = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n) = f(l),$$

habiendo utilizado en la penúltima igualdad que f es continua. Esto termina la demostración.

□

A partir del resultado anterior, podemos establecer que para un s.d.d. $\{I, f\}$ el conjunto de todos los límites finitos en I de las sucesiones $x_{n+1} = f(x_n)$, con $x_0 \in I$ está contenido dentro del conjunto de puntos fijos del s.d.d. Pero es más, como la trayectoria de un punto fijo es él mismo, se da la inclusión contraria, por ser obviamente, límite de esa sucesión. En otras palabras:

$$\{l \in I : l = \lim_n x_n, x_0 \in I\} = \{l \in I : f(l) = l\}.$$

Luego, si nuestro interés es calcular los puntos fijos de un s.d.d., es un buen comienzo empezar por calcular los límites de las sucesiones $x_{n+1} = f(x_n)$ para cada $x_0 \in I$, centrando nuestro interés en aquellos límites que se encuentren en I . No estableceremos en este trabajo las condiciones de convergencia para sucesiones reales, ya que no es nuestro objetivo. Si el lector está interesado en este tema, puede recurrir a [11], donde se exponen los conocimientos básicos de los que aquí haremos uso. No obstante, si es de interés hacer mención del siguiente teorema, del cual nos serviremos explícitamente más tarde y cuya demostración, pese a no ser objetivo de este trabajo, exponemos aquí por simplicidad:

Teorema 1.2.8. *Toda sucesión real monótona creciente (resp. decreciente) y acotada superiormente (resp. inferiormente) posee límite finito.*

Demostración.

Sea (x_n) una sucesión creciente y acotada superiormente y $\mu = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que la sucesión converge a μ . Dado $\epsilon > 0$, por definición de supremo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu - \epsilon < x_m$. Pero entonces, para $n \geq m$ se tendrá que

$$\mu - \epsilon < x_m \leq x_n \leq \mu < \mu + \epsilon$$

de donde haciendo tender $n \rightarrow \infty$, se obtiene que $\lim_n x_n = \mu$

Si (x_n) es una sucesión decreciente y acotada inferiormente, entonces $(-x_n)$ es creciente y acotada superiormente, obteniendo el caso de arriba y por tanto, el resultado. \square

1.3. El teorema de la función contractiva

Hemos visto que la existencia de puntos fijos para un s.d.d. $\{I, f\}$ es fácil de verificar. Las hipótesis para ello no son de gran exigencia. La búsqueda de puntos fijos es otra historia aparte. Como también hemos visto, podemos comenzar nuestra andadura calculando los límites de las sucesiones recursivas $x_{n+1} = f(x_n)$, con $x_0 \in I$, aunque varios inconvenientes se nos plantean: en primer lugar, debemos garantizar la existencia de límites finitos que pertenezcan a I , y en segundo lugar, no nos garantiza encontrar todos los puntos fijos para el s.d.d. (ni siquiera nos garantiza encontrar alguno).

Es necesario, por lo tanto, establecer nuevas hipótesis, esta vez sobre f , para poder encontrar de forma explícita estos puntos. Podemos suponer una derivabilidad de orden alto, pero nuestro interés es hilar fino, tan fino como seamos capaces.

Definición 1.3.1. *Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. Decimos que una función $f : I \rightarrow I$ es una **función contractiva** si existe una constante $\tau < 1$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| \leq \tau|x - y| \quad \forall x, y \in I.$$

Podemos ver que toda función $f \in C^1(I)$ (esto es, derivable con derivada continua en I) para la cual existe τ tal que

$$|f'(x)| \leq \tau < 1 \quad \forall x \in I$$

es una función contractiva. Veámoslo:

Dados $a, b \in I$, por el teorema del valor medio de Lagrange, existe $c \in I$ tal que

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(c)| \leq \tau$$

y despejando se obtiene el resultado.

El teorema que exponemos a continuación y que da nombre a este apartado es un caso particular del teorema del punto fijo de Banach, el cual se puede encontrar en [3].

Teorema 1.3.2 (Teorema de la función contractiva). *Sea I un intervalo cerrado de \mathbb{R} y $f : I \rightarrow I$ una función contractiva. Entonces, el sistema dinámico discreto $\{I, f\}$ tiene un único punto fijo α .*

Además, para cualquier $x_0 \in I$, se tiene que

$$\lim_n x_n = \alpha,$$

donde $x_{n+1} = f(x_n)$. Por otro lado, vale la siguiente estimación:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_0) - x_0|}{1 - \tau} \tau^n.$$

Demostración.

Fijamos $x_0 \in I$. Para cada $n = 1, 2, \dots$

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \tau |x_n - x_{n-1}|$$

e iterando, llegamos a

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \tau^n |x_1 - x_0|.$$

Haciendo uso de la desigualdad triangular, llegamos a

$$\begin{aligned} |x_{n+h} - x_n| &\leq \sum_{j=0}^{h-1} |x_{n+j+1} - x_{n+j}| \leq \sum_{j=0}^{h-1} \tau^{n+j} |x_1 - x_0| = \\ &= |x_1 - x_0| \tau^n \sum_{j=0}^{h-1} \tau^j = |x_1 - x_0| \tau^n \frac{1 - \tau^h}{1 - \tau} \leq \\ &\leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - \tau} \tau^n. \end{aligned}$$

Como $\tau < 1$, por la desigualdad anterior tenemos que la sucesión (x_n) es de Cauchy y por ser I cerrado, es convergente. Luego existe $\alpha \in I$ tal que $\lim_n x_n = \alpha$. Por la continuidad de f ,

$$f(\alpha) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = \alpha,$$

por lo que α es un punto fijo. Es más, α es el único punto fijo del s.d.d., ya que si existe otro $\bar{\alpha}$ punto fijo, $|\alpha - \bar{\alpha}| = |f(\alpha) - f(\bar{\alpha})| \leq \tau |\alpha - \bar{\alpha}|$ por ser f contractiva, luego $\alpha = \bar{\alpha}$.

Por último, si se fija n y se hace tender $h \rightarrow \infty$ en la desigualdad

$$|x_{n+h} - x_n| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - \tau} \tau^n,$$

obtenemos

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|x_1 - x_0|}{1 - \tau} \tau^n,$$

que es la estimación del enunciado. □

De nuevo, el lector se habrá dado cuenta de que la hipótesis en el teorema anterior de que I sea un intervalo no es necesaria, basta únicamente con que I sea un subconjunto cerrado de \mathbb{R} .

Antes de acabar esta sección, hemos de hacer incapié en un último detalle. Si consideramos una función $g : I \rightarrow I$, los ceros de esta función (es decir, los puntos x_0 tal que $g(x_0) = 0$) son los mismos que los puntos fijos de la función $f(x) = g(x) + x$. Esto es, existe una correspondencia biunívoca entre los ceros de la función g y los puntos fijos de la función f y, por tanto, se da la igualdad

$$\{x \in I : g(x) = 0\} = \{x \in I : f(x) = x\}.$$

En este sentido, una notable aplicación del teorema de la función contractiva es que si queremos buscar la raíz de una función $g : I \rightarrow I$ que satisfaga $g \in C^1(I)$ y $|1 + g'(x)| \leq \tau < 1$ (o $|1 - g'(x)| \leq \tau < 1$), basta con considerar la función $f(x) = x + g(x)$ (resp. $f(x) = x - g(x)$), que por las hipótesis es contractiva, y calcular el límite de la sucesión (x_n) , con $x_{n+1} = f(x_n)$ a partir de cualquier $x_0 \in I$.

En las siguientes secciones comenzaremos con el estudio cualitativo de los puntos fijos de un s.d.d. e introduciremos las nociones de punto fijo atractor y repulsor, que es el objeto central de este trabajo. Estableceremos, a su vez, las condiciones necesarias para que un punto sea atractor o repulsor, diferenciando entre atractores locales y globales, lo que da paso a las teorías local y global de sistemas dinámicos discretos.

Capítulo 2

Teoría local de sistemas dinámicos discretos

En esta sección se introducirá una primera clasificación de los puntos de equilibrio en función de la estabilidad. Comenzaremos, por tanto, dando a conocer la noción de estabilidad e iniciando la comparación entre teoría local y teoría global. Obtendremos de esta forma las nociones de atractor y repulsor, tanto local, como global. Continuaremos el capítulo estableciendo condiciones de estabilidad y atracción basadas en la derivabilidad de la función de evolución del sistema. Por último, caracterizaremos los atractores locales, estableciendo nuevos criterios a partir de esta caracterización y dando a conocer la imposibilidad de que un punto fijo atractor sea inestable para funciones continuas.

2.1. La noción de estabilidad

En este apartado daremos una batería de definiciones con el fin de simplificar la notación y adecuar al lector a los diferentes tipos de estabilidad que vayan surgiendo. Comenzamos dando una definición formal de estabilidad.

Definición 2.1.1. *Un punto de equilibrio α del s.d.d. $\{I, f\}$ se dice **punto de equilibrio estable** (o simplemente, **punto estable**) si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - \alpha| < \delta$ y $x_n = f^n(x_0)$, con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$|x_n - \alpha| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Por el contrario, diremos que α es un **punto de equilibrio inestable** (o simplemente, **punto inestable**) si α no es estable. Es decir, si existe un $\epsilon_0 > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ se pueden determinar $x_0 \in I$ y $\tilde{k} > 0$ que satisfagan*

$$|x_0 - \alpha| < \delta, \quad |x_{\tilde{k}} - \alpha| > \epsilon_0.$$

Pensemos detenidamente en la definición anterior. Si α es un punto estable, tomando un x_0 cercano a α , la órbita de x_0 se mantendrá cerca de α para todo tiempo futuro, es decir, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x_0) = x_n$ se mantendrá próximo a α .

A partir de ahora, nuestro interés recaerá en aquellos puntos que sean estables. Damos ahora la noción de atracción, tanto global, como local.

Definición 2.1.2. *Un punto de equilibrio α del s.d.d. $\{I, f\}$ es un **atractor global** si para cada $x_0 \in I$, siendo $x_n = f^n(x_0)$, resulta*

$$\lim_n x_n = \alpha.$$

Definición 2.1.3. *Un punto de equilibrio α del s.d.d. $\{I, f\}$ es un **atractor local** si existe $\eta > 0$ tal que, para cada $x_0 \in I \cap (\alpha - \eta, \alpha + \eta)$, siendo $x_n = f^n(x_0)$, resulta*

$$\lim_n x_n = \alpha.$$

Es decir, un punto de equilibrio es atractor local si atrae solo a los puntos que se encuentran en un determinado entorno suyo, mientras que es atractor global si atrae a todos los puntos del espacio de fases. Hemos de tener en cuenta que convergencia no tiene por qué implicar monotonía, es decir, si una sucesión converge a un punto, no ha de converger de forma monótona a él, sino que puede alternar valores próximos y lejanos en su trayectoria.

Definición 2.1.4. *Un punto de equilibrio α del s.d.d. $\{I, f\}$ se dice **globalmente (localmente) asintóticamente estable** si satisface*

- α es estable;
- α es atractor global (local).

El lector se puede ver tentado a considerar redundante la definición de punto localmente asintóticamente estable, considerando que todo atractor local es estable. Esto no es cierto en un principio (es más, en sistemas dinámicos discretos donde f no sea continua en el espacio de fases, esto no es cierto en general).

Damos paso ahora a la última definición importante de este apartado.

Definición 2.1.5. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Un punto fijo α es un **punto de equilibrio repulsor** si existe un entorno U de α tal que para todo $x \in U \setminus \alpha$ existe algún $n \geq 1$ tal que $f^n(x) \notin U$.*

Hemos de tener en cuenta que la definición de repulsor no implica que la trayectoria de un punto x cercano a α se aleje de α de un $N \geq 1$ en adelante. Dicha trayectoria puede volver.

No hemos de confundir entre punto repulsor e inestable. Cierto es que si un punto fijo es repulsor, entonces es inestable. Sin embargo, la implicación opuesta no es cierta en general. Recordemos que la inestabilidad es la negación de la estabilidad, y basta con que el punto fijo repela a un solo punto para ser inestable. A modo de ejemplo, el lector puede comprobar que el punto fijo $\alpha = 1$ es inestable pero no repulsor en el s.d.d. $\{\mathbb{R}, x^2 - x + 1\}$.

Por último, cabe destacar que la repulsión no es la negación de la atracción, es decir, existen puntos fijos estables que no son ni atractores ni repulsores. Por ejemplo, el punto fijo $\alpha = 0$ para el s.d.d. $\{\mathbb{R}, -x\}$ es estable, pero no es ni atractor, ni repulsor.

Ya se ha hecho mención antes al paralelismo que existe entre los puntos fijos y puntos periódicos para un s.d.d. Recordemos que todos los puntos de una órbita periódica de periodo s para el s.d.d. $\{I, f\}$ son puntos de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f^s\}$. Las nociones anteriores se generalizan de manera natural a órbitas periódicas. De esta forma, obtenemos la siguiente definición:

Definición 2.1.6. Una órbita periódica $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}\}$ de periodo s se dice **órbita estable** para un s.d.d. $\{I, f\}$ si los puntos $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ son puntos estables para f^s .

Disponemos ya de las nociones necesarias para establecer nuestros criterios de convergencia y estabilidad de órbitas. Pasamos ahora a dar dichos resultados.

2.2. Condiciones de estabilidad basadas en la derivabilidad

Cuando una función $f : I \rightarrow I$ es de clase $C^n(I)$ (es decir, derivable n veces con función derivada n -ésima continua) es posible obtener información de la estabilidad y/o estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio del s.d.d. $\{I, f\}$.

En lo sucesivo, hay que tener en cuenta que nuestro intervalo de definición es

$$I = \langle a, b \rangle = \{[a, b], (a, b], [a, b), (a, b)\},$$

siendo $a \geq -\infty$ y $b \leq +\infty$, y salvo que se diga de forma explícita, todas las pruebas que se hagan valdrán para cualquiera de estos casos. De igual forma, hemos de tener en cuenta que cuando a, b son finitos y se encuentran en I , los puntos fijos que consideremos pueden ser éstos (salvo que se explicita otra cosa), siendo la prueba igual (o incluso más sencilla) para estos casos.

Teorema 2.2.1 (Condición de estabilidad de primer orden). Sea α un punto fijo para el s.d.d. $\{I, f\}$ y f de clase C^1 . Entonces

- si $|f'(\alpha)| < 1$, α es localmente asintóticamente estable;
- si $|f'(\alpha)| > 1$, α es repulsor.

Demostración.

