UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Diferentes nociones de compacidad

Dña. Verónica López Cánovas

Curso 2012-2013

Índice general

Introducción.

El objetivo principal de este trabajo es reunir diferentes nociones de compacidad, así como considerar algunas de sus caracterizaciones e interrelaciones que consideramos más relevantes.

Comenzamos con un resumen en inglés del contenido del trabajo, precedido por su traducción al castellano.

Posteriormente incluimos una breve introducción histórica en aras de ponernos en situación en cuanto a lo novedoso de la Topología (y de la compacidad en particular) respecto a otras áreas matemáticas.

Tras esto, enunciamos una serie de conceptos y propiedades básicas de la Topología, que no son específicas de este trabajo pero que utilizaremos con naturalidad a lo largo de éste. Incluimos además otra sección algo más extensa dedicada a la compacidad, ya que no nos parece apropiado tratar con cierta profundidad otras nociones de este concepto sin ahondar un mínimo en su definición y algunas de sus caracterizaciones y propiedades básicas.

Después comenzamos con lo que consideramos el contenido fundamental y novedosos de este trabajo. Vamos introduciendo una a una las diferentes nociones de compacidad, intentando que tras cada apartado queden claras sus propiedades básicas y sus equivalencias con las definiciones dadas con anterioridad e intentamos ilustrar, siempre que es posible, con contraejemplos, los falsos recíprocos que aparecen.

Mostramos además, al principio de cada apartado, una selección de conceptos y proposiciones que permitirán seguir con mayor fluidez el capítulo en el que aparecen.

Por último ilustramos con tres esquemas las relaciones más importantes entre las diferentes nociones de compacidad presentadas.

Resumen.

Aunque generalmente no resulta sencillo resumir textos matemáticos, intentamos en esta sección recopilar los aspectos más importantes de este trabajo, con el objetivo de que su lectura resulte útil y permita tener una idea general del contenido del mismo.

No debemos olvidar que tratamos sobre una de las ramas más recientes de las matemáticas, la Topología, considerada como un área independiente desde hace menos de trescientos años. Además, nos centramos en la compacidad, término oficialmente introducido hace menos de cien años.

El tema principal de este trabajo es el estudio de diferentes nociones de compacidad, así como de las numerosas relaciones que existen entre ellas en espacios topológicos con distintas propiedades. Obviamente, para poder comprenderlas es necesario conocer ciertos conceptos sobre topología en general y sobre compacidad en particular. Por esto, después de una breve introducción histórica en el Capítulo 1, recopilamos en el Capítulo 2 algunas definiciones y resultados básicos que usaremos a lo largo de este trabajo.

Comenzamos definiendo las aplicaciones continuas entre espacios topológicos, las cuales nos llevan a considerar el concepto de homeomorfismo y las propiedades topológicas que se conservan por éstos, a las que denominamos invariantes topológicos y las cuales son muy importantes ya que se expresan enteramente en términos de la topología del espacio y nos permiten hacer distinciones entre diferentes espacios topológicos.

Después de esto consideramos los axiomas de numerabilidad. Primero definimos los principales axiomas: el primer axioma de numerabilidad, el segundo axioma de numerabilidad y la propiedad de ser Lindelöf. Enunciamos también las relaciones que existen entre ellos, por ejemplo, el segundo axioma de numerabilidad implica tanto el primero como el ser Lindelöf. Por otro lado, introducimos en esta sección algunas definiciones importantes como la de recubrimiento (abierto, finito y numerable) y subrecubrimiento, las cuales usamos durante todo el trabajo.

En la siguiente sección hablamos sobre los axiomas de separación. En par-

ticular, damos la definición de los espacios topológicos T_1 y T_2 (estos últimos llamados normalmente espacios Hausdorff) y de los espacios topológicos regulares y normales. Vemos que se cumple además que todo espacio Hausdorff es T_1, todo espacio regular es Hausdorff y todo espacio normal es también regular.

La última sección del capítulo dedicado a conocimientos previos trata sobre la topología métrica y los espacios metrizables. Desde el punto de vista de la compacidad, esta clase de espacios topológicos resulta interesante ya que, como demostramos más adelante, todas las nociones de compacidad son equivalentes en ellos. En particular, definimos una base para la topología métrica, formada por bolas abiertas, y probamos ciertas propiedades de los espacios topológicos metrizables; probamos, entre otras, que son espacios Hausdorff y normales, que satisfacen el primer axioma de numerabilidad y que si además un espacio metrizable es separable, entonces también satisface el segundo.

En el Capítulo 3, antes de introducir las diferentes nociones de compacidad, tratamos sobre la propia compacidad. Recordamos que un espacio topológico es compacto si de cada subrecubrimiento abierto del espacio podemos extraer un subrecubrimiento finito. Tras esta definición, presentamos algunas caracterizaciones de la compacidad y estudiamos ciertas propiedades generales como que ésta es un invariante topológico y cómo se define en subespacios. Finalmente, terminamos esta sección enunciando el Teorema de Tychonoff, que afirma que el producto arbitrario de espacios compactos es compacto con la topología producto.

Es ahora cuando comenzamos con las diferentes nociones de compacidad. En este trabajo presentaremos cuatro de ellas: ω-compacidad, compacidad sucesional, ω-compacidad débil y pseudo-compacidad.

El Capítulo 4 está dedicado a la ω-compacidad; no obstante, antes de comenzar su estudio damos algunas definiciones que es importante recordar para comprender esta sección. En particular, recordamos que un elemento de un espacio topológico es un punto de aglomeración de una sucesión si para cada uno de sus entornos y para cada término de la sucesión existe un término posterior contenido en dicho entorno. Después de ésta y otras definiciones, presentamos los espacios topológicos ω-compactos como aquellos para los que de cada recubrimiento abierto y numerable podemos extraer un subrecubrimiento finito, y continuamos con algunas de sus propiedades y caracterizaciones.

Quizás la caracterización más importante de estos espacios es la siguiente: Un espacio topológico es ω-compacto si y solo si toda sucesión del espacio tiene al menos un punto de aglomeración. Esta caracterización es de gran utilidad a la hora de probar algunas de las equivalencias que enunciamos más tarde.

También probamos que la ω-compacidad es un invariante topológico y tras esto, mostramos otros resultados como por ejemplo los que enunciamos a continuación:

a) Todo espacio topológico compacto es también ω-compacto. Este es un resultado sencillo de probar, para el que es interesante encontrar un contraejemplo con el fin de mostrar que el recíproco no es cierto, lo cual hacemos en este trabajo con un espacio topológico dotado con la topología del orden.

b) En un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad, la compacidad y la ω-compacidad son equivalentes. Ocurre lo mismo en un espacio metrizable ya que todo espacio topológico metrizable y ω-compacto satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Después, para finalizar este capítulo, consideramos la ω-compacidad en subespacios, mostrando que todo subespacio cerrado en un espacio topológico ω-compacto es también ω-compacto.

En el Capítulo 5 introducimos la compacidad sucesional. También aquí necesitamos recordar algunos conceptos básicos sobre sucesiones, como la definición de subsucesión y de límite de una sucesión, así como propiedades básicas sobre convergencia de sucesiones.

Definimos después los espacios topológicos sucesionalmente compactos. Estos espacios son aquellos en los que toda sucesión tiene al menos una subsucesión convergente. Se cumple ahora, igual que ocurría con la ω-compacidad, que la compacidad sucesional es un invariante topológico.

Aunque nuestra intuición podría llevarnos a pensar lo contrario, no existe ninguna relación entre los espacios topológicos compactos y los espacios topológicos sucesionalmente compactos, es decir, existen espacios topológicos compactos que no son sucesionalmente compactos y espacios topológicos sucesionalmente compactos que no son compactos. En este trabajo mostramos un ejemplo de cada uno de ellos.

Sí que existe, sin embargo, cierta implicación entre la ω-compacidad y la compacidad sucesional en espacios topológicos arbitrarios, pues esta última implica la ω-compacidad. El recíproco se cumple en espacios topológicos que satisfacen el primer axioma de numerabilidad y en particular, en espacios topológicos metrizables.

Ocurre también, y así lo probamos, que en un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad, la compacidad, la ω-compacidad y la compacidad sucesional son equivalentes.

Por último, consideramos la compacidad sucesional en subespacios. Observamos que un subespacio es sucesionalmente compacto si es un espacio topológico sucesionalmente compacto con la topología inducida.

El Capítulo 6 trata sobre la ω-compacidad débil. Comenzamos, al igual que en los capítulos previos, recordando algunos conceptos como el de punto de acumulación y sus propiedades. Los puntos de acumulación son importantes en esta sección ya que un espacio topológico es débilmente ω-compacto si cada subconjunto infinito de éste tiene al menos un punto de acumulación.

Después de esto, demostramos que al igual que ocurría con las nociones de compacidad anteriormente dadas, la ω-compacidad débil es un invariante topológico.

También mostramos que existen numerosas relaciones entre la ω-compacidad débil y las diferentes nociones de compacidad previamente presentadas. Algunos ejemplos son los siguientes:

a) Todo espacio topológico ω-compacto es también débilmente ω-compacto. Sin embargo, el recíproco no es cierto, tal como demostramos en este trabajo.

b) Todo espacio topológico compacto es débilmente ω-compacto aunque el recíproco no se cumple de nuevo. Ocurre lo mismo con los espacios topológicos sucesionalmente compatos.

c) La equivalencia entre la ω-compacidad débil y la ω-compacidad se cumple en espacios topológicos que satisfacen ser T_1, por lo que también se cumple en espacios topológicos Hausdorff.

d) En un espacio topológico metrizable, la compacidad, la ω-compacidad, la compacidad sucesional y la ω-compacidad débil son equivalentes. Este resultado es muy importante porque nos da la equivalencia entre todas las nociones de compacidad definidas hasta ahora.

Para finalizar este capítulo, presentamos la ω-compacidad en subespacios, al igual que hemos hecho en los anteriores.

El Capítulo 7 está dedicado a la pseudo-compacidad. Antes de definir los espacios topológicos pseudo-compactos recordamos ciertos conceptos como los de ínfimo y supremo de una función definida de un espacio topológico en

$\mathbb{R}$. También damos la definición de una función acotada (tanto superior como inferiormente).

Definimos entonces los espacios topológicos pseudo-compactos como aquellos en los que toda función continua definida de tal espacio topológico en $\mathbb{R}$ (con la topología usual) está acotada. Esta definición no resulta muy práctica, por lo que probamos algunas caracterizaciones de estos espacios, así como que la pseudo-compacidad es un invariante topológico.

En cuanto a las nociones de compacidad previamente definidas, mostramos algunas relaciones entre ellas y la pseudo-compacidad. Por ejemplo, probamos que la ω-compacidad implica la pseudo-compacidad y que el recíproco es cierto en espacios topológicos normales, y por tanto también en espacios topológicos metrizables.

Se cumple además que todo espacio topológico sucesionalmente compacto es pseudo-compacto. Sin embargo, existen espacios topológicos pseudo-compactos que no son débilmente ω-compactos y espacios topológicos débilmente ω-compactos que no son pseudo-compactos.

Después de esto, concluimos este capítulo considerando la pseudo-compacidad en subespacios.

Finalmente en este trabajo, incluimos tres diagramas en los que resaltamos las relaciones más importantes entre las diferentes nociones de compacidad mostradas ya que creemos que es la forma más adecuada de clarificarlas.

Summary.

Although it is generally difficult summarizing mathematical texts, in this section we try to collect the most important aspects of this work, so that its reading becomes useful for having a general idea of its content.

We must not forget that we are dealing with one of the most recent branches of mathematics, the Topology, considered as an independent area less than three hundred years ago. Besides, we are focusing on the compactness, term officially introduced less than one hundred years ago.

The main theme of this work is the study of the different notions of compactness, as well as the several relationships among them in topological spaces with different properties. In order to understand them, we need obviously to know certain things about general topology and compactness in particular. For that reason, and after a brief historical introduction to the topic in Chapter 1, we collect in Chapter 2 some basic and general concepts which are used along this work.

We start recalling the idea of continuous maps, which lead us to consider the concept of homeomorphism and the topological properties which are preserved by them, the so called topological invariants. They are very important in topology because they are expressed entirely in terms of the topology of space and allow us to distinguish between different topological spaces.

Later on, we consider the countability axioms. First of all, we define the main three countability axioms: the first countability axiom, the second countability axiom and the property of being Lindelöf. We consider also the relationshipS among them. For instance, the second countability axiom implies both the first and the property of being Lindelöf. We introduced also in this section some very important definitions like those of coverings (open, finite, countable) and subcoverings, which we use throughout the work.

In the next section we consider the separation axioms. In particular, we give the definition of T_1 and T_2 topological spaces (which are usually called Hausdorff spaces), and regular and normal spaces. As is well known, it holds that every regular space is Hausdorff and that every normal space is also

regular.

Finally, the next section is devoted to the metric topology and metrizable spaces. From the point of view of compactness, this class of topological spaces is very interesting because, as we will see later, all the different notions of compactness become equivalent for them. In particular, we define the standard basis of a metric topology, which is made of open balls, and we prove certain properties of metrizable topological spaces. For instance, we see that they are all Hausdorff and normal spaces, that they satisfy the first countability axiom, and, when separable, they also satisfy the second countability axiom.

In Chapter 3, and before introducing the different alternative notions of compactness, we consider the standard notion of compactness. In this sense, let us recall that a topological space is said to be compact if for each open covering of the space we can extract a finite subcovering. After this definition, we consider several characterizations of compactness and study some of its general properties like that of being a topological invariant and how it is inherited by subspaces. Finally, we close this section with the formulation of Tychonoff's theorem, which states that the arbitrary product of compact topological spaces is compact in the product topology.

It is now when we start to introduce the different alternative notions of compactness. In particular, we will consider four of them: the ω-compactness, the sequential compactness, the weak ω-compactness, and the pseudo-compactness.

Chapter 4 is devoted to the ω-compactness, but before dealing with it we give some definitions which are important recalling to understand this section. In particular, we recall that a point of agglomeration of a sequence is a point which satisfies the property that for each of its neighborhoods and for any term of the sequence there always exists a later term of the sequence contained in such neighborhood. After that, we introduce the ω-compact topological spaces as those spaces for which each countable covering has a finite subcovering, and we continue with some of their properties and characterizations.

