



UNIVERSIDAD DE MURCIA
Trabajo Fin de Grado

Ecuación de campo. Introducción a la Cosmología.

Alumna:
Rocío Navarro Martínez

Tutor:
José Antonio Pastor González



FACULTAD DE
MATEMÁTICAS

Julio de 2017

Declaración de originalidad

Rocío Navarro Martínez, autora del Trabajo de Fin de Grado “Ecuación de campo. Introducción a la Cosmología.”, bajo la tutela del profesor José Pastor González, declara que ésta es una obra original y se ha puesto el mayor empeño posible en citar todas las fuentes debidamente.¹

Murcia, a 11 de julio de 2017.

¹Existe una copia firmada de esta declaración en la Secretaría de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia.

Resumen

Este trabajo se centra principalmente en la Teoría de la Relatividad Especial y General de Einstein (más concretamente en esta última), así como en sus aplicaciones a la Cosmología, lo cual nos dará pasó a los distintos modelos del Universo.

El primer capítulo trata brevemente la historia de la Cosmología: de qué se trata esta ciencia y cuáles fueron sus orígenes y grandes avances en la historia del ser humano. Como resumen, diremos que los primeros pasos en cosmología se dieron tan pronto como comenzó la historia del hombre, pues desde siempre el ser humano ha querido comprender cómo funciona su entorno y el mundo que le rodea. Sin embargo, no fue hasta el siglo XIX cuando nació la Cosmología Moderna. En este mismo siglo Einstein publicó su Teoría de la Relatividad, que cambió el paradigma matemático basado en la mecánica de Isaac Newton. La relatividad es la base sobre la que se trabaja en los capítulos posteriores.

El capítulo dos comienza con el contexto histórico que llevó a los matemáticos del siglo XIX a cuestionar los axiomas que regían la escena matemática del momento. Surge así, primeramente, la Teoría de la Relatividad Especial, que tiene como postulado más importante la invaribilidad de la velocidad de la luz, sea cual sea el sistema de referencia. También se introduce el tiempo como una variable más, y no como una magnitud absoluta. Esto conduce a fenómenos como la dilatación del tiempo y la contracción de longitudes en la dirección del movimiento. Aparecen las transformaciones de Lorentz que nos permiten cambiar de un sistema de referencia a otro. A continuación aparece la teoría de Relatividad General, cuya base reside en el Principio de Equivalencia, por el cual un sistema acelerado es idéntico, a ojos de la física, a un sistema sometido a una fuerza gravitatoria. Sin embargo, en sistemas de referencia grandes aparecen las llamadas fuerzas de marea. Teniendo este fenómeno en cuenta, deduciremos las ecuaciones de campo en el vacío tanto newtoniana como relativista de Einstein.

En el último capítulo, se muestran algunas evidencias que tienen los astrónomos actualmente sobre el cosmos. Una de la más importantes es que el Universo cumple un el Principio Cosmológico, por el cual es isotrópico y homogéneo. La métricas de un universo con estas características es la de Friedman-Robertson-Walker, que tiene tres versiones: curvatura positiva, negativa y nula. Todas ellas contienen el llamado factor escala que rige el comportamiento y evolución del cosmos e ilustra su expansión. Posteriormente, por tanto, se estudia el comportamiento de este factor para cada curvatura. Esto se consigue con la ecuación de campo general de Einstein (esta vez no sólo válida en el vacío). Se ilustra especialmente en el caso de curvatura cero, en el cual, además muestran los casos específicos de modelos dominados por la energía de la materia, la radiación y del vacío por separado.

Finalmente, también se ilustran ejemplos para el caso de materia dominante en modelos curvados. Se concluye que, si fuese posible calcular la densidad de energía actual en el cosmos, se podría determinar cuál es la naturaleza geométrica de nuestro Universo.

Abstract

This assignment revolves around Einstein's Theory of Relativity, as well as the science of Cosmology and the application of Geometry in the study of the cosmos. As a summary, we'll say that the first chapter of this project illustrates briefly the history of Cosmology focusing on the great discoveries and evolution in knowledge about this topic. The second chapter introduces us into the formulation of Einstein's Theory of Relativity and the environment that led to this new vision of the mathematical scene. This chapter carries us to the very important field equation of Einstein. Finally, the third and last chapter displays the diverse possible models of the Universe depending of the curvature of space-time and shows the geometry and dynamics of each of them.

As we just mentioned before, the first chapter gives us a slightly idea of how Cosmology was born as well as what exactly is Cosmology. As for the first affirmation, the chapter concludes that Cosmology is as old as the human kind, whereas the definition of Cosmology gives us the reason why that is true: Cosmology is the study of the Universe as a whole. Thus, when ancient men asked themselves what was going on around them or what was the sky above them composed of, they were writing the first pages of the cosmological history, even though the universe they knew was drastically smaller than the one we know today. As they used to think the Earth was the center of everything that existed, and the rest of the celestial bodies were a finite number of stars revolving around our own flat planet. As years and centuries passed, discoveries turned up. The universe we just described evolved into another where our planet was no longer flat, but spherical; the Earth stopped being the center of the universe to transfer this role to the Sun, and later by to the absolute nothing. Astronomers came to the conclusion that our location in the Universe is no special from any other, so, as a consequence, there is no thing such as a center of the universe. This is known as the Copernican Principle.

Nowadays we know our planet is placed in an ordinary system, called the Solar System, that is no different from any other system revolving around the rest of stars. And our Solar System is located in a galaxy called the Milky Way that, again, is not any special from the rest of the galaxies shaping the Universe. Cosmical observations over time also told us that the Universe might have had a beginning, maybe not the only one (as the Big Crunch theory proposes). This beginning of time is called the Big Bang, and many observational evidences support this. One of them being the called cosmological background microwave radiation, that remains from the decoupling that took place in the giant dense accumulation of matter when the Big Bang occurred. Another important evidence of modern Cosmology is the recession of galaxies. Galaxies are separating one another from no particular point. The velocity of the recession of a galaxy relative to us is proportional to the distance to that galaxy, as the Hubble Law holds.

The second chapter has its foundation on the events that drove the mathematicians of the XIX century to question the paradigms of mathematics of the epoch. The most important of them being the appearance of new geometries that didn't satisfy the fifth postulate of Euclides, and the other being the discovery of electromagnetic waves and how the light was one of this kind of waves. An important homonymous experiment was carried out by the scientists Michelson and Morley, which gave uncertain results. These incidents led Albert Einstein to the formulation of the two postulates of Special Relativity. These claimed, on one hand, that the time was not an absolute magnitude and, on the

other hand, that the speed of light is constant in every reference system. This means that time becomes a component of the space, just as the other three used until that day. The space then becomes a space-time. Time can be parametrized in the called proper time which will be used in the upcoming chapters.

One consequence of these facts was the contraction of lengths in the direction of velocity. Another outcome was the time dilatation for a moving traveler regarding a static observer. Lorentz's transformations provide us with the tools to transfer from one reference system to another one moving regarding the first one. Under these circumstances it's safe to say the simultaneity is relative.

We now dive into Einstein's General Relativity Theory, which lies in the Equivalence Principle. This principle claims that, as for physics, an accelerating system is the same as a system under a gravitational field. Two consequences derive from this affirmation: one is that light is curved by matter, the other relies on the fact that time goes by slower as closer we stand from an object with mass. The most important remark from this principle is that makes us see gravity and space as never before. It shows us that gravity is not a force by itself, but a consequence of space-time curvature caused by mass and it's this curvature of space-time what tells masses how to move.

However, the Equivalence Principle only stands for small reference systems, as for bigger ones another kind of force makes its appearance: tidal forces. The next step is, therefore, deducing the field equation that describes how free particles travel along space-time under tidal forces. To approach this aim, we first deduce Newton's field equation so then can try to find an analogous equation that blends with General Relativity. Einstein claims that free particles move along geodesics curves so, after finding Newton's field equation, we reformulate it to fit General Relativity using the geodesics equations and differential geometry. We must remark, nonetheless, that Einstein's Field Equation here deduced is only valid for the vacuum, where no other masses affect the particle. The general form of this equation will be studied in the next chapter.

In the third and final chapter are discussed the models of the Universe, as well as the geometry, dynamics and evolution of each of them. First of all, the composition of the universe is introduced. The Universe is mainly formed by matter, radiation and vacuum energy, as well as dark energy of unknown character (thus we won't get into detail with this energy). The Universe satisfies the known as Cosmological Principle, which means that it is isotropic (the same in every direction) and homogeneous (the same everywhere).

As mentioned before, the recession of the galaxies is a cosmological fact. One evidence for this recession is the redshift we observe from distant galaxies. This redshift is described by an equation and it can be used as a measure of distance since, by the Hubble Law, the more distant a galaxy is, the faster it moves away from us, ergo, the more redshift we can observe.

Moving on along the chapter, it is now illustrated the geometry of the isotropic homogeneous cosmological models. However, we will distinguish between flat and curved models. These differ in their curvature, being 0 in the case of the flat model and ± 1 in (positively or negatively) curved models.

For the flat model, the Friedman-Robertson-Walker line element is introduced, and will be generalized for curved models later on. This metric includes a function of time called the scale factor which is much related to the Hubble constant and determines the evolution of the cosmic model. To study this evolution is necessary to get back to Einstein's field equation, but a more complete version will be used this time. The general field equation of Einstein includes a tensor that rules the dynamics of the cosmic fluid. This equation includes as well the called cosmic constant. This constant is the value of the energy density of the vacuum of the space.

Next, the dynamics and evolution of the flat cosmological model is discussed. As we just mentioned, this evolution lies on the behavior of the scale factor. Using Einstein's equation and the first law of thermodynamics it can be deduced the equation that rules the behavior of the scale factor called the Friedman equation. As told before, the scale factor is closely related to the Hubble constant, which is also related to energy density. As we saw before, this energy density can be divided into the three main components of the Universe: matter, radiation and vacuum. If we make each of these three components dominant we obtain a matter-dominated, radiation-dominated or vacuum-dominated cosmological model, respectively. And for each of these, the scale factor behaves in a different way. It is concluded that, right after the Big Bang, the Universe was radiation-dominated. Nowadays the dominant energy is matter but we are slowly entering a vacuum-dominated era.

As for the curved cosmological models, we now introduce the general line element of geometry and then, the line element for positive curvature (the also called closed model) and negative curvature (the open model) are deduced separately. It is also given a general solution for the Friedman as well as the solution for the specific case of the matter-dominated curved model.

Finally it is concluded that, if we had the chance of measuring current energy density of space we could find out the curvature of the Universe, i.e., we could tell whether the Universe is flat, open or closed.

Índice general

Declaración de originalidad	3
Resumen	5
Abstract	7
1. Cosmología	13
2. Geometría y relatividad	19
2.1. Contexto histórico	19
2.2. Relatividad Especial	20
2.2.1. El experimento de Michelson-Morley	20
2.2.2. Postulados de la relatividad especial.	21
2.2.3. Las transformaciones de Lorentz	23
2.2.4. Sistema de unidades geométrico	24
2.2.5. Causalidad y tiempo propio	25
2.3. Relatividad General	26
2.3.1. El principio de equivalencia	27
2.3.2. Las fuerzas de marea y ecuación de campo de Newton	27
2.3.3. Caso clásico	30
2.3.4. Ecuación campo Einstein	32
3. Modelos del Universo	37
3.1. El universo a gran escala.	37
3.2. La expansión cósmica y la Ley de Hubble.	38
3.3. Geometría y dinámica del universo plano	39
3.3.1. La geometría del universo plano	39
3.3.2. Fluidos perfectos	41
3.3.3. La ecuación de campo general	44
3.3.4. Dinámica y evolución del universo plano.	45
3.4. Geometría y dinámica del universo curvado	47
3.4.1. Geometría del universo curvado	47
3.4.2. Dinámica y evolución del universo curvado	49
3.4.3. Solución general de la Ecuación de Friedman	50
3.4.4. Modelo cosmológico FRW dominado por la materia	52
Bibliografía	53

Capítulo 1

Cosmología

Desde tiempos remotos, anteriores a las primeras evidencias encontradas del hombre, el ser humano se ha caracterizado por cuestionarse sobre sí mismo y lo que ocurre a su alrededor, por intentar entender el entorno que le rodea y cómo funciona el mismo. Pese a la concepción que actualmente se tenga de *cosmología*, se puede decir que aquellos fueron los inicios de la misma. **La cosmología es el estudio del Universo como un todo**, y a pesar de que hoy poseemos infinitamente más información sobre ese universo que la que tenían nuestros antiquísimos antepasados, y que acontecimientos como los fenómenos meteorológicos ya no supongan un misterio para nosotros, ellos se hacían la misma pregunta que la cosmología se plantea actualmente para intentar resolver aquellos misterios: *¿Qué ocurre a mi alrededor?*; y más importante aún: *¿Cómo funciona el universo?*.

La cosmología es, por tanto, considerada la ciencia más antigua de la Tierra. Pero el concepto de cosmología como ciencia no se reconoció hasta la aparición de la Astronomía Moderna, nacida en torno al siglo XVI, y fue uno de los logros más importantes de esta nueva astronomía.

Ahora bien, ¿qué significado guardaba antiguamente el concepto de cosmología, pues? La cosmología era el conjunto de creencias relacionadas con el mundo: la Tierra, Dios, el Universo, la Creación. Es decir, la cosmología estaba fuertemente arraigada a creencias religiosas, de ahí su tendencia a crear controversia, porque el “estudio de todo” lleva a la astronomía a áreas que han estado reservadas a la filosofía y la religión. Muchas de las cuestiones plantadas en cosmología suscitan debates emocionales que son mucho más intensos que en cualquier otra rama de la Física, o de la ciencia en general, lo cual la hace especialmente interesante. Cuanto más se descubría del cosmos, mas rechazo suscitaba de parte de la Iglesia, pues, admitámoslo, la desoladora idea de no ser más que otro diminuto planeta en otro diminuto sistema solar en otra diminuta galaxia no es precisamente el concepto óptimo de universo que se esperaría el autoconsiderado “rey de la creación”. Pero como dijo Isaac Asimov: *“No puede esperarse que el Universo respete las emociones humanas”*[1].

A pesar de la iniciación a la astronomía llevada a cabo por imperios como el babilónico o el egipcio, los conocimientos mas influyentes sobre esta materia fueron aportados en la época griega, donde se fundaron los primeros modelos del Universo.

