UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FINAL DE GRADO

ESPACIOS DE LORENTZ-ZYGMUND

Realizado por José Pedro Parra Gómez

Dirigido por:
Pedro Fernández Martínez

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, José Pedro Parra Gómez, declaro ser el autor del trabajo «Espacios de Lorentz-Zygmund» bajo la tutela del profesor Pedro Fernández Martínez, habiendo reflejado en la bibliografía y referenciado convenientemente todas las fuentes empleadas para su elaboración.

En Murcia, a 13 de junio de 2016.

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

«*Uno puede imaginar que el matemático definitivo es aquél que puede ver analogías entre analogías.*»

Stefan Banach.

Agradecimientos

Tras casi un año de intenso trabajo, hoy es el día: finalizo mi trabajo de fin de grado escribiendo este apartado de agradecimientos. Ha sido un período de aprendizaje intenso, no solo en el campo matemático, también a nivel personal, que ha supuesto un gran impacto en mi. Es por eso que me gustaría agradecer a todas aquellas personas que me han ayudado y apoyado durante este proceso.

Primero de todo me gustaría agradecer a mi tutor, Pedro Fernández Martínez, su cooperación, y darle las gracias por todas las herramientas que me ha brindado para completar mi trabajo de fin de grado satisfactoriamente.

También me gustaría agradecer a mis padres por sus sabios consejos y su comprensión, así como a mis amigos; siempre han estado ahí para apoyarnos entre nosotros en los momentos difíciles.

¡Muchas gracias a todos!

Índice

Resumen

Al iniciar el largo recorrido que supone el Grado en Matemáticas, una de las primeras cosas con las que nos damos de bruces son los espacios vectoriales. En un principio, su definición parece relativamente sencilla

> *Un espacio vectorial sobre un cuerpo K es un conjunto no vacio V dotado de dos operaciones para las cuales será cerrado:*
>
> - *Una operación interna $+ : V \times V \longrightarrow V$ que tenga las propiedades conmutativa y asociativa, así como elemento neutro y opuesto.*
> - *Una operación externa $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ que tenga la propiedad asociativa, elemento neutro y que además sea distributiva respecto a la operación interna.*

Indagando un poco, pronto comprendemos la gran riqueza y dimensión de los espacios vectoriales.

Desde la visión del Álgebra, los espacios vectoriales se entienden completamente al estar caracterizados, salvo isomorfismos, por su dimensión. Sin embargo, los espacios vectoriales al uso no ofrecen el marco ideal para afrentar cuestiones del Análisis como la convergencia o las series infinitas. Estas necesidades requieren considerar nuevas estructuras; se llega de esta manera al estudio de los espacios vectoriales normados.

> *Un espacio vectorial V sobre un cuerpo K en el que se define un valor absoluto se dice que es normado si en él se puede definir una norma, es decir, una aplicación $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ que es no negativa, homogénea y verifica la desigualdad triangular.*

Entre los espacios normados destacan rápidamente aquellos en los que toda sucesión de Cauchy en el espacio converge a un elemento del propio espacio, es decir, existe un elemento del espacio que es el límite de la sucesión. Los espacios normados que cumplen esta propiedad de completitud son los conocidos espacios de Banach.

Al analizar los ejemplos más destacados de espacios de Banach es cuando nos encontramos por primera vez con el espacio de las sucesiones infinitas l^p

> *Si $1 \leq p < \infty$, podemos considerar el espacio de todas las sucesiones infinitas $(x_1, x_2, ...)$ de elementos en K tales que la serie infinita $\sum |x_i|^p$ es finita. Entonces se define la norma $\|\cdot\|_{l^p}$ de la sucesión como la raíz p-ésima del valor de la serie.*
> *El espcio l^∞ consiste en todas las sucesiones acotadas en K. La norma se*

define como el supremo de los valores absolutos de los miembros de la sucesión.

No obstante, también entran en escena unos espacios de Banach que nos llaman mucho más la atención. Comprendemos que un espacio de Banach es típicamente un espacio de funciones de dimensión infinita. De esta manera, los espacios de las sucesiones infinitas dan paso a los espacios de Lebesgue

> *Si $1 \leq p < \infty$, podemos considerar el espacio de todas las funciones medibles f tales que $|f|^p$ es Lebesgue-integrable, es decir,*
>
> $$\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty.$$
>
> *Entonces se define la norma $\|\cdot\|_p$ de la función como la raíz p-ésima de dicha integral.*
> *El espacio L^∞ consiste en todas las funciones medibles esencialmente acotadas. La norma se define como el supremo esencial de la función.*

Los espacios de Lebesgue son espacios vectoriales normados de funciones medibles. La interactuación de las propiedades de la medida subyacente con las de la norma nos proporciona un importante conjunto de herramientas que nos ayudan a conocer estos espacios en profundidad. Usando como modelo los espacios de funciones medibles de Lebesgue, podemos estudiar de forma más general los espacios de funciones que además son normados y completos. Surge así el concepto de espacio de funciones de Banach.

En la primera parte de este trabajo nos centraremos en el estudio general de los espacios de funciones de Banach. Comenzaremos desentrañando sus propiedades elementales para poder dar paso a conceptos más complejos (espacios asociados y duales, subespacios notables). En muchas ocasiones, pondremos como ejemplo los espacios de Lebesgue, con objeto de ver como sus propiedades amplían a espacios de funciones más generales.

Volviendo a los espacios l^p, nos damos cuenta de una propiedad muy interesante. La norma en estos espacios proporciona la medida de un vector $(a_1, a_2, ..., a_n)$ sin prestar atención al orden de sus entradas,

$$\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_{l^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)})\|_{l^p}$$

es decir, podríamos reordenar las entradas de dicho vector sin que esto afecte a su norma.

En la segunda parte, nos centraremos en los espacios que poseen este tipo de propiedad. Para ello, introduciremos las funciones de distribución y las reordenadas decrecientes, desarollando sus principales propiedades. Esto nos permitirá adentrarnos en lo que conoceremos como espacios invariantes por reordenamiento, entre los que se encuentran los ya tantas veces mencionados espacios de Lebesgue.

Una vez conocidos todos estos detalles sobre, en particular, los espacios L^p, plantearemos una cuestión algo más compleja. Sea T un operador que actúa entre ciertos pares de espacios de Lebesgue, ¿podemos elegir un par de espacios L^p diferentes a los anteriores de manera que T siga siendo un operador válido entre ambos? ¿Qué condiciones debemos imponer a T? ¿Y al par de espacios escogidos?

A esta y otras preguntas busca respuesta la Teoría de Interpolación, que abordaremos en la tercera parte del trabajo. Comenzaremos exponiendo el *Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin*, un resultado útil en lo que respecta a nuestra nueva tarea, pero que resulta inútil en ciertas ocasiones por lo exigente de sus hipótesis. Gracias al estudio de los espacios de Lorentz, podremos rebajar las condiciones del teorema para llegar a un resultado mucho más eficaz y general, el *Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz.*

Para finalizar, dedicaremos la última parte del trabajo a estudiar lo que ocurre cuando llevamos la interpolación de operadores a sus casos límite. Aparecerán de esta manera dos nuevos espacios de funciones, los espacios de Zygmund $LlogL$ y $Lexp$. Veremos que estos espacios suponen una «barrera» entre el espacio de las funciones acotadas L^∞, los espacios L^p $(1 < p < \infty)$ y el espacio de las funciones Lebesgue-integrables L^1, al tenerse las inclusiones continuas

$$L^\infty \hookrightarrow L_{exp} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow LlogL \hookrightarrow L^1$$

En particular, tendremos que el espacio $LlogL$ surge de manera natural cuando se investiga la integrabilidad de ciertas funciones maximales.

Abstract

When we start the long travel that involve the Mathematics Grade, one of the first things we face up are the linear spaces. At beginning, the definition looks relatively simple

A vector space over a field K is a set V whit two operations that satisfy

- *Associavity, conmutativity, identity element and inverse elements for the internal operation $+ : V \times V \longrightarrow V$.*
- *Associavity, identity element and distributivity for the external operation $\cdot : K \times V \longrightarrow V$.*

A little research, makes us comprise the dimension and riches of the vector spaces.

From the Algebraical vision, the vector spaces are understood completely for being characterized, except isomorphisms, for the dimension. Nevertheless, the general liear spaces don't offer the ideal frame for face analitic questions as the convergence or infinite series. This requirements make us consider new structures; we reach to research the normed vector spaces.

A normed vector spaces is a vector space V over a field K on which a norm is defined, i.e., a non-negative, absolutely homogeneous function $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ being subadditive.

Among the normed vector spaces quickly stand out those in which every Cauchy sequence has limit in the space. The vector spaces that satisface this completeness property are the well known Banach spaces.

When we analyze the most outstanding examples we meet for the first time the infinte sequence spaces l^p

For $1 \leq p < \infty$, l^p is the subspace of K^N consisting of all sequences $x = (x_n)$ satisfying $\sum |x_i|^p < \infty$. The real-valued operation $\|\cdot\|_{l^p}$ defined by $\|x\|_{l^p} = (\sum |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ defines a norm on l^p.
If $p = \infty$, then l^∞ is defined to be the space of all bounded sequences. Their norm is defined by $\|x\|_{l^\infty} = \sup_n |x_n|$.

However, there are other Banach spaces that result more attractive. We comprise that a Banach space is typically an ifinite dimensional function space. In this way, the infinte sequence spaces gave way to the Lebesgue spaces

For $1 \leq p < \infty$, the L^p space is defined as the space of functions for which the p-th power of the absolute value is Lebesgue integrable, i.e.,

$$\int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$$

The norm $\|\cdot\|_p$ is defined as the p-th root of the integral.
For $p = \infty$, the space L^∞ is defined as follow. We start with the set of all measurable functions which are bounded. Two such functions are identified if they are equal almost everywhere. For a function f in this set, its essential supremum serves as an appropriate norm.

The L^p spaces are normed linear spaces of measurable functions. The interaction between the underlying measure properties and the norm properties provide us an important tool kit that help us to understand in great deatil these spaces. Using as a template the Lebesgue spaces, we can study more generally the function spaces which are normed and complete. Thus, the Banach function spaces arises.

In the first part of the dissertation we focus on the general study of thed Banach function spaces. We start unraveling their elementary properties to understand more complex concepts (dual spaces, remarkables subspaces). On many occasions, we put the Lebesgue spaces as an example, in order to relate their properties with those of more general function spaces.

Returning to the l^p spaces, we realize a very interesting property. In these spaces, the norm provides the measure of a vector $(a_1, a_2, ..., a_n)$ independently of the inputs order,

$$\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_{l^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)})\|_{l^p}$$

ergo, we can reorder the inputs of the vector whitout affect to the norm.

In the second part, we focus on the spaces that own this kind of property. To that end, we study distribution functions and decreasing rearrangements, and we research their main properties. Thereby, we will be able to study the rearrangemet-invariant Banach function spaces. The Lebesgue spaces are an example of rearrangemet-invariant spaces.

Once we know all these details of, particularly, the L^p spaces, we raise a more complex question. Let T be an operator between some couples of Lebesgue spaces, ¿could we choose a new couple of L^p spaces such that T keep being valid between them? ¿Which terms should we impose?

The Interpolation Theory search answer to this and other questions, which we approach in the third part. We start exhibiting the*Riesz-Thorin Interpolation Theorem*, an useful result in respect to our new a job. Nevertheless, it results useless on certain occasions due to the demanding hypothesis on which it si based. Thanks to the study of the Lorentz spaces, we can reduce the conditions of the theorem to reach a new and more efficient result, the *Marcinkiewicz Interpolation Theorem*.

To finish, we dedicate the last part of the assignement to study what happens when we take the interpolation of operators to the limit cases. Two new function spaces appear, the Zygmund spaces $LlogL$ y $Lexp$. We see that this espaces suppose a "barrie" between the bounded functions space L^∞, the L^p $(1 < p < \infty)$ spaces and the Lebesgue integrable function space L^1, cause by the continous embeddings

$$L^\infty \hookrightarrow L_{exp} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow LlogL \hookrightarrow L^1$$

In particular, the $LlogL$ space arises quite naturally as soon as we investigate the integrability of certain maximal functions.

Parte I

Espacios de funciones de Banach

Los espacios de Lebesgue L^p son espacios de funciones muy importantes en el contexto de la Teoría de Medida y otras muchas áreas del análisis. No obstante, hay otros tipos de espacios de Banach de gran interés, como pueden ser, por ejemplo, los espacios de Lorentz o los espacios de Orlicz. Este capítulo tratará las similitudes entre tales espacios, proporcionándonos los fundamentos para la teoría de los espacios de funciones de Banach.

En estos espacios, formados por funciones medibles, la norma se relaciona de una manera apropiada con la medida subyacente, lo que permite una fructífera interactuación entre el análisis funcional y la teoría de medida, que se enriquece aún más por la presencia de un orden natural entre los elementos del espacio.

1. Espacios de funciones de Banach

En adelante, sean (R, μ) un espacio de medida σ-finita, $\mathcal{M}^+$ el conjunto de funciones μ-medibles de R cuyos valores recorren $[0, \infty)$ y χ_E la función característica de un conjunto μ-medibre E de R.

Definición 1.1 Una función $\rho : \mathcal{M}^+ \longrightarrow [0, +\infty)$ se denomina *función norma* si, para cada f, g, f_n $(n = 1, 2, ...)$ de M^+, para cada constante $a \geq 0$ y para todo subconjuto μ-medible E de R, cumple:

P1) $\rho(f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-c.t.p.;
$\rho(af) = a\rho(f)$;
$\rho(f + g) \leq \rho(f) + \rho(g)$

P2) $0 \leq f \leq g$ μ-c.t.p. $\Rightarrow \rho(f) \leq \rho(g)$

P3) (Propiedad de Fatou) $0 \leq f_n \nearrow f$ μ-c.t.p. $\Rightarrow \rho(f_n) \nearrow \rho(f)$

P4) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \rho(\chi_E) < \infty$

P5) $\mu(E) < \infty \Rightarrow \int\limits_E f d\mu \leq C_E \rho(f)$

donde $0 < C_E < \infty$ depende de E y ρ, pero no de f.

Ejemplo 1.2 Los funcionales de Lebesgue

$$\rho_p(f) = \begin{cases} \left(\int\limits_R f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup} f = \text{ínf}\{a \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \in E \,:\, f(x) > a\})\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

con $f \in M^+$, son funciones norma.

Demostración La desigualdad triangular P1) es la desigualdad de Minkowski clásica (ver *Anexos*); el resto de partes de P1), P2) y P4) son directas. P3) se deduce del *Teorema de Convergencia Monótona* (ver *Anexos*). Para P5) utilizamos la desigualdad de Hölder clásica (ver *Anexos*): si $1 < p < \infty$ (los casos $p = 1$, $p = \infty$ son directos) tomamos p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, entonces:

$$\int\limits_E f d\mu = \int\limits_R f\chi_E d\mu \leq \left(\int\limits_R f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_R \chi_E^{p'} d\mu\right)^{\frac{1}{p'}} = C_E \rho(f)$$

donde $C_E = \mu(E)^{\frac{1}{p'}}$. ■

Definición 1.3 Sea ρ una función norma. Sea $\mathcal{M}$ la colección de todas las funciones μ-medibles de R. El conjunto $X = X(\rho)$ de todas las funciones de $\mathcal{M}$ para las cuales $\rho(|f|) < \infty$ se llama *espacio de funciones de Banach.* Para cada $f \in X$ definimos

$$\|f\|_X = \rho(|f|)$$

En adelante abreviaremos escribiendo únicamente espacio de funciones para referirnos a un espacio de funciones de Banach.

Teorema 1.4 Sea ρ una función norma y $X = X(\rho)$, con $\|.\|_X$ como en *Def. 1.3.* Entonces $(X, \|.\|_X)$ es un espacio vectorial normado para el cual tenemos las inclusiones

$$S \subset X \hookrightarrow \mathcal{M}_0$$

donde $\mathcal{M}_0$ la clase de funciones de $\mathcal{M}$ finitas μ-c.t.p. y S es el conjunto de funciones simples de R. En particular, si $f_n \to f$ en X, entonces $f_n \to f$ en medida en conjuntos de medida finita y, por tanto, alguna subsucesión converge μ-c.t.p. a f.

Demostración Teniendo en mente *Def. 1.3* y *Def. 1.1*, se deduce de *P5)* que cada función en X es localmente integrable y por tanto finita μ-c.t.p. El conjunto X hereda por tanto las operaciones de espacio vectorial de $\mathcal{M}_0$ y *P1)* muestra que $(X, \|.\|_X)$ es un espacio vectorial normado. *P4)* muestra que X contiene la función característica de cada conjunto de medida finita, luego, por linealidad, de cada función simple. Esto establece las relaciones buscadas.

Falta ver que la inclusión de X en $\mathcal{M}_0$ es continua. Como ambos espacios son metrizables, basta probar que cada sucesión convergente en X es convergente en $\mathcal{M}_0$ (al mismo límite). Pero si $f_n \to f$ en X, entonces por *Def. 1.3* tenemos que $\rho(|f - f_n|) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora, por *P5)*, dado $\varepsilon > 0$ y E cualquier subconjuto de R de medida finita,

$$\mu\left(\{x \in E \,:\, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}\right) \leq \int\limits_E \frac{1}{\varepsilon}|f - f_n| d\mu \leq \frac{1}{\varepsilon} C_E \rho\left(|f - f_n|\right)$$

que converge a 0 cuando n tiende a ∞ (ya que C_e no depende de n). Esto prueba que $f_n \to f$ en medida en cada conjunto de medida finita. La existencia de la subsucesión convergente μ-c.t.p. es consecuencia de un resultado estándar de teoría de medida (ver [7]). ■

Ejemplo 1.5 Los espacios de funciones derivados de los funcionales ρ_p del *Ej. 1.2* son los espacios de Lebesgue L^p:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_R |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}\limits_R |f| & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Lema 1.6 Sea $X = X(\rho)$ un espacio de funciones y supongamos $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$.

I) Si $0 \leq f_n \nearrow f$ μ-c.t.p., entonces o bien $f \notin X$ y $\|f_n\|_X \nearrow \infty$, o bien $f \in X$ y $\|f_n\|_X \nearrow \|f\|_X$

II) (Lema de Fatou) Si $f_n \to f$ μ-c.t.p. y $\liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$, entonces $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_X$

Demostración La primera condición es inmediata de *Def. 1.3* por *Def. 1.1 - P3)*. Para la segunda, sea $h_n(x) = \inf\limits_{m \geq n} |f_m(x)|$ y por tanto, $0 \leq h_n \nearrow |f|$ μ-c.t.p.. Así, utilizando *Def. 1.1 - P2), P3)*:

$$\rho(|f|) = \lim_{n\to\infty} \rho(h_n) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} \rho(|f_m|)\right) = \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

Como f es medible (por ser límite de una sucesión de funciones medibles), la expresión anterior muestra que $f \in X$ y $\|f\|_X \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_X$ ■

Teorema 1.7 Sea X un espacio de funciones y supongamos que $f_n \in X$ $(n = 1, 2, ...)$ y que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty.$$

Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en X a una función f y

$$\|f\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X.$$

En particular, X es completo.

Demostración Sea $t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ y $t_N = \sum\limits_{n=1}^{N} |f_n|$ $(N = 1, 2, ...)$, con lo que $0 \leq t_N \nearrow t$. Como

$$\|t_N\|_X \leq \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_X \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X < \infty$$

se sigue *Lema 1.6 - II)* que t pertenece a X. Por *Teo. 1.4*, la serie $\sum |f_n(x)|$ converge μ-c.t.p. y, por tanto, también lo hace $\sum f_n(x)$. Así, tomando

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{y} \quad s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n\ , \quad N = 1,\ 2,\ ...$$

tenemos que $s_N \to f$ μ-c.t.p. Por tanto, para cualquier M,
$s_N - s_M \to f - s_N$ μ-c.t.p. cuando $N \to \infty$. Además

$$\liminf_{N\to\infty} \|s_N - s_M\|_X \leq \liminf_{N\to\infty} \sum_{n=M+1}^{N} \|f_n\|_X = \sum_{n=M+1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

que tiende a 0 cuando $M \to \infty$ por *Teo. 1.4*. Se sigue de *Lema 1.6 - II)* que $f - s_M$ pertenece a X (luego f también) y $\|f - s_M\|_X \to 0$ cuando $M \to \infty$. Pero entonces, para cada $M = 1,\ 2,\ ...$

$$\|f\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \|s_M\|_X \leq \|f - s_M\|_X + \sum_{n=1}^{M} \|f_n\|_X$$

de donde se sigue la desigualdad buscada haciendo que M tienda a infinito.

Del hecho de que la convergencia absoluta implique la convergencia en X deducimos la completitud de X (*Propiedad de Riesz-Fischer*, ver [14]), con lo que queda probado el resultado. ■

Teorema 1.8 Sean X, Y espacios de funciones sobre el mismo espacio de medida. Si $X \subset Y$ entonces, $X \hookrightarrow Y$; equivalentemente

$$\|f\|_Y \leq C\|f\|_X\ , \quad f \in X$$

para alguna constante C independiente de f.

Demostración Supongamos que $X \subset Y$ pero no se tiene la desigualdad. Existirán funciones f_n en X para las cuales $\|f_n\|_X \leq 1$ y $\|f_n\|_Y > n^3$ $(n = 1,\ 2,\ ...)$. Podemos suponer $f_n > 0$ reemplazando por su valor absoluto. Se sigue de *Teo. 1.7* que $\sum n^{-2} f_n$ converge en X a una función f de X y, por hipótesis, de Y. Pero esto es imposible ya que $0 \leq n^{-2} f_n \leq f$ y entonces $\|f\|_Y \geq n^{-2}\|f_n\|_Y > n$ para cada n. Por tanto la desigualdad debe cumplirse para algún C independiente de f. ■

Definición 1.9 Dos normas $\|.\|$, $\|.\|_*$ en un mismo espacio vectorial X se dirán *equivalentes* cuando existen M, L en $\mathbb{R}^+$ tales que:

$$M\|f\| \leq \|f\|_* \leq L\|f\|\ .$$

Corolario 1.10 Si dos espacios de funciones constan del mismo conjunto de funciones, entonces sus normas son equivalentes.