- Supongamos que $|f'(\alpha)| < 1$. Por ser f' continua existe $d > 0$ y $r < 1$ tal que $|f'(x)| \leq r < 1$ para todo $x \in (\alpha - d, \alpha + d)$. Aplicando el teorema del valor medio de Lagrange, para $x, t \in (\alpha - d, \alpha + d)$ existe un x^* tal que

$$|f(x) - f(t)| = |f'(x^*)| |x - t| \leq r |x - t|. \quad (2.1)$$

Veamos en primer lugar que si $x_0 \in (\alpha - d, \alpha + d)$, entonces para todo k , $f^k(x_0) = x_k \in (\alpha - d, \alpha + d)$. Actuaremos por inducción. El caso $k = 1$ se sigue de

$$|f(x_0) - \alpha| = |f(x_0) - f(\alpha)| \leq r |x_0 - \alpha| < d$$

ya que $r < 1$ y por (2.1). Supongamos ahora que $f^n(x_0) \in (\alpha - d, \alpha + d)$ y nos preguntamos por $f^{n+1}(x_0)$. Esto se sigue de

$$|f^{n+1}(x_0) - \alpha| = |f(f^n(x_0)) - f(\alpha)| \leq r |f^n(x_0) - \alpha| < d$$

Para ver la estabilidad de α comprobaremos que se verifica la definición 2.1.1. Sea $\epsilon > 0$ y tomando $\delta = \min\{\epsilon, d\}$, tenemos que si $|x_0 - \alpha| < \delta \leq d$, entonces $x_0 \in (\alpha - d, \alpha + d)$, luego por lo anterior,

$$|f^n(x_0) - \alpha| < r |f^{n-1}(x_0) - \alpha| < \dots < r^n \delta < \epsilon \quad (2.2)$$

al ser $r < 1$ y $\delta \leq \epsilon$. Luego α es estable.

Además, por (2.2), se tiene que como $\lim_n r^n = 0$ por ser $r < 1$, α es atractor local y por tanto, localmente asintóticamente estable.

- Supongamos ahora que $|f'(\alpha)| > 1$. De nuevo, por la continuidad de f' existe un $m > 1$ y $d > 0$ tal que $|f'(x)| \geq m > 1$ para todo $x \in (\alpha - d, \alpha + d)$. Aplicando el teorema de Lagrange, si $x \neq \alpha$ y $x \in (\alpha - d, \alpha + d)$ entonces $f^n(x)$ no puede pertenecer al intervalo $(\alpha - d, \alpha + d)$ para todo n ya que

$$|f^n(x) - \alpha| = |f^n(x) - f^n(\alpha)| \geq m |f^{n-1}(x) - f^{n-1}(\alpha)| \geq \dots \geq m^n |x - \alpha|$$

y se tiene que $\lim_n r^n = +\infty$ y $|x - \alpha| \neq 0$.

□

Podemos ver la gran relevancia del anterior problema en el estudio cualitativo de puntos fijos para un s.d.d. Sin embargo, la pregunta que nos debe surgir ahora es: ¿Qué hacer cuando $|f'(\alpha)| = 1$? El teorema 2.2.1 no recoge esta posibilidad con las hipótesis impuestas, luego debemos buscar información de otro lado. Existen varias formas de actuar frente a este problema, entre las cuales la más usada es suponer derivabilidad de segundo orden (es decir, que $f \in C^2(I)$). Sin embargo, antes de recurrir a esto, plantearemos el problema desde otro punto de vista. En primer lugar, supondremos que $f'(\alpha) = 1$ y dejamos el caso en que $f'(\alpha) = -1$ para más tarde. Debemos tener en cuenta que si $f'(\alpha) = 1$, la curva de $y = f(x)$ es tangente a la recta $y = x$ en el punto $x = \alpha$ (no olvidemos que $f(\alpha) = \alpha$). Antes de enunciar el resultado, debemos introducir nuevos conceptos.

Definición 2.2.2. *Un punto de equilibrio α para el s.d.d. $\{I, f\}$ se dice*

- **superiormente estable** si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\alpha \leq x < \alpha + \delta$ entonces $|f^n(x) - \alpha| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- **superiormente (localmente) atractor** si existe $\eta > 0$ tal que si $\alpha \leq x < \alpha + \eta$ entonces $\lim_n f^n(x) = \alpha$;
- **superiormente asintóticamente estable** si es superiormente estable y superiormente atractor;
- **superiormente repulsor** si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\alpha \leq x < \alpha + \delta$ entonces $|f^n(x) - \alpha| > \epsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Las nociones anteriores corresponden a restringir las propiedades formalizadas en las definiciones 2.1.1, 2.1.3, 2.1.4 y 2.1.5 a valores levemente mayores que α . Estas mismas nociones se pueden formalizar para valores ligeramente menores que α como sigue:

Definición 2.2.3. *Un punto de equilibrio α para el s.d.d. $\{I, f\}$ se dice*

- **inferiormente estable** si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\alpha - \delta < x \leq \alpha$ entonces $|f^n(x) - \alpha| < \epsilon$ para cada $n \in \mathbb{N}$;
- **inferiormente (localmente) atractor** si existe $\eta > 0$ tal que si $\alpha - \eta < x \leq \alpha$ entonces $\lim_n f^n(x) = \alpha$;
- **inferiormente asintóticamente estable** si es inferiormente estable e inferiormente atractor;
- **inferiormente repulsor** si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $\alpha - \delta < x \leq \alpha$ entonces $|f^n(x) - \alpha| > \epsilon$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente resultado tiene un trasfondo geométrico fácil de comprender. Supongamos que la curva $y = f(x)$ es convexa en un entorno de α . Como $f(\alpha) = \alpha$ y $f'(\alpha) = 1$, la curva $y = f(x)$ queda por encima de la recta $y = x$. Si tomamos como punto inicial $x_0 < \alpha$ lo suficientemente cercano a α , la trayectoria de x_0 se aproxima a α . De igual forma, si $x_0 > \alpha$ pero lo suficientemente cercano, la trayectoria de x_0 se aleja de α como muestra la figura 2.1. Por otro lado, si la curva $y = f(x)$ es cóncava en un entorno de α , por lo dicho antes, esta curva queda por debajo de la recta $y = x$ y toda trayectoria que comience por encima de α (y lo suficientemente cerca) se aproxima a α . De igual forma, si una trayectoria comienza por debajo de α , esta se aleja tal y como muestra la figura 2.1.

Proposición 2.2.4. *Sea α un punto de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f\}$, con $f \in C^1(I)$ y $f'(\alpha) = 1$. Entonces*

- si f es convexa en un entorno de α , α es inferiormente estable.
- si f es cóncava en un entorno de α , α es superiormente estable.

Demostración.

- Supongamos que f es convexa en α , luego

$$f(x) \geq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \quad \forall x \in U(\alpha), \quad (2.3)$$

siendo $U(\alpha)$ un entorno de α . Como $f'(\alpha) = 1$, por la continuidad de f' existe un $d > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (\alpha - d, \alpha)$. Por lo tanto, f es monótona creciente y conserva las desigualdades en dicho intervalo. De (2.3), tenemos que $f(x) \geq x$ para todo $x \in (\alpha - d, \alpha) \cap U(\alpha)$. Además, como $x < \alpha$, entonces $f(x) < \alpha$ por la monotonía de f . Juntando ambas desigualdades obtenemos que

$$x \leq f(x) < \alpha.$$

Actuando de igual forma con $f(x)$ y sucesivamente con $f^n(x)$ (siendo $n > 1$), tenemos que para todo $n \geq 1$,

$$x \leq f(x) \leq \dots \leq f^n(x) < \alpha,$$

de donde se obtiene la estabilidad inferior de α , ya que si tomamos $\epsilon > 0$, y escogemos x_0 tal que $|x_0 - \alpha| < \epsilon$, entonces $|f^n(x_0) - \alpha| \leq |x_0 - \alpha| < \epsilon$.

- Para el caso en que f sea cóncava, actuaremos de manera similar. Por ser f cóncava, se tiene que

$$f(x) \leq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) \quad \forall x \in U(\alpha), \quad (2.4)$$

siendo $U(\alpha)$ un entorno de α . De nuevo, como $f'(\alpha) = 1 > 0$, por la continuidad de f podemos encontrar un $d > 0$ tal que f sea monótona creciente en el intervalo $(\alpha, \alpha + d)$ y por tanto, conserva desigualdades. Por (2.4), $f(x) \leq x$. Por la monotonía de f , tenemos que $\alpha < f(x)$. Por lo tanto, se tiene

$$\alpha < f(x) \leq x \quad \forall x \in (\alpha, \alpha + d) \cap U(\alpha).$$

Actuando de igual forma con $f(x)$ y sucesivamente con $f^n(x)$ (siendo $n > 1$), tenemos que para todo $n \geq 1$,

$$\alpha < f^n(x) \leq \dots \leq f(x) \leq x,$$

de donde se obtiene la estabilidad superior de α . □

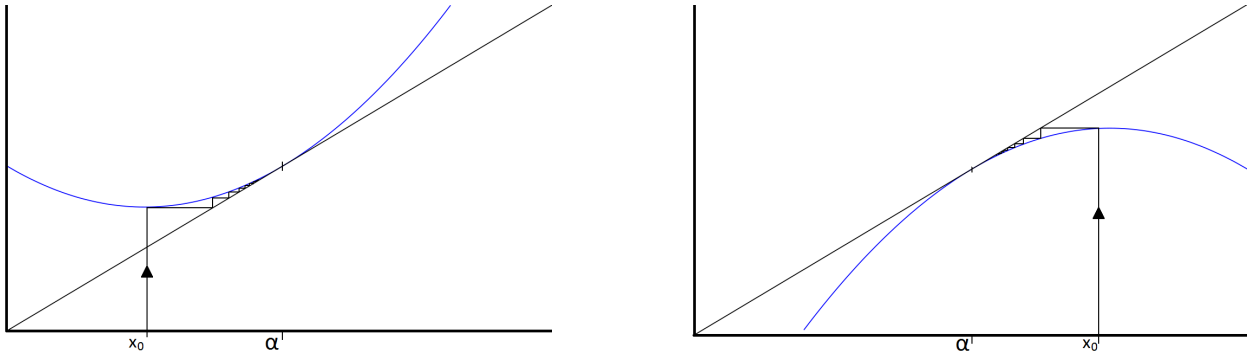


Figura 2.1: Ilustración de la proposición 2.2.4.

El lector puede apreciar en las imágenes anteriores que no solo se obtiene estabilidad superior o inferior, sino que además, α atrae a las órbitas de puntos que están por debajo y repele a las órbitas de puntos que están por encima cuando la convexidad es estricta (idem cuando la concavidad es estricta). Formalizamos este hecho en el siguiente corolario.

Corolario 2.2.5. *Sea α un punto fijo para el s.d.d. $\{I, f\}$, con $f \in C^1(I)$ y $f'(\alpha) = 1$. Entonces*

- *si f es estrictamente convexa en un entorno de α , α es inferiormente asintóticamente estable y superiormente repulsor.*
- *si f es estrictamente cóncava en un entorno de α , α es superiormente asintóticamente estable e inferiormente repulsor.*

Demostración.

Supongamos que la convexidad (resp. concavidad) de f es estricta, todas las desigualdades de la demostración de la proposición 2.2.4 se vuelven estrictas, provocando que

$$\lim_n f^n(x) = \alpha$$

en ambos casos. Veamos ésto. Tenemos que $f^n(x) \in U(\alpha)$ para todo n , donde $U(\alpha)$ es un entorno de α en el cual f es estrictamente convexa (resp. estrictamente cóncava), luego α es el único punto fijo en $U(\alpha)$. Por el teorema 1.2.8, la sucesión $(f^n(x))_n$ ha de tener límite (es monótona y acotada) y por el teorema 1.2.7, dicho límite ha de ser α .

Por lo tanto, α es inferiormente asintóticamente estable (resp. superiormente asintóticamente estable).

Por otro lado, si f es estrictamente convexa en un entorno de α , se satisface la siguiente propiedad para funciones estrictamente convexas

$$\text{si } a < b, \text{ entonces } f'(a) < f'(b),$$

y por tanto, dado un $x > \alpha$ lo suficientemente cercano y aplicando el teorema del valor medio de Lagrange al intervalo (α, x) se obtiene

$$|f(x) - \alpha| = |f'(c)||x - \alpha| > |x - \alpha|,$$

con $c \in (\alpha, x)$ ($f'(c) > 1$). Luego f es superiormente repulsor.

De igual forma ocurre en el caso en que f es estrictamente cóncava, obteniéndose esta vez que α es repulsor inferior (teniendo en cuenta la propiedad análoga a la anterior para funciones estrictamente cóncavas: si $a < b$, entonces $f'(a) > f'(b)$).

□

Teorema 2.2.6 (Condición de estabilidad de segundo orden). *Sea α un punto de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f\}$, con $f \in C^2(I)$ y $f'(\alpha) = 1$. Entonces:*

- Si $f''(\alpha) > 0$, α es inferiormente asintóticamente estable y superiormente repulsor.
- Si $f''(\alpha) < 0$, α es superiormente asintóticamente estable e inferiormente repulsor.

Demostración.

El resultado se debe al corolario 2.2.5, ya que si $f''(\alpha) > 0$ (resp. $f''(\alpha) < 0$), entonces f es estrictamente convexa (resp. estrictamente cóncava) en un entorno de α .

□

En el teorema anterior se nos presenta una nueva incógnita: ¿qué hacer cuando $f'(\alpha) = 1$ y $f''(\alpha) = 0$? Recordando el análisis real de una variable, esta condición implica (en un principio) que α es un punto de inflexión de f (salvo en el caso en que $f'''(\alpha) = 0$, donde habría que hilar más fino).

Si α es un punto de inflexión (con $f'(\alpha) = 1$, $f''(\alpha) = 0$ y $f'''(\alpha) \neq 0$) tenemos dos posibilidades: que f pase de cóncava a convexa en α o que f pase de convexa a cóncava en α .

En el primer caso tenemos que tomando un entorno de α , f se comporta como una función cóncava por debajo de α y convexa por encima de α . En función de la proposición 2.2.4 y del corolario 2.2.5, α sería inferiormente repulsor y superiormente repulsor, luego α es un repulsor local.

En el segundo caso, tomando nuevamente un entorno de α , f es convexa por debajo de α y cóncava por encima. Teniendo en cuenta de nuevo la proposición 2.2.4 y del corolario 2.2.5, α sería inferiormente asintóticamente estable y superiormente asintóticamente estable, luego α es un punto localmente asintóticamente estable.

El lector puede visualizar lo dicho antes en la figura 2.2, donde se han representado las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ y $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$, con $\alpha = 1$.