Filósofos como Tales de Mileto (624 a.C. – 546 a.C.) y Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.) planteaban un modelo de Tierra plano, donde el Universo que se extendía más allá era una bóveda en la que los astros se mantenían fijos e inmutables (de ahí el concepto de

firmamento, “firme”). La Tierra se mantenía estática bajo un universo finito en extensión pero infinito en el tiempo (eterno).

En cuanto a la esfericidad de la Tierra, se sospecha que fue Pitágoras (siglo VI a. C.) el primero en defender un modelo esférico pero esa idea contradice el hecho de que la mayoría de los presocráticos pitagóricos consideraban que la Tierra era plana. En su obra “De Caelo”, Aristóteles (siglo IV a. C.) da una explicación razonada de por qué la Tierra es una esfera y cita un valor para su circunferencia. En el siglo III a. C., Eratóstenes da una estimación del radio terrestre muy próximo al aceptado actualmente.

Aristarco de Samos, en el siglo tercero a.C., fue el primero en plantear un modelo heliocéntrico, pero el arraigado paradigma del modelo geocéntrico impidió que esta teoría fuese reconocida y mucho menos aceptada.

Claudio Ptolomeo (100 d.C – 168 d.C) apoyaba la idea de un universo geocéntrico, creía que la Tierra estaba inmóvil y ocupaba el centro del Universo. Pero planteó que el Sol, la Luna, los planetas y las estrellas no eran estáticos, sino que giraban alrededor de la Tierra trazando órbitas esféricas perfectas, perfección derivada, por supuesto, de la creencia de un origen divino tras todo elemento del cosmos.

No fue hasta mil quinientos años más tarde cuando Nicolás Copérnico (1473 – 1543) adoptó este modelo y ofreció un orden para los planetas según su distancia al Sol así como los modelos de rotación y traslación de la Tierra y los movimientos circulares o en epiciclos de los planetas alrededor del Astro Rey. Esta teoría suscitó curiosidad no solo en científicos de la época, también en Giordano Bruno, teólogo a quien la idea de Copérnico inspiró a plantear un universo infinito en el cual la Tierra no era más que uno de tantos planetas girando en una de las infinitas estrellas existentes. Fue una idea adelantada a su tiempo y que, por descontado, no condujo a Bruno a un buen desenlace.

En el siglo XVII se fue consolidando la teoría heliocéntrica, donde tan solo la Luna giraba en torno a la Tierra. Más tarde, Galileo Galilei (1564 – 1642) aportó pruebas que lo confirmaban, como la existencia de satélites que giraban alrededor de Júpiter. Johannes Kepler (1571 - 1630) dedujo con más precisión las órbitas planetarias, que resultaron ser elípticas y no circulares, y desarrolló las tres leyes conocidas como “Leyes de Kepler” sobre las órbitas del Sistema Solar. Además argumentó en contra de la infinitud en extensión del universo usando el hecho de que, de noche, el cielo se ve oscuro (más tarde se le denominó *la paradoja de Olbers*).

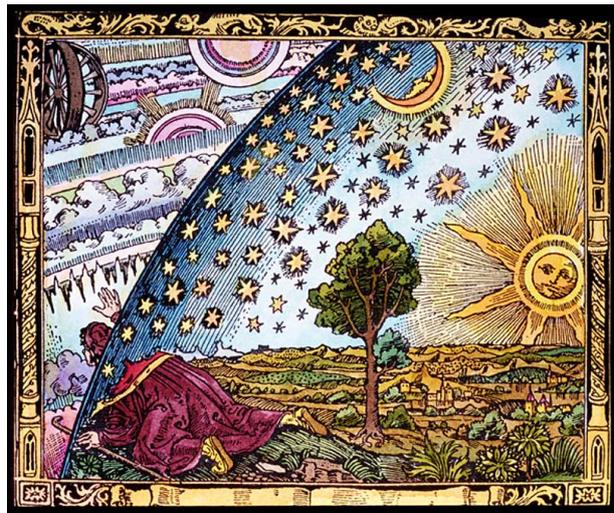


Figura 1.1: Grabado de artista desconocido que ha sido muy usado para representar el descubrimiento de la astronomía por el hombre (Fuente: <http://alkas.lt/category/visuomene> /laiskai/)

En 1687, Isaac Newton desarrolla por primera vez unas leyes que describen el comportamiento y la dinámica del universo a gran escala, tras desarrollar la teoría de la gravedad, concebida como una fuerza. Además, fue el primero en afirmar que el espectro de color observado cuando un rayo de luz atraviesa un prisma era inherente a la luz y no al prisma como se creía, y sospechaba que la luz estaba compuesta de partículas. Como veremos más adelante, ambos son conceptos cruciales en el avance de la ciencia en los años posteriores. Siglos más tarde, Albert Einstein refutaría tanto la concepción de la gravedad como fuerza, como las leyes de la mecánica del cosmos de Newton. En cualquiera de las dos teorías sobre la naturaleza de la gravedad hay algo que es fundamental: es la componente central de la historia del universo.

Las teorías de la Cosmología Moderna (nacida en 1915 con la publicación de la Teoría de la Relatividad General de Einstein) han abierto el debate sobre cierta dualidad en la naturaleza del Universo: ¿es éste un universo estacionario, o se encuentra, en cambio, en proceso de expansión? La primera teoría, defendida por la física de Isaac Newton se ve enfrentada por la teoría de un universo cuyas galaxias se alejan entre sí. Esta segunda corriente fue formulada por Albert Einstein y acogida por Edwin Hubble, quien formuló la “Ley de Hubble”, sobre la velocidad a la que se alejan las galaxias de un determinado punto según su lejanía al mismo.

A lo largo de la historia, el hombre ha tratado de rehuir el concepto de infinitud, como algo imposible de concebir y entender. Y no sólo eso, sino que también ha planteado serios problemas al intentar casar un Universo infinito con las teorías que iban surgiendo.

Por ejemplo, la teoría estacionaria planteó una seria paradoja para los físicos de la época, ya que si se consideraba un universo estático e infinito, por lejanos que fueran los objetos que proporcionaban luz, al componer éstos un número infinito de astros, la luz que recibiríamos de ellos debería ser también infinita. Ésta es conocida como la paradoja de Olbers, planteada por primera vez en el siglo XVII y que mantuvo a los astrónomos desconcertados durante dos siglos.

Finalmente se solucionó cuando se llegó a la conclusión de que, aunque no sepamos contestar a la cuestión de si el propio Universo tiene un fin, sí sabemos que el universo observable por el hombre sí es finito. Esto se debe a que la teoría más aceptada, y a la cual respaldan muchos descubrimientos recientes, es la de que el Universo tuvo “un” comienzo (tal vez no el único, según sugiere la teoría del “Big Crunch”¹). Así, desde que se produjo este “nacimiento”, no le ha dado tiempo a la luz de todo Universo a viajar tan monstruosas distancias, por lo cual aún no somos capaces de percibirla. En la [Figura 1.2](#) está representado gráficamente el universo observable con un *cono de luz*. El límite de este cono se denomina *horizonte de partículas*.

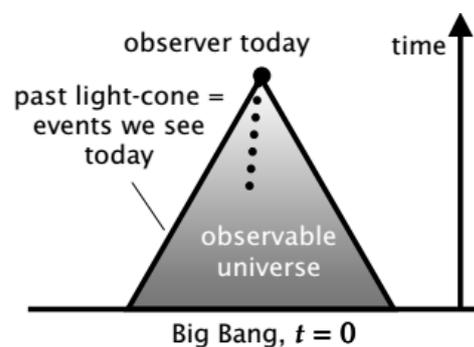


Figura 1.2: Universo observable [3].

¹Estos modelos se estudiarán con más profundidad en el [Capítulo 3](#).

Asumiendo esto, podríamos decir que mirar a través de un gran telescopio es equivalente a viajar al pasado, pues lo que observamos a través de la lente no es más que el estado que un cuerpo celeste tenía hace decenas o incluso centenas de miles de millones de años.

Sin embargo, no debemos ignorar que nuestro conocimiento sobre la naturaleza del Universo fuera del Sistema Solar es aún escaso y, sobre todo, muy reciente. Pues, por ejemplo, no fue hasta 1837 cuando, tras un siglo de intentos, se logró calcular, usando el paralaje, la distancia de las estrellas más cercanas. Estas fueron las primeras medidas obtenidas de un astro fuera de nuestro sistema.

Y más sorprendente aún es saber que no fue hasta los años veinte del siglo pasado, más de una década más tarde de la publicación de la Teoría de la Relatividad Especial de Einstein, cuando se descubrió que la hasta entonces conocida como “nebulosa Andrómeda” se encontraba fuera de nuestra galaxia, la Vía Láctea. Es decir, Andrómeda se trataba de una galaxia situada a 2,5 millones de años luz. Y por supuesto, no es la única, tan sólo la más cercana.

Así, por fin, se descubría un universo formado por galaxias (aproximadamente unas 100 mil millones de ellas en el universo observable), que contienen un promedio de 100 mil millones de estrellas cada una. Estas galaxias forman cúmulos de galaxias de unos 10^7 años luz de extensión, que forman cúmulos de cúmulos, hasta consolidar el universo observable, que se extiende unos 10^{10} años luz. A su vez, una de las teorías barajadas actualmente es la de la existencia de un red de multiversos, donde nuestro universo sería tan sólo un componente más, junto con infinitos universos existentes.

Algunos de los hechos sólidos conocidos por la Cosmología Moderna son:

- La recesión de las galaxias. Recesión que se rige por otro fenómeno bien conocido: la Ley de Hubble ([Capítulo 3](#)). Es importante señalar que el las galaxias no se alejan *de ningún punto en concreto*, sino que se separan unas de otras como lo harían unos puntos dibujados en un globo al hincharlo. De ahí que la velocidad a la que percibimos que se aleja una galaxia sea proporcional a la distancia que nos separa de la misma.
- La radiación de fondo de microondas. Es la evidencia más sólida de la existencia del Big Bang, pues es el eco de la radiación liberada en el origen del Universo.
- Existencia de un origen, el Big Bang. Este hecho está consolidado por los dos anteriores. Cuando miramos al universo lejano (es decir, miramos el pasado del universo) se percibe más caliente, más denso y geoméricamente más curvado.
- El principio de Copérnico, también conocido como el “principio de mediocridad”. Es la suposición de que somos, de hecho, mediocres. No somos el centro de nada y nuestro lugar en el universo no es especial en ningún aspecto. Si observásemos el universo desde cualquier otro punto no encontraríamos nada drásticamente distinto de lo que podemos observar desde aquí, y esto es extensible al universo no observable. El principio de Copérnico es el pilar al que se sujetan los científicos para no esperar que, observaciones realizadas el día de mañana de una parte del universo lejana y hasta entonces no visible, aporten información que refute, por ejemplo, la teoría del Big Bang.

Si comparamos esta visión del cosmos con la que se tenía tan sólo mil años atrás, se podría decir que el conocimiento que se tiene sobre éste ha crecido de forma exponencial, pero es indudable afirmar que cuanto más sabemos del Universo, más inverosímil se hace la idea de descubrir todos los misterios que atesora, pues cada nuevo avance nos confirma lo diminutos e insignificantes que somos. Si sólo el universo observable por el hombre actualmente ya se escapa de nuestros límites tecnológicos, qué decir, pues, del universo que se extiende más allá de nuestro horizonte de partículas.

La Cosmología Moderna es, de hecho, una mezcla de física y leyes bien conocidas y una física bastante incierta que se halla en el límite de nuestro conocimiento. Cuestiones como la naturaleza de la materia oscura son un misterio para los astrónomos hoy en día, así como preguntas del tipo: *¿Qué vino antes del Big Bang?*, o si tiene sentido siquiera esta noción de un *antes*.

Capítulo 2

Geometría y relatividad

2.1. Contexto histórico

Para introducir la teoría de la relatividad debemos primero ponernos en situación: ¿cuál era la teoría aceptada y consolidada hasta aquel momento?

Desde el siglo XVII, la física newtoniana regía indiscutiblemente entre la comunidad científica. La física de Newton sostenía dos axiomas claves: el espacio y el tiempo son absolutos. Esto quiere decir que las medidas efectuadas por dos observadores sobre una magnitud espacial y temporal dada son exactamente las mismas, sea cuales fuere las condiciones y circunstancias de estos dos supuestos observadores.

La física newtoniana se erguía sobre dos grandes pilares: las leyes de la dinámica y las leyes de gravitación universal. Y no era para menos, pues todos los experimentos realizados hasta la época las confirmaban. Durante más de dos siglos fue el paradigma del modelo newtoniano el que condujo hacia la revolución industrial y el desarrollo tecnológico. Esto debe darnos una idea de lo impensable que se hacía la aparición de unas nuevas leyes de la física que tiraran por tierra las hasta entonces aceptadas. Mas, ocurrió.

Hacia la mitad del siglo XIX surgieron geometrías no euclidianas de mano de matemáticos como Gauss, Lobachevski o Bolyai. Estas geometrías diferían de la susodicha pues no satisfacían el Quinto Postulado de Euclides, esto es, *"Postúlese... Y que si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos"*. Una forma equivalente de enunciar este postulado (conocido como el postulado de las paralelas) que nos ayudará a entender fácilmente la contradicción a la cual llegaron dichos matemáticos es la siguiente: *"Por un punto exterior a una recta dada sólo cabe trazar una paralela"*. Mas, si consideramos la geometría esférica, por un punto exterior a una recta no pasa *ninguna* paralela; y si hablamos en términos de la geometría hiperbólica de Lobachevski, pasan *infinitas* paralelas.

Por otro lado, en el mismo siglo, el matemático británico Maxwell descubría las ondas electromagnéticas, y algo más sorprendente aún: la luz era una onda de este tipo.

2.2. Relatividad Especial

2.2.1. El experimento de Michelson-Morley

Dado que se había demostrado que la luz era una onda electromagnética, al igual que el sonido, debía existir un medio por el cual ésta se propagase al igual que lo hacía el sonido por el aire. Dado que entre el Sol y la Tierra no hay rastro de aire y sin embargo la luz del astro llega hasta nosotros, es claro que el aire no puede ser el medio de propagación de las ondas lumíferas. Este desconocido medio de propagación fue denominado *éter lumífero*.