Demostración Es directo por *Teo. 1.8.* ■

2. El espacio asociado

La desigualdad de Hölder clásica establece que

$$\int_R |fg| d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}$$

para toda $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ cumpliendo

$$1 \leq p \leq \infty \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

La desigualdad es *fuerte* en el sentido de que

$$\|g\|_{p'} = \sup \left\{ \int_R |fg| d\mu \,:\, f \in L^p, \, \|f\|_p \leq 1 \right\}$$

para cada $g \in L^{p'}$ y para cada p y p' satisfaciendo la condición anterior.

Notemos que el espacio $L^{p'}$ se describe explícitamente en términos de L^p a través de la igualdad anterior. En adelante, para un espacio de funciones X en abstracto, procederemos utilizando un análogo adecuado para definir el correspondiente espacio de funciones X'. Una consecuencia inmediata de esta construcción será que una versión fuerte de la desigualdad de Hölder es válida para X y X'. Será menos claro, sin embargo, que el espacio X' así definido es, en sí mismo, un espacio de funciones. La prueba será uno de los resultados principales de esta sección, junto con el *Teorema de Lorentz-Luxemburg*, que muestra que el segundo asociado siempre coincide con el espacio original.

Definición 2.1 Si ρ es una función norma, su *norma asociada* ρ' se define en $\mathcal{M}^+$ por

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_R fg d\mu \,:\, f \in \mathcal{M}^+, \, \rho(f) \leq 1 \right\}$$

para $g \in \mathcal{M}^+$.

Teorema 2.2 Si ρ es una función norma, su norma asociada ρ' es una función norma.

Demostración Tengamos en mente *Def. 1.1.* Si $\rho(f) \leq 1$, entonces f debe ser finita μ-c.t.p., (por *Teo. 1.4*); así, si $g = 0$ μ-c.t.p. entonces $\int fgd\mu = 0$ y $\rho'(g) = 0$. Recíprocamente, si $\rho'(g) = 0$, entonces $\int fgd\mu = 0$ para todo $f \in \mathcal{M}^+$ con $\rho(f) \leq 1$. Sea E algún subconjunto medible de R con $0 < \mu(E) < \infty$, entonces $0 < \rho(\chi_E) < \infty$ por ser ρ una función norma (*P1) y P4)*). Tomando $f = \frac{\chi_E}{\rho(\chi_E)}$ (con lo que $\rho(f) = 1$), obtenemos

$$0 = \int_R fgd\mu = \rho(\chi_E)^{-1} \int_E gd\mu \ .$$

Luego $g = 0$ μ-c.t.p. en E y como E era un conjunto de medida finita, arbitrario y distinto del vacío, se sigue que $g = 0$ μ-c.t.p. El resto de las propiedades de P1) así como P2) son directas por la definición.

Para P3) supongamos $g_n, g \in \mathcal{M}^+$ ($n = 1, 2, ...$) y $0 \leq g_n \nearrow g$ μ-c.t.p.; por *P2)* ya establecida para ρ', $\rho'(g_n)$ crece con n y $\rho'(g_n) \leq \rho'(g)$ para cada n. Por tanto, si $\rho'(g_n) = \infty$ para algún n, no hay que probar nada. Asumamos pues que $\rho'(g_n) < \infty$ para todo n y sea ξ cualquier número satisfaciendo $\xi < \rho'(g)$. Por definición, hay una función $f \in M^+$ con $\rho(f) \leq 1$ tal que $\int fgd\mu > \xi$. Ahora, $0 \leq fg_n \nearrow fg$ μ-c.t.p., luego el *Teorema de Convergencia Monótona* prueba que $\int fg_n \nearrow \int fg$. Por tanto, hay un entero N tal que $\int fg_n > \xi$ para todo $n > N$. Pero entonces se sigue que $\rho'(g_n) > \xi$ para todo $n > N$. Esto prueba que $\rho'(g_n) \nearrow \rho'(g)$ y queda establecida P3).

Si $\mu(E) < \infty$, por *P5)* de ρ existirá una constante $C_E < \infty$ para la cual $\int \chi_E f d\mu \leq c_E \rho(f)$ $(f \in \mathcal{M}^+)$. Esto, unido a la definición de ρ', implica que $\rho'(\chi_E) \leq c_E \leq \infty$ quedando establecida P4).

Para P5) fijemos E con $\mu(E) \leq \infty$. Si $\mu(E) = 0$ no hay que probar nada; asumamos $\mu(E) > 0$. Las propiedades *P1)-P4)* de ρ muestran que la constante $C'_E = \rho(\chi_E)$ satisface $0 < C'_E < \infty$. Sea $f = \frac{\chi_E}{\rho(\chi_E)}$ con norma 1, de la definición, para cada $g \in \mathcal{M}^+$ obtenemos la estimación

$$\int_E gd\mu = C'_E \int_R fgd\mu \leq C'_E \rho'(g)$$

que establece P5). ■

Definición 2.3 Sea ρ una función norma y $X = X(\rho)$ el espacio de funciones determinado por ρ en la *Def. 1.3*. Sea ρ' la norma asociada de ρ. El espacio de funciones $X(\rho')$ determinado por ρ' es llamado el *espacio asociado* de X y se denota por X'.

Se deduce que la norma de una función g en X' viene dada por

$$\|g\|_{X'} = \sup \left\{ \int_R |fg| d\mu \ : \ f \in X, \|f\|_X \leq 1 \right\} \ .$$

Teorema 2.4 - Desigualdad de Hölder Sea X un espacio de funciones con espacio asociado X'. Si $f \in X$ y $g \in X'$, entonces fg es integrable y

$$\int_R |fg| d\mu \leq \|f\|_X \|g\|_{X'} \ .$$

Demostración Si $\|f\|_X = 0$, entonces $f = 0$ μ-c.t.p. y ambos lados de la igualdad son 0. Si $\|f\|_X > 0$, entonces $\frac{f}{\|f\|_X}$ tiene norma 1, lo que asegura

$$\int\limits_R \left| \frac{f}{\|f\|_X} g \right| d\mu \leq \|g\|_{X'} \ .$$

Basta multiplicar a ambos lados por $\|f\|_X$ para obtener la desigualdad. ■

Teorema 2.5 Si p y p' satisfacen la condición del inicio de esta sección, entonces $L^{p'}$ es el espacio asociado de L^p

Demostración Basta con tomar los espacios L^p y $L^{p'}$ en la *Def. 2.3* y observar que se obtiene

$$\|g\|_{p'} = \sup \left\{ \int\limits_R |fg| d\mu \ : \ f \in L^p, \ \|f\|_p \leq 1 \right\} \ .$$

■

Lema 2.6 Para que una función g medible pertenezca al espacio asociado X', es necesario y suficiente que fg sea integrable para cada f de X.

Demostración $\Longrightarrow$: Se trata de la primera parte del *Teo. 2.4*.

$\Longleftarrow$: Supongamos que $\rho'(|g|) = \infty$ pero fg integrable para todo f de X. Así, han de existir funciones no negativas f_n satisfaciendo

$$\|f_n\|_X \leq 1 \ , \quad \int\limits_R |f_n g| d\mu > n^3 \ , \quad n = 1, \, 2, \, ...$$

Se sigue del *Teo. 1.7* que la función $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-2} f_n$ pertenece a X. Sin embargo, el producto fg no puede ser integrable ya que

$$\int\limits_R |fg| d\mu \geq n^{-2} \int\limits_R |f_n g| d\mu > n \ , \quad n = 1, 2, ...$$

lo que supone una contradicción. ■

El siguiente es un resultado clave que muestra la coincidencia entre el segundo asociado de un espacio de funciones y el espacio original. No obstante, por la complejidad de su demostración y para no alejarnos del objetivo que persigue este trabajo, la prueba se dejará sin incluir (véase [13]).

Teorema 2.7 - Teorema de Lorentz-Luxemburg Cada espacio de funciones X coincide con su segundo asociado X''. En otras palabras, una función f pertenece a X si y sólo si pertenece a X'' y en este caso

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''} .$$

A continuación veremos que es posible modificar la definición dada para la norma en un espacio asociado, sacando el valor absoluto fuera de la integral.

Lema 2.8 La norma de una función g en el espacio asociado X' viene dada por:

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\left|\int_R fgd\mu\right| \,:\, f \in X, \|f\|_X \leq 1\right\} .$$

Demostración Sabemos que $|\int fg| \leq \int |fg|$, por lo que es claro que la cantidad de la derecha no excede $\|g\|_{X'}$. Basta establecer la desigualdad inversa, que puede escribirse como

$$\sup_{f\in\mathbb{S}} \int_R |fg|d\mu \leq \sup_{\mathbb{S}} \left|\int_R fgd\mu\right|$$

donde los supremos se extienden a toda función en la bola unidad $\mathbb{S}$ de X.

En el conjunto $E = \{x \in R \mid g(x) \neq 0\}$ podemos escribir g en forma polar como $g(x) = |g(x)|\phi(x)$, donde $|\phi(x)| = 1$. Así, $|g(x)| = g(x)\bar{\phi}(x)$ en E. Para cualquier $f \in \mathbb{S}$, tenemos

$$\int_R |fg|d\mu = \int_E |fg|d\mu = \int_E |f|\bar{\phi}gd\mu .$$

Si $h = |f|\bar{\phi}$ en E y $h = 0$ fuera de E, entonces $|h| \leq |f|$ en R y por tanto $h \in \mathbb{S}$. Luego

$$\int_R |fg|d\mu = \int_R hgd\mu \leq \left|\int_R hgd\mu\right| \leq \sup_{f\in\mathbb{S}} \left|\int_R fgd\mu\right| .$$

Tomando el supremo en la izquierda, obtenemos la desigualdad buscada. ■

Definición 2.9 Un espacio vectorial cerrado B del espacio dual X^* de un espacio de Banach X se dice que es *fundamental en norma* si

$$\|f\|_X = \sup\{|L(f)| \,:\, L \in B, \|L\|_{X^*} \leq 1\}$$

para cada $f \in X$. Luego B es fundamental en norma si contiene suficientes funcionales para reproducir la norma de cada elemento de X.

Teorema 2.10 El espacio asociado X' de un espacio de funciones es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado fundamental en norma del espacio dual X^*.

Demostración Para cada $g \in X'$, la función lineal L_g dada por

$$L_g(f) = \int_R fgd\mu \ , \quad f \in X$$

está acotada en virtud de la desigualdad de Hölder (*Teo. 2.4*). Además, si $L_g(f) = 0$ para todo $f \in X$, por *Def. 2.3*, $g = 0$. Por tanto $g \longrightarrow L_g$ es un isomorfismo de X' en un subespacio vectorial de X^*. Además, *Lema 2.8* muestra que es isométrico

$$\|L_g\|_{X^*} = \sup\{|L_g(f)| \ : \ \|f\|_X \leq 1\} = \|g\|_{X'} \ .$$

Como X' es completo, esto implica que el isomorfismo tiene rango cerrado en X^*. Finalmente, dado $f \in X$, por *Teo. 2.7* y *Lema 2.8* tenemos

$$\|f\|_X = \|f\|_{X''} = \sup\left\{\left|\int_R fgd\mu\right| \ : \ g \in X, \ \|g\|_{X'} \leq 1\right\}$$

lo que unido a las expresiones anteriores y nos da

$$\|f\|_X = \sup\{|L_g| \ : \ g \in X', \|L_g\|_{X^*} \leq 1\}$$

mostrando que la imagen de X' es fundamental en norma en X^*. ■

Proposicion 2.11 Si X e Y son espacios de funciones y $X \hookrightarrow Y$, entonces $Y' \hookrightarrow X'$. De hecho, si $\|f\|_Y \leq c\|f\|_X$ para cada $f \in X$, entonces $\|g\|_{X'}$ $\leq c\|g\|_{Y'}$ para toda $g \in Y'$.

Demostración Se sigue de *Def. 2.3* que

$$\|g\|_{X'} = \sup\left\{\int_R |fg|d\mu \ : \ \|f\|_Y \leq c\right\} = c\sup\left\{\int_R |fg|d\mu \ : \ \|f\|_Y \leq 1\right\} = c\|g\|_{Y'}$$

para cada $g \in Y'$. ■

3. Normas absolutamente continuas

En vista del *Teo. 2.10*, es natural intentar caracterizar los espacios de funciones para los cuales X' y X^* coinciden. Esta sección presenta las bases que serán necesarias para resolver tanto este como otro importante problema de dualidad: la interacción analítica entre dos subespacios, X_a y X_b, de X. Estos son, respectivamente, el subespacio de funciones con norma absolutamente continua y el subespacio consistente en la clausura del conjunto de las funciones simples.

A lo largo de la sección denotaremos por $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ a una sucesión de subconjuntos medibles de R y por $E_n \to \varnothing$ μ-c.t.p. la convergencia μ-c.t.p. de las funciones características χ_{E_n} a 0 ($E_n \searrow \varnothing$ μ-c.t.p. si la sucesión es decreciente). No es difícil ver que

$$E_n \longrightarrow \varnothing \ \mu\text{-c.t.p} \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} E_n \ \text{ tiene medida nula.}$$

Así, $E_n \longrightarrow \varnothing$ μ-c.t.p. si y sólo si $\{E_n\}$ puede ser transformado en un conjunto de medida nula convergente al conjunto vacío. Notemos, además, que los conjuntos E_n no tienen por que tener necesariamente medida finita.

Definición 3.1 Una función f en un espacio de funciones X se dice que tiene *norma absolutamente continua* en X si $\|f\chi_{E_n}\|_X \to 0$ para cada sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisfaga $E_n \to \varnothing$ μ-c.t.p. El conjunto de todas las funciones absolutamente continuas de X se denota por X_a. Si $X = X_a$, entonces el propio espacio X se dice que tiene norma continua.

El siguiente resultado muestra que podemos restringir la condición previa a sucesiones decrecientes.

Proposición 3.2 Una función f en un espacio de funciones X tendrá norma absolutamente continua si y sólo si $\|f\chi_{E_n}\|_X \searrow 0$ para cada sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisfaga $E_n \searrow \varnothing$ μ-c.t.p.

Demostración $\Longrightarrow$: Es directa de la definición.

$\Longleftarrow$: Su pongamos que f satisface la condición y sea $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión arbitraria tal que $F_n \to \varnothing$ μ-c.t.p. La sucesión $\{E_n\}$, donde
$E_n = \bigcup_{m\geq n} F_m$, es decreciente y tiene el mismo límite superior que $\{F_n\}$, es decir, un conjunto de medida nula. Por hipótesis $\|f\chi_{E_n}\| \searrow 0$ y como $F_n \subset E_n$ para cada n, se sigue que $\|f\chi_{F_n}\| \searrow 0$ y que f tiene, por tanto, norma absolutamente continua. ■

Ejemplo 3.3 Si $1 \leq p < \infty$, el espacio de Lebesgue $L^p(R,\mu)$ tiene norma absolutamente continua. Esto es consecuencia directa de la proposición anterior y el *Teorema de la Convergencia Dominada*:

Sea $f \in L^p$ y tomemos una sucesión $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisfaciendo $E_n \searrow \varnothing$ μ-c.t.p. Así, $|f|^p$ es integrable, $|f|^p\chi_{E_n} \leq |f|^p$ y la sucesión $|f|^p\chi_{E_n} \to 0$, por lo que aplicando el *Teorema de la Convergencia Dominada* obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_R |f|^p \chi_{E_n} d\mu = \int_R \lim_{n\to\infty} |f|^p \chi_{E_n} d\mu = 0$$

de donde se deduce que $\|f\chi_{E_n}\|_X \searrow 0$ y f tiene norma absolutamente continua.

El caso $p = \infty$ es diferente debido a que la continuidad absoluta depende de la estructura del espacio de medida subyacente (R, μ). Por ejemplo, si (R, μ) es no atómico (véase II-*Def. 2.5*), entonces $(L^\infty)_a$ contiene sólo a la función nula. Sin embargo, si (R, μ) es completamente atómico, como en el caso de los números naturales, tendremos que la parte alsolutamente continua de l^∞ es el subespacio c_0.

Lema 3.4 Si f tiene norma absolutamente continua se cumple que, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que si $\mu(E) < \delta$ entonces $\|f\chi_{E_n}\|_X < \varepsilon$.

Demostración Supongamos que no se cumple la condición; entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen conjuntos medibles E_n ($n = 1, 2, ...$) satisfaciendo $\mu(E_n) < 2^{-n}$, $\|f\chi_{E_n}\|_X \geq \varepsilon$. Pero entonces,

$$\mu\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \mu(E_n) < 2^{-m+1} \ , \quad m = 1, 2, ...$$

muestra que $E_n \to \varnothing$ μ-c.t.p. y la estimación de la norma contradice el hecho de que f tenga norma absolutamente continua.

Proposición 3.5 Una función f en un espacio de funciones tiene norma absolutamente continua si y sólo si $\|f_n\|_X \searrow 0$ para cada sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones μ-medibles satisfaciendo $|f| \geq f_n \searrow 0$ μ-c.t.p.

Demostración $\Longleftarrow$: Basta tomar $f_n = f\chi_{E_n}$ y aplicar la *Prop. 3.2.*

$\Longrightarrow$: Supongamos que f tiene norma absolutamente continua y sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles con $|f| \geq f_n \searrow 0$ μ-c.t.p. Sean $\varepsilon > 0$ y $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos no nulos y de medida finita cuya unión es R. El complementario $Q_N = R - R_N \searrow \varnothing$ μ-c.t.p., la norma absolutamente continua de f asegura que $\|f\chi_{Q_N}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún N suficientemente grande. Sean $\alpha = \frac{\varepsilon}{4\|\chi_{R_N}\|}$ y $E_n = \{x \in R_N : f_n(x) > \alpha\}$ ($n = 1, 2, ...$). Como $f_n \searrow 0$ μ-c.t.p. y R_N tiene medida finita, se tiene que $\mu(E_n) \searrow 0$. Aplicando el *Lema 3.4*, debe ser $\|f\chi_{E_n}\|_X < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo n suficientemente grande. Para dicho valor de n tenemos

$$\begin{aligned}\|f_n\|_X &\leq \|f_n\chi_{Q_N}\|_X + \|f_n\chi_{R_N}\|_X \leq \|f_n\chi_{Q_N}\|_X + \|f_n\chi_{E_N}\|_X + \|f_n\chi_{R_N - E_N}\|_X \\ &\leq \|f_n\chi_{Q_N}\|_X + \|f_n\chi_{E_N}\|_X + \alpha\|\chi_{R_N - E_N}\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \ .\end{aligned}$$

Luego $\|f_n\|_X \searrow 0$ como se buscaba. ■

Proposición 3.6 Una función f en un espacio de funciones tiene norma absolutamente continua si y sólo si se cumple que: para cualesquiera funciones f_n ($n = 1, 2, ...$) y g medibles satisfaciendo $|f_n| \leq |f|$ μ-c.t.p. para cada n y $f_n \to g$ μ-c.t.p., se tiene $\|f_n - g\|_X \to 0$.

Demostración $\Longleftarrow$: Basta tomar $f_n = f\chi_{E_n}$ y $g = 0$ y la proposición anterior nos asegura que f tiene norma absolutamente continua.

$\Longrightarrow$: Sea f una función con norma absolutamente continua, g y f_n ($n = 1, 2, ...$) funciones medibles que satisfacen $|f_n| \leq |f|$ μ-c.t.p. para cada n y $f_n \longrightarrow g$ μ-c.t.p. Tomando $h_n(x) = \sup\limits_{m\geq n}|f_m(x) - f_n(x)|$ ($n = 1, 2, ...$), tenemos $2|f| \geq h_n \searrow 0$ μ-c.t.p. Así, por la proposición anterior,

$$\|f_n - g\|_X \leq \|h_n\|_X \searrow 0$$

y por tanto $f_n \to g$ μ-c.t.p. ■

Este resultado pone de manifiesto que X_a es el mayor subespacio de X para el cual se satisface el *Teorema de la Convergencia Dominada.*

Definición 3.7 Un subespacio vectorial cerrado Y de un espacio de funciones X se denomina un *ideal de orden* de X si cumple la propiedad

$$f \in Y \;\text{ y }\; |g| \leq |f| \;\mu\text{-c.t.p.} \Rightarrow g \in Y\ .$$

Obviamente, el subespacio nulo y el propio X son ideales de orden de X.

Teorema 3.8 El subespacio de funciones de norma absolutamente continua X_a es un ideal de orden de X. Además, si $0 \leq f_n \nearrow f$ μ-c.t.p. y $f \in X_a$, entonces $\|f - f_n\|_X \searrow 0$.

Demostración La definición de norma absolutamente continua garantiza que X_a es un subespacio de X en el que se cumple la condición de *Def 3.7*; falta ver que se trata de un subespacio cerrado. Supongamos, pues, $f_n \in X_a$ ($n = 1, 2, ...$) con $f_n \to f$ en X. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, $\|f - f_N\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún N suficientemente grande. Supongamos ahora una sucesión $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ tal que $E_m \searrow \varnothing$ μ-c.t.p. Como f_N tiene norma absolutamente continua, existe M tal que $\|f_N\chi_{E_m}\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$ para $m \geq M$. Luego

$$\|f\chi_{E_m}\|_X \leq \|(f - f_N)\chi_{E_m}\|_X + \|f_N\chi_{E_m}\|_X \leq \|f - f_N\|_X + \|f_N\chi_{E_m}\|_X < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para $m \geq M$. Con lo que $\|f\chi_{E_m}\|_X \searrow 0$ y $f \in X_a$. La afirmación restante es consecuencia directa de la *Prop. 3.6.* ■

Definición 3.9 Sea X un espacio de funciones. La clausura en X del conjunto de las funciones simples se denota por X_b.

Proposición 3.10 El subespacio X_b es la clausura en X del conjunto de las funciones acotadas con soporte en conjuntos de medida finita.