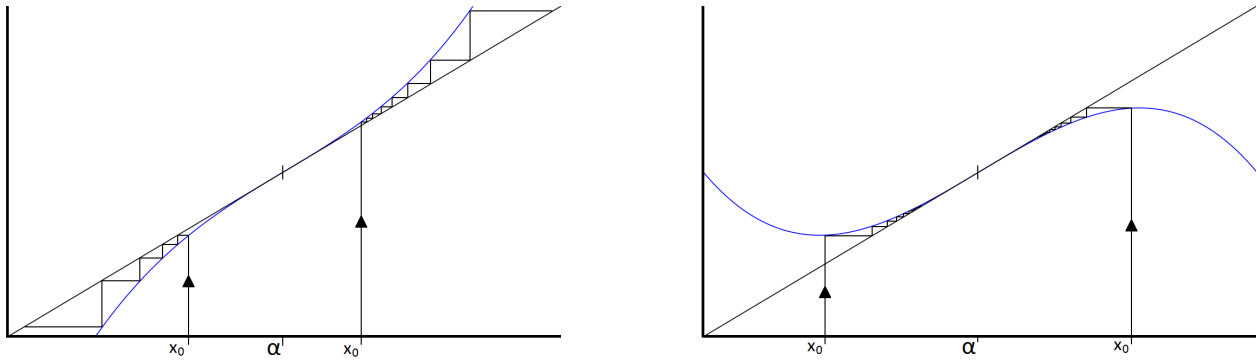


Figura 2.2: Ilustración del teorema 2.2.7.

Podemos aunar todo lo dicho anteriormente en el siguiente teorema:

Teorema 2.2.7 (Condición de estabilidad de tercer orden). *Sea α un punto de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f\}$ con $f \in C^3(I)$, $f'(\alpha) = 1$ y $f''(\alpha) = 0$. Se satisfacen las siguientes conclusiones:*

- *Si $f'''(\alpha) > 0$, entonces α es un repulsor.*
- *Si $f'''(\alpha) < 0$, entonces α es un punto localmente asintóticamente estable.*

Demostración.

La prueba se debe a la observación precedente y a que si $f'''(\alpha) > 0$ (resp. $f'''(\alpha) < 0$) siendo $f''(\alpha) = 0$, entonces f pasa de cóncava a convexa (resp. de convexa a cóncava) a través de α .

□

Nuevamente surge la pregunta de qué hacer cuando $f'''(\alpha) = 0$. Para no alargar más el asunto, pararemos aquí, informando de que en este caso se debería actuar de forma similar, suponiendo que $f \in C^4(I)$ y aplicando criterios de concavidad y convexidad en α para f . También hemos de tener en cuenta que, antes de recurrir al estudio analítico de puntos fijos, es aconsejable (y muy habitual) dibujar la gráfica de la función y observar el comportamiento de las órbitas de puntos cercanos al punto fijo.

Recordemos que la condición del teorema 2.2.1 era $|f'(\alpha)| \neq 1$. Esto nos daba dos posibilidades, $f'(\alpha) = 1$, ya visto hasta orden 3, y $f'(\alpha) = -1$. Nos centramos ahora en el caso

$$f(\alpha) = \alpha, \quad f'(\alpha) = -1.$$

Lo primero que hemos de observar es que f es estrictamente decreciente en un entorno de α (por ser $f'(\alpha) = -1 < 0$). Un resultado sencillo de probar es el siguiente

Proposición 2.2.8. *Sea α un punto de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f\}$ con f estrictamente decreciente en un entorno $U(\alpha)$ de α . Entonces la órbita de todo punto $x \in U(\alpha)$ va alternando valores mayores y menores que α mientras que esté en $U(\alpha)$.*

Demostración.

El resultado es consecuencia directa de que toda función estrictamente decreciente varía las desigualdades, de modo que si $x \in U(\alpha)$ con $x < \alpha$, entonces $f(x) > f(\alpha) = \alpha$. \square

Necesitamos un lema previo antes de enunciar el resultado principal de esta parte.

Lema 2.2.9. *Sea α un punto de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f\}$. Entonces α es localmente asintóticamente estable para $\{I, f\}$ si, y solo si, α es localmente asintóticamente estable para $\{I, f^2\}$.*

Demostración.

Si α es un punto de equilibrio para $\{I, f\}$, entonces α es un punto de equilibrio para $\{I, f^n\}$, para todo n , y en particular, para $n = 2$.

“ \Rightarrow ” Supongamos que α es localmente asintóticamente estable para $\{I, f\}$, entonces, para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - \alpha| < \delta$, entonces $|f^n(x_0) - \alpha| < \epsilon$ para cada n y $\lim_n f^n(x_0) = \alpha$. Si esto ocurre para todo n , en particular ocurre para n par, luego α es localmente asintóticamente estable para $\{I, f^2\}$.

“ \Leftarrow ” Supongamos que α es localmente asintóticamente estable para $\{I, f^2\}$, por definición se tiene que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $|x_0 - \alpha| < \delta$, entonces $|f^{2n}(x_0) - \alpha| < \epsilon$ para cada n y $\lim_n f^{2n}(x_0) = \alpha$.

Consideramos las iteradas impares de f . Por la continuidad de f en α , tomando $\epsilon_1 = \min(\epsilon, \delta)$, podemos encontrar un δ_1 con $0 < \delta_1 \leq \delta$ tal que si $|x_0 - \alpha| < \delta_1$ entonces $|f(x_0) - \alpha| < \epsilon_1 \leq \delta$. Por lo tanto

$$|f^{2n+1}(x_0) - \alpha| = |f^{2n}(f(x_0)) - \alpha| < \epsilon_1 \leq \epsilon,$$

y además, $\lim_n f^{2n+1}(x_0) = \lim_n f^{2n}(f(x_0)) = \alpha$.

□

Teorema 2.2.10. *Sea $f : I \rightarrow I$ con $f \in C^3(I)$, $f(\alpha) = \alpha$ y $f'(\alpha) = -1$. Se tiene que*

- *Si $2f'''(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2 > 0$, entonces α es localmente asintóticamente estable para el s.d.d. $\{I, f\}$.*
- *Si $2f'''(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2 < 0$, entonces α es repulsor para el s.d.d. $\{I, f\}$.*

Demostración.

Tomamos la función $g(x) = f^2(x)$ y consideramos los s.d.d. $\{I, f\}$, $\{I, g\}$. Veamos que

$$g'(\alpha) = 1, \quad g''(\alpha) = 0, \quad g'''(\alpha) = -2f'''(\alpha) - 3(f''(\alpha))^2.$$

Las tres igualdades anteriores son un sencillo ejercicio de aplicación de la regla de la cadena que exponemos a continuación. En primer lugar se tiene que

$$g'(x) = (f(f(x)))' = f'(f(x))f'(x)$$

luego $g'(\alpha) = f'(f(\alpha))f'(\alpha) = f'(\alpha)f'(\alpha) = (-1)(-1) = 1$. Para la segunda igualdad se tiene

$$g''(x) = (f'(f(x))f'(x))' = f''(f(x))(f'(x))^2 + f'((f(x))f''(x))$$

luego $g''(\alpha) = f''(f(\alpha))(f'(\alpha))^2 + f'((f(\alpha)))f''(\alpha) = 0$. Y para la tercera igualdad

$$\begin{aligned} g'''(x) &= (f''(f(x))(f'(x))^2 + f'((f(x))f''(x)))' \\ &= f'''(f(x))(f'(x))^3 + 3f''(f(x))f''(x)f'(x) + f'(f(x))f'''(x) \end{aligned}$$

luego $g'''(\alpha) = -2f'''(\alpha) - 3(f''(\alpha))^2 = -\Delta(\alpha)$, donde $\Delta(\alpha) = 2f'''(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2$.

Supongamos que $\Delta(\alpha) > 0$, entonces $g'''(\alpha) < 0$ y por el teorema 2.2.7, α es localmente asintóticamente estable para el s.d.d. $\{I, g\}$, luego por el lema 2.2.9, α es localmente asintóticamente estable para el s.d.d. $\{I, f\}$.

Supongamos ahora que $\Delta(\alpha) < 0$, entonces $g'''(\alpha) > 0$ y por el teorema 2.2.7, α es repulsor para el s.d.d. $\{I, g\}$, luego por el lema 2.2.9, α es repulsor para el s.d.d. $\{I, f\}$.

□

Para terminar este apartado, podemos ver en el siguiente cuadro un resumen de las condiciones de estabilidad local basadas en la derivabilidad vistas hasta ahora:

$$\left. \begin{array}{l} |f'(\alpha)| < 1 \Rightarrow \alpha \text{ l.a.e.} \\ \\ \\ \\ \\ |f'(\alpha)| > 1 \Rightarrow \alpha \text{ r.} \end{array} \right\} f(\alpha) = \alpha \left\{ \begin{array}{l} |f'(\alpha)| = 1 \left\{ \begin{array}{l} f'(\alpha) = 1 \left\{ \begin{array}{l} f''(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha \text{ s.a.e. e i.r.} \\ f''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha \text{ s.r. e i.a.e.} \\ f''(\alpha) = 0 \left\{ \begin{array}{l} f'''(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha \text{ l.a.e} \\ f'''(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha \text{ r.} \end{array} \right. \\ \\ f'(\alpha) = -1 \left\{ \begin{array}{l} 2f'''(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2 > 0 \Rightarrow \alpha \text{ l.a.e.} \\ 2f'''(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2 < 0 \Rightarrow \alpha \text{ r.} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Leyenda:

- l.a.e. = localmente asintóticamente estable; r. = repulsor;
- s.a.e. = superiormente asintóticamente estable; s.r. = superiormente repulsor;
- i.a.e. = inferiormente asintóticamente estable; i.r. = inferiormente repulsor.

2.3. Caracterización de atractores locales

Hasta ahora, todos los criterios de convergencia a puntos fijos vistos requerían como mínimo derivabilidad de primer orden. Nuestro objetivo es ver en este apartado una caracterización de puntos fijos atractores locales, es decir, una propiedad que satisface todo atractor local y que sea suficiente para garantizar atracción local.

El lector puede suponer que, por los criterios vistos hasta ahora, los requisitos sobre f deben de tener mucho peso. Nada más lejos de la realidad. Veremos que con solo suponer f continua, podemos caracterizar todo atractor local de un s.d.d.

La demostración de este resultado se nutre de varias propiedades conjuntistas que el lector puede ver en cualquier libro sobre teoría de conjuntos y que resultan sencillas de comprobar.

Antes de enunciar el resultado principal de este apartado, formalizamos la definición de conjunto invariante como sigue:

Definición 2.3.1. *Un conjunto A se dice **invariante** por la función f si $f(A) \subseteq A$.*

Por definición, para todo s.d.d. $\{I, f\}$, I es invariante por f . De igual forma, el lector puede observar que la definición de punto de equilibrio localmente asintóticamente estable puede reescribirse como sigue:

Proposición 2.3.2. *Un punto de equilibrio α para el s.d.d. $\{I, f\}$ es localmente asintóticamente estable si, y solo si, existe un intervalo compacto $U(\alpha)$ entorno de α , tan pequeño como se quiera, tal que $U(\alpha)$ es invariante por f y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \alpha$ para todo punto $x \in U(\alpha)$.*

Demostración.

“ \Rightarrow ” Buscamos el intervalo compacto U tan pequeño como se quiera donde se satisfagan las condiciones. Por la estabilidad de α , fijado $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $x \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, entonces $f^n(x) \in [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$, para todo $n \geq 0$. Se tiene entonces que

$$f^n([\alpha - \delta, \alpha + \delta]) \subset [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon] \quad \forall n > 0.$$

Sea $V = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n([\alpha - \delta, \alpha + \delta])$, que es un intervalo por ser unión de intervalos con el punto común α . Además,

$$V = \bigcup_{n=0}^{\infty} f^n([\alpha - \delta, \alpha + \delta]) \subset [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon],$$

luego

$$\begin{aligned} f(V) &= f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n([\alpha - \delta, \alpha + \delta])\right) \\ &= \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{n+1}([\alpha - \delta, \alpha + \delta]) \subset V \subset [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]. \end{aligned}$$

Tomamos entonces $U = \overline{V}$. Como $f(U) \subset U$ (ya que $f(V) \subset V$), tenemos que U es invariante por f , y como depende del ϵ tomado, podemos escoger $\epsilon > 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \alpha$ para todo $x \in U$ por ser α atractor local.

“ \Leftarrow ” Obvio por la definición de estabilidad y atractor local. □

La siguiente caracterización de atractores locales se puede encontrar en [15], pág. 47. En este trabajo se expone dicha demostración de forma más detallada para facilitar su comprensión.

Teorema 2.3.3. *Un punto fijo α para el s.d.d. $\{I, f\}$ es localmente asintóticamente estable si, y solo si, existe un entorno U de α tal que todos sus puntos satisfacen $f^2(x) > x$ si $x < \alpha$ y $f^2(x) < x$ si $x > \alpha$.*

Necesitamos un lema previo para poder demostrar este resultado.

Lema 2.3.4. *Si J es un intervalo compacto con más de un punto tal que $f(J) = J$ para f continua, entonces el intervalo J contiene al menos dos puntos fijos o un único punto fijo y una órbita periódica de periodo 2.*

Demostración.

En primer lugar, como $f(J) = J$, por el teorema 1.2.6, J posee al menos un punto fijo.

Supongamos que $J = [a, b]$. Como $f(J) = J$, tenemos que $f(a) \geq a$ y $f(b) \leq b$. Supongamos que J posee un único punto fijo. Sea α este punto. Veamos que J posee una órbita periódica de periodo 2. En este caso (un único punto fijo), forzosamente $\alpha \neq a, b$ y $f(x) > x$ para $x < \alpha$ y $f(x) < x$ para $x > \alpha$ (ya que $f(a) > a$, $f(b) < b$ y f es continua). Además, por la igualdad $f(J) = J$, tenemos que $\max_{x \in [a, \alpha]} f(x) = b$ y

$$\min_{x \in [\alpha, b]} f(x) = a.$$

Consideramos f^2 en $[a, \alpha]$. Tenemos dos posibilidades:

1. $f^2(a) = a$, con lo que demostramos el lema;
2. $f^2(a) > a$.

Supongamos entonces que $f^2(a) > a$, sabemos que $[\alpha, b] \subset f([a, \alpha])$ y $[a, \alpha] \subset f([\alpha, b])$. Por tanto, ha de existir un $c \in (a, \alpha)$ tal que $f^2(c) = a < c$. Esta afirmación se debe a que $a \in f([\alpha, b])$, entonces existe $d \in (\alpha, b]$ tal que $f(d) = a$ y como $d \in (\alpha, b] \subset f([a, \alpha])$, encontramos c con $f(c) = d$ y por tanto, $f^2(c) = a$.

Luego se tiene que $f^2(a) > a$ y $f^2(c) = a < c$. Por el teorema de los valores intermedios, existe $\beta \in (a, c)$ tal que $f^2(\beta) = \beta$. Esto termina la demostración del lema. □

Pasamos ahora a demostrar el teorema 2.3.3.

Demostración teorema 2.3.3.

“ \Rightarrow ” Supongamos α localmente asintóticamente estable. Por la proposición 2.3.2, existe un intervalo compacto U , entorno de α y tan pequeño como queramos, tal que $f(U) \subseteq U$ (U invariante) y $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \alpha$ para todo $x \in U$. Hemos de tener en cuenta que en U la igualdad $f^2(x) = x$ se da si, y solo si, $x = \alpha$.

