



Universidad de Murcia
Grado en matemáticas
Curso 2013 – 2014

Trabajo Fin de Grado

Cartografía

Carlos Ruiz Vera

Fecha presentación: Septiembre de 2014
Director: María Ángeles Hernández Cifre

Ahora que se acerca el final de la carrera, me gustaría agradecer el haber llegado hasta aquí a mis padres, por haberme apoyado durante tantos años sin dudar de mí. A Miriam, que ha llenado de luz esta etapa de mi vida y sin la cual no lo hubiera conseguido. Agradecer también a todos los amigos que me han ayudado y animado siempre que lo he necesitado, incluyendo especialmente a mi familia de La Manga. Y por último, pero no menos importante, dar las gracias a todos los profesores que me han soportado y animado durante tanto tiempo consiguiendo que no abandone. Gracias a todos estoy un pasito más cerca de mis sueños. De verdad, gracias.

Índice general

Abstract	v
Breve introducción a la cartografía	ix
1. Preliminares	1
1.1. Superficies regulares	1
1.2. La primera forma fundamental	2
1.3. Aplicaciones	4
1.3.1. Cómo medir longitudes	4
1.3.2. Cómo medir ángulos	4
1.3.3. Cómo medir áreas	4
2. La esfera	7
2.1. Coordenadas geográficas de la esfera	7
2.2. La esfera superficie regular	9
2.3. Área de un triángulo en la esfera	10
3. Necesidad del estudio de la cartografía	13
3.1. No existen mapas ideales de proyección	13
3.2. Clasificación de las proyecciones cartográficas	14
3.2.1. Según el tipo de propiedades que conservan	14
3.2.2. Según la superficie en la que se proyecta	17
4. Tipos de proyecciones	21
4.1. Proyecciones conformes	21
4.1.1. Condición necesaria y suficiente para ser proyección conforme	21
4.1.2. Proyección plana: Proyección estereográfica	22
4.1.3. Proyección cilíndrica: La proyección de Mercator	26

4.1.4.	Proyección cilíndrica transversa: La proyección de Mercator transversa	33
4.2.	Proyecciones isoareales	36
4.2.1.	Condición necesaria y suficiente para ser proyección isoareal	37
4.2.2.	Proyección cilíndrica: Proyección de Lambert	37
4.3.	Proyecciones afilácticas	39
4.3.1.	Proyección plana: Proyección central	39
5.	Otras proyecciones	43
5.1.	Proyección cónica	43
5.1.1.	Ejemplo de Proyección cónica: Proyección cónica de Lambert	46
5.1.2.	Proyección cónica: Proyección de Bonne	49
6.	Conclusiones	51
	Bibliografía	52

Abstract

This project is focused on the study of cartography, a very relevant part of the differential geometry. From the smallest animals, including humans, to the greatest animals all have in common the security that comes from recognizing all around us, although, there is a big difference between animals and humans because we can represent what we see. That is why one of the most important and necessary knowledge has always been the control and understanding of our habitat. Even on the prehistoric age we could find drawings of important mountains, rocks, rivers or trees on the walls of the caves, even though these pictures cannot be considered as maps, we could consider them as the beginning of modern cartography. Along the history we have needed to represent more things, the world was growing rapidly and we began to create maps: of villages, cities, countries, etc. Over time, the complexity of maps grows up and at some point in history, the word we know today as cartography was born. Let 's see what it used to mean in the past and what actually means:

“Cartography is the art, science and technology of making maps together with their study as scientific document and works of arts, relief models and globes representing the Earth, part of it or any part of the Universe”. This definition for cartography is the most modern and used by own cartographers, this definition is obtained from the [11], but there are many other descriptions of cartography.

Therefore, it is best to investigate the origin of the word and nothing better than coming back to the etymological origin of the term cartography. Its meaning comes from the word *charta*, which can be translated as “map”, and the suffix *-graphy*, from the Greek word *graphein* that means “write”. Thus, basically cartography means “the art of writing maps”

The origin of maps is very old, but cannot be exactly specified as the map definition has changed over the years. Different drawings, murals and engravings dating back several millennia BC are regarded as the first maps

and, therefore, the first examples of cartography. The Greeks, Romans, Chinese, Arabs and Indians were some of the ancient civilizations that developed maps. But it was not until the late second century that Ptolemy of Alexandria analyzed the problem of representing the spherical Earth on a flat surface and he also introduced the concepts of longitude and latitude. The problem is that all flat representations of the surface of a sphere or an ellipsoid (ways in which we study the Earth) somehow alters the distances, angles, and/or areas. Therefore, cartography still evolves nowadays.

Cartography, speaking in more technical terms; which we will be used in this project, is based on how to represent a portion \mathcal{R} of the globe on a flat surface, that is, find an application $Y : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ injective and differentiable and with a differentiable inverse, called projection.

The ideal projection would be one in which all relevant geometric features of the surface could be preserved in the image. That is, one that takes lengths, areas and angles of the surface, to identical lengths, areas and angles in the projection. But as we would see in this paper, it is impossible that this ideal projection exists. Normally we would choose what feature we want the projection to preserve.

Here is a small summary of what will be done in this project. The first chapter focuses on the definitions needed to understand in greater depth all that implies cartography. We will see, for example, the meaning of regular surface, which is of great importance because it is the bases on which all projections are constructed. We will also see, among others, the definition of differentiability, essential for understanding and defining the first fundamental form, which we will also explain and use to calculate everything about lengths, areas and angles.

Although the Earth is not spherical, as it is flattened at the poles, along the years cartography has considered it spherical, and therefore, the importance of the second chapter that analyses some properties of the sphere. We will discuss what the geographical coordinates are and how to obtain and use them. Geographic coordinates are going to be of great importance in this project because we will use them as a basis to calculate all the projections that we will prove. In this chapter we will see that the sphere is a regular surface, which is necessary to see that we can completely cover a sphere with cards and it is necessary to use the first fundamental form. Finally, we will show a property of spherical triangles that will help us in demonstrating why you cannot create an ideal map.

In chapter three we will be surprised to prove that it is not possible to find

a projection of the sphere that preserves lengths, areas and angles. That is, we will find that it is impossible to create a map which preserves the forms of the portion of the sphere projected and, at the same time, it preserves their areas. Sadly we will prove that it is necessary to choose which virtue the projection must preserve, according to what we will use it for. Also in this chapter we will define the large number of existing projections, different types can be distinguished:

- by type of surface on which it is projected: conical, flat or cylindrical projections.
- by the type of property that retains: conformal, equiareal or equidistant projections.
- by the perspective from which we make the projection: gnomonic or stereographic projections.

In the next chapter, the fourth, we will look into examples and properties. It is the most practical chapter, all previous chapters were a preparation and an introduction for this. We will prove that the conformal and equiareal projections need to satisfy a specific characteristic to be used and we will see examples of both projections. Among the most prominent examples of conformal projections, the ones that preserve angles, we will see the Mercator projection, which, for example, is used today for the maps in the history books. We will look for a way to obtain it easily and explain what was wanted to achieve with it. The Mercator projection can take two forms, depending if the cylinder where the sphere is projected is tangent to the Equator or if the cylinder is tangent to two meridians, one opposite to the other. Although the normal Mercator projection is quite accurate to reality near the Equator, it loses its effectiveness as we approach the poles because it deforms the figures, therefore, the need to study the Transverse Mercator projection.

Regarding equiareals projections, the ones that conserve areas, the most prominently and frequently used is the cylindrical projection of Lambert. Although it is not as relevant as the Mercator, it is commonly used because is more accurate with the real size of what is projected, but unfortunately this projection also deforms the figures as we move away from Equator. As we will discuss in this chapter, one projection is not better than other, the decision will depend on the geometric feature we want to preserve on it. Finally, in this chapter we will analyze the central projection, which does not

retain any of the above features, but transforms the maximal circumferences in straight lines.

The fifth chapter focuses on some more examples of projections but without focus in its obtaining. We will look the conical projection, the Lambert conical projection, which is conformal and we will look the Bonne projection which retains areas, ie the Bonne projection is equiareal.

Finally, I would like to mention that in the bibliography, the books or articles that have been used are [1], [3], [5], [6], [8], [9], [12] and [13]. The other references have been studied, but they have been not used explicitly in this work, either by the lack of time, or because at the end I decided not to include the information.

Breve introducción a la cartografía

Desde los animales más pequeños, pasando por los humanos, a los más grandes todos tienen una característica en común y es la seguridad que da el reconocer todo lo que nos rodea. Aunque hay una gran diferencia entre los animales y los humanos pues nosotros podemos representar lo que vemos. Por ello, uno de los conocimientos que más importancia tiene y siempre ha tenido ha sido el reconocimiento de nuestro hábitat. Ya desde la prehistoria se han encontrado pinturas; de rocas, ríos o árboles importantes, en las paredes de cuevas. Aunque eso no se puede considerar un mapa, sí que se puede ver como un comienzo de ellos. Poco a poco lo que se necesitaba representar se expandió, el mundo crecía a gran velocidad y comenzaron a crearse mapas: de poblados, ciudades, países, etc. Como cada vez se representaban zonas de mayor tamaño, la complejidad aumentó y, en algún momento, surgió la palabra que hoy día conocemos como cartografía. Veamos lo que significa en la actualidad y lo que significó en el pasado.

“Cartografía es el conjunto de estudios y operaciones científicas y técnicas que intervienen en la formación o análisis de mapas, modelos en relieve y globos que representan la Tierra, parte de ella, o cualquier parte del Universo”. Esta definición para la cartografía es la más moderna y la que usan los propios cartógrafos pues está obtenida de [11], aunque, si bien es cierto, hay un gran número de descripciones de ésta.

Por ello, lo mejor es investigar el origen de la palabra y qué mejor forma que basarnos en el origen etimológico del término cartografía. Tenemos que su significado viene de la palabra *charta*, que puede traducirse como “mapa”, y el sufijo *-grafía*, que proviene del vocablo griego *graphein*, significaba “escribir”. Luego de manera más simple cartografía significa “el arte de escribir mapas”.

Los orígenes de los mapas son muy antiguos, aunque no pueden precisarse con exactitud ya que la definición de mapa ha cambiado con el pasar de los

años. Distintas pinturas, murales y grabados que se remontan varios milenios antes de Cristo son considerados como los primeros mapas y, por lo tanto, los primeros testimonios de la cartografía. Los griegos, los romanos, los chinos, los árabes y los indios fueron algunas de las civilizaciones que desarrollaron mapas en la antigüedad. Pero no fue hasta finales del siglo II que Ptolomeo de Alejandría analizó el problema de representar la forma esférica de la Tierra sobre una superficie plana e introdujo, además, los conceptos de longitud y latitud. El problema es que toda representación plana de la superficie de una esfera o un elipsoide (formas en las que estudiamos la Tierra) altera en mayor o menor grado las distancias, ángulos y/o áreas. Por ello la cartografía sigue en evolución hoy día.

La cartografía, hablando en términos más técnicos; los cuales usaremos en este trabajo, se basa en cómo representar una porción \mathcal{R} del globo en una superficie plana, esto es, buscar una aplicación $Y : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ inyectiva y diferenciable, con inversa diferenciable, llamada proyección. La proyección ideal sería aquella en la cual todas las características geométricas relevantes en la superficie fueran preservadas en la imagen. Es decir, aquella que lleva longitudes, áreas y ángulos en la superficie, a idénticas longitudes, áreas y ángulos en la proyección. Pero como veremos en este trabajo es imposible que esa proyección ideal exista. Normalmente debemos elegir qué característica queremos que la proyección conserve.

Por último, añadir que en este proyecto los libros o artículos de la bibliografía que se han usado de ayuda o referencia son [1], [3], [5], [6], [8], [9], [12] y [13], mientras que el resto aunque han sido estudiados, no han sido usados explícitamente, o bien por falta de tiempo, o bien aportaban información que al final decidí no incluir.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se expondrán una serie de conceptos, propiedades y resultados que serán necesarios para una mayor comprensión del trabajo. Con estos preliminares se intenta que todo el mundo pueda entender lo demostrado en los siguientes capítulos. Es decir, se expondrá todo lo necesario para que cualquier persona que no estudie matemáticas (si bien es cierto se necesita un conocimiento un poco avanzado de ellas), o cualquier persona que no recuerde algún concepto pueda aprenderlo, o recordarlo, rápidamente. Para este capítulo se ha usado como libro de referencia [5].

1.1. Superficies regulares

En esta sección veremos lo que es una superficie regular, pues para proyectar la Tierra la tomaremos como una esfera. Como veremos más adelante, la esfera es una superficie regular.

Definición 1. *Un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para todo punto p de S existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno V de p en S y una aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, tales que:*

1. $X(U) = V$ y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable en el sentido ordinario.
2. $X : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo (es decir, la inversa $X^{-1} : V \rightarrow U$ también es continua).
3. Para todo $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La aplicación X se llama **parametrización, carta o sistema de coordenadas**. El entorno V se llama **entorno coordinado**.

