



UNIVERSIDAD DE MURCIA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
TRABAJO FIN DE GRADO

# Una introducción a la homología singular

Celia María Sánchez Gómez

Curso 2015-2016

dirigido por  
Luis José Alías Linares

## DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

**Celia María Sánchez Gómez**, autora del TFG titulado “*Una introducción a la homología singular*”, bajo la tutela del profesor **Luis José Alías Linares**,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas

En Murcia, a 5 de Septiembre de 2016

Fdo.: Celia María Sánchez Gómez

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>3</b>
<b>Resumen</b>	<b>8</b>
<b>1. Homología formal</b>	<b>13</b>
1.1. Complejos de cadenas . . . . .	13
1.1.1. Subcomplejos de cadenas . . . . .	14
1.1.2. Cociente de complejos . . . . .	15
1.1.3. Aplicaciones de cadenas . . . . .	15
1.2. Homotopía algebraica . . . . .	17
1.3. Sucesiones exactas en la homología . . . . .	18
<b>2. Homología singular</b>	<b>29</b>
2.1. Primeras definiciones . . . . .	29
2.2. Homología y aplicaciones continuas . . . . .	41
2.3. Invarianza homotópica . . . . .	43
<b>3. Homología relativa</b>	<b>52</b>
<b>4. Aplicaciones</b>	<b>57</b>
4.1. Teorema de subdivisión baricéntrica . . . . .	57
4.2. Sucesión exacta de Mayer-Vietoris . . . . .	59
4.3. Homología de las esferas . . . . .	61
4.3.1. Homología de $\mathbb{S}^0$ . . . . .	61
4.3.2. Homología de $\mathbb{S}^1$ . . . . .	61
4.3.3. Homología de $\mathbb{S}^n$ , $n \geq 2$ . . . . .	63
4.4. El teorema del punto fijo de Brouwer . . . . .	66
<b>Bibliografía</b>	<b>70</b>

# Abstract

Algebraic Topology is an important branch of topology having several connections with many areas of modern mathematics. It uses tools from abstract algebra to study topological spaces. Its growth and influence, particularly since the early forties of the twentieth century, has been remarkably high. There are different theories of homology in Algebraic Topology. Among the best known are the singular homology, the simplicial homology and the cellular homology. In this work, we will only study, as we can figure out by the title, an introduction to singular homology.

The aim of this project is to expose all the necessary results of the singular homology theory to be able to develop later some of their applications. Singular homology was introduced in 1944 by S.Eilenberg (1913-1998). Lefschetz had given in 1933 the definition of singular simplex with some imperfections, so Eilenberg changed it later giving rise to the definitions we currently know of singular homology with coefficients in a ring  $R$  (in this case we work in  $\mathbb{Z}$ ).

This report consists of four chapters, which make up the body of work, and a bibliography, all preceded by a summary in English and Spanish. We then briefly explain the content of each chapter without going into detail.

Chapter 1 gathers the algebraic part of the work, that is, we will see a purely algebraic definition of homology. Our intention is to develop a series of results that then move to singular homology groups. We divide the chapter in three sections. The first one begins with the definition of a *chain complex*  $\mathcal{C} = (C_n, \partial_n)$ ,  $n \geq 0$ , with coefficients in  $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

such that  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ . This concept is necessary because it will be used throughout the work. It follows the definitions of *cycle*, *boundary*, *boundary*

*homomorphism* and so we continue to set the  $n$ -th homology groups

$$H_n = H_n(\mathcal{C}) = Z_n/B_n$$

of chain complex  $\mathcal{C}$ , where  $Z_n$  is the set of  $n$ -cycles and  $B_n$  is the set of  $n$ -boundaries. We also talk about chain subcomplexes  $\mathcal{C}'$ , and here we see what happens with the quotient group  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ , called *quotient complex* of  $\mathcal{C}$  by  $\mathcal{C}'$ . After that, we will see that a chain map  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  between two chain complexes  $\mathfrak{X}$  and  $\mathfrak{Y}$  induces a group homomorphism  $f_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{Y})$  well defined. From the naturality of this homomorphism it follows that if  $f$  is a chain isomorphism, then  $f_*$  is an isomorphism.

In the second section we give the definition of *chain homotopy* between  $f$  and  $g$ , where  $f, g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  are chain maps. If there is such a homotopy, it is said that  $f$  and  $g$  are algebraically homotopic and this implies that the induced homomorphisms  $f_*$  and  $g_*$  are equal.

In the third and last section of Chapter 1, we continue our study with the exact sequences, which are of great importance when computing singular homology groups. It should be noted that most of the results that we formulate in this part are necessary for the Mayer-Vietoris theorem and some applications of the singular homology. By employing the exact sequences, we use two of its properties, one of which is *The Five Lemma* and another is the *Exact Sequence of Homology* associated with a short exact sequence of morphisms between chain complexes. The latter property allows us to conclude that, if we start with a short exact sequence of chain complexes of the type  $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$ , then there is a connector homomorphism  $\partial_*: H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{A})$  making the following sequence exact

$$\dots \rightarrow H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \dots$$

Proofs of these properties are described in detail in the work. In addition, we will justify the naturality of the exact sequence and  $\partial_*$ , and we will finish the chapter showing two examples of exact sequences in the homology, the last of which argues the abstract Mayer-Vietoris exact sequence.

Chapter 2 is the main chapter of this work, in which we focus on the singular homology. It is organised into three sections again. The contents of the first begin with the definition of  $n$ -simplex in  $\mathbb{R}^m$ , *standard  $n$ -simplex*, giving examples of the latter, and *singular  $n$ -simplex*. Hence we start to define the group  $S_n(X)$  of a topological space  $X$ , that is, the set of all singular  $n$ -simplices in  $X$ . The free group generated by  $S_n(X)$  is denoted by  $C_n(X)$ ,

whose elements are called *singular  $n$ -chains* of  $X$ . We will prove that  $\partial_n \circ \partial_{n+1}$  is the zero homomorphism, for every  $n \geq 0$ , where  $\partial_n$  is the singular boundary operator. Thus, as we have a singular chain complex, we construct the singular homology groups  $H_n(X)$ . We will see a case computing singular homology groups of a single point. Also we introduce the concept of *acyclic space*. Other results of great importance are the properties that relate the singular homology with the path components of a space. A consequence of this is that for any space  $X$ ,  $H_0(X)$  is a direct sum of  $\mathbb{Z}$ 's, one for each path component of  $X$ .

The second section deals with the homology and continuous maps. Starting from a continuous map  $f: X \rightarrow Y$ , the homomorphism  $f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  is induced, which defines a chain map of the singular chain complex of  $X$  to the singular chain complex of  $Y$ . Thanks to this, we can define the homomorphism  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  for all  $n \geq 0$ , induced in turn by  $f_{\#}$ . The constructions of these applications are based on Chapter 1, as an application to the singular case. Then, two basic properties of induced homomorphisms will be studied, called *functorial properties*, and consequently, we will see that homology groups of a topological space are a topological invariant.

The third section aims to prove that homology groups are homotopy invariant, in addition to topological invariant. We will remember some basic definitions in topology, such as *homotopy* and *homotopy equivalence*, and we will see the concept of *contractible space*, which we will study in full. Also we will prove that every contractible space is acyclic, which will serve as a precedent for one of the most beautiful theorems of topology, the *Homotopy Invariance Theorem*. It tells us that if two maps  $f, g: X \rightarrow Y$  are homotopic, then they induce the same homomorphism  $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ . Hence it follows that two homotopic spaces have the same homology groups.

Chapter 3 is about the relative homology. The singular homology of a topological space on a subspace is a construction in singular homology for pairs of topological spaces. In this chapter, we will generalize our earlier definition of homology groups, by defining relative homology groups for any pair  $(X, Y)$  consisting of a topological space  $X$  and a subspace  $Y$ ; these groups are denoted by  $H_n(X, Y)$ , for all  $n \geq 0$ . There is a nice relation between these relative homology groups and the homomorphisms  $i_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$ , which is expressed by something called the *homology sequence of the pair*  $(X, Y)$ . Thus it will turn out that knowledge of the structure of the groups  $H_n(X, Y)$  will give rise to information about the homomorphisms  $i_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$  and vice versa. Furthermore, we will see a property that tells us that if  $Y$  is no-

nempty and  $X$  is path connected then  $H_0(X, Y) = 0$ . We will define also the concepts of *retract*, *deformation retract* and *strong deformation retract*; the unit sphere  $\mathbb{S}^{n-1}$  contained in the space  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  is the easiest example. In short, although the first interest in algebraic topology focuses on the groups  $H_n(X)$ , relative groups  $H_n(X, Y)$  is mainly introduced with the purpose of calculating  $H_n(X)$ .

Finally, in Chapter 4, we will study two important theorems that lead us to the calculation of homologies of certain spaces: The *Barycentric Subdivision Theorem*, whose proof will not see because it exceeds the contents of this work, and the *Mayer-Vietoris Theorem*. We will begin with the first section taking a covering  $\mathcal{U}$ , not necessarily open, of a topological space  $X$ , and from there, we define  $S_n^{\mathcal{U}}(X)$  as the simplices of  $S_n(X)$  whose image is contained in some  $U \in \mathcal{U}$ . Analogous to the constructions of the other chapters, groups continue  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  until we reach to the homology groups  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ . As the inclusion  $i: C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_n(X)$  is a chain map,  $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X)$  is induced. The barycentric subdivision theorem will tell us that if

$$\overset{\circ}{\mathcal{U}} = \{\overset{\circ}{U} : \text{for all } U \in \mathcal{U}\}$$

is also a covering of  $X$ , then  $i_*$  will be an isomorphism for all  $n \geq 0$ .

In the second section we will see that the Mayer-Vietoris sequence is an application of the barycentric subdivision theorem for the simplest nontrivial case: we take a space  $X$  and two subsets  $U, V \subset X$  whose interiors  $\{\overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{V}\}$  also cover the space  $X$  and the union of the two is  $X$ . We come to see that there is a connector homomorphism  $\Delta: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V)$  such that the following sequence is long exact

$$\cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{i_* \circ \psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

This sequence is called the *Mayer-Vietoris sequence* of the triple  $(X, U, V)$ .

In the third section we will calculate homology groups of spheres as an application of Mayer-Vietoris theorem. First for  $\mathbb{S}^0$ , then for  $\mathbb{S}^1$  and finally to  $\mathbb{S}^n$ , with  $n \geq 2$ . Thanks to that and other results we already know, we come to see that

$$H_m(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } m = 0, \\ 0 & \text{if } 0 < m < n, \\ \mathbb{Z} & \text{if } m = n, \\ 0 & \text{if } m > n. \end{cases}$$

---

In the fourth and final section of Chapter 4, and finishing this work, we will deduce the *Brouwer fixed-point Theorem*, which states that any continuous map  $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  has a fixed point, for all  $n \geq 1$ , but to prove this we will see before that there is no retraction of the disc on its boundary, property which follows from the computing of homology of spheres.



# Resumen

La Topología Algebraica es una rama importante de la topología que tiene varias conexiones con muchas áreas de la matemática moderna. En ella se usan las herramientas del álgebra abstracta para estudiar los espacios topológicos. Su crecimiento e influencia, sobre todo desde principios de los años cuarenta del siglo XX, ha sido notablemente alto. Existen diferentes teorías de homología en la Topología Algebraica. Entre las más conocidas se encuentran la homología singular, simplicial y celular. En el presente trabajo, sólo vamos a estudiar, como bien nos indica el título, una introducción a la homología singular.

El objetivo de este proyecto es exponer todos los resultados necesarios de la teoría de la homología singular para poder desarrollar posteriormente algunas de sus aplicaciones. La homología singular fue introducida en 1944 por S.Eilenberg (1913-1998). Lefschetz había dado en 1933 la definición de símplice singular con algunas imperfecciones, por lo que Eilenberg la modifica más adelante dando lugar a las definiciones que actualmente conocemos de homología singular, con coeficientes en un anillo  $R$  (en este caso trabajamos en  $\mathbb{Z}$ ).

La presente memoria consta de cuatro capítulos, que componen el cuerpo del trabajo, y una bibliografía, precedido todo ello de un resumen en inglés y en español. A continuación, explicamos brevemente el contenido de cada capítulo sin entrar en detalle.

El Capítulo 1 recoge la parte algebraica del trabajo, es decir, vamos a ver una definición de homología puramente algebraica. Nuestra intención es desarrollar una serie de resultados que después se trasladan a los grupos de homología singular. Dividimos el capítulo en tres secciones. La primera comienza con la definición de un *complejo de cadenas*  $\mathcal{C} = (C_n, \partial_n)$ ,  $n \geq 0$ , con coeficientes en  $\mathbb{Z}$

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

tales que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ . Este concepto es indispensable pues se usará a lo

largo de todo el trabajo. Se siguen las definiciones de *ciclo*, *borde*, *operador borde* y así llegamos a establecer los *n-ésimos grupos de homología*

$$H_n = H_n(\mathcal{C}) = Z_n/B_n$$

del complejo de cadenas  $\mathcal{C}$ , siendo  $Z_n$  el conjunto de los  $n$ -ciclos y  $B_n$  el conjunto de los  $n$ -bordes. También hablamos de los subcomplejos de cadenas  $\mathcal{C}'$ , y de aquí pasamos a ver qué ocurre con el grupo cociente  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\mathcal{C}'$ , llamado *complejo cociente* de  $\mathcal{C}$  por  $\mathcal{C}'$ . Tras ello, veremos que una aplicación de cadenas  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  entre dos complejos de cadenas  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  induce un homomorfismo de grupos  $f_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{Y})$  bien definido. De la naturalidad de este homomorfismo se probará que si  $f$  es un isomorfismo de cadenas, entonces  $f_*$  es un isomorfismo.

En la segunda sección damos la definición de *homotopía de cadenas* entre  $f$  y  $g$ , siendo  $f, g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  morfismos de cadenas. Si existe tal homotopía, diremos que  $f$  y  $g$  son algebraicamente homotópicas y esto implica que los homomorfismos inducidos  $f_*$  y  $g_*$  sean iguales.