Por tanto, si consideramos la función continua $f^2(x) - x$ en U tenemos que $f^2(x) - x$ no cambia de signo mientras que $x < \alpha$ o $x > \alpha$ (consecuencia directa del teorema de Bolzano y de la unicidad de ceros para la función $f^2(x) - x$ en U).

El signo de $f^2(x) - x$ está determinado por la condición $f(U) \subseteq U$. Supongamos $U = [a, b]$, se tiene que $f^n(a) \in U$ y $f^n(b) \in U$ para todo n ya que $f(U) \subseteq U$.

En particular se tiene que $f^2(a) \geq a$ y $f^2(b) \leq b$. Como $f^2(x) - x$ no cambia de signo en U , obtenemos que $f^2(x) > x$ para $x < \alpha$ y $f^2(x) < x$ para $x > \alpha$ en U .

“ \Leftarrow ” Supongamos que se satisface la propiedad del enunciado, es decir, existe un entorno U de α donde $f^2(x) > x$ si $x < \alpha$ y $f^2(x) < x$ si $x > \alpha$.

Lo primero que hemos de tener en cuenta es que se satisface $f(x) > x$ si $x < \alpha$ y $f(x) < x$ si $x > \alpha$ para todo $x \in U$. En efecto, si para algún $x \in U \setminus \{\alpha\}$, la desigualdad para f se convierte en igualdad, lo mismo ocurriría para f^2 . Si se cumpliera $f(x) < x$ para $x < \alpha$, entonces $f(x) < \alpha$, luego también se cumpliría para $f(x)$ (siempre que $f(x) \in U$, lo cual se da si x se encuentra lo suficientemente cerca de α), por lo que $f^2(x) < f(x) < x$ para $x < \alpha$, en contradicción con la hipótesis. Un argumento similar ocurre cuando $x > \alpha$.

Sea ahora V un intervalo cerrado conteniendo a α con $V \subset U$ y $f(V) \subset U$ (ya que $f(\alpha) = \alpha$ y f es continua, basta con tomar un entorno V lo suficientemente pequeño para que se satisfaga esta condición). Consideramos $W = V \cup f(V)$, que es un intervalo cerrado por ser unión de intervalos cerrados que poseen al menos un punto en común (α).

Veamos que $f(W) \subset W$.

Consideramos los conjuntos $V^- = V \cap \{x \leq \alpha\}$ y $W^- = V^- \cup f(V^-)$. Queremos probar que $f(W_-) \subset W_-$. Como $W_- = V^- \cup f(V^-) = V^- \cup (f(V^-) \setminus V^-)$ y $f(V^-) \subset W_-$ queda ver que $f(f(V^-) \setminus V^-) \subset W_-$.

Ya que $f(x) > x$ si $x < \alpha$, tenemos que $f(V^-) \setminus V^- \subset \{x > \alpha\}$. Sea V^{-+} la preimagen del conjunto $f(V^-) \setminus V^-$ en V^- , esto es:

$$V^{-+} = \{x \in V^- : f(x) \in f(V^-) \setminus V^-\}.$$

Claramente se tiene que $f(V^{-+}) = f(V^-) \setminus V^-$, lo cual se puede ver mediante una sencilla prueba de doble inclusión y que $\alpha \notin V^{-+}$ (por definición).

Tenemos:

- $\max_{f(V^-) \setminus V^-} f(x) < \max_{f(V^-) \setminus V^-} x$, ya que $f(x) < x$ para $x > \alpha$.
- $\min_{f(V^-) \setminus V^-} f(x) = \min_{f(V^{-+})} f(x) = \min_{V^{-+}} f^2(x) > \min_{V^{-+}} x$, ya que $f^2(x) > x$ para $x < \alpha$.

De aquí, obtenemos que $f(f(V^-) \setminus V^-) \subset V^- \cup (f(V^-) \setminus V^-) = W_-$, ya que ambos conjuntos en la inclusión son intervalos y hemos visto que el máximo del primero es menor que el máximo del segundo y el mínimo del primero es mayor que el mínimo del segundo (teniendo en cuenta que $\min_{V^{-+}} x \geq \min_{V^-} x$, puesto que $V^{-+} \subset V^-$). De forma similar, podemos demostrar que $f(W_+) \subset W_+$, donde $W_+ = V^+ \cup f(V^+)$ y $V^+ = V \cap \{x \geq \alpha\}$.

Hemos obtenido entonces que

$$W = V \cup f(V) = (V^- \cup V^+) \cup (f(V^-) \cup f(V^+)) = (V^- \cup f(V^-)) \cup (V^+ \cup f(V^+)) = W_- \cup W_+,$$

y por tanto tenemos que

$$f(W) = f(W_- \cup W_+) = f(W_-) \cup f(W_+) \subset W_- \cup W_+ = W.$$

Una vez visto que $f(W) \subset W$, para completar la prueba es suficiente comprobar que $W^* = \bigcap_{n \geq 0} f^n(W) = \{\alpha\}$, siendo $(f^n(W))_n$ una sucesión decreciente de conjuntos, esto es

$$W \supset f(W) \supset f^2(W) \supset \dots \supset f^n(W) \supset \dots \quad (2.5)$$

Para ello hemos de tener en cuenta que $f^n(W)$ es un intervalo cerrado para todo $n \geq 0$ (por la continuidad de f^n), luego W^* es también un intervalo cerrado (intersección de una sucesión decreciente de intervalos cerrados).

Además, se satisface que $f(W^*) = W^*$. Para demostrar esto aplicaremos un argumento de doble inclusión:

“ \subseteq ” Obvio, ya que la imagen de una intersección está contenido en la intersección de las imágenes.

“ \supseteq ” Supongamos $x \in W^* = \bigcap_{n \geq 0} f^n(W)$, luego se tiene que $x = f^n(x_n)$, para todo n con $x_n \in W$. Denotamos $x = f(f^{n-1}(x_n)) = f(y_n)$ (siendo $y_n = f^{n-1}(x_n)$). La sucesión $(y_n)_n$ se encuentra en W compacto (ya que es cerrado y acotado), luego existe una subsucesión suya $(y_{n_k})_k$ convergente a un x^* . Por (2.5), se tiene que $x^* \in f^l(W)$ para todo $l \geq 0$. Por lo tanto, $x^* \in \bigcap_{n \geq 0} f^n(W) = W^*$.

Pero como $x = f(y_n)$ para todo n , la sucesión $(f(y_{n_k}))_k = x$ es constante, y por continuidad, $\lim_k f(y_{n_k}) = f(x^*) \in f(W^*)$, pero $\lim_k f(y_{n_k}) = x$ por ser una sucesión constante. En definitiva, $x = f(x^*) \in f(W^*)$.

El hecho de que W^* es un intervalo degenerado, es decir, está constituido por un único punto, es un resultado inmediato del lema 2.3.4. Se tiene que si W^* es no degenerado, por este lema, W^* contiene más de un punto fijo o un punto fijo y una órbita de periodo 2. El primer caso no puede ser, ya que si existen dos puntos fijos α_1, α_2 en W^* , α_1 y α_2 son también puntos fijos para W y por ende, para I , imposibilitando la condición expuesta en la hipótesis. Por otro lado, si W^* posee una órbita de periodo 2, existe un β tal que $f^2(\beta) = \beta$, contradiciendo de nuevo la condición expuesta en la hipótesis (ya que $\beta \neq \alpha$).

Por lo tanto, se contradice el lema 2.3.4, luego W^* ha de ser degenerado, y solo cabe la posibilidad de que $W^* = \{\alpha\}$. Por construcción de W^* , es claro que α es atractor local (el diámetro de $f^n(W)$ tiende a 0 por ser W^* degenerado en un punto) y W pertenece a la cuenca de atracción de α . En conclusión, α es localmente asintóticamente estable. \square

Podemos apreciar la importancia del teorema 2.3.3 en nuestros futuros resultados: si queremos ver si un punto α es atractor local para un determinado s.d.d. $\{I, f\}$, basta con comprobar que en un cierto entorno suyo se satisface la propiedad del teorema (e.d., $f^2(x) > x$ si $x < \alpha$ y $f^2(x) < x$ si $x > \alpha$), sin necesidad de aplicar más hipótesis que la continuidad de la función f .

Obtenemos una consecuencia directa de este teorema, demostrada en el mismo.

Corolario 2.3.5. *Si α es localmente asintóticamente estable para el s.d.d. $\{I, f\}$, entonces existe un entorno de α donde se satisface: $f(x) > x$ para $x < \alpha$ y $f(x) < x$ para $x > \alpha$, para todo x del entorno.*

2.3.1. Criterios de atracción basados en la propiedad RN

Veámos más arriba (corolario 2.3.5) una propiedad importante que satisface todo punto atractor. Por la importancia de esta propiedad en las aplicaciones, le damos nombre:

Definición 2.3.6. Decimos que una función f satisface la **propiedad RN local** en $\alpha \in I$ si existe un entorno U de α donde se satisface

$$\begin{cases} f(x) > x & \forall x \in U \cap \{x < \alpha\} \\ f(x) < x & \forall x \in U \cap \{x > \alpha\} \end{cases}$$

RN son las siglas de “retroalimentación negativa”, un concepto utilizado en ingeniería que afirma que un sistema responde en dirección opuesta a una señal, haciendo que la señal se estabilice. En función de este concepto, el teorema 2.3.3 establece que un punto α es atractor local si, y solo si, f^2 satisface la propiedad RN local en α . De forma análoga, introducimos la idea de propiedad RN global como sigue:

Definición 2.3.7. Decimos que una función f satisface la **propiedad RN global** en $\alpha \in I$ si

$$\begin{cases} f(x) > x & \forall x < \alpha \\ f(x) < x & \forall x > \alpha \end{cases}$$

Tenemos que la propiedad RN local se satisface en todo atractor local, luego es una condición necesaria de atracción local. Nuestra intención es, partiendo de esta propiedad, añadir las hipótesis necesarias para garantizar la convergencia de trayectorias próximas.

Con este objetivo, damos a conocer la noción de derivada schwarziana, de la cual hablaremos de forma extensa más tarde.

Definición 2.3.8. Sea $f \in C^3$. Se define la **derivada schwarziana de f en x** (con $f'(x) \neq 0$) como

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

Aunque no se enuncie explícitamente en los futuros resultados, se supone que toda función de la cual calculemos su derivada schwarziana posee derivada de orden 3 en aquellos puntos donde calculemos Sf .

En el siguiente teorema establecemos varias condiciones de atracción fundamentadas en las condiciones que ya conocemos de estabilidad basadas en la derivabilidad, bajo suposición de que se satisface la propiedad RN.

Teorema 2.3.9. Sea α un punto de equilibrio para el s.d.d. $\{I, f\}$. Supongamos que f satisface RN en α . Entonces α es atractor local si se cumple alguna de las siguientes propiedades:

1. f es monótona creciente en un entorno de α .
2. $-1 < f'(\alpha) \leq 1$.

3. $f'(\alpha) = -1$ y $Sf(\alpha) < 0$.

Demostración.

1. Supongamos f monótona creciente en un entorno de α . Si $x < \alpha$ en dicho entorno, por RN , $f(x) > x$. Como f es creciente, se tiene que $f(x) < f(\alpha) = \alpha$. Actuando de forma similar con $f(x)$ y sucesivamente con $f^n(x)$ para $n > 2$, encontramos una sucesión monótona creciente

$$x < f(x) < f^2(x) < \dots < f^n(x) < \dots < \alpha,$$

que por el teorema 1.2.8, converge a α . De igual forma, si $x > \alpha$ en dicho entorno, encontramos una sucesión monótona decreciente que converge a α .

2. El caso $|f'(\alpha)| < 1$ ya está visto en el teorema 2.2.1. Supongamos entonces que $f'(\alpha) = 1$. Por esto, por la continuidad de f y por la propiedad RN local, podemos encontrar un entorno de α donde si $x > \alpha$,

$$\alpha < f(x) < x.$$

Obtenemos así que la sucesión $(f^n(x))$ decrece hacia α . De igual forma ocurre para $x < \alpha$.

3. Por último, si $f'(\alpha) = -1$, la condición de derivada schwarziana negativa en α se traduce en

$$-f'''(\alpha) - \frac{3}{2}(f''(\alpha))^2 < 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$-2f'''(\alpha) - 3(f''(\alpha))^2 < 0,$$

luego

$$2f'''(\alpha) + 3(f''(\alpha))^2 > 0,$$

y por el teorema 2.2.10 se obtiene el resultado. □

Con este teorema hemos reunido todos los resultados de atracción vistos en la sección 2.1 bajo la propiedad RN local. Más adelante aplicaremos un resultado similar para atractores globales haciendo uso de la propiedad RN global.

En resumen, y terminando con los criterios de atracción basados en la derivabilidad de f , si agrupamos los resultados vistos hasta ahora podemos ver que todo atractor local α ha de satisfacer $|f'(\alpha)| \leq 1$, con f RN local en α , siendo estas condiciones necesarias salvo en el caso $f'(\alpha) = -1$, donde hemos de recurrir a la derivada schwarziana negativa.

2.4. Atracción frente a estabilidad

Otra consecuencia fundamental de la caracterización de atractores locales vista en el teorema 2.3.3 es que nos permitirá establecer la equivalencia entre atractor local y punto estable, y ya de paso, nos servirá de nexo entre la teoría local de sistemas dinámicos discretos y la teoría global. En [14], Hassan Sedaghat demuestra como consecuencia del teorema 2.3.3 la imposibilidad de que hayan puntos inestables que sean atractores globales en s.d.d. donde f es continua.

Nosotros daremos un paso más, veremos que es imposible que un punto inestable sea atractor local en este tipo de sistemas y por ende, obtendremos la incompatibilidad de atracción global e inestabilidad vista por Sedaghat.

Teorema 2.4.1. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Si α es un punto fijo inestable para el s.d.d., α no puede ser atractor local.*

Demostración.

Supongamos que α es inestable y atractor local. Como α es atractor local para f , es atractor local para f^2 . Tomamos el intervalo $U(\alpha)$, donde f^2 cruza la recta $y = x$ solo en $x = \alpha$. Por el teorema 2.3.3, el comportamiento de f^2 en $U(\alpha)$ no puede ser a la vez

$$\begin{cases} f^2(x) > x & \text{si } x < \alpha \\ f^2(x) < x & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

ya que implicaría estabilidad para α . Tenemos varias alternativas. Supongamos en primer lugar

$$f^2(x) > x \quad \forall x \in U(\alpha) \cap \{x > \alpha\}. \quad (2.6)$$

Supongamos que existen puntos fijos de f^2 mayores que α y tomamos como β el menor de ellos (por definición, β no pertenece a $U(\alpha)$). Consideramos el intervalo $[\alpha, \beta]$.