Demostración Necesitamos ver que toda función acotada con soporte en un conjunto de medida finita pertenece a X_b. Supongamos f acotada y que $E = \{x : f(x) \neq 0\}$ tiene medida finita. Si $f \geq 0$ podemos construir una sucesión de funciones simples no negativas f_n ($n = 1, 2, ...$) con soporte en E, tales que $f_n \to f$ uniformemente. Pero entonces

$$\|f_n - f\|_X = \|(f_n - f)\chi_E\|_X \leq \|f_n - f\|_\infty \|\chi_E\|_X$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$ por tener E medida finita (y, por tanto, $\|\chi_E\|_X < \infty$). ■

Teorema 3.11 El subespacio X_b es un ideal de orden de X y

$$X_a \subset X_b \subset X \; .$$

Demostración X_b es un subespacio cerrado de X, así que veamos si cumple la propiedad de la definición de ideal de orden. Sea, pues, $f \in X_b$ tal que $|g| < |f|$ μ-c.t.p. Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones tales que $f_n \to f$ en X. Así, cada una de las funciones

$$g_n(x) = \operatorname{sgn}(g(x)) \min\{|f_n(x)|, |g(x)|\} \; , \quad n = 1, 2, ...$$

está acotada y tiene soporte en un conjunto de medida finita. Además,

$$|g - g_n| = \max\{|g| - |f_n|, 0\} \leq ||f| - |f_n|| \leq |f - f_n|$$

luego $\|g - g_n\|_X \leq \|f - f_n\|_X \to 0$ y la *Prop. 3.10* asegura que $g \in X_b$ y X_b es un ideal de orden.

Para la segunda parte, sea f una función con norma absolutamente continua y $\{R_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos de medida finita cuya unión es R. Por *Prop. 3.10* cada una de las funciones

$$f_n(x) = sgn(f(x)) \min\{|f(x)|, n\chi_{R_n}\} \; , \quad n = 1, 2, ...$$

pertenece a X_b. Además, como $|f_n| \leq |f|$ y $f_n \to f$ μ-c.t.p., se sigue de *Prop. 3.6* que $f_n \to f$ en X. Finalmente, como X_b es cerrado, $f \in X_b$ y $X_a \subset X_b$. ■

El subespacio X_b es relativamente grande en el sentido de que es un subespacio fundamental en norma de $(X')^*$ (como se verá a continuación en el *Teo. 3.12*). Por contra, X_a podría contener únicamente la función nula (como se explica en el *Ej. 3.3*) y ser, por tanto, la inclusión $X_a \subset X_b$ propia. Debemos poner interés en el extremo opuesto, cuando X_a y X_b coinciden. A continuación (*Teo. 3.13*) demostraremos que esto ocurre si y sólo si las funciones características de los conjuntos de medida finita tienen todas norma absolutamente continua.

Teorema 3.12 El subespacio X_b de X es isométricamente isomorfo a un subespacio fundamental en norma de $(X')^*$.

Demostración Los resultados *Teo. 2.7* y *Teo. 2.10* nos permiten identificar X, y por tanto X_b, con un subespacio cerrado de $(X')^*$. Tenemos que ver, por tanto, que X_b es fundamental en norma. Sean $g \in X'$ y $\varepsilon > 0$. Por la definición de norma, existe una función f en la bola unidad de X para la cual $\|g\|_{X'} \leq \int_R |fg| d\mu + \varepsilon$. Sean $\{R_N\}_{N=1}^{\infty}$ cualquier sucesión creciente de conjuntos de medida finita cuya unión es R y $f_N = \text{mín}\{|f|, N\} \cdot \chi_R$ $(N = 1, 2, ...)$. Por *Prop. 3.10* cada f_N pertenece a $B = \{h \in X_b \mid \|h\|_X \leq 1\}$, la bola unidad de X_b. Como $0 \leq f_n \nearrow |f|$, el *Teorema de la Convergencia Monótona* (junto con la desigualdad anterior) nos da

$$\|g\|_{X'} \leq \sup_N \int_R |f_N g| d\mu + \varepsilon \leq \sup_{h \in B} \int_R |hg| d\mu + \varepsilon$$

Si hacemos ε tender a 0 y observamos que la desigualdad inversa es consecuencia de la desigualdad de Hölder tenemos

$$\|g\|_{X'} = \sup_{h \in B} \int_R |hg| d\mu \ .$$

Finalmente, notemos que esta igualdad sigue siendo válida cuando colocamos el valor absoluto fuera de la integral como en *Lema 2.8* (por ser X_b un ideal de orden). Así X_b es fundamental en norma en $(X')^*$. ■

Teorema 3.13 Los subespacios X_a y X_b coinciden si y sólo si la función característica χ_E tiene norma continua para cada conjunto E de medida finita.

Demostración $\Longrightarrow$: Es obvio por pertenecer χ_E a X_b para cada conjunto E de medida finita.

$\Longleftarrow$: Si cada χ_E con $\mu(E) < \infty$ tiene norma absolutamente continua, entonces cada función simple tiene también norma absolutamente continua. Como X_a es cerrado, tiene que ser $X_b \subset X_a$ y por tanto ambos conjuntos coinciden. ■

4. Dualidad y reflexividad

Concluiremos el estudio de los espacios de funciones con una serie de resultados relativos a sus espacios duales. Dichos resultados serán consecuencia del teorema que sigue, cuya demostración no será incluida por ser compleja y para no distraer al lector del tema principal (véase [13]).

Teorema 4.1 Sea Y un ideal de orden de un espacio de funciones X y supongamos que Y contiene a las funciones simples. Entonces, $Y^* = X'$ si y solo si $Y \subset X_a$. En este caso, $Y = X_b = X_a$.

Corolario 4.2 Sea X un espacio de funciones. Si X_a contiene las funciones simples, entonces $(X_a)^* = X'$.

Demostración Poniendo $Y = X_a$, Y es un ideal de orden que contiene a las funciones simples. Aplicando el resultado anterior,

$$(X_a)^* = Y^* = X' .$$

■

Corolario 4.3 El espacio dual X^* de un espacio de funciones X es isométricamente isomorfo al espacio asociado X' si y sólo si X tiene norma absolutamente continua.

Demostración Basta aplicar el *Teo. 4.1* sabiendo que $X = X_a$. ■

Corolario 4.4 Un espacio de funciones X es reflexivo si y solo si tanto X como X' tienen norma absolutamente continua.

Demostración $\Longleftarrow$: Como X y X' tienen norma absolutamente continua, podemos aplicar sucesivamente el resultado anterior para obtener:

$$X^{**} = (X^*)^* = (X')^* = (X')' = X'' = X .$$

$\Longrightarrow$: Supongamos X reflexivo. El *Teo. 2.10* asegura que X' es una subespacio cerrado fundamental en norma de X^*. Si X' es un subespacio propio de X^*, entonces el *Teorema de Hanh-Banach* nos proporciona un funcional no negativo $F \in X^{**}$ que hace 0 a toda función de X'. La reflexividad de X nos permite representar F por evaluación en alguna f de X, en este caso

$$\int fg d\mu = F(g) = 0$$

para cada $g \in X'$. Como X' es fundamental en norma en X^*, esto implica $f = 0$ μ-c.t.p. y por tanto F es idénticamente 0. Esta contradicción nos lleva a concluir que $X' = X^*$ y por tanto, por el anterior resultado, a que X tiene norma absolutamente continua. Esto, junto con la reflexividad de X, conduce a

$$(X')^* = (X^*)^* = X = X'' = (X')' .$$

Aplicando de nuevo el *Cor. 4.3*, X' también ha de tener norma absolutamente continua. ■

Parte II
Espacios de funciones invariantes por reordenamiento

Para sucesiones finitas $(a_i)_{i=1}^n$ y $(b_i)_{i=1}^n$ de números no negativos, es natural decir que (b_i) es un reordenamiento de (a_i) si $b_i = a_{\sigma(i)}$, para cada $i = 1, 2, ..., n$ y alguna permutación σ de los números $1, 2, ..., n$. En espacios de medida más generales, es tentador remplazar la noción de permutación por la de transformación que conserva la medida y, de acuerdo con esto, para funciones medibles no negativas f y g, decir que g es un reordenamiento de f si $g = f \circ \sigma$. Este concepto, aunque válido, no es lo suficientemente general para nuestros propósitos: podría darse, por ejemplo, que g fuese un reordenamiento de f sin ser f un reordenamiento de g (falla la simetría).

Emplearemos una definición más general: las funciones no negativas f y g serán un reordenamiento de la otra (en terminos más precisos, serán equimedibles) si coinciden sus funciones de distribución (véase *Def 1.1*). Esta noción también es válida para funciones definidas en diferentes espacios de medida. En particular, para cada función medible f, el reordenamiento nos permite la construcción de una función f^* decreciente y continua por la derecha en el intervalo $(0, \infty)$ que es equimedible con f. Esta función f^* se denomina la *reordenada decreciente* de f y su construcción es, por tanto, un proceso análogo a reordenar los términos de una secuencia finita en orden decreciente.

La reordenada decreciente puede considerarse como una representación de f a partir de la cual, los fenómenos ocurridos en espacios de medida finita generales, pueden ser vistos en función de sus homólogos en el espacio de medida $(0, \infty)$ con la medida de Lebesgue. El presente capítulo trata, en gran parte, las propiedades de esta representación.

1. Funciones de distribución y reordenadas decrecientes

Definición 1.1 La *función de distribución* μ_f de una función f en $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ viene dada por

$$\mu_f(\lambda) = \mu(\{x \in R : |f(x)| > \lambda\}) \ .$$

Observemos que μ_f depende únicamente del valor absoluto de la función f, por lo que podría tomar el valor ∞.

Definición 1.2 Dos funciones $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$ y $g \in \mathcal{M}_0(S, \nu)$ se dicen *equimedibles* si tienen la misma función de distribución, es decir, si $\forall \lambda \geq 0$ $\mu_f(\lambda) = \nu_g(\lambda)$.

Proposición 1.3 Supongamos f, g y f_n $(n = 1, 2, ...)$ en $\mathcal{M}_0(R, \mu)$ y sea a un escalar distinto de 0. La función de distribución μ_f es no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, \infty)$. Además

I) $|g| \leq |f|$ μ-c.t.p. $\Rightarrow \mu_g \leq \mu_f$

II) $\mu_{af}(\lambda) = \mu_f\left(\frac{\lambda}{|a|}\right)$, $\lambda \geq 0$

III) $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$, $\lambda_1, , \lambda_2 \geq 0)$

IV) $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ μ-c.t.p $\Rightarrow \mu_f \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_{f_n}$,
en particular,
$|f_n| \nearrow |f|$ μ-c.t.p. $\Rightarrow \mu_{f_n} \nearrow \mu_f$

Demostración Es evidente que μ_f es no negativa y decreciente (ya que $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \Rightarrow \mu_f(\lambda_1) \geq \mu_f(\lambda_2)$) por su definición. Para ver la continuidad por la derecha, sea $E(\lambda) = \{x : |f(x)| > \lambda\}$ para $\lambda \geq 0$ y fijemos $\lambda_0 \geq 0$. Como los conjuntos $E(\lambda)$ crecen cuando drecrece λ y

$$E(\lambda_0) = \bigcup_{\lambda > \lambda_0} E(\lambda) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)$$

el *Teorema de la Convergencia Monótona* asegura la continuidad por la derecha

$$\mu_f\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) = \mu\left(E\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right)\right) \nearrow \mu(E(\lambda_0)) = \mu_f(\lambda_0) .$$

La primera condición es inmediatas por la definición de μ_f, así como la segunda

$$\mu_a f(\lambda) = \mu(\{x \in R \mid |af(x)| > \lambda\} = \mu\left(\left\{x \in R \,:\, |f(x)| > \frac{\lambda}{|a|}\right\}\right) = \mu_f\left(\frac{\lambda}{|a|}\right) .$$

Para la tercera hay que tener en cuenta que si $|f(x) + g(x)| > \lambda_1 + \lambda_2$ entonces o bien $|f(x)| > \lambda_1$ o bien $|g(x)| > \lambda_2$; en consecuencia

$$\{x \in R \,:\, |(f+g)(x)| > \lambda_1 + \lambda_2\} \subset \{x \in R \,:\, |f(x)| > \lambda_1\} \cup \{x \in R \,:\, |g(x)| > \lambda_2\}.$$

y $\mu_{f+g}(\lambda_1 + \lambda_2) \leq \mu_f(\lambda_1) + \mu_g(\lambda_2)$. Para la propiedad restante fijemos $\lambda \geq 0$ y sean $E = \{x \in R \,:\, |f(x)| > \lambda\}$, $E_n = \{x \in R \,:\, |f_n(x)| > \lambda\}$ $(n = 1, 2, ...)$. Tenemos que, $E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n>m} E_n$ y así

$$\mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \inf_{n>m} \mu(E_n) \leq \sup_m \inf_{n>m} \mu(E_n) = \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

para $m = 1, 2, ...$ Pero $\bigcap_{n>m} E_n$ crece con m, luego aplicando el *Teorema de la Convergencia Monótona* se establece lo buscado

$$\mu_f(\lambda) = \mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n>m} E_n\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcap_{n>m} E_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu_{f_n}(\lambda) .$$

■

Definición 1.4 Sea $f \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. La *reordenada decreciente* de f es la función f^* definida en $[0, \infty)$ por

$$f^*(t) = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\} \ , \quad t \geq 0$$

Por convenio, utilizaremos $\text{ínf}\, \varnothing = \infty$. Por tanto, si $\mu_f(\lambda) > t$ para cada $\lambda \geq 0$, entonces $f^*(t) = \infty$. Además, si (R, μ) es un espacio con $\mu(R) < \infty$, entonces la función de distribución μ_f está acotada por $\mu(R)$ y por tanto $f^*(t) = 0$ para todo $\forall t \geq \mu(R)$. En este caso debemos considerar f^* como una función definida en $[0, \mu(R))$. Notar además, que si μ_f es continua y estrictamente decreciente, f^* es simplemente su inversa en el intervalo apropiado. De hecho, por lo general, tomando primero la función de distribución μ_f y luego la función de distribución m_{μ_f} (con m medida de Lebesgue en $[0, \infty)$), obtenemos precisamente la reordenada decreciente f^* como consecuencia de la igualdad, para $t > 0$

$$m_{\mu_f}(t) = m\left(\{s : \mu_f(s) > t\}\right) = \sup\{s : \mu_f(s) > t\} = \text{ínf}\{\lambda : \mu_f(\lambda) \leq t\} = f^*(t)$$

que sigue del hecho de ser μ_f decreciente y las definiciones de reordenada decreciente y función de distribución.

Ejemplo 1.5

a) Vamos a calcular la función de distribución de una función simple no negativa

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}(x)$$

donde los E_j son conjuntos de medida finita de R disjuntos dos a dos y $a_1 > a_2 > ... > a_n > 0$.

Si $\lambda \geq a_1$, es evidente que $\mu_f(\lambda) = 0$.

Si $a_2 \geq \lambda > a_1$, entonces $f(x) > \lambda$ en E_1, luego $\mu_f(\lambda) = \mu(E_1)$.

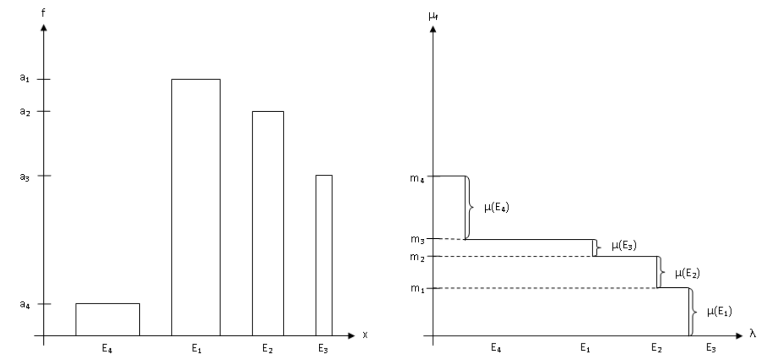
Si $a_3 \geq \lambda > a_2$, entonces $f(x) > \lambda$ en $E_1 \cup E_2$, luego

$$\mu_f(\lambda) = \mu(E_1) \cup \mu(E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2) \ .$$

Y en general,

$$\mu_f(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} \mu(E_i) \right) \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda) = \sum_{j=1}^{n} m_j \chi_{[a_{j+1}, a_j)}(\lambda)$$

donde $m_j = \sum\limits_{i=1}^{j} \mu(E_i)$ $(j = 1, 2, ..., n)$ y definimos $a_{n+1} = 0$.



b) Vamos a calcular la reordenada decreciente de f. Para ello, debemos tener en mente la definición y observar nuestro dibujo.

Si $t > m_4$, entonces $f^*(t) = 0$.

Si $m_4 > t \geq m_3$, entonces $f^*(t) = a_4$.

Si $m_3 > t \geq m_2$, entonces $f^*(t) = a_3$.

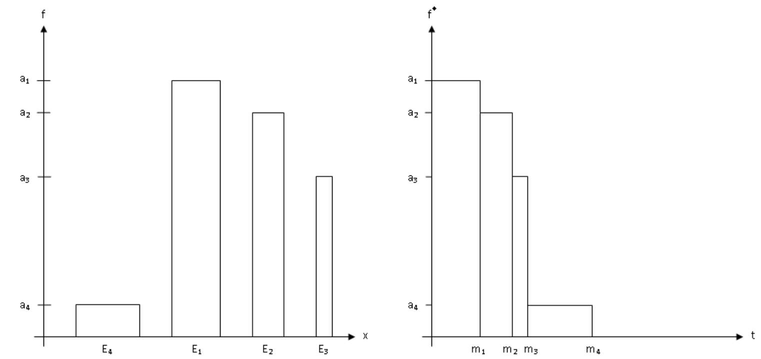
Si $m_2 > t \geq m_1$, entonces $f^*(t) = a_2$.

Si $m_1 > t \geq 0$, entonces $f^*(t) = a_1$.

Es decir,

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{[m_{j-1}, m_j]} \ , \quad t \geq 0$$

definiendo $m_0 = 0$.

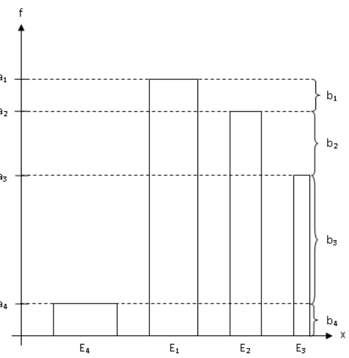


Básicamente, estamos reordenando los bloques verticales en el gráfico de f en orden decreciente.

c) A veces es más útil dividir las funciones en secciones horizontales en lugar de en verticales. Así, la función f puede representarse también como

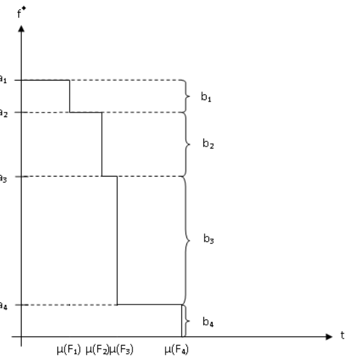
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{F_k}(x)$$

donde los $b_k > 0$ y los F_k forman una sucesión creciente $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n$ de conjuntos de medida finita. Observando nuestro dibujo



vemos que $b_k = a_k - a_{k+1}$ y $F_k = \bigcup_{j=1}^{k} E_j$.

En este caso, la reordenada decreciente se forma «deslizando» los bloques de cada estrato horizontal para formar un único bloque más largo asentado sobre el eje vertical.

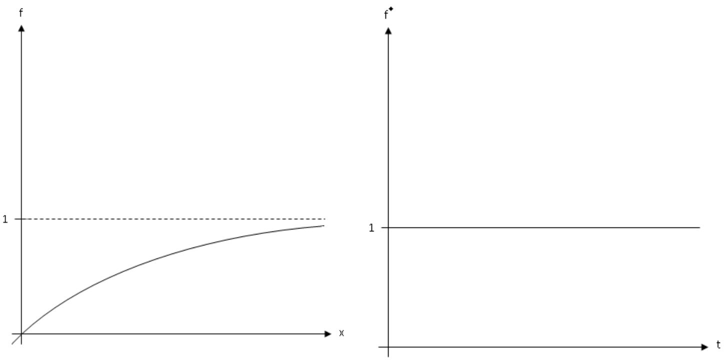


Así, la reordenada vertical queda

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \chi_{[0,\mu(F_k))}$$

Ejemplo 1.6

a) Sea $f(x) = 1 - e^{-x}$, $(0 < x < \infty)$. La función de distribución m_f (recordemos que, m es la medida de Lebesgue en $[0, \infty)$) es infinita para $0 \leq \lambda < 1$, y vale cero para $\lambda \geq 1$. Por tanto, $f^*(t) = 1$ para cada $t \geq 0$ como vemos en la figura



Este ejemplo pone de manifiesto que podemos perder una gran cantidad de información al pasar a la reordenada decreciente. Tal información, no obstante, es irrelevante en lo que concierne a las normas L^p. Así, las normas L^p de f y f^* son las dos infinitas cuando $1 \leq p < \infty$, e iguales a uno en norma L^∞.

b) Sea

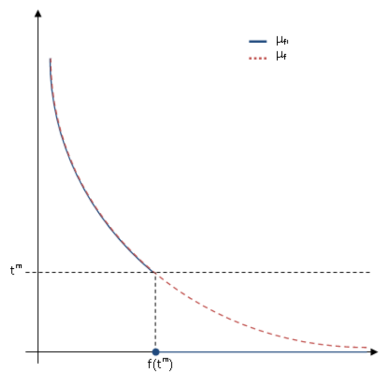
$$f_1(x) = \text{mín}\{|f(x)|, f^*(t^m)\} sgn f(x) \ .$$

Comenzamos calculando la función de distribución de f_1

$$\mu_{f_1}(\lambda) = \mu(\{x \in R \mid |f_1(x)| > \lambda\}) \ .$$

Si $\lambda \geq f^*(t^m)$, $|f_1| \leq \lambda$ para todo X, luego $\mu_{f_1}(\lambda) = 0$. Si $\lambda < f^*(t^m)$, $|f_1(x)| > \lambda$ si y sólo si $|f(x)| > \lambda$, luego $\mu_{f_1}(\lambda) = \mu_f(\lambda)$. Resumiendo

$$\mu_{f_1}(\lambda) = \begin{cases} \mu_f(\lambda) & \text{si } \lambda < f^*(t^m) \\ 0 & \text{si } \lambda \geq f^*(t^m) \ . \end{cases}$$



Calculamos ahora f_1^*. Si $s \leq t^m$, $\mu_{f_1}(\lambda) \leq s$ para todo $\lambda \geq f^*(t^m)$, luego $f_1^*(s) = f^*(t^m)$. Si $s > t^m$, $\mu_{f_1}(\lambda) \leq s$ si y sólo si $\mu_f(\lambda) \leq s$, luego $f_1^*(s) = f^*(s)$. Por tanto

$$f_1^*(s) = \text{mín}\{f^*(t^m), f^*(s)\} \ .$$

Esta reordenada será utilizada en la prueba de un importante teorema de la Teoría de Interpolación (véase *Parte III - Teo 1.21*).