Perhaps the most important characterization of these spaces is the following: A topological space is ω-compact if and only if every sequence in the space has at least one agglomeration point. This characterization is very useful to prove many of the equivalences we formulate later.

We also prove that ω-compactness is a topological invariant and after that, we show other results as the following ones:

a) Every compact topological space is ω-compact. This is a result easy to prove, for which it is interesting to find a counterexample in order to show that the converse is not true. We show this with a topological space endowed with the order topology.

b) In a space that satisfies the second axiom of countability, compactness and ω-compactness are equivalent; the same happens in a metrizable space because every metrizable ω-compact space satisfies the second countability axiom.

Then, we consider the ω-compactness in subspaces, showing that every closed subspace in a ω-compact space is also ω-compact.

In Chapter 5 we consider the sequential compactness. Also here, and before giving the definition of sequential compactness, we need to recall some basic concepts about sequences like the concept of subsequence and limit of a sequence, as well as, some basic properties about convergence of sequences.

We define later the sequentially compact topological spaces. These spaces are defined as those spaces for which every sequence has at least a convergent subsequence. It happens, as in the case of ω-compactness, that the sequential compactness is a topological invariant.

Although our intuition could take us to think the opposite, there is no relationship between the compact spaces and the sequentially compact spaces. That is, there are compact topological spaces which are not sequentially compact, as well as there are sequentially compact topological spaces which are not compact. In this work, we show an example of each one.

However, there is a relation between the ω-compactness and the sequential compactness in arbitrary topological spaces. In fact, every sequential compact space is also ω-compact. The converse is true in topological spaces which satisfy the first countability axiom and, in particular in metrizable spaces.

It also happens, as we show, that in topological spaces satisfying the second countability axiom, compactness, ω-compactness and sequential compactness are all equivalent.

Finally we consider the sequential compactness in subspaces. Observe that a subspace is sequentially compact if it is a sequentially compact topological space with the induced topology.

In Chapter 6 we deal with the weak ω-compactness. We begin, before defining it, recalling some concepts like the concept of accumulation point and its properties. Accumulation points are important in this section because a topological space is weakly ω-compact if each infinite subset of the space has at least an accumulation point.

After that, we prove that, as it happens with the previous notions of compactness, the weak ω-compactness is a topological invariant.

We also show that there are several relationships among weak ω-compactness and the notions of compactness which we are introduced previously. Some examples are as follows:

a) Every ω-compact topological space is also weakly ω-compact. However, the converse is not true, as we prove in this work.

b) Every compact topological space is weakly ω-compact although the converse is not true again. It happens the same with the sequentially compact topological spaces.

c) The equivalence between weak ω-compactness and ω-compactness is satisfied in topological spaces which are T1, so this equivalence is satisfied in Hausdorff topological spaces too.

d) In a metrizable topological space, compactness, ω-compactness, sequential compactness and weak ω-compactness are equivalent. This result is very important because it gives us the equivalence among all the notions of compactness defined up to now.

Then, to finish this chapter, we consider the weak ω-compactness in subspaces.

Chapter 7 is devoted to the pseudo-compactness. Before defining pseudo-compact topological spaces, we recall some concepts like the infimum and supremum of a map defined from a topological space to $\mathbb{R}$. We also give the definition of a bounded (above and below) map.

We define then the pseudo-compact topological spaces as those spaces for which every continuous map from X to $\mathbb{R}$ (with the usual topology) is bounded. This definition is not very useful, so we prove several characterizations of these spaces. We also prove that pseudo-compactness is a topological invariant.

Regarding the notions of compactness previously defined, we show some relationships among them and pseudo-compactness. For instance, we prove that ω-compactness implies pseudo-compactness. The converse is true in topological spaces which are normal, so it is also true in metrizable spaces.

It also happens that every sequentialy compact topological space is also pseudo-compact. However, there exist pseudo-compact topological spaces which are not weakly ω-compact and weakly ω-compact topological spaces which are not pseudo-compact.

After that,we finish this chapter considering pseudo-compactness in subespaces.

Finally in this work we show three diagrams where we highlight the most important relationships among the different notions of the compactness showed; we think this is the best way to clarify them.

Capítulo 1

Introducción histórica.

La Topología es una de las ramas de las matemáticas más recientemente considerada como tal.

Fue la fundación del cálculo infinitesimal, así como los intentos de formalizar el concepto de variedad en Geometría lo que llevó a la aparición de la Topología, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX.

El término *topología* lo acuña por primera vez Johan Bennedict Listing (discípulo de Gauss) en 1836. Sin embargo, el origen de la Topología como disciplina se considera inaugurado hacia el 1735.

En concreto, la noción de compacidad nace de la necesidad de hacer la distinción entre ser acotado y tener un mínimo o máximo. En este sentido, al menos tres líneas de pensamiento condujeron a la definición de la compacidad:

La primera fue la búsqueda de máximos y mínimos de funciones reales de variable real. Estaba claro que, dada $f : I \to \mathbb{R}$ una función acotada definida sobre un dominio $I \subseteq \mathbb{R}$, siempre se podía encontrar una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tendía al valor máximo de la función, y ésta es de hecho la definición que se le daba a valor máximo.

Pero ¿ la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en sí misma, o alguna de sus subsucesiones, también convergía a un punto $x \in I$? Esta propiedad fue estudiada por el matemático checo Bolzano, y más tarde por Weierstrass.

La segunda línea de pensamiento que condujo a la compacidad fue la ahora familiar distinción entre continuidad punto a punto y continuidad uniforme. Esta distinción pasó a un primer plano en 1850 aproximadamente y Dirichlet demostró que en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, en el que se incluyen los extremos, una función continua era siempre uniformemente continua.

Él fue realmente la primera persona en usar la idea de reemplazar un recubrimiento abierto por un subrecubrimiento finito.

La tercera línea fue cierto trabajo en análisis complejo llevado a cabo por Emily Borel en la última década del siglo XIX. Borel estaba estudiando la continuidad analítica, y el hecho de que una función de variable compleja se podía expresar mediante una serie de potencias centrada sobre algún punto z_0 de la forma:

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Si la serie tenía radio de convergencia finito, ésta representaba a la función $f(z)$ solamente dentro del disco de convergencia. Además, si se reescribía la serie de forma análoga pero centrada en un punto z_1 del interior del disco de convergencia, distinto de z_0, era posible que la nueva serie convergiera en algunos puntos de fuera del disco anterior. En este sentido, uno podía extender una función a lo largo de una curva γ desde un punto a hasta otro punto b siempre que existiera dicha serie con un radio positivo de convergencia centrada en cada punto de γ.

Lo que se quería era una manera de demostrar que solo se requiere un número finito de discos de convergencia para cubrir toda la curva γ.

Finalmente, los espacios topológicos compactos fueron introducidos independientemente por Vietoris en 1921 y por Alexandroff y Uryson en 1923. Estos últimos autores establecieron los principios básicos de estos espacios en el artículo *Memoire sur les espaces topologiques compacts*, en 1929, aunque en los inicios de la topología, la compacidad era lo que ahora conocemos como ω-compacidad débil, mientras que la definición en términos de recubrimientos era llamada bicompacidad.

Más tarde, la palabra *compacto* se empezó a utilizar también para la definición por recubrimientos y se buscó un nuevo nombre para la ω-compacidad débil (aunque aún no se ha encontrado uno definitivo).

Ya anteriormente los espacios ω-compactos habían sido introducidos por Frechet en 1906. En años posteriores se definieron la compacidad sucesional y la pseudo-compacidad, introducida esta última por Hemitt en 1948.

Capítulo 2

Conceptos previos.

Para el estudio de las diferentes nociones de compacidad, así como sus equivalencias y las relaciones que existen entre ellas en diferentes espacios topológicos, empezaremos definiendo conceptos que usaremos a lo largo del trabajo. Suponemos conocidas otras definiciones más básicas de la Topología, y escribiremos a menudo *espacio topológico* para referirnos a un conjunto en el que hay definida una topología, siempre que no sea necesario especificarla.

2.1. Funciones continuas.

Hablamos de las funciones continuas con el objetivo de conocer sus propiedades topológicas básicas y llegar finalmente a la definición de los homeomorfismos. Éstos aparecerán en las siguientes secciones asociados a los invariantes topológicos, también definidos en este apartado.

Definición 2.1 *Dados X e Y dos espacios topológicos, decimos que una aplicación $f : X \to Y$ es continua si para cada subconjunto V abierto en Y, el conjunto $f^{-1}(V)$ es abierto en X.*

Teorema 2.2 *Dada $f : X \to Y$ una aplicación entre espacios topológicos, son equivalentes:*

- *f es continua.*
- *Para cada subconjunto A de X se tiene que $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*
- *Para cada subconjunto cerrado B de Y, se cumple que $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*
- *Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subseteq V$.*

Definición 2.3 *Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una biyección. Decimos que f es un homeomorfismo si f es continua y además su función inversa $f^{-1} : Y \to X$ también lo es.*

A las propiedades topológicas que se conservan por homeomorfismos las denominamos invariantes topológicos.

La importancia de los homeomorfismos reside en que éstos proporcionan una biyección no solo entre X e Y, sino entre la colección de conjuntos abiertos de X y la de Y. Así, los invariantes topológicos son aquellas propiedades que se expresan completamente en términos de la topología del espacio (esto es, de sus conjuntos abiertos).

2.2. Axiomas de numerabilidad.

Los siguientes conceptos son los denominados *axiomas de numerabilidad* ya que comprenden propiedades de los espacios topológicos tales que se basan en la numerabilidad de ciertos conjuntos que también definimos a continuación.

Definición 2.4 *Dado un espacio topológico X, una base para la topología de X es una colección β de subconjuntos abiertos de X tales que para cada $x \in X$ y todo entorno[1] U de x existe un elemento de β que contiene a x y que está contenido en U.*

Definición 2.5 *Decimos que una colección β_x de entornos de $x \in X$ es una base de entornos en el punto x si dado cualquier entorno U de x, éste contiene al menos un elemento de la colección β_x .*

Definición 2.6 *Decimos que un espacio topológico X satisface el primer axioma de numerabilidad ($1A\mathbb{N}$) si para cada punto $x \in X$ existe una base de entornos numerable en el punto x.*

Definición 2.7 *Decimos que un espacio topológico X satisface el segundo axioma de numerabilidad ($2A\mathbb{N}$) si existe una base numerable para la topología definida en X.*

Es fácil comprobar que si β es una base para una topología en X entonces para cada $x \in X$ el conjunto formado por los elementos de β que contienen a x es una base de entornos en este punto, de lo que se deduce la siguiente propiedad.

[1]Para nosotros, en la definición de entorno está implícito el hecho de ser un conjunto abierto del espacio.

Proposición 2.8 *Si un espacio topológico X satisface el segundo axioma de numerabilidad entonces también satisface el primero. El recíproco no es cierto.*

El ejemplo más sencillo de espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad pero no el segundo lo encontramos tomando la topología discreta en cualquier conjunto X con cardinal infinito no numerable.

Para cada $x \in X$ se cumple que $\beta_x = \{\{x\}\}$ es una base de entornos de x (obviamente numerable) y por tanto se satisface el primer axioma de numerabilidad. Sin embargo, cualquier base de esta topología debe contener a todos los abiertos unipuntuales y por lo tanto no puede ser numerable.

Mostramos a continuación unas definiciones necesarias para comprender el último axioma de numerabilidad que presentamos.

Definición 2.9 *Dado un espacio topológico X, decimos que una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio es un recubrimiento de éste (o que cubre a X), si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ contiene a X.*

Decimos que $\mathcal{A}$ es un recubrimiento abierto de X si es un recubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X.

Decimos que $\mathcal{A}$ es un recubrimiento finito de X si es un recubrimiento de X formado por una cantidad finita de conjuntos del espacio.

Decimos que $\mathcal{A}$ es un recubrimiento numerable de X si es un recubrimiento de X formado por una cantidad numerable de conjuntos del espacio.

Definición 2.10 *Si $\mathcal{A}$ es un recubrimiento de un espacio topológico X, llamamos subrecubrimiento de $\mathcal{A}$ a cualquier subcolección de $\mathcal{A}$ que es también un recubrimiento de X.*

Definimos ahora la propiedad de ser Lindelöf.

Definición 2.11 *Decimos que un espacio topológico X es Lindelöf si de cada recubrimiento abierto de X podemos extraer un subrecubrimiento numerable.*

El siguiente resultado muestra que el segundo axioma de numerabilidad implica, además del primero, el ser Lindelöf.

Teorema 2.12 *Si un espacio topológico X satisface el segundo axioma de numerabilidad entonces es Lindelöf.*

Demostración.

Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de X y sea $\beta = \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable para la topología de X, que existe por ser $2A\mathbb{N}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ que sea posible, tomamos un $A_n \in \mathcal{A}$ tal que $B_n \subseteq A_n$. Tenemos así una colección $\mathcal{A}'$ formada por los A_n seleccionados, que además es numerable ya que está indexada con un subconjunto J de números enteros positivos.

Veamos que la colección $\mathcal{A}'$ cubre a X.

Sea $x \in X$; entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$. Dado este A (abierto), existe $B_n \in \beta$ tal que $x \in B_n \subseteq A$. Para este B_n hemos tomado anteriormente un $A_n \in \mathcal{A}'$ tal que $B_n \subseteq A_n$, y así x está también contenido en este $A_n \in \mathcal{A}'$.

Concluimos que $\mathcal{A}'$ es un subrecubrimiento numerable de $\mathcal{A}$ y X es por tanto Lindelöf.

❏

2.3. Axiomas de separación.

Enunciamos ahora los *axiomas de separación*, llamados así por el hecho de describir la *separación* de ciertos puntos o clases de conjuntos por conjuntos abiertos.

Definición 2.13 *Decimos que un espacio topológico X es T_1 si para cada par de puntos distintos de X, $x \neq y$, existen entornos U y V de tales puntos respectivamente, tales que $x \notin V$ e $y \notin U$.*

Es fácil ver que esto es equivalente a que todos los conjuntos unipuntuales del espacio sean cerrados.

Definición 2.14 *Decimos que un espacio topológico X es Hausdorff (o T_2) si para cada par de puntos (distintos) de X existen entornos disjuntos de tales puntos.*

Es evidente a partir de las definiciones anteriores que todo espacio T_2 es también T_1.