En la tercera y última sección del Capítulo 1, continuamos nuestro estudio con las sucesiones exactas, las cuales son de gran importancia a la hora de calcular grupos de homología singular. Cabe mencionar que la mayoría de los resultados que se enuncian en esta parte son necesarios para el Teorema de Mayer-Vietoris y algunas aplicaciones de la homología singular. Al emplear las sucesiones exactas, hacemos uso de dos de sus propiedades, una de ellas es el *Lema de los Cinco* y otra es la *Sucesión Exacta de Homología* asociada a una sucesión exacta corta de morfismos entre complejos de cadenas. Esta última propiedad nos afirma que, si partimos de una sucesión exacta corta de complejos de cadenas del tipo  $0 \rightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \rightarrow 0$ , entonces existe un homomorfismo conector  $\partial_*: H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{A})$  haciendo exacta la siguiente sucesión

$$\cdots \rightarrow H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{B}) \rightarrow \cdots$$

Las demostraciones de dichas propiedades se ven detalladamente en el trabajo. Además, justificaremos la naturalidad de la sucesión exacta y de  $\partial_*$ , y terminamos el capítulo mostrando dos ejemplos de sucesiones exactas en la homología, el último de ellos argumenta la sucesión exacta de Mayer-Vietoris abstracta.

El Capítulo 2 es el capítulo central de este trabajo, en el cual nos centramos en la homología singular. Se estructura de nuevo en tres secciones. El

contenido de la primera inicia con la definición de  $n$ -símplex en  $\mathbb{R}^m$ ,  $n$ -símplex estándar, dando algunos ejemplos de este último, y  $n$ -símplex singular. De ahí partimos para definir el grupo  $S_n(X)$  de un espacio topológico  $X$ , o sea, el conjunto de todos los  $n$ -símplices singulares en  $X$ . El grupo libre generado por  $S_n(X)$  lo denotamos por  $C_n(X)$ , cuyos elementos llamamos  $n$ -cadenas singulares de  $X$ . Probaremos que  $\partial_n \circ \partial_{n+1}$  es el homomorfismo cero, para todo  $n \geq 0$ , siendo  $\partial_n$  el operador borde. Así, como tenemos un complejo de cadenas singular, construimos los grupos de homología singular  $H_n(X)$ . Veremos un caso práctico calculando los grupos de homología singular de un espacio unipuntual. Asimismo, introduciremos el concepto de *espacio acíclico*. Otros resultados de gran importancia son las propiedades que relacionan la homología singular con la arcoconexión. Una consecuencia de esto será que para todo espacio topológico  $X$ ,  $H_0(X)$  es la suma directa de  $\mathbb{Z}$ , una por cada componente arcoconexa de  $X$ .

La segunda sección trata de la homología y las aplicaciones continuas. Partiendo de una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$ , se induce el homomorfismo  $f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ , el cual define una aplicación de cadenas del complejo de cadenas singular de  $X$  al complejo de cadenas singular de  $Y$ . Es por eso que podemos definir el homomorfismo  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  para todo  $n \geq 0$ , inducido a su vez por  $f_{\#}$ . Las construcciones de estas aplicaciones se basan en el Capítulo 1, sólo que aplicándose al caso singular. Después, se estudiarán dos propiedades básicas de los homomorfismos inducidos, las llamadas *propiedades funtoriales*, y en consecuencia, veremos que los grupos de homología de un espacio topológico son un invariante topológico.

La tercera sección tiene como objetivo demostrar que los grupos de homología son invariantes homotópicos, además de invariantes topológicos. Recordaremos unas definiciones básicas en topología, como *homotopía* y *equivalencia homotópica*, y veremos el concepto de *espacio contráctil*, el cual estudiaremos a fondo. También probaremos que todo espacio contráctil es acíclico, que nos servirá de precedente para ver uno de los teoremas más bonitos de la topología, el *Teorema de invarianza homotópica*, que nos dice que si dos aplicaciones  $f, g: X \rightarrow Y$  son homotópicas, entonces inducen el mismo homomorfismo  $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ . De aquí, se obtiene que dos espacios homotópicos tienen los mismos grupos de homología.

Otro concepto que también se trata es el de homología relativa, que veremos en el Capítulo 3. La homología singular de un espacio topológico relativa a un subespacio es una construcción en homología singular para pares de espacios topológicos. En este capítulo, vamos a generalizar la definición que

tenemos de grupos de homología de un espacio dado  $X$  mediante la definición de grupos de homología correspondientes a un cierto par  $(X, Y)$ , siendo  $X$  el espacio topológico nombrado e  $Y$  un subespacio de  $X$ . Estos grupos se denotan por  $H_n(X, Y)$ , para todo  $n \geq 0$ . Existe una bonita relación entre estos grupos de homología relativos y los homomorfismos  $i_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$ , que se expresa en lo que nosotros llamamos *sucesión exacta del par*  $(X, Y)$ . Por lo tanto, el conocimiento de la estructura de los grupos  $H_n(X, Y)$  nos dará información sobre los homomorfismos  $i_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$  y viceversa. Además, veremos una propiedad que nos dice que si  $X$  es arcoconexo e  $Y$  es un subespacio no vacío de  $X$ , entonces  $H_0(X, Y) = 0$ . Definiremos también los conceptos de *retracto*, *retracto de deformación* y *retracto fuerte de deformación*, cuyo ejemplo más fácil es el de la esfera unidad  $S^{n-1}$  contenida en el espacio  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . En definitiva, aunque el primer interés en la topología algebraica se centra en los grupos  $H_n(X)$ , los grupos relativos  $H_n(X, Y)$  se introducen principalmente con el propósito de hacer posible el cálculo de  $H_n(X)$ .

Por último, en el Capítulo 4, estudiaremos dos teoremas importantes que nos conducen al cálculo de homologías de ciertos espacios: El *Teorema de subdivisión baricéntrica*, cuya demostración no veremos porque excede el contenido de este trabajo, y el *Teorema de Mayer-Vietoris*. Comenzaremos con la primera sección tomando un cubrimiento  $\mathcal{U}$ , no necesariamente por abiertos, de un espacio topológico  $X$ , y a partir de ahí, definimos  $S_n^{\mathcal{U}}(X)$  como los símlices de  $S_n(X)$  cuya imagen está contenida en algún  $U \in \mathcal{U}$ . Análogo a las construcciones de los otros capítulos, se siguen los grupos  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  hasta llegar a los grupos de homología  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Al ser la inclusión  $i: C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_n(X)$  una aplicación de cadenas se induce  $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X)$ . Lo que nos dirá el Teorema de subdivisión baricéntrica es que si

$$\overset{\circ}{\mathcal{U}} = \{\overset{\circ}{U} : \text{para todo } U \in \mathcal{U}\}$$

también es un cubrimiento de  $X$ , entonces  $i_*$  será un isomorfismo para todo  $n \geq 0$ .

Como aplicación del Teorema de subdivisión baricéntrica, se verá en la segunda sección la sucesión de Mayer-Vietoris para el caso no trivial más sencillo: tomamos un espacio  $X$  y dos subconjuntos  $U, V \subset X$  cuyos interiores  $\{\overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{V}\}$  también cubren el espacio  $X$  y la unión de ambos es  $X$ . Llegaremos a ver que existe un homomorfismo conector  $\Delta: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V)$  tal que la siguiente sucesión es exacta larga

$$\cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{i_* \circ \psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

Dicha sucesión es la llamada *sucesión de Mayer-Vietoris* de la terna  $(X, U, V)$ .

En la tercera sección calcularemos la homología de las esferas como aplicación del Teorema de Mayer-Vietoris. Primero para  $\mathbb{S}^0$ , luego para  $\mathbb{S}^1$  y, finalmente, para  $\mathbb{S}^n$ , con  $n \geq 2$ . Gracias a esto y a otros resultados que ya sabremos, llegaremos a ver que

$$H_m(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < m < n, \\ \mathbb{Z} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

En la cuarta y última sección del Capítulo 4, y ya finalizando el trabajo, deduciremos el *Teorema del punto fijo de Brouwer*, el cual enuncia que toda aplicación continua  $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  tiene algún punto fijo, para todo  $n \geq 1$ , pero para probar esto veremos antes que no existe ninguna retracción del disco en su frontera, propiedad que se sigue del cálculo de la homología de las esferas.

# Capítulo 1

## Homología formal

El concepto de homología se puede definir en un ámbito puramente algebraico. En este capítulo vamos a introducir un breve resumen de los conceptos básicos en que se basan las distintas formas de desarrollar la teoría de la homología, los cuales usaremos en capítulos posteriores para casos particulares. Para ello, hemos ido siguiendo las ideas que aparecen en el primer capítulo del libro [6].

### 1.1. Complejos de cadenas

A lo largo de todo el capítulo se utilizará como anillo conmutativo con unidad el anillo de los números enteros  $\mathbb{Z}$ .

**Definición 1.1.1.** *Un **complejo de cadenas** con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  es una sucesión  $\mathcal{C} = (C_n, \partial_n)$  de  $\mathbb{Z}$ -módulos  $C_n$ ,  $n \geq 0$ , y homomorfismos  $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$  tales que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ .*

$$\mathcal{C} : \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

A los elementos de  $C_n$  los llamamos ***n*-cadenas** o ***cadenas de dimensión n***. Si la dimensión se sobreentiende, simplemente se les llama *cadenas*.

De la propia definición se desprende que  $\partial_0 \equiv 0$ . Como estamos trabajando con el anillo de los enteros, los  $\mathbb{Z}$ -módulos  $C_n$  son grupos abelianos.

**Definición 1.1.2.** *Llamamos ***n*-ciclo**, o simplemente *ciclo*, a toda *n*-cadena  $a$  tal que  $\partial_n a = 0$ .*

Denotamos por  $Z_n$  al conjunto de los *n*-ciclos.  $Z_n$  se corresponde, además, con el núcleo del homomorfismo  $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$  y es un submódulo de  $C_n$ .

**Definición 1.1.3.** Sea  $a = \partial_{n+1}b$ . Llamamos a la  $n$ -cadena  $a$  el  **$n$ -borde**, o simplemente borde, de la  $(n+1)$ -cadena  $b$ .

En este caso,  $B_n$  es el conjunto de los  $n$ -bordes y es la imagen del homomorfismo  $\partial_{n+1} : C_{n+1} \rightarrow C_n$ .  $B_n$  es un submódulo de  $C_n$ .

Por tanto, tenemos:

$$Z_n = \{a \in C_n : \partial a = 0\}, \quad Z_n = \text{Ker } \partial_n$$

$$B_n = \{a \in C_n : \exists b \in C_{n+1} / \partial b = a\}, \quad B_n = \text{Im } \partial_{n+1}$$

**Definición 1.1.4.** Cada homomorfismo  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$  se define como **operador borde**.

Escribiremos  $\partial$  en lugar de  $\partial_n$  a menos que sea necesario ser muy explícito, de modo que  $\partial^2 a = 0$  para toda cadena  $a \in C_n$ . Por esta condición, está claro que todo borde es un ciclo:

$$a = \partial_{n+1}b \Rightarrow \partial_n a = (\partial_n \circ \partial_{n+1})b = 0$$

Es decir,  $B_n \subset Z_n$ . Luego podemos considerar el siguiente  $\mathbb{Z}$ -módulo cociente:

**Definición 1.1.5.** El  **$n$ -ésimo grupo de homología** del complejo  $\mathcal{C}$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  es el grupo cociente  $H_n = H_n(\mathcal{C}) = Z_n/B_n$ .

Sus elementos son las clases de equivalencia generadas por ciclos  $a \in Z_n$ .

$$[a] = a + B_n = \{a + \partial b : \forall b \in C_{n+1}\}$$

Es decir, si  $a$  y  $a'$  son dos  $n$ -ciclos, entonces  $[a] = [a'] \Leftrightarrow a' \in [a] \Leftrightarrow a - a' \in B_n \Leftrightarrow a - a' = \partial b$  para algún  $b \in C_{n+1}$ . Decimos entonces que  $a$  y  $a'$  son **ciclos homólogos**.

### 1.1.1. Subcomplejos de cadenas

Sea  $\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  un complejo de cadenas.

Si para cada  $n \geq 0$  tenemos un submódulo  $C'_n \subset C_n$  tal que  $\partial C'_{n+1} \subset C'_n$ , entonces podemos definir  $\partial'_n = \partial_n|_{C'_n} : C'_n \rightarrow C'_{n-1}$ . Evidentemente,  $(\partial')^2 = 0$ . Tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ \uparrow i & & \uparrow i & & \uparrow i \\ C'_{n+1} & \xrightarrow{\partial'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{\partial'_n} & C'_{n-1} \end{array}$$

**Definición 1.1.6.** La sucesión  $\mathcal{C}' = \{(C'_n, \partial'_n)\}_{n \geq 0}$  es un **subcomplejo de cadenas** de  $\mathcal{C}$ .

### 1.1.2. Cociente de complejos

Consideramos, para cada  $n \geq 0$ , el  $\mathbb{Z}$ -módulo cociente  $\bar{C}_n = C_n/C'_n$  de modo que si  $a \in C_n$  representamos a los elementos del módulo cociente como  $\bar{a} = a + C'_n$ , y si  $a, b \in C_n$ , entonces  $\bar{a} = \bar{b}$  si, y sólo si,  $a - b \in C'_n$ . Definiendo así el módulo cociente, existe un único homomorfismo  $\bar{\partial}_n: \bar{C}_n \rightarrow \bar{C}_{n-1}$  que hace conmutativo el diagrama de abajo

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\ j \downarrow & & j \downarrow \\ \bar{C}_n & \xrightarrow{\bar{\partial}_n} & \bar{C}_{n-1} \end{array}$$

donde  $j$  es la aplicación cociente. Se cumple que  $\bar{\partial}_n(ja) = j(\partial_n a)$ . El homomorfismo se define como

$$\bar{\partial}_n: \bar{C}_n \longrightarrow \bar{C}_{n-1} \\ \bar{a} \longmapsto (\overline{\partial_n a}), \quad \forall \bar{a} \in \bar{C}_n$$

Veamos que está bien definido y se cumple que  $(\bar{\partial})^2 = 0$ :

- $\bar{\partial}_n$  está bien definido, es decir, no depende del representante elegido. Efectivamente, supongamos  $\bar{a} = \bar{b}$ . Como  $a - b \in C'_n \Rightarrow \partial_n(a - b) = \partial_n a - \partial_n b \in \partial_n C'_n \subset C'_{n-1} \Rightarrow (\overline{\partial_n a}) = (\overline{\partial_n b})$  en  $\bar{C}_{n-1}$ .
- $(\bar{\partial})^2 = 0$ , pues  $\bar{\partial}(\bar{\partial}\bar{a}) = \bar{\partial}(\overline{\partial_n \bar{a}}) = \overline{\partial^2 a} = 0$ , por la Definición 1.1.1.