Proposición 1.7 Sean f, g, f_n $(n = 1, 2, ...)$ en $M_0(R, \mu)$ y a un escalar cualquiera. La reordenada decreciente f^* es una función no negativa, decreciente y continua por la derecha en $[0, \infty)$. Además

I) $|g| \leq |f|$ μ-c.t.p. $\Rightarrow g^* \leq f^*$

II) $(af)^* = |a|f^*$

III) $(f + g)^*(t_1 + t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$, $t_1, t_2 \geq 0$

IV) $|f| \leq \liminf_{n\to\infty} |f_n|$ μ-c.t.p $\Rightarrow f^* \leq \lim_{n\to\infty} {f_n}^*$
en particular:
$|f_n| \nearrow |f|$ μ-c.t.p. $\Rightarrow {f_n}^* \nearrow f^*$

V) $f^*(\mu_f(\lambda)) \leq \lambda$, $\mu_f(\lambda) < \infty$ *y* $\mu_f(f^*(t)) \leq t$, $f^*(t) < \infty$

VI) f y f^* son equimedibles

VII) $(|f|^p)^* = (f^*)^p$, $(0 < p < \infty)$

Demostración Que f^* es no negativa, decreciente y continua por la derecha se sigue de *Prop. 1.3* y el hecho de ser f^* en sí misma una función de distribución (recordemos $f^* = m_{\mu_f}$). Del mismo modo, la primera y cuarta de las condiciones son consecuencia de sus homólogos en *Prop. 1.3*. La segunda vuelve a ser consecuencia de su homólogo en *Prop. 1.3* y la definición de reordenada decreciente

$$\begin{aligned}(af)^*(t) &= \sup\{\lambda \,:\, \mu_{af}(\lambda) > t\} = \sup\left\{\lambda \,:\, \mu_f\left(\frac{\lambda}{|a|}\right) > t\right\} = \sup\{|a|\omega \,:\, \mu_f(\omega) > t\} \\ &= |a| \sup\{\omega \,:\, \mu_f(\omega) > t\} = |a|f^* \,.\end{aligned}$$

Veamos ahora la quinta condición. Por un lado, fijamos $\lambda \geq 0$ y supongamos $t = \mu_f(\lambda)$ finito; la definición de f^* nos da

$$f^*(\mu_f(\lambda)) = f^*(t) = \inf\{\lambda' \,:\, \mu_f(\lambda') \leq t\} = \inf\{\lambda' \,:\, \mu_f(\lambda') = \mu_f(\lambda)\} \leq \lambda \,.$$

Por otro lado, fijemos $t \geq 0$ y supongamos $\lambda = f^*(t)$ finito. De nuevo por la definición de f^* hay una sucesión $\lambda_n \searrow \lambda$ con $\mu_f(\lambda_n) \leq t$; así, la continuidad por la derecha de μ_f nos da

$$\mu_f(f^*(t)) = \mu_f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mu_f(\lambda_n) \leq t \,.$$

Para probar la tercera condición asumamos $\lambda = f^*(t_1) + g^*(t_2)$ finito (si no, no habría nada que probar) y sea $t = \mu_{f+g}(\lambda)$. Por la primera parte de la condición anterior y la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned}t &= \mu\left(\{x \,:\, |f(x) + g(x)| > f^*(t_1) + g^*(t_2)\}\right) \\ &\leq \mu\left(\{x \,:\, |f(x)| > f^*(t_1)\}\right) + \mu\left(\{x \,:\, |g(x)| > g^*(t_2)\}\right) \\ &= \mu_f(f^*(t_1)) + \mu_g(g^*(t_2)) \leq t_1 + t_2\end{aligned}$$

con lo que, siendo $(f+g)^*$ decreciente y por la segunda parte de la condición anterior

$$(f+g)^*(t_1+t_2) \leq (f+g)^*(t) = (f+g)^*(\mu_{f+g}(\lambda)) \leq \lambda = f^*(t_1)+g^*(t_2)\ .$$

Para ver que f y f^* son equimedibles, tengamos en cuenta que dada una función $f \in M_0$ podemos encontrar una sucesión de funciones simples no negativas f_n $(n=1,2,...)$ tales que $f_n \nearrow |f|$. En vistas de *Ej. 1.6 - b)*, es claro que f_n y f_n^* son equimedibles para cada n, esto es, $\mu_{f_n}(\lambda) = m_{f_n^*}(\lambda)$ para cada $\lambda \geq 0$. Ahora, como $f_n \nearrow |f|$ y $f_n^* \nearrow f^*$ (cuarta condición), *Prop. 1.3 - III* aplicada a cada una de las funciones anteriores muestra que $\mu_f(\lambda) = m_{f^*}(\lambda)$ para cada $\lambda \geq 0$, que es precisamente lo que buscabamos.

Finalmente utilizando la última de las igualdades tenemos

$$\mu_{|f|^p}(\lambda) = \mu_f\left(\lambda^{\frac{1}{p}}\right) = m_{f^*}\left(\lambda^{\frac{1}{p}}\right) = m_{(f^*)^p}(\lambda)\ ,\quad \lambda \geq 0$$

y pasando a reordenadas decrecientes, obtenemos la última condición. ■

A continuación veremos un ejemplo de aplicación de los conceptos y resultados previos a espacios conocidos como los L^p.

Ejemplo 1.8 Sea $f \in \mathcal{M}_0$. Si $0 < p < \infty$, tenemos

$$\int\limits_R |f|^p d\mu = p\int\limits_0^\infty \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\lambda = \int\limits_0^\infty (f^*(t))^p dt$$

Además, en el caso $p = \infty$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in R}|f(x)| = \text{ínf}\{\lambda\ :\ \mu_f(\lambda)=0\} = f^*(0)\ .$$

Demostración Probar la primera expresión, en vista de *Prop. 1.3 - IV*, *Prop. 1.7 - IV* y el *Teorema de Convergencia Monótona*, será suficiente para funciones simples no negativas. Escribiendo f y su reordenada decreciente en las formas del *Ej. 1.6* tenemos

$$\int\limits_R |f|^p d\mu = \sum_{j=1}^n a_j^p \mu(E_j) = \sum_{j=1}^n a_j^p m([m_{j-1}, m_j)) = \int\limits_0^\infty (f^*)^p dm\ .$$

Actuando de forma similar, esta vez con f y su función de distribución, la primera serie de igualdades queda establecida

$$p\int\limits_0^n \lambda^{p-1}\mu_f(\lambda)d\mu = p\sum_{j=1}^n m_j \int\limits_{a_{j-1}}^{a_j} \lambda^{p-1}d\lambda = \sum_{j=1}^n (a_j^p - a_{j-1}^p)m_j = \sum_{j=1}^n a_j^p\mu(E_j) = \int\limits_R |f|^p d\mu$$

donde la tercera igualdad sigue de un sumatorio por partes.

El caso $p=\infty$ se sigue directamente de la definición de $\operatorname{ess\,sup}$ y f^*. ■

2. Espacios invariantes por reordenamiento

La norma de l^p proporciona medidas sobre la magnitud de un vector sin prestar atención a cómo están distribuidas sus entradas, es decir, dado un vector no negativo $(a_1, a_2, ..., a_n)$, su norma

$$\|(a_1, a_2, ..., a_n)\|_{l^p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

depende únicamente de los valores a_1, a_2, ..., a_n, no del orden en que están ordenados.

Ahora buscamos identificar los espacios de funciones cuya norma posee este tipo de propiedad, los llamados espacios invariantes por reordenamiento, que tienen una estructura considerablemente más rica que la del resto de espacios de funciones.

Definición 2.1 Sea ρ una función norma sobre un espacio de medida σ-finita (R, μ). Diremos que ρ es *invariante por reordenamiento* si $\rho(f) = \rho(g)$ para cada par de funciones equimedibles en $\mathcal{M}_0(R, \mu)$. En este caso, el espacio de funciones $X = X(\rho)$ generado por ρ se denomina *espacio invariante por reordenamiento.*

Observemos que un espacio de funciones X será invariante por reordenamiento siempre que, dada una función f en X y g equimedible con f, entonces g también esté en X y $\|f\|_X = \|g\|_X$. Se sigue de *Ej. 1.8* que $L^p(R, \mu)$ es invariante por reordenamiento.

La reordenada decreciente f^* de f es equimedible con f y, en cierto sentido, podría verse como una elección canónica de función equimedible con f. A continuación veremos que muchos de los espacios de funciones invariantes por reordenamiento tienen una caracterización tanto en terminos de f como de f^*, al menos cuando el espacio subyacente es resonante.

Lema 2.2 Sea g una función simple no negativa en (R, μ) y E un conjunto arbitrario de R μ-medible. Entonces

$$\int_E g d\mu \leq \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds \ .$$

Demostración Vamos a expresar g como en *Ejemplo 1.7 - c)*

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_{F_n}(x)$$

donde $F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n$ y $b_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$. Utilizando la formulación para la reordenada decreciente empleada en este mismo ejemplo, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_E g d\mu &= \sum_{j=1}^{n} b_j \mu(E \cap F_j) \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \min\{\mu(E), \mu(F_j)\} = \sum_{j=1}^{n} b_j \int_0^{\mu(E)} \chi_{(0,\mu(F_j))}(s) ds \\ &= \int_0^{\mu(E)} g^*(s) ds \ .\end{aligned}$$

■

Teorema 2.3 - Desigualdad de Hardy-Littlewood Si f y g pertenecen a $\mathcal{M}_0(R, \mu)$, entonces

$$\int_R |fg| d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s) g(s) ds$$

Demostración Como f^* y g^* dependen únicamente del valor absoluto de f y g, es suficiente probar la desigualdad para funciones no negativas. Además, en virtud de *Prop. 1.7 - IV)* y el *Teorema de Convergencia Monótona* podemos suponer f y g simples. Escribimos

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{E_j}(x)$$

donde $E_1 \subset E_2 \subset ... \subset E_m$ y $a_j > 0$ $(j = 1, 2, ..., m)$ y

$$f^*(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j))}(t) \ .$$

Así, por el *Lema 2.2*,

$$\begin{aligned}\int_R |fg| d\mu &= \sum_{j=1}^{m} a_j \int_{E_j} g d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} a_j \int_0^{\mu(E_j)} g^*(s) ds = \int_0^{\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{[0,\mu(E_j)}(s) g^*(s) ds \\ &= \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) ds\end{aligned}$$

como se buscaba. ■

Una consecuencia inmediata del teorema es que

$$\int_R |f\tilde{g}| d\mu \leq \int_0^{\infty} f^*(s) g^*(s) ds$$

para cada función $\tilde{g}$ en R equimedible con g. Gran parte de la teoría de espacios de medida puede ser desarrollada a través de una ligera exigencia sobre la desigualdad anterior: que el supremo de las integrales de la izquierda coincida con el valor de la parte derecha.

Definición 2.4 Un espacio de medida σ-finita (R, μ) se denomina *resonante* si para cada f, g en $M_0(R, \mu)$ se cumple

$$\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds = \sup \int_R |f\tilde{g}|d\mu$$

donde $\tilde{g}$ es cualquier función equimedible con g de R. De igual forma diremos que (R, μ) es *fuertemente resonante* si, bajo las condiciones anteriores, existe $\tilde{g} \in R$ equimedible con g tal que

$$\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds = \int_R |f\tilde{g}|d\mu \ .$$

Definición 2.5 Dado un espacio de medida (R, μ), un conjunto medible A de R se llamará *atómico* si $\mu(A) > 0$ y para cada subconjunto medible $B \subset A$ con $\mu(B) < \mu(A)$, B tiene medida nula. Una medida sin átomos se denominará *no atómica* y cumplira que, dado cualquier conjunto medible A con $\mu(A) > 0$, existirá un subconjunto medible B de A tal que

$$\mu(A) > \mu(B) > 0.$$

El siguiente resultado, cuya demostración se dejará sin incluir, caracteriza los espacios resonantes.

Teorema 2.6 Los espacios resonantes son aquellos que no contienen átomos, o son completamente atómicos con todos los átomos de la misma medida.

Proposición 2.7 Sea ρ un función norma invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Entonces la norma asociada ρ' es también invariante por reordenamiento. Además, las normas ρ y ρ' están dadas por

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \ : \ \rho(f) \leq 1 \right\} \ , \quad g \in \mathcal{M}_0^+$$

$$\rho(f) = \sup \left\{ \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \ : \ \rho'(g) \leq 1 \right\} \ , \quad f \in \mathcal{M}_0^+$$

Demostración Recordemos que la norma asociada ρ' esta definida por

$$\rho'(g) = \sup \left\{ \int_R fgd\mu \ : \ \rho(f) \leq 1 \right\} \ , \quad g \in \mathcal{M}_0^+ \ .$$

Observemos que, si $\rho(f) \leq 1$ y $\bar{f}$ es una función no negativa sobre R equimedible con f, entonces $\rho(\bar{f}) \leq 1$ por ser ρ invariante por reordenamiento. Por lo tanto, el supremo en la igualdad anterior se extienda a toda función f con $\rho(f) \leq 1$ y toda función $\bar{f}$ equimedible con f. Pero entonces, por la definición de espacio resonante, este supremo coincide con el propuesto en el enunciado.

Por otro lado, como cada par de funciones equimedibles tienen la misma reordenada decreciente, se sigue de la igualdad que acabamos de establecer que ρ' es invariante por reordenamiento. Así, podemos aplicar el resultado a ρ' en lugar de a ρ, y como sabemos que $\rho'' = \rho$, la identidad resultante coincide con la segunda de las igualdades propuestas. ■

En particular, este resultado nos permite establecer el siguiente corolario.

Corolario 2.8 Sea X un espacio de funciones sobre un espacio de medida resonante. Entonces X será invariante por reordenamiento si y sólo si lo es el espacio asociado X', y en este caso, las normas vienen dadas por

$$\|g\|'_X = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \,:\, \|f\|_X \leq 1\right\} \,,\quad g \in X'$$

$$\|f\|_X = \sup\left\{\int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \,:\, \|g\|_{X'} \leq 1\right\} \,,\quad f \in X$$

En virtud de *Teo. 2.3, Prop 2.7* y *Cor. 2.8* podemos deducir la siguiente desigualdad de Hölder en el contexto de espacios invariantes por reordenamiento.

Corolario 2.9 - Desigualdad de Hölder Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Si f pertenece a X y g a X', entonces

$$\int_R |fg| d\mu \leq \int_0^\infty f^*(s)g^*(s)ds \leq \|f\|_X \|g\|_{X'} \,.$$

Demostración Se deduce de la composición de *Teo. 2.3*, *Prop 2.7* y *Cor. 2.8*. ■

Definición 2.10 Sea f una función de $M_0(R, \mu)$. Entonces f^{**} denota la *función maximal* de f^* definida por

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \,,\quad t > 0 \,.$$

Definición 2.11 Si f_1 y f_2 pertenecen a $M_0(R,\mu)$, escribiremos $f_1 \prec f_2$ si $f_1^{**} \leq f_2^{**}$, esto es, si para cada $t > 0$

$$\int_0^t f_1^*(s)ds \leq \int_0^t f_2^*(s)ds \ .$$

Esta relación es conocida como la *relación de Hardy-Littlewood-Pólya.*

Proposición 2.12 - Lema de Hardy Sean ξ_1 y ξ_2 funciones medibles no negativas en $(0,\infty)$ y supongamos

$$\int_0^t \xi_1(s)ds \leq \int_0^t \xi_2(s)ds$$

para cada $t > 0$. Sea η una función no negativa y decreciente en $(0,\infty)$. Entonces

$$\int_0^\infty \xi_1(s)\eta(s)ds \leq \int_0^\infty \xi_2(s)\eta(s)ds \ .$$

Demostración Aplicando el *Teorema de Convergencia Monótona*, podemos suponer que η es una función escalonada decreciente. En este caso, puede ser expresada de la forma

$$\eta = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{(0,t_j)}(s)$$

donde cada a_j es mayor que cero y $0 < t_1 < ... < t_n$. Así

$$\int_0^\infty \xi_1 \eta ds = \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} xi_1 ds \leq \sum_{j=1}^n a_j \int_0^{t_j} xi_2 ds = \int_0^\infty xi_2 \eta ds$$

quedando establecido el resultado. ■

La relación de Hardy-Littlewood-Pólya entronca con la teoría de espacios invariante por reordenamiento a través de el siguiente resultado clave.

Teorema 2.13 Sea (R,μ) un espacio de medida resonante y supongamos f_1 y f_2 pertenecientes a $\mathcal{M}_0^+(R,\mu)$. Sea ρ cualquier función norma invariante por reordenamiento sobre (R,μ). Entonces $f_1 \prec f_2$ implica $\rho(f_1) \prec \rho(f_2)$.

Demostración Por la expresión dada por *Prop. 2.7* para ρ es suficiente probar que

$$\int_0^\infty f_1^*(s)g^*(s)ds \leq \int_0^\infty f_2^*(s)g^*(s)ds$$

para cada g satisfaciendo $\rho'(g) \leq 1$, lo cual es consecuencia del *Lema de Hardy* por ser g^* decreciente y no negativa $\blacksquare$

En virtud de *Cor. 2.8*, este resultado nos permite establecer el siguiente corolario.

Corolario 2.14 - Principio de Hardy-Littlewood-Pólya Sea X un espacio invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante. Supongamos $f_1 \in M_0$ y $f_2 \in X$. Si $f_1 \prec f_2$, entonces f_1 pertenece a X y $\|f_1\|_X \leq \|f_2\|_X$.

Durante el desarrollo de los espacios de funciones invariantes por reordenamiento (así como en posteriores secciones) necesitaremos emplear algunas propiedades de la función maximal de f^*. A continuación se enumeran las más importantes; la prueba de estas y otras accesorias puede encontrarse en *Anexos*.

Teorema 2.15 Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finita y supongamos $f,\ g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. Entonces

$$f^* \leq f^{**}$$

y

$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t) \ .$$

Teorema 2.16 Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finita arbitrario y λ una función norma invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Entonces el funcional $\underline{\lambda}$ definido por $\underline{\lambda}(f) = \lambda(f^*)$ $(f \in \mathcal{M}_0^+)$ es una función norma invariante por reordenamiento sobre (R, μ).

Demostración Que $\underline{\lambda}$ cumple las propiedades de función norma sigue directamente de sus equivalentes para λ. La única propiedad que requiere algo más de trabajo es quizás la desigualdad triangular. Sean $f,\ g \in \mathcal{M}_0(R, \mu)$. El lema anterior garantiza

$$(f_1+f_2)^{**} \leq f_1^{**} + f_2^{**} = \frac{1}{t}\int_0^t f_1^*(s)ds + \frac{1}{t}\int_0^t f_1^*(s)ds = \frac{1}{t}\int_0^t f_1^*(s) + f_2^*(s)ds \ .$$

y como $f_1^*(s) + f_2^*(s)$ es decreciente, coincide con su reordenada y se tiene

$$(f_1+f_2)^{**} \leq \frac{1}{t}\int_0^t (f_1^*(s) + f_2^*(s))^* ds = (f_1(t)^* + f_2^*(t))^{**}$$

o lo que es lo mismo, $(f_1^* + f_2^*) \prec f_1^* + f_2^*$. Como $(\mathbb{R}^+, m)$ es resonante, por *Teo. 2.13* para λ obtenemos lo que buscamos

$$\underline{\lambda}(f+g) = \lambda((f+g)^*) \leq \lambda(f^* + g^*) \leq \lambda(f^*) + \lambda(g^*) = \underline{\lambda}(f) + \underline{\lambda}(g) \ .$$

■

El siguiente resultado muestra, en particular, que los espacios invariantes por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ) están completamente determinados por los espacios invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Se trata del *Teorema de Representación de Luxemburg*, cuya demostración, por técnica, se dejará sin incluir (véase [13]).

Teorema 2.17 - Teorema de Representación de Luxemburg Sea ρ una función norma invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Entonces hay alguna (no necesariamente única) función norma invariante por reordenamiento $\bar{\rho}$ sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ tal que $\rho(f) = \bar{\rho}(f^*)$ para cada $f \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu)$. Además, dada σ cualquier función norma invariante por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$ que representa a ρ en el sentido anterior, entonces ρ' está representada por σ' en el mismo sentido, esto es, $\rho'(g) = \sigma'(g^*)$ para cada $g \in \mathcal{M}_0^+(R, \mu)$.

3. La función fundamental

Definición 3.1 Sea X un espacio de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Para cada valor finito de t perteneciente a la imagen de μ, sea E un subconjuto de R con $\mu(E) = t$ y pongamos

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X.$$

Esta función φ_X así definida se denomina *función fundamental* de X.

Observemos que la función φ_X está bien definida al ser independiente de la elección del conjunto E, ya que, si F es otro subconjunto de R con $\mu(F) = t$, entonces χ_E y χ_F son equimedibles y por tanto $\|\chi_E\|_X = \|\chi_F\|_X$ por ser X invariante por reordenamiento.