Definición 2. Sean S_1 y S_2 superficies regulares y $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación. Diremos que F es **diferenciable** si, para todo $p \in S$ y cualesquiera parametrizaciones (U_1, X_1) de S_1 en p y (U_2, X_2) de S_2 en $F(p)$, la expresión en coordenadas de F , $\tilde{F} = X_2^{-1} \circ F \circ X_1$, es diferenciable en el sentido ordinario sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

Definición 3. Una **curva diferenciable** en una superficie regular S es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$ donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Definición 4. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$. Diremos que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tangente** a S en p , si existe una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$. Llamaremos $T_p S$ al conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie S en el punto p . Así:

$$T_p S = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \vec{v}\}$$

1.2. La primera forma fundamental

Todo lo anterior son conceptos necesarios y útiles, pero sólo atañen a la diferencialidad. Sin embargo, son bastante importantes para poder llegar hasta lo que queremos investigar, pues todavía no hemos visto cómo podemos medir distancias, ángulos y áreas de una superficie.

Definición 5. Sea S una superficie regular y p un punto perteneciente a S . Sea $T_p S$ el conjunto de todos los vectores tangentes a S en p . Entonces $T_p S$ es un plano vectorial contenido en \mathbb{R}^3 . Dados dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$, sea $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_p$ el producto usual de \mathbb{R}^3 sobre $T_p S$. Se llama **primera forma fundamental** de S a la aplicación $I_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $I_p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_p = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2$ donde $\|\vec{v}\|^2$ es mayor o igual que 0.

Sea $\vec{v} \in T_p S$ y $\alpha : I \rightarrow S$ con condiciones iniciales p y \vec{v} . Tomamos una parametrización (U, X) de S y consideramos la expresión en coordenadas de α . Entonces $\vec{v} = \alpha'(0) = u'(0)X_u(q) + v'(0)X_v(q) = aX_u(q) + bX_v(q)$ donde a, b son números reales y $X(q) = p$. Si ahora calculamos $I_p(\vec{v})$ obtenemos:

$$I_p(\vec{v}) = \|aX_u + bX_v\|^2 = a^2\langle X_u, X_u \rangle + 2ab\langle X_u, X_v \rangle + b^2\langle X_v, X_v \rangle$$

A partir de ahora usaremos por comodidad $I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ definido anteriormente.

Definición 6. Llamaremos **coeficientes de la primera forma fundamental** a:

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \quad F = \langle X_u, X_v \rangle, \quad G = \langle X_v, X_v \rangle.$$

Ya hemos visto lo que es la primera forma fundamental. Ahora definiremos lo que es una isometría, tanto global como local, junto con las curvaturas principales y de Gauss; pues necesitaremos saberlo para poder comprender algunas propiedades que se verán a lo largo del proyecto.

Definición 7. Una **isometría local** entre dos superficies regulares S_1 y S_2 es una aplicación diferenciable $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ que conserva la primera forma fundamental.

Definición 8. Una **isometría (global)** entre dos superficies regulares S_1 y S_2 es una isometría local que es, a su vez, un difeomorfismo global.

Definición 9. Sea S una superficie regular. Un **campo de vectores** χ sobre S es una función vectorial $\chi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, donde $\chi(p)$ es un vector de \mathbb{R}^3 para cada $p \in S$. Diremos que χ es **diferenciable** si lo es como función de S a \mathbb{R}^3 .

Definición 10. Sea S una superficie regular. Se dice que S es **orientable** si existe un campo (global) de vectores N sobre S que sea diferenciable, normal y unitario.

Definición 11. Sea S una superficie regular, orientada por un campo normal $N : S \rightarrow S^2$. Como N es unitario, podemos verlo como una aplicación diferenciable entre dos superficies, de la forma $N : S \rightarrow S^2$. Esta aplicación se denomina **aplicación de Gauss de S** .

Definición 12. Sea S una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow S^2$. Se llama **operador forma o endomorfismo de Weingarten** en $p \in S$ a la aplicación lineal $A_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, esto es, $A_p(\vec{v}) = -dN_p(\vec{v})$.

Definición 13. Sea S una superficie regular orientada por N y $p \in S$ un punto arbitrario. El operador $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$ es una aplicación lineal autoadjunta. Por tanto, su matriz respecto a cualquier base ortonormal es simétrica, luego es diagonalizable. Sean \vec{e}_1 y \vec{e}_2 dos vectores propios que diagonalizan A_p . Se llaman **curvaturas principales** de S en p a los valores $k_1(p)$ y $k_2(p)$ asociados a dichos vectores propios.

Definición 14. Sea S una superficie regular orientada por N . Se denomina **curvatura de Gauss** de S en $p \in S$ al valor $K(p) = \det(-dN_p)$ o lo que es lo mismo $K(p) = k_1(p)k_2(p)$.

1.3. Aplicaciones

Para ver las propiedades que conservan las proyecciones primero debemos saber cómo calcular esas propiedades.

1.3.1. Cómo medir longitudes

Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva parametrizada. Su longitud de arco viene dada por

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(r)\| dr = \int_0^t \sqrt{\langle \alpha'(r), \alpha'(r) \rangle} dr = \int_0^t \sqrt{I_{\alpha(r)}(\alpha'(r))} dr.$$

1.3.2. Cómo medir ángulos

Sean $\alpha : I \rightarrow S$ y $\beta : I \rightarrow S$ dos curvas parametrizadas regulares que se cortan en un punto $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$, $t_0 \in I$. El ángulo θ que forman (es decir, el ángulo que determinan sus vectores tangentes en dicho punto) viene dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(t_0)\|}.$$

En particular, dada una parametrización (U, X) , si tomamos sus curvas coordenadas para \vec{v}_0 y \vec{u}_0 fijos, esto es, $\alpha(\vec{u}) = X(\vec{u}, \vec{v}_0)$, $\beta(\vec{v}) = X(\vec{u}_0, \vec{v})$, entonces el ángulo que forman en $X(\vec{u}_0, \vec{v}_0)$ vale

$$\theta = \arccos \frac{\langle X_u, X_v \rangle}{\|X_u\| \|X_v\|}(\vec{u}_0, \vec{v}_0) = \arccos \frac{F}{\sqrt{EG}}(\vec{u}_0, \vec{v}_0).$$

1.3.3. Cómo medir áreas

Para poder medir áreas necesitamos primero definir lo que es una región de una superficie regular.

Definición 15. Sea $R \subset S$ un subconjunto de una superficie regular S . Diremos que R es una **región** de S si es un subconjunto conexo y relativamente

compacto de S , cuya frontera topológica, relativa a S , al descomponerse en un número finito de componentes conexas, debe cumplir:

- *Cada componente conexa es una curva regular excepto, a lo sumo, en un número finito de puntos.*
- *Cada componente conexa es homeomorfa a una circunferencia.*

Ahora, sea $R \subset S$ una región de una superficie regular S , tal que existe una parametrización (U, X) con $R \subset X(U)$, se define el **área** de R como

$$A(R) = \int_{X^{-1}(R)} \|X_u \wedge X_v\| dudv.$$

Capítulo 2

La esfera

Hoy día sabemos que la tierra no es esférica. Aún así, los cartógrafos, a lo largo de los siglos, siempre la han considerado una esfera a la hora de calcular sus proyecciones; pues el descubrimiento de que la tierra está achatada por los polos es relativamente cercano. Por ello, es necesario la creación de este capítulo donde veremos las propiedades de la esfera. En este capítulo se han usado como libros de referencia [5] y [6].

2.1. Coordenadas geográficas de la esfera

Las *coordenadas geográficas* son un sistema de referencia que utiliza las dos coordenadas angulares de la superficie elegida (en nuestro caso la esfera) para determinar cualquier punto de su superficie.

Sobre la esfera terrestre, se llaman *meridianos* a los círculos máximos que van del Polo Norte al Polo Sur. Recordemos qué es un círculo o circunferencia máxima.

Definición 16. *Una circunferencia máxima en una esfera es la intersección de esa esfera con un plano pasando a través del centro de la esfera.*

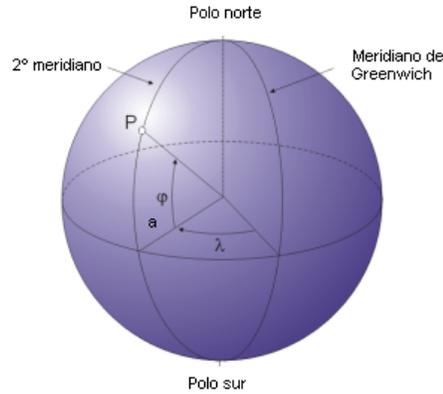
En la Tierra los polos definen el eje de rotación, que es perpendicular al plano ecuatorial. Las intersecciones de los planos paralelos al Ecuador con la esfera terrestre se denominan *paralelos*. Y, por último se encuentran los ángulos, uno llamado **latitud** que significa ancho, y otro llamado **longitud**, que proviene del latín longus, que significa largo. A partir de estos elementos que hemos definido, se establece el **sistema de coordenadas geográficas**. Su obtención es bastante sencilla como veremos a continuación.

Sea \mathbb{S}^2 el siguiente subconjunto de \mathbb{R}^3

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

la esfera unidad.

Sea φ la latitud y sea λ la longitud.



De esta imagen se deduce que

$$\sin \varphi = z, \quad \cos \lambda = \frac{x}{a},$$

$$\sin \lambda = \frac{y}{a}, \quad \cos \varphi = a.$$

Y despejando obtenemos

$$z = \sin \varphi, \quad x = \cos \varphi \cos \lambda, \quad y = \cos \varphi \sin \lambda.$$

Por lo tanto, las coordenadas geográficas son

$$X(\varphi, \lambda) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi). \quad (2.1)$$

donde para esta aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tomamos $U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$.

2.2. La esfera superficie regular

Utilizando las coordenadas geográficas que acabamos de introducir en (2.1) comprobaremos que la esfera es una superficie regular, pues necesitamos que así sea para poder obtener la primera forma fundamental. Para ello, veamos que verifica cada uno de los requisitos de la Definición (1):

1. En primer lugar, X es una aplicación diferenciable puesto que cada una de sus componentes es producto de funciones trigonométricas diferenciables.
2. Su inversa, X^{-1} , es continua:

$$X^{-1}(x, y, z) = \left(\arcsin z, \arccos \frac{x}{\sqrt{1-z^2}} \right).$$

Recordemos que el dominio de definición de la parametrización (2.1) escogida es el abierto $U = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 2\pi)$. Luego, la variable z de la aplicación inversa no tomará los valores 1 ni -1 correspondientes a $\varphi = \frac{\pi}{2}$ y $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, respectivamente.

3. Para demostrar que dX_q es inyectiva veamos que X_φ y X_λ son linealmente independientes.

$$X_\varphi = (-\sin \varphi \cos \lambda, -\sin \varphi \sin \lambda, \cos \varphi)$$

$$X_\lambda = (-\cos \varphi \sin \lambda, -\cos \varphi \cos \lambda, 0)$$

Encontramos que el menor de orden dos

$$\begin{vmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda \\ -\cos \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \end{vmatrix} = -\sin \varphi \cos \varphi$$

es no nulo ya que $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

De esta forma queda probado que X es una parametrización de la esfera unidad.

Ahora veamos que \mathbb{S}^2 es una superficie regular. Para ello necesitamos cubrir todo \mathbb{S}^2 con una o varias cartas. Con X se cubre toda la esfera menos el meridiano $\lambda = 0$. Ahora si tomamos la carta $Y(\varphi, \lambda) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \lambda \sin \varphi, \sin \lambda)$, que es muy similar a la de X , tenemos que Y deja sin cubrir la mitad del

paralelo $\varphi = 0$, es decir, la mitad del ecuador. Por tanto, hemos cubierto la esfera con dos cartas y, por consiguiente, hemos demostrado que es regular.

Ahora estamos en condiciones de calcular su primera forma fundamental que necesitaremos más adelante. A partir de (2.1) tenemos que

$$X_\varphi = (-\sin \varphi \cos \lambda, -\sin \varphi \sin \lambda, \cos \varphi),$$

$$X_\lambda = (-\cos \varphi \sin \lambda, \cos \varphi \cos \lambda, 0).$$

Y, por tanto,

$$E = \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = 1,$$

$$F = \langle X_\varphi, X_\lambda \rangle = 0,$$

$$G = \langle X_\lambda, X_\lambda \rangle = \cos^2 \varphi.$$

2.3. Area de un triángulo en la esfera

En esta sección vamos a ver una proposición de gran importancia, la cual, nos ayudará a demostrar unos de los teoremas más importantes de este proyecto. Se ha usado como libro de referencia [6].