Para las siguientes definiciones es necesario suponer que X es un espacio topológico T_1.

Definición 2.15 *Decimos que un espacio topológico X (T_1) es regular, si dado un punto $x \in X$ y un conjunto cerrado $C \subseteq X$ tales que $x \notin C$, existen U y V abiertos disjuntos de X tales que $x \in U$ y $C \subseteq V$.*

Definición 2.16 *Decimos que un espacio topológico X (T_1) es normal si para cada par de subconjuntos de X cerrados y disjuntos A y B, existen U y V abiertos disjuntos de X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$.*

Se demuestra además fácilmente que todo espacio regular es Hausdorff y todo espacio normal es también regular.

Los axiomas de separación y numerabilidad serán, en muchos casos, las características que deberán cumplir los espacios topológicos para satisfacer algunas de las equivalencias entre las diferentes nociones de compacidad que nos hemos propuesto presentar.

2.4. Topología métrica

Ya que nos preguntaremos cómo se comportan las diferentes nociones de compacidad en espacios métricos (a los que llamaremos metrizables) es interesante conocer al menos cómo son sus abiertos y si es lícito intercambiar las palabras *métrico* y *metrizable* como si de sinónimos se tratara.

Proposición 2.17 *Si d es una distancia definida en un conjunto X, entonces la colección*

$$\beta = \{B_d(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0, x \in X\}$$

es una base para una topología sobre X, denominada topología métrica inducida por d.

Cuando hablamos de un espacio métrico nos referimos a un espacio topológico dotado de la topología métrica inducida por una distancia.

Proposición 2.18 *Si d es una distancia definida en un conjunto X, un subconjunto U de X es abierto en la topología métrica inducida por d si y solo si para cada $x \in U$ existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(y, \lambda) \subseteq U$.*

Definición 2.19 *Decimos que un espacio topológico X es metrizable si existe una distancia d definida en X que induce la topología de éste.*

Por tanto, un espacio métrico es por su propia definición un espacio metrizable; y recíprocamente cuando hablemos de un espacio metrizable podemos tratarlo como espacio métrico tomando la distancia d que induce su topología.

Veamos ahora algunas características importantes de estos espacios.

Teorema 2.20 *Todo espacio topológico metrizable es Hausdorff.*

Demostración.

Sean x e y dos puntos distintos de un espacio topológico metrizable X y sea $d = d(x, y)$ la distancia entre ellos. Se cumple que $d > 0$ ya que $x \neq y$, por tanto tomando $U = B(x, d/3)$ y $V = B(y, d/3)$ tenemos que U es un entorno de x y V es un entorno de y los cuales tienen intersección vacía.

Así, X es un espacio Hausdorff y por consiguiente es también un espacio T_1.

❑

Teorema 2.21 *Todo espacio topológico metrizable y separable satisface el segundo axioma de numerabilidad.*

Demostración.

Sea X un espacio metrizable (con distancia d) y separable con $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto denso y numerable. Veamos que

$$B = \{B(a_m, \frac{1}{n}) : m, n \in \mathbb{N}\}$$

es una base (numerable) para la topología generada por la distancia d.

Dado un abierto U y $x \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ (por ser U abierto). Sea $a_m \in A$ con $a_m \in B(x, \frac{\varepsilon}{4})$, que sabemos que existe porque A es denso en X.

Para todo $t \in B(a_m, \frac{\varepsilon}{2})$ se cumple:

$$d(t, x) \leq d(t, a_m) + d(a_m, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Por tanto:

$$B(a_m, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(x, \varepsilon).$$

Tomamos ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ y así

$$B(a_m, \frac{1}{n}) \subseteq B(a_m, \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq U$$

y B es una base numerable para la topología generada por la distancia d.

Obtenemos así que X satisface el segundo axioma de numerabilidad.

❑

Teorema 2.22 *Todo espacio topológico metrizable satisface el primer axioma de numerabilidad.*

Demostración.
Si X es un espacio metrizable, para cada $x \in X$ la familia $\{B(x,r) : r > 0\}$ es una base de entornos en x.

Además $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, por lo que $\{B(x,r) : r \in \mathbb{Q}\}$ es también una base de entornos en x que es además numerable y por tanto X satisface el primer axioma de numerabilidad.

❑

Teorema 2.23 *Todo espacio topológico metrizable es normal.*

Demostración.
Sea X un espacio metrizable con distancia d. Ya sabemos que X es T_1 (y que de hecho es Hausdorff). Sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Para cada $a \in A$ podemos tomar $\varepsilon_a > 0$ tal que $B(a, \varepsilon_a) \cap B = \emptyset$.

Del mismo modo, para cada $b \in B$ podemos tomar ε_b de manera que $B(b, \varepsilon_b) \cap A = \emptyset$.

Definimos entonces

$$U = \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\varepsilon_a}{2})$$

$$V = \bigcup_{b \in B} B(b, \frac{\varepsilon_b}{2}).$$

Tenemos así U y V abiertos en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. solo nos queda comprobar que son disjuntos, lo cual hacemos por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $z \in U \cap V$. Entonces $z \in B(a, \frac{\varepsilon_a}{2}) \cap B(b, \frac{\varepsilon_b}{2})$ para ciertos $a \in A$ y $b \in B$.

Así,

$$d(a,b) \leq d(a,z) + d(z,b) \leq \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_b)$$

Si $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$ entondes $d(a,b) < \varepsilon_b$ y la bola $B(b, \varepsilon_b)$ contendría al punto a, lo cual es absurdo.

Análogamente, si $\varepsilon_a \leq \varepsilon_b$ entondes $d(a,b) < \varepsilon_a$ y la bola $B(a, \varepsilon_a)$ contendría al punto b, lo que también es imposible.

Así, X es un espacio normal, como queríamos probar.

❑

Capítulo 3

Compacidad.

Dedicamos esta sección a definir la compacidad y mostrar algunos resultados relativos a ésta.

Definición 3.1 *Decimos que un espacio topológico X es compacto si de cada recubrimiento abierto de X podemos extraer un subrecubrimiento finito.*

Aunque nos encontramos ante una definición sencilla en cuanto a su comprensión, no lo es tanto a la hora de llevarla a la práctica en el sentido de decidir cuándo es satisfecha por un espacio topológico o cuándo no lo es.

Por este motivo, se ha intentado desde su aparición encontrar caracterizaciones y propiedades que nos permitan distinguir los espacios compactos de los que no lo son.

Mostramos a continuación una de las caracterizaciones más usadas en la práctica, la cual hace alusión a colecciones de conjuntos cerrados en lugar de abiertos como ocurría en la definición.

Definición 3.2 *Decimos que una colección $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de la intersección finita si cada subcolección finita de $\mathcal{C}$ tiene intersección no vacía. Es decir, si para cada conjunto de índices finito $J \subseteq I$ se cumple que $\bigcap_{j\in J} C_j \neq \emptyset$.*

Proposición 3.3 *Un espacio topológico X es compacto si y solo si toda colección de conjuntos cerrados en X con la propiedad de la intersección finita, satisface que la intersección de todos sus elementos es no vacía.*

Demostración.

Sea X un espacio compacto y $\mathcal{C}$ una colección de cerrados de X con la propiedad de la intersección finita.

Supongamos, utilizando la reducción al absurdo, que

$$\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C = \emptyset,$$

y tomando complementarios obtenemos la igualdad

$$\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C^c = X.$$

Así, $\{C^c\}_{C\in\mathcal{C}}$ es un recubrimiento abierto de X, del que por hipótesis podemos extraer un subrecubrimiento finito, digamos $\{C_1^c, C_2^c, ..., C_n^c\}$.

Entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i^c = X,$$

y tomando de nuevo complementarios queda

$$\bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset,$$

pero esto es imposible ya que $\mathcal{C}$ satisface la propiedad de la intersección finita.

Concluimos que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset$ y así obtenemos la condición necesaria.

Sea ahora $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento abierto de X, el cual cumple por la propia definición que

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i.$$

Tomando complementarios, esta igualdad es equivalente a

$$\emptyset = \bigcap_{i\in I} U_i^c.$$

Entonces, la colección de cerrados $\{U_i^c\}_{i\in I}$ tiene intersección vacía, por lo que teniendo en cuenta la hipótesis, esta familia no satisface la propiedad de la intersección finita y existe un número finito de elementos de $\{U_i^c\}_{i\in I}$, digamos $\{U_1^c, U_2^c, ..., U_n^c\}$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i^c = \emptyset,$$

y tomando de nuevo complementarios en la igualdad anterior, queda

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_i = X.$$

Así $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ es un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$ y X es compacto.

❑

Veamos qué ocurre con los subespacios. Diremos que un subespacio Y de un espacio topológico X es compacto cuando satisfaga la definición de compacidad visto como espacio topológico con la topología inducida.

Mostramos a continuación una caracterización que nos ayudará a distinguir subespacios compactos de los que no lo son, evitando usar la definición de compacidad que como ya comentamos, no resulta muy práctica.

Lema 3.4 *Sea Y un subespacio de X. Se cumple que Y es compacto si y solo si de cada recubrimiento de Y formado por abiertos de X podemos extraer un subrecubrimiento finito.*

Demostración.

Supongamos en primer lugar que Y es compacto y sea $\{U_i\}_{i\in I}$ un recubrimiento de Y formado por abiertos de X.

Entonces $\{U_i \cap Y\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de Y, y como éste es compacto por hipótesis, podemos tomar un subrecubrimiento finito de la forma:

$$\{U_{i_1} \cap Y, U_{i_2} \cap Y, ..., U_{i_k} \cap Y\}.$$

Así,

$$\{U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_k}\}$$

es un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i\in I}$ y tenemos lo que buscábamos.

Recíprocamente, si $\{V_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de Y, para cada $i \in I$ podemos elegir un conjunto U_i abierto en X tal que $V_i = U_i \cap Y$.

Entonces la colección $\{U_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de Y formado por abiertos de X del que, por hipótesis, podemos tomar

$$\{U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_k}\}$$

una subcolección finita que recubre a Y.

De esta forma, tenemos

$$\{V_{i_1}, V_{i_2}, ..., V_{i_k}\}$$

un subrecubrimiento finito de $\{V_i\}_{i\in I}$ y concluimos que Y es compacto.

❑

Proposición 3.5 *Todo subespacio cerrado de un espacio topológico compacto es compacto.*

Demostración.

Sea Y un subespacio cerrado de un espacio compacto X. Dado $\mathcal{A}$ un recubrimiento de Y formado por abiertos de X tenemos que $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup \{Y^c\}$ es un recubrimiento abierto de X (recordemos que Y^c es abierto ya que Y es cerrado).

Como X es compacto, existe un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}'$, al que denotamos como $\mathcal{B}$. Distinguimos dos casos:

- Si $\mathcal{B}$ contiene al conjunto Y^c, entonces $\mathcal{B} \setminus \{Y^c\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ que cubre a Y.
- Si $\mathcal{B}$ no contiene al conjunto Y^c, entonces $\mathcal{B}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ que cubre Y.

Por tanto de todo recubrimiento de Y por abiertos de X podemos extraer un subrecubrimiento finito y por el lema anterior, esto equivale a la compacidad de Y.

❏

Es importante no caer en el error de tomar como cierto el recíproco de la proposición anterior y considerar todos los subespacios compactos como cerrados. Un contraejemplo sencillo es el siguiente.

Sea el espacio topológico formado por la recta real con la topología cofinita (es decir, aquella en la que un conjunto es abierto si y solo si su complementario tiene cardinal finito).

Tomemos el conjunto formado por los números naturales, que evidentemente no es cerrado pues su complementario ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$) no es abierto.

Sin embargo, $\mathbb{N}$ es un subconjunto compacto; veámoslo:

Sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de $\mathbb{N}$ y sea U un abierto cualquiera de tal recubrimiento. Por definición de la topología cofinita, tenemos que $\mathbb{N} \setminus U$ es un conjunto formado por un número finito de elementos, digamos $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$. Sean entonces U_i con $i = 1, 2...m$ abiertos del recubrimiento tales que $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, 2, ...m\}$.

Tenemos entonces que $\{U, U_1, ..., U_m\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ y $\mathbb{N}$ es compacto.[1]

[1]Es claro que en éste espacio topológico los únicos subconjuntos cerrados son los finitos y puede probarse que cualquier subconjunto es compacto.

Nos preguntamos ahora cómo se comportan los espacios compactos con respecto a las funciones continuas. De hecho, a lo largo del texto y cada vez que definamos una nueva noción de compacidad, nos plantearemos si ésta es un invariante topológico.

Veremos que en general la respuesta es afirmativa, e incluso en muchos casos obtendremos resultados más fuertes, como ocurre a continuación.

Teorema 3.6 *La compacidad es un invariante topológico. De hecho, si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y X es compacto, entonces $f(X)$ también lo es.*

Demostración.
Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento de $f(X)$ formado por abiertos de Y.

Como f es una aplicación continua, $\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ es claramente un recubrimiento abierto de X.

Por ser X compacto, podemos tomar

$$\{f^{-1}(U_{i_1}), f^{-1}(U_{i_2}), ..., f^{-1}(U_{i_k})\}$$

un recubrimiento finito del anterior, y así

$$\{U_{i_1}, U_{i_2}, ..., U_{i_k}\}$$

es un subrecubrimiento finito de $\{U_i\}_{i \in I}$ y por el Lema 3.4 concluimos que $f(X)$ es compacto.

❏

Para terminar con la compacidad enunciaremos un teorema de gran alcance, de cuya demostración prescindimos por escaparse de las pretensiones de este texto:

Teorema 3.7 *(Teorema de Tychonoff) El producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto con la topología producto.*

Capítulo 4

ω-compacidad.

4.1. Fijando conceptos

Conviene antes de sumergirnos en la ω-compacidad propiamente dicha, detenernos en algunas definiciones y propiedades necesarias en este capítulo.

Damos en primer lugar la definición de punto de aglomeración de una sucesión.

Definición 4.1 *Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico X, decimos que $x \in X$ es un punto de aglomeración de la sucesión si para cualquier entorno U de x y cada número natural n, existe $m > n$ tal que $x_m \in U$. Es evidente que basta con que esta propiedad se cumpla para todos los entornos de una base de entornos en x.*

Mostramos ahora una caracterización de estos puntos.