Si (R, μ) es no atómico, entonces la imágen de μ consiste en el intervalo $[0, \mu(R)]$. En este caso, la función fundamental en $L^p(R, \mu)$ está dada por

$$\varphi_p(t) = t^{\frac{1}{p}}\ ,\ \ 1 \leq p < \infty\ ,\ \ 0 \leq t < \mu(R)$$

y

$$\varphi_\infty(0) = 0,\ \ \varphi_\infty(t) = 1\ ,\ \ 0 < t < \mu(R)$$

El único otro caso de espacio de medida resonante es aquel en el que (R, μ) es completamente atómico con todos sus átomos de la misma medida. Un ejemplo típico es el del conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros con la medida de conteo, cuya imagen es $\mathbb{Z}^+ = \{0, 1, ...\}$. Escribiendo l^p para $L^p(\mathbb{Z})$, tenemos

$$\varphi_{l^p}(n) = n^{\frac{1}{p}}\ ,\ \ 1 \leq p < \infty\ ,\ \ n = 0, 1, ...$$

y

$$\varphi_{L^\infty}(0) = 0,\ \ \varphi_{L^\infty}(t) = 1\ ,\ \ n = 1, 2, ...$$

Teorema 3.2 Sea X un espacio de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida (R, μ), y sea X' es espacio asociado de X. Entonces

$$\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) = t$$

para cada valor finito t en la imagen de μ.

Demostración Si $t = 0$ no hay nada que probar ya que toda función fundamental se anula en el origen. Asumamos, pues, $0 < t < \infty$. Como t pertenece a la imagen de μ, existe un subconjunto E de R con $\mu(E) = t$, luego por la *desigualdad de Hölder*

$$t = \int_E d\mu \leq \|\chi_E\|_X \|\chi_E\|_{X'} = \varphi_X(t)\varphi_{X'}(t) \ .$$

Falta ver la desigualdad contraria. Recordemos

$$\varphi_X(t) = \|\chi_E\|_X = \sup\left\{ \int_E |g| d\mu \mid \|g\|_{X'} \leq 1 \right\} \ .$$

Ahora, para cada g, tomemos $h = \left(\frac{1}{t} \int_E |g| d\mu \right) \chi_E$. Como $h \prec g$, por el *Principio de Hardy-Littlewood-Pólya*, se tiene que

$$\left(\frac{1}{t} \int_E |g| d\mu \right) \varphi_{X'}(t) = \|h\|_{X'} \leq \|g\|_{X'} \leq 1 \ .$$

Así, tomando el supremo de g obtenemos

$$\frac{\varphi_X(t)\varphi_{X'}(t)}{t} \leq 1$$

lo que prueba el resultado. ■

Corolario 3.3 Sea X un espacio de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ). Entonces la función fundamental φ_X de X satisface:

I) φ_X es creciente y $\varphi_X(t) = 0$ si y sólo si $t = 0$

II) $\frac{\varphi_X(t)}{t}$ es decreciente

III) φ_X es continua salvo, quizás, en el origen.

Demostración El hecho de ser creciente se sigue de las propiedades de función norma. El teorema anterior muestra que $\frac{\varphi_X(t)}{t} = \frac{1}{\varphi_{X'}(t)}$ y, por lo tanto, decreciente. La continuidad la probaremos para el caso de ser (R, μ) no atómico; en caso contrario φ_X estaría definida en un subconjunto discreto de $\mathbb{R}^+$ y por lo tanto sería automáticamente continua. En el caso no atómico, φ_x es una función creciente en $(0, \mu(R))$, por lo que en el peor de los casos tendrá saltos discontinuos; pero esto no puede ser para ningún $t_0 > 0$, ya que entonces la segunda condición sería violada a la derecha de t_0. ■

Parte III
Teoremas de interpolación clásicos

1. El Teorema de Riesz-Thorin y el Teorema de Marcinkiewicz

En esta sección vamos a estudiar dos resultados clásicos de la Teoría de Interpolación de operadores: el *Teorema de Interpolación de Riesz-Thorion* y el *Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz*.

Algunos autores sitúan los orígenes de la Teoría de Interpolación de operadores prescisamente en el *Teorema de Riesz-Thorin* (1926). Este nos permite acotar la norma de operadores lineales entre espacios L^p, siempre que se encuentren en el interior de lo que conoceremos como segmento de interpolación. Su utilidad se deriva del hecho de que algunos espacios tienen una estructura bastante más simple que otros; así, pueden probarse propiedades sobre casos simples y utilizar luego el teorema para trasladarlos a casos más complejos.

El *Teorema de Marcinkiewicz* está formulado en el más amplio contexto de los *espacios de Lorentz*, lo que permite que las condiciones para la interpolación sean menos restrictivas. De esta manera, es posible aplicar el resultado a todos aquellos operadores que satisfagan lo que conoceremos como condiciones de tipo débil.

Definición 1.1 Sean (R, μ) y (S, ν) espacios de medida σ-finita y supongamos $1 \leq p, q \leq \infty$. Un operador lineal

$$T : L^p(R, \mu) \longrightarrow L^q(S, \nu)$$

se dirá de *tipo fuerte (p,q)* si existe una constante M tal que, para cada función μ-simple f de R

$$\|Tf\|_q \leq M\|f\|_p \, .$$

En este caso, la constante M se conoce como la *norma de tipo fuerte (p,q)* de T o, simplemente, la *norma* de T.

Acontinuación presentamos el *Teorema de Riesz-Thorin*, cuya utilidad se ha descrito en el inicio de esta sección. Su demostración es técnica y se dejará sin incluir (véase [12]), no obstante, veremos una aplicación directa en la prueba de la *desigualdad de Young*.

Teorema 1.2 - Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin Sea el operador lineal

$$T : L^{p_0}(R, \mu) \longrightarrow L^{q_0}(S, \nu)$$

con norma M_0, i.e.

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0\|f\|_{p_0},$$

y

$$T : L^{p_1}(R,\mu) \longrightarrow L^{q_1}(S,\nu)$$

con norma M_1, i.e.

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}.$$

Entonces, si $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ y

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} .$$

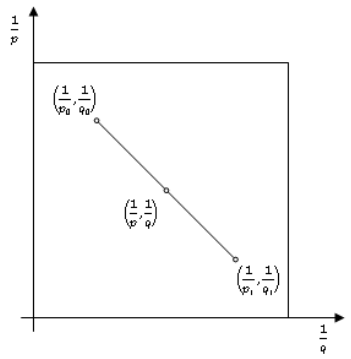
para $0 < \theta < 1$, T es un operador lineal acotado

$$T : L^{p}(R,\mu) \longrightarrow L^{q}(S,\nu)$$

con norma $M \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, i.e.

$$\|Tf\|_{q} \leq M \|f\|_{p}.$$

Notemos, por la estimación superior, que los puntos $\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right)$ son los puntos interiores del segmento de interpolación que va de $\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right)$ a $\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)$.



Ejemplo 1.3 - La desigualdad de Young Sean f, g en $L^1(\mathbb{T})$, donde $\mathbb{T}$ es la circunferencia unidad $\{e^{i\theta} : -\pi < \theta \leq \pi\}$ con la multiplicación como operación de grupo. Se define la **convolución** de f y g como

$$(f * g)(e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{is}) g(e^{i(t-s)}) ds , \quad e^{it} \in \mathbb{T} .$$

Ahora, sean $1 \leq p, q \leq \infty$ con $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces $f * g \in L^r$ y

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Demostración Para una función f fijada en L^1, la estimación

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \ , \ \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

que se sigue inmediatamente de la definición de convolución, muestra el operador lineal $g \longrightarrow f * g$ como un operador acotado de L^1 en L^1 y de L^∞ en L^∞ con norma en cada caso a lo sumo $\|f\|_1$

$$\begin{array}{c} * : L^1 \longrightarrow L^1 \quad , \quad * : L^\infty \longrightarrow L^\infty \\ \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 \ , \ \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty . \end{array}$$

Así, por *Teo. 1.2*, el operador es acotado de L^q en L^q con norma a lo sumo $\|f\|_1$

$$* : L^q \longrightarrow L^q$$

$$\|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q \ .$$

Por otro lado, aplicando la *desigualdad de Hölder* en la definición de convolución, tenemos

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{q'} \|g\|_q \ , \quad f \in L^{q'}, g \in L^q$$

lo que unido a la desigualdad anterior, demuestra que fijado g en L^q el operador $f \longrightarrow f * g$ es acotado de L^1 en L^q y de $L^{q'}$ en L^∞, con norma en cada caso a lo sumo $\|g\|_q$

$$\begin{array}{c} * : L^1 \longrightarrow L^q \ , \ * : L^{q'} \longrightarrow L^\infty \\ \|f * g\|_q \leq \|f\|_1 \|g\|_q \quad , \quad \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_{q'} \|g\|_q . \end{array}$$

Tomando $0 \leq \theta = \frac{q}{p'} \leq 1$, la hipótesis sobre p, q y r implica que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q'} \ , \ \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{\infty} \ .$$

Así, *Teo. 1.2* muestra que $f \longrightarrow f * g$ es un operador acotado de L^p en L^r con norma a lo sumo $\|g\|_q$

$$* : L^p \longrightarrow L^r$$

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \ .$$

■

Considerando el operador «promediante» A definido en $L^1(0,1)$ por

$$(Af)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds \ , \quad 0 < t < 1$$

es posible demostrar que es acotado en L^p para $1 < p < \infty$. Si quisiéramos establecer este resultado apelando a lo que acabamos de ver, necesitaríamos verificar primero que A es acotado en L^∞ y L^1. La acotación en L^∞ es directa por la construcción de A, pero no es acotado en L^1: por ejemplo, considerando una función decreciente de la forma $f(s) = s^{-1}(\log s)^{-2}$ cerca del origen, Af deja de ser integrable. Por tanto, incluso en casos simples como este, no se puede aplicar *Teo. 1.2*.

El teorema de interpolación de Marcinkiewicz es una mejor formulación en el más extenso contexto de espacios de dos parámetros $L^{p,q}$ (espacios de Lorentz), que generalizan los espacios de Lebesgue L^p. Procederemos, pues, a definir los espacios de Lorentz y desarrollar sus propiedades elementales.

Definición 1.4 Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finita y supongamos $0 < p, q \leq \infty$. El *espacio de Lorentz* $L^{p,q} = L^{p,q}(R, \mu)$ consiste en todas las funciones f de $M_0(R, \mu)$ para las cuales

$$\|f\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{0<t<\infty} \{t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\} & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

es finito.

Es claro, a partir de *Parte II - Ej. 1.8* que el espacio de Lorentz $L^{p,p}$ $(0 < p \leq \infty)$ coincide con el espacio de Lebesgue L^p y $\|f\|_{p,p} = \|f\|_p$ para $f \in L^p$. Además, notemos que el espacio $L^{\infty,q}$ con q finito es trivial, ya que contiene únicamente a la función nula.

Proposición 1.5 Supongamos $0 < p \leq \infty$ y $0 < q \leq r \leq \infty$. Entonces

$$\|f\|_{p,r} \leq c\|f\|_{p,q}$$

para cada f en $M_0(R, \mu)$, donde c es una constante que depende únicamente de p, q y r. En particular, existe la inclusión continua $L^{p,q} \hookrightarrow L^{p,r}$.

Demostración Asumamos $p < \infty$ y $q < r$, ya que en otro caso no hay nada que probar. Usando el hecho de que f^* es decreciente, tenemos

$$\begin{aligned} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) &= \left(t^{\frac{q}{p}} f^*(t)^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{p}{q} \int\limits_0^t s^{\frac{q}{p}-1} ds f^*(t)^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{p}{q} \int\limits_0^t (s^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\frac{p}{q} \int\limits_0^t (s^{\frac{1}{p}} f^*(s))^q \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,q} \,. \end{aligned}$$

Luego, tomando el supremo sobre todo $t > 0$, obtenemos

$$\|f\|_{p,\infty} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{p,q}$$

quedando probado el resultado para $r = \infty$. Para el caso $r < \infty$ tenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,r} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^{r-q} (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq \|f\|_{p,\infty}^{1-\frac{q}{r}} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^*(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_{p,\infty}^{1-\frac{q}{r}} \|f\|_{p,q}^{\frac{q}{r}} \end{aligned}$$

lo que combinado con la desigualdad precedente nos lleva al resultado con la constante $c = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{r-q}{rq}}$. ■

En particular, para todo $1 \leq p \leq \infty$,

$$L^{p,1} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L^{p,\infty}.$$

A continuación, para completar nuestro estudio de los espacios invariantes por reordenamiento, introduciremos los índices de Boyd. Aunque no los utilizaremos directamente, resultará interesante realizar su cálculo en los espacios L^p.

Definición 1.6 Para cada $t > 0$ denotamos por E_t al operador *dilatación* definido en $M_0(R^+, m)$ por

$$(E_t f)(s) = f(st)\ .$$

Ahora, sea $X = X(\rho)$ un espacio de funciones invariante por reordenamiento sobre un espacio de medida σ-finita, infinito y no atómico. Los **índices de Boyd** de X son los números $\underline{\alpha}_X$ y $\bar{\alpha}_X$ definidos por

$$\underline{\alpha}_X = \sup_{0<t<1} \frac{\log h_X(t)}{\log t}\ ,\ \bar{\alpha}_X = \inf_{1<t<\infty} \frac{\log h_X(t)}{\log t}$$

donde $h_X(t) = \|E_{\frac{1}{t}}\|_{\mathscr{B}(\bar{X})}$, siendo $\mathscr{B}(\bar{X})$ las aplicaciones lineales acotadas en el espacio de funciones invariante por reordenamiento generado por la norma $\bar{\rho}$ proporcionada por el *Teorema de Representación de Luxemburg*.

Teorema 1.7 Supongamos $1 \leq q \leq p < \infty$ o $p = q = \infty$. Entonces $(L^{p,q}, \|\cdot\|_{p,q})$ es un espacio de funciones invariante por reordenamiento con índices de Boyd superior e inferior ambos iguales a $\frac{1}{p}$.

Demostración El resultado es claro para $p = q = 1$ y $p = q = \infty$, ya que $L^{p,q}$ se reduce a los espacios de funciones L^1 y L^∞ respectivamente. Asumamos, pues, que

$1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq p$. Tomando $q' = \frac{q}{q-1}$, por *Def. 1.4* y *Parte II - Cor. 2.8* tenemos

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{p,q} &= \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}(f+g)^*(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t))^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left\|t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)\right\|_q = \sup\left\{\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)h^*(t)dt \mid \|h\|_{q'} = 1\right\}.\end{aligned}$$

La hipótesis $q \leq p$ implica que $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < 0$, luego $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ y por tanto $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}h^*(t)$ son decrecientes. Entonces, como $(f+g)^* \prec f^* + g^*$ podemos aplicar el *lema de Hardy* y la *desigualdad de Hölder* para obtener

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(f+g)^*(t)h^*(t)dt &\leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^*(t)h^*(t)dt + \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}g^*(t)h^*(t)dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}f^*(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \|h\|_{q'} + \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}g^*(t)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \|h\|_{q'} = \|f\|_{p,q} + \|g\|_{p,q}\end{aligned}$$

ya que h tiene norma 1 en $L^{q'}$. Uniendo las dos expresiones anteriores se establece la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_{p,q}$. El resto de las propiedades de las funciones norma se verifican fácilmente, y la invariabilidad por reordenamiento es directa. Para calcular los índices de Boyd, sea $t > 0$ y consideremos el operador dilatación; realizando un cambio de variables en *Def. 1.4*

$$\|E_t(f^*)\|_{p,q} = \left(\int_0^\infty (s^{\frac{1}{p}}f^*(st))^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\frac{1}{p}}u^{\frac{1}{p}}f^*(u))^q \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{q}} = t^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{p,q}.$$

El operador norma $h(t)$ de $E_{\frac{1}{t}}$ es por tanto igual a $t^{\frac{1}{p}}$ y se sigue de *Def. 1.6* que los dos índices de Boyd son iguales a $\frac{1}{p}$. ■

En particular, los índices de Boyd inferior y superior son ambos iguales a $\frac{1}{p}$ en la familia de espacios de Lebesgue L^p.

Observación Es importante remarcar que hemos tenido que restringirnos al caso $q \leq p$ para poder demostrar la desigualdad triangular de la norma $\|\cdot\|_{p,q}$. A continuación, veremos que existe un funcional equivalente que es una norma para todo $q \geq 1$.

Definición 1.8 Supongamos $1 < p \leq \infty$ y $0 < q \leq \infty$. Si $f \in M_0(R, \mu)$ llamamos

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } 0 < q < \infty \\ \sup_{0<t<\infty} \{t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\} & \text{si } q = \infty. \end{cases}$$

Lema 1.9 - Desigualdad de Hardy Sea ψ una función medible no negativa en $(0,\infty)$ y supongamos $-\infty < \lambda < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Entonces

$$\left(\int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t}\int_0^t \psi(s)ds\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1-\lambda}\left(\int_0^\infty (t^\lambda \psi(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

y

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{1-\lambda} \int_t^\infty \psi(s)\frac{ds}{s}\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{1-\lambda}\left(\int_0^\infty (t^{1-\lambda} \psi(t))^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración Escribiendo $\psi(s) = s^{\frac{-\lambda}{q'}} s^{\frac{\lambda}{q'}} \psi(s)$ y aplicando la *desigualdad de Hölder* obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\int_0^t \psi(s)ds &\leq \left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{-\lambda}ds\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\frac{1}{t}\int_0^t s^{\frac{\lambda q}{q'}}\psi(s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (1-\lambda)^{-\frac{1}{q'}} t^{-\frac{\lambda}{q'}-\frac{1}{q}} \left(\int_0^t s^{\lambda(q-1)}\psi(s)^q ds\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Por tanto, con un intercambio en el orden de integración

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(t^\lambda \frac{1}{t}\int_0^t \psi(s)ds\right)^q \frac{dt}{t} &\leq (1-\lambda)^{1-q}\int_0^\infty t^{\lambda-2}\int_0^t s^{\lambda(q-1)}\psi(s)^q ds dt \\ &= (1-\lambda)^{1-q}\int_0^\infty s^{\lambda(q-1)}\psi(s)^q \int_s^\infty t^{\lambda-2}dtds .\end{aligned}$$

Realizando la integración en t y tomando las raíces q-ésimas, obtenemos la primera desigualdad. La prueba de la segunda es similar. ■

En ocasiones, trabajar con tantos exponentes e integrales como requieren las desigualdades anteriores puede resultar confuso. Por ello, vamos a introducir para el lema anterior una nueva notación mucho más clara que aligerará la lectura y seguimiento de los futuros resultados.

Lema 1.9'- Desigualdad de Hardy Sea ψ una función medible no negativa en $(0,\infty)$ y supongamos $-\infty < \lambda < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$. Entonces

$$\left\| t^{\lambda-1}\int_0^t \psi(s)ds \right\|_{L^q(\frac{dt}{t})} \leq \frac{1}{1-\lambda}\left\| t^\lambda \psi(t)\right\|_{L^q(\frac{dt}{t})}$$

y

$$\left\| t^{1-\lambda} \int_t^{\infty} \psi(s) \frac{ds}{s} \right\|_{L^q(\frac{dt}{t})} \leq \frac{1}{1-\lambda} \left\| t^{1-\lambda} \psi(t) \right\|_{L^q(\frac{dt}{t})} .$$

Notemos que lo único que hemos hecho ha sido escribir las expresiones integrales de las *desigualdades de Hardy* en función de la norma de L^q teniendo en cuenta que la medida utilizada es $\frac{dt}{t}$.

Lema 1.10 Si $1 < p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, entonces

$$\|f\|_{p,q} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq p' \|f\|_{p,q}$$

para toda $f \in M_0(R, \mu)$, donde $p' = \frac{p}{p-1}$. En particular, $L^{p,q}$ consiste en todas las funciones f para las cuales $\|f\|_{(p,q)}$ es finita.

Demostración La primera desigualdad es inmediata de *Def. 1.4* y *Def. 1.8* y el hecho de que $f^* \leq f^{**}$. La segunda se sigue del *Lema 1.9*

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^{\infty} (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \left\| t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s) ds \right\|_{L^q(\frac{dt}{t})} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \left\| t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right\|_{L^q(\frac{dt}{t})} \\ &= p' \|f\|_{p,q} . \end{aligned}$$

■

Teorema 1.11 Si $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ o si $p = q = \infty$, entonces $(L^{p,q}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ es un espacio de funciones invariante por reordenamiento cuyos índices de Boyd inferior y superior valen ambos $\frac{1}{p}$.

Demostración Como $f \longrightarrow f^{**}$ es subaditiva, la desigualdad triangular se deduce de la *desigualdad de Minkowski clásica.* El resto de propiedades de norma, así como la invariabilidad por reordenamientos son directas. ■

Vale la pena señalar que si $1 \leq p < \infty$, el espacio $L^{p,1}$, equipado con la norma $\|\cdot\|_{p,1}$, coinciden con el espacio de Lorentz $\Lambda(L^p)$ y

$$\|f\|_{p,1} = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \frac{dt}{t} = p \|f\|_{\Lambda(L^p)}$$

Por otro lado, si $1 < p \leq \infty$, se puede demostrar que $L^{p,\infty}$ equipado con la norma $\|\cdot\|_{(p,\infty)}$ coincide con el espacio de Lorentz $M(L^p)$ y

$$\|f\|_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \|f\|_{M(L^p)} .$$

En particular, si $1 < p < \infty$, $L^{p,1}$ y $L^{p,\infty}$, con las normas adecuadas, son respectivamente el más pequeño y el más grande de los espacios invariantes por reordenamiento teniendo la misma función fundamental que L^p. Estos espacios jugarán un papel muy importante en el teorema de interpolación débil que se discutirá más adelante.

A continuación demostraremos un lema que nos será útil a la hora de calcular el espacio asociado a un espacio de Lorentz dado $L^{p,q}$.