Proposición 17. *En una esfera de radio R , el área del triángulo ΔABC con ángulos interiores α, β, γ viene dada por: $\text{área}(\Delta ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.*

Demostración. Definimos el término **luna** para referirnos a una de las regiones entre dos circunferencias máximas y llamamos **antipodales** a los puntos donde ellas se cruzan. Recordemos que los puntos o figuras antipodales son los que corresponden a los extremos opuestos de un diámetro de la esfera. Una luna viene dada por un ángulo θ del centro de la esfera, definido entre dos planos, que también es el ángulo entre las circunferencias máximas. Como el área de una esfera de radio R es $4\pi R^2$ y como la relación del área encerrada por las circunferencias máximas con el área de la esfera completa es la misma que el ángulo que forman entre 2π por el área, se tiene:

$$\text{Área de la luna} = \frac{\theta}{2\pi} 4\pi R^2 = 2\theta R^2$$

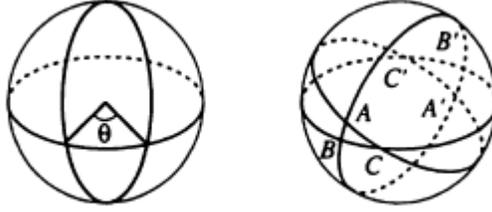


Figura 2.1: Izquierda: Una luna. Derecha: Tres circunferencias máximas. Fuente [6]

Asumimos que nuestro triángulo se encuentra en un hemisferio, si no, dividimos el triángulo en triángulos más pequeños. Cada triángulo es la intersección de tres círculos máximos. Si tomamos los tres círculos máximos que forman el triángulo ΔABC , tenemos que los círculos máximos nos dan una copia antipodal del triángulo, es decir, nos dan el triángulo $\Delta A'B'C'$. Tomando ΔABC junto con las tres lunas, formadas por los círculos máximos, que lo determinan cubrimos un hemisferio contando el área de ΔABC tres veces. Esto nos da la ecuación:

$$2\pi R^2 = 2\alpha R^2 + 2\beta R^2 + 2\gamma R^2 - 3\text{área}(\Delta ABC) + \text{área}(\Delta ABC)$$

Entonces,

$$\pi R^2 = \alpha R^2 + \beta R^2 + \gamma R^2 - \text{área}(\Delta ABC)$$

$$\text{área}(\Delta ABC) = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

■

Gracias a esta demostración sabemos que como cada triángulo en la esfera tiene área, entonces cada triángulo en la esfera tiene la suma de sus ángulos interiores mayor que π .

Capítulo 3

Necesidad del estudio de la cartografía

3.1. No existen mapas ideales de proyección

Aunque a lo largo de la historia se ha intentado crear el mapa ideal, es decir, aquel que conserve áreas, longitudes y ángulos, es relativamente fácil ver que no es posible. Euler lo demostró, basando su demostración en cierta ecuación diferencial que describe la “similitud infinitesimal”. También es posible verlo, usando el Teorema Egregium de Gauss:

Teorema 18. *La curvatura de Gauss de una superficie regular es invariante por isometrías locales. Es decir, si $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ es una isometría local, entonces $K_1(p) = K_2(\phi(p))$, para todo $p \in S_1$, donde K_1 y K_2 representan, respectivamente, las curvaturas de Gauss de S_1 y S_2 .*

Para ver que no existe el mapa ideal de proyección usando este teorema sólo nos quedaría demostrar que la curvatura de Gauss de la esfera y la del plano son distintas. Pero en este trabajo no lo veremos así. Sin embargo, si se quiere ver la demostración de este teorema y las curvaturas de Gauss de la esfera y el plano se puede remitir a la referencia [5]. En este proyecto veremos que no es posible que existan mapas ideales de proyección usando un argumento geométrico. Para obtener este resultado se ha usado como referencia [6]

Teorema 19. *No existen mapas ideales de proyección.*

Demostración. Sea ΔABC un triángulo en \mathbb{S}^2 formado por segmentos de circunferencias máximas. Como los segmentos de circunferencias máximas minimizan longitudes, el mapa ideal de proyección lleva \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} a segmentos del plano. Sin embargo, la suma de los ángulos del triángulo esférico es mayor que π , como hemos visto en la Proposición 17, mientras que en el triángulo en el plano la suma de sus ángulos es π . Así, tal mapa de proyección ideal no conserva ángulos. Contradicción. ■

3.2. Clasificación de las proyecciones cartográficas

El hecho de que no exista un mapa ideal de proyección forzó a los geómetras a intentar crear el mapa o proyección que mejor se aproximase a la realidad. Para ello se investigaron multitud de proyecciones con distintas características, desde las que conservan ángulos, áreas o longitudes; hasta las que se proyectan en distintas superficies. A continuación, vamos a ver un breve resumen de cada una de ellas.

3.2.1. Según el tipo de propiedades que conservan

- *Proyecciones conformes:* Aquéllas que conservan los ángulos del terreno.
- *Proyecciones isoareales (equivalentes o equiareales):* Conservan las áreas, aunque las figuras dejen de ser semejantes.
- *Proyecciones equidistantes:* Conservan las longitudes en determinadas direcciones.
- *Proyecciones afilácticas:* No conservan ninguna de las propiedades anteriores pero reducen al mínimo las deformaciones.

Veamos que se debe cumplir para que una proyección cualquiera sea conforme.

Proposición 20. *Sea $f : S_1 \rightarrow S_2$ un difeomorfismo. Entonces f es conforme si y sólo si, existe una función $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$, que no se anula en ningún punto, tal que para todo $p \in S_1$ y $\vec{v}, \vec{w} \in T_p(S_1)$*

$$I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \rho^2(p)I_{f(p)}(df_p(\vec{v}), df_p(\vec{w})).$$

Demostración. Supongamos que $f : S_1 \rightarrow S_2$ es un difeomorfismo y existe una función $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ con ρ distinta de cero satisfaciendo la ecuación. Si comparamos el ángulo θ entre dos curvas en S_1 y el ángulo θ_1 entre las curvas correspondientes en S_2 tenemos:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{I_p(\vec{v}, \vec{w})}{\sqrt{I_p(\vec{v}, \vec{v})I_p(\vec{w}, \vec{w})}} \\ &= \frac{\rho^2(p)I_{f(p)}(df_p(\vec{v}), df_p(\vec{w}))}{\sqrt{\rho^2(p)I_{f(p)}(df_p(\vec{v}), df_p(\vec{v}))\rho^2(p)I_{f(p)}(df_p(\vec{w}), df_p(\vec{w}))}} \\ &= \frac{I_{f(p)}(df_p(\vec{v}), df_p(\vec{w}))}{\sqrt{I_{f(p)}(df_p(\vec{v}), df_p(\vec{v}))I_{f(p)}(df_p(\vec{w}), df_p(\vec{w}))}} = \cos \theta_1. \end{aligned}$$

Así, si $I_p(\vec{v}, \vec{w}) = \rho^2(p)I_{f(p)}(df_p(\vec{v}), df_p(\vec{w}))$, la proyección del mapa es conforme.

Por otro lado, si tenemos una proyección del mapa conforme $f : S_1 \rightarrow S_2$, como f es un difeomorfismo, sea $X : (U \in \mathbb{R}^2) \rightarrow S_1$ una carta de S_1 , y llamemos $Y = f \circ X : (U \in \mathbb{R}^2) \rightarrow S_2$ a su proyección en S_2 . De esta forma podemos aplicar las mismas coordenadas u, v en cada superficie. Además, la expresión local para una curva en S_1 , $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$, la lleva a S_2 a través de la función f como $f \circ \alpha(t) = Y(u(t), v(t))$. Así

$$df_p \left(X_u \frac{du}{dt} + X_v \frac{dv}{dt} \right) = Y_u \frac{du}{dt} + Y_v \frac{dv}{dt}$$

Entonces, si f es conforme, sean \vec{v} y \vec{w} vectores ortogonales y unitarios en $T_p(S_1)$ tenemos que si $I_p(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ entonces $I_{f(p)}(df_p(\vec{v}), df_p(\vec{w})) = 0$. Si escribimos $\vec{V} = df_p(\vec{v})$ y $\vec{W} = df_p(\vec{w})$, y suponemos que $\|\vec{V}\| = c_1$ y $\|\vec{W}\| = c_2$. Por la linealidad del producto interno tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{I_p(\vec{v}, (\vec{v} + \vec{w}))}{\sqrt{I_p(\vec{v}, \vec{v})I_p(\vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})}} = \frac{I_p(\vec{V}, (\vec{V} + \vec{W}))}{\sqrt{I_p(\vec{V}, \vec{V})I_p(\vec{V} + \vec{W}, \vec{V} + \vec{W})}} = \\ &= \frac{c_1^2}{c_1 \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \end{aligned}$$

Esta ecuación implica que $c_1 = c_2$, luego f es conforme en p , siendo el factor de conformidad el valor c_1 ; obsérvese que c_1 no depende de la base ortonormal escogida.

Para concluir la demostración, tenemos que definir la función $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ y ver que, en efecto, es diferenciable y no se anula. Para ello, sea $X : U \rightarrow S_1$ una parametrización de S_1 . Consideremos la base ortonormal

$$\left\{ E_1(u, v) = \frac{X_u}{\sqrt{E}}(u, v), E_2(u, v) = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{EG - F^2}} \left(X_v - \frac{F}{E} X_u \right) (u, v) \right\},$$

obtenida al aplicar la ortogonalización de Gram-Schmidt a la base de las parciales $\{X_u, X_v\}$. Entonces, por lo visto anteriormente, el factor de conformidad de cada punto $p = X(u, v)$ de $X(U)$ viene dado por la función $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\rho(p) := \left\| df_p \left(\frac{X_u(u, v)}{\|X_u(u, v)\|} \right) \right\| = \|df_p(E_1(u, v))\|.$$

Claramente ρ es una función diferenciable, ya que E_1 es un campo diferenciable en $X(U)$, que además nunca se anula, lo que concluye la prueba.

■

Para el resultado anterior, junto con el que se expondrá seguidamente, se han usado como libros de referencia [5] y [6]. Seguidamente veremos que sí que hay superficies, además del plano, que se pueden proyectar en un plano y cuya proyección conserva áreas y ángulos. Desgraciadamente para que eso se cumpla se debe dar una isometría entre las superficies, algo que no ocurre con la esfera y el plano. Veámoslo:

Proposición 21. *Un difeomorfismo $Y : S_1 \rightarrow S_2$ entre dos superficies regulares es conforme e isoareal si, y sólo si, es una isometría.*

Demostración. Sólo hay que probar la implicación directa, pues el recíproco es inmediato ya que toda isometría conserva áreas y ángulos. Sean $Y : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación conforme e isoareal, $p \in S_1$ y (U, X) una parametrización de S_1 cubriendo p . Entonces, $(U, \bar{X} = Y \circ X)$ es una parametrización para S_2 . Sean E, F, G y $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ los coeficientes de la primera forma fundamental de X y \bar{X} , respectivamente. Sabemos por la Proposición anterior que como Y es conforme, existe una función diferenciable $\rho : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$, que no se anula, tal que $\langle dY_p(\vec{v}), dY_p(\vec{w}) \rangle = \rho(p)^2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$, para cualesquiera vectores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S_1$. En particular, se tiene que, para $p = X(u, v)$,

$$\bar{E} \langle \bar{X}_u, \bar{X}_u \rangle = \langle dY_p(X_u), dY_p(X_u) \rangle = \rho(p)^2 \langle X_u, X_u \rangle = \rho(p)^2 E,$$

3.2. CLASIFICACIÓN DE LAS PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS 17

y análogamente, que $\bar{F} = \rho(p)^2 F$ y $\bar{G} = \rho(p)^2 G$. Sean

$$f(p) = f(X(u, v)) = \sqrt{EG - F^2}(u, v),$$

$$f(Y(p)) = \bar{f}(\bar{X}(u, v)) = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}(\bar{X}(u, v)),$$

y supongamos que $f(p) \neq \bar{f}(Y(p))$; podemos asumir, por ejemplo, $f(p) > \bar{f}(Y(p))$. Como f y \bar{f} son funciones continuas, existe un entorno V de p donde se verifica la misma desigualdad en todo punto, es decir, $f(q) > \bar{f}(Y(q))$, para todo $q \in V$. Representamos por $\tilde{U} := X^{-1}(V)$, y vamos a calcular las áreas de V y de $Y(V)$. Claramente, $\tilde{U} = X^{-1}(V) = \bar{X}^{-1}(Y(V))$, luego

$$A(V) = \int \int_{\tilde{U}} \sqrt{EG - F^2} dudv = \int \int_{\tilde{U}} f(X(u, v)) dudv,$$

$$A(Y(V)) = \int \int_{\tilde{U}} \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} dudv = \int \int_{\tilde{U}} \bar{f}(\bar{X}(u, v)) dudv.$$

Como $f(X(u, v)) > \bar{f}(\bar{X}(u, v))$ para todo $(u, v) \in \tilde{U}$, entonces $A(V) > A(Y(V))$, lo que contradice el hecho de que Y sea isoareal. Por tanto, $f(p) = \bar{f}(\bar{X}(u, v))$ y, en consecuencia, se tiene que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = \sqrt{\rho(p)^2 E \rho(p)^2 G - \rho(p)^4 F^2} = \rho(p)^2 \sqrt{EG - F^2}.$$

Así, obtenemos $\rho(p)^2 = 1$, y como el punto p era arbitrario, esto es cierto para todo $p \in S_1$, lo que demuestra que Y es una isometría.

■

Una vez visto esto también debemos saber que además de por el tipo de características que conservan, las proyecciones se pueden clasificar según la superficie en la que se proyectan. En la siguiente sección veremos distintos tipos.

3.2.2. Según la superficie en la que se proyecta

- *Proyecciones planas*: Son aquellas donde la superficie de referencia es un plano. Dentro de las proyecciones planas se distinguen varios tipos:
 - *Gnomónicas*: Se define así a las proyecciones planas que tienen como punto de vista el centro de la tierra.

- *Estereográficas*: Son las proyecciones planas que tienen como punto de vista el punto diametral opuesto al punto de tangencia (antípoda).
- *Ortográfica*: Son las proyecciones planas que tienen como punto de vista el infinito.
- *Proyección cilíndrica*: Son las proyecciones que utilizan al cilindro como superficie de proyección.
- *Proyección cónica*: Son las proyecciones que utilizan al cono como superficie de proyección.