Proposición 4.2 *Un punto x de un espacio topológico X es un punto de aglomeración de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ si y solo si todo entorno de x contiene una cantidad infinita de términos de la sucesión.*

Demostración.

Sea x un punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$.

Por definición, dado U un entorno de x y $n \in \mathbb{N}$, existe $x_{m_1} \in U$ con $m_1 > n$.

Así, tomando ahora tal m_1, existe $m_2 > m_1$ que cumple $x_{m_2} \in U$.

Repitiendo este proceso obtenemos que U contiene infinitos términos de la sucesión.

Recíprocamente, sea U un entorno de $x \in X$ y supongamos, procediendo por reducción al absurdo, que existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual no podemos tomar $m > n$ con $x_m \in U$. En ese caso, $x_m \notin U$ para todo $m > n$.

Así U puede contener a lo más los términos de la sucesión $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$, lo cual es una contradicción pues por hipótesis todo entorno de x contiene una cantidad finita de términos de ésta.

Concluimos, tal como buscábamos, que x es un punto de aglomeración de la sucesión.

❑

4.2. Definición.

Damos ahora la definición de ω-compacidad. Aunque en algunos libros la encontraremos definida como compacidad numerable, nosotros la nombraremos únicamente como ω-compacidad con el objetivo de facilitar la comprensión del texto.

Definición 4.3 *Decimos que un espacio topológico X es ω-compacto si de todo recubrimiento abierto y numerable de X podemos extraer un subrecubrimiento finito.*

4.3. Propiedades

Lo primero será preguntarnos sobre la existencia de caracterizaciones de los espacios topológicos ω-compactos que nos presten un camino alternativo al de la comprobación de la definición a la hora de constatar si un espacio es ω-compacto.

Antes de enunciar tales resultados mostramos un lema previo que nos facilitará esta tarea.

Lema 4.4 *Dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico X, se cumple que*

$$\{x \in X \mid x \textit{ es un punto de aglomeración de } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n$$

donde $A_n = \{x_m \mid m > n\}$.

Demostración.
Veamos que se cumplen ambas inclusiones.

Sea x un punto de aglomeración de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y tomemos A_m con $m \in \mathbb{N}$ arbitrario. Dado U un entorno de x, por ser éste punto de aglomeración, existe $n > m$ tal que $x_n \in U$. Así $U \cap A_m \neq \emptyset$ y tenemos que x está en la adherencia de A_m, es decir, $x \in \bar{A_m}$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$; equivalentemente, x está contenido en la intersección de todos ellos.

Tomamos ahora $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n$ y sea U un entorno de x. Para cada $n \in \mathbb{N}$ como $x \in \bar{A}_n$ existe $x_m \in U$ con $m > n$, y ésta es precisamente la definición de punto de aglomeración.

Concluimos que

$$\{x \in X \mid x \text{ es un punto de aglomeración de } \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bar{A}_n$$

❑

Enunciamos una de las caracterizaciones de los espacios ω-compactos.

Proposición 4.5 *Un espacio topológico X es ω-compacto si y solo si toda sucesión decreciente $C_1 \supset C_2 \supset ... \supset C_n \supset ...$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tiene intersección no vacía, es decir, $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$.*

Demostración.
Tomamos X un espacio ω-compacto y una sucesión de cerrados en las condiciones del enunciado.
Suponemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset,$$

y buscamos por tanto llegar a una contradicción.

Tomando complementarios en la igualdad anterior queda

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^c = X$$

siendo C_n^c abiertos en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Tenemos así $\{C_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ un recubrimiento abierto y numerable de X.

Como X es ω-compacto existe un subrecubrimiento finito del anterior, $\{C_i^c\}_{i\in I}$. Tomamos I ordenado, $I = \{n_1, n_2, ..., n_k\}$ de forma que $C_{n_1}^c \subset C_{n_2}^c \subset ... \subset C_{n_k}^c$, por tanto se cumple que

$$X = C_{n_k}^c$$

pero así, tomando de nuevo complementarios queda

$$C_{n_k} = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción pues los suponíamos no vacíos.

De esta manera, obtenemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$, tal como queríamos ver.

Veamos el recíproco:
Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento de X formado por abiertos encajados.

Como

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$$

tenemos, tomando complementarios, que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n^c = \emptyset$$

con $U_1^c \supset U_2^c \supset ....$

Así, por hipótesis tiene que existir entonces al menos un n_0 tal que $U_{n_0}^c = \emptyset$ pero entonces $U_{n_0} =$ X, es decir, $\{U_{n_0}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, lo cual implica que X es ω-compacto.

❏

Otra caracterización es la siguiente.

Proposición 4.6 *Un espacio topológico X es ω-compacto si y solo si toda sucesión de elementos de éste tiene al menos un punto de aglomeración.*

Demostración.
Para ver la condición necesaria prodecemos por reducción al absurdo:
Sea X un espacio topológico ω-compacto y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de X que no tiene puntos de aglomeración.

Definimos para cada número natural n el conjunto

$$A_n = \{x_m \mid m > n\}.$$

Observemos que estos conjuntos están formados por las colas de la sucesión dada.

Por lo visto en el Lema 4.4 tenemos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n = \emptyset$$

y por la definición de los conjuntos se cumple $\bar{A}_1 \supseteq \bar{A}_2 \supseteq ....$

Entonces, por la proposición anterior tiene que cumplirse que $\bar{A_{n_0}} = \emptyset$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ pero esto implica que $A_{n_0} = \emptyset$ lo cual nos da una contradicción ya que todos los A_n son no vacíos.

Obtenemos así que la sucesión tiene al menos un punto de aglomeración.

Veamos también por reducción al absurdo el recíproco.

Supongamos que toda sucesión de X tiene al menos un punto de aglomeración y que X no es ω-compacto.

Existe entonces $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento numerable de abiertos encajados[1] de X del que no podemos extraer un subrecubrimiento finito.

Tomamos para cada $n \in \mathbb{N}$ un elemento $x_n \in X$ tal que $x_n \notin U_n$ y construimos así la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Por hipótesis, existe $x \in X$ un punto de aglomeración de la sucesión. Este x está contenido en U_{n_0} para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ pero por la definición de la sucesión tenemos que para cada número entero m mayor que n_0 se cumple que $x_m \notin U_{n_0}$ por lo que x no puede ser un punto de aglomeración.

Llegamos así a una contradicción y por tanto X es ω-compacto.

❏

Como ya adelantamos, no pasaremos sin preguntarnos qué podemos decir respecto a si es un invariante topológico.

Teorema 4.7 *La ω-compacidad es un invariante topológico. De hecho, si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y X es ω-compacto, entonces $f(X)$ también lo es.*

Demostración.

Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento abierto y numerable de $f(X)$.

[1] Un recubrimiento de abiertos encajados es todo aquel recubrimiento $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $U_1 \subseteq U_2 \subseteq ....$ Siempre podemos considerarlo de esta manera ya que dado cualquier recubrimiento numerable $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podemos tomar el recubrimiento de abiertos encajados definidos como $U_n = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ para cada $\in \mathbb{N}$.

Por ser f continua, sabemos que $f^{-1}(U_n)$ es abierto en X para todo numero natural n y claramente $\{f^{-1}(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto (numerable) de X.

Como X es ω-compacto, existe entonces un subrecubrimiento $\{f^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ finito de $\{f^{-1}(U_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (siendo I un subconjunto finito de $\mathbb{N}$). Así $\{U_i\}_{i\in I}$ es un subrecubrimiento finito de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $f(X)$ es ω-compacto.

❏

Enunciamos en la siguiente colección de resultados las relaciones existentes entre la compacidad y la recién definida ω-compacidad.

Intentaremos concretar qué requisitos debe cumplir un espacio topológico para que se dé la equivalencia entre ellas y si existe alguna implicación en espacios arbitrarios. Esto último queda resuelto en la siguiente proposición.

Proposición 4.8 *Todo espacio topológico compacto es ω-compacto. El recíproco no es cierto.*

Demostración.

Sea X un espacio compacto. Por definición, de todo recubrimiento abierto podemos extraer un subrecubrimiento finito, por lo que en particular de todo recubrimiento abierto y numerable podemos extraer un subrecubrimiento finito y por tanto X es ω-compacto.

Veamos con un ejemplo que el recíproco no es cierto:

Sea $(C, \leq)$ un conjunto bien ordenado, no numerable y con último elemento b. Sea a el primer elemento de C y consideremos

$$M = \{x \in C \mid [a, x) \text{ no es numerable}\}$$

El conjunto M no es vacío ya que al menos $b \in M$.

Sea Ω el menor elemento de M, y tomemos el espacio topológico $([a, \Omega), \tau)$ donde τ es la topología del orden.

Veamos ahora que $[a, \Omega)$ no es compacto. De hecho, vamos a demostrar que no es Lindelöf; lo haremos por reducción al absurdo:

Supongamos que sí es Lindelöf y sea $\{[a, \alpha) \mid \alpha < \Omega\}$ un recubrimiento abierto de $[a, \Omega)$.

Por ser Lindelöf existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con todos sus términos menores que Ω tal que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [a, y_n) = [a, \Omega)\,.$$

De esta forma, como todos los $[a, y_n)$ son numerables (por la definición de Ω) tendríamos que $[a, \Omega)$ se puede expresar como la unión numerable de conjuntos numerables, y por tanto es un conjunto numerable, lo cual es una contradicción.

Tenemos así que $[a, \Omega)$ no es Lindelöf lo cual implica que no es compacto.

Veamos que sin embargo sí que es ω-compacto, utilizando la caracterización en términos de puntos de aglomeración dada en la Proposición 4.6.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de $[a, \Omega)$ y sea

$$M = \{x \in [a, \Omega) \mid [a, x] \text{ contiene infinitos términos de la sucesión}\}$$

Tenemos que M no es vacío, ya que $[a, x_n]$ es numerable para todo $n \in \mathbb{N}$ y $[a, \Omega)$ no lo es; lo cual implica la existencia de un $x \in [a, \Omega)$ tal que $x_n \le x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y tal x está por tanto en M.

Sea x_0 el primer elemento de M, veamos que es un punto de aglomeración de la sucesión:

Sea U un entorno básico de x_0. Por la definición de la topología del orden basta considerar el caso:

- $U = (b_1, b_2)$ con $b_1 < x_0 < b_2$. Existen entonces infinitos términos de la sucesión contenidos en $[a, b_2)$ (ya que $x_0 \in M$ y $b_2 > x_0$) pero no los hay en $[a, b_1]$ porque x_0 es el menor elemento que cumple tal propiedad; por tanto, hay infinitos términos de la sucesión en $[a, b_2) \setminus [a, b_1] = (b_1, b_2) = U$.

Así, x_0 es un punto de aglomeración de la sucesión dada y por tanto $[a, \Omega)$ es ω-compacto.

❏

Una vez visto que la ω-compacidad no siempre implica la compacidad, nos interesa encontrar los espacios topológicos en los que sí se da la equivalencia. Las siguientes proposiciones dan algunos ejemplos.

Proposición 4.9 *Un espacio topológico es compacto si y solo si es ω-compacto y Lindelöf.*

Demostración.
Sea X un espacio compacto. Sabemos por la proposición anterior que en tal caso X es ω-compacto y por definición de compacidad, de todo recubrimiento abierto podemos extraer un subrecubrimiento finito (y por tanto numerable) y así X es también Lindelöf.

Recíprocamente, sea X un espacio ω-compacto y Lindelöf y sea $\mathcal{A}$ un recubrimiento abierto de X.

Por ser X Lindelöf existe un subrecubrimiento numerable, $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$, y por ser X ω-compacto existe $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ un subrecubrimiento finito.

Tenemos así $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ un subrecubrimiento finito del recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ y por tanto X es compacto.

❏

Proposición 4.10 *En un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad la compacidad y la ω-compacidad son equivalentes.*

Demostración.
Sea X un espacio topológico que satisface el segundo axioma de numerabilidad.

Basta ver entonces que la ω-compacidad implica la compacidad pues la condición necesaria quedó demostrada en la Proposición 4.8 para cualquier espacio topológico.

En el Teorema 2.12 vimos que todo espacio que satisface el segundo axioma de numerabilidad es también Lindelöf, por tanto, como por hipótesis X es ω-compacto, la proposición anterior nos da el resultado.

❏

Los espacios metrizables juegan un papel muy importante dentro de la clase de los espacios topológicos, por esto es interesante conocer cómo se comporta la ω-compacidad en éstos.

Proposición 4.11 *En un espacio metrizable, la compacidad y la ω-compacidad son equivalentes.*

Demostración.

Ya sabemos que todo espacio topológico X compacto es ω-compacto. Ahora demostramos que si X es metrizable, entonces también se cumple el recíproco.

Veamos en primer lugar que por ser X ω-compacto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un recubrimiento finito formado por bolas de la forma $\{B(x_1^n, \frac{1}{n}), ..., B(x_{k_n}^n, \frac{1}{n})\}$. Supongamos, procediendo por reducción al absurdo, que no es así.

Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ para el cual X no puede cubrirse por un número finito de bolas abiertas de radio $\frac{1}{n}$.

Tenemos entonces que

$$X \neq \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \frac{1}{n}) \text{ para todo } \{x_1, ..., x_m\} \subseteq X \text{ y para todo número natural } m.$$

De esta manera podemos construir una sucesión $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ de modo que

$$x_{m+1} \notin \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \frac{1}{n}) \quad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Así, la sucesión satisface

$$d(x_{m+1}, x_i) \geq \frac{1}{n}$$

para cada i desde 1 hasta m.

Sea entonces x_0 un punto de aglomeración de la sucesión, y tomamos $U = B(x_0, \frac{1}{2n})$. Como $d(x_{m+1}, x_i) \geq \frac{1}{n}$ para cada i desde 1 hasta m se cumple que U no puede contener infinitos términos de la sucesión (de hecho, contendrá como máximo a uno de ellos). Así obtenemos que no puede existir un punto de algomeración de la sucesión, lo cual es una contradicción.