- Supongamos que $[\alpha, \beta]$ es invariante por f^2 . Entonces, para todo $x \in (\alpha, \beta)$, $f^{2n} \in (\alpha, \beta)$ (para todo $n \geq 0$). La sucesión $(f^{2n}(x))_n$ es monótona creciente por (2.6) y acotada superiormente, luego converge a β . Esto contradice la suposición de que α es atractor local.
- Supongamos que $[\alpha, \beta]$ no es invariante por f^2 . Podemos encontrar $\gamma \in (\alpha, \beta)$ tal que $f^2(\gamma) = \beta$. Consideramos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. El intervalo $[\alpha, \alpha + \epsilon]$ crece bajo iteración de f^2 por (2.6), por lo que existe un n_0 tal que $f^{2n_0}([\alpha, \alpha + \epsilon]) \supset [\alpha, \gamma]$, luego existe $x_0 \in [\alpha, \alpha + \epsilon]$ tal que $f^{2n_0}(x_0) = \gamma$, y por tanto, $f^{2n_0+2}(x_0) = \beta$. Este hecho entra en contradicción con la suposición de que α es atractor local.

Si no existiera ningún punto fijo para f^2 mayor que α , por (2.6), toda trayectoria que comience en $x > \alpha$ genera una sucesión monótona estrictamente creciente, por lo que no convergería a α (en contradicción con la suposición α atractor local).

El caso

$$f^2(x) > x \quad \forall x \in U(\alpha) \cap \{x < \alpha\}, \quad (2.7)$$

es análogo al anterior, considerando esta vez sucesiones monótonas decrecientes debido a (2.7) e intervalos por debajo de α .

En cualquiera de los casos, hemos encontrado contradicción con la suposición de punto atractor local e inestable, lo que concluye la demostración. □

Por la dualidad estable o inestable de puntos fijos, el teorema 2.4.1 afirma que todo atractor local es estable, haciendo redundante la noción de punto localmente asintóticamente estable (y por tanto, de punto globalmente asintóticamente estable). Observando que todo atractor global es atractor local, tenemos entonces nuestro segundo resultado de teoría global de sistemas dinámicos discretos: todo atractor global es estable (recordemos que nuestro primer resultado de teoría global de atractores fue el teorema de la aplicación contractiva 1.3.2).

Capítulo 3

Teoría global de sistemas dinámicos discretos

Una de las principales cuestiones de la dinámica, en general, es saber cuándo un atractor local es atractor global. En este apartado, daremos a conocer algunas condiciones para que un punto fijo que sea atractor local se convierta en atractor global.

Lo primero que el lector ha de notar es que, atendiendo a la definición de atractor global 2.1.2, es imposible hablar de teoría global si existe más de un punto fijo para el sistema. También resulta imposible hablar de atracción global cuando aparece estabilidad de otra naturaleza (por ejemplo, órbitas periódicas). Por lo tanto, la primera condición necesaria para que un punto fijo sea atractor global de un sistema dinámico discreto es que dicho punto fijo ha de ser el único punto fijo del sistema y no puede haber órbitas periódicas de ningún periodo mayor que 1.

Por último, como ya se ha mencionado antes, como consecuencia del teorema 2.4.1, todo atractor global ha de ser estable (si f no es continua, esto no es cierto en general). La demostración de este resultado es directa a partir del teorema 2.4.1, o bien puede verse como un corolario del teorema 2.3.3 tal y como hizo Hassan Sedaghat en [14].

3.1. Caracterización de atractores globales

Ya sabemos algunas características que satisface todo atractor global: es atractor local, es estable, es el único punto fijo para el sistema y no coexiste con órbitas periódicas. ¿Son estas condiciones suficientes para garantizar atracción global?

Es fácil ver que el teorema 2.3.3 se puede extrapolar a las condiciones anteriores de una forma sencilla. Únicamente hemos de tener en cuenta dos aspectos: f^2 posee la propiedad RN global en α y en vez de considerar entornos del punto fijo, consideramos intervalos de cualquier tamaño con la única condición de que contengan al punto fijo, quedando el resto de la demostración exactamente igual.

Atendiendo a esto, caracterizamos los atractores globales de un s.d.d. como sigue:

Teorema 3.1.1. *Un punto fijo α para el s.d.d. $\{I, f\}$ es atractor global si, y solo si, f^2 satisface la propiedad RN global en α .*

Cuando establezcamos criterios de atracción global tendremos en cuenta siempre esta caracterización, lo que nos facilitará demostrar nuestros resultados.

De forma análoga al corolario 2.3.5 para atractores locales, tenemos el siguiente resultado, que podemos tratar como una consecuencia del teorema 3.1.1:

Corolario 3.1.2. *Si α es atractor global para el s.d.d. $\{I, f\}$, entonces f satisface la propiedad RN global en α .*

A partir del teorema 3.1.1, podemos establecer otra caracterización de atractores globales en función de la atracción local.

Corolario 3.1.3. *Sea α un punto fijo para el s.d.d. $\{I, f\}$. Se tiene que α es atractor global del sistema si, y solo si, α es atractor local y el único punto fijo del s.d.d. y f no presenta órbitas periódicas de periodo 2.*

Demostración.

“ \Rightarrow ” Todo atractor global satisface las hipótesis del teorema por definición.

“ \Leftarrow ” Si α es atractor local, entonces f^2 satisface la propiedad RN local en α , y como f^2 solo corta la recta $y = x$ en α (ya que α es el único punto fijo de f y no hay órbitas periódicas de periodo 2), se tiene que f^2 satisface la propiedad RN global en α . En conclusión, α es atractor global. □

Nuestra intención a partir de ahora será encontrar otras condiciones suficientes que garanticen atracción global. Para ello, necesitamos herramientas más sofisticadas. Con este objetivo, recuperamos la noción de derivada schwarziana ya presentada en la sección 2.1.

3.2. Propiedades de la derivada schwarziana

Nombrada así en honor al matemático Hermann Schwarz por Arthur Cayley, la derivada schwarziana fue descubierta por Lagrange en su tratado “*Sur la construction des cartes géographiques*” (1781). Su principal utilidad se encuentra en la geometría compleja, más precisamente en variedades complejas unidimensionales. Principalmente, juega un rol muy importante en análisis complejo donde es utilizada como criterio para caracterizar transformaciones de Möbius (las transformaciones de Möbius se caracterizan por tener derivada schwarziana nula).

La derivada schwarziana fue introducida en el estudio de dinámica de aplicaciones del intervalo por David Singer en 1978 [17], de forma simultánea pero independiente con David J. Allwright [1]. Probablemente, la razón por la cual el papel de Allwright tiende a ser pasado por alto se remonta a un muy influyente artículo publicado por Guckenheimer un año después, donde sólo se hace alusión a los resultados obtenidos por Singer en su artículo. Entre otras muchas utilidades de la derivada schwarziana, es utilizada para determinar el número máximo de órbitas periódicas atractoras que pueden poseer determinados sistemas dinámicos (“teorema de Singer”, ver [17]).

El lector puede recordar la noción de derivada schwarziana en la definición 2.3.8. En esta sección presentamos una colección de propiedades de la derivada schwarziana útiles en dinámica discreta. Para nuestros objetivos, aquellas funciones con derivada schwarziana negativa jugarán un rol importante. Algunas funciones polinómicas satisfacen este hecho.

Proposición 3.2.1. *Sea $P(x)$ un polinomio. Si todas las raíces de $P'(x)$ son reales y distintas, entonces $SP < 0$ (donde se pueda definir).*

Demostración.

Supongamos que

$$P'(x) = \prod_{i=1}^N (x - a_i),$$

con a_i reales y distintos. Un sencillo cálculo de derivadas muestra que

$$P''(x) = \sum_{j=1}^N \frac{P'(x)}{(x - a_j)} = \sum_{j=1}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - a_i)}{(x - a_j)},$$

$$P'''(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - a_i)}{(x - a_j)(x - a_k)}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$SP(x) = \sum_{j \neq k} \frac{1}{(x - a_j)(x - a_k)} - \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{(x - a_j)} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{(x - a_j)} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{(x - a_j)} \right)^2 < 0.$$

□

La proposición anterior deja latente la cantidad de funciones que verifican la propiedad de derivada schwarziana negativa. Veamos ahora una propiedad muy importante de la derivada schwarziana.

Proposición 3.2.2. *Supongamos que $Sf(x) < 0$ y $Sg(x) < 0$. Entonces $S(f \circ g)(x) < 0$.*

Demostración.

Usando la regla de la cadena, se obtiene que

$$(f \circ g)''(x) = (f'(g(x)) \cdot g'(x))' = f''(g(x)) \cdot (g''(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

y

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x).$$

Juntándolo todo, obtenemos

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + Sg(x),$$

luego $S(f \circ g)(x) < 0$.

□

Una consecuencia directa de esta última proposición, útil en dinámica, es que si para un s.d.d. $\{I, f\}$ se tiene $Sf < 0$, entonces $Sf^n < 0$ para todo $n > 0$. Tendremos en cuenta esta observación en nuestros futuros cálculos. Continuamos enunciando propiedades de la derivada schwarziana negativa. El siguiente lema nos será de utilidad para poder demostrar el llamado principio del mínimo.

Lema 3.2.3. *Supongamos que $Sf < 0$. Entonces $f'(x)$ no puede tener mínimos relativos positivos o máximos relativos negativos.*

Demostración.

Sea x^* un punto crítico para f' , es decir, $f''(x^*) = 0$. Como $Sf(x^*) < 0$, se tiene que

$$\frac{f'''(x^*)}{f'(x^*)} < 0,$$

luego $f'''(x^*)$ y $f'(x^*)$ tienen signo distinto y por la caracterización de extremos relativos se obtiene el resultado.

□

Teorema 3.2.4 (Principio del mínimo). *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado de la recta real y $f : I \rightarrow I$ una función continua con derivada schwarziana negativa. Si $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $|f'(x)| > \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$, para todo $x \in (a, b)$.*

Demostración.

Como $|f'|$ es continua en I , por el teorema de Weierstrass debe de tener algún mínimo en algún punto $y \in I$. Supongamos $y \in (a, b)$. Si $f' > 0$, entonces f' posee en y un mínimo relativo positivo, en contradicción con el lema 3.2.3. Si $f' < 0$, entonces f' posee en y un máximo relativo negativo, contradiciendo de nuevo el lema 3.2.3 (recordemos que los mínimos de $|f(x)|$ son máximos para $f(x)$ si $f < 0$). En consecuencia, el mínimo de $|f'|$ ha de encontrarse en los extremos.

□

3.3. Condiciones de atracción global

En este apartado daremos varios criterios de atracción global haciendo uso, entre otros, de la derivada schwarziana negativa. Por ser condición necesaria de atractor global, también tendremos en cuenta en todos los casos que f satisface RN global en el punto de equilibrio.

En función del corolario 3.1.3, bajo supuestos de unicidad de puntos fijos y no existencia de órbitas periódicas de periodo 2, el lector puede enunciar por su cuenta una gran cantidad de criterios de atracción global basados en los criterios de atracción local ya vistos.

Nosotros enfrentaremos el problema desde otra perspectiva: ¿qué hemos de añadir a la propiedad RN global para garantizar atracción global al punto α ?

Nuestra manera de proceder será la siguiente: comenzamos suponiendo que la función de evolución f es lo más simple posible, por ejemplo, monótona creciente en I y vamos avanzando en este estudio, permitiendo otros comportamientos de f .

Proposición 3.3.1. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Si f es creciente y satisface la propiedad RN global en un punto fijo $\alpha \in I$, entonces α es atractor global.*

Demostración.

Veamos que partiendo de un x_0 cualquiera, obtenemos una sucesión monótona acotada, y por el teorema 1.2.8, se obtiene el resultado.

Si $x_0 < \alpha$, por RN , se tiene que $f(x_0) > x_0$. Por ser f monótona creciente, obtenemos una sucesión estrictamente creciente

$$x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < \dots < f^n(x_0) < \dots$$

y acotada superiormente por α , ya que como f^n continua y creciente para todo n , de $x_0 < \alpha$ se obtiene $f^n(x_0) < f^n(\alpha) = \alpha$. Si $x_0 > \alpha$, por RN , se tiene que $f(x_0) < x_0$ y por la monotonía de f obtenemos nuevamente una sucesión monótona decreciente $(f^n(x_0))_n$ acotada inferiormente por α .

□

Este resultado se puede ver desde otro punto de vista. Para funciones monótonas crecientes, la condición $f(x) = y$ y $f(y) = x$ implica que $x = y$. Luego las funciones monótonas crecientes no presentan ciclos de periodo 2 y la condición RN global en α impide la existencia de otros puntos fijos.

El caso de funciones monótonas decrecientes resulta más delicado, ya que no hay garantía de no existencia de órbitas periódicas de periodo 2, por lo que se deben añadir más condiciones. Este resultado lo englobamos dentro del siguiente lema, el cual nos será de vital importancia para el teorema posterior.

Lema 3.3.2. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Si f es monótona decreciente y satisface:*

- *f cumple la propiedad RN global en un punto fijo α ;*

- $Sf < 0$;
- $|f'(\alpha)| \leq 1$;

entonces f no presenta órbitas periódicas de periodo 2.

Demostración.

Consideremos f^2 . Supongamos que existe $q < \alpha$ tal que $f^2(q) = q$. Como f cumple la propiedad RN global en α , q no puede ser un punto fijo. Tenemos que, como f es decreciente, $f(q) > \alpha$. Sea $r = f(q)$. Obviamente, $f^2(r) = r$.

Consideramos ahora $(f^2)'$. Si aplicamos el teorema de Lagrange al intervalo $[q, \alpha]$, existe $\bar{q} \in (q, \alpha)$ tal que $(f^2)'(\bar{q}) = 1$, ya que

$$(f^2)'(\bar{q}) = \frac{f^2(q) - f^2(\alpha)}{q - \alpha} = \frac{q - \alpha}{q - \alpha} = 1$$

De igual forma, encontramos $\bar{r} \in (\alpha, r)$ tal que $(f^2)'(\bar{r}) = 1$. Centrémonos ahora en el intervalo $[\bar{q}, \bar{r}]$. Se satisface que

- $\alpha \in (\bar{q}, \bar{r})$;
- como $Sf < 0$, $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. En particular $(f^2)'(x) = f'(f(x))f'(x) \neq 0$;
- por la proposición 3.2.2, $Sf^2 < 0$;
- $(f^2(\alpha))' = f'(\alpha)^2 \leq 1$.

Entramos así en contradicción con el principio del mínimo 3.2.4, ya que

$$|f'(\alpha)| \leq \min\{|f'(\bar{q})|, |f'(\bar{r})|\}$$

□

Analícemos detenidamente este lema: la condición RN global para f en α asegura la unicidad de α como punto fijo; las condiciones $|f'(\alpha)| \leq 1$ y $Sf < 0$ garantizan que α es atractor local; y todo junto permite asegurar la no existencia de ciclos de periodo 2. En conclusión, bajo estas hipótesis, α es atractor global.