Según la posición de la superficie de referencia con respecto al eje de rotación de la Tierra las proyecciones cilíndrica y cónica reciben distintos nombres:

- *Normales*: Cuando el eje de simetría del cuerpo de referencia es coincidente con el eje de rotación de la Tierra.
- *Transversas*: Cuando el eje de simetría del cuerpo de referencia forma un ángulo recto con respecto al eje de rotación de la Tierra.
- *Oblicuas*: Cuando no es ninguna de las dos anteriores.

3.2. CLASIFICACIÓN DE LAS PROYECCIONES CARTOGRÁFICAS 19

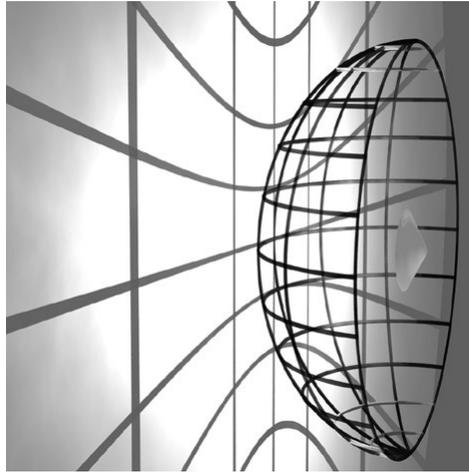


Figura 3.1: Proyección gnomónica. Fuente [3]

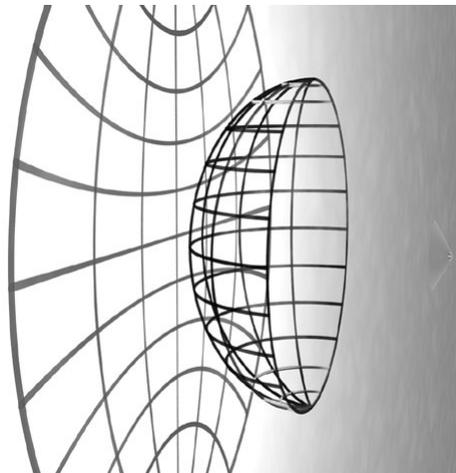


Figura 3.2: Proyección estereográfica. Fuente [3]

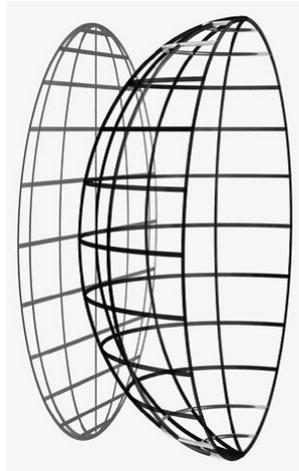


Figura 3.3: Proyección ortográfica. Fuente [3]

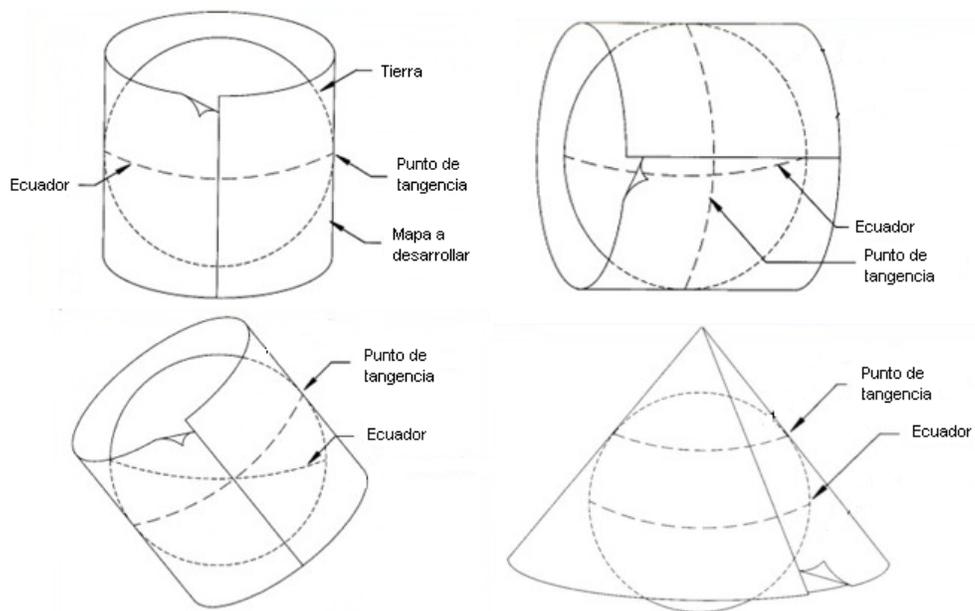


Figura 3.4: De izquierda a derecha y de arriba abajo: proyección cilíndrica normal, proyección cilíndrica transversal, proyección cilíndrica oblicua y proyección cónica normal.

Capítulo 4

Tipos de proyecciones

4.1. Proyecciones conformes

Las proyecciones conformes son aquellas cuya proyección conserva los ángulos. Durante muchos años fueron las más utilizadas y a día de hoy siguen siendo de las que más importancia tienen. En este apartado veremos algunos de los ejemplos más característicos y conocidos, pero antes veamos qué condición debe cumplir una proyección para ser conforme. Para este capítulo se han usado como libro de referencia: [5] para la primera sección, [6] para la segunda y [8], [1] y [9] para el resto.

4.1.1. Condición necesaria y suficiente para ser proyección conforme

La Proposición 20 nos dice qué debe cumplir cualquier proyección para ser conforme. Ahora veremos el caso particular al proyectar la esfera usando las coordenadas geográficas (2.1).

Proposición 22. Sean $Y : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo local, $X(\varphi, \lambda)$ la parametrización de \mathbb{S}^2 dada por las coordenadas geográficas (2.1) y $\bar{X} = Y \circ X$. Entonces, Y es una aplicación conforme si, y sólo si, $\bar{E} = \rho^2$, $\bar{F} = 0$ y $\bar{G} = \rho^2 \cos^2 \varphi$, para alguna aplicación diferenciable $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que no se anula en ningún punto.

Demostración. Si $Y : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un difeomorfismo local, $\bar{X} = Y \circ X$ es una parametrización del plano. Entonces, si Y es una aplicación conforme,

con factor de conformidad ρ ,

$$\bar{E} = \langle \bar{X}_\varphi, \bar{X}_\varphi \rangle = \rho(p)^2 \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = \rho^2(p)E = \rho(p)^2$$

$$\bar{F} = \langle X_\varphi, X_\lambda \rangle = 0$$

$$\bar{G} = \langle X_\lambda, X_\lambda \rangle = \rho(p)^2 \cos^2 \varphi$$

para $p = X(\varphi, \lambda)$. Y recíprocamente, si $\bar{E} = \rho(p)^2$, $\bar{F} = 0$ y $\bar{G} = \rho(p)^2 \cos^2 \varphi$ para alguna función diferenciable no nula $Y : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, entonces Y es una aplicación conforme.

■

4.1.2. Proyección plana: Proyección estereográfica

Esta proyección cartográfica, aplicada a los primeros mapas, fue descubierta por Hiparco de Nicae. Para describir esta proyección en coordenadas, centramos una esfera de radio 1 en $(0, 0, 1)$ por lo tanto el plano tangente al polo sur es el plano $Z = 0$. Cualquier punto P en esta esfera satisface

$$P = (x, y, 1 + z) \text{ con } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Sea $N = (0, 0, 2)$, es decir, el polo norte. La recta que pasa por P y N corta al plano, tangente en el polo sur, en el punto $Q = Y(P) = (u, v, 0)$.

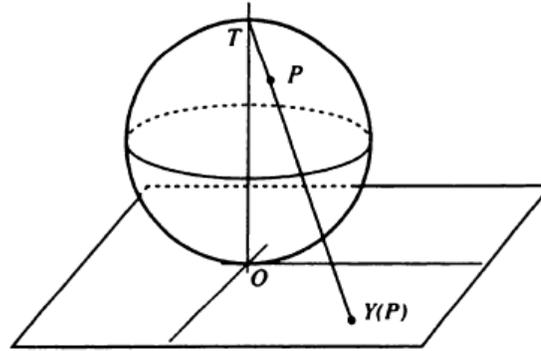


Figura 4.1: Proyección estereográfica. Fuente: [6].

Como los vectores en \mathbb{R}^3 , \vec{PN} y \vec{QN} , son linealmente dependientes se tiene que su producto vectorial es 0. Entonces:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z-1 \\ u & v & -2 \end{vmatrix} = (-2y - v(z-1), 2x + u(z-1), xv - yu) = (0, 0, 0)$$

Por tanto,

$$u = \frac{2x}{1-z}, \quad v = \frac{2y}{1-z}. \quad (4.1)$$

Y, haciendo la composición de las coordenadas geográficas (2.1) con las obtenidas (4.1), se tiene

$$Y(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}, 0 \right).$$

Luego, las coordenadas de la proyección estereográfica son

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = \left(\frac{2 \cos \varphi \cos \lambda}{1 - \sin \varphi}, \frac{2 \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \sin \varphi}, 0 \right) \quad (4.2)$$

A continuación veremos algunas propiedades de esta proyección.

Propiedades de la proyección estereográfica

Proposición 23. *Si una circunferencia en \mathbb{S}^2 no contiene el polo norte, su imagen mediante la proyección estereográfica es una circunferencia en el plano. Si una circunferencia en \mathbb{S}^2 pasa a través del polo norte entonces, su imagen es una línea recta en el plano.*

Demostración. Cualquier circunferencia en \mathbb{S}^2 es la intersección de un plano en \mathbb{R}^3 con la esfera. Consideramos tres casos:

- Una circunferencia que pasa a través del polo norte.
- Una circunferencia que no pasa por el polo norte y no es circunferencia máxima.
- Una circunferencia máxima que no pasa a través del polo norte.

En el primer caso, la imagen de la circunferencia usando la proyección estereográfica es la intersección del plano que da la circunferencia con el plano tangente al polo sur, es decir, una recta.

En el segundo, los planos tangentes a la esfera en puntos sobre la circunferencia C se cortan en el vértice, llamémoslo S , de un cono tangente a la esfera y que contiene a C .

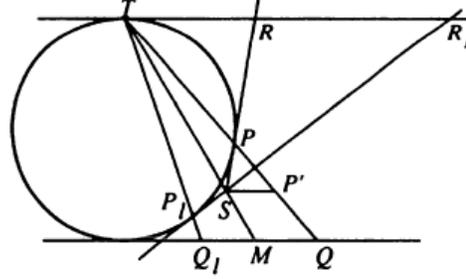


Figura 4.2: La circunferencia representa una circunferencia máxima que está contenida en el plano que contiene a S y a T . Fuente: [6].

Sea, en nuestro caso T el polo norte, el rayo \overline{TS} no es perpendicular al eje Z y, por tanto, corta el plano $Z = 0$ en un punto M . Supongamos P un punto de C y $Q = Y(P)$ es la imagen de P usando la proyección estereográfica.

En el plano determinado por T , Q y M consideramos los ángulos \widehat{TQM} y \widehat{QPS} . Extendemos la recta que pasa por S y P hasta cortar la línea tangente a la esfera a través del polo norte en el plano TQM y a ese punto lo llamamos R . Como las rectas QM y TR se encuentran en planos paralelos, son paralelas. Entonces, como sabemos, los ángulos internos \widehat{RTQ} y \widehat{MQT} son congruentes. Ahora \overline{TR} y \overline{PR} son iguales ya que ambos segmentos de recta son tangentes a la esfera. Así, los ángulos \widehat{RTP} y \widehat{RPT} son iguales. Además, los ángulos \widehat{RPT} y \widehat{SPQ} son iguales y adyacentes. Supongamos que P' es el punto en la recta TQ con los ángulos $\widehat{SP'T}$ y \widehat{MQT} iguales. Entonces el triángulo $\Delta TP'S$ es semejante al triángulo ΔTQM . Por lo anterior, el triángulo $\Delta SPP'$ tiene los ángulos congruentes, por lo tanto, el segmento de recta \overline{SP} es igual al segmento $\overline{SP'}$. De forma similar para los triángulos $\Delta TP'S$ y ΔTQM que implican las siguientes proporciones:

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{TM}} = \frac{\overline{SP'}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{SP}}{\overline{MQ}}, \quad \text{o reescrito como } \overline{MQ} = \frac{\overline{SP} \cdot \overline{TM}}{\overline{TS}}.$$

Ahora \overline{SP} tiene la misma longitud para todos los puntos P de la circunferencia C , y también \overline{MQ} tiene la misma longitud para todos los puntos de

C , esto es, la imagen de la circunferencia bajo la proyección estereográfica es una circunferencia con centro M determinada por el cono de vértice S .

Por último, en el tercer caso no hay cono tangente y, por lo tanto, no hay vértice S . Para remediarlo, consideramos la única recta a través de T que es perpendicular al plano que determina la circunferencia maximal. Esta recta corta al plano $Z = 0$ en el punto M . Sea P un punto cualquiera de la circunferencia máxima, $Q = Y(P)$ y consideremos la intersección del plano $\Pi(T, Q, M)$ determinado por T, Q, M con la esfera. Como \overline{TM} es perpendicular al plano en el que la circunferencia máxima se encuentra, \overline{TM} es paralelo al plano tangente a P y, por tanto, paralelo a la recta l que se encuentra en el plano $\Pi(T, Q, M)$ tangente a la esfera en P .