Tenemos por tanto que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un recubrimiento finito de X formado por bolas de la forma

$$\{B(x_1^n, \frac{1}{n}), ..., B(x_{k_n}^n, \frac{1}{n})\}$$

y así $A = \{x_i^n \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq k_n\}$ numerable. Veamos que es denso:

Sea U un subconjunto de X abierto y distinto del vacío. Dado $x \in U$ existen entonces $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ y podemos tomar $n \in \mathbb{N}$ de manera que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Sabemos que existe un recubrimiendo de X tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B(x_i^n, \frac{1}{n})$$

por lo que $x \in B(x_i^n, \frac{1}{n})$ para cierto x_i^n y tenemos así que

$$x_i^n \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U,$$

lo cual implica que $x_i^n \in U \cap A$ y esta intersección no es vacía.

Concluimos que A es denso en X y éste es por tanto separable.

Sabemos que todo espacio metrizable y separable satisface el segundo axioma de numerabilidad (visto en el Teorema 2.21), por lo que la Proposición 4.10 nos da el resultado.

❑

Terminamos esta sección definiendo esta nueva noción de compacidad en subespacios y mostrando algunas propiedades de éstos en relación con ella.

Definición 4.12 *Decimos que un subespacio Y de un espacio topológico X es ω-compacto si lo es visto como espacio topológico con la topología inducida.*

Lema 4.13 *Un subespacio Y de un espacio topológico X es ω-compacto si y solo si para toda familia numerable de abiertos de X que cubre a Y existe un subrecubrimiento finito que cubre a Y.*

Demostración.

Supongamos en primer lugar que Y es $\omega-$compacto y sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento numerable de Y formado por abiertos de X. Entonces $\{U_n \cap Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto y numerable de Y.

Como Y es ω-compacto, existe $\{U_i \cap Y\}_{i\in I}$ un subrecubrimiento finito (siendo $I \subseteq \mathbb{N}$ finito) y por tanto $\{U_i\}_{i\in I}$ es un subrecubrimiento finito de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que cubre a Y.

Veamos ahora la implicación contraria.

Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento abierto de Y. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos elegir un conjunto A_n abierto en X tal que $U_n = A_n \cap Y$. La colección $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de Y formado por abiertos de X.

Entonces por hipótesis existe una subcolección $\{A_{n_1}, A_{n_2}, ..., A_{n_k}\}$ que cubre a Y. Y así $\{U_{n_1}, U_{n_2}, ..., U_{n_k}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e Y es ω-compacto, tal como buscábamos.

❏

Proposición 4.14 *Todo subespacio cerrado Y de un espacio topológico ω-compacto X es ω-compacto.*

Demostración.
Sea $U = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento de Y formado por abiertos de X. Entonces $Y \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ y como $X = Y \cup Y^c$ tenemos que $X \subseteq (\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n) \cup Y^c$.

Así $U' = U \cup Y^c$ es un recubrimiento abierto (recordemos que Y es cerrado por hipótesis) de X, y por ser éste ω-compacto existe un subrecubrimiento $\{U_{n_1}, ..., U_{n_k}, Y^c\} \subseteq U'$ finito.

Por tanto, como $Y = X \setminus Y^c$ se cumple que $Y \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{n_j}$, y de esta forma tenemos $\{U_{n_1}, ..., U_{n_k}\}$ un subrecubrimiento finito de U, y concluimos por el lema anterior que Y es ω-compacto.

❏

Capítulo 5

Compacidad sucesional.

5.1. Fijando conceptos.

La compacidad sucesional está íntimamente ligada a las sucesiones, subsucesiones y sus límites. Por eso, es importante recordar algunas definiciones y conceptos de este ámbito antes de su estudio, y a esto nos dedicamos en este apartado.

Definición 5.1 *Dada una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio topológico* X*, decimos que la sucesión* $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es una subsucesión de la sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si* $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión creciente de enteros positivos.*

Definición 5.2 *Dado un espacio topológico* X*, decimos que una sucesión de puntos del espacio* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a un punto* $x \in X$ *si para cada entorno* U *de* x*, existe un entero positivo* N *tal que* $x_n \in U$ *para todo* $n > N$*.*

Recordemos que en un espacio topológico arbitrario el límite de una sucesión no tiene por qué ser único. Sí ocurre esto en espacios topológicos T_2.

Enunciamos a continuación una caracterización que nos permitirá comprobar si un punto de un espacio topológico es límite de una sucesión de forma más práctica que con la definición dada.

Proposición 5.3 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio topológico* X *converge a un punto* $x \in X$ *si y solo si para cada entorno* U *de* x *existe, a lo más, un número finito de términos de la sucesión que no está contenido en* U*.*

Demostración.

Supongamos en primer lugar que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a $x \in X$ y sea U un entorno arbitrario de x. Por hipótesis existe un entero positivo N tal que $x_n \in U$ para todo $n > N$, por tanto como máximo quedan los términos $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ que no están contenidos en U, es decir, un número finito de términos de la sucesión.

Veamos ahora el recíproco.

Sea x un elemento de X cuyos entornos contienen a todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ salvo a un número finito de ellos.

Supongamos que, sin embargo, la sucesión no converge a x, es decir, que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $m > N$ tal que $x_m \notin U$ para cierto U entorno de x.

Entonces, tomando $n_1 \in \mathbb{N}$ existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \notin U$.

De igual forma, tomando $n_2 \in \mathbb{N}$ existe $n_3 > n_1$ tal que $x_{n_3} \notin U$.

Repitiendo este proceso, obtendremos una sucesión de números enteros $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_i} \notin U$ para ningún i. Pero esto es imposible porque entonces tendríamos un número infinito de elementos de la sucesión que no están contenidos en U.

Obtenemos así, por reducción al absurdo, el resultado que buscábamos.

❑

5.2. Definición.

La segunda noción de compacidad que presentamos es la compacidad sucesional. Como ya hemos dicho antes y como muestra su definición, ésta se formula en términos de sucesiones, subsucesiones y sus límites.

Definición 5.4 *Decimos que un espacio topológico X es sucesionalmente compacto si toda sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X tiene al menos una subsucesión convergente.*

5.3. Propiedades

Como vemos en el primer resultado que enunciamos, volvemos a encontrarnos ante un invariante topológico.

Teorema 5.5 *La compacidad sucesional es un invariante topológico. De hecho, si $f : X \to Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y X es sucesionalmente compacto, entonces $f(X)$ también lo es.*

Demostración.

Sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de $f(X)$. Entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X tal que $f(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como X es, por hipótesis, sucesionalmente compacto, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $x \in X$.

Tenemos así $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}} = \{y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
¿ Converge esta subsucesión? Veamos que lo hace a $y = f(x)$.

Sea V un entorno de y, $V \subseteq Y$. Por ser f continua existe $U \subseteq X$ un entorno de x tal que $f(U) \subseteq V$.

Como x es límite de la subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ entonces U contiene a todos sus términos salvo un numero finito de ellos, lo cual implica que $f(U)$ contiene a todos los $f(x_{n_k}) = y_{n_k}$ salvo un número finito, y como $f(U) \subseteq V$ entonces V contiene a todos los y_{n_k} salvo, a lo más, un número finito de estos elementos.

Así, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente y $f(X)$ es sucesionalmente compacto, tal como queríamos demostrar.

❏

Podríamos pensar, tras ver que así ocurría con la ω-compacidad, que todo espacio compacto satisface también el ser sucesionalmente compacto. El siguiente resultado muestra que no es así y que de hecho, no existe ninguna implicación entre estas dos propiedades en espacios topológicos arbitrarios.

Proposición 5.6 *Existen espacios topológicos compactos que no son sucesionalmente compactos y espacios topológicos sucesionalmente compactos que no son compactos.*

Demostración.

Veamos un ejemplo de un espacio topológico compacto que no es sucesionalmente compacto.

Tomamos $I = [0, 1]$ con la topología usual y definimos $X = I^I$ con la topología producto. Podemos considerar X como el conjunto formado por todas las funciones definidas de I en I.

Usando el teorema de Tychonoff sabemos que X es compacto pues I lo es.

Veamos que sin embargo no es sucesionalmente compacto.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de elementos de X definida como:

$$f_n(x) := n\text{-ésimo dígito de } x \text{ en su expansión binaria para todo } x \text{ en } [0, 1)$$

$$f_n(1) := 1 \text{ para todo número natural } n.$$

Supongamos que existe $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión que converge a $\alpha \in X$.

Entonces para todo $x \in [0,1]$ se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = \alpha(x).$$

Si tomamos $t \in I$ tal que

$$f_{n_k}(t) = 0 \text{ si } k \text{ es par}$$

$$f_{n_k}(t) = 1 \text{ si } k \text{ es impar}$$

entonces $\{f_{n_k}(t)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{0,1,0,1,\ldots\}$ la cual no converge. Llegamos así a una contradicción, y tenemos que X no es sucesionalmente compacto.

Obtenemos con este ejemplo que la compacidad no implica la compacidad sucesional.

Veamos ahora un espacio topológico sucesionalmente compacto que no es compacto.

Vimos en un teorema anterior que $[a,\Omega)$ no es compacto con la topología del orden. Veamos que sí es sucesionalmente compacto.

Recordemos que dado $(C,\leq)$ bien ordenado, llamamos a a su elemento mínimo y Ω al menor elemento de C tal que $[a,\Omega]$ no es numerable. Tomamos entonces una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $[a,\Omega)$ y definimos

$$M = \{x \in [a,\Omega) \mid [a,x] \text{ contiene infinitos términos de la sucesión}\}.$$

Vimos que existe x_0 un elemento mínimo de M y que éste es un punto de aglomeración de la sucesión.

Demostraremos ahora que de hecho x_0 es el límite de una subsucesión de la sucesión tomada.

Como x_0 es el primer elemento de M, existen infinitos términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenidos en $[a,x_0]$, por lo que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ cuya imagen está contenida en $[a,x_0]$.

Sea U un entorno básico de x_0, que será de la forma

$$U = (b,c) \text{ con } b < x_0 < c.$$

Tenemos que $[a,x_0] \subseteq [a,c)$ por lo que todos los términos de la subsucesión están en $[a,c)$ y solo un número finito de términos en $[a,b]$ (por la definición de M). Así U contiene a todos los elementos de la subsucesión salvo un número finito de ellos y ésta converge a x_0.

Concluimos entonces que $[a,\Omega)$ es sucesionalmente compacto.

❑

Es lícito preguntarnos ahora si existirá alguna equivalencia entre la compacidad sucesional y la ω-compacidad, una vez visto que no ocurría así con la compacidad en espacios topológicos arbitrarios. El siguiente resultado muestra que en este caso existe cierta relación entre ellas, pero que en espacios topológicos arbitrarios no son equivalentes.

Proposición 5.7 *Todo espacio topológico sucesionalmente compacto es ω-compacto. El recíproco no es cierto.*

Demostración.
Sea X un espacio topológico sucesionalmente compacto y supongamos, procediendo por reducción al absurdo, que no es ω-compacto. Existe entonces un recubrimiento numerable de X formado por abiertos encajados, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, del cual no podemos extraer un subrecubrimiento finito.

Por tanto, podemos construir una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de manera que $x_n \notin U_n$ para cada número natural n, y así $x_n \notin U_m$ para todo $m \leq n$.

Por ser X sucesionalmente compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$.

Existe entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_{n_0}$, y por la definición de la sucesión se cumple que para todo $m \geq n_0$ $x_m \notin U_{n_0}$ y así para cada $n_k > n_0$ tenemos que $x_{n_k} \notin U_{n_0}$.

Por lo tanto, la subsucesión no converge a x ya que U_{n_0} es un entorno de x que contiene a lo más un número finito de elementos de la subsucesión.

Llegamos así a una contradicción, por lo que concluimos que X tiene que ser ω-compacto.

Una alternativa a esta demostración es ver que dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si una subsucesión de ésta converge al punto $x \in X$ entonces x es un punto de aglomeración de la sucesión. Veámoslo:

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y sea $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión que converge a $x_0 \in X$.

Sea U un entorno cualquiera de x_0 y sea $n \in \mathbb{N}$. Existe entonces k_1 tal que $n_k > n$ para toda $k > k_1$ ya que la sucesión $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente.

Por otro lado, por ser x_0 límite de la subsucesión existe k_2 tal que $x_{n_k} \in U$ para toda $k > k_2$.

Así, tomando $k = max\{k_1, k_2\}$ tenemos que $x_{n_k} \in U$ con $n_k > n$.

Concluimos que x_0 es un punto de aglomeración de la subsucesión y, obviamente, también de la sucesión.

Para ver que el recíproco no es cierto, basta considerar el ejemplo anterior $X = I^I$ con la topología producto de la usual, ya que hemos visto que es compacto (y por tanto ω-compacto) pero no sucesionalmente compacto.

❑

Antes de ver en qué espacios topológicos se da la equivalencia entre compacidad sucesional y ω-compacidad enunciamos el siguiente lema que nos ayudará en tal demostración.

Lema 5.8 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X. Si X satisface el primer axioma de numerabilidad y $x \in X$ es un punto de aglomeración de la sucesión, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a x.*

Demostración.
Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de entornos numerable en el punto x, que sabemos que existe ya que X es $1A\mathbb{N}$, y definimos

$$B_n = U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Construimos ahora una subsucesión de la siguiente manera:
Tomamos B_1, entorno de x, y $n = 1$. Por ser x un punto de aglomeración existe x_{m_1} con $m_1 > 1$ tal que $x_{m_1} \in B_1$. Definimos

$$x_{n_1} := x_{m_1}.$$

De igual forma tomamos B_2 y $n = m_1$. Existe entonces x_{m_2} con $m_2 > m_1$ tal que $x_{m_2} \in B_2$. Definimos

$$x_{n_2} := x_{m_2}.$$

Así, para cada B_k y $n = m_{k-1}$ existe x_{m_k} con $m_k > m_{k-1}$ tal que $x_{m_k} \in B_k$.
Definiendo

$$x_{n_k} := x_{m_k} \text{ para cada } k \in \mathbb{N}$$

tenemos una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que satisface

$$x_{n_k} \in B_k \text{ para cada } k \in \mathbb{N}$$

Veamos que esta subsucesión converge a x.