Lema 1.12 Sea $g \in \mathbb{R}^+$ con $g = g^*$ y consideremos la función

$$\phi(s) = s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1} \ , \quad s > 0$$

Entonces tenemos las acotación

$$c \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s)\frac{ds}{s} \leq \phi(s) \leq c' \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s)\frac{ds}{s} \ .$$

Demostración Por ser g una función simple tenemos que

$$g(s) = g^*(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[m_{i-1},m_i)}$$

con $0 < a_n < ... < a_1$, $0 = m_0 < ... < m_n$. Si $s \in [0, m) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [m_{i-1}, m_i)$ tenemos que $a_n \leq g^*(s) \leq a_1$, luego $a'_n \leq g^*(s)^{q'-1} \leq a'_1$ y

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t} a'_n s^{\frac{q'}{p'}-1} \frac{ds}{s} \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s)\frac{ds}{s} \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} a'_1 s^{\frac{q'}{p'}-1} \frac{ds}{s} \ .$$

Supongamos que $\frac{q'}{p'} \neq 1$. Entonces tenemos la serie de acotaciones

$$a'_n \left[\frac{s^{\frac{q'}{p'}-1}}{\frac{q'}{p'}-1} \right]_{\frac{t}{2}}^{t} \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s)\frac{ds}{s} \leq a'_1 \left[\frac{s^{\frac{q'}{p'}-1}}{\frac{q'}{p'}-1} \right]_{\frac{t}{2}}^{t}$$

y

$$\frac{a'_n}{\frac{q'}{p'}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q'}{p'}-1} \right) t^{\frac{q'}{p'}-1} \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s)\frac{ds}{s} \leq \frac{a'_1}{\frac{q'}{p'}-1} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{q'}{p'}-1} \right) t^{\frac{q'}{p'}-1} \ .$$

Llegamos así a $c_1 t^{\frac{q'}{p'}-1} \leq \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s)\frac{ds}{s} \leq c_2 t^{\frac{q'}{p'}-1}$ para $t \in [0, m)$. Por último

$$\phi(s) = s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1} \leq s^{\frac{q'}{p'}-1} a'_1 \frac{c_1}{c_1} \leq \frac{a'_1}{c_1} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s)\frac{ds}{s}$$

y

$$\phi(s) = s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1} \geq s^{\frac{q'}{p'}-1} a'_n \frac{c_2}{c_2} \geq \frac{a'_n}{c_1} \int_{\frac{t}{2}}^{t} \phi(s) \frac{ds}{s} \ .$$

El caso $\frac{q'}{p'}$ se resuelve de manera similar. ■

En el siguiente resultado, podemos ver una aplicación explícita del *Teorema de Representación de Luxemburg.*

Teorema 1.13 Sea (R, μ) un espacio resonante de medida y supongamos $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$ (o $p = q = 1$ o $p = q = \infty$). Entonces, el espacio asociado de $L^{p,q}(R, \mu)$ es el espacio de Lorentz $L^{p',q'}(R, \mu)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Demostración Si $p = q = 1$ o $p = q = \infty$, el resultado se reduce al conocido hecho de que L^1 y L^∞ son mutuamente asociados. Asumamos $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Por la *desigualdad de Hölder* tenemos

$$\left| \int_R fg d\mu \right| \leq \int_0^\infty f^*(t) g^*(t) dt \leq \int_0^\infty f^{**}(t) g^{**} dt = \int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t))(t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t)) \frac{dt}{t}$$
$$\leq \|f\|_{(p,q)} \|g\|_{(p',q')}.$$

Por tanto, tomando el supremo sobre toda f con norma a lo sumo 1, obtenemos

$$\|g\|_{(L^{p,q})'} \leq \|g\|_{(p',q')} \ , \quad g \in L^{p',q'} \ .$$

La desigualdad opuesta la probaremos para el espacio de medida $(\mathbb{R}^+, m)$ y funciones g en $\mathbb{R}^+$ tales que $g = g^*$. Supongamos, primero, $1 < q < \infty$ y que $g = g^*$ es simple. Sea

$$f(t) = \int_{\frac{t}{2}}^{\infty} \phi(s) \frac{ds}{s} \ , \quad t > 0$$

donde $\phi(s) = s^{\frac{q'}{p'}-1} g^*(s)^{q'-1}$ $(s > 0)$. Entonces $f = f^*$ y por el *Lema 1.12*

$$\|g\|_{p',q'}^{q'} = \int_0^\infty \phi(s) g^*(s) ds \leq c \int_0^\infty \left(\int_{\frac{s}{2}}^{s} \phi(t) \frac{dt}{t} \right) g^*(s) ds \leq c \int_0^\infty f^*(s) g^*(s) ds$$
$$\leq c \|f\|_{(p,q)} \|g\|_{(L^{p,q})'}$$

donde c es una constante que depende de p y q. Sin embargo, por *Lema 1.10* y la desigualdad de Hardy, tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,q)} &\leq p'\|f\|_{p,q} = p'\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}} \int_{\frac{1}{2}}^\infty \phi(s)\frac{ds}{s})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = p'\left\| t^{\frac{1}{p}} \int_{\frac{t}{2}}^\infty \phi(s)\frac{ds}{s}\right\|_{L^p(\frac{dt}{t})} \\
&\leq p'\frac{1}{1-\frac{1}{p'}}\|t^{\frac{1}{p}}\phi(t)\|_{L^p(\frac{dt}{t})} = pp'\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p}+\frac{q'}{p'}-1} g^*(t)^{q'-1})^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= pp'\left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{p'}} g^*(t))^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = pp'\|g\|_{p',q'}^{\frac{q'}{q}}
\end{aligned}$$

que combinado con la expresión anterior da

$$\|g\|_{p',q'} \leq \|g\|_{(L^{p,q})'} \ .$$

Esto se cumple para toda función simple y tal que $g = g^*$ en $(L^{p,q})'(\mathbb{R}^+, m)$. Ahora bien, el *Teorema de Representación de Luxemburg* nos permite determinar los espacios invariantes por reordenamiento sobre un espacio de medida resonante (R, μ) por los espacios invariantes por reordenamiento sobre $(\mathbb{R}^+, m)$. Esto, junto con la *propiedad de Fatou* nos permite asegurar que la propiedad sigue siendo válida para toda función g en $(L^{p,q})'(R, \mu)$ donde (R, μ) es resonante. La prueba es similar para $q = 1$ y $q = \infty$. ■

Corolario 1.14 Si (R, μ) es resonante y $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ (o $p = q = 1$), entonces el espacio dual $(L^{p,q})^*$ de $L^{p,q}(R, \mu)$ puede ser identificado con el espacio asociado $L^{p',q'}$ (con normas equivalentes).

Demostración Supongamos $1 < p < \infty$. Es fácil ver, directamente de *Def. 1.8* que $L^{p,q}$ tiene norma absolutamente continua cuando $1 \leq q < \infty$. Por tanto, el corolario se sigue de I-*Cor. 4.3.* ■

Definición 1.15 Sean (R, μ) y (S, ν) espacios de medida σ-finita y supongamos $1 \leq p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Sea T un operador definido en $L^{p,1}(R, \mu)$ y que toma valores en $M_0(S, \nu)$. Entonces T se dice de *tipo débil (p,q)* si es un operador acotado de $L^{p,1}(R, \mu)$ en $L^{q,\infty}(S, \nu)$, esto es,

$$T : L^{p,1}(R, \mu) \longrightarrow L^{q,\infty}$$
$$\|Tf\|_{q,\infty} \leq M\|f\|_{p,1} \ .$$

La menor contante M para la que se cumple la desigualdad se denomina la *norma de tipo débil (p,q)* de T.

Definición 1.16 Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, con $q_0 \neq q_1$. Sea $\sigma = \left[\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right), \left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right)\right]$ el segmento de interpolación visto en el *Teorema de Riesz-Thorin* y denotemos por

$$m = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}}{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

su pendiente. Para cada $t > 0$, se define el *operador de Calderón*, denotado por S_σ, como

$$S_\sigma f(t) = t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f(s) \frac{ds}{s} + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f(s) \frac{ds}{s} \, .$$

El operador de Calderón resultará fundamental para continuar con el desarrollo de la Teoría de Interpolación ya que nos permitirá reconocer operadores de tipo débil y facilitará su manipulación.

Lema 1.17 Si f es una función medible no negativa en $(0, \infty)$, entonces, para cada $t, u > 0$,

$$S_\sigma f(t) \leq \max\left\{ \left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{q_0}}, \left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{q_1}} \right\} S_\sigma f(u) \, .$$

En particular, S_σ es decreciente y, para cada $t > 0$,

$$S_\sigma f(t) = (S_\sigma f)^*(t) \leq S_\sigma f^*(t) \, .$$

Demostración En primer lugar, notemos que el operador de Calderón puede escribirse como

$$S_\sigma f(t) = \int_0^\infty f(s) \min\left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_0}}}{t^{\frac{1}{q_0}}}, \frac{s^{\frac{1}{p_1}}}{t^{\frac{1}{q_1}}} \right\} \frac{ds}{s}$$

con lo que S_σ es decreciente. Esto, junto con la estimación

$$\min_{j=0,1} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}}}{t^{\frac{1}{q_j}}} \right\} \leq \min_{j=0,1} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}}}{u^{\frac{1}{q_j}}} \right\} \max_{i=0,1} \left\{ \left(\frac{u}{t}\right)^{\frac{1}{q_i}} \right\}$$

nos da la primera desigualdad del enunciado. Para la restante, tomemos para cada $t > 0$

$$k_t(s) = \frac{1}{s} \min_{j=0,1} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}}}{t^{\frac{1}{q_j}}} \right\} = \min_{j=0,1} \left\{ \frac{s^{\frac{1}{p_j}-1}}{t^{\frac{1}{q_j}}} \right\}$$

que es una función decreciente en s. Así, por la *desigualdad de Hardy-Littlewood* obtenemos

$$S_\sigma f(t) = \int_0^\infty f(s) k_t(s) ds \leq \int_0^\infty f^*(s) k_t(s) ds = S_\sigma f(t)$$

y como el $S_\sigma f$ coincide con su reordenada (es decreciente), tenemos la desigualdad buscada. ■

Lema 1.18 Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$, con $q_0 \neq q_1$. Entonces, para cada f en $L^{p_i,1}(R^+)$ $(i = 0, 1)$ tenemos

$$t^{\frac{1}{q_i}} S_\sigma f^*(t) \leq \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_i}} f^*(s) \frac{ds}{s} \ , \quad t > 0 \ .$$

En particular, el operador de Calderón S_σ es de tipo (p_0, q_0) y (p_1, q_1) débil.

Demostración De la definición de S_σ tenemos

$$t^{\frac{1}{q_0}} S_\sigma(f^*)(t) = \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} + t^{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s}$$

Además, la hipótesis $p_0 < p_1$ implica que

$$t^{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_1}} = (t^m)^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} \leq s^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}}$$

siempre que $s \geq t^m$. Esta estimación permite combinar las integrales para obtener la desigualdad buscada en el caso $i = 0$. Algo similar puede hacerse para el caso $i = 1$. Para ver la condición de los tipos débiles, basta aplicar el lema anterior

$$t^{\frac{1}{q_i}} [S_\sigma f]^*(t) \leq t^{\frac{1}{q_i}} S_\sigma f^*(t) \leq \int_0^\infty t^{\frac{1}{p_i}} f^*(t) \frac{dt}{t} = \|f\|_{p_i,1}$$

y tomar el supremo sobre $t > 0$ en la izquierda. ∎

Definición 1.19 Sean (R, μ) y (S, ν) conjuntos de medida σ-finita. Sea T un operador cuyo dominio es un subespacio lineal de $M_0(R, \mu)$ y cuyo rango está contenido en las funciones ν-medibles de S. Entonces T se dice *cuasi-lineal* si hay una constante $k \geq 1$ tal que las relaciones

$$|T(f + g)| \leq k(|Tf| + |Tg|) \ , \quad |T(\lambda f)| = |\lambda||Tf|$$

se cumplen ν-c.t.p en S para cada f y g en el dominio de T y cada escalar λ.

Definición 1.20 Bajo las condiciones de *Def. 1.19* un operador T cuasi-lineal se dice de *tipo débil conjunto* $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ si

$$(Tf)^*(t) \leq M S_\sigma f^*(t) \ , \quad t > 0$$

para toda f satisfaciendo $S_\sigma f(t) < \infty$. El menor valor de M para el que se cumple la condición se conoce como la *norma débil conjunta* $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ de T.

Teorema 1.21 Supongamos $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ y $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$ con $q_0 \neq q_1$. Entonces el operador cuasi-lineal T es de tipo débil conjunto $(p_0, q_0; p_1, q_1)$ si y sólo si es de tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1), i.e.

$$(Tf)^*(t) \leq M S_\sigma f^*(t) \Leftrightarrow \begin{cases} \|Tf\|_{q_0,\infty} \leq M_0 \|f\|_{p_0,1} \\ \|Tf\|_{q_1,\infty} \leq M_1 \|f\|_{p_1,1} \end{cases}$$

Demostración $\Longleftarrow$: Supongamos T de tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1). Sea $f \in (L^{p_0,1} + L^{p_1,1})(R, \mu)$ y fijemos $t > 0$. Tomando m como en anteriores ocasiones (la pendiente del segmento de interpolación), definimos

$$f_1(x) = \text{mín}\{|f(x)|, f^*(t^m)\} \cdot sgn\, f(x)$$

$$f_0(x) = f(x) - f_1(x) = [|f(x)|, f^*(t^m)]^+ \cdot sgn\, f(x)$$

Entonces (Veasé *Parte II - Ej. 1.6*)

$$f_1^*(s) = \text{mín}\{f^*(s), f^*(t^m)\}\ , \quad s > 0$$

y

$$\|f_1\|_{p_1,1} = \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f_1^*(s) \frac{ds}{s} = \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_1}} f^*(t^m) \frac{ds}{s} + \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s}$$
$$= p_1 t^{\frac{m}{p_1}} f^*(t^m) + \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s}\ .$$

De forma similar

$$f_0^*(s) = [f^*(s) - f^*(t^m)]^+\ , \quad s > 0$$

y

$$\|f_0\|_{p_0,1} = \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_0}} f_0^*(s) \frac{ds}{s} = \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} (f^*(s) - f^*(t^m)) \frac{ds}{s} = \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} - p_0 t^{\frac{m}{p_0}} f^*(t^m)\ .$$

Supongamos ahora T cuasi-lineal con constante k. Como $f = f_0 + f_1$, tenemos, por *Def. 1.19* y las propiedades de las reordenadas

$$(Tf)^*(t) \leq [k(|Tf_0| + |Tf_1|)]^*(t) \leq k\left[(Tf_0)^*\left(\frac{t}{2}\right) + (Tf_1)^*\left(\frac{t}{2}\right)\right]\ .$$

Además, la hipótesis de tipo débil ($\|Tf\|_{q_i,\infty} \leq M_i \|f\|_{p_i,1}$) nos da

$$(Tf_i)^*\left(\frac{t}{2}\right) \leq \left(\frac{t}{2}\right)^{-\frac{1}{q_i}} M_i \|f_i\|_{p_i,1}\ , \quad i = 0, 1\ .$$

Combinando estas estimaciones obtenemos

$$(Tf)^*(t) \leq c \left[\frac{t^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0} \|f_0\|_{p_0,1} + \frac{t^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1} \|f_1\|_{p_1,1} \right]$$

con $c = k \max_i \{p_i M_i 2^{\frac{1}{q_i}}\}$. Incorporando las equivalencias establecidas anteriormente para las normas,

$$(Tf)^*(t) \leq c \left[\frac{t^{-\frac{1}{q_0}}}{p_0} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} - t^{\frac{m}{p_0} - \frac{1}{q_0}} f^*(t^m) + t^{\frac{m}{p_1} - \frac{1}{q_1}} f^*(t^m) + \frac{t^{-\frac{1}{q_1}}}{p_1} \int_{t^m}^{\infty} s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s} \right]$$

y puesto que los términos $f^*(t^m)$ se cancelan (se comprueba fácilmente por la definición de m), la estimación está mayorada por $cS_\sigma f^*(t)$. Por tanto, T es de tipo débil conjunto $(p_0, q_0; p_1, q_1)$.

$\Longrightarrow$: Es consecuencia directa de *Lema 1.18* y *Def. 1.20*

$$t^{\frac{1}{q_i}} (Tf)^*(t) \leq t^{\frac{1}{q_i}} S_\sigma f^*(t) \leq \int_0^\infty s^{\frac{1}{p_i}} f^*(s) \frac{ds}{s} = \|f\|_{p_i,1} \ .$$

Sólo resta tomar supremo en $t > 0$ en la parte de la izquierda de la desigualdad para obtener la condición buscada. ■

Notemos que en caso de que T fuese de tipo débil conjunto $(p_0, q_0; \infty, q_1)$, con $p_0 < \infty$, con este argumento podemos únicamente concluir que T es de tipo débil (p_0, q_0).

Una simple modificación en la demostración muestra que si T es de tipo débil (p_0, q_0) con $p_0 < \infty$ y de tipo fuerte (∞, q_1), entonces T será de tipo débil conjunto $(p_0, q_0; \infty, q_1)$. Basta remplazar $\|f_1\|_\infty = f^*(t^m)$ para la norma de f_1 y la hipótesis del tipo fuerte se traduce como

$$T : L^\infty \longrightarrow L^{q_1} \hookrightarrow L^{q_1,\infty}$$

así, en el caso $i = 1$ de la demostración debe reemplazarse la estimación

$$(Tf_1)^* \left(\frac{t}{2} \right) \leq \left(\frac{t}{2} \right)^{-\frac{1}{q_1}} M_1 \|f_1\|_\infty \ .$$

Ahora estamos en condiciones de presentar el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.22 - Teorema de interpolación de Marcinkiewicz Supongamos $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ y $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$. Sea T un operador cuasi-lineal definido en $(L^{p_0,1} + L^{p_1,1})(R, \mu)$ y tomando valores en $M_0(S, \nu)$, donde (R, μ) y (S, ν) son espacios de medida σ-finita. Supongamos que T es de tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1), con normas de tipo débil M_0 y M_1 respectivamente, i.e.

$$T : L^{p_0,1}(R,\mu) \longrightarrow L^{q_0,\infty}(S,\nu) \quad , \quad T : L^{p_1,1}(R,\mu) \longrightarrow L^{q_1,\infty}(S,\nu)$$

$$\|Tf\|_{q_0,\infty} \leq M_0 \|f\|_{p_0,1} \qquad , \qquad \|Tf\|_{q_1,\infty} \leq M_1 \|f\|_{p_1,1} \, .$$

Entonces, si $1 \leq r \leq \infty$, $q_0 \neq q_1$ y

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

para $0 < \theta < 1$, T es un operador acotado

$$T : L^{p,r} \longrightarrow L^{q,r}$$

$$\|Tf\|_{q,r} \leq M \|f\|_{p,r}$$

con norma $M = \frac{c}{\theta(1-\theta)} \max M_0, M_1$, donde c es una constante que depende únicamente de p_0, q_0, p_1, q_1 y r.

Demostración Notemos, en primer lugar, que con m definida como en *Lema 1.15*, tenemos

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} \; , \; \frac{1}{m}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} \, .$$

Por el teorema anterior sabemos que T es de tipo débil conjunto $(p_0, q_0; p_1,$
$q_1)$ con norma débil conjugada $M \leq c \max\{M_0, M_1\}$, donde c depende sólo de p_0, q_0, p_1 y q_1. Por tanto, en el caso $r < \infty$ tenemos

$$\|Tf\|_{q,r} = \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}}(Tf)^*(t))^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}} \leq M \left(\int_0^\infty (t^{\frac{1}{q}} S_\sigma(f^*)(t))^r \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= M \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}} \left(t^{-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s} + t^{-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s}\right)\right)^r \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}} .$$

Aplicando la *desigualdad de Minkowsky clásica*, obtenemos

$$\|Tf\|_{q,r} \leq M \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_0}} \int_0^{t^m} s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s}\right)^r \frac{dt}{t} + \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_1}} \int_{t^m}^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s}\right)^r \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{r}} .$$

Haciendo el cambio de variable $t^m = u$, por las igualdades establecidas inicialmente en la que intervenía m llegamos a

$$\|Tf\|_{q,r} \leq M|m|^{-\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \int_0^u s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s) \frac{ds}{s}\right)^r \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$+ M|m|^{-\frac{1}{r}} \left(\int_0^\infty \left(u^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_u^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s) \frac{ds}{s}\right)^r \frac{du}{u}\right)^{\frac{1}{r}} .$$

Finalmente, aplicando *la desigualdad de Hardy*, la estimación se reduce a

$$
\begin{aligned}
\|Tf\|_{q,r} \leq\ & M|m|^{-\frac{1}{r}} \left[\left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} \int_0^t s^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(s)ds \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} + \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} \int_t^\infty s^{\frac{1}{p_1}} f^*(s)\frac{ds}{s} \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \right] \\
\leq\ & \frac{M|m|^{-\frac{1}{r}}}{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}} \left[\left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}+1} t^{\frac{1}{p_0}-1} f^*(t) \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} + \left\| t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_1}} f^*(t) \right\|_{L^r(\frac{dt}{t})} \right] \\
=\ & M|m|^{-\frac{1}{r}}(c_1+c_2)\|t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\|_{L^r(\frac{dt}{t})} = M|m|^{-\frac{1}{r}}(c_1+c_2)\|f\|_{p,r}
\end{aligned}
$$

con $\frac{1}{c_1} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} = \theta\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)$ y $\frac{1}{c_2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_1} = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\right)$. Así queda establecido el resultado para r finito. El caso $r = \infty$ se demuestra de forma similar. ■

Corolario 1.23 Con los parámetros anteriores, supongamos además que $p_i \leq q_i$ $(i = 0, 1)$. Si T es de tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1), con normas respectivas M_0 y M_1, i.e.

$$T : L^{p_0,1}(R,\mu) \longrightarrow L^{q_0,\infty}(S,\nu) \quad , \quad T : L^{p_1,1}(R,\mu) \longrightarrow L^{q_1,\infty}(S,\nu)$$

$$\|Tf\|_{q_0,\infty} \leq M_0\|f\|_{p_0,1} \qquad , \qquad \|Tf\|_{q_1,\infty} \leq M_1\|f\|_{p_1,1}\ .$$

entonces, para cada $f \in L^p$

$$T : L^p \longrightarrow L^q$$

$$\|Tf\|_q \leq \frac{c}{\theta(1-\theta)} \max\{M_0, M_1\}\|f\|_p$$

donde $c = c(p_0, q_0, p_1, q_1)$ es constante.