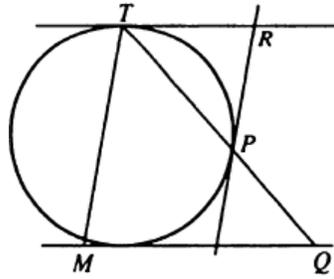


Figura 4.3: Fuente: [6].

La recta l corta a la recta que pasa por T tangente a la esfera en el polo norte y corta al plano $\Pi(T, Q, M)$ en el punto R . Los pares de ángulos alternos \widehat{PRT} y \widehat{TMQ} y \widehat{PTR} y \widehat{TQM} son congruentes. Como ambos segmentos de recta son tangentes a una circunferencia \overline{PR} y \overline{TR} son semejantes, y por tanto los ángulos \widehat{PTR} y \widehat{TPR} son congruentes.

La suma de sus ángulos implica que los ángulos \widehat{TQM} y \widehat{QTM} son congruentes y, por lo tanto, los segmentos \overline{QM} y \overline{TM} también lo son. Así, la imagen de una circunferencia maximal es una circunferencia de radio con longitud igual a la del segmento \overline{TM} .

■

Una de las virtudes de esta proyección es que es una proyección conforme, veámoslo: Como

$$\left(\frac{\cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)' = \frac{-\sin \varphi (1 - \sin \varphi) + \cos^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{1}{1 - \sin \varphi}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{X}_\varphi &= \left(\frac{2 \cos \lambda}{1 - \sin \varphi}, \frac{2 \sin \lambda}{1 - \sin \varphi}, 0 \right) \\ \bar{X}_\lambda &= \left(-\frac{2 \cos \varphi \sin \lambda}{1 - \sin \varphi}, \frac{2 \cos \varphi \cos \lambda}{1 - \sin \varphi}, 0 \right).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \langle \bar{X}_\varphi, \bar{X}_\varphi \rangle = \frac{4 \cos^2 \lambda + 4 \sin^2 \lambda}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{4}{(1 - \sin \varphi)^2}, \\ \bar{F} &= \langle \bar{X}_\varphi, \bar{X}_\lambda \rangle = \frac{-4 \cos \varphi \sin \lambda \cos \lambda + 4 \cos \varphi \cos \lambda \sin \lambda}{(1 - \sin \varphi)^2} = 0, \\ \bar{G} &= \langle \bar{X}_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle = \frac{4 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda + 4 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda}{(1 - \sin \varphi)^2} = \frac{4 \cos^2 \varphi}{(1 - \sin \varphi)^2}.\end{aligned}$$

Y usando la Proposición 22 tenemos que

$$\rho(X(\varphi, \lambda)) = \frac{4}{(1 - \sin \varphi)^2}$$

luego está bien definida si φ es distinto de $\frac{\pi}{2}$ que es el polo norte. Por tanto, esta proyección es conforme.

4.1.3. Proyección cilíndrica: La proyección de Mercator

Las *proyecciones cilíndricas* son aquellas que proyectan la superficie terrestre sobre un cilindro. Es decir toman la tierra como la esfera unidad y un cilindro tangente a la esfera en una circunferencia máxima. Entonces una vez obtenida la imagen de la esfera en el cilindro, se despliega éste en el plano. Estas proyecciones pueden ser normales, transversales u oblicuas.

Las *proyecciones cilíndricas* normales. Son aquellas en las que en la proyección el eje X contiene al ecuador y el eje Y contiene un generador en particular, que normalmente será el meridiano de Greenwich ($\lambda = 0$). Claramente los meridianos de la esfera se convierten en rectas, es decir, la coordenada x es constante en la proyección de los meridianos. Por tanto, la ecuación de la coordenada x en la proyección es $x = \lambda$. Y la ecuación de la coordenada y de la proyección va a ser una función que dependa de φ . Por consiguiente, las proyecciones cilíndricas normales son definidas de la forma:

$$x(\varphi, \lambda) = \lambda$$

$$y(\varphi, \lambda) = f(\varphi).$$

Es decir, las proyecciones cilíndricas normales las definiremos como sigue:

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = (\lambda, f(\varphi), 0).$$

Con transformaciones de esta forma los paralelos en la esfera (φ constante) se proyectan en rectas con y constante y, por lo tanto, las intersecciones ortogonales de meridianos y paralelos en la gráfica de la esfera son proyectados en intersecciones ortogonales en el mapa. La distancia de los meridianos en la proyección es uniforme, pero la distancia de los paralelos depende de la elección de la función $f(\varphi)$. Es importante darse cuenta de que todas las proyecciones cilíndricas normales tienen puntos singulares: los polos.

Transformación de los ángulos en la proyección cilíndrica normal

Sea la figura:

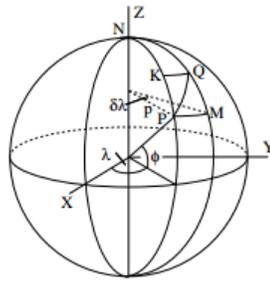


Figura 4.4: Fuente: [8]

Si componemos el rectángulo infinitesimal $PMQK$ en la esfera con su proyección $P'M'Q'K'$ en el cilindro tenemos gráficamente:

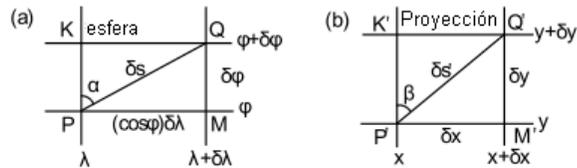


Figura 4.5: Fuente: [8]

Siguiendo las figuras 4.4 y 4.5 tenemos:

$$\tan \alpha = \frac{\delta \lambda \cos \varphi}{\delta \varphi} = \frac{\lambda \cos \varphi}{\varphi}$$

$$\tan \beta = \frac{\delta x}{\delta y} = \frac{\delta \lambda}{f'(\varphi) \delta \varphi} = \frac{\lambda}{f'(\varphi) \varphi}$$

Por tanto,

$$\tan \beta = \frac{\tan \alpha}{\cos \varphi f'(\varphi)} = \frac{\sec \varphi \tan \alpha}{f'(\varphi)}$$

Si $\alpha = \beta$ los ángulos se conservan en la proyección y por tanto sería conforme. Para que esto se cumpla se ha de dar que $\sec \varphi = f'(\varphi)$.

Ejemplo: La proyección de Mercator

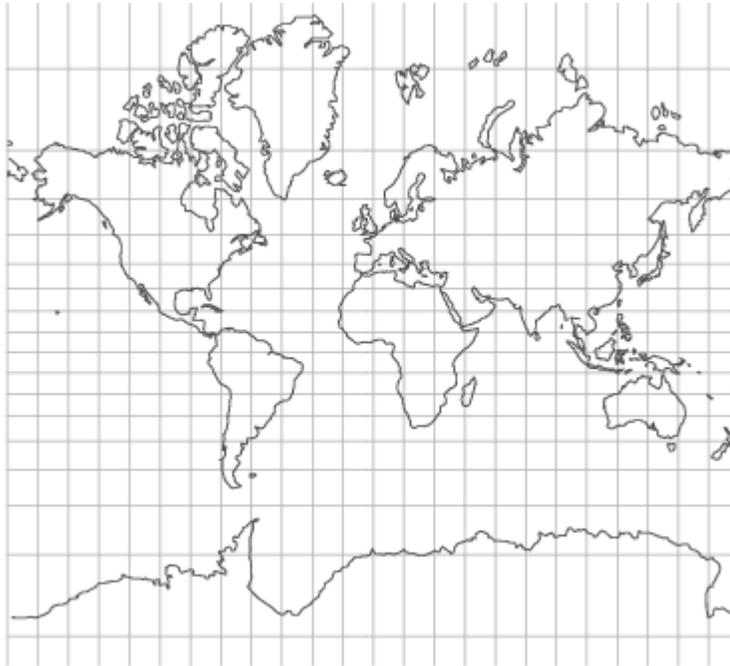


Figura 4.6: Mapamundi, centrado en Europa, usando la proyección de Mercator.

Esta es, probablemente, la proyección cartográfica más conocida e importante, pues da lugar a los mapas habituales a los que estamos acostumbrados. El nombre se debe a un cartógrafo flamenco llamado Gerard Kremer (1512-1594), Kremer significa mercader, y la forma latina del nombre es Gerardus Mercator.

A pesar de llevar su nombre, Mercator seguramente no haya sido la primera persona en utilizar esta proyección ya que se cree que con este tipo de proyección se diseñaron algunos relojes de sol. Sin embargo Mercator desarrolló esta proyección de forma independiente e hizo uso de ella sólo mediante métodos gráficos ya que carecía de herramientas de cálculo. La presentó en el año 1569 en una obra titulada *Nueva y Aumentada Descripción de la Tierra con Correcciones para su Uso en Navegación* con la intención de que fuera utilizada en la navegación marítima.

La proyección de Mercator trata a la Tierra como un globo hinchable que se introduce en un cilindro y que empieza a inflarse ocupando el volumen del cilindro, imprimiendo el mapa en su cara interior. Este cilindro cortado longitudinalmente y desplegado sería parecido al mapa con la proyección de Mercator. Pero como cualquier otro mapa la proyección de Mercator tiene sus puntos débiles, pues exagera el tamaño de las tierras a medida que nos alejamos de la línea del ecuador.

En la proyección de Mercator los meridianos se transforman en rectas verticales, paralelas y equiespaciadas, y cortan en ángulo recto a los paralelos, cuyo espaciamiento aumenta a medida que se acercan hacia los polos. La relación de proporcionalidad que hay entre los paralelos varía con la latitud.

Para explicar y calcular la proyección de Mercator es necesario incluir algunos conceptos nuevos.

Definición 24. *Se denomina **loxodroma o línea de rumbo fijo** a la curva contenida en la esfera que forma un ángulo constante con respecto a la familia de meridianos de S^2 .*

Ya que los meridianos determinan las direcciones Norte-Sur, el rumbo constante marcado en una brújula sigue una loxodroma. En general, una loxodroma no es el camino más corto entre dos puntos en la esfera, pero son más sencillas para navegar. La extensión de la mayoría de loxodromas determina una trayectoria en espiral a uno de los polos.

El problema resuelto por Mercator fue encontrar una proyección tal que:

1. Meridianos y paralelos se proyectan en rectas ortogonales.

2. Proyecta loxodromas en segmentos de recta.

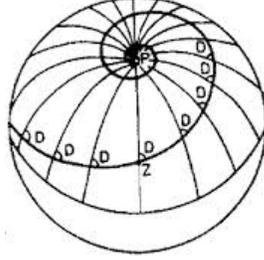


Figura 4.7: Loxodroma. Fuente: [6]

Para construir la proyección de Mercator, enviamos paralelas a paralelas, para ello hacemos la composición:

$$Y \circ X : (-\pi, \pi) \times \left(-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right) \rightarrow \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$

Donde $X(\varphi, \lambda)$ son las coordenadas geográficas (2.1) e $Y : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la proyección que queremos encontrar. Las coordenadas de la proyección que queremos encontrar deben satisfacer:

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = (Y \circ X)(\varphi, \lambda) = (\lambda, f(\varphi, \lambda), 0)$$

ahora bien, la condición $f(\varphi, \lambda) = f(\varphi)$ garantiza 1).

Para 2) debemos caracterizar los loxodromas.

Proposición 25. *Sea α una curva parametrizada por la longitud de arco (p.p.a.); es decir, $\|\alpha'(t)\| = 1$, con $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$. Entonces α es una loxodroma si, y sólo si, $\alpha(s) = X(\varphi(s), \lambda(s))$, donde $\lambda'(s) = \frac{c_2}{\cos \varphi}$ y $\varphi'(s) = c_1$ para algunas constantes c_1, c_2 .*

Demostración. Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}^2$ una curva p.p.a. $\alpha(s) = X(\varphi(s), \lambda(s))$. Entonces podemos escribir $\alpha'(s) = \varphi'(s)X_\varphi + \lambda'(s)X_\lambda$.

Al ser una loxodroma, el ángulo creado con los meridianos es constante, entonces,

$$\frac{\langle \alpha'(s), X_\varphi \rangle}{\|\alpha'(s)\| \|X_\varphi\|} = c_1$$

$$\frac{\langle \alpha'(s), X_\lambda \rangle}{\|\alpha'(s)\| \|X_\lambda\|} = c_2$$

Con c_1 y c_2 constantes. Ahora como $\langle \alpha'(s), X_\varphi \rangle = \varphi'(s) \langle X_\varphi, X_\varphi \rangle = \varphi'(s)$ y $\|X_\varphi\| = 1$ pues recordemos que $X(\varphi, \lambda) = (\cos \varphi \cos \lambda, \cos \varphi \sin \lambda, \sin \varphi)$ y $E = 1$. Entonces $\varphi'(s) = c_1$.

Además, $\langle \alpha'(s), X_\lambda \rangle = \lambda'(s) \langle X_\lambda, X_\lambda \rangle = \lambda'(s) \cos^2 \varphi$ y $\|X_\lambda\| = \cos \varphi$. Entonces,

$$c_2 = \frac{\lambda'(s) \cos^2 \varphi}{\cos \varphi} \text{ y, por tanto, } \lambda'(s) = \frac{c_2}{\cos \varphi}. \blacksquare$$

Como los meridianos y paralelos son perpendiculares, las constantes son los cosenos de los ángulos complementarios, por tanto $c_1^2 + c_2^2 = 1$.