**Definición 1.1.7.** La sucesión  $\bar{\mathcal{C}} = \{(\bar{C}_n, \bar{\partial}_n)\}_{n \geq 0}$  es un complejo de cadenas, llamado **complejo cociente de  $\mathcal{C}$  por  $\mathcal{C}'$** .

### 1.1.3. Aplicaciones de cadenas

**Definición 1.1.8.** Sean  $\mathfrak{X} = \{(X_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  e  $\mathfrak{Y} = \{(Y_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  complejos de cadenas, cuyos operadores borde indicamos con el mismo símbolo  $\partial_n = \partial$ . Una **aplicación de cadenas** o **morfismo de cadenas**  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  entre  $\mathfrak{X}$  e  $\mathfrak{Y}$  es una sucesión de homomorfismos de  $\mathbb{Z}$ -módulos  $f_n: X_n \rightarrow Y_n$ , para todo  $n$ , tales que  $f_n(\partial a) = \partial f_{n+1}(a)$  para todo  $a \in X_n$ .

Es decir, sin distinguir dimensiones, tenemos que se cumple la relación

$$f \circ \partial = \partial \circ f.$$



Esto significa que en el siguiente diagrama todos los cuadrados son conmutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & Y_n & \xrightarrow{\partial} & Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

De las relaciones  $\partial f_n(a) = f_{n-1}(\partial a)$  y  $f_n(\partial a) = \partial f_{n+1}(a)$ , para todo  $n \geq 0$ , se sigue que el homomorfismo  $f_n: X_n \rightarrow Y_n$  induce un homomorfismo de grupos  $(f_n)_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{Y})$ , que normalmente escribiremos como  $f_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{Y})$ . Veámoslo:

Tomamos  $[a] \in H_n(\mathfrak{X})$ , con  $a \in Z_n(\mathfrak{X}) \subset X_n$ . ¿Podemos definir  $f_*[a]$  como  $[f(a)]$ ? Necesitamos dos cosas.

1. Que  $f(a) \in Z_n(\mathfrak{Y})$ .

Esto es cierto ya que  $\partial(f(a)) \stackrel{1}{=} f(\partial a) \stackrel{2}{=} f(0) \stackrel{3}{=} 0$ . Por tanto, una aplicación de cadenas transforma  $n$ -ciclos de  $\mathfrak{X}$  en  $n$ -ciclos de  $\mathfrak{Y}$ .

2. Que si  $[a] = [b]$  en  $H_n(\mathfrak{X}) \Rightarrow [f(a)] = [f(b)]$  en  $H_n(\mathfrak{Y})$ .

Esto también se cumple. Supongamos  $[a] = [b]$  en  $H_n(\mathfrak{X}) \Rightarrow \exists c \in X_{n+1}/a - b = \partial c \Rightarrow f(a) - f(b) = f(a - b) = f(\partial c) = \partial(f(c)) \Rightarrow [f(a)] = [f(b)]$  en  $H_n(\mathfrak{Y})$ . Y así tenemos que una aplicación de cadenas también transforma  $n$ -bordes de  $\mathfrak{X}$  en  $n$ -bordes de  $\mathfrak{Y}$ .

Luego  $f_n$  **induce**  $(f_n)_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{Y})$  definido por  $(f_n)_*[a] = [f_n(a)]$  para toda clase  $[a] \in H_n(\mathfrak{X})$  de un ciclo  $a \in Z_n(\mathfrak{X})$ .

Este homomorfismo inducido es **natural** en el siguiente sentido:

- Sean  $\mathfrak{X} = \{(X_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$ ,  $\mathfrak{Y} = \{(Y_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  y  $\mathfrak{M} = \{(M_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  complejos de cadenas, y sean  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  y  $g: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{M}$  aplicaciones de cadenas. Entonces  $g \circ f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{M}$  es una aplicación de cadenas que induce el homomorfismo  $(g \circ f)_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{M})$  y se tiene

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_* \tag{1.1}$$

Es decir,

$$(g \circ f)_*([a]) = g_*(f_*[a]) = g_*([f(a)]) = [g(f(a))] = [(g \circ f)(a)]$$

<sup>1</sup>Por la relación de la aplicación de cadenas  $f \circ \partial = \partial \circ f$ .

<sup>2</sup> $\partial a = 0$  porque  $a \in Z_n(\mathfrak{X})$ .

<sup>3</sup> $f$  es un homomorfismo.

- Si  $\mathfrak{X} = \{(X_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  es un complejo de cadenas, entonces el homomorfismo  $Id: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$  es una aplicación de cadenas (morfismo identidad) y se cumple  $(Id)_* = Id$ , siendo  $Id: X_n \rightarrow X_n$  en la parte izquierda de la igualdad e  $Id: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{X})$  en la parte derecha.

Por tanto, llegamos al siguiente resultado:

**Teorema 1.1.9.** *Si  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  es un isomorfismo de cadenas con morfismo inverso  $g: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  (es decir, para cada  $n \geq 0$ ,  $f_n: X_n \rightarrow Y_n$  es un isomorfismo con inverso  $g_n: Y_n \rightarrow X_n$ ) entonces  $f_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{Y})$  es un isomorfismo, siendo  $(f_*)^{-1} = g_*$  su inverso.*

*Demostración.* Como  $f: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  es un isomorfismo de cadenas, sabemos que existe  $g: \mathfrak{Y} \rightarrow \mathfrak{X}$  con  $g = f^{-1}$  tal que  $g \circ f = Id_{\mathfrak{X}}$  y  $f \circ g = Id_{\mathfrak{Y}}$ . Entonces

$$g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (Id_{\mathfrak{X}})_* = Id_{H_n(\mathfrak{X})}$$

De igual manera

$$f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (Id_{\mathfrak{Y}})_* = Id_{H_n(\mathfrak{Y})}$$

■

## 1.2. Homotopía algebraica

**Definición 1.2.1.** Sean  $\mathfrak{X} = \{(X_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  e  $\mathfrak{Y} = \{(Y_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  dos complejos de cadenas y  $f, g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  morfismos entre ellas. Una **homotopía de cadenas** u **homotopía algebraica** entre  $f$  y  $g$  es una sucesión de homomorfismos de grupos  $D = D_n: X_n \rightarrow Y_{n+1}$  tales que

$$\partial_{n+1} \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n = g_n - f_n,$$

o simplemente

$$\partial D + D \partial = g - f: X_n \rightarrow Y_n \text{ para todo } n \geq 0.$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & X_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & X_n & \xrightarrow{\partial} & X_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow g-f & \swarrow D & \downarrow g-f & \swarrow D & \downarrow g-f & & \\ \cdots & \longrightarrow & Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial} & Y_n & \xrightarrow{\partial} & Y_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Si existe una homotopía de cadenas entre  $f$  y  $g$ , decimos que  $f$  y  $g$  son **algebraicamente homotópicas**, y se denota como  $f \simeq g$ .

**Teorema 1.2.2.** *Si  $f \simeq g$  entonces  $f_* = g_*$ .*

*Demostración.* Vamos a distinguir dimensiones para realizar la prueba. Por tanto, tenemos  $\mathfrak{X} = \{(X_n, \partial_n^{\mathfrak{X}})\}_{n \geq 0}$  e  $\mathfrak{Y} = \{(Y_n, \partial_n^{\mathfrak{Y}})\}_{n \geq 0}$  dos complejos de cadenas y  $f, g: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{Y}$  aplicaciones de cadenas.

Supongamos que  $f \simeq g$ . Entonces existe una homotopía algebraica  $D$  entre  $f$  y  $g$  tal que  $\partial_{n+1}^{\mathfrak{Y}} \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n^{\mathfrak{X}} = g_n - f_n$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 X_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\mathfrak{X}}} & X_n & \xrightarrow{\partial_n^{\mathfrak{X}}} & X_{n-1} \\
 \downarrow f_{n+1}, g_{n+1} & \nearrow D_n & \downarrow f_n, g_n & \nearrow D_{n-1} & \downarrow f_{n-1}, g_{n-1} \\
 Y_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^{\mathfrak{Y}}} & Y_n & \xrightarrow{\partial_n^{\mathfrak{Y}}} & Y_{n-1}
 \end{array}$$

Se ha de probar que  $f_* = g_*$ , donde  $(f_n)_*, (g_n)_*: H_n(\mathfrak{X}) \rightarrow H_n(\mathfrak{Y})$  para todo  $n$ .

Fijamos  $n \geq 0$  y tomamos  $[a] \in H_n(\mathfrak{X})$ . Esto es,  $[a] \in Z_n(\mathfrak{X})$  luego  $\partial_n^{\mathfrak{X}}(a) = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}
 (f_n)_*([a]) = (g_n)_*([a]) &\Leftrightarrow [f_n(a)] = [g_n(a)] \text{ en } H_n(\mathfrak{Y}) \Leftrightarrow \\
 g_n(a) - f_n(a) &\in B_n(\mathfrak{Y}) \Leftrightarrow \exists b \in Y_{n+1} / g_n(a) - f_n(a) = \partial_{n+1}^{\mathfrak{Y}}(b)
 \end{aligned}$$

Pero  $g_n(a) - f_n(a) = \partial_{n+1}^{\mathfrak{Y}} \circ D_n(a) + D_{n-1} \circ \partial_n^{\mathfrak{X}}(a) \overset{0}{=} \partial_{n+1}^{\mathfrak{Y}}(D_n(a))$ . Por tanto, denotando  $D_n(a) =: b$ , para todo  $[a] \in H_n(\mathfrak{X})$  y para todo  $n$  se cumple que  $f_* = g_*$ , como queríamos demostrar. ■

### 1.3. Sucesiones exactas en la homología

**Definición 1.3.1.** *Una sucesión de homomorfismos de grupos*

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

se dice **exacta** si  $\text{Ker } f_n = \text{Im } f_{n+1}$ , para todo  $n$ .

Esto significa que los grupos de homología del complejo de cadenas son triviales ( $= 0$ ). Veamos algunas propiedades elementales de las sucesiones exactas, cuya demostración es un sencillo ejercicio.

**Proposición 1.3.2.** *Dada una sucesión exacta se tiene que:*

$$i) \quad f_n \text{ es inyectivo} \Leftrightarrow f_{n+1} = 0.$$

<sup>4</sup> $D_{n-1}$  es un homomorfismo, luego  $D_{n-1}(0) = 0$ .

- ii)  $f_{n+1}$  es sobreyectivo  $\Leftrightarrow f_n = 0$ .
- iii)  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$  es exacta  $\Leftrightarrow f$  es inyectivo.
- iv)  $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$  es exacta  $\Leftrightarrow f$  es sobreyectivo.
- v)  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$  es exacta  $\Leftrightarrow f$  es isomorfismo.
- vi)  $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$  es exacta  $\Leftrightarrow f$  es inyectivo,  $g$  es sobreyectivo y  $\text{Ker } g = \text{Im } f$ . A este tipo de sucesiones se les denomina **sucesiones exactas cortas**.

**Ejemplo 1.3.3.** Las sucesiones exactas del tipo

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M/N \rightarrow 0$$

donde  $N$  es un submódulo de  $M$ ,  $i$  es la inclusión y  $j$  la proyección sobre el módulo cociente  $M/N$ , son exactas cortas.

**Definición 1.3.4.** Un **morfismo** entre dos sucesiones exactas  $(M_n, f_n)$  y  $(N_n, g_n)$  es una sucesión  $\varphi = \varphi_n: M_n \rightarrow N_n$  de homomorfismos tales que  $\varphi_{n-1} \circ f_n = g_n \circ \varphi_n$ , para todo  $n \geq 0$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & M_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & M_n & \xrightarrow{f_n} & M_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n-1} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & N_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & N_n & \xrightarrow{g_n} & N_{n-1} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Las sucesiones exactas son usadas frecuentemente en la Topología Algebraica. Al emplearlas, nos valdremos principalmente de dos de sus propiedades, que exponemos a continuación. Una de ellas es el Lema de los Cinco y otra es la Sucesión Exacta de Homología asociada a una sucesión exacta corta de morfismos entre complejos de cadenas.

**Lema 1.3.5. (Lema de los Cinco).**

Consideramos el siguiente morfismo entre sucesiones exactas

$$\begin{array}{ccccccccc}
 M_5 & \xrightarrow{f_5} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_1 \\
 \varphi_5 \downarrow & & \varphi_4 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow \\
 N_5 & \xrightarrow{g_5} & N_4 & \xrightarrow{g_4} & N_3 & \xrightarrow{g_3} & N_2 & \xrightarrow{g_2} & N_1
 \end{array}$$

Si  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$  y  $\varphi_5$  son isomorfismos entonces  $\varphi_3$  también es un isomorfismo.

*Demostración.* Para ver que  $\varphi_3$  es isomorfismo, probaremos que es inyectivo y sobreyectivo.

Veamos que  $\varphi_3$  es inyectivo<sup>5</sup>. Sea  $c \in M_3$  tal que  $\varphi_3(c) = 0$ . Entonces

$$\varphi_2(f_3(c)) = g_3(\varphi_3(c)) = g_3(0) = 0$$

luego  $f_3(c) = 0$  (por ser  $\varphi_2$  inyectivo). Esto implica que  $c \in \text{Ker } f_3 = \text{Im } f_4$ , por tanto existe  $d \in M_4$  tal que  $c = f_4(d)$ . Tenemos

$$g_4(\varphi_4(d)) = \varphi_3(f_4(d)) = \varphi_3(c) = 0$$

luego  $\varphi_4(d) \in \text{Ker } g_4 = \text{Im } g_5$ . Entonces existe  $e' \in N_5$  tal que  $\varphi_4(d) = g_5(e')$ . Como  $\varphi_5$  es sobreyectivo, existe  $e \in M_5$  tal que  $e' = \varphi_5(e)$ . Por tanto,

$$\varphi_4(d) = g_5(e') = g_5(\varphi_5(e)) = \varphi_4(f_5(e))$$

y se tiene que  $d = f_5(e)$  por ser  $\varphi_4$  inyectivo. De aquí se sigue que

$$c = f_4(d) = f_4(f_5(e)) = 0$$

ya que, por la condición de exactitud, se cumple que  $f_4 \circ f_5 = 0$ .