Demostración Tomando $r = p$ en el teorema anterior concluimos que

$$T : L^{p,p} = L^p \longrightarrow L^{q,p}$$

Además, se sigue de la nueva condición añadida que $p \leq q$, por lo que usando *Prop. 1.5* vemos que $L^{q,p} \hookrightarrow L^{q,q} = L^q$ y el resultado queda probado. ■

Observación Notemos que ser un operador de tipo débil es una hipótesis más débil que ser de tipo fuerte como se deduce de las inclusiones continuas

$$L^{p,1} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow L^q \hookrightarrow L^{q,\infty}.$$

En este sentido, el *Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz* mejora al *Teorema de Interpolación de Riesz-Thorin* por tener este una condiciones más restrictivas.

Parte IV
Los espacios de Lorentz-Zygmund

1. Espacios $LlogL$ y L_{exp}

El *Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz* describe las propiedades de los operadores de tipo débil en el interior $0 < \theta < 1$ del segmento de interpolación en cuestión. Los casos límite $\theta \to 0$ y $\theta \to 1$ son también de gran interés, y serán el objeto de estudio en esta sección. Los resultados tienen su formulación más natural en espacios de medida finita (R, μ). Por conveniencia, en adelante asumiremos $\mu(R) = 1$.

En esta sección estudiaremos los espacios $LlogL$ y L_{exp}, introducidos por el matemático polaco Antoni Zygmund en 1928. El *Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz* muestra que los operadores de tipo débil conjunto $(1, 1; \infty, \infty)$ son acotados en L^p para $1 < p < \infty$. Los espacios $LlogL$ y L_{exp} entran en escena en los casos límite, $p \to 1$ y $p \to \infty$.

Definición 1.1

i) El espacio de Zygmund $LlogL$ consiste en todas las funciones μ-medibles $f \in R$ para las cuales
$$\int_R |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty \ .$$

ii) El espacio L_{exp} consiste en todas las funciones μ-medibles $f \in R$ para las cuales existe una constante $\lambda = \lambda(f) > 0$ tal que
$$\int_R \exp(\lambda |f(x)|) dx < \infty \ .$$

Estas cantidades están lejos de satisfacer las propiedades de norma. En adelante, trabajaremos para dotar de una norma a los espacios $LlogL$ y $Lexp$. El siguiente resultado, cuya demostración no se incluirá por ser demasiado técnica, nos permitirá dar el primer paso para conseguirlo.

Lema 1.2 Sea ϕ una función no negativa, creciente, y continua por la derecha en $[0, \infty)$ con $\phi(0^+) = 0$ y $\phi(\infty) = \infty$. Sean (R, μ) un espacio de medida σ-finita y f en $M_0(R, \mu)$. Entonces
$$\int_R \phi(|f|) d\mu = \int_0^1 \phi(f^*) dt \ .$$

En particular, tenemos el siguiente par de equivalencias:

$$\int_R |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty \Leftrightarrow \int_0^1 f^*(x) \log^+ f^*(x) dt < \infty$$

$$\int_R \exp(\lambda |f(x)|) dx < \infty \Leftrightarrow \int_0^1 \exp(\lambda f^*(x)) dt < \infty$$

Lema 1.3 Sea f una función μ-medible de R. Tenemos el par de equivalencias:

I)

$$\int_0^1 f^*(x) \log^+ f^*(x) dt < \infty \Leftrightarrow \int_0^1 f^*(x) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt < \infty \ .$$

II)

$$\exists \lambda = \lambda(f) > 0 \text{ t.q.} \int_0^1 \exp(\lambda f^*(x)) dt < \infty$$
$$\Leftrightarrow \exists c = c(f) > 0 \text{ t.q. } f^*(t) \leq c\left(1 + \log \frac{1}{t}\right) \ , \quad 0 < t < 1 \ .$$

Demostración

I) $\Longrightarrow$: Sea $E = \{f^*(t) > t^{-\frac{1}{2}}\}$ y $F = [0,1] \setminus E$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^*(x) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt &= \int_E f^*(x) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt + \int_F f^*(x) \log\left(\frac{1}{t}\right) dt \\
&\leq \int_E f^*(x) \log(f^*(t)^2) dt + \int_F t^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{t}\right) dt \\
&\leq 2 \int_0^1 f^*(x) \log^+ f^*(t) dt + \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{t}\right) dt \ .
\end{aligned}$$

La segunda integral es convergente, así como la primera por hipótesis, con lo que queda probada la implicación.

$\Longleftarrow$: Como f es integrable tenemos, en primer lugar,

$$f^*(t) \leq f^{**}(t) \leq \frac{1}{t} \int_0^1 f^*(t) dt = \frac{\|f\|_1}{t} \ .$$

Asumamos $\|f\|_1 > 0$ (si no, no hay nada que probar), entonces

$$\int_0^1 f^*(x)\log^+ f^*(x)dt \leq \int_0^1 f^*(x)\log^+\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)dt = \int_0^{\text{mín}\{\|f\|_1,1\}} f^*(x)\log\left(\frac{\|f\|_1}{t}\right)dt$$

$$\leq \int_0^1 f^*(x)\log\left(\frac{1}{t}\right)dt + \int_0^1 f^*(x)\log(\|f\|_1)dt$$

$$= \int_0^1 f^*(x)\log\left(\frac{1}{t}\right)dt + \|f\|_1|\log(\|f\|_1)| \ .$$

Como $\|f\|_1 > 0$, la cantidad de la derecha está acotada, así como la de la izquierda por hipótesis. Así, queda probada la implicación.

II) $\Longrightarrow$: Sea

$$K = \int_0^1 \exp(\lambda f^*(t))dt < \infty \ .$$

Por la *desigualdad de Jensen* (ver *Anexos*):

$$\exp(\lambda f^*(t)) \leq \exp(\lambda f^{**}(t)) = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \lambda f^*(s)ds\right) \leq \frac{1}{t}\int_0^1 \exp(\lambda f^*(s))ds \leq \frac{K}{t} \ .$$

Así

$$f^*(t) \leq \frac{1}{\lambda}\log\left(\frac{K}{t}\right) = \frac{1}{\lambda}\left[\log\left(\frac{1}{t}\right) + \log(K)\right] \leq \frac{1}{\lambda}\left(1 + \log\left(\frac{1}{t}\right)\right)\text{máx}\{\log K, 1\} \ .$$

Con lo que la implicación queda probada para la constante
$c = \lambda^{-1}\,\text{máx}\{\log K, 1\}$. ■

Ahora, una integración por partes en la primera de las expresiones obtenidas en el lema nos da

$$\int_0^1 f^*(t)\log\left(\frac{1}{t}\right)dt = \left[\log\left(\frac{1}{t}\right)\int_0^t f^*(s)ds\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)dsdt = \int_0^1 f^{**}(t)dt \ .$$

Notemos que, a la hora de integrar $f^*(s)$, los posibles puntos de discontinuidad tendrán medida nula, con lo que no suponen ningún problema. Esta cantidad, que involucra la función subaditiva $f \to f^{**}$, satisface la desigualdad triangular, con lo que podrá ser directamente utilizada para definir una norma en $LlogL$.

Por otro lado, la segunda expresión del lema involucra a f^* en lugar de la subaditiva f^{**}. Sin embargo, esto no representa ningún problema; el siguiente lema nos proporcionará una expresión con la que definir una norma en L_{exp}.

Lema 1.4 Sea f una función μ-medible de R. Entonces, para $0 < t < 1$, tenemos la equivalencia:

$$f^*(t) \leq c\left(1 + \log\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow f^{**}(t) \leq c\left(1 + \log\frac{1}{t}\right) \ .$$

Demostración $\Longleftarrow$: Es directa por la propiedad $f^* \leq f^{**}$.
$\Longrightarrow$: Basta con ver

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \leq \frac{1}{t}\int_0^t c\left(1 + \log\frac{1}{s}\right) ds = c\left(2 + \log\frac{1}{t}\right) \leq 2c\left(1 + \log\frac{1}{t}\right)$$

con lo que tenemos la implicación para la constante $c' = 2c$. ■

Ahora estamos en condiciones de definir normas para los espacios en estudio.

Definición 1.5 Sea f una función μ-medible de R. Tomaremos

$$\|f\|_{LlogL} = \int_0^1 f^*(t)\log\left(\frac{1}{t}\right) dt = \int_0^1 f^{**}(t)dt$$

y

$$\|f\|_{L_{exp}} = \sup_{0<t<1} \frac{f^{**}(t)}{1 + \log\frac{1}{t}} \ .$$

Se sigue de los resultados previos que $LlogL$ y L_{exp} consisten en las funciones μ-medibles de R para las cuales, respectivamente, las cantidades anteriores son finitas. Además, la subaditividad de f^{**} nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.6 Los espacios $(LlogL, \|\cdot_{LlogL})$ y $(L_{exp}, \|\cdot_{L_{exp}})$ son espacios de funciones invariantes por reordenamiento.

A continuación, veremos la relación de estos espacios entre sí y con los espacios de Lebesgue.

Teorema 1.7 Para cada $1 < p < \infty$ se tienen las inclusiones continuas

$$L^\infty \hookrightarrow L_{exp} \hookrightarrow L^p \hookrightarrow LlogL \hookrightarrow L^1 \ .$$

Los espacios $LlogL$ y L_{exp} son mutuamente asociados y L_{exp} se identifica con el espacio dual de $LlogL$. Además, ambos índices de Boyd de $LlogL$ son iguales a 1 y los dos de L_{exp} son iguales a 0.

Demostración Veamos, en primer lugar, que L_{exp} es equivalente al espacio asociado de $LlogL$. Sea $g \in LlogL'$; por la *desigualdad de Hölder*, para $0 < t < 1$

$$tg^{**}(t) = \int_0^t g^*(s)ds = \int_0^1 \chi_{[0,t]}(s)g^*(s)ds \leq \|\chi_{[0,t]}\|_{LlogL}\|g\|_{LlogL'} \ .$$

La norma de la función característica se puede calcular fácilmente

$$\|\chi_{[0,t]}\|_{LlogL} = \int_0^1 \chi^*_{[0,t]}(s)\log\frac{1}{s}ds = \int_0^t \log\frac{1}{s}ds = t\left(1+\log\frac{1}{t}\right)$$

con lo que dividiendo ambos lados por este valor y tomando el supremo en t, tenemos que $\|g\|_{L_{exp}} \leq \|g\|_{LlogL'}$. Recíprocamente, sea $g \in L_{exp}$; para cada $f \in LlogL$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^*(t)g^*(t)dt &\leq \int_0^1 f^*(t)\left(1+\log\frac{1}{t}\right)\frac{g^{**}(t)}{\left(1+\log\frac{1}{t}\right)}dt \leq \|g\|_{L_{exp}}\int_0^1 f^*(t)\left(1+\log\frac{1}{t}\right)dt \\ &\leq \|g\|_{L_{exp}}\left[\int_0^1 f^{**}(t)dt + \int_0^1 f^*(t)\log\frac{1}{t}dt\right] = 2\|f\|_{LlogL}\|g\|_{L_{exp}} \ .\end{aligned}$$

Así, tomando el supremo sobre toda f en la bola unidad de $LlogL$,

$$\|g\|_{LlogL'} \leq 2\|g\|_{L_{exp}} \ .$$

Por tanto, L_{exp} es equivalente al espacio asociado de $LlogL$ y, por el *Teorema de Lorentz-Luxemburg*, $LlogL$ y L_{exp} son mutuamente asociados. Es más, como $LlogL$ tiene norma absolutamente continua, su espacio dual es por tanto isométricamente isomorfo a su espacio asociado, L_{exp}.

Veamos ahora la serie de inclusiones $L^p \hookrightarrow LlogL \hookrightarrow L^1$, ya que el resto se siguen de estas pasando al espacio asociado. La segunda es directa por las definiciones de norma

$$\|f\|_1 = \int_0^1 f^*(t)dt \leq \int_0^1 f^{**}(t)dt = \|f\|_{LlogL} \ .$$

Para la restante, aplicaremos las *desigualdades de Hölder* y *Hardy*:

$$\begin{aligned}\|f\|_{LlogL} &= \int_0^1 f^{**}(t)dt \leq \left(\int_0^1 f^{**}(t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left[\int_0^1 \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right)^p dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\|t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t f^*(s)ds\right\|_{L^p(\frac{dt}{t})} \leq \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\|t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\|_{L^p(\frac{dt}{t})} = p'\left(\int_0^1 (t^{\frac{1}{p}}f^*(t))^p\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= p'\|f\|_p \ .\end{aligned}$$

Resta únicamente calcular los índices de Boyd. Dada una función g en $(0,1)$, el operador dilatación $E_{\frac{1}{t}}$ para $t>1$ esta definido como $E_{\frac{1}{t}}g(s)=g(\frac{s}{t})$ $(0<s<1)$. Por tanto, si $f\in L_{exp}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
[E_{\frac{1}{t}}f^*]^{**}(s) = f^{**}\left(\frac{s}{t}\right) &= \left(1+\log\frac{t}{s}\right)\frac{f^{**}\left(\frac{s}{t}\right)}{1+\log\frac{t}{s}} \leq \left(1+\log\frac{t}{s}\right)\|f\|_{L_{exp}} \\
&= \left(1+\log t+\log\frac{1}{s}\right)\|f\|_{L_{exp}} \leq (1+\log t)\left(1+\log\frac{1}{s}\right)\|f\|_{L_{exp}} .
\end{aligned}
$$

Dividiendo ambos lados por $\left(1+\log\frac{1}{s}\right)$ y tomando el supremo sobre $0<s<1$, vemos que la norma $h(t)$ de $E_{\frac{1}{t}}$ en L_{exp} satisface $h(t)\leq(1+\log t)$ $(t>1)$. Así

$$\bar{\alpha}=\inf_{t>1}\frac{\log h(t)}{\log t}\leq\inf_{t>1}\frac{\log(1+\log t)}{\log t}=0$$

Ahora, aunque no hemos desarrollado la teoría necesaria, es un resultado conocido que los índices de Boyd satisfacen

$$1\leq\underline{\alpha}\leq\bar{\alpha}\leq 1$$

y que los índices de Boyd de un espacio de funciones invariante por reordenamiento y su asociado están relacionados por

$$\underline{\alpha}'=1-\bar{\alpha}\ ,\ \ \bar{\alpha}'=1-\underline{\alpha}$$

(véase [8]). Esto asegura que los indices de Boyd de L_{exp} son ambos iguales a 0 y, por tanto, los dos de $LlogL$ son iguales a 1. ■

Teorema 1.8 Sea T un operador cuasi-lineal. Sean (R,μ) y (S,ν) espacios de medida finita (asumimos $\mu(R)=\nu(S)=1$).

I) Sea $1<p,q\leq\infty$. Si T es de tipo débil conjunto $(1,1;p,q)$, i.e.

$$
\begin{aligned}
T:L^1(R,\mu)\longrightarrow L^{1,\infty}(S,\nu)\ &,\ \ T:L^{p,1}(R,\mu)\longrightarrow L^{q,\infty}(S,\nu)\\
\|Tf\|_{1,\infty}\leq M_0\|f\|_1\qquad &,\qquad \|Tf\|_{q,\infty}\leq M_1\|f\|_{p,1}
\end{aligned}
$$

entonces T es un operador acotado de $LlogL$ en L^1, i.e.

$$
\begin{aligned}
T: LlogL(R,\mu)\longrightarrow L^1(S,\nu)\\
\|Tf\|_1\leq M\|f\|_{LlogL}\ .
\end{aligned}
$$

II) Sea $1\leq p,q<\infty$. Si T es de tipo débil conjunto $(p,q;\infty,\infty)$, i.e.

$$
\begin{aligned}
T:L^{p,1}(R,\mu)\longrightarrow L^{q,\infty}(S,\nu)\ &,\ \ T:L^{\infty,1}(R,\mu)\longrightarrow L^{\infty}(S,\nu)\\
\|Tf\|_{q,\infty}\leq M_0\|f\|_{p,1}\qquad &,\qquad \|Tf\|_{\infty}\leq M_1\|f\|_{\infty,1}
\end{aligned}
$$

entonces T es un operador acotado de L^∞ en L_{exp}, i.e.

$$
\begin{aligned}
T:L^\infty(R,\mu)\longrightarrow L_{exp}(S,\nu)\\
\|Tf\|_{L_{exp}}\leq M\|f\|_\infty\ .
\end{aligned}
$$

Demostración

I) En primer lugar, sabemos

$$(Tf)^* \leq c\left(t^{-1}\int\limits_0^{t^m} sf^*(s)\frac{ds}{s} + t^{\frac{-}{1}q}\int\limits_{t^m}^1 s^{\frac{1}{p}}f^*(s)\frac{ds}{s}\right)$$

con $0 < t < 1$, c constante y $m = \frac{\frac{1}{q}-1}{\frac{1}{p}-1} = \frac{p'}{q'}$. Queremos calcular la norma de Tf en L^1, con lo que integraremos cada uno de los sumandos anteriores. Para el primero, realizando un cambio de variable, obtenemos:

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{t}\int\limits_0^{t^m} f^*(s)dsdt = \frac{1}{m}\int\limits_0^1 \frac{1}{u}\int\limits_0^u f^*(s)dsdu = \frac{1}{m}\int\limits_0^1 f^{**}(u)du\frac{q'}{p'}\|f\|_{LlogL}\ .$$

Para el segundo, intercambiando el orden de integración se tiene

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 t^{-\frac{1}{q}}\int\limits_{t^m}^1 s^{\frac{1}{p}-1}f^*(s)dsdt = \int\limits_0^1 s^{\frac{1}{p}-1}f^*(s)\int\limits_0^{s^{\frac{1}{m}}} t^{-\frac{1}{q}}dtds = \frac{1}{1-\frac{1}{q}}\int\limits_0^1 s^{\frac{1}{p}-1}f^*(s)s^{1-\frac{1}{p}}ds \\ \leq q'\|f\|_{LlogL}\ .\end{aligned}$$

Combinando estas estimaciones, obtenemos finalmente

$$\|Tf\|_1 = \int\limits_0^1 (Tf)^*(t)dt \leq cq'\left(1+\frac{1}{p'}\right)\|f\|_{LlogL}$$

II) En primer lugar sabemos

$$(Tf)^*(t) \leq c\left(t^{-\frac{1}{q}}\int\limits_0^{t^m} s^{\frac{1}{p}}f^*(s)\frac{ds}{s} + \int\limits_{t^m}^1 f^*(s)\frac{ds}{s}\right)$$

con $0 < t < 1$, c constante y $m = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{p}} = \frac{p}{q}$. Si $f \in L^\infty$, tenemos

$$\begin{aligned}(Tf)^*(t) &\leq c\|f\|_\infty\left(t^{-\frac{1}{q}}\int\limits_0^{t^m} s^{\frac{1}{p}-1}ds + \int\limits_{t^m}^1 \frac{ds}{s}\right) = c\|f\|_\infty\left(pt^{-\frac{1}{p}}t^{\frac{1}{p}} - \log t^m\right) \\ &= c\|f\|_\infty\left(p + m\log\frac{1}{t}\right) \leq cp\|f\|_\infty\left(1+\log\frac{1}{t}\right)\ .\end{aligned}$$

Procediendo exactamente igual que en *Lema 1.5* queda

$$(Tf)^{**}(t) \leq 2cp\|f\|_\infty\left(1+\log\frac{1}{t}\right)$$

y por tanto

$$\|Tf\|_{L_{exp}} \leq 2cp\|f\|_\infty\ .$$

■

Ejemplo 1.9 El operador maximal de Hardy-Littlewood M (ver definición y propiedades en *Anexos*) en $\mathbb{T}$ es de tipo débil conjunto $(1,1;\infty,\infty)$ (por ser de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte (∞,∞)), con lo que *Teo. 1.8* garantiza que

$$M : LlogL \longrightarrow L^1$$

$$\|Mf\|_1 \leq c\|f\|_{LlogL}$$

(también que $M : L^\infty \longrightarrow L_{exp}$, lo cual no es de interés por tenerse la propiedad $M : L^\infty \longrightarrow L^\infty$, que es más fuerte). Lo interesante, es que se puede demostrar un recíproco para esta propiedad:

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, entonces Mf es integrable si y sólo si $f \in LlogL$. Además, existen constantes c_1, c_2 tales que

$$c_1\|f\|_{LlogL} \leq \|Mf\|_1 \leq c_2\|f\|_{LlogL}$$

para cada $f \in LlogL$.

Demostración Usando que existen constantes c y c', dependiendo sólo de n, tales que

$$c(Mf)^*(t) \leq f^{**}(t) \leq c'(Mf)^*(t)\ ,\quad t > 0$$

para cada función localmente integrable de $\mathbb{R}^n$, se tiene

$$\frac{1}{c'}\int_0^1 f^{**}(t)dt \leq \int_0^1 (Mf)^*dt \leq \frac{1}{c}\int_0^1 f^{**}(t)dt$$

con lo que basta tomar $c_1 = \frac{1}{c'}$ y $c_2 = \frac{1}{c}$ para obtener el resultado. ■

De esta manera se demuestra la naturaleza intrínseca del espacio $LlogL$: surge de manera natural cuando se investiga la integrabilidad de ciertas funciones maximales. Algunos ejemplos, con resultados relacionados, son el *operador maximal no tangencial* N o el *operador maximal función conjugada* $\mathscr{C}$.

Parte V
Anexos

1. Teoremas clásicos

Se presenta a continuación una serie resultados conocidos que se mencionan en el texto. Para más detalles véanse [2], [7] y [1].