Supongamos ahora una proyección que satisface 1) y 2). Entonces, si $\alpha(s) = Y(\lambda(s), f(\varphi(s)), 0)$ parametriza una recta en \mathbb{R}^2 podemos escribir $A\lambda(s) + Bf(\varphi(s)) + C = 0$ para algún A, B, C . Esta ecuación conduce a la condición,

$$\frac{\frac{df(\varphi(s))}{d\varphi} \varphi'(s)}{\lambda'(s)} = a,$$

con a constante. Por la demostración anterior,

$$a = \frac{c_1 \frac{df}{d\varphi}}{\frac{c_2}{\cos \varphi}}$$

ó

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{b}{\cos \varphi}$$

Integrando esta ecuación diferencial por separación de variables obtenemos $f(\varphi(s))$. Somos libres de elegir la constante b . Sin embargo, la siguiente proposición nos conduce a una elección favorable.

Proposición 26. *Una proyección $\bar{X}(\varphi, \lambda) = (Y \circ X)(\varphi, \lambda) = (\lambda, f(\varphi), 0)$ satisfaciendo $\frac{df}{d\varphi} = \frac{b}{\cos \varphi}$, es conforme si, y sólo si, $b = 1$ ó $b = -1$.*

Demostración. Ya que $\bar{X}(\varphi, \lambda) = (Y \circ X)(\varphi, \lambda) = (\lambda, f(\varphi), 0)$ tenemos

$$\bar{X}_\lambda(\varphi, \lambda) = (1, 0, 0)$$

y

$$\bar{X}_\varphi(\varphi, \lambda) = (0, \frac{df}{d\varphi}, 0).$$

Así,

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \langle \bar{X}_\varphi, \bar{X}_\varphi \rangle = \frac{b^2}{\cos^2 \varphi} \\ \bar{F} &= \langle \bar{X}_\varphi, \bar{X}_\lambda \rangle = 0 \\ \bar{G} &= \langle \bar{X}_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle = 1\end{aligned}$$

Por la Proposición 22 sabemos que esta proyección va a ser conforme si existe ρ^2 que cumpla que $E = \rho^2 \bar{E}$, $F = \rho^2 \bar{F}$ y $G = \rho^2 \bar{G}$ entonces, (recordemos que $E = 1$, $F = 0$ y $G = \cos^2 \varphi$) se tiene que $1 = \rho^2 \frac{b^2}{\cos^2 \varphi}$ y $\cos^2 \varphi = \rho^2$. Por tanto, $1 = \rho^2 \bar{E} = b^2$ y $b = 1$ ó $b = -1$. ■

Finalmente llegamos a las coordenadas de proyección de Mercator integrando $\frac{df}{d\varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$ con la condición inicial $f(0) = 0$. Veámoslo:

$$f(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{ds}{\cos s}$$

Haciendo el cambio $u = \sin s$, $du = \cos s ds$

$$\begin{aligned}\int_0^\varphi \frac{ds}{\cos s} &= \int_0^\varphi \frac{\cos s ds}{1 - \sin^2 s} = \int_0^{\sin \varphi} \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\sin \varphi} \frac{1}{1 + u} + \frac{1}{1 - u} du = \\ &= \frac{1}{2} \log |1 + u| - \frac{1}{2} \log |1 - u| = \frac{1}{2} \log \frac{1 + u}{1 - u} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}\end{aligned}$$

Donde, esta integral siempre tiene solución al no estar en la proyección el polo norte ni el polo sur, pues así φ es distinto de $\frac{\pi}{2}$ y de $-\frac{\pi}{2}$.

Por tanto, las coordenadas de la proyección de Mercator son:

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = \left(\lambda, \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, 0 \right) \quad (4.3)$$

Y como hemos visto anteriormente, es conforme pues $f'(\varphi) = \sec \varphi$.

Ahora sólo queda calcular Y que sale de manera casi inmediata pues tenemos usando (2.1) que:

$$z = \sin \varphi \quad y = \cos \varphi \sin \lambda \quad x = \cos \varphi \cos \lambda$$

Entonces,

$$\lambda = \arccos \frac{x}{\cos \varphi}$$

Por tanto, la proyección de Mercator es:

$$Y(x, y, z) = \left(\arccos \frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}, 0 \right)$$

4.1.4. Proyección cilíndrica transversa: La proyección de Mercator transversa

La mayor cualidad de la proyección normal de Mercator es que es conforme. Por otra parte, también tiene un inconveniente pues, distorsiona en gran medida las formas cuanto más se acerca a los polos. Sin embargo, la proyección normal de Mercator es exacta completamente en el ecuador y es muy precisa dentro de una estrecha franja de unos tres grados centrado en el ecuador. ¿Y si pudiéramos aprovechar esa cualidad? La respuesta de esta pregunta es la proyección transversa de Mercator pues, es esta precisión cerca del ecuador la que aprovechamos mediante la construcción de esta proyección, que tiene un meridiano completo como un “tipo de ecuador”. Esta proyección la demostró, curiosamente, por primera vez Lambert en 1772. El punto crucial es que si tenemos una proyección muy precisa de un meridiano y sus cercanías, entonces, un conjunto de tales proyecciones proporcionará cobertura precisa de toda la esfera.

Para la proyección de Mercator transversa buscamos una proyección sobre un cilindro que es tangente a la esfera en un meridiano completo cualesquiera o, como veremos en nuestro caso, tomando la circunferencia máxima formada por el meridiano de Greenwich y el meridiano $\lambda = 180$.

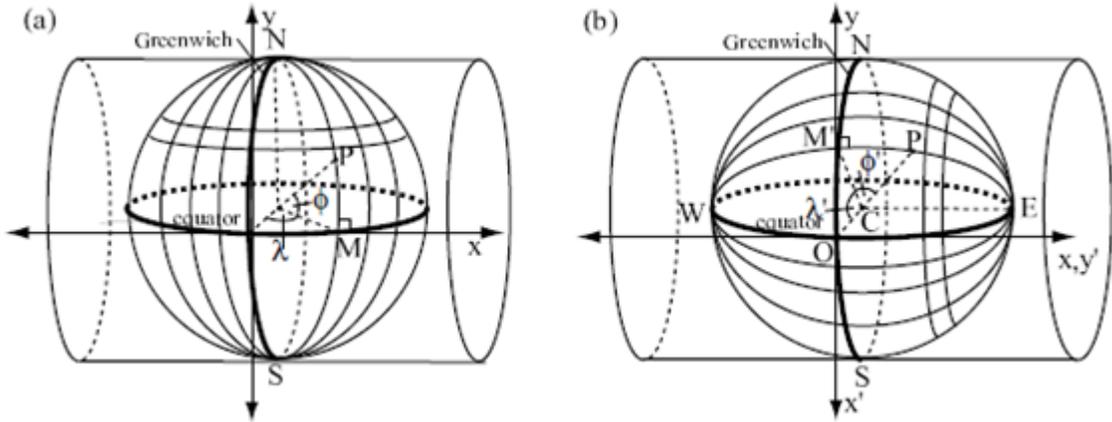


Figura 4.8: En la figura a) puede verse la esfera tomando la latitud y longitud como están definidas en (2.1), y un cilindro tangente a la esfera en los meridianos $\lambda = 0$ y $\lambda = 180$. Mientras que, en la figura b) se ha girado el eje de coordenadas para poder aplicar la proyección normal de Mercator. Fuente: [8]

En la Figura 4.8 a), se ve claramente que la proyección es la identidad en el meridiano de la esfera. El problema es construir las funciones de los ejes coordenados de la proyección $x(\varphi, \lambda)$ e $y(\varphi, \lambda)$ de tal manera que la proyección sea también conforme. La solución es simple. En primer lugar, introducimos un nuevo eje de coordenadas que es simplemente girar la figura a) de manera que su “ecuador” coincida con la circunferencia formada por los meridianos escogidos como en la figura b). Sean φ' y λ' las coordenadas de P con respecto al nuevo eje de coordenadas, donde φ' es el ángulo PCM' y λ' es el ángulo OCM' en la figura. Se ve claramente que λ' es medido positivo desde el origen O hacia M' ; esto es opuesto al sentido de λ en el eje de coordenadas estándar de la Figura 4.8 a). En la Figura 4.8 b) también hemos mostrado los ejes x' e y' que se han obtenido mediante un giro para poder utilizar la proyección normal de Mercator en la Figura 4.8 a). Por lo tanto, teniendo en cuenta el sentido de λ' , las coordenadas de la proyección normal de Mercator (4.3) con respecto al eje rotado son

$$\bar{X}'(\varphi', \lambda') = \left(-\lambda', \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}, 0 \right)$$

La relación entre los ejes de la proyección normal de Mercator y los ejes

girados es simplemente $x = y'$ e $y = -x'$, por lo que inmediatamente tenemos las fórmulas de las coordenadas de la proyección con respecto a los ángulos (φ', λ') del eje rotado:

$$\bar{X}(\varphi', \lambda') = \left(\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \varphi'}{1 - \sin \varphi'}, \lambda', 0 \right)$$

Para obtener la relación entre (φ', λ') y (φ, λ) lo único que debemos hacer es aplicar trigonometría esférica en el triángulo $NM'P$ definido por meridianos a través del origen y un punto arbitrario P y por la circunferencia máxima $WM'PE$ (Figura 4.8 a)) que es un “meridiano” del eje girado. A continuación se usará una formulación, sencilla de ver, que no ha sido demostrada en este trabajo, para más información sobre ella remitirse a [8]. Si tenemos la figura:

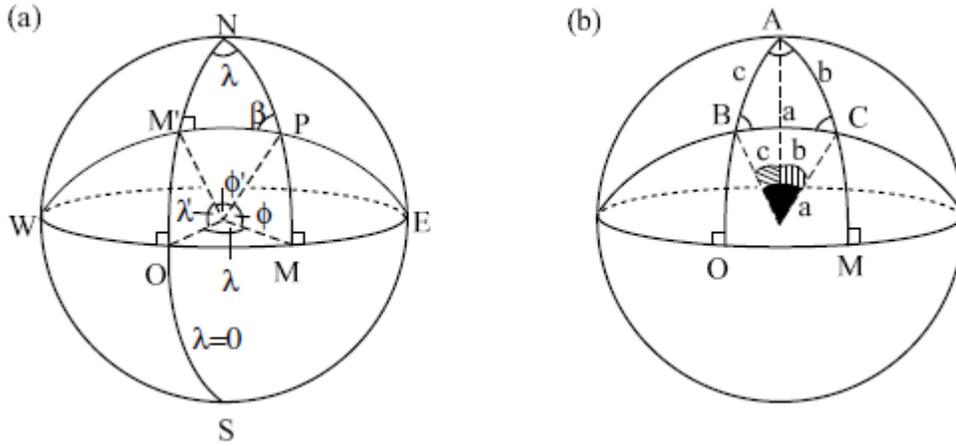


Figura 4.9: Fuente: [8]

Tenemos que,

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

y

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Entonces, identificando

$$A = \lambda, \quad B = \frac{\pi}{2}, \quad C = \beta$$

$$a = \varphi', \quad b = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad c = \frac{\pi}{2} - \lambda'$$

obtenemos, usando las reglas seno y coseno escritas anteriormente, que:

$$\sin \varphi' = \sin \lambda \cos \varphi$$

$$\cos \varphi' = \sin \varphi \sin \lambda' + \cos \varphi \cos \lambda' \cos \lambda$$

$$\sin \varphi = \sin \lambda' \cos \varphi'$$

Para obtener λ' eliminamos $\cos \varphi$ con las dos últimas ecuaciones y las simplificamos, obteniendo:

$$\tan \lambda' = \sec \lambda \tan \varphi$$

Por tanto, las coordenadas de la proyección transversa de Mercator tomadas desde el meridiano de Greenwich son:

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = \left(\frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin \lambda \cos \varphi}{1 - \sin \lambda \cos \varphi}, \tan^{-1}(\sec \lambda \tan \varphi), 0 \right)$$

Si queremos medirlas desde otro meridiano central, lo único que debemos hacer es tomar λ como $\lambda - \lambda_0$.

4.2. Proyecciones isoareales

Las proyecciones isoareales (equivalentes o equiareales) son aquéllas cuya proyección conserva las áreas, aunque son menos conocidas y usadas que las proyecciones conformes, tienen gran utilidad pues dan una imagen real del tamaño de los continentes. A continuación veremos la proyección cilíndrica de Lambert la cual es la más importante, pero antes veamos qué condición debe cumplir una proyección para ser isoareal. Para obtener este resultado se ha usado como libro de referencia [5].