El lector ha de saber que la hipótesis de monotonía garantiza atracción local bajo ciertas suposiciones. En [13] pp. 97-98, se establece un algoritmo para el estudio de atractores locales en s.d.d. con funciones de evolución monótonas.

Nuestra intención ahora es ver si podemos mejorar las suposiciones sobre f , estableciendo un teorema que pueda aplicarse a funciones no solamente monótonas. Siguiendo con nuestro estudio, damos un paso más allá y mejoramos la suposición de monotonía permitiendo la existencia de un extremo relativo para f .

El siguiente teorema recoge todos los resultados anteriores y se aventura dando más libertad a la función de evolución del sistema. Como se podrá apreciar, la demostración de este teorema es puramente constructiva, dividiendo I en subintervalos y comprobando que todo punto de cada subintervalo es atraído por el punto fijo. Por este carácter constructivo, es recomendable que el lector ilustre la demostración con dibujos orientativos para una fácil comprensión.

Teorema 3.3.3. *Sea α un punto fijo para el s.d.d. $\{I, f\}$, donde $f : I \rightarrow I$ tiene a lo sumo un punto crítico (que ha de ser extremo relativo). Supongamos que se satisface*

- f cumple la propiedad RN global en α ;
- $Sf < 0$ (salvo en el punto crítico, donde no se puede definir);
- $|f'(\alpha)| \leq 1$;

entonces α es atractor global.

Demostración.

Antes de nada, es claro que la condición f cumple la propiedad RN global en α implica la unicidad de puntos fijos.

Si f no posee extremos relativos, entonces f ha de ser monótona en I y de la proposición 3.3.1 (en caso de que f sea creciente) y del lema 3.3.2 (en caso de que f sea decreciente) se obtiene que α es atractor global.

Supongamos que c es un extremo relativo de f , que por ser único, ha de ser extremo absoluto. Si $c = \alpha$, tenemos dos opciones:

1. En el caso α mínimo absoluto, f es monótona creciente para $x > \alpha$, luego por la proposición 3.3.1, si $x_0 > \alpha$, entonces $\lim f^n(x_0) = \alpha$. Por otro lado, f es monótona decreciente para $x < \alpha$, luego si $x_0 < \alpha$, $f(x_0) > \alpha$, y por continuidad y lo anterior, $\lim f^n(f(x_0)) = \lim f^n(x_0) = \alpha$.
2. El caso α máximo absoluto es análogo al anterior.

Salvado este caso, supongamos $c \neq \alpha$. Veamos el caso $c < \alpha$ (el caso $c > \alpha$ se obtiene con un razonamiento similar). De nuevo, tenemos dos opciones, que c sea mínimo o que c sea máximo.

Si c es mínimo absoluto, f es monótona creciente por la derecha de c y monótona decreciente por la izquierda de c . Por ser f RN local en α , se tiene que $c < f(c) < \alpha$. Sea b el extremo superior de I . Por la proposición 3.3.1, si $x \in [c, b]$, $\lim f^n(x) = \alpha$. Sea a el extremo inferior de I y supongamos ahora que $x \in [a, c)$. Aplicando que f es RN global en α , $f(x) > x$ y por ser f decreciente en esta parte y $x < c$, entonces $f(x) \geq f(c)$, luego $f(x) \in [c, b]$ y por tanto $\lim_n f^n(f(x)) = \lim_n f^n(x) = \alpha$. En conclusión,

$$\lim_n f^n(x) = \alpha \quad \forall x \in I.$$

El caso interesante es cuando c es máximo. Hemos de tener en cuenta que f es monótona decreciente a la derecha de c y monótona creciente a la izquierda de c . Centremos nuestra

atención al intervalo $[c, f(c)]$ y veamos que es invariante por f (es claro que $\alpha < f(c)$ por ser c máximo absoluto). Para ello, basta con comprobar que

$$c < f^2(c) < \alpha$$

y que $f([c, \alpha]) \subset [\alpha, f(c)]$ y $f([\alpha, f(c)]) \subset [f^2(c), \alpha]$.

La segunda parte es directa, teniendo en cuenta que f es monótona decreciente en $[c, f(c)]$. Por otro lado, $f^2(c) = f(f(c)) < \alpha$ por ser f decreciente y $f(c) > \alpha$. Por último, $f^2(c) > c$ ya que f^2 es RN local en α y si $c > f^2(c)$, entraríamos en contradicción con el lema 3.3.2.

Por lo tanto, $f([c, f(c)]) \subseteq [c, f(c)]$ y aplicando de nuevo el lema 3.3.2 al s.d.d. $\{[c, f(c)], f\}$, obtenemos que $[c, f(c)]$ se encuentra dentro de la cuenca de atracción de α .

Supongamos ahora $x < c$, como f es creciente en esta parte, se tiene que $f(x) < f(c)$. Tenemos dos posibilidades aquí, que $f(x) > c$, lo que supondría que la órbita de x entra dentro de la cuenca de atracción de α , o $f(x) < c$, pero iterando de igual forma con $f(x)$, obtenemos una sucesión creciente para la cual ha de existir un $m > 1$ tal que $f^m(x) \in [c, f(c)]$ (por no haber más puntos fijos que α). En conclusión, el conjunto $I \cap \{x < f(c)\}$ está dentro de la cuenca de atracción de α .

Por último, si $x > f(c)$, por ser f decreciente en esta parte, $f(x) < f^2(c)$, luego $f(x) \in I \cap \{x < f(c)\}$. En general,

$$\lim_n f^n(x) = \alpha \quad \forall x \in I$$

□

La necesidad en el teorema 3.3.3 de que si f tiene un punto crítico, éste sea extremo relativo (es decir, con derivada segunda no nula) se puede apreciar en el caso $\{[-1, 1], -x^3\}$, donde $x = 0$ es un punto crítico pero no un extremo relativo, dando la posibilidad de que se genere una órbita de periodo 2, como se ve en la figura 3.1.

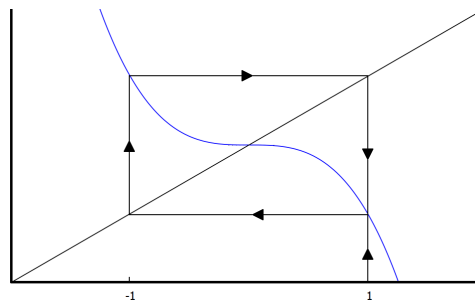


Figura 3.1: Contraejemplo al teorema 3.3.3 en el caso de puntos críticos con derivada segunda no nula

Continuando de forma lógica con este estudio, el paso siguiente sería analizar el caso en que f presentase dos extremos relativos. Es fácil ver que ésta característica no es suficiente para garantizar atracción global. Veamos esto con un ejemplo.

Ejemplo.

Consideremos el s.d.d. $\{\mathbb{R}, f(x)\}$, donde

$$f(x) = -\frac{64}{9}x^3 + \frac{104}{9}x^2 - \frac{49}{9}x + 1$$

Existen dos puntos críticos para f en $x = \frac{13 \pm \sqrt{22}}{24}$. Por otro lado, tenemos que

- $f(1/4) = 1/4$
- $f'(1/4) = -1$
- $Sf < 0$ por 3.2.1 ya que todos los ceros de f' son reales y distintos.

Luego el s.d.d. satisface todas nuestras hipótesis, sin embargo,

$$f(0) = 1 \quad \text{y} \quad f(1) = 0$$

es decir, existe al menos una órbita periódica de periodo 2, lo que impide que $\alpha = 1/4$ sea atractor global.

Por tanto, deberíamos atacar este nuevo problema añadiendo más suposiciones a las ya conocidas hipótesis de derivada schwarziana negativa, propiedad RN y $|f'(\alpha)| \leq 1$. En vez de esto, plantearemos este problema desde otro frente.

3.4. Atracción global en intervalos compactos

En esta sección introducimos otra forma de enfrentarnos al problema del cálculo de atractores globales, la cual podemos encontrar en [2]. Hemos atacado este problema desde el punto de vista de la derivada schwarziana negativa, bajo la suposición de que el punto fijo ya era atractor local (se satisface RN y su derivada tenía módulo menor que uno). Pero, ¿qué ocurre si tenemos derivada schwarziana positiva o si la derivada schwarziana cambia de signo en el espacio de fases o si ni siquiera pueda definirse la derivada schwarziana?

Fácilmente, podemos ver que cualquier función constante genera un s.d.d. con un único punto fijo que resulta ser atractor global y, obviamente, no podemos definir la derivada schwarziana para funciones constantes. El lector puede responder a este problema mediante el teorema de la función contractiva 1.3.2 (toda función constante es contractiva).

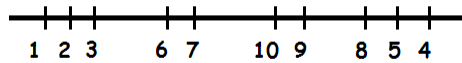
Alejémonos de todas las suposiciones tomadas hasta ahora y volvamos al punto de partida: la unicidad de puntos de equilibrio y su no coexistencia con órbitas periódicas. Esta hipótesis es necesaria por definición de atractor global, pero ¿es suficiente para garantizar la atracción global?

Con el objetivo de responder a esta pregunta, introducimos la noción de sucesión bimonótona.

Definición 3.4.1. Una sucesión $(x_n)_n$ de números reales se dice bimonótona si para cada $m \geq 0$, se tiene una de las siguientes posibilidades:

- $x_n > x_m$ para todo $n > m$;
- $x_n = x_m$ para todo $n > m$;
- $x_n < x_m$ para todo $n > m$.

En la siguiente imagen ilustramos la noción de sucesión bimonótona.



Podemos ver que las sucesiones monótonas son un caso particular de sucesiones bimonótonas. El siguiente teorema fue demostrado por Andrew Coppel en [4]. Para su demostración, haremos uso de la siguiente notación:

Definición 3.4.2. Diremos que $x \in I$ es **punto-U** si $f(x) > x$ y diremos que es **punto-D** si $f(x) < x$.

Teorema 3.4.3. Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. con I compacto. Si f no presenta órbitas periódicas de ningún periodo mayor que 1, entonces para cada $x_0 \in I$, la trayectoria $(f^n(x_0))_n$ es bimonótona y converge a un punto fijo de f .

Demostración.

Para demostrar que toda trayectoria es bimonótona es suficiente ver que para cada $x \in I$ y cada $n > 1$ se cumple

$$\begin{cases} f^n(x) > x & \text{si } f(x) > x \\ f^n(x) < x & \text{si } f(x) < x \end{cases}$$

Supongamos lo contrario, esto es, existe algún $c \in I$ y $n_0 > 1$ tal que, o $f^{n_0}(c) < c < f(c)$, o $f(c) < c < f^{n_0}(c)$. Ambos casos son análogos, así que sin pérdida de generalidad podemos suponer el primero.

Si f no posee puntos fijos menores que c , entonces por ser f^{n_0} continua, $f^{n_0}(x) < c$ para todo $x < c$. Como $f^{n_0}(c) < c$, la sucesión $(f^{kn_0}(c))_k$ es decreciente y por tanto, ha de converger a un punto z , que por ser límite, ha de ser punto fijo, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, f posee algún punto fijo menor que c . Sea a el mayor de estos puntos fijos. Entonces, como $f(c) > c$, para todo $x \in (a, c]$, $f(x) > x$. Si consideramos $x > a$ suficientemente cerca de a , entonces $f^{n_0}(x) > x$. Tenemos entonces que $f^{n_0}(y) = y$ para algún $y \in (a, c)$, y como no hay órbitas periódicas de ningún periodo mayor que 1, y es un punto fijo mayor que a , lo que genera de nuevo una contradicción.

Por tanto, toda trayectoria es bimonótona. Veamos que es convergente y por el teorema 1.2.7 obtendríamos el resultado.

Fijamos $x_0 \in I$ y denotamos $x_n = f^n(x_0)$, con $n \geq 1$. Si $x_{m+1} = x_m$ para algún m , entonces $x_n = x_m$ para todo $n > m$ y la trayectoria de x_0 convergería. Supongamos entonces que $x_{n+1} \neq x_n$ para todo n . Hemos de tener en cuenta que si la trayectoria se hace monótona en algún momento, la condición de sistema dinámico discreto (esto es, $f(I) \subset I$) y la compacidad de I garantizan la convergencia. Podemos asumir que la órbita posee infinitos puntos-U x_k e infinitos puntos-D x_k .

Como la trayectoria es bimonótona, la subsucesión (x_k) crece hacia un punto límite p y $p = \liminf x_n$. De forma similar, la subsucesión (x_k) decrece hacia un punto límite q y $q = \limsup x_n$. Por otro lado, han de existir infinitos n tales que x_n es punto-D y x_{n+1} es punto-U, de donde tomando límites obtenemos que

$$q = f(p) = p$$

ya que f es continua y no hay órbitas periódicas de periodo mayor que 1. Esto significa que

$$\limsup x_n = \liminf x_n$$

Por tanto, la trayectoria $(x_n)_n = (f^n(x_0))_n$ es convergente. □

Con este teorema hemos visto que la no existencia de órbitas periódicas de periodo mayor que 1 en sistemas dinámicos discretos con espacio de fases compacto garantiza que toda trayectoria converge a un punto fijo. ¿Y si solo hubiera un único punto fijo? Obtenemos como consecuencia directa de este resultado uno de los principales resultados de la teoría de atractores globales en sistemas dinámicos discretos.

Corolario 3.4.4. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. con I compacto. Sea α un punto fijo de f . Entonces, α es atractor global del sistema si, y solo si, α es el único punto fijo del sistema y no existen órbitas periódicas de ningún periodo mayor que 1.*

Obviamente, no solo obtenemos un criterio para identificar atractores globales, sino que obtenemos una condición necesaria y suficiente de atracción global en sistemas dinámicos discretos definidos en intervalos compactos de la recta real. La belleza de este teorema radica en las escasas hipótesis del mismo. La unicidad del punto fijo y la no existencia de órbitas periódicas son suficientes y necesarias para que el punto fijo atraiga a toda trayectoria del sistema, siempre y cuando I sea compacto (en nuestro caso, un intervalo cerrado y acotado).

Se nos presenta un gran dilema a resolver: la afirmación de no existencia de órbitas periódicas de ningún periodo llevada a la práctica es difícil de comprobar. ¿Cómo podemos entonces garantizar que no existen órbitas de ningún periodo?

El astuto lector instruido en la teoría de sistemas dinámicos sabrá dar una respuesta a esta pregunta: el teorema de Sharkovsky, considerado por muchos como uno de los principales resultados de la dinámica discreta unidimensional. Este importante resultado puede verse en el apéndice A.1. Sin embargo, con el objetivo de hacer este trabajo entendible para aquellos

iniciados en la teoría y no hacer uso de tan sofisticadas herramientas, exponemos un resultado más manejable que no es más que una particularización del trabajo de Sharkovsky.

Para el siguiente resultado, definimos $Per(f, n)$ como el conjunto de todos los puntos periódicos de periodo n que presenta f en el espacio de fases. Este resultado puede encontrarse en [7].