Veamos ahora que  $\varphi_3$  es sobreyectivo<sup>6</sup>. Sea  $c' \in N_3$ . Entonces  $g_3(c') \in N_2$  y, como  $\varphi_2$  es sobreyectivo, existe  $b \in M_2$  tal que  $\varphi_2(b) = g_3(c')$ . Luego

$$\varphi_1(f_2(b)) = g_2(\varphi_2(b)) = g_2(g_3(c')) = 0$$

por la exactitud en  $N_2$  y al ser  $\varphi_1$  inyectiva se tiene que  $f_2(b) = 0$ . De aquí se sigue que  $b \in \text{Ker } f_2 = \text{Im } f_3$ , entonces existe  $c \in M_3$  tal que  $f_3(c) = b$ . Ahora tenemos

$$g_3(\varphi_3(c)) = \varphi_2(f_3(c)) = \varphi_2(b) = g_3(c')$$

lo que implica que  $c' - \varphi_3(c) \in \text{Ker } g_3 = \text{Im } g_4$  y, por ello, existe  $d' \in N_4$  tal que  $g_4(d') = c' - \varphi_3(c)$ . Como  $\varphi_4$  es sobreyectivo, existe  $d \in M_4$  tal que  $\varphi_4(d) = d'$ . Finalmente, llegamos a que

$$\varphi_3(f_4(d)) = g_4(\varphi_4(d)) = g_4(d') = c' - \varphi_3(c)$$

y despejando vemos que  $c' = \varphi_3(c + f_4(d))$  que pertenece a la imagen de  $\varphi_3$  porque  $c + f_4(d) \in M_3$ . ■

<sup>5</sup>Recordemos que  $\varphi_3$  es inyectivo  $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi_3 = 0$ .

<sup>6</sup> $\varphi_3$  es sobreyectivo  $\Leftrightarrow \text{Im } \varphi_3 = N_3$ .

**Definición 1.3.6.** Sean  $\mathcal{A} = \{(A_n, \partial_n^{\mathcal{A}})\}_{n \geq 0}$ ,  $\mathcal{B} = \{(B_n, \partial_n^{\mathcal{B}})\}_{n \geq 0}$  y  $\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n^{\mathcal{C}})\}_{n \geq 0}$  complejos de cadenas. Una **sucesión exacta corta de complejos de cadenas** es una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow A_n \xrightarrow{i_n} B_n \xrightarrow{j_n} C_n \longrightarrow 0,$$

para todo  $n \geq 0$ , que además conmuta con  $\partial$ . Es decir,  $i \circ \partial = \partial \circ i$  y  $j \circ \partial = \partial \circ j$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & A_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & A_n & \xrightarrow{\partial_n} & A_{n-1} \\
 & \downarrow i_{n+1} & & \downarrow i_n & & \downarrow i_{n-1} \\
 & B_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & B_n & \xrightarrow{\partial_n} & B_{n-1} \\
 & \downarrow j_{n+1} & & \downarrow j_n & & \downarrow j_{n-1} \\
 & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Lo representaremos diciendo que

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{1.2}$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas.

**Teorema 1.3.7.** Sea una sucesión exacta corta de complejos de cadenas del tipo (1.2). Entonces, para todo  $n \geq 0$ , existe un homomorfismo  $\partial_*: H_n(\mathcal{C}) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{A})$ , llamado homomorfismo conector, tal que la siguiente sucesión es exacta:

$$\begin{aligned}
 \cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{A}) &\xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{B}) \\
 &\xrightarrow{j_*} H_{n-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} \cdots \longrightarrow H_2(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_1(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_1(\mathcal{B}) \\
 &\xrightarrow{j_*} H_1(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_0(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_0(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_0(\mathcal{C}) \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

*Demostración.* Primero definiremos el homomorfismo  $\partial_*: H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{A})$  y después verificaremos la exactitud de la sucesión.

Tomamos  $[c] \in H_n(\mathcal{C})$ , con  $c \in Z_n(\mathcal{C}) \subset C_n$  y  $\partial c = 0$ . Fijándonos en el diagrama de la Definición 1.3.6, como  $j$  es sobreyectivo, existe  $b \in B_n$  tal que  $c = j(b)$ . Entonces tenemos  $0 = \partial c = \partial(j(b)) = j(\partial b) = 0$ . Luego  $\partial b \in \text{Ker } j = \text{Im } i$ , y, al ser  $i$  inyectivo, existe un único  $a \in A_{n-1}$  tal que  $i(a) = \partial b$ . Por tanto,  $\partial^2 b = 0 = \partial \partial b = \partial i(a) = i(\partial a) = 0$ ; de nuevo siendo  $i$  inyectivo, resulta que  $\partial a = 0$ , lo que significa que  $a \in Z_{n-1}(\mathcal{A})$ . Por ello, existe  $[a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$  y definimos

$$\partial_*([c]) := [a], \quad \text{siendo } j(b) = c \quad \text{e} \quad i(a) = \partial b \quad (1.3)$$

Vamos a comprobar ahora que  $\partial_*$  está bien definida.

- Como  $i$  es inyectivo,  $a$  queda unívocamente determinado por  $\partial b$ , pues  $i(a) = \partial b$ .
- Si existe  $b' \in B_n$  tal que  $j(b') = j(b)$ , entonces  $b' - b \in \text{Ker } j = \text{Im } i$ . Y existe por tanto un único  $a' \in A_n$  tal que  $b' - b = i(a')$ , donde  $b' = b + i(a')$ . Se sigue que  $\partial b' = \partial(b + i(a')) = \partial b + \partial i(a') = i(a) + i(\partial a') = i(a + \partial a')$ . Cambiar  $b$  por  $b'$  repercute en cambiar el ciclo  $a \in Z_{n-1}(\mathcal{A})$  por el ciclo homólogo  $a + \partial a'$ , lo cual no afecta a la elección de  $[a] \in H_{n-1}(\mathcal{A})$ , es decir,  $\partial_*([c]) = [a + \partial a'] = [a]$ .
- Si tomamos otro  $c' \in Z_n(\mathcal{C})$  tal que  $[c'] = [c] \in H_n(\mathcal{C})$ , entonces  $c' = c + \partial c''$ , para cierto  $c'' \in C_{n+1}$ . Como  $j$  es sobreyectivo, existe un  $b'' \in B_{n+1}$  tal que  $c'' = j(b'')$ . Sustituyendo en  $c'$  tenemos que  $c' = c + \partial c'' = j(b) + \partial(j(b'')) = j(b) + j(\partial b'') = j(b + \partial b'')$ . Luego cambiar  $c$  por  $c'$  repercute en cambiar  $b$  por  $b + \partial b''$ , lo cual no afecta a la elección de  $a$ , pues  $\partial(b + \partial b'') = \partial b + \partial^2 b'' = \partial b = i(a)$ .

Pasemos a ver que  $\partial_*$  es un homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos.

Sean  $\partial_*([c_1]) = [a_1]$  y  $\partial_*([c_2]) = [a_2]$ . Igual que en (1.3), se tendrá que

$$c_1 = j(b_1), \quad i(a_1) = \partial b_1 \quad \text{y} \quad c_2 = j(b_2), \quad i(a_2) = \partial b_2$$

Vamos a comprobar que  $\partial_*([c_1] + [c_2]) = \partial_*([c_1]) + \partial_*([c_2])$ . En efecto, tenemos que  $\partial_*([c_1] + [c_2]) = \partial_*([c_1 + c_2])$ , donde  $c_1 + c_2 = j(b_1) + j(b_2) = j(b_1 + b_2)$ , y de aquí se sigue que  $\partial(b_1 + b_2) = \partial b_1 + \partial b_2 = i(a_1) + i(a_2) = i(a_1 + a_2)$ , pues  $i$  y  $j$  son homomorfismos de  $\mathbb{Z}$ -módulos. Así que obtenemos que  $a_1 + a_2$  es el único tal que  $i(a_1 + a_2) = \partial(b_1 + b_2)$ . Luego

$$\partial_*([c_1] + [c_2]) = \partial_*([c_1 + c_2]) = [a_1 + a_2] = [a_1] + [a_2] = \partial_*([c_1]) + \partial_*([c_2])$$

De igual manera, se obtiene que  $\partial_*(a[c_1]) = a\partial_*([c_1])$ , para todo  $a \in \mathbb{Z}$ .

La prueba de la exactitud de la sucesión de homología tiene tres etapas:

$$H_n(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(\mathcal{C})$$

①
②
③

Exactitud en ①: Se tiene que  $\text{Im } i_* = \text{Ker } j_*$ .

$\square$  Sea  $[a] \in H_n(\mathcal{A})$ ,  $j_*(i_*([a])) = (j_* \circ i_*)([a]) = (j \circ i)_*([a]) = 0_*([a]) = 0$ , pues  $j \circ i = 0$ , ya que  $\text{Im } i = \text{Ker } j$ .

$\square$  Supongamos  $[b] \in \text{Ker } j_* \subset H_n(\mathcal{B})$ ,  $b \in Z_n(\mathcal{B}) \subset B_n$ , es decir,  $\partial b = 0$ . Por tanto,  $j_*([b]) = [j(b)] = 0$ , entonces existe  $c' \in C_{n+1}$  tal que  $j(b) = \partial c'$ . Como  $j$  es sobreyectivo, se tiene  $j(b') = c'$  para algún  $b' \in B_{n+1}$ . Sustituyendo,  $j(b) = \partial c' = \partial j(b') = j(\partial b')$ , luego  $j(b - \partial b') = 0$ . Por la exactitud,  $b - \partial b' \in \text{Ker } j = \text{Im } i$ , entonces existe  $a \in A_n$  con  $i(a) = b - \partial b'$ , o sea,  $b = i(a) + \partial b'$ , y

$$[b] = [i(a)] = i_*([a]) \in \text{Im } i_*$$

$i(a)$  es un ciclo, puesto que  $\partial i(a) = \partial(b - \partial b') = \partial b - \partial^2 b' = 0$ , y de aquí se sigue que  $a$  es un ciclo, ya que como  $\partial i(a) = i(\partial a) = 0$  e  $i$  es inyectivo, resulta que  $\partial a = 0$ .

Exactitud en ②: Se tiene que  $\text{Im } j_* = \text{Ker } \partial_*$ .

$\square$  Sea  $[b] \in H_n(\mathcal{B})$ , con  $b \in Z_n(\mathcal{B})$ , luego  $\partial b = 0$ . Tomamos  $\partial_*(j_*([b])) = \partial_*([j(b)])$ , y por (1.3) sabemos que  $\partial b = 0 = i(a)$ . Al ser  $i$  inyectivo, resulta  $a = 0$ . Entonces  $\partial_*(j_*([b])) = [a] = 0$ .

$\square$  Sea  $[c] \in \text{Ker } \partial_* \subset H_n(\mathcal{C})$ ,  $c \in Z_n(\mathcal{C}) \subset C_n$ , es decir,  $\partial c = 0$ . Por definición del homomorfismo conector,  $\partial_*([c]) = [a] = 0$ , siendo  $c = j(b)$  y  $\partial b = i(a)$ , con  $a \in Z_{n-1}(\mathcal{A})$ . Entonces existe  $a' \in A_n$  tal que  $\partial a' = a$ , por lo que  $\partial b = i(a) = i(\partial a') = \partial(i(a'))$ , luego  $\partial(b - i(a')) = 0$  y en consecuencia  $b - i(a') \in Z_n(\mathcal{B})$ . Aplicando  $j$  se tiene que  $j(b - i(a')) = j(b) - j(i(a')) = j(b) = c$ , pues  $j \circ i = 0$ .

Ahora bien, buscamos  $[c] = j_*([b']) = [j(b')]$ , con  $b' \in Z_n(\mathcal{B})$ . ¿Cuál es ese  $b'$ ? Llamando  $b' = b - i(a')$  resulta, como hemos visto antes, que  $\partial b' = 0$  y  $j(b') = c$ . Por tanto,

$$[c] = j_*([b']) \in \text{Im } j_*$$

Exactitud en ③: Se tiene que  $\text{Im } \partial_* = \text{Ker } i_*$ .

$\square$  Sea  $[c] \in H_n(\mathcal{C})$ . De nuevo, utilizando (1.3), tenemos  $(i_* \circ \partial_*)([c]) = i_*(\partial_*([c])) = i_*([a]) = [i(a)] = [\partial b] = 0$ , ya que  $\partial b \in \text{Im } B_n$ .



$\square$  Supongamos ahora  $[a] \in \text{Ker } i_* \subset H_{n-1}(\mathcal{A})$ . De aquí se sigue que  $a \in Z_{n-1}(\mathcal{A})$  y  $\partial a = 0$ . Con todo esto, sabemos que  $i_*([a]) = [i(a)] = 0 \in H_{n-1}(\mathcal{B})$ , luego existe  $b \in B_n$  tal que  $\partial b = i(a)$ .

Nuestro objetivo es probar que  $[a] = \partial_*([c])$ , con  $[c] \in H_n(\mathcal{C})$  si, y sólo si,  $\partial c = 0$ . Para ello, tomamos  $c = j(b)$ , ¿pero  $c \in Z_n(\mathcal{C})$ ? Sí, pues  $\partial c = \partial j(b) = j(\partial b) = j(i(a)) = 0$  puesto que  $j \circ i = 0$ . Entonces estamos en las condiciones (1.3) y tenemos lo que queríamos:

$$\partial_*([c]) = \partial_*([j(b)]) = [a] \in \text{Im } \partial_*$$

Finalmente, para terminar la demostración, veamos que

$$H_0(\mathcal{B}) \xrightarrow{j_*} H_0(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

es exacta. Para ello, por el apartado *iv)* de la Proposición 1.3.2, tenemos que ver que  $j_*$  es sobreyectivo, es decir, que  $\text{Im } j_* = H_0(\mathcal{C})$ .