Sea U un entorno cualquiera de x. Existe entonces $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{n_0} \subseteq U$ y por tanto, como $x_{n_k} \in B_k \subseteq U_{n_0}$ para todo $k \geq n_0$ tenemos que $x_{n_k} \in U$ para todo $k \geq n_0$ y así la sucesión converge a x, tal como queríamos obtener.

❑

Veamos ahora sí, en qué espacios se cumple la equivalencia.

Proposición 5.9 *En un espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad, la ω-compacidad y la compacidad sucesional son equivalentes.*

Demostración.
Tras la Proposición 5.7 basta demostrar que si un espacio topológico X que satisface el primer axioma de numerabilidad es ω-compacto entonces es también sucesionalmente compacto.

Sabemos que si X es ω-compacto, dada cualquier sucesión en este espacio, ésta tiene un punto de aglomeración x_0. Así, como X satisface el primer axioma de numerabilidad, por el lema anterior existe entonces una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a x_0 y X es por tanto sucesionalmente compacto.

❑

El siguiente resultado es, aunque más débil que el anterior, muy interesante en cuanto a que nos da la equivalencia en espacios métricos, que como ya comentamos juegan un papel muy importante en la clase de los espacios topológicos.

Proposición 5.10 *En un espacio metrizable la compacidad sucesional y la ω-compacidad son equivalentes.*

Demostración.
Vimos en el Teorema 2.22 que todo espacio metrizable satisface el primer axioma de numerabilidad; así, por el teorema anterior tenemos que la compacidad sucesional y la ω-compacidad son entonces equivalentes en estos espacios topológicos.

❑

Mostramos a continuación la relación que existe en espacios topológicos $2A\mathbb{N}$ entre la compacidad y las dos nuevas nociones de ésta.

Proposición 5.11 *En un espacio topológico X que satisface el segundo axioma de numerabilidad son equivalentes:*

1. *X es compacto.*

2. *X es ω-compacto.*

3. *X es sucesionalmente compacto.*

Demostración.
En el Teorema 4.10 demostramos que un espacio que satisface el segundo axioma de numerabilidad es compacto si y solo si es ω-compacto.

Además, sabemos que todo espacio que satisface el segundo axioma de numerabilidad satisface también el primero, así por el teorema 5.9 tenemos que la ω-compacidad y la compacidad sucesional son también equivalentes.

❑

Tratamos, para finalizar esta sección, la compacidad sucesional en subespacios.

Definición 5.12 *Decimos que un subespacio Y de un espacio topológico X es sucesionalmente compacto si lo es visto como espacio topológico con la topología inducida.*

Proposición 5.13 *Si X es un espacio topológico sucesionalmente compacto y C es un subconjunto cerrado de X entonces C es también sucesionalmente compacto.*

Demostración.
Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C (y por tanto en X). Tenemos que existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$, por ser X sucesionalmente compacto.

Como C es cerrado se cumple que $x \in C$ y así concluimos que C es sucesionalmente compacto.

❑

Capítulo 6

ω-compacidad débil.

6.1. Fijando conceptos.

Introducimos en este apartado la definición de punto de acumulación de un conjunto.

Definición 6.1 *Dado un espacio topológico X y un subconjunto A de éste, decimos que $x \in X$ es un punto de acumulación de A si cada entorno de x interseca con A en algún punto distinto del propio x. Es decir, si dado U un entorno cualquiera de x se cumple que $A \cap (U \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.*

La siguiente propiedad es bien conocida, y nos será muy útil a lo largo de la sección.

Proposición 6.2 *Sean A un subconjunto del espacio topológico X y A' el conjunto de todos los puntos de acumulación de A. Entonces*

$$\bar{A} = A \cup A'$$

donde $\bar{A}$ es el conjunto de los puntos adherentes de A.

Del resultado anterior se desprende que un subconjunto de un espacio topológico es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación (ya que, en tal caso, el subconjunto coincide con su clausura). Del mismo modo si un subconjunto de un espacio topológico no tiene puntos de acumulación es también cerrado en el espacio.

6.2. Definición.

Como comentamos anteriormente, lo que aquí denominamos como ω-compacidad débil fue en un principio considerado como compacidad. Quizá es debido a la necesidad de darle un nombre distinto tras considerar como compacidad la definición en términos de subrecubrimientos finitos que en la actualidad no existe un nombre definitivo para esta propiedad.

Tal como hemos afirmado, en este trabajo la nombraremos como ω-compacidad débil aunque en los libros podamos encontrarla también como compacidad débilmente numerable, propiedad de Bolzano-Weierstras...

Definición 6.3 *Decimos que un espacio topológico X es débilmente ω-compacto si todo subconjunto infinito A de X tiene al menos un punto de acumulación, es decir, $A' \neq \emptyset$.*

6.3. Propiedades.

Veamos que también la ω-compacidad débil se conserva por homeomorfismos y que de nuevo, obtenemos un resultado un poco más fuerte.

Teorema 6.4 *La ω-compacidad es un invariante topológico. De hecho, si $f : X \to Y$ es una aplicación continua e inyectiva entre espacios topológicos y X es débilmente ω-compacto, entonces $f(X)$ también lo es.*

Demostración.
Sea B un subconjunto infinito de $f(X)$. Como f es inyectiva se cumple que $B = f(A)$ siendo A un subconjunto infinito de X, el cual por ser X débilmente ω-compacto tiene al menos un punto de acumulación $x_0 \in X$.

Definimos $y_0 = f(x_0)$; veamos que y_0 es un punto de acumulación de B.

Sea V un entorno de y_0. Como f es continua existe U un entorno de x_0 tal que $f(U) \subseteq V$. Además, por ser x_0 un punto de acumulación de A se cumple que existe $x' \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$.

Llamamos $y' = f(x')$, que es distinto de y_0 por la inyectividad de f. Así $y' \in (V \setminus \{y_0\}) \cap B$, y concluimos que y_0 es un punto de acumulación de B y por lo tanto $f(X)$ es débilmente ω-compacto.

❑

Las siguientes proposiciones nos muestran la relación en espacios topológicos arbitrarios de esta noción de compacidad recién definida con las anteriores ya vistas, así como con la propia compacidad. Comenzamos con la ω-compacidad.

Proposición 6.5 *Si un espacio topológico X es ω-compacto, entonces es también débilmente ω-compacto. El recíproco no es cierto.*

Demostración.

Sea X un espacio ω-compacto y sea A un subconjunto infinito de éste. Podemos tomar entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión con todos sus términos distintos ($x_n \neq x_m$ para cada $m \neq n$).

Como X es ω-compacto, existe $x_0 \in X$ un punto de aglomeración de tal sucesión. Veamos que x_0 es entonces un punto de acumulación de A.

Sea U un entorno de x_0. Como x_0 es un punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces dado un número natural n existe $x_m \in U$ con $m > n$. Distingamos dos casos:

- $x_m = x_0$.

  Entonces de igual forma tomando $m \in \mathbb{N}$ existe $k > m$ tal que $x_k \in U$, $x_k \neq x_m = x_0$, así $x_k \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$ y x_0 es un punto de acumulación de A.

- $x_m \neq x_0$.

  Así $x_m \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$ y x_0 es un punto de acumulación de A.

Tenemos que todo conjunto infinito A de X tiene al menos un punto de acumulación y por tanto X es débilmente ω-compacto.

Mostramos ahora un ejemplo de un espacio topológico débilmente ω-compacto que no es ω-compacto:

Tomamos $(\mathbb{R}, \tau)$ el espacio topológico donde

$$\tau = \{(x, +\infty) \ \mid \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{[x, +\infty) \ \mid \ x \in \mathbb{R}\} \ \cup \ \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

Es fácil comprobar que τ es una topología en $\mathbb{R}$. Veamos que este espacio topológico es débilmente ω-compacto.

Sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{R}$. Podemos tomar entonces $x \in A$ tal que existe $x' \in A$ siendo $x' > x$. Sea U un entorno cualquiera de x. Por la definición de τ tenemos que $(x, \infty) \subseteq U$, por lo que $x' \in (U \setminus \{x\}) \cap A$.

Así, x es un punto de acumulación de A y concluimos que $(\mathbb{R},\ \tau)$ es débilmente ω-compacto.

Sin embargo, no es ω-compacto ya que $\{(-n, +\infty)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento abierto y numerable de $\mathbb{R}$ del que no se puede extraer un subrecubrimiento finito.

❑

Veamos ahora qué ocurre en relación con los espacios compactos.

Proposición 6.6 *Todo espacio topológico compacto es débilmente ω-compacto. El recíproco no es cierto.*

Demostración.

Sabemos que todo espacio compacto es ω-compacto (visto en la Proposición 4.8) y por lo demostrado en la proposición anterior tenemos que es entonces débilmente compacto.

Veamos también la demostración directa.

Sea X un espacio compacto. Queremos probar que dado A un subconjunto infinito de X entontes éste tiene al menos un punto de acumulación. Lo haremos por reducción al absurdo.

Tomamos A un subconjunto infinito de X y supongamos que no tiene ningún punto de acumulación. Entonces A es cerrado pues coincide con su clausura y podemos tomar para cada $a \in A$ un entorno U_a de modo que $U_a \cap A = \{a\}$

Tenemos que $A^c \cup \{U_a\}_{a\in A}$ es un recubrimiento abierto de X, el cual por ser X compacto admite un subrecubrimiento finito.

Como A^c no interseca con A y cada U_a contiene únicamente un punto de A, el conjunto A debe ser finito, lo cual es una contradicción y por tanto A tiene al menos un punto de acumulación, tal como queríamos obtener.

Como contraejemplo al recíproco podemos tomar el espacio topologico definido en la proposición anterior, ya que no es compacto (pues no es ω-compacto) pero sí es débilmente ω-compacto.

❑

Nos queda ver cómo se comporta la ω-compacidad débil respecto a la compacidad sucesional en un espacio topológico arbitrario.

Proposición 6.7 *Todo espacio topológico X sucesionalmente compacto es débilmente ω-compacto. El recíproco no es cierto.*

Demostración.
Sabemos, por la Proposición 5.7 que todo espacio sucesionalmente compacto es ω-compacto y por la Proposición 6.5 esto implica que es débilmente ω-compacto.

Tomando de nuevo I^I con la topología producto de la topología usual donde $I = [0, 1]$, tenemos un ejemplo de espacio topológico débilmente ω-compacto (ya que es ω-compacto) y vimos que no es sucesionalmente compacto.

❏

Veamos un ejemplo donde sí se cumple la equivalencia entre ω-compacidad y ω-compacidad débil.

Proposición 6.8 *En un espacio topológico T_1 la ω-compacidad y la ω-compacidad débil son equivalentes.*

Demostración.
Basta con ver que todo espacio T_1 y débilmente ω-compacto es ω-compacto, lo cual hacemos por reducción al absurdo.

Sea X un espacio T_1 y débilmente ω-compacto. Supongamos que no es ω-compacto; entonces existe $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un recubrimiento numerable de abiertos encajados de X del cual no podemos extraer un subrecubrimiento finito.

Construimos ahora una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \notin U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con todos sus términos distintos y llamamos A al conjunto formado por todos los términos de la sucesión, el cual tiene cardinal infinito.

Como X es débilmente ω-compacto existe al menos un punto de acumulación x' del conjunto A. Entonces $x' \in U_{n_0}$ para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$, y por ser un punto de acumulación de A existe al menos un $x_m \in U_{n_0}$, $x_m \neq x'$. De hecho, como $x_n \notin U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe como máximo un número finito de elementos de la sucesión en U_{n_0}, supongamos $\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}\}$ con $n_1, n_2, ..., n_k < n_0$.

Como X es T_1 existen

$$V_{n_1}, V_{n_2}, ...V_{n_k}$$

entornos de x' tales que

$$x_{n_i} \notin V_{n_i} \text{ para } i = 1, ...k.$$

Así

$$x' \in U_{n_0} \cap V_{n_1} \cap ... \cap V_{n_k}$$

y

$$x_n \notin U_{n_0} \cap V_{n_1} \cap ... \cap V_{n_k} \text{ para ningún } n \in \mathbb{N}$$

lo cual es una contradicción.

Por tanto, de todo recubrimiento abierto y numerable podemos extraer un subrecubrimiento finito, y así X es ω-compacto.

❑

Del anterior resultado se desprende el siguiente.

Proposición 6.9 *En un espacio topológico Hausdorff, la ω-compacidad y la ω-compacidad débil son equivalentes.*

Demostración.

Sabemos que un espacio Hausdorff es en particular T_1 y por tanto la proposición anterior nos da la equivalencia.

❑

Veamos que en un espacio metrizable las nociones de compacidad definidas hasta ahora, incluida la misma compacidad, son equivalentes.

Proposición 6.10 *En un espacio metrizable X, son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *X es ω-compacto.*
3. *X es sucesionalmente compacto.*
4. *X es débilmente ω-compacto.*

Demostración.

Hemos demostrado anteriormente la equivalencia en espacios métricos de la compacidad, ω-compacidad y compacidad sucesional, por lo que solo nos resta ver la equivalencia con la noción introducida en esta sección.

Sabemos además que todo espacio metrizable es también un espacio T_1, por lo que la Proposición 6.8 nos da la equivalencia buscada.

❏

Terminamos de nuevo la sección definiendo esta noción de compacidad en subespacios y mostrando una propiedad de los subconjuntos cerrados en relación a ella.

Definición 6.11 *Decimos que un subespacio Y de un espacio topológico X es débilmente ω-compacto si lo es visto como espacio topológico con la topología inducida.*

Como viene siendo habitual buscamos caracterizaciones que nos den caminos alternativos al uso de la definición en el caso de distinguir subespacios que cumplen ciertas propiedades.

Proposición 6.12 *Sea X un espacio débilmente ω-compacto y C un subconjunto cerrado de X. Entonces C es débilmente ω-compacto.*

Demostración.
Sea A un subconjunto infinito de C. Por ser X débilmente ω-compacto existe al menos un punto de acumulación de A en X, al que denotamos por x'. Como C es cerrado, se cumple que $x' \in C$ y por tanto x' es un punto de acumulación de A en C , tal como queríamos ver.

❏

Capítulo 7

Pseudo-compacidad.

7.1. Fijando conceptos.

Comenzamos con la última noción de compacidad de la que hablaremos en este trabajo. Ésta puede definirse, como veremos más adelante, en términos de funciones continuas, acotadas, de sus ínfimos, sus supremos etc. Aquí mostramos las definiciones de estos términos, que nos ayudarán a seguir el desarrollo de la sección.