4.2.1. Condición necesaria y suficiente para ser proyección isoareal

Proposición 27. *Si consideramos la parametrización de la esfera dada por las coordenadas geográficas (2.1). Sea $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un difeomorfismo (sobre la imagen) y sea $\bar{X} = f \circ X$ la correspondiente parametrización en el plano. Entonces, f es una aplicación isoareal si, y sólo si, $\overline{EG} - \bar{F}^2 = \cos^2 \varphi$.*

Demostración. Supongamos primero que f es isoareal y que existe $p = X(\varphi_0, \lambda_0) \in \mathbb{S}^2$ con

$$(\overline{EG} - \bar{F}^2)(\varphi_0, \lambda_0) \neq \cos^2 \varphi_0 = (EG - F^2)(\varphi_0, \lambda_0).$$

Podemos suponer, por ejemplo, que $(\overline{EG} - \bar{F}^2)(\varphi_0, \lambda_0) > \cos^2 \varphi_0$. Entonces, existe un entorno $V(p)$ donde $(\overline{EG} - \bar{F}^2)(\varphi, \lambda) > \cos^2 \varphi$, para todo $X(\varphi, \lambda) \in V$. Claramente, $X^{-1}(V) = \bar{X}^{-1}(f(V))$. Como f es isoareal, $A(V) = A(f(V))$, y por tanto,

$$\int_{X^{-1}(V)} \cos^2 \varphi d\varphi d\lambda = \int_{\bar{X}^{-1}(f(V))} \sqrt{\overline{EG} - \bar{F}^2} d\varphi d\lambda > \int_{X^{-1}(V)} \cos^2 \varphi d\varphi d\lambda$$

una contradicción. Luego $\overline{EG} - \bar{F}^2 = \cos^2 \varphi$.

Recíprocamente, si $\overline{EG} - \bar{F}^2 = \cos^2 \varphi = EG - F^2$, entonces, para cualquier región $R \subset X(U = (0, \pi) \times (0, 2\pi))$, es evidente que $A(R) = A(f(R))$.

■

4.2.2. Proyección cilíndrica: Proyección de Lambert

A continuación hablaremos de la proyección cilíndrica de Lambert, para la cual, hemos usado como libros de referencia [9], [3], [5] y [8]. El matemático J. H. Lambert presentó siete proyecciones en su obra *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* en 1772. La proyección cilíndrica normal e isoareal es la cuarta que presentó. Su obra fue uno de los primeros tratados matemáticos sobre el tema de la cartografía. Aunque también se estipula con la posibilidad de que Arquímedes ya conocía la proyección isoareal cilíndrica pues, había calculado el área de una esfera y de un cilindro de la misma altura. Esta es una de las proyecciones equivalentes de más fácil construcción, y en términos generales, esta proyección se adapta para la representación de zonas ecuatoriales. Sus características más importantes son:

- Es una proyección isoareal.
- Los meridianos forman líneas rectas, que son equidistantes entre sí.
- Los paralelos también forman líneas rectas y, en este caso, su distancia se reduce conforme la latitud es mayor.

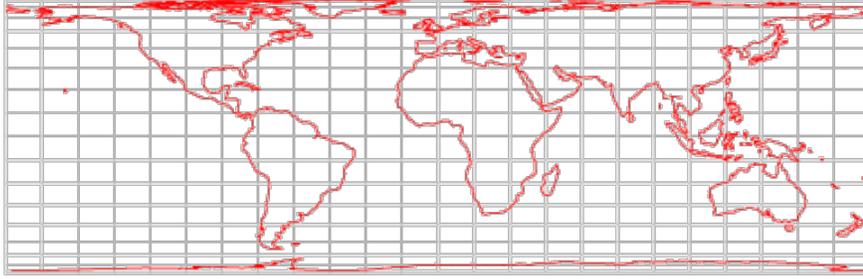


Figura 4.10: Proyección cilíndrica de Lambert.

Para esta proyección, se tiene que $f(\varphi) = \sin \varphi$. Veamos cómo se obtiene.

Se considera la esfera unidad \mathbb{S}^2 centrada en el origen de coordenadas y sea C el cilindro dado por $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Sea $\Pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \{N, S\}$ la aplicación siguiente: se considera la única recta l perpendicular al eje z que pasa por p , con $p = (x_0, y_0, z_0)$. Sea v el vector director de la recta l , entonces $v = (x_0, y_0, 0)$ y

$$l := \begin{cases} x = \alpha x_0 \\ y = \alpha y_0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Para hallar el punto de corte de l con C tenemos que se debe cumplir: $x^2 + y^2 = 1$, por tanto, $\alpha x_0^2 + \alpha y_0^2 = 1$. luego, $\alpha = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}$ y como al cumplirse la ecuación de la esfera se tiene $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ obtenemos,

$$\Pi(p) = l \cap C = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1 - z^2}}, z \right)$$

Finalmente, la composición de Π con la inversa de la parametrización del cilindro, (recordemos que la parametrización del cilindro es $Z(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$) nos da $Y : \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $Y(x, y, z) = (\arctan \frac{y}{x}, z, 0)$

e introduciendo las coordenadas geográficas (2.1), obtenemos la expresión en coordenadas de la proyección cilíndrica de Lambert:

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = (Y \circ X)(\varphi, \lambda) = (\lambda, \sin \varphi, 0)$$

Calculemos su primera forma fundamental.

$$\bar{X}_\lambda(\varphi, \lambda) = (1, 0, 0)$$

$$\bar{X}_\varphi(\varphi, \lambda) = (0, \cos \varphi, 0)$$

Luego,

$$\bar{E} = \langle \bar{X}_\varphi, \bar{X}_\varphi \rangle = \cos^2 \varphi$$

$$\bar{F} = \langle \bar{X}_\varphi, \bar{X}_\lambda \rangle = 0$$

$$\bar{G} = \langle \bar{X}_\lambda, \bar{X}_\lambda \rangle = 1$$

Y por la Proposición 27 la proyección de Lambert es isoareal pues:

$$\bar{EG} - \bar{F}^2 = \cos^2 \varphi = EG - F^2.$$

4.3. Proyecciones aflácticas

Las proyecciones aflácticas son aquellas cuya proyección no conserva ninguna de las propiedades anteriores, es decir, no conservan ángulos, áreas o longitudes. Aunque no son de gran validez a la hora de plasmar mapas, veremos que tienen gran utilidad para diversos casos.

4.3.1. Proyección plana: Proyección central

Para esta proyección se ha usado como libro de referencia [6]. La proyección central fue descubierta en la misma época que la estereográfica y fue básica para la expansión del comercio marítimo pues, aunque la proyección estereográfica lleva la mayoría de los círculos máximos, excluyendo los que pasan por el polo norte, a círculos en el plano; para la navegación es más conveniente representar las rutas determinadas por circunferencias máximas como rectas en el plano. Esta es la propiedad más atractiva de la proyección central. Para construirla fijamos el plano tangente en un punto R de la esfera y unimos un punto P del hemisferio adyacente con el centro de la esfera. La proyección central se define como la intersección de la recta \overline{OP} con el plano

tangente en el hemisferio que tiene como centro a R . Si tomamos a R como el polo sur, $R = (0, 0, -1)$, un punto P en esta esfera satisface $P = (x, y, z)$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. La recta que pasa por O y P corta, al plano en el punto $Q = Y(P) = (u, v, -1)$.

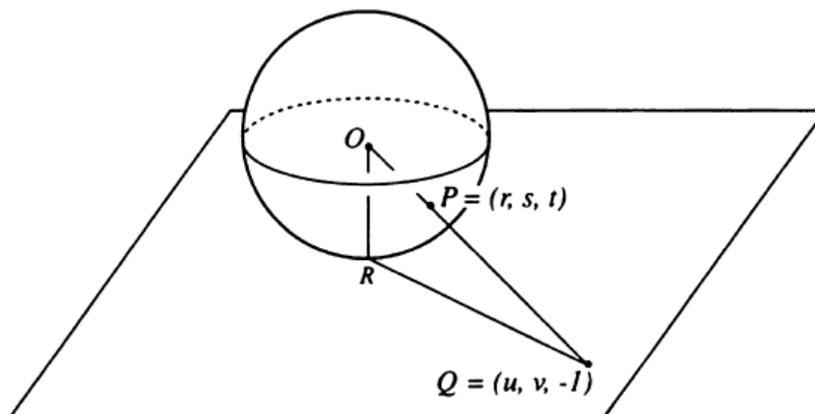


Figura 4.11: Fuente: [6]

Como los vectores \overline{OP} y \overline{OQ} son linealmente dependientes se tiene que su producto vectorial es 0. Entonces:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ u & v & -1 \end{vmatrix} = (-y + vz, uz - x, xv - yu) = (0, 0, 0)$$

Por tanto,

$$u = \frac{x}{z}, \quad v = \frac{y}{z}.$$

Y haciendo la composición de las coordenadas geográficas (2.1) con las obtenidas $Y(x, y, z) = \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, -1\right)$ tenemos que la expresión en coordenadas de la proyección central es:

$$\overline{X}(\varphi, \lambda) = \left(\frac{\cos \varphi \cos \lambda}{\sin \varphi}, \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\sin \varphi}, -1 \right)$$

O escrita de la forma que es más habitual encontrar:

$$\overline{X}(\varphi, \lambda) = (\cos \lambda \cot \varphi, \sin \lambda \cot \varphi, -1)$$

Propiedades de la proyección central

Proposición 28. *La proyección central convierte circunferencias máximas en rectas en el mapa.*

Demostración. Una circunferencia máxima está determinada por la intersección de la esfera y un plano que pasa por el centro de la esfera. La imagen de la circunferencia máxima al aplicar la proyección central es la intersección de este plano con el plano tangente al polo sur, y eso determina una recta. ■

Veamos si es una proyección conforme, como

$$\overline{X}_\varphi(\varphi, \lambda) = \left(\frac{-\cos \lambda}{\sin^2 \varphi}, \frac{-\sin \lambda}{\sin^2 \varphi}, 0 \right)$$

$$\overline{X}_\lambda(\varphi, \lambda) = (-\sin \lambda \cot \varphi, \cos \lambda \cot \varphi, 0)$$

Se tiene que:

$$\overline{E} = \langle \overline{X}_\varphi, \overline{X}_\varphi \rangle = \frac{\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda}{\sin^4 \varphi} = \frac{1}{\sin^4 \varphi},$$

$$\overline{F} = \langle \overline{X}_\varphi, \overline{X}_\lambda \rangle = \cot \varphi \sin \lambda \cos \lambda - \cot \varphi \cos \lambda \sin \lambda = 0,$$

$$\overline{G} = \langle \overline{X}_\lambda, \overline{X}_\lambda \rangle = \cot^2 \varphi (\sin^2 \lambda + \cos^2 \lambda) = \cot^2 \varphi.$$

Por tanto, por la Proposición 22 no es una aplicación conforme. Veamos si es isoareal:

$$\overline{EG} - \overline{F}^2 = \frac{\cot^2 \varphi}{\sin^4 \varphi} \neq EG - F^2 = \cos^2 \varphi$$

Y, por tanto, por la Proposición 27 tampoco es isoareal. Luego la mayor ventaja de esta proyección es que representa como rectas en el plano las circunferencias máximas.

Capítulo 5

Otras proyecciones

Existen multitud de proyecciones interesantes que todavía no hemos visto y muchas que no veremos en este trabajo. En este capítulo intentaremos ver algunas más, aunque de una manera menos detallada. Aún así, si alguien tiene un especial interés en ellas, podrá remitirse a la referencia que será dada en cada proyección.

5.1. Proyección cónica

Ahora veremos que sucede si en lugar de en un plano o un cilindro proyectamos la esfera en un cono. Para esta sección se ha usado como referencia [12].

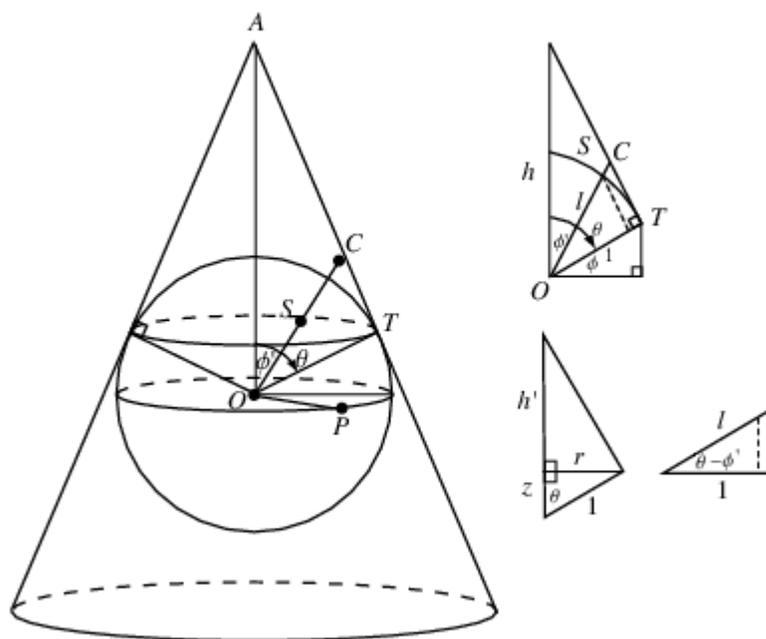


Figura 5.1: Proyección cónica.