Sea  $[c] \in H_0(\mathcal{C})$ , entonces  $c \in C_0$  y, como  $j$  es sobreyectivo, existe  $b \in B_0$  tal que  $j(b) = c$ . Además,  $\partial b = \partial_0 b = 0$ , porque  $\partial_0 \equiv 0$ , pues en dimensión 0 todas las 0-cadenas son bordes. Luego

$$[c] = j_*([b])$$

Esto es consecuencia de que  $Z_0(\mathcal{C}) = C_0$ ,  $Z_0(\mathcal{B}) = B_0$  y  $\partial_0 \equiv 0$ . ■

**Proposición 1.3.8. (Naturalidad de la sucesión exacta y de  $\partial_*$ ).**

Sean

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{i} & \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \mathcal{C} & \longrightarrow & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{i'} & \mathcal{B}' & \xrightarrow{j'} & \mathcal{C}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dos sucesiones exactas cortas de complejos de cadenas, con  $\alpha, \beta, \gamma$  aplicaciones de cadenas entre los complejos. Entonces todos los cuadrados siguientes son conmutativos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & H_n(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i_*} & H_n(\mathcal{B}) & \xrightarrow{j_*} & H_n(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(\mathcal{A}) & \rightarrow & \cdots \\ & & \alpha_* \downarrow & & \beta_* \downarrow & & \gamma_* \downarrow & & \alpha_* \downarrow & & \\ \cdots & \rightarrow & H_n(\mathcal{A}') & \xrightarrow{i'_*} & H_n(\mathcal{B}') & \xrightarrow{j'_*} & H_n(\mathcal{C}') & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(\mathcal{A}') & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

*Demostración.* El primer cuadrado es conmutativo, pues  $i' \circ \alpha = \beta \circ i$  implica, utilizando (1.1), que  $i'_* \circ \alpha_* = \beta_* \circ i_*$ .

De igual manera, tenemos que el segundo cuadrado también es conmutativo,

ya que si  $j' \circ \beta = \gamma \circ j$  entonces  $j'_* \circ \beta_* = \gamma_* \circ j'_*$ .

Falta probar el tercer cuadrado, es decir, que  $\partial'_* \circ \gamma_* = \alpha_* \circ \partial_*$ . Para ello, tomamos  $[c] \in H_n(\mathcal{C})$ , donde  $\partial c = 0$ . Definimos, por (1.3),

$$\partial_*([c]) = [a] \in H_{n-1}(\mathcal{A}), \quad \text{con } j(b) = c \quad \text{e} \quad i(a) = \partial b.$$

Por otro lado,

$$\partial'_*(\gamma_*([c])) = \partial'_*([\gamma(c)]) = [a'], \quad \text{con } j'(b') = \gamma(c) \quad \text{e} \quad i'(a') = \partial' b' \quad (1.4)$$

Luego, por la conmutatividad del segundo cuadrado,

$$\gamma(c) = \gamma(j(b)) = j'(\beta(b)) \quad (1.5)$$

Tomamos entonces, por (1.4) y (1.5),  $b' = \beta(b)$  y se tiene

$$\partial' b' = \partial'(\beta(b)) = \beta(\partial b) = \beta(i(a)) = i'(\alpha(a)) \quad (1.6)$$

puesto que en la segunda igualdad sabemos que este cuadrado es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} B_n & \xrightarrow{\partial} & B_{n-1} \\ \beta \downarrow & & \beta \downarrow \\ B'_n & \xrightarrow{\partial'} & B'_{n-1} \end{array}$$

Finalmente, como  $i'$  es inyectivo, de (1.4) y (1.6) tomamos  $a' = \alpha(a)$ , que es un ciclo, ya que  $\partial' a' = \partial' \alpha(a) = \alpha(\partial a) = \alpha(0) = 0$  y se tiene lo que queríamos demostrar

$$\partial'_*(\gamma_*([c])) = \partial'_*([\gamma(c)]) = [a'] = \partial'_*([\gamma(c)]) = [\alpha(a)] = \alpha_*([a]) = \alpha_*(\partial_*([c]))$$

■

Para finalizar este capítulo, vamos a explicar dos ejemplos especialmente importantes de sucesiones exactas en la homología.

**Ejemplo 1.3.9.** *Se tiene un complejo de cadenas  $\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  y  $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$  un subcomplejo, es decir,  $\mathcal{C}' = \{(C'_n, \partial'_n)\}_{n \geq 0}$  con  $C'_n \subset C_n$  tal que  $\partial C'_n \subset C'_{n-1}$ , y se toma  $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C}/\mathcal{C}' = \{(\bar{C}_n, \bar{\partial}_n)\}_{n \geq 0}$ , donde  $\bar{C}_n = C_n/C'_n$  y  $\bar{\partial}_n \bar{c} = \partial_n \bar{c}$ , para todo  $\bar{c} \in \bar{C}_n$ .*

*En este caso,  $i: C'_n \rightarrow C_n$  es la inclusión dada por  $i(c') = c'$  y  $j: C_n \rightarrow \bar{C}_n = C_n/C'_n$  es la proyección dada por  $j(c) = \bar{c}$ . De este modo,*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{j} \bar{\mathcal{C}} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas, llamada sucesión exacta del par  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$  y los grupos de homología  $H_n(\mathcal{C}/\mathcal{C}') = H_n(\overline{\mathcal{C}})$  se llaman los grupos de **homología relativa** del par  $(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ . Por lo tanto, sabemos por el Teorema 1.3.7 que

$$\cdots \longrightarrow H_n(\mathcal{C}') \xrightarrow{i_*} H_n(\mathcal{C}) \xrightarrow{j_*} H_n(\overline{\mathcal{C}}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathcal{C}') \longrightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta larga. ¿Cómo actúa  $\partial_*$ ?

Sea  $[\bar{c}] \in H_n(\overline{\mathcal{C}})$ . Entonces  $\partial \bar{c}^T = 0 = \overline{\partial c}$ , siendo  $c \in C_n$ . Y como  $\partial \bar{c} = 0 \Leftrightarrow \partial c \in C'_{n-1}$ , definimos

$$\partial_*([\bar{c}]) = [\partial c] \in H_{n-1}(\mathcal{C}')$$

**Ejemplo 1.3.10. (Sucesión de Mayer-Vietoris).**

Este tipo de sucesión desempeñará un papel central en los capítulos siguientes. Sea  $\mathcal{C} = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  un complejo de cadenas. Para obtener una sucesión de Mayer-Vietoris se parte de dos subcomplejos  $\mathcal{C}', \mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}$  tales que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$ . Es decir,  $\mathcal{C}' = \{(C'_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$ ,  $\mathcal{C}'' = \{(C''_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$  tales que para todo  $n$ ,  $C_n = C'_n + C''_n$ .

En esta situación, podemos considerar:

1. El subcomplejo  $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' = \{(C'_n \cap C''_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$ .
2. El complejo  $\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' = \{(C'_n \oplus C''_n, \partial_n)\}_{n \geq 0}$ , donde

$$C'_n \oplus C''_n = \{(c', c'') : c' \in C'_n, c'' \in C''_n\}$$

cuyo operador borde  $\partial: C'_n \oplus C''_n \rightarrow C'_{n-1} \oplus C''_{n-1}$  está dado por  $\partial(c', c'') = (\partial c', \partial c'')$ . (Evidentemente,  $\partial^2 = 0$ ). Se tiene que

$$H_n(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') \cong H_n(\mathcal{C}') \oplus H_n(\mathcal{C}'')$$

$$[(c', c'')] \in H_n(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''), \text{ con } \partial(c', c'') = (\partial c', \partial c'') = 0 = (0, 0) \Leftrightarrow \partial c' = 0 \text{ y } \partial c'' = 0.$$

Por tanto, tenemos el isomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos

$$\begin{aligned} H_n(\mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'') &\longrightarrow H_n(\mathcal{C}') \oplus H_n(\mathcal{C}'') \\ [(c', c'')] &\longmapsto ([c'], [c'']) \end{aligned}$$

Los morfismos  $i: \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$  y  $j: \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}$ , dados por  $i(c) = (c, c)$ , para todo  $c \in \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}''$ , y  $j(c', c'') = c' - c''$ , para todo  $(c', c'') \in \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}''$ , respectivamente, componen una sucesión corta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' \xrightarrow{i} \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' \xrightarrow{j} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{1.7}$$

---

<sup>7</sup>Recordemos que  $\partial: \overline{C}_n \rightarrow \overline{C}_{n-1}$ .

¿Es una sucesión exacta de complejos de cadenas? Sí, veámoslo:

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C'_n \cap C''_n & \xrightarrow{\partial} & C'_{n-1} \cap C''_{n-1} \\
 \downarrow i & & \downarrow i \\
 C'_n \oplus C''_n & \xrightarrow{\partial} & C'_{n-1} \oplus C''_{n-1} \\
 \downarrow j & & \downarrow j \\
 C_n & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0
 \end{array}$$

Por un lado, en el cuadrado de arriba se tiene:

$$(i \circ \partial)(c) = i(\partial c) = (\partial c, \partial c)$$

$$(\partial \circ i)(c) = \partial(i(c)) = \partial(c, c) = (\partial c, \partial c)$$

Y en el cuadrado de abajo:

$$(j \circ \partial)(c', c'') = j(\partial(c', c'')) = j(\partial c', \partial c'') = \partial c' - \partial c''$$

$$(\partial \circ j)(c', c'') = \partial(j(c', c'')) = \partial(c' - c'') = \partial c' - \partial c''$$

Ambos cuadrados conmutan. Falta ver la exactitud de la sucesión:

- $i$  es inyectivo, puesto que  $i(c) = (c, c) = 0 = (0, 0) \Leftrightarrow c = 0$ .
- $j$  es sobreyectivo, ya que para todo  $c \in C_n = C'_n + C''_n$  existen  $x \in C'_n$  e  $y \in C''_n$  tales que

$$c = x + y = x - (-y) = j(x, -y) \in \text{Im } j$$

- $\text{Ker } j = \text{Im } i$   
 $\boxed{\supseteq}$   $(j \circ i)(c) = j(i(c)) = j(c, c) = c - c = 0$ , luego  $\text{Im } i \subseteq \text{Ker } j$ .

$\square$  Sea  $(c', c'') \in \text{Ker } j$ . Entonces  $j(c', c'') = c' - c'' = 0$ , por lo que  $c' = c'' \in C'_n \cap C''_n$ . Tomamos  $c = c' = c''$  y aplicando  $i$  se obtiene que  $i(c) = (c, c) = (c', c'') \in \text{Im } i$ . Por tanto  $\text{Ker } j \subseteq \text{Im } i$ .

De (1.7) resulta la sucesión exacta de homología:

$$\cdots \longrightarrow H_n(C' \cap C'') \xrightarrow{i_*} H_n(C') \oplus H_n(C'') \xrightarrow{j_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial_* = \Delta} H_{n-1}(C' \cap C'') \longrightarrow \cdots$$

llamada sucesión de Mayer-Vietoris de la terna  $(C, C', C'')$ . En este caso, denotamos el homomorfismo conector como  $\Delta$ . Los homomorfismos  $i_*$  y  $j_*$  son obvios:  $i_*([c]) = ([c], [c])$  y  $j_*([c'], [c'']) = [c' - c'']$ .

Ahora bien, ¿Cómo actúa  $\Delta = \partial_*$ ?

Tomamos  $[c] \in H_n(C)$ . Se cumple que  $\partial c = 0$ . Como  $c \in C_n = C'_n + C''_n$  existen  $c' \in C'_n$  y  $c'' \in C''_n$  tal que  $c = c' - c''$ . Luego  $\partial c = \partial(c' - c'') = \partial c' - \partial c'' = 0$  y de ahí se sigue que  $\partial c' = \partial c'' \in C'_{n-1} \cap C''_{n-1}$ . Por tanto

$$\Delta([c]) = [\partial c'] = [\partial c''], \quad \text{siendo } c = c' - c''$$

# Capítulo 2

## Homología singular

La teoría homológica más importante en la topología algebraica, y que vamos a estudiar exclusivamente, se llama homología singular. A diferencia de la homología simplicial, que solamente se aplica a espacios homeomorfos a poliedros, la homología singular tiene sentido para todos los espacios topológicos. Comenzaremos dando unas definiciones básicas y posteriormente nos centraremos en estudiar los grupos de homología singular y otras propiedades.

### 2.1. Primeras definiciones

A continuación, exponemos unas definiciones sacadas de los libros [2], [4], [6] y [9].

Decimos que  $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$  son  $(n + 1)$  puntos independientes si los vectores  $\overrightarrow{v_0v_1} = v_1 - v_0, \overrightarrow{v_0v_2} = v_2 - v_0, \dots, \overrightarrow{v_0v_n} = v_n - v_0$  son  $n$  vectores linealmente independientes ( $n \leq m$ ).

Si  $A \subset \mathbb{R}^m$ , entonces la envolvente convexa de  $A$ , denotada por  $\text{conv}(A)$ , se define como

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{K \in \text{Conv}(A)} K$$

donde  $\text{Conv}(A) = \{K \subset \mathbb{R}^m : K \text{ convexo}, A \subset K\}$

**Definición 2.1.1.** *Un  $n$ -símplex, o símplex  $n$ -dimensional, en  $\mathbb{R}^m$  es la envolvente convexa de  $n + 1$  puntos linealmente independientes.*

Los puntos  $v_i$  son los vértices del  $n$ -símplex, y este símplex será denotado

como

$$[v_0, v_1, \dots, v_n] = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i v_i : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i \right\}$$

Por tanto,  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$  es el  $n$ -símplex generado por  $v_0, \dots, v_n$ . Los coeficientes  $t_i$  son las **coordenadas baricéntricas** del punto  $\sum_{i=0}^n t_i v_i$  en  $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ .

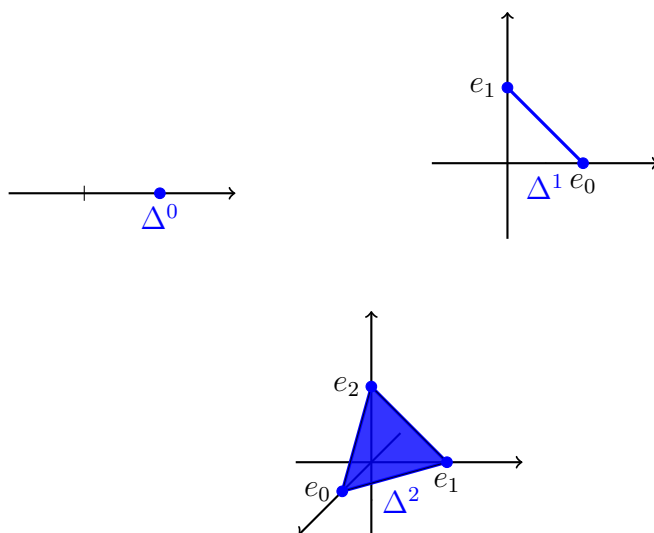
**Definición 2.1.2.** Llamamos  **$n$ -símplex estándar** al  $n$ -símplex en  $\mathbb{R}^{n+1}$  generado por la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\{e_0 = (1, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ . Lo denotamos como  $\Delta^n$ .

$$\Delta^n = [e_0, \dots, e_n] = \left\{ (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0 \text{ para todo } i \right\}$$

Para los objetivos de la homología será importante guardar el orden de los vértices de un símplex. Gracias a esto, se determinan las orientaciones de las aristas  $[v_i, v_j]$  conforme se aumentan los subíndices. Especificar el orden de los vértices también condiciona la existencia de un homomorfismo lineal canónico que va del  $n$ -símplex estándar  $\Delta^n$  a cualquier otro  $n$ -símplex  $[v_0, \dots, v_n]$ , definido por

$$\begin{aligned} \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow [v_0, \dots, v_n] \subset \mathbb{R}^m \\ (t_0, \dots, t_n) &\longmapsto \sum_{i=0}^n t_i v_i \end{aligned} \tag{2.1}$$

Veamos algunos ejemplos de  $n$ -símplices estándar en dimensiones bajas:



**Figura 2.1:** símplices 1,2 y 3-dimensionales

Aplicando la Definición 2.1.2, estos símplexes se denotan como sigue:

$$\begin{aligned}\Delta^0 &= \{t_0 \in \mathbb{R} : t_0 \geq 0, t_0 = 1\} = \{1\} \subset \mathbb{R} \\ \Delta^1 &= \{(t_0, t_1) \in \mathbb{R}^2 : t_0, t_1 \geq 0, t_0 + t_1 = 1\} = [(1, 0), (0, 1)] = [e_0, e_1] \subset \mathbb{R}^2 \\ \Delta^2 &= \{(t_0, t_1, t_2) \in \mathbb{R}^3 : t_0, t_1, t_2 \geq 0, t_0 + t_1 + t_2 = 1\} = \\ &= [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = [e_0, e_1, e_2] \subset \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

Asímismo, el 3-símplex estándar  $\Delta^3$  se corresponde con el tetraedro contenido en  $\mathbb{R}^4$ .

**Nota.** Obsérvese que  $[e_1, e_2] \subset \mathbb{R}^3$  es un 1-símplex, pero no es el 1-símplex estándar.

Una **cara** de un símplex  $[v_0, \dots, v_n]$  es el subsímplex con vértices en cualquier subconjunto no vacío de las  $v_i$ 's. El subconjunto no necesita ser un subconjunto propio, por lo que  $[v_0, \dots, v_n]$  se considera a sí mismo como una cara también. Es decir, si elegimos  $\{i_0, \dots, i_k\} \in \{0, \dots, n\}$ , con  $(k + 1)$  índices, podemos considerar el  $k$ -símplex

$$[v_{i_0}, \dots, v_{i_k}] \subset [v_0, \dots, v_n]$$

que corresponde a la cara  $k$ -dimensional de  $[v_0, \dots, v_n]$ . Además, los vértices de una cara siempre serán ordenados de acuerdo a su orden en el símplex más grande.

Las caras 0-dimensionales de un símplex son sus vértices. Un  $n$ -símplex  $[v_0, \dots, v_n]$  tiene  $n + 1$  caras  $(n - 1)$ -dimensionales.

$$\begin{aligned}[v_1, \dots, v_n] &\text{ cuando } t_0 = 0 \\ [v_0, v_2, \dots, v_n] &\text{ cuando } t_1 = 0 \\ &\vdots \\ [v_0, \dots, v_{n-1}] &\text{ cuando } t_n = 0\end{aligned}$$

El término “cara”, sin especificar dimensión, normalmente lo usaremos para denotar estas caras  $(n - 1)$ -dimensionales.

Ahora, el concepto que vamos a introducir para dar rigor formal a la idea de embeber un símplex en un espacio topológico dado  $X$  es el de símplex singular.

**Definición 2.1.3.** *Un  $n$ -símplex singular, o símplex singular de dimensión  $n$ , en un espacio topológico  $X$  es una aplicación continua  $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ .*



Hay dos puntos que debemos observar cuidadosamente aquí:

1. El simplex singular es *la aplicación* hacia  $X$ , y no es un conjunto de puntos de  $X$ . En este punto hacemos hincapié en la notación; un  $n$ -simplex singular definido como arriba por la aplicación continua  $\sigma$  se llama el  $n$ -simplex singular  $\sigma$ .
2. El conjunto de puntos  $\sigma(\Delta^n)$ , que es la imagen de la aplicación  $\sigma$ , no tiene por qué parecerse a un simplex (excepto cuando  $n = 0$ , donde  $\Delta^0$  y  $\sigma(\Delta^0)$  son ambos puntos singulares). La definición de un  $n$ -simplex singular no hace referencia a la forma de  $\sigma(\Delta^n)$ . Nosotros consideramos aplicaciones continuas de simplices estándar a  $X$ , ya sean inyectivas como no inyectivas. Por ejemplo, el siguiente dibujo muestra imágenes de tres aplicaciones diferentes  $\Delta^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , ninguno de las cuales es homeomorfo con  $\Delta^1$ .



Denotamos por  $S_n(X)$  el conjunto de todos los  $n$ -simplices en  $X$ , abreviando a  $S_n$  cuando el contexto sea suficientemente claro.

$$S_n(X) = \{ \sigma : \Delta^n \rightarrow X \mid \sigma \text{ continua} \}$$

Pero nosotros necesitamos más información sobre cómo estos simplices se unen para formar el espacio, y para ello nos fijamos en la frontera (también llamado borde) de cada simplex. La frontera de un  $n$ -simplex es la unión de todas sus caras, y particularmente para  $\Delta^n$  se tiene la siguiente descripción: Definimos la aplicación  $f_n^i : \Delta^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , para  $0 \leq i \leq n$ , dada por

$$f_n^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) \tag{2.2}$$

$f_n^i$  es un embebimiento natural que permite “ver”  $\Delta^{n-1}$  como la  $i$ -ésima cara  $(n - 1)$ -dimensional de  $\Delta^n$ . En otras palabras,

$$f_n^i(\Delta^{n-1}) = [e_0^n, \dots, e_{i-1}^n, e_{i+1}^n, \dots, e_n^n]$$

donde  $\Delta^{n-1} = [e_0^{n-1}, \dots, e_{n-1}^{n-1}]$ , siendo  $\{e_0^{n-1}, \dots, e_{n-1}^{n-1}\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $\{e_0^n, \dots, e_n^n\}$  la de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Luego la frontera de  $\Delta^n$  es la unión de  $f_n^i(\Delta^{n-1})$ , para  $0 \leq i \leq n$ , es decir, el conjunto de puntos en  $\Delta^n$  donde al menos una coordenada es 0.

Vamos a utilizar conceptos de la sección 1.1 para aplicarlos a la homología singular.

Sea  $C_n(X)$  el  $\mathbb{Z}$ -módulo libre generado por  $S_n(X)$ . Como trabajamos con el anillo de los enteros, entonces  $C_n(X)$  es el grupo libre generado por  $S_n(X)$  cuyos elementos, llamados  **$n$ -cadenas singulares** de  $X$  con coeficientes en el anillo  $\mathbb{Z}$ , son combinaciones lineales finitas de  $n$ -símplices singulares. Es decir,

$$C_n(X) = \left\{ \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \cdot \sigma : n_\sigma \in \mathbb{Z} \text{ para todo } \sigma \in S_n(X) \right. \\ \left. \text{y } n_\sigma = 0 \text{ para casi todo } \sigma \in S_n(X) \right\}$$

Definimos la suma en  $C_n(X)$  como sigue

$$\left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \sigma \right) + \left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} m_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in S_n(X)} (n_\sigma + m_\sigma) \sigma$$

y, además,

$$\sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \sigma = \sum_{\sigma \in S_n(X)} m_\sigma \sigma \Leftrightarrow n_\sigma = m_\sigma \text{ para todo } \sigma \in S_n(X)$$

$$\sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \sigma = 0 \Leftrightarrow n_\sigma = 0 \text{ para todo } \sigma \in S_n(X)$$

A veces se denota  $C_n(X; \mathbb{Z})$  en lugar de  $C_n(X)$ .

¿Qué podemos decir sobre los bordes de un símplex singular? Queremos definir  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ . Partimos de los generadores de  $C_n(X)$ . Entonces, si  $\sigma \in S_n(X)$ , ¿quién es  $\partial_n \sigma$ ?

**Definición 2.1.4.** Para  $0 \leq i \leq n$ , definimos la  **$i$ -ésima cara** del  $n$ -símplex  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  como el  $(n-1)$ -símplex  $\partial_n^i \sigma: \Delta^{n-1} \rightarrow X$  dado por

$$\partial_n^i \sigma = \sigma \circ f_n^i \in S_{n-1}(X)$$

donde  $f_n^i$  es el embebimiento dado en (2.2).

**Definición 2.1.5.** El **operador borde**  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  es el homomorfismo de grupos definido por

$$\partial_n \sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_n^i \sigma = \partial_n^0 \sigma - \partial_n^1 \sigma + \partial_n^2 \sigma - \dots + (-1)^n \partial_n^n \sigma \in C_{n-1}(X)$$

para todo  $n$ -símplex singular  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ .

Para una cadena, el operador borde se extiende por linealidad:

$$\partial_n \left( \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \sigma \right) = \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \partial_n \sigma$$

**Lema 2.1.6.** *Para todo  $n \geq 0$ , se tiene que*

$$\partial_n \circ \partial_{n+1}: C_{n+1}(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

es el homomorfismo cero, o sea,  $\partial^2 = 0$ .

Para llevar a cabo la prueba, se necesita la siguiente propiedad:

**Lema 2.1.7.** *Dada la composición  $\Delta^{n-1} \xrightarrow{f_n^j} \Delta^n \xrightarrow{f_{n+1}^i} \Delta^{n+1}$ , se verifica que*

$$f_{n+1}^i \circ f_n^j = \begin{cases} f_{n+1}^j \circ f_n^{i-1} & \text{si } i > j, \\ f_{n+1}^{j+1} \circ f_n^i & \text{si } i \leq j. \end{cases}$$

*Demostración.* Denotamos por  $(t_0, \dots, t_{n-1})$  los elementos de  $\Delta^{n-1}$  y por  $(s_0, \dots, s_n)$  los elementos de  $\Delta^n$ . Para el caso  $i > j$  se satisface:

$$\begin{aligned} (f_{n+1}^i \circ f_n^j)(t_0, \dots, t_{n-1}) &= f_{n+1}^i(t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{n-1}) \\ &= f_{n+1}^i(s_0, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \\ &= (s_0, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} (f_{n+1}^j \circ f_n^{i-1})(t_0, \dots, t_{n-1}) &= f_{n+1}^j(t_0, \dots, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}) \\ &= f_{n+1}^j(s_0, \dots, s_j, \dots, s_{i-2}, s_{i-1}, s_i, \dots, s_n) \\ &= (s_0, \dots, 0, s_j, \dots, s_{i-2}, s_{i-1}, s_i, \dots, s_n) \\ &= (t_0, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{i-2}, 0, t_{i-1}, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Ahora, para el caso  $i \leq j$  tenemos:

$$\begin{aligned} (f_{n+1}^i \circ f_n^j)(t_0, \dots, t_{n-1}) &= f_{n+1}^i(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{n-1}) \\ &= f_{n+1}^i(s_0, \dots, s_{i-1}, s_i, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_n) \\ &= (s_0, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, \dots, s_{j-1}, s_j, s_{j+1}, \dots, s_n) \\ &= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 (f_{n+1}^{j+1} \circ f_n^i)(t_0, \dots, t_{n-1}) &= f_{n+1}^{j+1}(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-1}, t_j, \dots, t_{n-1}) \\
 &= f_{n+1}^{j+1}(s_0, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_n) \\
 &= (s_0, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_j, 0, s_{j+1}, \dots, s_n) \\
 &= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{j-1}, 0, t_j, \dots, t_{n-1}).
 \end{aligned}$$

■

Visto esto, estamos en condiciones de probar el Lema 2.1.6.

*Demostración Lema 2.1.6.* Basta ver que  $\partial^2\sigma = 0$ , para todo  $\sigma \in S_{n+1}(X)$ , ya que, como hemos dicho antes, el operador borde se extiende por linealidad. El caso  $n = 0$  es trivial, porque

$$C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

y si  $\sigma \in S_1(X)$  entonces  $\partial_1\sigma \in C_0(X)$ , luego volviendo a aplicar el operador borde se tiene que  $\partial_0(\partial_1\sigma) = 0$ .

Supongamos ahora  $n \geq 1$  y sea  $\sigma \in S_{n+1}(X)$ .

$$\begin{aligned}
 \partial^2\sigma &= \partial_n(\partial_{n+1}\sigma) = \partial_n\left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_{n+1}^i \sigma\right) = \partial_n\left(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma \circ f_{n+1}^i\right) \\
 &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_n(\sigma \circ f_{n+1}^i) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^n (-1)^j (\sigma \circ f_{n+1}^i) \circ f_n^j\right) \\
 &= \sum_{i=0, j=0}^{n+1, n} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) \\
 &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) \\
 &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) + \sum_{j < i} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^j \circ f_n^{i-1}) \\
 &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) + \sum_{i < j} (-1)^{j+i} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^{j-1}) \\
 &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) + \sum_{i \leq j'} (-1)^{i+j'+1} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^{j'}) \\
 &= \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) - \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} (\sigma \circ f_{n+1}^i \circ f_n^j) = 0.
 \end{aligned}$$

Hemos ido haciendo cambios en el segundo sumatorio: Primero hemos aplicado el Lema 2.1.7, luego hemos cambiado la variable  $i$  por la variable  $j$ , seguidamente, denotando  $j' = j - 1$ , se tiene que si  $i < j$  entonces  $i \leq j'$ , luego se ha reemplazado  $j$  por  $j' + 1$ , y finalmente se ha hecho otro cambio de variable sustituyendo  $j'$  por  $j$  de nuevo. ■

De esta manera, la sucesión

$$\mathcal{C}(X) : \cdots \rightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

es un complejo de cadenas, llamado **complejo de cadenas singular** del espacio  $X$ .