Definición 7.1 *Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$ siendo X un espacio topológico, decimos que f está acotada si existe $c \in \mathbb{R}, c > 0$, tal que*

$$\mid f(x) \mid < c \text{ para todo } x \in X.$$

Definición 7.2 *Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$ siendo X un espacio topológico, decimos que $a \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de f, o que f está acotada inferiormente por a si*

$$f(x) \geq a \text{ para todo } x \in X.$$

Decimos entonces que f está acotada inferiormente si existe alguna cota inferior de f.

En tal caso, se define el ínfimo de f, $\text{ínf}\, f$, como la mayor de sus cotas inferiores. Decimos que f alcanza su ínfimo si existe $x \in X$ tal que $f(x) = \text{ínf}\, f$.

Enunciamos la definición análoga a la anterior en la que hablamos de las cotas superiores de una función y de su supremo.

Definición 7.3 *Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$ siendo X un espacio topológico, decimos que $b \in \mathbb{R}$ es una cota superior de f, o que f esta acotada superiormente por b si*

$$f(x) \leq b \text{ para todo } x \in X.$$

Decimos entonces que f está acotada superiormente si existe alguna cota superior de f.

En tal caso, se define el supremo de f, $\sup f$, como la menor de sus cotas superiores. Decimos que f alcanza su supremo si existe $x \in X$ tal que $f(x) = \sup f$.

Observamos que una función f está acotada si y solo si está acotada superior e inferiormente. Mostramos ahora una serie de propiedades que simplificarán el estudio de la pseudo-compacidad.

Proposición 7.4 *Dado un espacio topológico X, una función $f : X \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente (inferiormente) si y solo si la función $g : X \to \mathbb{R}$ definida como*

$$g(x) = -f(x) \text{ para cada } x \in X$$

está acotada inferiormente (superiormente).

Demostración.

Sea $b \in \mathbb{R}$ una cota superior de f. Entonces

$$f(x) \leq b \text{ para todo } x \in X,$$

o equivalentemente

$$-f(x) \geq -b \text{ para todo } x \in X,$$

es decir,

$$g(x) \geq -b \text{ para todo } x \in X.$$

Así, $-b$ es una cota inferior de g la cual está por tanto acotada inferiormente, tal como queríamos ver.

❏

A partir de ahora llamaremos simplemente $-f$ a la función g definida en la proposición anterior.

Proposición 7.5 *Dada una función $f : X \to \mathbb{R}$ cuyo supremo existe en $\mathbb{R}$, se cumple que* $\inf(-f) = -\sup f$, *y por tanto el ínfimo de $-f$ también existe en $\mathbb{R}$.*

Demostración.
Sea $\beta \in \mathbb{R}$ el supremo de f, es decir, su menor cota superior.
Sabemos, por la proposición anterior, que $-\beta$ es entonces una cota inferior de $-f$. Veamos que, de hecho, es la mayor cota inferior de $-f$ procediendo por reducción al absurdo.

Supongamos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \leq -f(x)$ para todo $x \in X$ y $\alpha > -\beta$. Entonces $f(x) \leq -\alpha$ para todo $x \in X$ con $-\alpha < \beta$ pero esto es imposible pues β es el supremo de f.

Tenemos así que $-\beta \in \mathbb{R}$ es la mayor cota inferior de $-f$, es decir, su ínfimo.

❏

De forma análoga se demuestra que si f es una función cuyo ínfimo existe entonces $\sup(-f) = -\operatorname{ínf} f$.

7.2. Definición.

Definimos ahora los espacios pseudo-compactos, nombrados también en algunos libros como espacios de Weierstrass. En esta sección supondremos siempre que $\mathbb{R}$ es el espacio topológico de los números reales dotado de la topología usual salvo que se indique lo contrario.

Definición 7.6 *Decimos que un espacio topológico X es pseudo-compacto si toda función continua f definida de X en $\mathbb{R}$ está acotada.*

7.3. Propiedades.

Una vez dada la definición de los espacios topológico pseudo-compactos, cabe decir que existen otras muchas propiedades que los caracterizan y que perfectamente podrían ser presentadas como definiciones de la pseudo-compacidad. Utilizamos la siguiente proposición para mostrar algunas de ellas.

Proposición 7.7 *Dado un espacio topológico X son equivalentes:*

1. *X es pseudo-compacto.*
2. *Toda función continua de X en $\mathbb{R}$ está acotada superiormente.*

3. *Toda función continua de X en $\mathbb{R}$ está acotada inferiormente.*

4. *Toda función continua de X en $\mathbb{R}$ alcanda su ínfimo y su supremo.*

5. *Toda función continua de X en $\mathbb{R}$ alcanza su supremo.*

6. *Toda función continua de X en $\mathbb{R}$ alcanza su ínfimo.*

7. *Toda función continua y acotada de X en $\mathbb{R}$ alcanza su supremo y su ínfimo.*

8. *Toda función continua y acotada superiormente de X en $\mathbb{R}$ alcanza su supremo.*

9. *Toda función continua y acotada inferiormente de X en $\mathbb{R}$ alcanza su ínfimo.*

Demostración.
Demostramos en primer lugar la equivalencia entre las afirmaciones 1,2 y 3.

Es obvio que si un espacio es pseudo-compacto entonces toda función continua de X en $\mathbb{R}$ está acotada superiormente por la propia definición de pseudo-compacidad, por lo que claramente 1 implica 2.

Recíprocamente, si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces por hipótesis f está acotada superiormente.

Por otro lado $-f$ es también continua y por tanto está acotada superiormente, y esto implica, como vimos en la Proposición 7.4 que f está acotada inferiormente.

Así tenemos que toda función $f : X \to \mathbb{R}$ continua está acotada, y por tanto X es pseudo-compacto.

Esto nos da la equivalencia entre las afirmaciones 1 y 2. Se demuestra de forma análoga la equivalencia entre las afirmaciones 1 y 3.

Pasamos a demostrar la equivalencia entre las afirmaciones 4,5 y 6.

Es obvio que 4 implica 5. Veamos la implicación contraria.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua, la cual por hipótesis alcanza su supremo. Tenemos así que $-f$ es también una función continua y por tanto alcanza también su supremo, es decir, existe $x \in X$ tal que $-f(x) = \sup(-f)$, equivalentemente, existe $x \in X$ tal que $f(x) = -\sup(-f)$ y así, usando la Proposición 7.5 tenemos que $-\sup(-f) = \inf f$ y por tanto f alcanza su ínfimo.

De forma análoga se demuestra la equivalencia entre las afirmaciones 4 y 6.

Veamos ahora la equivalencia entre las afirmaciones 7,8 y 9.

Claramente 7 implica 8. Veamos la implicación contraria.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Entonces por hipótesis f alcanza su supremo.

Por otro lado tenemos que $-f$ es también una función continua y acotada (por serlo f), y así por hipótesis $-f$ alcanza su supremo, es decir, existe $x \in X$ tal que $-f(x) = \sup(-f)$. Por la Proposición 7.5 tenemos que $\sup(-f) = -\inf f$, por lo que existe $x \in X$ tal que $-f(x) = -\inf f$, es decir, $f(x) = \inf f$ y así f alcanza también su ínfimo.

De forma análoga se demuestra la equivalencia entre las afirmaciones 7 y 9.

Mostramos ahora que la afirmación 2 implica la afirmación 5.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Por hipótesis, f está acotada superiormente, y por tanto existe $c = \sup f \in \mathbb{R}$.

Supongamos que f no alcanza tal supremo, es decir, $f(x) < c$ para todo $x \in X$ y definamos la aplicación $g : X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \frac{1}{c - f(x)} \text{ para todo } x \in X$$

la cual es estrictamente positiva y claramente continua.

Entonces, por hipótesis, g está acotada superiormente, es decir, existe $k > 0$ tal que $g(x) \leq k$ para todo $x \in X$, es decir

$$\begin{aligned} \frac{1}{c - f(x)} \leq k &\quad \leftrightarrow \\ 1 \leq k(c - f(x)) &\quad \leftrightarrow \\ f(x) \leq c - \frac{1}{k} & \end{aligned}$$

pero esto es imposible ya que entonces $c - \frac{1}{k}$ sería una cota superior de f menor que c. Tenemos entonces que f alcanza su supremo, como queríamos ver.

Claramente la afirmación 4 implica la afirmación 7, por lo que solo nos queda demostrar que la afirmación 7 implica la afirmación 1.

Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una aplicación continua. Consideramos $g : X \to \mathbb{R}$ la aplicación dada por

$$g(x) = \operatorname{arctg}(f(x)) \text{ para todo } x \in X$$

la cual es continua y acotada superior e inferiormente ($\frac{-\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2}$).

Por hipótesis existen entonces

$$\alpha = \sup g \text{ y}$$

$$\beta = \text{ínf}\, g$$

pero esto implica que existen

$$A = \text{tg}(\alpha) = \sup f \text{ y}$$

$$B = \text{tg}(\beta) = \text{ínf}\, f$$

Así concluimos que f está acotada superior e inferiormente, y por tanto X es un espacio topológico pseudo-compacto.

Queda de esta forma demostrada la equivalencia de todas las afirmaciones enunciadas.

❏

Vemos a continuación que esta noción de compacidad se conserva no solo por homeomorfismos, sino también por aplicaciones continuas.

Teorema 7.8 *La pseudo-compacidad es un invariante topológico. De hecho, si $f : X \to Y$ es una aplicación continua y X es pseudo-compacto, entonces $f(X)$ también lo es.*

Demostración.
Sea $g : f(X) \to \mathbb{R}$ una aplicación continua.
Definimos $h : X \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = g(f(x)) \text{ para cada } x \in X.$$

Esta función es continua ya que es una composición de aplicaciones continuas.

Por ser X pseudo-compacto, h tiene que estar acotada, es decir, existe $k \in \mathbb{R}, k > 0$ tal que

$$\mid h(x) \mid \leq k \text{ para todo } x \in X$$

o lo que es lo mismo,

$$\mid g(f(x)) \mid \leq k \text{ para todo } x \in X$$

es decir

$$\mid g(y) \mid \leq k \text{ para todo } y \in f(X)$$

y así g está acotada y $f(X)$ es un espacio pseudo-compacto, como queríamos ver.

❑

Enunciamos ahora dos lemas que nos serán muy útiles a la hora de demostrar algunas equivalencias de la pseudo-compacidad con las nociones de compacidad definidas anteriormente (así como con la propia compacidad).

Este primer lema nos muestra que los puntos de aglomeración también se conservan de cierta forma mediante las funciones continuas.

Lema 7.9 *Si x_0 es un punto de aglomeración de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de un espacio topológico X y $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f(x_0)$ es un punto de aglomeración de la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración.

En las condiciones del enunciado, sea V un entorno de $f(x_0)$.

Por ser f una función continua, existe entonces $U \subseteq X$, entorno de x_0, tal que $f(U) \subseteq V$.

Como x_0 es un punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, para todo número natural n existe $m > n$ tal que $x_m \in U$. Equivalentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$ tal que $f(x_m) \in f(U) \subseteq V$.

Tenemos así que $f(x_0)$ es un punto de aglomeración de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$.

❑

El siguiente resultado nos da ciertas propiedades que, de ser cumplidas por una sucesión, nos asegurarán que ésta no tiene puntos de aglomeración.

Lema 7.10 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión de números reales estrictamente creciente y no acotada. Entonces esta sucesión no tiene puntos de aglomeración.*

Demostración.

Procedemos por reducción al absurdo.

Sea a un punto de aglomeración de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ satisface el primer axioma de numerabilidad, tenemos por el Lema 5.8 que a es un punto límite de una subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, pero eso es imposible ya que cualquier subsucesión será estrictamente creciente y no acotada y por tanto no puede converger.

Llegamos así a una contradicción y por tanto la sucesión no tiene puntos de aglomeración.

❑

Comenzamos ahora enunciando las equivalencias que existen entre los espacios topológicos pseudo-compactos y los definidos con anterioridad.

La primera proposición afirma que no existe ninguna relación con los espacios débilmente ω-compactos. En ella mostramos ejemplos que lo demuestran.

Proposición 7.11 *Existen espacios topológicos pseudo-compactos que no son débilmente ω-compactos y espacios topológicos débilmente ω-compactos que no son pseudo-compactos.*

Demostración.

Mostramos un ejemplo de cada uno de estos espacios.

Tomamos en primer lugar $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ donde τ_{CN} denota la topología de los complementos numerables, es decir, aquella en la que un conjunto $A \neq \emptyset$ es abierto si y solo si su complementario, A^c, es un conjunto numerable, es decir, $\mathrm{card} A^c \leq \aleph_0$. Este espacio es pseudo-compacto pero no débilmente ω-compacto, como mostramos a continuación.

Veamos que la intersección de cualquier par de abiertos (no vacíos) en este espacio es no vacía.

Sean U y V abiertos no vacíos en $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos numerables tales que $U \cap V = \emptyset$. Tomando complementarios tenemos entonces que $U^c \cup V^c = \mathbb{R}$ pero esto es absurdo, ya que U^c y V^c son conjuntos numerables y de esta forma $\mathbb{R}$ sería también numerable. Así, $U \cap V \neq \emptyset$.

Sea ahora $f : (\mathbb{R}, \tau_{CN}) \to (\mathbb{R}, \tau_u)$ una aplicación continua. Veamos que entonces tiene que ser constante.

Supongamos que no lo es; existen entonces x_1 y x_2 números reales tales que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Como $\mathbb{R}$ (con la topología usual) es un espacio Hausdorff, podemos tomar A y B abiertos en $\mathbb{R}$ tales que

$$A \cap B = \emptyset,$$
$$f(x_1) \in A \text{ y}$$
$$f(x_2) \in B.$$

Como f es continua, consideramos $U = f^{-1}(A)$ y $V = f^{-1}(B)$ abiertos en $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ tales que

$$x_1 \in U \text{ y}$$
$$x_2 \in V.$$

Así obtenemos que

$$U \cap V = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B) = \emptyset,$$

lo cual es una contradicción.

Concluimos entonces que toda función continua de $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ en $\mathbb{R}$ es constante y por tanto acotada. Así, $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ es pseudo-compacto.