La idea de Michelson era medir el movimiento de la Tierra en referencia al éter. O como él mismo decía, si la Tierra se mueve en su seno, medir la velocidad del "viento del éter". Para ello usaron un interferómetro, que consiste en un rayo de luz que interfiere con una placa semi/reflectora, de modo que manda parte del rayo a un espejo M2, y la otra parte traspasa dicha placa y se dirige a otro espejo M1, de modo que tras reflejarse en ambos espejos, regresan a la placa central y finalmente son dirigidos hacia abajo, donde se encuentra un telescopio para ser observados.

De este modo se pretendía demostrar la existencia del viento del éter observando que los dos rayos de luz no llegaban al telescopio al mismo tiempo. Veámoslo con detalle.

Analicemos cuál sería tiempo empleado por la luz para recorrer cada brazo, sabiendo:

$$tiempo\ empleado = \frac{espacio\ recorrido}{velocidad}$$

A. Para el el brazo horizontal, sea el tiempo empleado t_1 , que a su vez se divide en dos componentes: t_{11} , cuando el rayo viaja a favor del viento del éter (hacia la izquierda), y t_{12} , tiempo empleado en el recorrido en contra del viento del éter (hacia la derecha).

$$t_1 = t_{11} + t_{12} \begin{cases} t_{11} = \frac{L_1}{c + v} \\ t_{12} = \frac{L_1}{c - v} \end{cases}$$

$$\implies t_{11} + t_{12} = \frac{L_1(c - v) + L_1(c + v)}{c^2 - v^2} = \frac{2L_1c}{c^2 - v^2} = \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Lo cual finalmente queda de la siguiente forma:

$$t_1 = \frac{2L_1}{c} \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (2.1)$$

B. Centrándonos ahora en el brazo vertical, debemos tener en cuenta el viento del éter, que afecta a c de forma perpendicular. De nuevo el tiempo t_2 se divide en dos componentes: el tiempo empleado en subir será t_{21} y el empleado en bajar, t_{22} .

$$t_2 = t_{21} + t_{22} \begin{cases} t_{21} = \frac{L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ t_{22} = \frac{L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{cases}$$

$$\implies t_{21} + t_{22} = \frac{2L_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2L_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Y, aplicando el desarrollo binomial, finalmente obtenemos:

$$t_2 \approx \frac{2L_2}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) \quad (2.2)$$

Por tanto, el desfase con el cual los dos rayos de luz llegan al microscopio viene dado por la diferencia de 2.1 y 2.2:

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{2}{c}(L_1 - L_2) \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)$$

Así, si esta diferencia era no nula ($\Delta t \neq 0$), existían dos posibles motivos para este fenómeno:

- Existía el viento del éter, i.e. $v \neq 0$.
- Las longitudes de los brazos del interferómetro no eran idénticas, i.e. $L_1 \neq L_2$.

Nota: ambos sucesos podían darse simultáneamente.

Para eliminar la segunda posibilidad lo que se hizo fue girar el interferómetro 90° de modo que el brazo vertical pasase a ser horizontal y viceversa.

Sea $\Delta t'$ el desfase registrado con los brazos rotados,

$$\Delta t - \Delta t' = \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{L_1 + L_2}{c}$$

Luego, si de este modo seguía existiendo el *mismo* desfase entre el momento de llegada de los dos rayos de luz, $\Delta t = \Delta t'$, solo podía significar que el viento del éter era nulo: $v = 0$, luego no existía.

Y esto fue, efectivamente, lo que se observó.

2.2.2. Postulados de la relatividad especial.

Ante la nueva teoría del electromagnetismo de Maxwell y la imposibilidad de determinar el movimiento en relación al éter, Einstein desarrolla dos postulados:

Postulado 1: Principio de Relatividad. Las leyes que describen los cambios de los sistemas físicos no resultan afectadas si estos cambios de estado están referidos a uno u otro de dos sistemas inerciales.

Postulado 2: Principio de invariancia de la velocidad de la luz. Cualquier rayo de luz se mueve en el sistema estacionario con velocidad c , tanto si el rayo es emitido por un cuerpo en reposo o en movimiento.

Para entender y profundizar más en estos postulados debemos primero introducir algunos conceptos.

Definición 2.2.1. *Un **evento o suceso** es algo que sucede en una posición determinada del espacio y un instante concreto del tiempo.*

Definición 2.2.2. *Un **sistema de referencia** S consta de un observador O que es capaz de medir distancias y tiempos de modo que registra cuanto sucede en el espacio y tiempo. El observador asigna a cada evento A unas coordenadas en el espacio y el tiempo, respectivamente: (x_A, t_A) .*

Las coordenadas espaciales están referidas a ejes cartesianos cuyo tamaño viene dado normalmente en metros.

Para las coordenadas temporales se define un sistema común de tiempos, donde en cada localización del espacio hay colocado un reloj y todos ellos funcionan igual. Debido a la homogeneidad del espacio, todos los relojes marcan el tiempo de igual modo con independencia de su localización. Más aún, están sincronizados, es decir, para una señal luminosa de x_A en t_A a x_B , por ejemplo:

$$t_B = \frac{|x_B - x_A|}{c} + t_A \quad (2.3)$$

Definición 2.2.3. *Una **partícula libre** es un cuerpo que no está afectado por ninguna fuerza.*

Nota: La gravedad está presente en cualquier lugar del espacio, mas puede ser despreciable si nos encontramos lo suficientemente alejados de la fuente.

Definición 2.2.4. *Un **sistema de referencia inercial** es un sistema en el cual son válidas las leyes de la mecánica de Newton.*

Una de las consecuencias que extrajo Einstein del experimento es la relatividad de las medidas del tiempo. Si definimos t_0 como el tiempo que mide un reloj para un observador en reposo respecto a éste, y t el tiempo medido por un reloj que se mueve con velocidad v respecto al observado:

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Este fenómeno se denomina **dilatación del tiempo** (lo cual conduce, a su vez, a la relatividad de la simultaneidad).

2.2.3. Las transformaciones de Lorentz

Si asumimos los postulados de la teoría de la relatividad de Einstein y los contrastamos con las transformaciones de Galileo, comprobaremos que no son compatibles.

Sean dos sistemas de referencia inerciales S y S' con coordenadas (x, y, z, t) y (x', y', z', t') , respectivamente, donde S' se aleja de S a una velocidad v . Ajustamos $t = t' = 0$. Las transformaciones de Galileo serían de la forma:

$$\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Si ahora consideramos un pulso de luz en S' , se tiene:

$$x = x' + vt' \longrightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v \longrightarrow c = c + v \longrightarrow v = 0 \quad (2.4)$$

Ya que por el segundo postulado de Einstein, la velocidad de la luz es siempre constante e igual a c .

Es evidente, pues, la necesidad de buscar otras transformaciones válidas que relacionen las magnitudes medidas por dos observadores diferentes.

$$\underbrace{(x, y, z, t)}_{\text{cartesianas}} \implies \overbrace{(x', y', z', t')}^{\text{cartesianas}} \quad (2.5)$$

Sabemos varias características que las nuevas coordenadas han de cumplir:

- x' es lineal. Es decir,

$$x' = Ax + By + Cz + Dt \quad (2.6)$$

Lo contrario significaría que

$$\frac{dx'}{dx} \neq \text{constante}$$

, lo cual vendría a decir que, por ejemplo, el tamaño (de la coordenada de x) de un objeto depende de su ubicación, lo cual no es congruente.

- S y S' están en configuración estándar. Ésto es, existe:

1. Isotropía espacial.
2. Homogeneidad espacial.
3. Homogeneidad temporal.

- Las medidas perpendiculares al movimiento no se ven afectadas.

Finalmente, las ecuaciones de Lorentz son las siguientes:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \end{cases}$$

$$\text{donde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.7)$$

Las transformaciones de Lorentz son las ecuaciones que permiten relacionar las medidas que hace un observador inercial del espacio, x , y del tiempo, t , referentes a un suceso con las medidas referentes al mismo suceso que haría otro observador inercial, que se mueve a velocidad v respecto al primer observador.

Nota: si v es mucho menor que c entonces $\gamma \approx 1$ y las ecuaciones se reducen a las galileanas.

Nota 2: Las otras dos direcciones espaciales, y y z , que son perpendiculares a la dirección del movimiento relativo de los dos observadores inerciales, no se transforman y por ello, generalmente, prescindiremos de ellas.

Una variedad de cuatro dimensiones que se rige por las ecuaciones de Lorentz es un **espacio-tiempo de Minkowski**.

2.2.4. Sistema de unidades geométrico

En la relatividad especial es habitual tomar la velocidad de la luz igual a 1 para simplificar las ecuaciones. Así, si hacemos $c = 1$, estamos haciendo 1 *segundo* = $3 \cdot 10^8$ *metros*, luego podemos expresar los metros en segundos y viceversa.

Usando unidades geométricas, las transformaciones de Lorentz simplificadas quedan todas ellas expresadas en metros de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(x - \beta t) \\ t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}(t - \beta x), \end{cases}$$

$$\text{donde } \beta = \frac{v}{c}. \quad (2.8)$$

En relatividad general veremos, asimismo, que la constante de gravitación universal G también se toma con valor 1. Entonces $1 \text{ kg} = 7,4 \cdot 10^{-28}$ *metros*. Así, también la masa podrá ser expresada en metros. Las tres magnitudes fundamentales pueden ser expresadas en metros gracias al sistema de unidades geométrico.

2.2.5. Causalidad y tiempo propio

Dado un sistema de referencia S , y dos sucesos A y B en dicho sistema, podemos encontrar dos sistemas S' y S'' , de tal modo que:

$$\begin{aligned} S &: t_B = t_A, \\ S' &: t'_B < t'_A, \\ S'' &: t''_B > t''_A. \end{aligned}$$

¿Qué podemos deducir de esto? Pues que dados dos sucesos resulta imposible determinar cuál de los dos ocurre *antes* de forma absoluta. Es decir, no parece existir una relación **causa-efecto**.

Sin embargo, hemos de darnos cuenta de que, en realidad, A y B no están relacionados causalmente de forma alguna. Las coordenadas en S para dichos sucesos son:

$$\left. \begin{array}{l} A : (x_A, 0) \\ B : (x_B, 0) \end{array} \right\} \text{Ninguna señal puede recorrer } x_B - x_A \text{ en tiempo } 0.$$

Por tanto, A no puede influir a B de ningún modo, al igual que A no puede ser influido por B . Gráficamente este fenómeno se muestra en la [Figura 2.1](#).

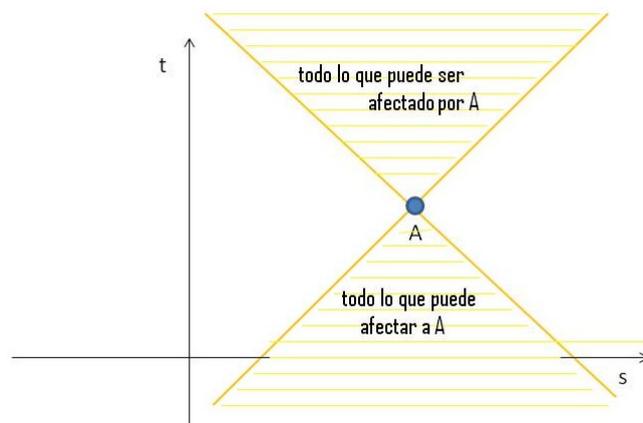


Figura 2.1: Cono de sucesos.

- Dentro del cono el orden causal sí es absoluto. Se cumple:

$$(x_B - x_A)^2 - (t_B - t_A)^2 < 0$$

- Los límites del cono son las líneas de movimiento de la luz, donde:

$$(x_B - x_A)^2 - (t_B - t_A)^2 = 0$$

- Fuera del cono no existe la causalidad y se tiene:

$$(x_B - x_A)^2 - (t_B - t_A)^2 > 0$$

Sea entonces el plano de Minkowski $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ es el producto escalar lorentziano dado por $(-, +, +, +)$ respecto de la base canónica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Entonces, un vector \vec{v} de \mathbb{L}^2 diremos que es **temporal** si $\langle v, v \rangle_L < 0$; **luminoso** si $\langle v, v \rangle_L = 0$ o **espacial** si $\langle v, v \rangle_L > 0$.

Definición 2.2.5. Sea \vec{w} un vector temporal en \mathbb{L}^2 . Diremos que \vec{w} **apunta al futuro** si $\langle \vec{w}, \vec{e}_2 \rangle_L < 0$ donde $\vec{e}_2 = (0, 1)$ para cualquier sistema de referencia inercial.

Definición 2.2.6. Sea $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{L}^2$ una curva diferenciable, es decir, α se expresa como $\alpha(u) = (x(u), t(u))$ con $u \in (a, b)$ y sean $x, t : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones \mathcal{C}^∞ . Diremos que α es una **curva temporal** si $\alpha'(u)$ es temporal $\forall u \in (a, b)$. Diremos que α **apunta hacia el futuro** si $\alpha'(u)$ apunta hacia el futuro $\forall u \in (a, b)$.

Definición 2.2.7. Una **partícula material** es una curva temporal que apunta hacia el futuro.

Definición 2.2.8. Dado α partícula material, definimos el **tiempo propio** de α como la siguiente función:

$$\tau(u) = \int (-\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle)^{\frac{1}{2}} du$$

Se tiene que $\tau : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es un cambio de parámetro, pues:

$$\tau'(u) = (-\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle)^{\frac{1}{2}} > 0$$

La reparametrización $\tilde{\alpha}(\tau) = \alpha(u(\tau))$ se dice que es la **reparametrización por tiempo propio** de la curva α . Geométricamente, τ tiene el mismo significado que el parámetro arco de la geometría clásica de curvas. Físicamente, $\tau(u)$ se corresponde con el tiempo que marca un reloj que viaja solidario con la partícula α .

2.3. Relatividad General

Tras diseñar su Teoría de la Relatividad Especial, Einstein se dio cuenta de que ésta era limitada, pues sólo era aplicable para objetos que se mueven a una velocidad constante y en una sola dirección, es decir, objetos no sujetos a ninguna fuerza ni aceleración que se mueven en el espacio-tiempo plano. Einstein quería entender el mundo, pero éste no funcionaba de esa manera, luego debía encontrar la forma de extender su teoría de la Relatividad a cualquier sistema: nació así la Teoría de la Relatividad General.