Sea un cono cualquiera, tangente a la esfera unidad, que tiene como vértice A y cuya tangente a la esfera sobre una circunferencia pasa a través del punto T . Una **proyección cónica** de dicha esfera unidad centrada en O consiste en extender la recta OS para cada punto S hasta que interseca al cono en el punto C . Para un cono con vértice A y altura h sobre O , el ángulo desde el eje z en el que el cono es tangente viene dado por:

$$\cos \theta = \frac{1}{h} \quad \text{entonces,} \quad \theta = \arccos \frac{1}{h} = \sec^{-1} h$$

Y el radio de la circunferencia de tangencia y la altura sobre O en la que se encuentra vienen dadas por (recordemos que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$).

$$\sin \theta = \frac{r}{1} = r$$

por tanto,

$$r = \sin \theta = \sin(\arccos \frac{1}{h}) = \sqrt{1 - \frac{1}{h^2}} = \frac{\sqrt{h^2 - 1}}{h}$$

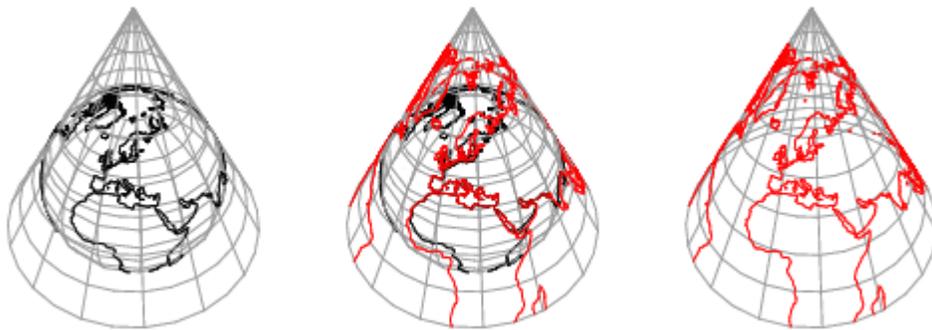
$$\cos \theta = \frac{z}{1} = z \quad \text{entonces,} \quad z = \cos(\arccos \frac{1}{h}) = \frac{1}{h}$$

Tomando $\varphi' = \frac{\pi}{2} - \varphi$ como la colatitud del punto S en la esfera, la longitud l del vector OC a lo largo de OS es:

$$\cos(\theta - \varphi') = \frac{1}{l}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} l &= \frac{1}{\cos(\theta - \varphi')} = \frac{1}{\cos(\arccos(\frac{1}{h}) + \varphi - \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\sin(\varphi + \arccos \frac{1}{h})} \\ &= \csc(\varphi + \arccos \frac{1}{h}) \end{aligned}$$



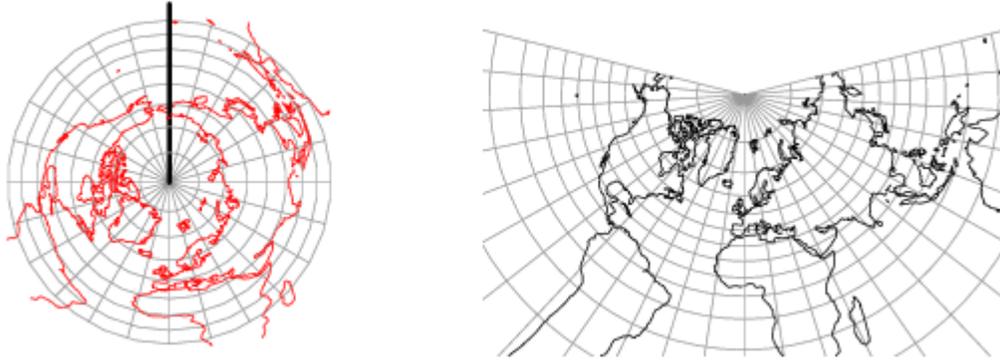


Figura 5.2: La figura de la izquierda muestra el resultado de la proyección sobre un plano perpendicular al eje Z (equivalente a mirar el cono desde arriba del vértice). La figura de la derecha muestra el cono cortado a lo largo de una línea fija y aplanado.

Las ecuaciones que transforman un punto en la esfera con coordenadas geográficas (φ, λ) a un punto en el cono aplanado son:

$$x = \csc\left(\varphi + \arccos \frac{1}{h}\right) \cos \varphi \sin \left(\frac{\lambda}{\sqrt{h^2 - 1}} \right)$$

$$y = \csc\left(\varphi + \arccos \frac{1}{h}\right) \cos \varphi \cos \left(\frac{\lambda}{\sqrt{h^2 - 1}} \right)$$

Donde x e y han sido calculadas de la misma manera que (2.1).

5.1.1. Ejemplo de Proyección cónica: Proyección cónica de Lambert

En esta sección veremos la proyección cónica de Lambert, sus propiedades y para qué se utiliza. Para este ejemplo se han usado como textos de referencia [9] y [13].

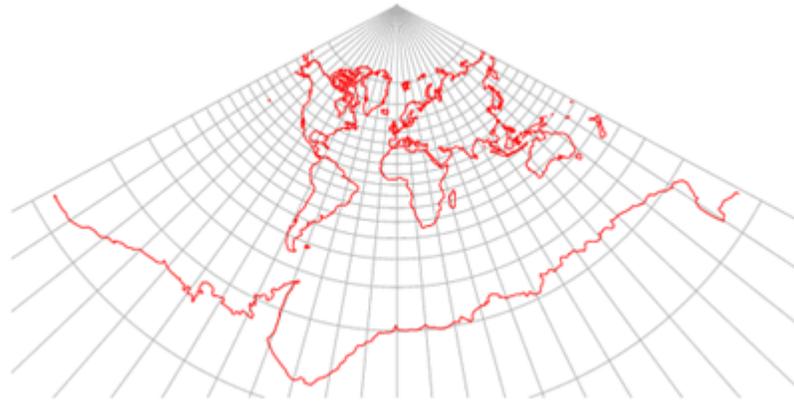


Figura 5.3: Proyección cónica de Lambert tomando como meridiano principal el meridiano de Greenwich. Fuente: [13]

Esta es otra de las proyecciones que el matemático J. H. Lambert presentó en su obra *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* en 1772. Su proyección cónica cumple las siguientes propiedades:

- Es una proyección conforme
- Los paralelos están espaciados de manera desigual formando arcos de círculos concéntricos, los cuales están más cerca junto al centro del mapa.
- Los meridianos cortan a los paralelos en ángulos rectos. La distancia de un meridiano a otro depende del radio del arco de circunferencia formado por el paralelo.
- La proyección es la identidad a lo largo de los dos paralelos que escojamos al calcular las coordenadas de su proyección, o bien es la identidad a lo largo de uno de ellos.
- Se usa para regiones con más extensión de este a oeste.

Veamos las coordenadas de su proyección:

Tomamos como φ la latitud, λ la longitud, λ_0 la longitud del meridiano central, es decir, la longitud de referencia y φ_0 la latitud de referencia. Aún así, para esta proyección necesitamos tomar dos paralelos más, llamémoslos *paralelos estándar*, donde la proyección va a ser más efectiva en la zona que se

encuentra entre ambos. Cabe destacar que se pueden tomar ambos paralelos iguales. Sean φ_1 y φ_2 los paralelos estándar tenemos que las coordenadas de esta proyección son:

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = (\rho \sin(n(\lambda - \lambda_0)), \rho_0 - \rho \cos(n(\lambda - \lambda_0)), 0)$$

Donde,

$$n = \frac{\log(\cos \varphi_1 \sec \varphi_2)}{\log\left(\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_2\right) \cot\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)\right)}$$

$$F = \frac{\cos \varphi_1 \tan^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_1\right)}{n}$$

$$\rho = F \cot^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right)$$

$$\rho_0 = F \cot^n\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi_0\right).$$

Algo muy curioso que tiene esta proyección es que si se toman los paralelos estándar simétricos respecto al ecuador, se obtiene la proyección normal de Mercator y si ambos paralelos estándar son iguales y, encima son uno de los polos, entonces se obtiene la proyección estereográfica. Además, el polo en el mismo hemisferio que los paralelos estándar es un punto, mientras que el otro es el infinito.

5.1.2. Proyección cónica: Proyección de Bonne

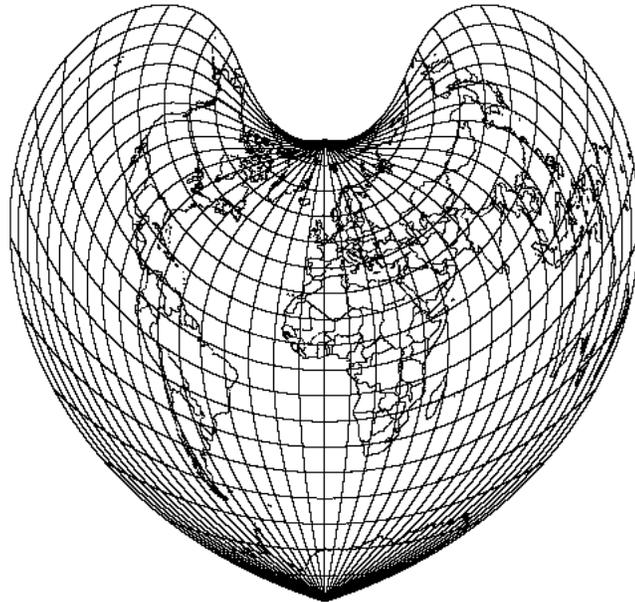


Figura 5.4: Proyección cónica de Bonne tomando como meridiano principal el meridiano de Greenwich.

Para esta proyección se ha usado como referencia [9], sin embargo se puede encontrar de forma más detallada en [15]. La proyección de Bonne es nombrada así en honor al cartógrafo francés Rigobert Bonne (1727-1795), veamos las propiedades que tiene:

- Es una proyección pseudocónica, es decir, es una proyección que asemeja una proyección cónica pero no se basa en el cono para su creación. Aún así, se incluye dentro de las proyecciones cónicas.
- El meridiano central es una línea recta, los otros meridianos son curvas.
- Los paralelos son arcos de círculos concéntricos y los polos son puntos.
- La proyección es la identidad a lo largo del paralelo de referencia y a lo largo del meridiano central.

- Se usa en los atlas, y para hacer el mapeado topográfico de algunos países.
- Es isoareal.

Veamos las coordenadas de la proyección:

Si tomamos como φ la latitud, λ la longitud, λ_0 la longitud de referencia y φ_0 la latitud de referencia, se tiene que las coordenadas de la proyección de Bonne son:

$$\bar{X}(\varphi, \lambda) = (\rho \sin E, \cot \varphi_0 - \rho \cos E, 0)$$

donde,

$$\begin{aligned}\rho &= \cot \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi \\ E &= (\lambda - \lambda_0) \frac{\cos \varphi}{\rho}.\end{aligned}$$

Capítulo 6

Conclusiones

Si algo nos ha enseñado este proyecto es la cantidad de proyecciones. Tristemente no he podido incluir más, pero siguen quedando muchas proyecciones interesantes por ver, como por ejemplo:

- La proyección pseudocilíndrica de Mollweide, la cual es isoareal.
- La proyección de Fuller, también conocida como el mapa Dymaxion. Esta es la única proyección de la superficie de la Tierra que revela nuestro planeta como una isla en un océano, sin ninguna distorsión visual evidente de las formas y los tamaños de la Tierra en relación a las áreas, y sin división alguna de continentes.
- La proyección de Van der Grinten que no es ni isoareal ni conforme. Su mayor característica es que proyecta la Tierra en una circunferencia, aunque las regiones polares sufren una gran distorsión.
- Y varias proyecciones más, como la de Winkel-Tripel o la de Goode.

Una vez terminado este proyecto, y todo aquel que lo haya leído lo comprenderá, es fácil entender el cabreo de algunos antepasados al descubrir que la Tierra no era plana, pues a la hora de proyectarla en un mapa la cosa se complicó bastante.

Bibliografía

- [1] Lev M. Bugayevskiy, John P. Snyder. *Map projection: A reference manual*, Taylor and Francis Ltd, 1995.
- [2] Charles H. Deetz, *Cartography: The Lambert conformal conic projection*, Departament of U.S. commerce, 1918.
- [3] Raúl Ángel Gómez Moreno. *Guía de proyecciones INEGI*, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI), 2002.
- [4] Erik W. Grafarend, Friedrich W. Krumm. *Map Projections: Cartographic information systems*, Springer, 2006.
- [5] María de los Ángeles Hernández Cifre, José Antonio Pastor González. *Un curso de Geometría Diferencial*, CSIC, 2010.
- [6] John McCleary. *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, 1994.
- [7] José Manuel Millán Gamboa. *Fundamentos para la cartografía náutica*, JM Ediciones, 2006.
- [8] Peter Osborne. *The Mercator Projections*, Notes, 2013. Puede encontrarse en: <http://www.mercator99.webspace.virginmedia.com/mercator.pdf>
- [9] John P. Snyder. *Map Projections - A Working Manual*, U. S. Geological Survey Professional Paper, 1987.
- [10] Qihe Yang, Jhon P. Snyder, Waldo R. Tobler. *Map Projection Transformation: Principles and Applications*, Taylor and Francis, 2000.
- [11] International cartographic association. *Multilingual dictionary of technical terms in cartography*, ICA, 1973.

- [12] RECURSO WEB <http://mathworld.wolfram.com/ConicProjection.html>.
- [13] RECURSO WEB <http://mathworld.wolfram.com/LambertConformalConicProjection.html>
- [14] RECURSO WEB http://ucv.altavoz.net/prontus_unidacad/site/artic/20110725/asocfile/20110725122826/algunas_proyecciones_cartograficas_1_.pdf
- [15] RECURSO WEB <http://www.ign.es/ign/resources/acercade/aig/a3.pdf>
Solo el capítulo 60.