Proposición 3.4.5. *Si $Per(f, n) \neq \emptyset$ para algún $n \leq 2$, entonces $Per(f, 2) \neq \emptyset$.*

Demostración.

Fijamos $x_0 \in Per(f, n)$ y sea $x = \min\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0) = \min \gamma(I, f, x_0)\}$. Sea $y \in \gamma(I, f, x_0)$ y $z \in [x, y)$ tales que $f(y) = x$ y $f(z) = y$. Si $z = x$, entonces $x \in Per(f, 2)$.

Supongamos entonces que $z > x$ y consideremos el conjunto $H = \{v \in [x, z] : f^2(v) = v\}$. Por el teorema del valor intermedio, se tiene que $H \neq \emptyset$ ya que $f^2(x) > x$ y $f^2(z) = x < z$. Sea

$$u = \sup H$$

En primer lugar, $u < z$. Supongamos $f(u) = u$ y tomamos $a \in (z, y) \cap Per(f, 1)$. Como

$$f(u) = u < a < y = f(z)$$

tenemos que $a = f(b)$ para algún $b \in (u, z)$. Entonces, $f^2(b) > b$ y $f^2(z) < z$, y de nuevo, por el teorema de Bolzano para $f^2(x) - x$, encontramos un punto $c \in H$ con $c \in (b, z)$ tal que $f^2(c) = c$, en contradicción con la definición de u . En consecuencia, $u \in Per(f, 2)$. □

Luego la existencia de órbitas periódicas de cualquier periodo mayor que 2 garantiza la existencia de ciclos de periodo 2, o, desde el punto de vista que a nosotros nos interesa, la no existencia de puntos periódicos de periodo 2 garantiza la no existencia de puntos periódicos de ningún periodo mayor que 1.

Por tanto, podemos sustituir todas las hipótesis de no existencia de órbitas periódicas de ningún periodo a la no existencia de ciclos de periodo 2, que desde un punto de vista práctico es bastante más atractivo. Así, reducimos nuestro problema a comprobar que las soluciones de la ecuación

$$f(x) = x \tag{3.1}$$

son las mismas soluciones que las soluciones de la ecuación

$$f^2(x) = x \tag{3.2}$$

Luego, partiendo de un sistema definido en un intervalo cerrado y acotado, si solo existe una solución para la ecuación (3.1), cuya existencia viene garantizada por el teorema 1.2.6, y coincide con la única solución de la ecuación (3.2), por el corolario 3.4.4, dicha solución es el atractor global del sistema.

Apéndice A

Los grandes teoremas de la dinámica discreta unidimensional

En 1964 se publicó en la revista “Ukranian Mathematical Journal” un artículo escrito por el matemático ucraniano Alexandr Nicolaevich Sharkovsky titulado (en inglés) “*Coexistence of cycles of a continuous mapping into itself*” cuyo objetivo principal era demostrar lo que en la actualidad se conoce por el nombre de Teorema de Sharkovsky. Ya en el año 1962, Sharkovsky había publicado algunos resultados que pueden ser considerados como una introducción a dicho teorema. Sin embargo, el trabajo de Sharkovsky permaneció sin conocerse fuera de Europa Oriental hasta la segunda mitad del siglo 1970, debido, en gran parte, a que el artículo estaba escrito en ruso y publicado en una revista matemática soviética.

En 1975 la revista “American Mathematical Monthly” publicó el famoso artículo titulado “*Period three implies chaos*”, escrito por Tien-Yien Li y James A. Yorke, donde se da por vez primera una definición de “caos” y se demuestra un caso particular del teorema de Sharkovsky (de forma inintencionada debido al desconocimiento de éste). Algún tiempo después, Yorke asistió a una conferencia en Berlín Oriental donde conoció a Sharkovsky y pudo comprobar que él ya había demostrado sus resultados sobre los puntos periódicos de funciones continuas en el intervalo tiempo atrás. De esta forma, el trabajo de Li y Yorke además de introducir la noción de caos a una amplia audiencia, condujo al reconocimiento mundial del trabajo de Sharkovsky.

En este apéndice, damos a conocer estos dos grandes teoremas de la dinámica discreta unidimensional y establecemos como consecuencia una clasificación de las funciones continuas del intervalo en función del tipo de órbitas que presentan. Dado que no es objetivo de este trabajo, solo enunciaremos estos resultados, referenciando al lector a la bibliografía si está interesado en una demostración rigurosa de los mismos.

A.1. El teorema de Sharkovsky

Consideremos la función $f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$. Es fácil ver que

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0.$$

Por tanto, $\{0, 1, 2\}$ forman una órbita de periodo 3. Es razonable preguntarse ahora si existen más órbitas periódicas para f y de qué periodo. Esta pregunta puede ser respondida, al menos en parte, por el siguiente teorema, el cual podemos encontrar en [9]:

Teorema A.1.1. *Si una función continua $f : I \rightarrow I$ tiene puntos periódicos de periodo 3, entonces tiene puntos periódicos de cualquier periodo.*

Demostración.

Sean $\{a, b, c\}$ una órbita periódica de periodo 3 de la función continua f . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a < b < c$, con $f(a) = b$, $f(b) = c$ y $f(c) = a$. (el caso $f(a) = c$ es análogo, considerando otros intervalos en el razonamiento venidero).

Sea $I_0 = [a, b]$ e $I_1 = [b, c]$. El teorema de los valores intermedios implica que $I_1 \subset f(I_0)$, $I_1 \subset f(I_1)$ y $I_0 \subset f(I_1)$. Como $I_1 \subset f(I_1)$, por el teorema 1.2.6 encontramos un punto fijo para f en I_1 .

Sea $n > 1$. Supongamos que existen una sucesión de intervalos cerrados

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n,$$

verificando las siguientes propiedades:

- (i) $A_0 = I_1$;
- (ii) $f(A_k) = A_{k-1}$ para $k = 1, 2, \dots, n-2$;
- (iii) $f^k(A_k) = I_1$ para $k = 1, 2, \dots, n-2$;
- (iv) $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$;
- (v) $f^n(A_n) = I_1$.

Como $A_n \subset I_1$, por (v) y el teorema 1.2.6 tenemos que f^n posee un punto fijo en A_n o, lo que es lo mismo, f posee un punto periódico de periodo menor o igual que n en A_n . Veamos que tiene periodo n .

Supongamos $f^n(p) = p$, con $p \in A_n$. Entonces (iii) implica que

$$\{p, f(p), f^2(p), \dots, f^{n-2}(p)\} \subset I_1 = [b, c]$$

y (iv) implica que $f^{n-1}(p) \in I_0 = [a, b]$. Si $p = c$, entonces $f(p) = a \notin I_1$. Como $f^{n-1}(p)$ es la única de las n primeras iteradas de p que no está en I_1 , entonces $n = 2$. Pero esto contradice el hecho de que c tiene periodo tres, luego $p \in [b, c)$.

Si $p = b$, entonces $n = 3$ ya que $f^2(p) = a \notin I_1$ y la única iterada que no se encuentra en I_1 es $f^{n-1}(p)$.

Supongamos $n \neq 3$, luego p ha de estar en el intervalo abierto (b, c) . Como $f^{n-1}(p) \in I_0 = [a, b]$, entonces $f^{n-1}(p) \neq p$. Si el periodo de p fuera menor que $n-1$, entonces (iii) y el hecho de que $p \neq \{b, c\}$ implican que la órbita de p está completamente contenida

en (b, c) , lo que contradice (iv). Como $f^{n-1}(p) \notin (b, c)$, p ha de tener forzosamente periodo n .

Para completar la prueba hemos de demostrar la existencia de tal sucesión de intervalos cerrados para cada número natural mayor que 1. Sea $n > 1$. Obviamente, podemos tomar $A_0 = I_1$ y (i) se satisface. Para el resto de propiedades, usaremos el siguiente resultado:

“Si f es una función continua y J y K intervalos cerrados tal que $K \subset f(J)$, entonces existe J_0 tal que $J_0 \subset J$ y $f(J_0) = K$.”

Dado que $A_0 = I_1$ y $f(I_1) \supset I_1$, tenemos que $A_0 \subset f(A_0)$ y por tanto, existe $A_1 \subset A_0$ tal que $f(A_1) = A_0$. Se tiene que $A_1 \subset A_0 = f(A_1)$. De nuevo, existe $A_2 \subset A_1$ tal que $f(A_2) = A_1$. Continuando de esta forma, podemos definir A_k para $k = 1, 2, \dots, n-2$, satisfaciendo $A_k \subset A_{k-1}$ y $f(A_k) = A_{k-1}$, de donde obtenemos (ii). Además, como $f(A_k) = A_{k-1}$ para cada k , se tiene

$$f^2(A_k) = f(f(A_k)) = f(A_{k-1}) = A_{k-2};$$

$$f^3(A_k) = f(f^2(A_k)) = f(A_{k-2}) = A_{k-3};$$

...

$$f^k(A_k) = A_0 = I_1;$$

para cada $k = 1, 2, \dots, n-2$, obteniendo (iii). Por otro lado, tenemos

$$f^{n-1}(A_{n-2}) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f(I_1) \supset I_0,$$

de donde obtenemos que existe $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ tal que $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$, que es (iv). Finalmente,

$$f^n(A_{n-1}) = f(f^{n-1}(A_{n-1})) = f(I_0) \supset I_1,$$

luego existe $A_n \subset A_{n-1}$ tal que $f^n(A_n) = I_1$, obteniendo (v). Esto concluye la demostración. □

Por sorprendente que parezca este teorema, no es más que un caso particular de un resultado más general probado por A. N. Sharkovsky en 1964. Este bello e interesante resultado depende únicamente de la continuidad de la función en cuestión y, como bien dice Richard Holgrem en su libro “*A first course in discrete dynamical systems*”, hace ver a cualquiera que no todos los grandes resultados de las matemáticas fueron probados antes del siglo XX.

Para enunciar su resultado, Sharkovsky establece un nuevo ordenamiento de los números naturales, el cual exponemos a continuación:

Definición A.1.2 (Ordenamiento de Sharkovsky). *El ordenamiento de Sharkovsky de los números naturales es*

$$\begin{aligned} 3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ 2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ 2 \cdot 7 \succ \dots \\ \dots \succ 2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ 2^2 \cdot 7 \succ \dots \succ 2^n \cdot 3 \succ 2^n \cdot 5 \succ 2^n \cdot 7 \succ \dots \\ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1 \end{aligned}$$

donde $a \succ b$ indica que a es mayor que b en este orden.

Este orden se fundamenta en que todo número entero positivo puede ser escrito de manera única de la forma $2^m(2n + 1)$, para enteros $m, n \geq 0$, por lo que el orden definido antes es un orden total. La lista comienza con los números impares mayores que 1 ordenados de forma creciente. Luego, se repite la secuencia con cada impar multiplicado por 2, después la secuencia inicial multiplicada por 2^2 , luego por 2^3 y así, sucesivamente. El orden se completa añadiendo las potencias de 2 de forma decreciente.

Teorema A.1.3 (Teorema de Sharkovsky). *Sea $\{I, f\}$ un sistema dinámico discreto que presenta órbitas periódicas de periodo n . Para todo m tal que $n \succ m$ en el ordenamiento de Sharkovsky existe un punto periódico de periodo m .*

La demostración del teorema de Sharkovsky no necesita de herramientas que no hayamos usado en la prueba anterior. Sin embargo, debido a su longitud, referenciamos al lector interesado en su prueba a la bibliografía. Una demostración rigurosa y actual del mismo puede encontrarse en el libro de Block y Coppel [2] o en el artículo de Boleslaw Gawel [7]. En ambos sitios, la demostración del teorema se obtiene como consecuencia de un estudio de resultados y lemas previos.

El resultado que Sharkovsky dio a conocer en 1964 en la revista ucraniana “Ukrainian Mathematical Journal” [16] daba una respuesta más que suficiente a todas las preguntas contemporáneas sobre existencia de órbitas periódicas. Como veremos en el apéndice A.3, este teorema establece una clasificación obvia de las funciones $C^0(I, I)$ (aplicaciones continuas del intervalo I) que, junto con el siguiente apéndice, clasificarán las funciones “caóticas” en función del periodo de sus órbitas.

Por ahora, veremos un ejemplo sencillo de los usos del teorema de Sharkovsky A.1.3 en las aplicaciones. Consideremos la familia logística $h_a(x) = ax(1 - x)$ y tomemos el s.d.d. $\{[0, 1], h_{3,1}\}$. En la figura A.1 vemos las gráficas de las funciones $h_{3,1}$, $h_{3,1}^2$ y $h_{3,1}^4$.

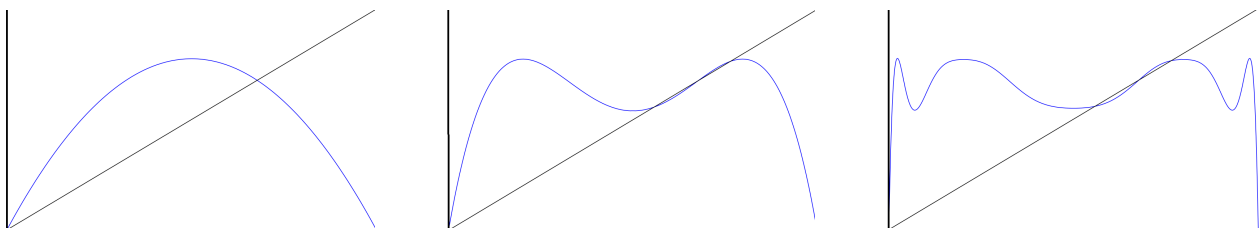


Figura A.1: Iteraciones de la ecuación logística $h_{3,1} : h_{3,1}, h_{3,1}^2$ y $h_{3,1}^4$

Podemos observar en el primer gráfico como h presenta dos puntos fijos en 0 y $21/31$. En el segundo, aparecen dos puntos fijos más para h^2 , que han de corresponder a una órbita periódica de periodo 2. Por último, los puntos fijos del tercer gráfico ($h_{3,1}^4$) son los mismos que los del segundo ($h_{3,1}^2$), por lo que podemos decir que no hay órbitas de periodo 4 para $h_{3,1}$ y, en virtud del teorema de Sharkovsky A.1.3, el mayor orden de las órbitas periódicas de $h_{3,1}$ es 2.

A.2. Caos según Li-Yorke

En diciembre de 1975, Tien-Yien Li y James A. Yorke presentaron un artículo donde exponían el comportamiento de aquellos sistemas que mostraban órbitas periódicas de periodo 3 [10]. En este apartado se darán a conocer estos resultados, los cuales generaron multitud de líneas de investigación y despertaron la curiosidad en el mundo occidental sobre la dinámica discreta unidimensional.

El resultado principal de este apartado permite, a partir de la simple observación de una órbita periódica en particular, determinar no solo la coexistencia de órbitas periódicas de todos los periodos, sino también la presencia de órbitas de comportamiento errático que no se acumulan en ninguna órbita periódica. Recordemos que el objeto principal de estudio de los sistemas dinámicos discretos es el comportamiento de todas las órbitas del sistema. Como puede intuirse, es de vital importancia dentro de la dinámica discreta el poder determinar si un sistema dinámico dado es o no es caótico.