En nuestro universo, todo objeto está sometido a una fuerza omnipresente que lo mantiene todo unido: la gravedad. La gravedad nos mantiene con los pies sobre la Tierra, la gravedad mantiene la integridad del Sol, del sistema Solar y de todo el universo. Pero para incluir la gravedad en la Teoría de la Relatividad, debemos mirarla desde un ángulo totalmente nuevo. Debemos dejar de entender la gravedad como una fuerza en sí, como sostenía la teoría newtoniana, para concebirla como una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo.

2.3.1. El principio de equivalencia

Consideremos dos sistemas de referencia S y S' , donde S es inercial (digamos, es un laboratorio en el vacío del espacio), y S' es un sistema en caída libre (un laboratorio idéntico en caída libre hacia la Tierra).

Pues bien, desde el punto de vista de la mecánica newtoniana, estos dos sistemas son equivalentes. Es decir, si, por ejemplo, lanzásemos dos pelotas en dirección horizontal, la trayectoria descrita sería la misma en ambos sistemas (una línea recta).

Sin embargo, Einstein da un paso más: formula que ambos sistemas son localmente equivalentes en todos los aspectos: *todo* lo que ocurra en uno, ocurrirá de la misma forma en el otro. No hay diferencia entre los experimentos realizados (o entre la física) en el ámbito de un pequeño sistema en caída libre y en el ámbito inercial.

El principio de equivalencia puede ser también formulado de la misma forma para dos sistemas de referencia distintos digamos T y T' , donde ahora T se encuentra sometido a un campo gravitacional con gravedad g ; y T' se es un sistema de referencia uniformemente acelerado con aceleración a , donde a y g tienen la misma magnitud. Por tanto, se deducen ciertas consecuencias inmediatas:

- **La masa influye en la trayectoria de la luz y la curva.** Basta imaginar una cabina en aceleración que es atravesada por un rayo de luz perpendicular a dicha aceleración. Alguien desde dentro de la cabina observaría como la luz se curva hacia abajo.
- **Dilatación gravitatoria del tiempo.** El tiempo fluye más lentamente conforme más próximo se encuentre uno a un cuerpo con masa.

Como dato, recalcar que pese a la poca aceptación que tuviera esta teoría cuando Einstein la propuso hacia 1907, fue finalmente probada experimentalmente en 1922 cuando se demostró la desviación exacta predicha en 1919 por Einstein que sufría la luz de ciertas estrellas por la influencia de la masa del Sol.

Por tanto, si la trayectoria de las partícula y objetos se curva y es atraída por objetos con masa, no es porque éstos *posean una fuerza* llamada gravedad, como se suponía desde la época de Newton, sino porque siguen la trayectoria del espacio tiempo curvado. Es decir, *es la materia la que curva el espacio-tiempo, y es esta curvatura del espacio-tiempo la que le dice a los objetos con masa cómo moverse*. La gravedad es, por tanto, una consecuencia de la curvatura del espacio-tiempo.

No obstante, no debemos olvidar que el principio de equivalencia está formulado sólo localmente, o lo que es lo mismo, para sistemas de referencia pequeños. *¿Por qué?*

2.3.2. Las fuerzas de marea y ecuación de campo de Newton

En sistemas de referencia grandes, aparecen las **fuerzas de marea**. Para entender este fenómeno, vamos a tratarlo primero desde la gravedad clásica de Newton, es decir, sin tener en cuenta el tiempo como variable ni la curvatura del espacio.

En la teoría clásica de Newton existen dos tipos de masa: la inercial y la gravitatoria:

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a},$$

$$\vec{F}_g = G \frac{M m_g}{r^2} \vec{u}_r,$$

donde $\vec{u}_r = \frac{-\vec{r}}{r}$ es un vector unitario que apunta de m a M .

La masa inercial y la gravitatoria son proporcionales, $m_g = k m_i$, y se puede considerar G para que $k = 1$. Por tanto $m = m_g = m_i$, y tiene sentido el principio de equivalencia.

Consideremos ahora una masa M y una masa m en $(x_0, y_0, z_0) = \vec{x}_0$ y $(x, y, z) = \vec{x}$ respectivamente. Entonces,

$$\vec{F} = G \frac{M m}{r^2} \vec{u}$$

y tomando $m = 1$ se tiene:

$$\vec{A} = G \frac{M}{r^2} \vec{u} \longrightarrow \text{campo gravitacional de } M$$

Este campo admite la siguiente expresión:

$$\phi(x, y, z) = -G \frac{M}{r^2} \vec{u}$$

con $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$

Entonces, sea ∇ el operador gradiente euclídeo: $\boxed{\vec{A} = -\nabla \phi}$

Consideremos ahora una fuente del campo M en el punto $(k, 0, 0)$ del eje x del espacio tridimensional. Elegimos las unidades de modo que $GM = 1$. El campo estará dado, pues, por:

$$\vec{A}(x, y, z) = -\frac{1}{r^2} \frac{(x - k, y, z)}{r}$$

siendo $r = \sqrt{(x - k)^2 + y^2 + z^2}$

La **fuerza de marea** representa la aceleración (y fuerza si $m = 1$) relativa a un observador en el origen tal y como la experimenta en el punto (x, y, z) . La expresamos así:

$$\vec{T}(x, y, z) = \vec{A}(x, y, z) - \vec{A}(0, 0, 0) \quad (2.9)$$

Si simplificamos tomando $z = 0$, podemos expresarlo gráficamente como muestra la [Figura 2.2](#).

Las fuerzas de marea en un punto genérico tienen la siguiente forma: Sea (α, β, γ) un vector unitario y $\varepsilon > 0$,

$$\vec{T}(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma) = \vec{A}(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma) - \vec{A}(0, 0, 0)$$

Y por Taylor:

$$\vec{T}(\varepsilon\alpha, \varepsilon\beta, \varepsilon\gamma) \approx \varepsilon d\vec{A}_{(0,0,0)}(\alpha, \beta, \gamma) = \varepsilon \left(\frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} =$$

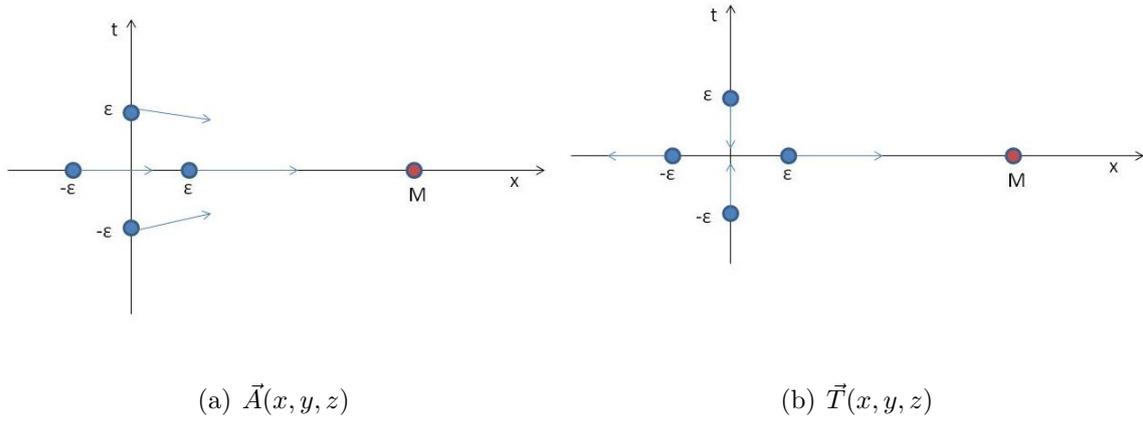


Figura 2.2: Campo gravitacional y aceleración producida por una masa M.

$$\varepsilon \left(\alpha \left(\frac{2}{k^3}, 0, 0 \right) + \beta \left(0, \frac{-1}{k^3}, 0 \right) + \gamma \left(0, 0, \frac{-1}{k^3} \right) \right)$$

Y tomando $z = 0$, $\alpha = \cos \theta$, $\beta = \sin \theta$ queda:

$$\vec{T}(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta, 0) = \frac{\varepsilon}{k^3} (2 \cos \theta, -\sin \theta, 0)$$

Si consideramos ahora puntos cercanos al origen situados en los distintos ejes, tenemos por ejemplo para el eje y :

$$\vec{T}(0, \varepsilon, 0) = \vec{A}(0, \varepsilon, 0) - \vec{A}(0, 0, 0) \approx \frac{\partial A}{\partial y}(0, 0, 0)\varepsilon$$

Y con unas sencillas cuentas se comprueba que

$$\frac{\partial A}{\partial y}(0, 0, 0) = -\frac{1}{k^3}(0, 1, 0)$$

Por lo que:

$$\vec{T}(0, \varepsilon, 0) \approx -\frac{\varepsilon}{k^3}(0, 1, 0)$$

Y de forma análoga, para el eje z :

$$\vec{T}(0, 0, \varepsilon) \approx -\frac{\varepsilon}{k^3}(0, 0, 1)$$

Ambos representan una aceleración hacia el origen de coordenadas que es proporcional al desplazamiento ε e inversamente proporcional al cubo de la distancia.

Para el eje x , sin embargo sucede distinto:

$$\vec{T}(\varepsilon, 0, 0) \approx -\frac{2\varepsilon}{k^3}(1, 0, 0)$$

La aceleración tiene dirección opuesta al origen y es proporcional al desplazamiento ε e inversamente proporcional a la distancia.

Ahora bien, sabemos que $\vec{A} = -\nabla\phi = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$. Por tanto en el origen se tiene:

$$\nabla^2\phi = \Delta\phi = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = -\frac{2}{k^3} + \frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3} = 0$$

Y esto es válido para cualquier punto. Por tanto, **el balance neto de las fuerzas de marea en cualquier punto alejado de la fuente es cero: $\nabla^2\phi(x, y, z) = 0, \forall(x, y, z)$.**

¿Qué ocurre cuando se dan más fuerzas?

Supongamos que se tienen n masas M_1, M_2, \dots, M_n y cada M_i se encuentra en el punto (x_i, y_i, z_i) . Al ser la gravedad clásica lineal, se sigue:

$$\phi = \sum_{i=1}^n \phi_i,$$

$$\nabla^2\phi = \sum_{i=1}^n \underbrace{\nabla^2\phi_i}_{0 \forall i} = 0.$$

Esta ecuación se cumple de igual modo para distribuciones continuas de materia. Finalmente la **ecuación de campo Newton en el vacío** es:

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{2.10}$$

Verificándose $\nabla\phi = \vec{A}$.

2.3.3. Caso clásico

De la ecuación 2.10 deducimos que la gravedad newtoniana no es consistente con la relatividad especial. Esta ecuación no tiene una dependencia explícita con el tiempo, lo que significa que el potencial ϕ , y por tanto la fuerza, responden de manera instantánea a cualquier alteración de la densidad de materia. Esto viola el principio de que ninguna señal física puede propagarse a velocidades más rápidas que la de la luz.

Einstein sostiene que las partículas libres se mueven siguiendo **geodésicas**. Así, distintas partículas sometidas a las fuerzas de marea se moverían, según el eje en el que se encuentren, de la forma que se muestra en la [Figura 2.3](#).

Vamos a analizar como se *dispersan* dos trayectorias vecinas, primero en tiempo clásico y a continuación buscaremos analogías en el espacio tiempo con curvatura.

La trayectoria de una partícula viene determinada por el potencial gravitatorio $\phi(x)$ con $x = (x^i)$. Estas trayectorias satisfacen la siguiente ecuación, que escribiremos de forma de componentes y en forma vectorial respectivamente:

$$\frac{d^2x^k}{dt^2}(t, s) = -\frac{\partial\phi}{\partial x^k}(X(t, s)) \quad k = 1, 2, 3$$

$$\frac{d^2X}{dt^2}(t, s) = -\nabla\phi(X(t, s))$$

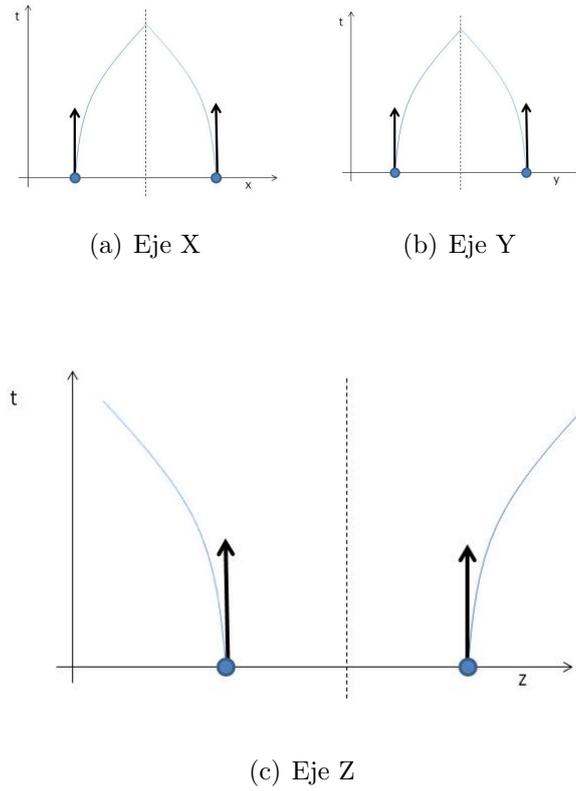


Figura 2.3: Trayectorias de partículas libres sometidas a fuerzas de marea

Tomamos ahora una trayectoria vecina $X(t, s + \Delta s)$ y las restamos y dividimos por Δs para determinar cómo se separan:

$$\frac{1}{\Delta s} \left(\frac{d^2 x^k}{dt^2}(t, s + \Delta s) - \frac{d^2 x^k}{dt^2}(t, s) \right) = -\frac{1}{\Delta s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^k}(X(t, s + \Delta s)) - \frac{\partial \phi}{\partial x^k}(X(t, s)) \right)$$

Haciendo $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial x^k}{\partial s}(t, s) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial x^k}(X(t, s))$$

Y por la regla de la cadena:

$$-\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial s}(t, s) \quad k = 1, 2, 3$$

Ésto son tres ecuaciones que se resumen en:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial X}{\partial s} = - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^k \partial x^j}(X(t, s)) \right) \frac{\partial X}{\partial s} \quad (2.11)$$

O lo que es lo mismo:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial X}{\partial s} + (Hess\phi) \frac{\partial X}{\partial s} = 0$$

Y sabemos por 2.10 que la traza de la matriz Hessiana es cero.