**Nota.**  $\partial: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(X)$  es un homomorfismo del complejo de cadenas  $\mathcal{C}(X)$  en sí mismo de **grado**  $= -1$  que cumple  $\partial^2 = 0$ , pues, para todo  $n \geq 0$ ,  $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ .

El resto de la construcción de la homología singular se sigue de la sección 1.1 del Capítulo 1. Definimos  $Z_n(X) = \text{Ker } \partial_n$  para  $n > 0$  y  $Z_0(X) = C_0(X)$ , llamando a los elementos de  $Z_n(X)$  **ciclos**, y fijamos  $B_n(X) = \text{Im } \partial_{n+1}$ , llamando a sus elementos **bordes**.

**Definición 2.1.8.** *El  $n$ -ésimo grupo de homología singular de un espacio topológico  $X$  es el grupo cociente*

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} = \begin{cases} \text{Ker } \partial_n / \text{Im } \partial_{n+1} & \text{si } n > 0, \\ C_0 / \text{Im } \partial_1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

La **homología singular** de  $X$  es la colección

$$H_*(X) = \{H_0(X), H_1(X), \dots, H_n(X), \dots\}$$

**Ejemplo 2.1.9. (Homología de un espacio unipuntual)**

Sea  $X = \{*\}$ , siendo  $*$  un punto singular. Veamos primero cómo son los **símplices** en este caso. Fijamos  $n \geq 0$  y consideramos  $\sigma_n \in S_n(X)$ , haciendo hincapié en la **dimensión del símplex**. Entonces tenemos

$$\sigma_n: \Delta^n \rightarrow \{*\} \text{ continua, dada por } \sigma_n(\vec{t}) = *, \text{ para todo } \vec{t} \in \Delta^n$$

Por tanto,  $S_n(X) = \{\sigma_n\}$ , es decir, para todo  $n \geq 0$  existe un **único símplex singular  $n$ -dimensional**, luego

$$C_n(X) = \{a\sigma_n: \forall a \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

Calculamos ahora la frontera para cada  $n$ -símplex singular, con  $n \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \partial: C_n(X) &\longrightarrow C_{n-1}(X) \\ a\sigma_n &\longmapsto \partial(a\sigma_n) = a(\partial\sigma_n) \end{aligned}$$

donde

$$\partial\sigma_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma_n = \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \right) \sigma_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

pues  $\partial^i \sigma_n \in S_{n-1}(X) = \{\sigma_{n-1}\}$ . Es decir,

$$\partial(a\sigma_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ a\sigma_{n-1} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases} \text{ En este caso, } \partial \text{ es un isomorfismo.}$$

Con lo cual, el complejo de cadenas que nos queda es el siguiente:

$$\dots \rightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3=0} C_2 \xrightarrow{\partial_2=iso} C_1 \xrightarrow{\partial_1=0} C_0 \xrightarrow{\partial_0=0} 0$$

Si  $n = 0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} Z_0 = Ker \partial_0 = C_0 \\ B_0 = Im \partial_1 = 0 \end{array} \right] \Rightarrow H_0(\{*\}) = \frac{C_0}{0} = C_0 \cong \mathbb{Z}.$$

Si  $n$  es impar,

$$\left. \begin{array}{l} Z_n = Ker \partial_n = C_n \\ B_n = Im \partial_{n+1} = C_n \end{array} \right] \Rightarrow H_n(\{*\}) = \frac{C_n}{C_n} = 0.$$

Si  $n$  es par ( $n \geq 2$ ),

$$\left. \begin{array}{l} Z_n = Ker \partial_n = 0 \\ B_n = Im \partial_{n+1} = 0 \end{array} \right] \Rightarrow H_n(\{*\}) = \frac{0}{0} = 0.$$

Entonces finalmente vemos que la homología de un punto es

$$H_n(\{*\}) = \begin{cases} \cong \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

**Definición 2.1.10.** Se dice que un espacio topológico  $X$  es **acíclico** si  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_n(X) = 0$ , para todo  $n \geq 1$ .

En el ejemplo visto anteriormente se ve que el espacio topológico unipuntual es acíclico.

Otro tema a destacar es que los grupos de homología singular nos dan información sobre las componentes arcoconexas de un espacio. Finalizamos esta sección con las siguientes propiedades, para las cuales se ha indagado únicamente en [4].

**Proposición 2.1.11.** *Sea*

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i,$$

donde  $\{X_i\}_{i \in I}$  son las componentes arcoconexas de  $X$  ( $X_i \subset X$  es un subespacio topológico). Entonces, para todo  $n \geq 0$ ,

$$H_n(X) \cong \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i).$$

*Demostración.* Hagamos primero una pequeña aclaración:

**Observación.** Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y \subset X$  un subespacio. Tenemos dos complejos de cadenas  $\{(C_n(X), \partial)\}$  y  $\{(C_n(Y), \partial)\}$ , donde  $C_n(X)$  está generado por  $S_n(X) = \{\sigma: \Delta^n \rightarrow X / \sigma \text{ continua}\}$  y  $C_n(Y)$  por  $S_n(Y) = \{\sigma: \Delta^n \rightarrow Y / \sigma \text{ continua}\}$ . Sea  $i: Y \hookrightarrow X$  la inclusión, entonces:

Si  $\sigma \in S_n(Y) \implies i \circ \sigma \in S_n(X)$  tal que  $\text{Im}(i \circ \sigma) \subset Y$ .

Si  $\sigma \in S_n(X)$  con  $\text{Im} \sigma \subset Y \implies$  existe  $\hat{\sigma} \in S_n(Y)$  tal que  $i \circ \hat{\sigma} = \sigma$ .

Luego podemos hacer la siguiente identificación:

$$S_n(Y) \equiv \{\sigma \in S_n(X) : \text{Im} \sigma \subset Y\} \subset S_n(X)$$

Lo mismo pasa con las cadenas: Si  $c \in C_n(X)$  es tal que  $c = \sum_{i \in I} n_i \cdot \sigma_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}$ ,  $n_i \neq 0$  y  $\sigma_i \in S_n(X)$ , definimos

$$\text{Im} c = \bigcup_{i \in I} \text{Im} \sigma_i$$

Entonces

$$C_n(Y) \equiv \{c \in C_n(X) : \text{Im} c \subset Y\} \subset C_n(X)$$

Si  $c \in C_n(X)$  con  $\text{Im} c \subset Y$ , entonces  $\partial c \in C_{n-1}(X)$  con  $\text{Im}(\partial c) \subset Y$ . Basta ver esto para un simplex. En efecto, si  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  con  $\text{Im} \sigma \subset Y$ ,

$$\left. \begin{aligned} \partial \sigma &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ f_n^i) \\ \sigma \circ f_n^i: \Delta^{n-1} &\hookrightarrow \Delta^n \rightarrow X \\ \text{Im}(\sigma \circ f_n^i) &\subset \text{Im} \sigma \subset Y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Im}(\partial \sigma) = \bigcup_{i=0}^n \text{Im}(\partial^i \sigma) \subset Y.$$

$Y$ , por consiguiente,  $\text{Im}(\partial c) = \bigcup_{i \in I} \text{Im}(\partial \sigma_i) \subset Y$ . De aquí que podamos considerar el subcomplejo  $\{(C_n(Y), \partial)\} \subseteq \{(C_n(X), \partial)\}$ .

Pasamos a ver ahora la prueba de la proposición.

Primero veamos qué pasa con las cadenas y luego veamos qué pasa con los módulos de homología. Sea  $c = \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_\sigma \cdot \sigma \in C_n(X)$ . Por ser  $\Delta^n$  conexo por caminos y  $\sigma$  una aplicación continua, se tiene que  $\sigma(\Delta^n)$  es conexo por caminos. Por tanto, como  $\text{Im } \sigma = \sigma(\Delta^n) \subset X$ , existe un único  $i \in I$  tal que  $\text{Im } \sigma \subset X_i$ . Así, cada  $n$ -cadena  $c$  se descompone de forma única como sigue

$$c = \sum_{i \in I} c_i, \text{ donde } c_i = \sum_{\sigma} n_\sigma \cdot \sigma \text{ para todo } \sigma \text{ con } \text{Im } \sigma \subset X_i.$$

Por ello, podemos considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \Phi: C_n(X) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} C_n(X_i) \\ c &\longmapsto (c_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

con  $\sum_{i \in I} c_i = c$ . Esta aplicación es un isomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos. Como  $\partial c = \sum_{i \in I} \partial c_i \in C_{n-1}(X_i)$ , este isomorfismo se induce bien en la homología.

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}: H_n(X) &\longrightarrow \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i) \\ [c] &\longmapsto ([c_i])_{i \in I} \end{aligned}$$

Por un lado, si  $[c] \in H_n(X)$ , entonces  $([c_i])_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$ . En efecto, si  $[c] \in H_n(X)$ ,  $\partial c = 0 = \sum_{i \in I} \partial c_i$ , es decir, por fuerza  $\partial c_i = 0$  para todo  $i$ , o sea,  $[c_i] \in H_n(X_i)$  para todo  $i$ , luego  $([c_i])_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$ .

Por otro lado,  $\widehat{\Phi}$  está bien definida, esto es, si  $[c] = [d]$  en  $H_n(X)$  entonces  $([c_i])_{i \in I} = ([d_i])_{i \in I}$  en  $\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$ . Visto mejor, si  $[c] = [d]$  se tiene que  $c - d \in B_n(X)$ , es decir, existe un  $\alpha \in C_{n+1}(X)$  tal que  $c - d = \partial \alpha = \partial(\sum_{i \in I} \alpha_i) = \sum_{i \in I} \partial \alpha_i$ , con  $\partial \alpha_i \in C_n(X_i)$  para todo  $i$ . Por lo tanto,

$$c - d = \sum_{i \in I} c_i - \sum_{i \in I} d_i = \sum_{i \in I} \partial \alpha_i \Leftrightarrow \sum_{i \in I} (c_i - d_i) = \sum_{i \in I} \partial \alpha_i$$

Luego, para todo  $i$ ,  $c_i - d_i = \partial \alpha_i$  en  $C_n(X_i)$ , o sea, para todo  $i$ ,  $[c_i] = [d_i]$  en  $H_n(X_i)$ , y de ahí concluimos que  $([c_i])_{i \in I} = ([d_i])_{i \in I}$  en  $\bigoplus_{i \in I} H_n(X_i)$ . ■

**Proposición 2.1.12.** *Si  $X$  es arcoconexo, entonces  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Tenemos la situación  $C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0=0} 0$  y sabemos que  $H_0(X) = \frac{C_0(X)}{\text{Im } \partial_1}$ . ¿Quién es  $C_0(X)$ ? Representamos los 0-símplices singulares, que son los puntos, como  $\gamma_x \in S_0(X)$ , con  $x \in X$ , tales que

$$\begin{aligned} \gamma_x: \{1\} &\longrightarrow X \text{ continua} \\ 1 &\longmapsto x \end{aligned}$$



$$S_0(X) = \{\gamma_x : \text{para todo } x \in X\} = \{x : \text{para todo } x \in X\} \equiv X$$

De modo que

$$\begin{aligned} C_0(X) &= \left\{ \sum_{x \in X} n_x \gamma_x : n_x = 0, \text{ para casi todo } x \in X \right\} \\ &= \left\{ \sum_{x \in X} n_x x : n_x = 0, \text{ para casi todo } x \in X \right\} \end{aligned}$$

Vamos a construir  $\varepsilon: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  un epimorfismo definido por  $\varepsilon(\sum_{x \in X} n_x x) = \sum_{x \in X} n_x$  con

$$\text{Ker } \varepsilon = \left\{ c = \sum_{x \in X} n_x x \in C_0(X) \text{ tal que } \sum_{x \in X} n_x = 0 \right\} = \text{Im } \partial_1.$$

Para probar que  $\varepsilon$  es un epimorfismo basta ver que 1 está en la imagen. Como se cumple que  $\varepsilon(\gamma_x) = 1$ , para todo  $x \in X$ , entonces, dado  $n \in \mathbb{Z}$ , fijo  $x \in X$  y se tiene  $\varepsilon(n\gamma_x) = \varepsilon(nx) = n$ . Por tanto,  $\text{Im } \varepsilon = \mathbb{Z}$ .

Si nos creemos que  $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$  ya habríamos terminado, pues, según el Primer Teorema de Isomorfía<sup>1</sup>,  $H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} = \frac{C_0(X)}{\text{Ker } \varepsilon} \cong \mathbb{Z}$ .

Veamos que  $\text{Ker } \varepsilon = \text{Im } \partial_1$ .

$\supseteq$  Sea  $c \in C_1(X)$ , o sea,  $c = \sum_i n_i \sigma_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}$  y  $\sigma_i \in S_1(X)$ . Debemos probar que  $\varepsilon(\partial c) = 0$ . Aplicando el operador borde,  $\partial c = \sum_i n_i (\partial \sigma_i)$ , donde  $\partial \sigma_i = \partial^0 \sigma_i - \partial^1 \sigma_i = \sigma_i(0, 1) - \sigma_i(1, 0)$  por la Definición 2.1.5. Entonces

$$\varepsilon(\partial c) = \sum_i n_i \cdot \varepsilon(\partial \sigma_i),$$

siendo  $\varepsilon(\partial \sigma_i) = \varepsilon(1 \cdot \sigma_i(0, 1) + (-1) \cdot \sigma_i(1, 0)) = 1 - 1 = 0$ , para todo  $\sigma_i \in S_1(X)$ . Luego  $\varepsilon(\partial c) = 0$ , para todo  $c \in C_1(X)$ . La inclusión  $\supseteq$  es cierta siempre.