El término caos fue introducido en primera instancia por este artículo de 1975 en dinámica discreta unidimensional. Para introducir el concepto de caos expuesto por Li y Yorke, necesitamos la noción de punto asintóticamente (y aproximadamente) periódico y conjunto scrambled:

Definición A.2.1. Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Un punto $x \in I$ es:

- **asintóticamente periódico** si existe un punto periódico p tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(p)| = 0$$

- **aproximadamente periódico** si para cada $\epsilon > 0$, existe un punto periódico p y un entero positivo N tal que

$$|f^n(x) - f^n(p)| < \epsilon \text{ para todo } n > N$$

Nótese que cualquier punto asintóticamente periódico es también aproximadamente periódico.

Definición A.2.2. Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. y sea $\delta \geq 0$. Un subconjunto $S \subset I$, con al menos dos elementos, se dice **conjunto scrambled**, o **conjunto δ -scrambled** (si $\delta > 0$) si, y solo si, para cada par de puntos $x, y \in S$, con $x \neq y$, se tiene

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| &> \delta, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| &= 0 \end{aligned}$$

El término conjunto scrambled es una adaptación del inglés “scrambled set”, concepto introducido en la década de 1980. La definición original de conjunto scrambled, la cual se puede encontrar en el artículo de Li y Yorke (ellos no dieron la definición formal de conjunto

scrambled en este artículo, aunque utilizaron este concepto), incluía la propiedad de que para cada $x \in S$ y cada punto periódico $p \in I$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x), f^n(p)| > 0,$$

sin embargo, más tarde se demostró que esta propiedad es esencialmente una consecuencia de las anteriores dos (lo que se puede ver, por ejemplo, en [2]), por lo que no suele introducirse en la definición.

Definición A.2.3. *Dado el s.d.d. $\{I, f\}$. Decimos que f es **caótica en el sentido de Li-Yorke** si existe un conjunto $S \subset I$ scrambled no numerable.*

Existen una gran cantidad de resultados interesantes surgidos a partir de la definición de función caótica en sentido de Li-Yorke y de conjunto scrambled que el lector puede ver en [2] o en [12]. Nosotros nos quedaremos con una curiosa propiedad de las funciones caóticas en el sentido de Li-Yorke que exponemos a continuación y que nos será de utilidad más tarde.

Proposición A.2.4. *Si para algún $n > 1$, f^n es caótica en el sentido de Li-Yorke, entonces f también lo es.*

Demostración.

Supongamos f^n caótica en el sentido de Li-Yorke. Entonces existe un conjunto $S \subset I$ no numerable tal que para todo $x, y \in S$

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} |f^{kn}(x) - f^{kn}(y)| &> 0, \text{ y} \\ \liminf_{k \rightarrow \infty} |f^{kn}(x) - f^{kn}(y)| &= 0 \end{aligned}$$

Por las propiedades del límite inferior y superior se tiene que

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |f^{kn}(x) - f^{kn}(y)| = 0$$

y

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(y)| \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} |f^{kn}(x) - f^{kn}(y)| > 0.$$

Por tanto, S es un conjunto scrambled para f , luego f es caótica en el sentido de Li-Yorke. □

Se puede demostrar que, en el caso de intervalos compactos, la implicación opuesta también se cumple. La demostración de este resultado se puede ver en [12], pp. 7-9. La necesidad de que I sea compacto se puede reflejar en este ejemplo:

Ejemplo

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Podemos ver que $S = [2, 3]$ es un conjunto scrambled para f , sin embargo, $f^2(x) = x^4$ no posee ningún conjunto scrambled.

A continuación, enunciamos el teorema principal de este apartado, cuya demostración puede verse en [10].

Teorema A.2.5 (Teorema de Li-Yorke). *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Supongamos que existe un punto $a \in I$ para el que los puntos $b = f(a)$, $c = f^2(a)$ y $d = f^3(a)$ satisfacen*

$$d \leq a < b < c \quad (\text{o } d \geq a > b > c).$$

Entonces

1. *Para cada $k = 1, 2, \dots$ existe algún punto periódico en I de periodo k .*
2. *f es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Nótese que si una función presenta un punto periódico de periodo 3, las hipótesis del teorema se satisfacen y por tanto f es caótica en el sentido de Li-Yorke.

Analicemos el significado del teorema A.2.5. La existencia de puntos periódicos de periodo 3 no solo implica la existencia de puntos periódicos de cualquier periodo, sino que además existe un subconjunto no numerable $S \subset I$ tal que para cualquier par de puntos $x, y \in S$, las sucesiones $(f^n(x))_n$ y $(f^n(y))_n$, cuando n tiende a infinito, presentan infinidad de términos tales que $f^n(x)$ y $f^n(y)$ están tan cerca como se quiera ($\liminf |f^n(x) - f^n(y)| = 0$); e infinidad de términos tales que la distancia entre $f^n(x)$ y $f^n(y)$ siempre es “grande” ($\limsup |f^n(x) - f^n(y)| > 0$).

En otras palabras, bajo iteraciones de f , diferentes puntos de S están a veces cerca, y otras veces separados, y ninguno de estos es periódico.

Por último, hemos de tener en cuenta que el Teorema de Li-Yorke A.2.5 no admite extensiones a dimensiones mayores que 1. Para ilustrar este hecho, consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la rotación en \mathbb{R}^2 de $\frac{2\pi}{3}$ alrededor del origen, es decir, en coordenadas polares

$$f(r_\theta) = r_{\theta + \frac{2\pi}{3}}.$$

Podemos ver que f posee una órbita de periodo 3, y sin embargo, no es caótica en sentido de Li-Yorke, puesto que todos sus puntos (salvo el origen) son puntos periódicos de periodo 3.

A.3. Clasificación de las funciones continuas del intervalo en función del teorema de Sharkovsky

Los teoremas de Sharkovsky y de Li-Yorke brillan por sí solos. Su importancia no solo se debe a sus múltiples aplicaciones, sino también a que constituyen los pilares básicos del desarrollo de la teoría de la dinámica discreta unidimensional posterior. Sin embargo, aunando ambos resultados, obtenemos una consecuencia más a juego con la teoría que en este trabajo se expone.

Juntando los resultados de Li y Yorke y el teorema de Sharkovsky, podemos clasificar las aplicaciones continuas del intervalo en función del periodo que exhiban las órbitas que genere. En este apartado, daremos a conocer esta clasificación, junto a las aportaciones del matemático checo Jaroslav Smítal en este campo.

Hablaremos indistintamente de puntos periódicos como de órbitas periódicas, sin hacer incapié en la diferencia entre ambos (la órbita de todo punto periódico es periódica y toda órbita periódica está formada por puntos periódicos).

Funciones continuas con puntos periódicos de periodo no potencia de 2

Comenzamos la clasificación con aquellas funciones que presentan puntos periódicos con periodo de la forma

$$2^n \cdot \text{impar}$$

en función del teorema de Sharkovsky. El siguiente teorema caracteriza este tipo de funciones en función del teorema de Li-Yorke.

Teorema A.3.1. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. Supongamos que f presenta órbitas periódicas cuyo periodo no es potencia de 2. Entonces f es caótica en el sentido de Li-Yorke.*

Demostración.

Si f presenta órbitas periódicas cuyo periodo no es potencia de 2, por la ordenación de Sharkovsky de los números naturales, forzosamente ha de existir algún m tal que f presenta una órbita de periodo $3 \cdot 2^m$. Por lo tanto, la función f^{2^m} tiene una órbita de periodo 3 y por el teorema de Li-Yorke A.2.5, f^{2^m} es caótica en sentido de Li-Yorke. Por último, aplicando la proposición A.2.4, se obtiene el resultado. □

Conseguimos así la primera consecuencia de nuestra clasificación: cualquier función continua que presente puntos periódicos cuya órbita sea múltiplo de algún número impar es caótica en sentido de Li-Yorke.

Funciones de tipo 2^n

Supongamos que f sólo presenta puntos periódicos con periodo de la forma 2^n , con $n \geq 0$ hasta un cierto grado n_0 . En otras palabras, el conjunto

$$\text{Per}(f, 2^{n_0}) \neq \emptyset,$$

mientras que

$$\text{Per}(f, m) = \emptyset,$$

para todo $m \succ 2^{n_0}$ según la ordenación de Sharkovsky. A este tipo de funciones las llamaremos **de tipo 2^n** . Las funciones de tipo 2^n se caracterizan por ser lo opuesto a caóticas, tal y como se puede ver en el siguiente teorema.

Teorema A.3.2. *Sea $\{I, f\}$ un s.d.d. con I compacto. Si f es de tipo 2^n , entonces toda órbita de I es asintóticamente periódica.*

Demostración.

Sea $n_0 \geq 0$ tal que 2^{n_0} es la mayor órbita que presenta cualquier punto periódico de I . Consideremos $f^{2^{n_0}}$. Por el teorema 3.4.3, al no presentar $f^{2^{n_0}}$ órbitas periódicas de ningún periodo mayor que 1, toda órbita es atraída por un punto fijo de $f^{2^{n_0}}$. Volviendo a f , ésto implica que toda órbita es asintóticamente periódica. □

El hecho de que todo punto sea aproximadamente periódico (en particular, asintóticamente periódico) es exactamente la negación de caos, ya que la órbita de cualquier punto de I es atraída a alguna órbita periódica del sistema, sin propiciar ningún comportamiento extraño y generando así un comportamiento totalmente determinista.

Funciones de tipo 2^∞

El teorema de Sharkovsky establece una última clase de funciones, aquellas que presentan puntos periódicos de periodo cualquier potencia de 2. A este tipo de funciones se le denota como funciones **de tipo 2^∞** . Esta clase de funciones establece una frontera entre las funciones caóticas que presentan órbitas periódicas con periodo un múltiplo de un número impar y funciones deterministas de tipo 2^n .

Con respecto a esta clase de funciones merece una mención especial el artículo publicado en 1986 por Jaroslav Smítal: “*Chaotic functions with zero topological entropy*” [18], donde se exponen varias propiedades de las funciones de tipo 2^∞ .

En este artículo se muestra que las funciones caóticas en el sentido de Li-Yorke no necesitan tener ciclos de periodo no potencia de 2 (es decir, ser del primer tipo estudiado). Es más, establece una caracterización de las funciones caóticas en sentido de Li-Yorke y descompone las funciones $C^0(I, I)$ en dos conjuntos disjuntos: funciones caóticas en sentido de Li-Yorke y funciones que solo presentan trayectorias que se aproximan a ciclos.

La prueba de estos resultados expuesta por J. Smítal hace uso de complejas herramientas y por no ser objetivo de este trabajo y exceder los conocimientos requeridos en el Grado en Matemáticas, exponemos solo los resultados de interés para nuestro objetivo, referenciando al lector a [18] o a [12] si desea una demostración de los mismos.

El teorema principal en el trabajo de Smítal expone que existen funciones de tipo 2^∞ que son caóticas en sentido de Li-Yorke y otras que no lo son:

Teorema A.3.3.

- (i) *Existe un s.d.d. $\{[0, 1], f\}$ con f de tipo 2^∞ caótica en el sentido de Li-Yorke.*
- (ii) *Existe un s.d.d. $\{[0, 1], g\}$ con g de tipo 2^∞ que presenta puntos no asintóticamente periódicos, pero que no es caótica en sentido de Li-Yorke.*

Si el lector quiere ver un ejemplo más visual de función 2^∞ que no es caótica en sentido de Li-Yorke, puede recurrir a [12], apartado 5.2.

En el libro de Block y Coppel [2] se introduce una definición alternativa de caos en función de la noción de turbulencia ([2], página 25). Es sencillo demostrar que si f es caótica en sentido de Block-Coppel, f es caótica en sentido de Li-Yorke, no siendo cierta en general la implicación contraria. Algunos autores consideran esta definición de caos más adecuada, principalmente porque caracteriza de forma rigurosa las clases de funciones expuestas en este apartado.

En general, se tiene que:

- Si f es de tipo 2^n , entonces f no es caótica (en ninguno de los dos sentidos), siendo todas las trayectorias de los elementos del espacio de fases asintóticamente periódicas.
- Si f presenta órbitas del tipo $2^n \cdot q$, con $q \in \mathbb{N}$ impar, entonces f es caótica en los dos sentidos.
- Si f es de tipo 2^∞ , entonces f no es caótica en sentido de Block-Coppel, pudiendo serlo en sentido de Li-Yorke.

Bibliografía

- [1] Allwright, D.J. “Hypergraphic functions and bifurcations in recurrence relations”. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 34 (1978), pp. 687-691.
- [2] Block, L.S.; Coppel, W.A. *Dynamics in one dimension*. Canberra: Springer, 1992.
- [3] Burden, R.L.; Faires, J.D. *Análisis numérico*. 7^a ed. Madrid: Thompson, 2002.
- [4] Coppel, W.A. “The solution of equations by iteration”. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 51 (1955), pp. 41-43.
- [5] Devaney, R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2^a ed. Boston: Addison-Wesley, 1989.
- [6] Gale, D. “The game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem”. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 86 (1979), pp. 818-827.
- [7] Gawel, B. “On the theorems of Sarkovskii and Stefan on Cycles”. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 107 (1989), pp. 125-132.
- [8] Hirsch, M.W.; Smale, S.; Devaney, R.L. *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*. 2^a ed. Nueva York: Elsevier Academic Press, 2004.
- [9] Holmgren, R. *A first course in discrete dynamical systems*. New York: Springer, 1996.
- [10] Li, Tien-Yien; Yorke, A. “Period three implies chaos”. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 82 (1975), pp. 985-992.
- [11] Mira, J.M.; Sánchez-Pedreño, S. *Análisis Matemático I*. Universidad de Murcia. Murcia, 2009.
- [12] Navarro Lamedá, B.; Romero, N. *Acerca del teorema de Sharkovsky*. Universidad Centrooccidental Lisandro Alvarado. Barquisimeto, junio 2011.
- [13] Salinelli, E.; Tomarelli, F. *Modelli dinamici discreti*. 2^a ed. Milán: Springer, 2009.
- [14] Sedaghat, H. “The impossibility of unstable, globally attracting fixed points for continuous mappings of the line”. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 104 (1997), pp. 356-358.
- [15] Sharkovsky, A.N.; Maistrenko, Yu.L.; Romanenko, E.Yu. *Difference equations and their applications*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.

-
- [16] Sharkovsky, A.N. “Coexistence of cycles of a continuous map of the line into itself”. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 16 (1964), pp. 61-71.
- [17] Singer, D. “Stable orbits and bifurcations of maps of the interval”. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 35 (1978), pp. 260-267.
- [18] Smítal, J. “Chaotic functions with zero topological entropy”. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 297 (1986), pp. 269-282.