2.3.4. Ecuación campo Einstein

Antes de continuar con los siguientes pasos, vamos a introducir dos algunas nociones de Geometría Diferencial que nos ayudarán en nuestras posteriores cuentas. Trabajaremos con la notación del libro de Barrett O'Neill [5].

Definición 2.3.1. Sea (M, g) una variedad con una métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ y sea ∇ la única conexión simétrica y compatible con la métrica, se define el **operador curvatura R** como:

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_X Z \quad (2.12)$$

Definición 2.3.2. Sea (M, g) una variedad y $\mathfrak{X}(M)$ un campo, se define el **tensor curvatura de Riemann** de tipo $(1, 3)$, como la función $R : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, donde, para cada (θ, X, Y, Z) :

$$R(\theta, X, Y, Z) = \theta(R(X, Y), Z)$$

Ésta es la **versión mixta** del tensor de Riemann. La **versión covariante**, de tipo $(0, 4)$ se define como la función $R : \mathfrak{X}(M)^4 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$, que lleva cada (X, Y, Z, W) a:

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

Definición 2.3.3. Dada (M, g) una variedad con una métrica y dado R el tensor de Riemann, se define el **tensor de Ricci** como el tensor $(0, 2)$ cuyas componentes son:

$$(Ric)_{ij} = \sum_m R_{ijm}^m \quad (2.13)$$

En términos del tensor de Riemann covariante, el tensor de Ricci se escribe así:

$$Ric(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R(X, E_m)Y, E_m \rangle \quad (2.14)$$

En nuestro caso, para la variedad lorentziana (M^4, g) se tiene $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ y $\varepsilon_1 = -1$, luego:

$$Ric(X, Y) = -\langle R(X, E_1)Y, E_1 \rangle + \sum_{j=2}^4 \langle R(X, E_j)Y, E_j \rangle$$

Lema 2.3.4 (Simetría). Sea M una variedad diferenciable con una conexión simétrica ∇ y $s : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ una superficie parametrizada, se verifica:

$$\frac{D}{\partial v} \frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u} \frac{\partial s}{\partial v}$$

Demostración. Sea $x : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ un sistema de coordenadas en un entorno de un punto de $s(A)$, podemos escribir:

$$x^{-1} \circ s(u, v) = (x^1(u, v), \dots, x^n(u, v))$$

Luego:

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial v} \left(\frac{\partial s}{\partial u} \right) &= \frac{D}{\partial v} \left(\sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_i \frac{\partial^2 \partial x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial u} \nabla_{\sum_i \frac{\partial x^j}{\partial v} \frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \\ &= \sum_i \frac{\partial^2 \partial x^i}{\partial v \partial u} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Por la simetría de la conexión se tiene $\sum_k \Gamma_{ji}^k \partial x_k = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial x_k$, luego $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}$. Por ende, si calculamos $\frac{D}{\partial u} \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)$ obtenemos el mismo resultado de arriba, y así queda probado el lema. \square

Lema 2.3.5. Sea $X(s, t)$ una superficie en M y $V \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, se tiene:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R \left(\frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) V$$

donde R es el tensor curvatura de Riemann, $R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$.

Demostración. Se tiene $V = \sum_i v^i \partial x_i$ con $v^i = v^i(s, t)$, luego:

$$\frac{D}{\partial s} V = \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} \partial x_i + \sum_i v^i \frac{D}{\partial s} (\partial x_i)$$

Sean ahora:

$$(1) \quad \frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial s} V \right) = \sum_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial t \partial s} (\partial x_i) + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{D}{\partial s} (\partial x_i) + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} \frac{D}{\partial t} (\partial x_i) + \sum_i v^i \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} (\partial x_i)$$

$$(2) \quad \frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} V \right) = \sum_i \frac{\partial^2 v^i}{\partial s \partial t} (\partial x_i) + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial s} \frac{D}{\partial t} (\partial x_i) + \sum_i \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{D}{\partial s} (\partial x_i) + \sum_i v^i \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} (\partial x_i)$$

Haciendo la diferencia:

$$(1) - (2) = \sum_i v^i \left(\underbrace{\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} (\partial x_i)}_{(A)} - \underbrace{\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} (\partial x_i)}_{(B)} \right)$$

Ahora, para **(A)**, se tiene:

$$\frac{D}{\partial s} (\partial x_i) = \nabla_{\frac{\partial X}{\partial s}} (\partial x_i) = \nabla_{\sum_j \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial s} \nabla_{\partial x_j} \partial x_i$$

$$\frac{D}{\partial t} \left(\frac{D}{\partial s} \partial x_i \right) = \sum_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial t \partial s} \nabla_{\partial x_j} \partial x_i + \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial s} \nabla_{\frac{\partial X}{\partial t}} (\nabla_{\partial x_j} \partial x_i) =$$

$$= \sum_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial t \partial s} \nabla_{\partial x_j} \partial x_i + \sum_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} \nabla_{\partial x_k} (\nabla_{\partial x_j} \partial x_i)$$

Y análogamente para **(B)** obtenemos:

$$\frac{D}{\partial s} \left(\frac{D}{\partial t} \partial x_i \right) = \sum_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial s \partial t} \nabla_{\partial x_j} \partial x_i + \sum_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial t} \frac{\partial x^k}{\partial s} \nabla_{\partial x_k} (\nabla_{\partial x_j} \partial x_i)$$

Y haciendo (A) - (B) el primero término se cancela, pues las segundas derivadas son conmutativas y la conexión ∇ es simétrica. Queda pues:

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} (\partial x_i) - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} (\partial x_i) = \sum_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} (\nabla_{\partial x_k} \nabla_{\partial x_j} \partial x_i - \nabla_{\partial x_j} \nabla_{\partial x_k} \partial x_i)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \right) V &= \sum_i v^i \left(\sum_{j,k} \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^k}{\partial t} R(\partial x_j, \partial x_k) \partial x_i \right) = \\ &= R \left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s} \partial x_j, \sum_k \frac{\partial x_k}{\partial t} \partial x_k, \sum_i v^i \partial x_i \right) = \\ &= R \left(\frac{\partial X}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial t} \right) V. \end{aligned}$$

Y queda demostrado el lema. □

Bien, sabemos pues que en \mathbb{R}^3 , con ϕ función potencial solución de $\Delta\phi = \nabla^2\phi = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) &= - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \end{array} \right. & \quad (2.15) \end{aligned}$$

El siguiente paso es intentar buscar analogías en \mathbb{M}^4 , el espacio-tiempo con curvatura, es decir, con masas (recordemos que la masa es la que curva el e-t).

Recordar, asimismo, que una partícula libre en este espacio, digamos de coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) , se mueven siguiendo la trayectoria de una geodésica, cuya ecuación es:

$$\frac{d^2x^k}{d\tau^2} + \sum_{i,j=1}^4 \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0$$

Así pues, si buscamos analogías con 2.15, es claro que la métrica g_{ij} debe cumplir la función de ϕ , pues Γ_{ij}^k va a ser análogo a $\partial\phi/\partial x^k$ y se tiene:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right)$$

Además, como en la ecuación de campo en 2.15 se deduce de las segundas derivadas de ϕ , (ésto es $\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$), se puede deducir que la ecuación de campo de Einstein va a implicar las segundas derivadas de la métrica g .

Retomando el concepto de geodésica, recordemos que una de las propiedades de la misma es que su aceleración es nula. Sea entonces $X(s, t)$ una variación por geodésicas, donde cada $X(s, \circ)$ es una geodésica parametrizada por el tiempo propio τ . Así, por ser geodésica:

$$\frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial\tau} = 0 \quad (2.16)$$

Y $V = \frac{\partial X}{\partial s}(0, \tau)$ es el campo variacional de la variación por geodésicas $X(s, t)$.

Haciendo la parcial de s a ambos lados de la ecuación 2.16:

$$0 = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial\tau}$$

A continuación aplicamos el Lema 2.3.5 y el Lema de Simetría (así como la simetría del tensor R) para la primera y segunda igualdad, respectivamente:

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial\tau} = \frac{D}{\partial\tau} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial\tau} - R \left(\frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial\tau} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau} = \frac{D}{\partial\tau} \frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial s} + R \left(\frac{\partial X}{\partial\tau}, \frac{\partial X}{\partial s} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau}$$

De donde finalmente obtenemos la ecuación de Jacobi:

$$\frac{D^2}{\partial\tau^2} \frac{\partial X}{\partial s} + R \left(\frac{\partial X}{\partial\tau}, \frac{\partial X}{\partial s} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau} = 0 \quad (2.17)$$

Esta ecuación es cierta para cualquier variación de geodésica $X(\tau, s)$ y el segundo sumando es una expresión tensorial.

Multiplicando la ecuación 2.17 de forma escalar por un campo Z :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \frac{D^2}{\partial\tau^2} \frac{\partial X}{\partial s}, Z \right\rangle + \left\langle R \left(\frac{\partial X}{\partial\tau}, \frac{\partial X}{\partial s} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau}, Z \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{D^2}{\partial\tau^2} X, Z \right\rangle + \langle R(Y, X)Y, Z \rangle \end{aligned}$$

La correspondiente ecuación clásica es 2.11:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial X}{\partial s} + (Hess\phi) \frac{\partial X}{\partial s} = 0$$

En gravedad clásica, la ecuación de campo se corresponde con $tr(Hess\phi) = \nabla^2\phi = 0$, luego, si buscamos analogías entre esta ecuación y la 2.17, parece razonable pedir lo mismo para el operador R siempre y cuando sea posible.

Por las bien conocidas simetrías del tensor R :

$$\langle R(Y, X)Y, Z \rangle = \langle R(X, Y)Z, Y \rangle$$

Y hacer la traza en Y , tomando un referencial ortonormal E_1, E_2, E_3, E_4 se corresponde con:

$$Ric(X, Z)$$

En analogía con el caso clásico, donde la ecuación de campo es $tr(Hess\phi) = \nabla^2\phi = 0$, hacemos:

$$Ric(X, Z) \equiv 0$$

Como esto es válido para cualesquiera X e Z campos, finalmente obtenemos la **ecuación de campo de Einstein**:

$$Ric \equiv 0 \tag{2.18}$$

Se debe aclarar, sin embargo, que esta ecuación es sólo válida en el vacío. Es decir, para un punto en es espacio que se encuentra sometido a masas/energía, pero en el cual no hay materia. A lo largo del capítulo siguiente estudiaremos la ecuación de campo de Einstein general.

Capítulo 3

Modelos del Universo

3.1. El universo a gran escala.

Como vimos en el [Capítulo 1](#), la cosmología se ocupa del estudio de la estructura y la evolución del universo a grandes escalas del espacio y el tiempo. Así mismo, en el [Capítulo 2](#), se ha recalcado cómo la gravedad gobierna la estructura del universo a dichas escalas así como determina su evolución. *La relatividad general es, por tanto, esencial para la cosmología, y la cosmología es uno de las aplicaciones más importantes de la relatividad general.* En este capítulo, nos apoyaremos en el libro *Gravity* de J.B. Hartle[4] para abordar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento y evolución del universo desde sus inicios teniendo en cuenta tres hechos observacionales básicos:

- El universo está formado por estrellas y gas confinados a causa de la gravedad en cúmulos de masa (galaxias), radiación, materia oscura y energía del vacío.
- El universo se encuentra en **expansión**.
- A gran escala, el universo es **isotrópico** (es igual en tanto en una dirección como en otra) y **homogéneo** (ningún lugar es más especial que cualquier otro, lo mismo ocurre en cierto lugar que en cualquier otro).

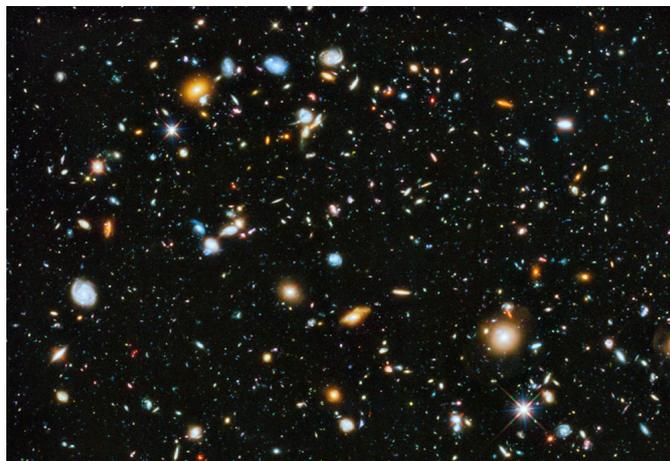


Figura 3.1: The Hubble Deep Field. Fotografía obra del telescopio espacial Hubble, quizás la más convincente imagen de que vivimos en un universo formado por galaxias [4].

3.2. La expansión cósmica y la Ley de Hubble.

Según la teoría del Big Bang, el Universo se originó en una singularidad espaciotemporal de densidad infinita matemáticamente paradójica que tras una “gran explosión” (*big bang* en inglés) se ha expandido desde entonces. Algunas de las evidencias más importantes de esta gran explosión son la recesión de las galaxias, la nucleosíntesis ¹ y la radiación cósmica de microondas ².

Así, como consecuencia de la expansión cósmica del Big Bang, las galaxias se encuentran en recesión. Por tanto, la radiación emitida por una galaxia en movimiento opuesto al receptor sufrirá un **desplazamiento al rojo** o *redshift*, cuyo factor denominamos z . Si λ_{obs} es la longitud de onda observada y λ_{em} es la longitud de onda emitida:

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} \quad (3.1)$$

En el caso del desplazamiento al rojo, $z > 0$ (para $z < 0$ estaríamos hablando de *blueshift*, que es el caso en el cual la fuente se mueve en dirección al receptor).

La velocidad relativa con la que se mueve la galaxia, v , se relaciona con z mediante la fórmula de Doppler:

$$v \approx cz$$

La **Ley de Hubble** relaciona la distancia a la que se encuentra una galaxia de cierto observador con la velocidad de recesión con que se aleja del mismo:

$$v = H_0 d \quad (3.2)$$

Donde H_0 es la constante de Hubble. De esta ecuación deducimos que el *redshift* es una medida de distancia, pues:

$$d = \frac{cz}{H_0}$$

Por tanto, calculando el desplazamiento al rojo de cierta galaxia se puede determinar su distancia. Además, la Ley de Hubble permite calcular (con cierto error) la edad del universo haciendo:

$$t_{edad} \sim \frac{1}{H_0}$$

EL valor aproximado actual de H_0 es $H_0 \approx 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (*megaparsecs*³), lo cual hace $t_{edad} \approx 13,8 \text{ Gyr}$.