Sin embargo este espacio no es débilmente ω-compacto ya que es fácil ver que el subconjunto (infinito) formado por todos los números naturales no tiene ningún punto de acumulación, pues dado $x \in \mathbb{R}$ podemos tomar $U = \mathbb{N}^c \cup \{x\}$ un entorno de x tal que $(U \setminus \{x\}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

De hecho, en este espacio topológico se cumple que dado cualquier subconjunto numerable éste no tiene puntos de acumulación.

Mostramos ahora un ejemplo de espacio topológico débilmente ω-compacto y no pseudo-compacto.

Sea (X, τ) donde $X = \{(0, n), (1, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $U \in \tau$ si y solo si dado $n \in \mathbb{N}$, o bien

$$(0, n) \in U \text{ y } (1, n) \in U,$$

o bien

$$(0, n) \notin U \text{ y } (1, n) \notin U.$$

Es fácil comprobar que efectivamente τ define una topología. Veamos que este espacio topológico es débilmente ω-compacto.

Sea A un subconjunto infinito de X. Como A es no vacío, existe al menos un elemento $x \in X$ contenido en A. Distinguimos ahora dos casos:

- $x = (0, n)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dado $x_0 = (1, n)$ tenemos que todo entorno U de x_0 contendrá a x por ser abierto. Así, $(U \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$, y x_0 es un punto de acumulación de A.

- $x = (1, n)$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Análogamente al caso anterior, tomando $x_0 = (0, n)$ tenemos que para todo entorno U de x_0 se cumple que $x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap A$, y así x_0 es un punto de acumulación de A.

Concluimos que todo subconjunto infinito de X tiene al menos un punto de acumulación (Observamos que, de hecho, ocurre para cualquier subconjunto no vacío de X).

Para demostrar que X no es un espacio topológico pseudo-compacto definimos la aplicacion $f : X \to \mathbb{R}$ definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por

$$f(0, n) = n$$

$$f(1, n) = n$$

Es obvio que f no es acotada, pero veamos que sí es continua.

Sea (a, b) un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ ($a < b$).

Si $(a, b) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a < n < b$, y ésto ocurre si y solo si $\{(0, n), (1, n)\} \in f^{-1}((a, b)) \in \tau$.

Si $(a, b) \cap \mathbb{N} = \emptyset$, entonces $f^{-1}((a, b)) = \emptyset \in \tau$.

Tenemos así una función continua que no está acotada, por lo que X no es un espacio pseudo-compacto.

❏

Pasamos a preguntarnos qué ocurre con la ω-compacidad. Veremos que todo espacio ω-compacto es también pseudo-compacto y que es necesario encontrarnos en un espacio topológico normal para que se dé la equivalencia entre ambas. Antes, mostramos un teorema profundo (de cuya demostración prescindimos) que favorecerá el desarrollo de la última de estas demostraciones.

Teorema 7.12 *(Teorema de extensión de Tietze.) Sea X un espacio topológico normal y sea C un subconjunto cerrado y no vacío de éste. Entonces para toda aplicación continua $f : C \to \mathbb{R}$ existe una aplicación continua $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{f} \mid_C = f$.*

Proposición 7.13 *Si X es un espacio topológico ω-compacto, entonces es también pseudo-compacto.*

Demostración.
Sea f una aplicación continua de X en $\mathbb{R}$. Supongamos que f no está acotada superiormente, entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente y no está acotada superiormente.

Como X es, por hipótesis, ω-compacto, existe $x_0 \in X$ un punto de aglomeración de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y por lo afirmado en el Lema 7.9, $f(x_0)$ es entonces un punto de aglomeración de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, lo que es absurdo según lo demostrado en el Lema 7.10.

Tenemos por tanto que toda función continua de X en $\mathbb{R}$ está acotada superiormente y por el apartado 2. de la Proposición 7.7 esto equivale a la pseudo-compacidad de X.

Ya vimos que el espácio topológico $(\mathbb{R}, \tau_{CN})$ no es débilmente ω-compacto (y por tanto tampoco ω-compacto ni sucesionalmente compacto) pero sí es pseudo-compacto. Este ejemplo muestra que tanto el recíproco de esta proposición como el de la 7.16, no son ciertos.

❑

Proposición 7.14 *En un espacio topológico normal, la ω-compacidad y la pseudo-compacidad son equivalentes.*

Demostración.
Tras la proposición anterior basta ver que si X es un espacio pseudo-compacto y normal entonces es también ω-compacto.

Supongamos que no lo es; existe entonces un recubrimiento numerable $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ formado por abiertos encajados del que no podemos extraer un subrecubrimiento finito. Observemos que podemos tomar de hecho éste recubrimiento de forma que $U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \ldots.$

Construimos ahora una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x_n \in U_n \setminus U_{n-1} \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

la cual es una sucesión de elementos distintos de X que no tiene puntos de aglomeración (la demostración de esto último es análoga a la realizada en la Proposición 4.6).

Definimos el conjunto $C = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Veamos que la topología inducida es la topología discreta, es decir, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe U un entorno de x_n tal que $U \cap C = \{x_n\}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, por la construcción de la sucesión se cumple que $x_n \in U_n$ y $x_m \notin U_n$ para todo $m > n$, es decir $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset U_n$ y $x_m \notin U_n$ para todo $m > n$.

Definimos entonces $U = U_n \setminus \{x_1, ..., x_{n-1}\}$. Tenemos que U es abierto ya que X es un espacio T_1; además $U \cap C = \{x_n\}$ y concluímos así que la topología inducida es la discreta.

Veamos ahora que el conjunto C es cerrado.

Sea $x \in X$ tal que $x \notin C$. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_m$ y tomando $U = U_m \setminus \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ tenemos U un entorno de x tal que $U \cap C = \emptyset$.

Concluimos así que C^c es abierto y por tanto C es cerrado como queríamos ver.

Tomamos ahora la aplicación $f : C \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_n) = n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

la cual es una aplicación continua.

Así, como X es normal y C es cerrado, por el Teorema de Tietze existe una aplicación continua $\bar{f} : X \to \mathbb{R}$ tal que $\bar{f}\mid_C = f$.

Como $\bar{f}$ no está acotada superiormente (pues f no lo está), tenemos por la Proposición 7.7 que X no es pseudo-compacto, lo cual es una contradicción. Concluimos así que la sucesión tiene al menos un punto de aglomeración y por tanto (por la Proposición 4.6) que X es ω-compacto

❏

Proposición 7.15 *En un espacio métrico X, la ω-compacidad y la pseudo-compacidad son equivalentes.*

Demostración.

Es inmediato a partir del Teorema 2.23 y la Proposición 7.14.

❏

Nos queda ver la equivalencia entre compacidad sucesional y pseudo-compacidad.

Proposición 7.16 *Todo espacio topológico sucesionalmente compacto es pseudo-compacto.*

Demostración.

Se deduce inmediatamente de las implicaciones ya vistas: compacidad sucesional $\to$ ω-compacidad (Proposición 5.7) y ω-compacidad $\to$ pseudo-compacidad (Proposición 7.13).

Mostramos además la demostración directa:

Sea X un espacio topológico sucesionalmente compacto. Por el apartado 8 de la Proposición 7.7 será suficiente probar que toda función continua de X en $\mathbb{R}$ acotada superiormente alcanza su supremo.

Sea entonces f con estas características. Como f está acotada superiormente, entonces el conjunto $\{f(x) \mid x \in X\}$ tiene un supremo en $\mathbb{R}$ al que denotamos por s.

Obviamente $f(x) \leq s$ para todo $x \in X$. Queremos ver que f alcanza el valor s.

Como $s - \frac{1}{n} < s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tomamos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in X$ tal que

$$s - \frac{1}{n} < f(x_n) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Así

$$f(x_n) + \frac{1}{n} > s \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

pero $f(x_n) \leq s$ para cada número natural n, por lo que $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a s.

Como X es sucesionalmente compacto, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos una subsucesión convergente, $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Llamemos c al límite de esta subsucesión. Al ser f continua se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c).$$

Tenemos entonces $\{f(x_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c)$ pero como $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = s$, tiene que cumplirse que $f(c) = s$ y así f alcanza su supremo tal como queríamos ver.

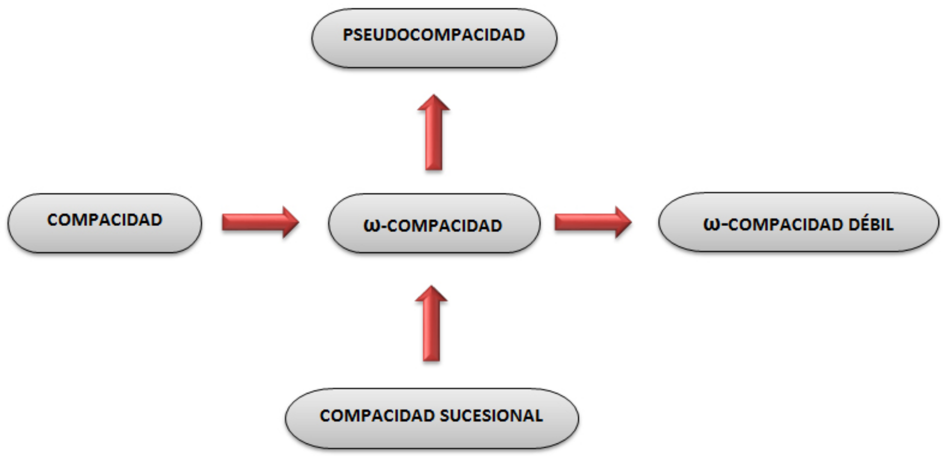
❏

Terminamos definiendo esta nueva noción de compacidad en subespacios, tal como hemos hecho en los capítulos anteriores.

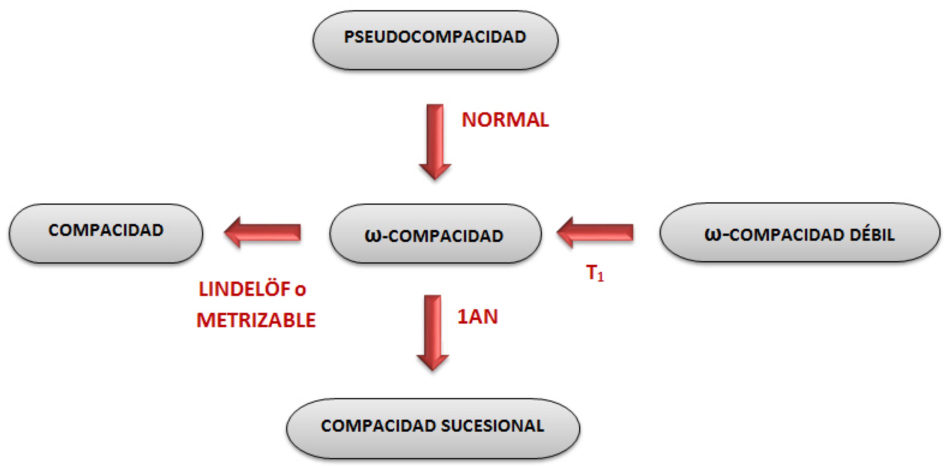
Definición 7.17 *Decimos que un subespacio Y de un espacio topológico X es pseudo-compacto si lo es visto como espacio topológico con la topología inducida.*

Diagramas.

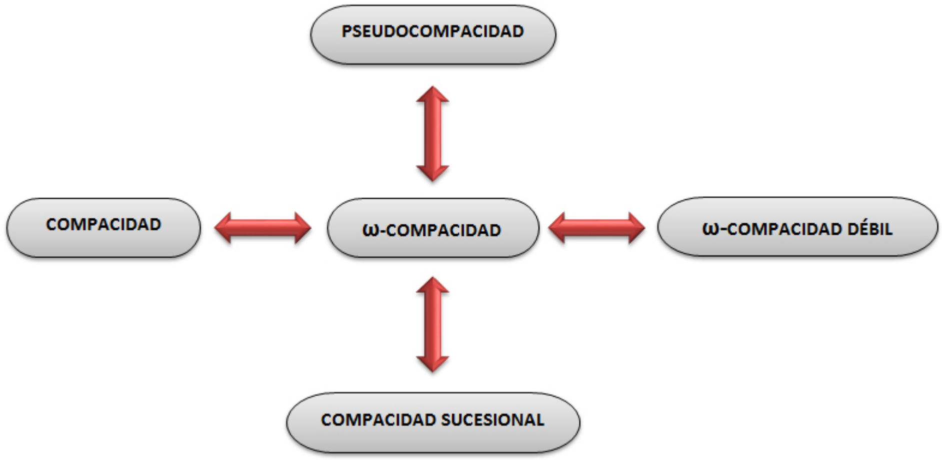
El siguiente diagrama muestra las equivalencias entre las diferentes nociones de compacidad demostradas en espacios topológicos arbitrarios.



Mostramos a continuación las propiedades que deben cumplir los espacios topológicos para que se cumplan los recíprocos de las anteriores equivalencias.



Por último vemos que en un espacio métrico, como hemos demostrado en este trabajo, todas son equivalentes.



Bibliografía

[1] Fidel Casarrubias Segura y Ángel Tamariz Mascarúa, *Elementos de topología de conjuntos.*

www.matematicas.unam.mx/tamariz/notas/LibroCasarrubiasTamariz.pdf

[2] John L. Kelley, *General topology.* Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975.

[3] James R. Munkres, *Topología, 2ª edición.* Prentice-Hall, Pearson Education, Madrid, 2003.

[4] Juan Margalef Roig y Enrique Outerelo Dominguez, *Introducción a la topología.* Editorial Complutense, Madrid, 1993.

[5] Juan Margalef Roig, Enrique Outerelo Dominguez y J.L. Pinilla Ferrando, *Topología.* Alhambra, Madrid, 1979.

[6] Jun-iti Nagata, *Modern general topology, 2ª edición.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985.

[7] Lynn Arthur Steen y J.Arthur Seebach, *Counterexamples in Topology.* Dover publications, New York, 1970.

[8] Roger Cooke *The History of mathematics. A brief course, 2ª Edición.* Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2005.

[9] Stephen Willard, *General topology.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.

[10] ocw.um.es/ciencias/topologia-de-espacios-metricos

[11] www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2000944/lecciones