Desigualdad de Young clásica Sean $p, q > 0$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para cada $a, b \geq 0$

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \, .$$

Demostración Teniendo en cuenta que la función exponencial es estrictamente convexa y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\log(ab)) = \exp(\log a + \log b) = \exp\left(\frac{1}{p} p \log a + \frac{1}{q} q \log b\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q\right) \leq \frac{1}{p} \exp(\log a^p) + \frac{1}{q} \exp(\log b^q) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \, . \end{aligned}$$

■

Desigualdad de Hölder clásica Sea (R, μ) un espacio de medida. Sean $p, q > 0$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sean $f \in L^p$, $g \in L^q$, entonces

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \, .$$

Demostración Teniendo en cuenta la *desigualdad de Young*

$$\frac{f}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_q} \leq \frac{f^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{g^q}{q\|g\|_q^q} \, .$$

Así,

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \|g\|_q} = \int \frac{fg}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \int \frac{f^p}{p\|f\|_p^p} + \int \frac{g^q}{q\|g\|_q^q} = \frac{\|f\|_p^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_q^q}{q\|g\|_q^q} == \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, .$$

■

Desigualdad de Minkowski clásica Sea (R, μ) un espacio de medida. Sean $f, g \in L^p$, entonces

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \, .$$

Demostración Teniendo la *desigual de Hölder* y recordando que $p' = \frac{p}{p-1}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int (f+g)^p d\mu = \int (f+g)(f+g)^{p-1} d\mu \\
&= \int f(f+g)^{p-1} d\mu + \int g(f+g)^{p-1} d\mu \\
&\leq \|f\|_p \left(\int (f+g)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \|g\|_p \left(\int (f+g)^{(p-1)\frac{p}{p-1}} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (\|f\|_p \|g\|_p) \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p} \ .
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados por $\frac{\|f+g\|_p}{\|f+g\|_p^p}$, el resultado queda probado. ■

Desigualdad de Jensen Sea (R, μ) un espacio de medida con $\mu(R) = 1$. Sean g una μ-integrable y φ convexa en $[0, \infty)$. Entonces

$$\varphi \left(\int_R g d\mu \right) \leq \int_R (\varphi \circ g) d\mu \ .$$

Demostración Como φ es convexa, podemos elegir a y b tales que $ax + b \leq \varphi(x)$ para todo x y

$$a \int_R g d\mu + b = \varphi \left(\int_R g d\mu \right) \ .$$

Pero entonces $ag(x) + b \leq (\varphi \circ g)(x)$ para todo x y

$$\int_R (\varphi \circ g) d\mu \geq \int_R (ag + b) d\mu = a \int_R g d\mu + b \int_R d\mu = a \int_R g d\mu + b = \varphi \left(\int_R g d\mu \right) \ .$$

■

Teorema de la Convergencia Monótona Sea (R, μ) un espacio de medida. Sean $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones μ-medibles. Denotemos por f a la función tal que $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. Entonces f es μ-medible y

$$\lim_{n \to 0} \int f_n d\mu = \int f d\mu \ .$$

Teorema de la Convergencia Dominada Sea (R, μ) un espacio de medida. Sean $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones μ-medibles tales que:

I) f_n converge puntualmente a una función f.

II) Existe una función integrable g tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo x.

Entonces f_n es integrable para todo n y

$$\lim_{n\to 0} \int |f_n - f| d\mu = 0$$

lo que implica

$$\lim_{n\to 0} \int f_n d\mu = \int f d\mu \ .$$

Teorema de Hanh-Banach Sean $f : V \longrightarrow \mathbf{R}$ un función sublineal, $\varphi : U \longrightarrow \mathbf{R}$ un funcional lineal de un subespacio lineal $U \subset V$ tales que $\varphi(x) \leq f(x)$ para todo x de U, entonces existe una extensión lineal $\phi : V \longrightarrow \mathbf{R}$ de φ a todo V, esto es

$$\phi(x) \leq \varphi(x) \text{ para todo } x \text{ de } U$$

y

$$\phi(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \text{ de } V$$

2. La función máximal de f^*

Proposición 2.1 Sean f, g, f_n $(n = 1, 2, ...)$ en M_0 y a un escalar cualquiera. Entonces f^{**} es no negativa, decreciente y continua en $(0, \infty)$. Además

I) $f^{**} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ-c.t.p.

II) $f^* \leq f^{**}$

III) $|g| \leq |f|$ μ-c.t.p. $\Rightarrow g^{**} \leq f^{**}$

IV) $(af)^{**} = |a| f^{**}$

V) $|f_n| \nearrow f$ μ-c.t.p. $\Rightarrow f_n^{**} \nearrow f^{**}$.

Demostración Como f^* es decreciente, se sigue de la definición de f^{**} que es finita para algún valor de t si y sólo si es finita para todo $t > 0$. En otras palabras, f^{**} es o bien finita en todo puto o infinita en todo punto. Por tanto, es no negativa y continua.

Para la segunda propiedad, como f^* es decreciente se tiene que

$$f^{**} = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds \geq f^*(t) \frac{1}{t} \int_0^t ds = f^*(t) \ .$$

El resto de propiedades son consecuencia de sus homólogos para f^*. Falta ver que f^{**} es decreciente. Por serlo f^*, $f^*(u) \leq f^*\left(\frac{tu}{s}\right)$ si $0 < t \leq s$. Así

$$f^{**}(s) = \frac{1}{s} \int_0^s f^*(u) du \leq \int_0^s f^*\left(\frac{tu}{s}\right) du = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(u) du = f^{**}(t)$$

y f^{**} es decreciente. ■

Proposición 2.2 Sea (R,μ) un espacio de medida σ-finita y t un número positivo en la imagen de μ. Sea f en $M_0(R,\mu)$.

1. Si (R,μ) es resonante
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \sup \left\{ \int_E |f| d\mu \mid \mu(E) = t \right\} .$$

2. Si (R,μ) es fuertemente resonante, existe un subconjunto E de R con $\mu(E) = t$ tal que
$$f^{**} = \frac{1}{t} \int_E |f| d\mu .$$

Demostración Como t está en la imagen de μ, hay un subconjuto medible F de R con medida $\mu(F) = t$. Sea $g = \chi_F$, con lo que $g^* = \chi_{[0,t)}$. Pero una función g' puede ser equimedible con g si y sólo si $|g'|$ es igual μ-c.t.p. a la función característica de un conjunto E con medida $\mu(E) = \mu(F) = t$. Con estas observaciones, el enunciado es evidente a partir de la definición de espacio resonante y fuertemente resonante.

El resultado anterior implica la subaditividad del operador $f \longrightarrow f^{**}$ siempre que t esté en la imagen de μ y (R,μ) sea resonante.

Si (R,μ) es no atómico, entonces es resonante. En caso de tener medida infinita, la imagen de μ es el intervalo $[0,\infty)$, con lo que la subaditividad se tiene para todo $t > 0$. Si la medida del espacio es finita, $\mu(R) = t_0$, el resultado sigue siendo válido para toda $0 < t < t_0$. En este caso, cada f^* se anula fuera del intervalo $[0,t_0)$, luego si $t > t_0$
$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^{t_0} f^*(s) ds = \frac{t_0}{t} f^{**}(t_0)$$
y f^{**} es subaditiva por serlo $f^{**}(t_0)$. Así, el resultado está probado para $t > 0$ cuando el espacio sea no atómico.

La subaditividad en espacios arbitrarios puede probarse de manera similar utilizando el «método de las retracciones». No vamos a introducir dicho método, con lo que la prueba queda inconclusa, pero nos permitiremos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 2.3 Sea (R,μ) un espacio de medida σ-finita. Sean f y g en $M_0(R,\mu)$. Entonces
$$(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + f^{**}(t) , \quad 0 < t < \infty .$$

3. El operador maximal de Hardy-Littlewood

Para profundizar en las definiciones y resultados siguientes puede consultarse [12] y [15].

Definición 3.1 Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Llamamos *función maximal de Hardy-Littlewood de* f, denotada por Mf, a la función

$$(Mf)(x) = \sup_{x\in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|dy \ , \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

donde el supremo se extiende a todos los cubos Q conteniendo a x. El operador $M : f \longrightarrow Mf$ se denomina *el operador maximal de Hardy-Littlewood.*

Observemos que M no es lineal, pero satisface

$$M(f+g) \leq Mf + Mg \ , \quad M(\lambda f) = |\lambda| Mf$$

Lema 3.2 Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$ de medida finita. Sea Δ un conjunto de cubos Q que cubren Ω. Entonces, existe un subconjunto finito de cubos disjuntos de Δ, $Q_1, Q_2, ..., Q_K$, tales que

$$\sum_{k=1}^{K} |Q_k| \geq 4^{-n}|\Omega| \ .$$

Demostración Por la regularidad de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, el conjunto Ω puede aproximarse tanto como se quiera por conjuntos compactos. Además, cada cubo Q en Δ puede remplazarse por un cubo abierto más grande con radio tan cercano como se desee a 1. Así, es suficiente establecer el resultado asumiendo que Ω es compacto y cada cubo Q de Δ abierto (con lo que en nuestra prueba conseguiremos una contante mayor que 4^{-n}, esto es, 3^{-n}).

Con estas hipótesis, Δ es un un recubrimiento abierto del conjunto compacto Ω, por lo que existirá un subconjunto finito de cubos en Δ que recubren Ω. Podemos suponer, entonces, que Δ es finito. Sea Q_1 el mayor de los cubos de Δ, Q_2 el mayor de los cubos de Δ disjunto con Q_1, Q_3 el mayor de los cubos de Δ disjunto con Q_1 y Q_2, y así. Como Δ es finito, este proceso termina después de un número finito de pasos, proporcionando cubos disjuntos Q_1, Q_2, ..., Q_K.

Sea $\bar{Q}_k$ el cubo concéntrico con Q_k pero con tres veces su lado ($k = 1, 2, ...K$). Veamos que los cubos $\bar{Q}_k$ cubren Ω. Si no fuese así, existiría un punto x en $\Omega - \bigcup_{k=1}^{K} \bar{Q}_k$; como Δ cubre Ω, x esta contenido en algún Q de Δ. Por construcción, Q es más pequeño que Q_1 y contiene el punto x de $\bar{Q}_1^c$. Así, Q es disjunto con Q_1. De igual modo, por construcción, Q es más pequeño que Q_2 y contiene el punto x de $\bar{Q}_2^c$. Procediendo de este modo, vemos que Q es disjunto con $Q_1, Q_2, ..., Q_K$, lo cual es imposible. De esta manera, los cubos $\bar{Q}_k$ cubren Ω. En consecuencia

$$|\Omega \leq \sum_{k=1}^{K} |\bar{Q}_k| = 3^n \sum_{k=1}^{K} |Q_k|$$

quedando establecido el lema.

El siguiente resultado muestra, en particular, que el operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil $(1, 1)$.

Teorema 3.3 Si f pertenece a $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$t(Mf)^*(t) \leq 4^n \|f\|_1 \ , \quad t > 0 \ .$$

Demostración Supongamos, en primer lugar, que f tiene soporte compacto, en cuyo caso $(Mf)(x) = O(|x|^{-n})$ cuando $|x| \to \infty$. En particular, para cada $\lambda > 0$, el conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (Mf)(x) > \lambda\}$ tiene medida finita. Para cada x en E_λ, habrá un cubo Q_x conteniendo a x tal que

$$\lambda |Q_x| < \int\limits_{Q_x} |f(y)| dy \ .$$

La colección de todos estos cubos Q_x cubre E_λ, por lo que el *Lema 3.1* asegura la existencia de un subconjunto finito de cubos disjuntos $Q_1, Q_2, ..., Q_K$ tales que

$$\sum_{k=1}^{K} |Q_k| \geq 4^{-n} |E_\lambda \ .$$

Combinando las desigualdades se obtiene

$$|E_\lambda| \leq 4^n \sum_{k=1}^{K} |Q_k| \leq \frac{4^n}{\lambda} \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{Q_k} |f(Y)| dy \leq \frac{4^n}{\lambda} \|f\|_1 \ .$$

Como $|E_\lambda|$ es la función de distribución de Mf, esta estimación es equivalente al resultado buscado para la reordenada decreciente $(Mf)^*$.

En el caso general, debemos seleccionar una sucesión creciente de funciones simples no negativas $f_k \nearrow |f|$ c.t.p. Como consecuencia del *Teorema de Convergencia Monótona*, $Mf_k \nearrow Mf$ c.t.p., lo de donde se sigue que $(Mf_k)^* \nearrow (Mf)^*$. Como $\|f_k\|_1 \nearrow \|f\|_1$, tenemos que el resultado, que se cumple por el argumento de arriba para cada f_k, se mantiene para f. ■

Teorema 3.4 - Teorema de Diferenciación de Lebesgue Si f es una función localmente integrable de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\lim_{x \in Q,\ Q \to 0} \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} |f(y) - f(x)| dy = 0$$

para casi todo x en $\mathbb{R}^n$.

Demostración Por la naturaleza local del resultado, es claro que una vez probado para funciones integrables, se seguirá para funciones localmente integrables. Sea, por tanto, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Para cada x en $\mathbb{R}^n$, sea

$$(\Omega f)(x) = \limsup_{x \in Q,\ Q \to 0} \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} |f(y) - f(x)| dy \right)$$

El teorema quedará probado si vemos que $(\Omega f)(x) = 0$ c.t.p en $\mathbb{R}^n$. Observemos que

$$(\Omega f)(x) \leq (Mf)(x) + |f(x)| \; .$$

con lo que para cada $t > 0$

$$(\Omega f)^*(t) \leq (Mf)^* \left(\frac{t}{2}\right) + f^* \left(\frac{t}{2}\right) \; .$$

Así, usando *Teorema 1.2* y el hecho de que

$$f^* \left(\frac{t}{2}\right) \leq f^{**} \left(\frac{t}{2}\right) \leq \left(\frac{2}{t}\right) \|f\|_1$$

tenemos

$$(\Omega f)^*(t) \leq \frac{c}{t} \|f\|_1$$

con c dependiendo sólo de n.

Se sigue del *Teorema Fundamental del cálculo* que $(\Omega f) = \Omega(f - h)$ para cualquier h continua y con soporte compacto. Aplicando la desigualdad anterior a $f - h$ en lugar de f, obtenemos

$$(\Omega f)^*(t) \leq \frac{c}{t} \|f - h\|_1 \; .$$

Pero el lado derecho puede ser tan pequeño como se desee porque la funciones continuas de soporte compacto son densas en L^1. Así, $(\Omega f)^*(t) = 0$ para cada $t > 0$, de donde concluimos que $\Omega f = 0$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$.

Corolario 3.5 Si f es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\lim_{x \in Q,\, Q \to 0} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(y)dy = f(x)$$

para casi todo x en $\mathbb{R}^n$.

Corolario 3.6 Si f es localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$|f(x)| \leq (Mf)(x)$$

para casi todo x en $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.7 Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con medida finita. Entonces, hay una secuencia de cubos diádicos (cubos formados por medio de dilataciones y contracciones por un factor de dos de la partición básica de $\mathbb{R}^n$ en cubos unidad) $Q_1, Q_2, ...$, con conjuntos disjuntos dos a dos, que cubren Ω y satisfacen

i) $Q_k \cap \Omega^c \neq \varnothing$, $(k = 1, 2, ...)$

ii) $|\Omega| \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} |Q_k| \leq 2^n |\Omega|$.

Demostración Como Ω es abierto, existe, para cada x en Ω, un cubo diádico, digamos $Q(x)$, con el menor tamaño posible, que contiene x y tiene intersección no vacía con Ω^c. Subdividimos $Q(x)$ en 2^n cubos diádicos congruentes (misma forma y tamaño) y seleccionamos uno de ellos, digamos $\bar{Q}(x)$, que contenga a x. Así, $\bar{Q}(x) \subset \Omega$ y

$$2^{-n}|Q(x)| = |\bar{Q}(x)| = |\bar{Q}(x) \cap \Omega| \leq |Q(x) \cap \Omega| \ .$$

Ahora, los pares de cubos diádicos tienen la propiedad de que si sus interiores tienen intersección no vacía, entonces uno de ellos esta contenido en el otro. Así, como Ω tiene medida finita, cada punto x en Ω está contenido en un cubo maximal de la colección $\{Q(y) \mid y \in \Omega\}$. Hay a lo sumo una cantidad contable de cubos maximales de los que listamos como $Q_1, Q_2, ...$ y tienen interiores disjuntos dos a dos. Estos evidentemente cubren Ω, así que la primera desigualdad en (II) se cumple. La propiedad (I) se cumple por construcción. Además, cada Q_k satisface una desigualdad como la vista más arriba, y así

$$\sum_k |Q_k| \leq 2^n \sum_k |Q_k \cap \Omega| = 2^n |\Omega|$$

estableciendo la segunda desigualdad en (II). ■

El teorema que sigue es un conocido resultado de Teoría de Interpolación que describe el k-funcional del para (L^1, L^∞) por medio del operador maximal. Se dejará sin incluir la prueba.

Teorema 3.8 Sea (R, μ) un espacio de medida σ-finita y supongamos f en $M_0(R, \mu)$. Entonces

$$\inf_{f=g+h} \{\|g\|_1 + t\|h\|_\infty\} = \int_0^t f^*(s)ds = tf^{**}(t)$$

para cada $t > 0$.

Teorema 3.9 Existen constantes c y c', dependiendo sólo de n, tales que

$$c(Mf)^*(t) \leq f^{**}(t) \leq c'(Mf)^*(t) \ , \quad t > 0$$

para cada función localmente integrable de $\mathbb{R}^n$.

Demostración Fijemos $t > 0$. Para la desigualdad de la izquierda vamos a suponer $f^{**}(t) < \infty$ (si no, no hay nada que probar). En este caso, por el teorema anterior, dado $\varepsilon > 0$, existen funciones $g_t \in L^1$ y $h_t \in L^\infty$ tales que $f = g_t + h_t$ y

$$\|g_t\|_1 + t\|h_t\|_\infty \leq tf^{**}(t) + \varepsilon \ .$$

Entonces, usando el *Teorema 1.2*, para cada $s > 0$

$$(Mf)^*(s) \leq (Mg_t)^* \left(\frac{s}{2}\right) + (Mh_t)^* \left(\frac{s}{2}\right) \leq \frac{c}{s}\|g_t\|_1 + \|h_t\|_\infty \leq \frac{c}{s}(\|g_t\|_1 + s\|h_t\|_\infty) \ .$$

Poniendo $s = t$, usando la desigualdad anterior y haciendo tender ε a 0, obtenemos la primera desigualdad.
Para la desigualdad de la derecha, suponemos $(Mf)^*(t) < \infty$, si no, no habría nada que probar. Por la semi-continuidad inferior de Mf el conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (Mf)(x) > (Mf)^*(t)\}$$

es abierto y tenemos $|\Omega \leq t$ porque Mf y $(Mf)^*$ son equimedibles. Aplicando *Lema 1.6* obtenemos una secuencia $Q_1, Q_2, ...$ de cubos con interior disjunto que cubren Ω y satisfaciendo

$$Q_k \cap \Omega^c \neq \varnothing \ , \quad (k = 1, 2, ...)$$
$$\sum |Q_k| \leq 2^n |\Omega| \leq 2^n t \ .$$

Con $F = \left(\bigcup\limits_k Q_k\right)^c$, elegimos $g = \sum\limits_k f\chi_{Q_k}$ y $h = f\chi_F$, con lo que $f = g + h$. Entonces, la subaditividad de $f \longrightarrow f^{**}$ nos da

$$f^{**}(t) \leq g^{**}(t) + h^{**}(t) \leq \frac{1}{t}\|g\|_1 + \|h\|_\infty \ .$$

Ahora, por la primera propiedad de *Lema 1.6* cada cubo Q_k contiene un punto de Ω^c y en tal punto la función maximal tiene valor a lo sumo $(Mf)^*(t)$ por el modo en que Ω está definido. Entonces

$$\frac{1}{|Q_k|}\int\limits_{Q_k} |f(y)|dy \leq \sum_k |Q_k|(Mf)^*(t) \ .$$

Por tanto, usando la segunda propiedad de *Lema 1.6*, tenemos

$$\|g\|_1 \leq 2^n t (Mf)^*(t) \ .$$

Por otro lado, el conjunto F está contenido en Ω^c y así la función maximal está acotada por $(Mf)^*(t)$ en F. Entonces, usando *Corolario 1.5*

$$\|h\|_\infty = \|f\chi_F\|_\infty \leq \|(Mf)\chi_F\|\infty \leq (Mf)^*(t)$$

lo que combinado con las anteriores estimaciones, nos la segunda desigualdad.
■

Referencias

[1] S. Banach, *Sur les fonctionelles linéaires*, Studia Math. 1, 1929, pp. 211–216.

[2] G. Pólya, G. H. Hardy, J. E. Littlewood *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, 1934.

[3] J. Marcinkiewicz, *Sur Línterpolation dóperations*, C. R. Acad. Sci. Pam 208, 1939, pp. 1272-1273.

[4] G. O. Thorin, *Convexity theorems*, Diss. Lund, 1948, 1-57.

[5] G. G. Lorentz, *Relations between function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 1961, pp. 127-132.

[6] A. P. Calderón, *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math.26, 1966, pp. 273-299.

[7] H. L. Royden, *Real Analysis*, MacMillan, 2nd ed., 1968.

[8] D. W. Boyd, *Indices of function spaces and their relationship to interpolation*, Canadian J. Math. 21, 1969, pp. 1245-1254.

[9] C. Bennet, *Banach function spaces and interpolation methods I*, J. Functional Anal. 17, 1974, pp. 409-440.

[10] C. Bennet, *Banach function spaces and interpolation methods II*, *Linear Operators and Approximation II*, Birkhauser Verlag, 1974, pp. 129-139.

[11] C. Bennet, *Banach function spaces and interpolation methods III*, Approx. Theory 13, 1975, pp. 267-275.

[12] J. Bergh, J. Lofstrom *Interpolation Spaces*, Springer, 1976.

[13] C. Bennett, R. C. Sharpley *Interpolation of Operators*, Academic Press, 1988.

[14] A. C. Zaanen, *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces*, Springer, 1997.

[15] J. B. Garnett, Bounded Analytic Functions, Springer-Verlag, 2006.