¹La nucleosíntesis es la formación de núcleos a partir de protones y neutrones que estaban hasta entonces libres, pero esto no nos ocupará en nuestro trabajo.

²La radiación electromagnética principal (fotones) se desacoplaron de la materia cuando se formaron los primeros átomos, unos 400.000 años tras el Big Bang. Este es el momento en el que *se libera la luz*

³Los parsecs son una unidad de medida usada convencionalmente en distancias intergalácticas. Un parsec son $3,08 \times 10^{18} \text{ cm} = 3,26 \text{ años-luz}$, medida que se corresponde con la distancia a la Tierra de la estrella más cercana. Y un megaparsec es un millón de parsecs. Los parsecs son, por tanto, una herramienta de medida muy intuitiva.

3.3. Geometría y dinámica del universo plano

3.3.1. La geometría del universo plano

Como se ha visto en la [Sección 3.2](#), el universo es isotrópico y homogéneo. Éstas son las bases que conforman el **principio cosmológico**. El principio cosmológico es un principio copernicano ([Capítulo 1](#)), pues nos dice que nuestro lugar en el universo no es especial respecto a ningún otro.

La métrica del espacio-tiempo más compatible con el principio cosmológico es la **métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW)**. Vamos a abordar primero el modelo *plano* (curvatura nula):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3.3)$$

Donde $a(t)$ es una función del tiempo denominada *factor de escala*. El factor de escala está determinado por las ecuaciones de campo de la Relatividad General y veremos más que su forma depende de las propiedades de la materia y radiación (el *fluido cósmico*) y estudiaremos su comportamiento.

Vamos a estudiar, a continuación, la propagación de la luz y el desplazamiento al rojo en esta métrica. Para ello reescribiremos la [Ecuación 3.3](#) en coordenadas polares:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 [dr^2 + r^2(d\theta + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (3.4)$$

Podemos considerar, sin pérdida de generalidad a un observador en el origen de coordenadas $(0, 0, 0)$ y otro en (χ, θ, φ) . La *distancia propia* entre ambos es:

$$D(t) = a(t)\chi$$

Y de aquí sigue que la velocidad relativa entre ambos es:

$$\frac{dD(t)}{dt} = \dot{a}(t)\chi$$

Y por la Ley de Hubble:

$$v = H(t)D(t)$$

Luego el parámetro de Hubble es:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (3.5)$$

Supongamos ahora que un fuente en $(\chi_e, \theta_e, \varphi_e)$ emite un pulso de luz en $t = t_e$ y otro en $t = t_e + \Delta t_e$ que llegan hasta un observador en $(0, 0, 0)$ en los tiempos t_0 y $t = t_0 + \Delta t_0$, respectivamente, tal y como muestra la [Figura 3.2](#)

De acuerdo con la métrica de FRW, la propagación radial del pulso de luz viene descrita por:

$$cdt = \pm a(t)d\chi$$

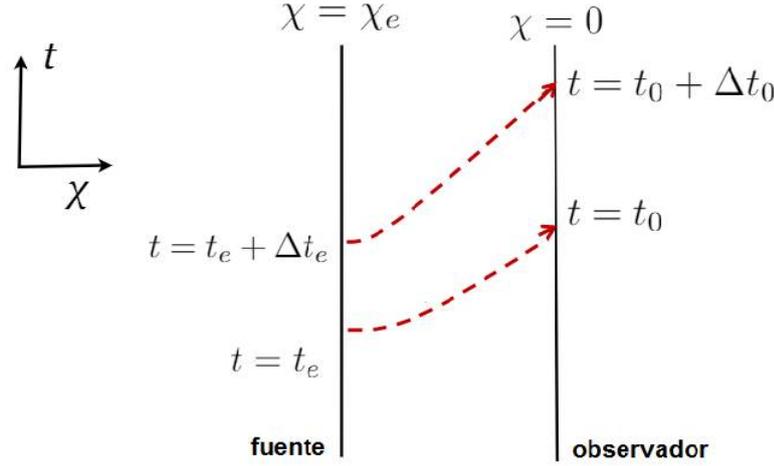


Figura 3.2: Dos observadores intercambiando pulsos de luz en un universo en expansión [6].

Integrando para el rayo de luz anterior:

$$\varphi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} + \frac{c\Delta t_0}{a_0} - \frac{c\Delta t_e}{a_e}$$

Donde $a_e = a(t_e)$ y $a_0 = a(t_0)$. Con lo cual se tiene:

$$\frac{c\Delta t_0}{a_0} - \frac{c\Delta t_e}{a_e} = 0 \implies \frac{\Delta t_0}{a_0} = \frac{\Delta t_e}{a_e} \implies \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{a_0}{a_e}$$

Lo cual escrito en forma de longitud de onda es:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e}$$

. Y por 3.1:

$$1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a_0}{a_e} \quad (3.6)$$

Es decir, el desplazamiento al rojo depende tan sólo del factor de escala en $\chi = 0$ y $\chi = \chi_e$, decir, de a_0 y a_e , y no del $a(t)$ entre ellos.

La idea ahora es aproximar la fórmula del desplazamiento al rojo (3.6) a un punto cercano al tiempo presente t_0 . Sea $1 + z = a_0/a(t)$, la expansión de Taylor de $a(t)$ nos conduce a :

$$a(t) = a_0 + \dot{a}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}_0(t - t_0)^2 + \dots = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}H_0^2 q_0(t - t_0)^2 + \dots \right]$$

Donde $\Delta t = t_0 - t$ y se definen la constante de Hubble y el **parámetro de deceleración**, respectivamente:

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0}, \quad q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}_0}{H_0^2 a_0}$$

Notar también que se supone $H_0 \Delta t \ll 1$, es decir, la emisión de luz tuvo lugar en un pasado "reciente". Así,

$$\frac{a_0}{a(t)} = 1 + H_0 \Delta t + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (\Delta t)^2 + \dots$$

Y la expresión para el redshift buscada es:

$$z(t) = H_0 \Delta t + \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) H_0^2 (\Delta t)^2 + \dots$$

Lo cual nos muestra que z puede ser usado para *medir* el pasado cósmico.

Usando ahora la expansión de $a(t)$ para la emisión de luz desde χ_e :

$$\chi_e = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \frac{c\Delta t}{a_0} \left[1 + \frac{1}{2}H_0\Delta t + \dots\right] \quad \text{donde } \Delta t = t_0 - t_e$$

Finalmente, se tiene, por tanto, para una fuente de emisión no demasiado lejana (es decir, *no demasiado lejos en el pasado*):

$$z_e \approx H_0 \Delta t \equiv \text{desplazamiento al rojo de la fuente}$$

$$d_e \equiv a_0 \chi_e \approx c\Delta t \equiv \text{distancia de la fuente en el tiempo presente}$$

Y ambos parámetros están relacionados por:

$$d_e \approx \frac{cz_e}{H_0}$$

Por último, debemos relacionar ambos términos con la velocidad radial en $t = t_e$:

$$v_e = \dot{a}\chi_e$$

De la expansión de Taylor:

$$\dot{a}(t) = a_0 [H_0 - H_0^2 q_0 (t - t_0)^2 + \dots]$$

Luego $\dot{a}_e \approx a_0 H_0$ y por tanto obtenemos la Ley de Hubble:

$$v_e \approx H_0 d_e \approx cz_e$$

Antes de abordar la dinámica y evolución del universo plano, vamos a introducir, sin adentrarnos en detalles (pues se escaparía de nuestros objetivos), unos conceptos que nos ayudarán a entender la naturaleza de la Ecuación General de Campo de Einstein (un paso más allá de la que vimos en el [Capítulo 2](#)).

3.3.2. Fluidos perfectos

Primeramente, introduciremos algunos conceptos necesarios para esta sección.

Definición 3.3.1. *Un **continuo** es una colección de partículas tan numerosa que es imposible seguir la dinámica individual de cada una de ellas y sólo nos queda atender a una descripción en términos de medias: densidad de materia, energía, temperatura, presión.*

Estas propiedades medias varían punto a punto (por ejemplo, la presión o temperatura de la atmósfera). Se toma así una colección suficientemente pequeña como para que sea homogénea y lo suficientemente grande para que no importen las partículas individuales. Esto se llama un elemento: un punto matemático con varios campos asignados.

Definición 3.3.2. *Se define un **fluido** como de medio continuo formado por alguna sustancia entre cuyas moléculas sólo hay una fuerza de atracción débil.*

Un fluido fluye: elementos adyacentes deslizan en paralelo a la interfaz que los separa. Dos elementos adyacentes se pueden atraer/empujar y esta fuerza es grande, pero la componente tangencial (rozamiento y viscosidad) es muy débil.

Definición 3.3.3. *Se define un **fluido perfecto** como un fluido con viscosidad cero, ausencia de fuerzas tangenciales y sin conducción de calor. La única fuerza entre dos elementos vecinos es la presión.*

En física clásica la única fuente que genera gravedad es la masa de la materia. En relatividad general, las fuentes provienen de la energía y del momento de la materia. Recordemos que la relatividad especial establece una relación entre la masa y la energía por un lado, y por otro lado, establece el vector energía-momento como aquel que caracteriza el estado dinámico de una partícula. La cuestión que nos interesa a nosotros es: *¿de qué manera está afectada la geometría de un espacio-tiempo dada una distribución de energía y momento?*

Para responder a esta cuestión es necesario considerar el **tensor tensión-energía** T , una construcción elaborada por Einstein para formular la ecuación de campo general de su teoría. El tensor T se define del siguiente modo:

Dada u una dirección temporal unitaria (Subsección 2.2.5), podemos descomponer el espacio-tiempo de la forma:

Sea α una partícula material parametrizada por el tiempo propio, llamada observador con:

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= p \\ \alpha'(0) &= \vec{u}\end{aligned}\tag{3.7}$$

El tensor T es de tipo $(0, 2)$ y sus componentes en relación al observador α y en el punto p serían:

$$\begin{aligned}T_p(\vec{u}, \vec{u}) &\equiv \text{densidad de energía según el observador } \alpha \\ T_p(\vec{v}, \vec{w}) &\equiv \text{tensor clásico de tensión}^4 \text{ para los vectores } \vec{v}, \vec{w} \in \vec{u}^\perp\end{aligned}\tag{3.8}$$

En líneas generales la representación explícita del tensor T es una tarea imposible. Sin embargo, bajo determinadas circunstancias, es relativamente sencillo encontrar una expresión para T en términos globales. Dichas circunstancias son las siguientes:

Pensemos que la distribución de la materia tiene las características de un **fluido**. El flujo de un fluido puede ser modelado por un campo vectorial \vec{u} en el espacio-tiempo. El campo \vec{u} es temporal y representa la 4-velocidad (el vector energía-momento) de un elemento del fluido. Las curvas integrales de \vec{u} representan (en media) las líneas del universo de las partículas que constituyen el fluido. En estas condiciones, para $m \in M$:

- 1) $T_m(\vec{u}, \vec{u}) = \rho(m) \equiv \text{densidad}$
- 2) Si $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{u}^\perp$,
 $T_m(\vec{v}, \vec{w}) = p(m)\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, donde $p \equiv$ presión en m
- 3) Si $\vec{v} \in \vec{u}^\perp$,
 $T_m(\vec{u}, \vec{v}) = T_m(\vec{v}, \vec{u}) = 0$

La demostración y justificación de estas afirmaciones excede las pretensiones de este trabajo.

⁴El tensor clásico de tensión mide las fuerzas internas en un cuerpo en un punto p dando a cada elemento de la superficie $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ la fuerza ejercida, es decir, la presión.

Bajo estas condiciones, el tensor covariante T de tipo $(0, 2)$ se expresa:

$$T \equiv \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Observemos que T es un tensor simétrico. Además, cumple una propiedad muy importante: su divergencia como tensor $(0, 2)$ es cero. Esto es consecuencia de la conservación de la energía-momento. Es frecuente utilizar la versión $(2, 0)$ del tensor T . En estas circunstancias, T se escribe:

$$T^{\alpha\beta} = (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta} \quad (3.10)$$

A continuación se ilustra un ejemplo que nos ayudará a entender conceptos posteriores.

Ejemplo 3.3.2.1. La ecuación 3.10 del tensor tensión-energía satisface:

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0 \quad (3.11)$$

donde ∇_β es la derivada covariante. Esta relación se llama la **conservación local de la energía-momento**. A continuación, vamos a abordar el caso en el cual la ecuación 3.11 describe cómo, a medida que el universo se expande, disminuye la densidad de energía y la temperatura de la *radiación cósmica de microondas* (Capítulo 1).

Sea $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$ en una cosmología homogénea e isotrópica. La geometría de este modelo es, como vimos en Subsección 3.3.1:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

La fuente de curvatura es un fluido perfecto, homogéneo e isotrópico de energía de materia, radiación y vacío⁵, cuya tensión-energía $T^{\alpha\beta}$ viene dado por 3.10.

De forma consistente con la homogeneidad, la densidad de energía $\rho(t)$ y presión $p(t)$ son funciones del tiempo. De acuerdo con la isotropía y, de nuevo, con la homogeneidad, la 4-velocidad del fluido se puede escribir como $\vec{u} = (1, 0, 0, 0)$. Por tanto, los términos no cancelables de $T^{\alpha\beta}$ son:

$$T^{tt} = \rho(t), \quad T^{ij} = g^{ij}p(t) = \delta^{ij}[p(t)/a^2(t)]$$

Podemos reescribir 3.11 usando una componente del tiempo t :

$$\nabla_\beta T^{t\beta} = \frac{\partial T^{t\beta}}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^t T^{\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\beta T^{t\beta} = 0 \quad (3.12)$$

Los únicos símbolos de Christoffel que no se cancelan son:

$$\Gamma_{ij}^t = a\dot{a}\delta_{ij}, \quad \Gamma_{jt}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i$$

Y 3.12 se transforma en:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}p + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad (3.13)$$

⁵En secciones posteriores se tratarán con más detalle estos tres tipos de energía.

o, equivalentemente:

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -p \frac{da^3}{dt} \quad (3.14)$$

Si consideramos el fluido en un pequeño volumen coordinado $\Delta\mathcal{V}_{coord} = \Delta x \Delta y \Delta z$ que ocupa un volumen físico $\Delta\mathcal{V} = a^3(t) \Delta\mathcal{V}_{coord}$ y éste incrementa con el tiempo a medida que el universo se expande, debido al factor escala. La energía en ese volumen es: $\Delta E(t) = \rho(t) \Delta\mathcal{V}(t)$. Y multiplicando la ecuación anterior por $\Delta\mathcal{V}_{coord} dt$:

$$d(\Delta E(t)) = -p(t) d(\Delta\mathcal{V}(t)). \quad (3.15)$$

Ésta es la **primera ley de termodinámica** que expresa cómo la energía de un elemento de fluido disminuye por el trabajo hecho contra la presión mientras se expande.

3.3.3. La ecuación de campo general

En el [Capítulo 2](#) hemos deducido la ecuación de campo de Einstein (2.18), sin embargo, esta ecuación es sólo válida para el vacío, donde una partícula no es afectada por ninguna masa. La ecuación de campo general de la relatividad general planteada por Einstein es:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \quad (3.16)$$

Donde c , G son constantes. Mas 3.16 puede ser reescrita usando unidades geométricas ([Subsección 2.2.4](#)). Además, la ecuación refeq campo nc es la forma contravariante de la ecuación de campo. A continuación, se ilustra la forma covariante en unidades geométricas, y ésta será con la que trabajaremos a partir de ahora:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.17)$$

A su vez, $G_{\mu\nu} = Ric_{\mu\nu} - \frac{1}{2} S g_{\mu\nu}$, luego la reescribiremos usando esa extensión para especificar cada término:

$$Ric - \frac{1}{2} S g = 8\pi T \quad (3.18)$$

- Ric y g son tensores $(0, 2)$ simétricos al igual que T .
- S es la curvatura escalar que se obtiene haciendo:

$$S = \sum g_{\mu\nu} Ric_{\mu\nu}$$

- El tensor G tiene divergencia cero:

$$div(G) = div(Ric) - \frac{1}{2} div(Sg) = 0$$

- El valor 8π ($8\pi G/c^4$) en unidades geométricas (unidades convencionales, respectivamente) aparece al trabajar en el límite newtoniano (campo debil, velocidad baja).
- Si $T \equiv 0$, es decir, el caso del vacío:

$$Ric - \frac{1}{2} S g = 0$$

Y multiplicando por $g_{\mu\nu}$, se llega a:

$$Ric_{\mu\nu} \equiv 0$$

Que es la ecuación de campo(2.18) deducida en el [Capítulo 2](#).

Sin embargo, la versión más moderna de esta ecuación, y con la que trabajaremos de aquí en adelante, contiene un término más: la **constante cosmológica**. La ecuación de campo queda, pues:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.19)$$

La constante cosmológica, normalmente denotada por Λ , es el valor de la densidad de energía del vacío en el espacio. Fue introducida por primera vez en 1917 por Einstein en su teoría de la Relatividad General para conseguir el universo estático, que era el modelo aceptado por entonces. Este concepto se abandonó tras el descubrimiento de Hubble de la recesión de las galaxias y no fue hasta los años noventa que la constante cosmológica dejó de ser considerada nula, cuando la aceleración de esta recesión llevó a los científicos a la conclusión de que gran parte de ella es causada por la energía oscura que funciona como “anti-gravedad”. La constante cosmológica es la forma más sencilla de energía oscura al ser constante en el espacio y el tiempo, y conduce al modelo cosmológico actualmente aceptado que casa correctamente con diversas observaciones cosmológicas.

3.3.4. Dinámica y evolución del universo plano.

Usando la ecuación de Einstein(3.17) y la primera ley de termodinámica (3.15), se deduce la ecuación que describe el comportamiento del factor escala $a(t)$ para un modelo del universo plano que sigue la métrica FRW:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3}a^2 = 0 \quad (3.20)$$

Donde $\dot{a} = da/dt$ y ρ es la densidad total de la energía.

Si tomamos la [Ecuación 3.20](#) evaluada en t_0 (tiempo presente) y la dividimos por $a^2(t_0)$ obtenemos:

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho_0}{3} = 0 \quad (3.21)$$

Esta ecuación nos proporciona una interesante conexión entre la densidad total actual ρ_0 de un modelo FRW plano y la constante de Hubble definida en [3.5](#). La densidad actual se denomina **densidad crítica** y vale:

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi} = 1,88 \times 10^{-29} h^2 g/cm^3 \quad (3.22)$$

Esta densidad se compone, como sabemos, de las densidades de materia, radiación y vacío (ρ_m , ρ_r y ρ_v , respectivamente). Las fracciones relativas en el momento presente son denotadas por:

$$\Omega_m \equiv \frac{\rho_m(t_0)}{\rho_{crit}}, \quad \Omega_r \equiv \frac{\rho_r(t_0)}{\rho_{crit}}, \quad \Omega_v \equiv \frac{\rho_v(t_0)}{\rho_{crit}} \quad (3.23)$$

Y claramente $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_v \equiv \Omega = 1$

Una puntualización a tener en cuenta de la [Ecuación 3.20](#), es que si $a(t)$ es solución, también lo es $Ka(t)$, con K una constante, con lo cual nos es indiferente escribir en ella $Ka(t)$ en vez de $a(t)$, al igual que x^i/K en lugar de x^i . Podemos, pues, normalizar, sin

pérdida de generalidad, el factor escala de modo que $a(t_0) = 1$. De esta forma, la densidad total se puede expresar de forma sencilla en función del factor de escala:

$$\rho(a) = \rho_{crit} \left(\Omega_v + \frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} \right)$$

Esta expresión es correcta en el momento presente donde $a = 1$ y correcta así mismo para cualquier otro valor de a debido a el comportamiento de la variación de a sujeto a las leyes de termodinámica.

La [Ecuación 3.21](#) puede expresarse ahora:

$$\frac{1}{2H_0^2} \dot{a}^2 + U_{eff}(a) = 0 \quad (3.24)$$

donde el U_{eff} es el *potencial efectivo*:

$$U_{eff}(a) \equiv -\frac{1}{2} \left(\Omega_v a^2 + \frac{\Omega_m}{a} + \frac{\Omega_r}{a^2} \right)$$

La [Ecuación 3.24](#) puede resolverse de forma separada para materia, radiación y energía, obteniendo, en cada caso:

- *Materia dominante*, $\Omega_m = 1$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_v = 0$:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}$$

- *Radiación dominante*, $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 1$, $\Omega_v = 0$:

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

- *Vacío dominante*, $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_v = 1$:

$$a(t) = \exp H(t - t_0),$$

donde

$$H^2 \equiv \frac{8\pi\rho_v}{3} = \frac{\Lambda}{3}.$$

En los tres casos, el universo se expande sin límite con el incremento de t . En los casos de la materia y la radiación dominantes, el universo comienza con una singularidad donde $a = 0$ en $t = 0$. Esto es una singularidad física porque la densidad en este momento es infinita. El instante $t = 0$ es el Big Bang. La evolución por etapas se observa de forma gráfica y sencilla en la [Figura 3.3](#), donde inicialmente dominaba la radiación, pero la densidad de la radiación muere más rápidamente que la de materia o vacío, por lo que comienza el dominio de la materia, cuya densidad acaba decayendo asimismo, por lo que finalmente sólo la energía de vacío ρ_v es importante.

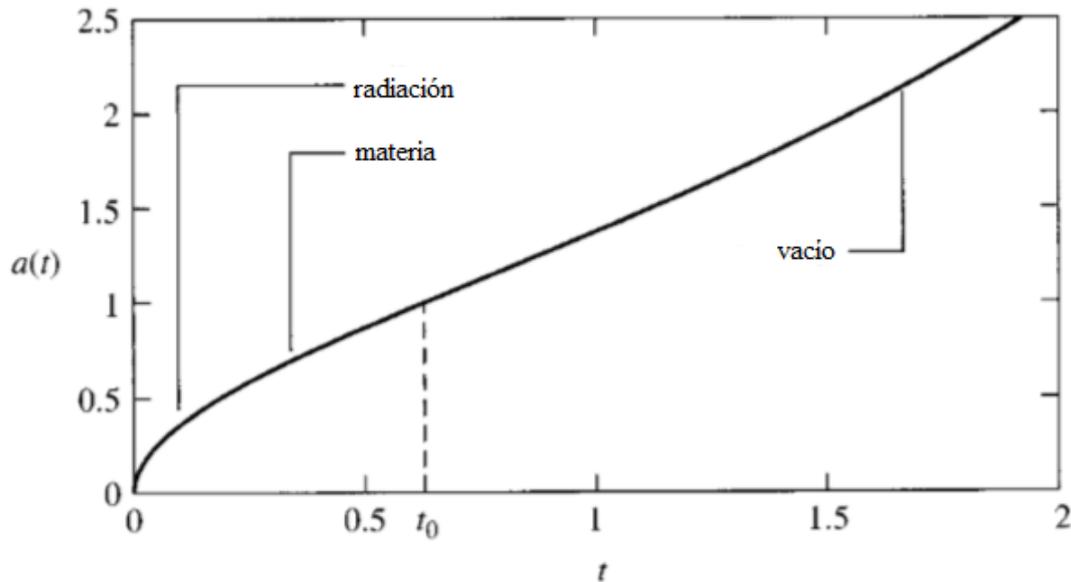


Figura 3.3: Etapas de la evolución de un modelo FRW plano. Las tres etapas se muestran en la figura para $\Omega_m = \Omega_r = \Omega_v = \frac{1}{3}$ [4].

3.4. Geometría y dinámica del universo curvado

3.4.1. Geometría del universo curvado

El modelo de Robertson-Walker plano (3.3) que hemos estudiado hasta ahora es un ejemplo de una geometría del espacio-tiempo homogéneo e isotrópico, mas no es el único. La forma general de esta ecuación para cualquier universo homogéneo e isotrópico es la siguiente:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\mathcal{L}^2 \quad (3.25)$$

donde $d\mathcal{L}^2$ es la métrica de un espacio tridimensional isotrópico y homogéneo. Hay sólo tres posibles valores para este elemento. El primero sería el caso plano visto anteriormente: $d\mathcal{L}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Los otros dos casos son los siguientes:

- **Modelo FRW cerrado.** La superficie de una esfera en un espacio euclídeo, cuatridimensional y plano es una geometría sespacial isotrópica y homogénea llamada *3-esfera* (podemos considerar una esfera unitaria sin pérdida de generalidad). Usando coordenadas cartesianas $X^\alpha = (W, X, Y, Z)$ para este espacio, la 3-esfera es el espacio:

$$\delta_{\alpha\beta}X^\alpha X^\beta = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1 \quad (3.26)$$

Un punto en este espacio se rige por la generalización de las coordenadas polares a cuatro dimensiones:

$$\begin{aligned} X &= \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, & Z &= \sin \chi \cos \theta, \\ Y &= \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, & W &= \cos \chi, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde los rangos de los ángulos (χ, θ, φ) viene dado por: $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Se tiene entonces:

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta}dX^\alpha dX^\beta = dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dW^2 \quad (3.28)$$

Lo cual nos proporciona la métrica de un espacio tridimensional isotrópico y homogéneo: la 3-esfera:

$$d\mathcal{L}^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{cerrado}) \quad (3.29)$$

Este espacio es cerrado con un volumen finito y sin fronteras (análogo a la superficie de una esfera que tiene área finita pero no frontera). Dicho volumen es:

$$V(t) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^\pi d\chi a^3(t) \sin^2 \chi \sin \theta = 2\pi^2 a^3(t) \quad (3.30)$$

El volumen se expande de acuerdo a la expansión del universo y se contrae si éste lo hace.

- **Modelo FRW abierto.** El modelo isotrópico y homogéneo posible restante es la geometría de un hiperboloide de Lorentz. Usando de nuevo coordenadas cartesianas $X^\alpha = (T, X, Y, Z)$, este espacio se define:

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (3.31)$$

La ecuación de un hiperboloide unitario se puede expresar como:

$$\eta_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = -T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -1 \quad (3.32)$$

Las coordenadas polares análogas a 3.27 para el hiperboloide son:

$$\begin{aligned} X &= \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi, & Z &= \sinh \chi \cos \theta, \\ Y &= \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi, & W &= \cosh \chi, \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde los rangos de los ángulos (χ, θ, φ) viene dado por: $0 \leq \chi \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Insertando entonces estas relaciones en 3.34 obtenemos la métrica de un espacio tridimensional isotrópico y homogéneo: el hiperboloide de Lorentz:

$$d\mathcal{L}^2 = d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{abierto}) \quad (3.34)$$

Si tomamos “rebanadas” espaciales de este modelo, tienen infinito volumen. Este modelo es por tanto abierto.

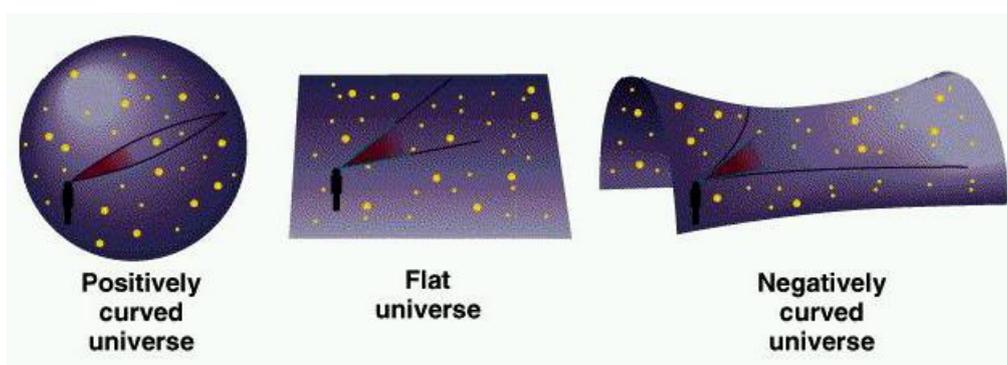


Figura 3.4: Los tres modelos del universo según su curvatura sea positiva, nula o negativa. (Fuente: <http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec15.html>).

Hasta ahora hemos hablado de modelos del universo *plano, cerrado y abierto* para distinguir las tres posibles geometrías de un universo isotrópico y homogéneo. Sin embargo, también podemos referirnos a ellos en términos de curvatura, donde el modelo plano tiene curvatura nula, el cerrado positiva y el abierto tiene curvatura negativa, como se muestra en la [Figura 3.4](#).

Podemos escribir, entonces, una métrica general que englobe los tres posibles modelos ([3.4](#), [3.29](#) y [3.34](#)):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \{d\chi^2 + F(\chi)[d\theta + \sin^2 \theta d\varphi^2]\} \quad (3.35)$$

Donde $F(\chi) = \{\chi^2, \sin^2 \chi, \sinh^2 \chi\}$ para los modelos plano, cerrado y abierto, respectivamente.

Podemos, asimismo, reescribir la [3.35](#) en términos de la curvatura k :

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (3.36)$$

donde $k = \{0, +1, -1\}$ para el modelo plano, cerrado y abierto, respectivamente.

Las métricas de Robertson-Walker que acabamos de definir describen la evolución en el tiempo de un universo que cumple con el principio cosmológico, y se expande con el tiempo si $a(t)$ incrementa, o se contrae si $a(t)$ decrece.

3.4.2. Dinámica y evolución del universo curvado

Una pequeña modificación en la ecuación de la dinámica del modelo FRW plano ([3.20](#)) nos proporciona la ecuación general para los modelos con curvatura:

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi\rho}{3}a^2 = -k \quad (3.37)$$

Donde, de nuevo, $\dot{a} \equiv da/dt$ y $k = \pm 1, 0$ es la constante que aparece en [3.36](#) que determina la curvatura.

Vamos a realizar un proceso análogo al que se llevó a cabo en la sección anterior para encontrar una relación entre la densidad ρ_0 y la geometría del universo:

Tomamos la [Ecuación 3.37](#) evaluada en t_0 y la dividimos entre $a^2(t_0)$, obteniendo:

$$H_0^2 - \frac{8\pi\rho_0}{3} = -\frac{k}{a_0^2}$$

De aquí deducimos una estrecha relación entre ρ_0 y la densidad crítica ρ_{crit} definida en [3.22](#), así como con el parámetro introducido anteriormente $\Omega \equiv \rho_0/\rho_{crit}$:

- Si $\rho_0 > \rho_{crit}$, el universo está positivamente curvado y cerrado: $k = +1$, $\Omega > 1$.
- Si $\rho_0 < \rho_{crit}$, el universo está negativamente curvado y abierto: $k = -1$, $\Omega < 1$.

- Si $\rho_0 = \rho_{crit}$, el universo es plano: $k = 0$, $\Omega = 1$.

Los parámetros H_0 y ρ_0 determinan, por tanto, si el universo es abierto, cerrado o plano. Si pudieramos medir la densidad actual y determinar Ω , podríamos conocer la curvatura espacial del universo. Pero la cantidad de energía del vacío es inaccesible y la gran cantidad de materia oscura hace imposible determinar, así mismo, la densidad de la materia.

Ejemplo 3.4.1. La ecuación de Einstein para modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos. Como hemos visto anteriormente, la métrica de Robertson-Walker es (3.36):

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (3.38)$$

El tensor tensión-energía del fluido perfecto cosmológico fue descrito en el Ejemplo 3.3.2.1. de la Subsección 3.3.2. Los componentes del Tenor de Einstein para la métrica arriba descrita se pueden resolver y el resultado se expresa en una base ortonormal $\{e_{\hat{\alpha}}\}$. Esta es una base respecto a un observador que se mueve con el fluido, donde $e_{\hat{0}} = u$ y los otros tres vectores de la base se orientan a lo largo de las direcciones de las coordenadas (r, θ, φ) . En esta base, los componentes del tensor tensión-energía son las definidas en 3.9: $T_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$. Las bases coordenadas del tensor de Einstein pueden ser proyectadas en esta base ortonormal. El resultado es⁶:

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{3}{a^2} (k + \dot{a}^2) = 8\pi\rho, \quad (3.39)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = - \left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{a^2} (k + \dot{a}^2) \right] = 8\pi p.$$

Las demás componentes de la ecuación de Einstein se cancelan.

La primera de las ecuaciones anteriores es la ecuación de Friedmann 3.37, de la cual se derivan las propiedades de los modelos cosmológicos de FRW. Las demás ecuaciones son consecuencias de ésta y de la primera ley de termodinámica (3.15). Es lícito decir que la ecuación de Einstein *implica* la primera ley de termodinámica.

Se deduce de las ecuaciones de este ejemplo que el Big Bang ($a = 0$) de los modelos FRW es una singularidad, no sólo en presión y densidad, sino también en curvatura del espacio-tiempo.

3.4.3. Solución general de la Ecuación de Friedman

A continuación vamos a reescribir la ecuación de Friedman (3.37) usando variables adimensionales del tiempo presente t_0 . Por ejemplo, usando el valor $a_0 \equiv a(t_0)$, un parámetro adimensional del factor escala es:

$$\tilde{a}(t) \equiv \frac{a(t)}{a_0} \quad (3.40)$$

La ecuación 3.6 muestra que esta variable está directamente relacionada con z por $\tilde{a} = 1/(1+z)$. De forma similar, el tiempo de Hubble t_H , definido como la inversa de la constante de Hubble H_0 , se puede usar para definir un parámetro de tiempo adimensional:

$$\tilde{t} \equiv \frac{t}{t_H} = H_0 t \quad (3.41)$$

⁶Esta ejemplo está extraído de [4]. Las cuentas se encuentran en el libro pero exceden nuestras pretensiones.

Las densidades presentes pueden ser medidas relativamente a la densidad crítica ρ_{crit} definiendo varios Ω como se hizo en 3.23. Así:

$$\rho_r(t) = \frac{\rho_{crit}\Omega_r}{\tilde{a}^4(t)} \quad \rho_m(t) = \frac{\rho_{crit}\Omega_m}{\tilde{a}^4(t)} \quad \rho_v(t) = \frac{\rho_{crit}\Omega_v}{\tilde{a}^4(t)} \quad (3.42)$$

Es también conveniente introducir Ω_c :

$$\Omega_c \equiv -\frac{k}{(H_0 a_0)^2} \quad (3.43)$$

Con estas definiciones, la ecuación de Friedman (3.37) evaluada en t_0 tiene la forma:

$$\Omega_r + \Omega_m + \Omega_v + \Omega_c = 1 \quad (3.44)$$

Así, ecuación general de Friedman reescrita es:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 + U_{eff}(\tilde{a}) = \frac{\Omega_c}{2}, \quad (3.45)$$

donde el potencial efectivo U_{eff} se define:

$$U_{eff}(\tilde{a}) \equiv -\frac{1}{2} \left(\Omega_v \tilde{a}^2 + \frac{\Omega_m}{\tilde{a}} + \frac{\Omega_r}{\tilde{a}^2} \right)$$

Y Ω_c viene determinada en términos de las otras Ω 's tal y como acabamos de ver en 3.44. Esta ecuación es análoga a la expresión de conservación de energía para una partícula en la mecánica newtoniana moviéndose en un espacio unidimensional (\tilde{a} es la coordenada y $\Omega_c/2$ es la energía).

Para construir un modelo cosmológico de Friedman-Robertson-Walker, por tanto, se procede como sigue:

1. Se especifican los cuatro parámetros H_0 , Ω_r , Ω_m , Ω_v .
2. Se usan los tres últimos parámetros para resolver Ecuación 3.45 para $\tilde{a}(\tilde{t})$ escribiendo $d\tilde{a}/[\Omega_c - 2\tilde{U}_{eff}(\tilde{a})]^{1/2} = d\tilde{t}$ e integrando en ambos lados.
3. Desaciendo los ajustes usando H_0 para transformar \tilde{t} en t y determinar el valor a_0 .

El resultado para $a(t)$ es:

$$a(t) = \frac{1}{H_0 |\Omega_c|^{1/2}} \tilde{a}(H_0 t) \quad (3.46)$$

La solución a la ecuación de Friedman reajustada no sólo determina el factor de escala $a(t)$ como función del tiempo, sino que también determina nuestra posición en el tiempo fijando el tiempo actual en t_0 . La definición de \tilde{a} en 3.40 implica que el momento presente \tilde{t}_0 es cuando $\tilde{a}(\tilde{t}) = 1$. La edad actual es entonces $t_0 = H_0 \tilde{t}_0$ (3.41).

Concluimos, entonces, que un modelo cosmológico de Friedman-Robertson-Walker viene determinado por cuatro parámetros cosmológicos:

$$\boxed{H_0, \Omega_r, \Omega_m, \Omega_v}$$

Éstos especifican el estado del momento presente, así como el pasado histórico y el futuro destino del universo. Otras propiedades del cosmos se predicen como función de estos cuatro parámetros. La cosmología observacional tiene como objetivo *determinar* los valores de estos cuatro parámetros que describen la forma y comportamiento del universo que habitamos; mientras que el objetivo de la cosmología teórica es explicar *por qué* esos parámetros valen lo que valen.

3.4.4. Modelo cosmológico FRW dominado por la materia

Durante la mayor parte de la historia del universo desde el Big Bang, la densidad de la materia ha sido dominante en la evolución del universo. El modelo de FRW dominado por la materia sin energía de radiación o de vacío es, por tanto, es un ejemplo bastante apropiado que abordar. A continuación vamos a resolver la ecuación de Friedman para este caso. con las tres distintas curvaturas posibles.

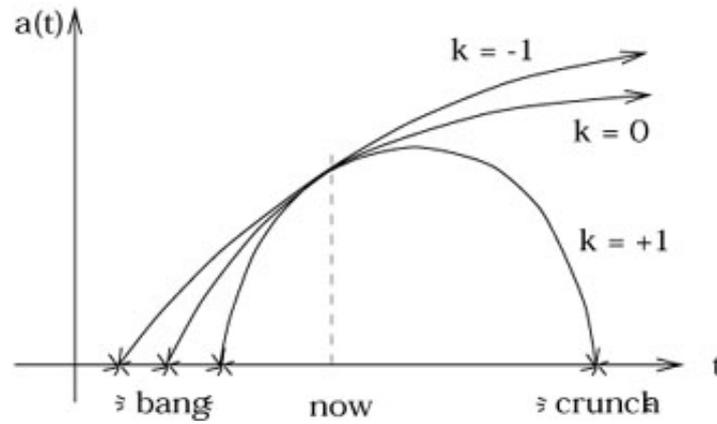


Figura 3.5: Evolución del factor escala en el tiempo, desde el Big Bang hasta un posible Big Crunch o expansión infinita, según la curvatura del modelo. (Fuente: <https://ned.ipac.caltech.edu/level5/March01/Carroll3/Carroll8.html>)

Primero, consideramos el modelo de curvatura positiva:

$$\left. \begin{aligned} a(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(\Omega - 1)^{3/2}}(1 - \cos \eta) \\ t(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(\Omega - 1)^{3/2}}(\eta - \sin \eta) \end{aligned} \right\} k = +1, \quad \Omega > 1. \quad (3.47)$$

Estos modelos tienen una singularidad en $\eta = 0$ donde $a = 0$, $\rho = \infty$ y $t = 0$, es decir, se corresponde con el momento del Big Bang, y a partir de ese momento se encuentran en expansión. Dado que se trata de un modelo cerrado, dicha expansión alcanza un límite que coincide con el momento en el que el volumen de la 3-esfera es máximo, esto es, $\eta = \pi$, y posteriormente se recolapsa en una singularidad denominada *big crunch*, donde $\eta = 2\pi$ y de nuevo $a = 0$. La duración total es $(\pi\Omega/2H_0)(\Omega - 1)^{-3/2}$ y el volumen máximo mencionado es, por 3.30:

$$V_{max} = \frac{2\pi^2}{H_0^2} \left[\frac{\Omega}{(\Omega - 1)^{1/2}} \right]^3$$

El caso abierto, de curvatura negativa, es similar:

$$\left. \begin{aligned} a(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(1-\Omega)^{3/2}}(\cosh \eta - 1) \\ t(\eta) &= \frac{\Omega}{2H_0(1-\Omega)^{3/2}}(\sinh \eta - \eta) \end{aligned} \right\} k = -1, \quad \Omega < 1. \quad (3.48)$$

El modelo abierto también encuentra una singularidad en $t = 0$, pero, a diferencia del anterior, se expande infinitamente. Ambos modelos experimentan una deceleración en su expansión, que se puede interpretar como la fuerza gravitatoria que atrae los cuerpos del universo entre si, de modo que frena la expansión. Los modelos abiertos, sin embargo, logran escapar de esta fuerza gravitacional y por ello se expanden sin límite.

El caso crítico en el que la curvatura es nula y $\Omega = 1$ se encuentra en el borde entre los dos casos descritos arriba. Cuando $\Omega = 1$, $t(\eta)$ y el volumen toman valores infinitos, al igual, por supuesto, que el factor escala $a(\eta)$. Esto tiene sentido, pues el factor escala es proporcional al radio de curvatura, luego la curvatura alcanza el infinito, y un espacio con curvatura infinita no es más que un plano.

Bibliografía

- [1] Asimov, I., & Larrucea, M. P. (1982). El universo. Alianza editorial.
- [2] Callahan, J. J. (2013). The geometry of spacetime: an introduction to special and general relativity. Springer Science & Business Media.
- [3] Schutz, B. (2003). Gravity from the ground up: an introductory guide to gravity and general relativity. Cambridge University Press.
- [4] Hartle, J. B. (2003). Gravity: An introduction to Einstein's General Relativity Pearson Education.
- [5] O'neill, B. (1983). Semi-Riemannian geometry with applications to relativity (Vol. 103). Academic press.
- [6] Glampedakis, K. The accelerating universe: An introduction to Cosmology. Lecture notes.
- [7] Pastor, J. A. (2017) Apuntes de la asignatura Geometría y Relatividad.
- [8] Meroño, M. A. (2015/2016) Apuntes de la asignatura Geometría de Riemann.
- [9] González Ureña, A. (2009) El viento del éter lumífero y el experimento de Michelson-Morley. Artículo en Investigación y Ciencia. <http://www.investigacionyciencia.es/blogs/fisica-y-quimica/10/posts/el-viento-del-eter-lumifero-y-el-experimento-de-michelson-morley-10195>