$\subseteq$  Supongamos ahora un elemento de  $\text{Ker } \varepsilon$ , por ejemplo,  $\sum_{i=1}^m n_i x_i$ , con  $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ , tal que  $\sum_{i=1}^m n_i = 0$ . Fijamos  $x_0 \in X$ . Como  $X$  es arcoconexo, existen, para todo  $i = 1, \dots, m$ , 1-símplex  $\sigma_i: \Delta^1 \rightarrow X$  tales que  $\sigma_i(0, 1) = x_i$  y  $\sigma_i(1, 0) = x_0$  cuyo borde es  $\partial \sigma_i = x_i - x_0$ . Tomamos  $c = \sum_{i=1}^m n_i \sigma_i \in C_1(X)$ . Entonces

$$\partial c = \sum_{i=1}^m n_i \partial \sigma_i = \sum_{i=1}^m n_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^m n_i x_i - \left( \sum_{i=1}^m n_i \right) x_0 = \sum_{i=1}^m n_i x_i$$

Por tanto,  $\sum_{i=1}^m n_i x_i \in \text{Im } \partial_1$ . En la inclusión  $\subseteq$  hace falta que  $X$  sea arcoconexo.  $\blacksquare$

<sup>1</sup>El Primer Teorema de Isomorfía nos dice que si tenemos dos grupos arbitrarios  $G$  y  $G'$  y  $\varphi: G \rightarrow G'$  un homomorfismo de grupos, entonces se cumple que  $G/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$ .

De la Proposición 2.1.11 y la Proposición 2.1.12 se deduce el siguiente teorema:

**Teorema 2.1.13.** *Para todo espacio topológico  $X$ ,  $H_0(X)$  es la suma directa de  $\mathbb{Z}$ , una por cada componente arcoconexa de  $X$ .*

## 2.2. Homología y aplicaciones continuas

En esta sección y en la siguiente hemos seguido la estructura de [4].

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Para todo  $n \geq 0$ ,  $f$  induce un homomorfismo de grupos abelianos libres de grado cero  $f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ . ¿Cómo construimos  $f_{\#}$ ? Sea  $\sigma \in S_n(X)$  y consideramos

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\sigma} & X \\ & \searrow f \circ \sigma & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

Definimos  $f_{\#}(\sigma) := f \circ \sigma \in S_n(Y)$ . Por linealidad, extendemos esta definición a una cadena. Por tanto, si  $c \in C_n(X)$  es tal que  $c = \sum_{\sigma \in S_n(X)} n_{\sigma} \sigma$ , con  $n_{\sigma} \in \mathbb{Z}$ , se tiene que  $f_{\#}(c) = f_{\#}(\sum_{\sigma} n_{\sigma} \sigma) = \sum_{\sigma} n_{\sigma} f_{\#}(\sigma) = \sum_{\sigma} n_{\sigma} (f \circ \sigma) \in C_n(Y)$ . Las aplicaciones  $f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  satisfacen  $\partial f_{\#} = f_{\#} \partial$ . Basta verlo para los generadores, luego para todo  $n$ -símplex singular  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ ,

$$\begin{aligned} \partial f_{\#}(\sigma) &= \partial(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i (f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ \sigma) \circ f_n^i \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (\sigma \circ f_n^i) = f \circ \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ f_n^i) \right) \\ &= f_{\#} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i (\sigma \circ f_n^i) \right) = f_{\#} \left( \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma \right) = f_{\#}(\partial \sigma). \end{aligned}$$

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^X} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n^X} & C_{n-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{n+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^Y} & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n^Y} & C_{n-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Del apartado 1.1.3 del Capítulo 1, deducimos que  $f_{\#}$  define una **aplicación de cadenas** del complejo de cadenas singular de  $X$  al complejo de cadenas singular de  $Y$ . La aplicación  $f_{\#}$  lleva ciclos a ciclos y bordes a bordes. Esto implica que podemos definir un homomorfismo  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ , para todo  $n \geq 0$ , llamado el **homomorfismo inducido** por  $f_{\#}$ .

Dos propiedades básicas de los homomorfismos inducidos que son importantes a pesar de ser bastante triviales son:

**Proposición 2.2.1. (Propiedades functoriales).**

- i)  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  para la aplicación compuesta  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ , siendo  $g: Y \rightarrow Z$  otra aplicación continua.
- ii) La aplicación identidad  $id_X: X \rightarrow X$  induce el homomorfismo identidad  $(id_X)_* = id_{H_n(X)}: H_n(X) \rightarrow H_n(X)$ .

Obviamente, también se cumple que  $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$  e  $(id_X)_{\#} = id_{C_n(X)}$ .

*Demostración.* Basta verlo para los generadores de  $C_n(X)$ . Sea  $\sigma \in S_n(X)$ . Por un lado,  $(g \circ f)_{\#}(\sigma) = (g \circ f) \circ \sigma = g \circ (f \circ \sigma) = g \circ (f_{\#}(\sigma)) = g_{\#}(f_{\#}(\sigma)) = (g_{\#} \circ f_{\#})(\sigma)$ . De aquí se induce  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$  y se cumple i). Por otro lado,  $(id_X)_{\#}(\sigma) = id_X \circ \sigma = \sigma$ . Por tanto,  $(id_X)_{\#} = id_{C_n(X)}$  y de aquí se induce  $(id_X)_* = id_{H_n(X)}$ , lo que prueba ii). ■

Recordemos un concepto básico en Topología [8](p. 119-120).

**Definición 2.2.2.** *Dados dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , se llama **homeomorfismo** entre  $X$  e  $Y$  a una aplicación biyectiva  $f: X \rightarrow Y$  tal que tanto  $f$  como su inversa  $f^{-1}$  sean continuas (se dice que  $f$  es bicontinua). Diremos que dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos. Dicho de otra manera, si existen aplicaciones  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  continuas tal que  $g \circ f = id_X$  y  $f \circ g = id_Y$ . Se denota  $X \approx Y$ .*

El siguiente corolario es consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.1.

**Corolario 2.2.3. (Invarianza topológica de la homología).**

*Si  $f: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo, entonces  $f_{\#}$  y  $f_*$  son isomorfismos de grupos. Es decir, los grupos de homología de un espacio topológico son un invariante topológico<sup>2</sup>.*

---

<sup>2</sup>Un invariante topológico o propiedad topológica es una propiedad de un espacio topológico que se conserva bajo homeomorfismos.

*Demostración.* Por hipótesis, tenemos que  $X \approx Y$ . Aplicando la Definición 2.2.2 existen  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  continuas tal que  $f \circ g = id_Y$  y  $g \circ f = id_X$ . Entonces

$$g_{\#} \circ f_{\#} = (g \circ f)_{\#} = (id_X)_{\#} = id_{C_n(X)}$$

$$f_{\#} \circ g_{\#} = (f \circ g)_{\#} = (id_Y)_{\#} = id_{C_n(Y)}$$

Así, tenemos un isomorfismo de cadenas  $f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  con inversa  $g_{\#}: C_n(Y) \rightarrow C_n(X)$ . Observemos que lo que ocurre a nivel de las cadenas se transfiere a nivel de la homología, por la propia definición. De ahí se sigue también el isomorfismo de grupos

$$H_n(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_*} \\ \xleftarrow{g_*} \end{array} H_n(Y)$$

■

En la siguiente sección debilitamos la condición de ser homeomorfos por la de ser homotópicamente equivalentes.

## 2.3. Invarianza homotópica

Veamos que los grupos de homología no son sólo invariantes topológicos, sino que también son invariantes homotópicos. Vamos a introducir unas definiciones previas [1](p. 44-45).

**Definición 2.3.1.** *Dos aplicaciones continuas  $f, g: X \rightarrow Y$  entre espacios topológicos son **homotópicas** ( $f \simeq g$ ) si existe  $F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  una aplicación continua tal que para todo  $x \in X$  se cumple  $F_0(x) = F(x, 0) = f(x)$  y  $F_1(x) = F(x, 1) = g(x)$ . Se dice que  $F$  es una **homotopía** entre  $f$  y  $g$ . Escribiremos también  $F_t(x) = F(x, t)$ .*

**Definición 2.3.2.** *Una **equivalencia homotópica** entre dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  es una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  para la cual existe  $g: Y \rightarrow X$  continua tal que  $g \circ f \simeq id_X$  y  $f \circ g \simeq id_Y$ .*

$$g = \text{inversa homotópica de } f.$$

*En tal caso, se dice que  $X$  es **homotópico** a  $Y$  o que  $X$  e  $Y$  son **homotópicamente equivalentes** y se escribe  $X \simeq Y$ .*

**Observación.** Un homeomorfismo es una equivalencia homotópica con  $g = f^{-1}$  y “=” en vez de “ $\simeq$ ”. Es decir,

$$X \approx Y \Rightarrow X \simeq Y$$

$$\Leftarrow$$

**Definición 2.3.3.** Un espacio topológico  $X$  se dice que es **contráctil** si  $X \simeq \{*\}$ , es decir, si  $X$  es homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual.

Intuitivamente, un espacio es contráctil si puede deformarse en sí mismo a un punto.

En otras palabras,  $X \simeq \{*\}$  si, y sólo si, existen  $f: X \rightarrow \{*\}$  y  $g: \{*\} \rightarrow X$  continuas, definidas por  $f(x) = *$ , para todo  $x \in X$ , y  $g(*) = x_0$ , para algún  $x_0 \in X$ , respectivamente, tales que  $g \circ f \simeq id_X$  y  $f \circ g \simeq id_{\{*\}}$ . Observemos que sólo hay una aplicación que nos lleva  $X$  al espacio unipuntual y, sin embargo, hay tantas aplicaciones del espacio unipuntual a  $X$  como puntos de  $X$ .

La relación  $f \circ g \simeq id_{\{*\}}$  es una igualdad siempre, pues

$$f \circ g: \{*\} \longrightarrow \{*\}$$

$$* \longmapsto *$$

lo cual no aporta demasiada información. En cambio,

$$g \circ f: X \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto x_0$$

es una aplicación constante que vamos a denotar como  $c_{x_0}$ . Es decir,  $g \circ f = c_{x_0}$ . Por lo tanto, hemos llegado a la siguiente conclusión:

$$X \simeq \{*\} \Leftrightarrow \exists x_0 \in X \text{ tal que } id_X \simeq c_{x_0}$$

$$\Leftrightarrow \exists F: X \times I \rightarrow X \text{ continua tal que } \begin{cases} F(x, 0) = x, \forall x \in X, \\ F(x, 1) = x_0, \forall x \in X. \end{cases}$$

Un ejemplo típico de espacio contráctil es el siguiente:

**Ejemplo 2.3.4.** Sea  $X \subseteq \mathbb{R}^m$  un conjunto estrellado respecto de un punto  $x_0 \in X$ . Por definición, para todo  $x \in X$ , el segmento

$$[x, x_0] = \{(1 - t)x + tx_0 : t \in [0, 1]\} \subseteq X$$

Entonces podemos definir una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  dada por  $F(x, t) = (1 - t)x + tx_0$ . Así, vemos que todo conjunto estrellado respecto de un punto es contráctil.

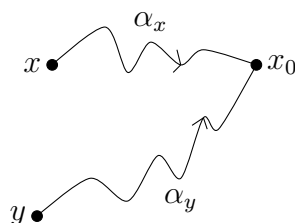
Nuestro objetivo en esta sección es probar que dos espacios homotópicos tienen los mismos grupos de homología. Hemos calculado en el Ejemplo 2.1.9 la homología de un espacio unipuntual, y ahora vamos a calcular detenidamente, y como paso previo a ver la invarianza homotópica de la homología abstracta, la homología de un espacio contráctil.

**Teorema 2.3.5.** *Todo espacio contráctil es acíclico.*

*Demostración.* Supongamos  $X$  un espacio contráctil. Por la Definición 2.1.10, debemos probar que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_n(X) = 0$ , para todo  $n \geq 1$ .

Por un lado, si demostramos que  $X$  es arcoconexo, entonces, aplicando la Proposición 2.1.12, tenemos que el grupo de homología de dimensión cero es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ . Veámoslo:

Al ser  $X$  contráctil, existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  con  $F_0 = id_X$  y  $F_1 = c_{x_0}$ , para algún  $x_0 \in X$ . Definimos entonces, para todo  $x \in X$ ,  $\alpha_x(t) := F(x, t)$  siendo  $\alpha_x: [0, 1] \rightarrow X$  un camino tal que  $\alpha_x(0) = x$  y  $\alpha_x(1) = x_0$ . Sean  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$  dos caminos en  $X$  ( $x, y \in X$ ).



Denotando como  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$  el camino  $\alpha$  pero con orientación contraria, se tiene que  $\alpha_x \wedge \bar{\alpha}_y$  es un camino que une  $x$  con  $y$ . Por lo tanto,  $X$  es conexo por arcos y se sigue que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Por otro lado, ver que  $H_n(X) = 0$ , para todo  $n \geq 1$ , equivale a decir que todo  $n$ -ciclo es un  $n$ -borde, o sea que, para todo  $c \in C_n(X)$  con  $\partial c = 0$ , existe  $d \in C_{n+1}(X)$  tal que  $c = \partial d$ . La idea es construir una aplicación de cadenas  $D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$  tal que  $(\partial D + D\partial)(c) = \partial(Dc) + D(\partial c) = c$ , para todo  $c \in C_n(X)$ . Es decir,

$$\partial D + D\partial = id_{C_n(X)}$$

Así, si  $\partial c = 0$ , entonces  $c = \partial(Dc) + D(\overset{0}{\partial c}) = \partial(Dc)$  y con ello obtendríamos lo que buscamos. Falta sólo construir  $D$ .

Pues bien, sea  $F$  la homotopía mencionada anteriormente y  $\sigma \in S_n(X)$ , para

$n \geq 0$ . Queremos que  $D\sigma$  sea un  $(n+1)$ -símplex, entonces lo definimos como

$$(D\sigma)(t_0, \dots, t_{n+1}) = \begin{cases} \sigma(t_1, \dots, t_{n+1}) & \text{si } t_0 = 0, \\ F(\sigma(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{n+1}}{1-t_0}), t_0) & \text{si } 0 < t_0 < 1, \\ x_0 & \text{si } t_0 = 1. \end{cases}$$

¿ $D\sigma$  está bien definida? Sí, ya que, para todo  $(t_0, \dots, t_{n+1}) \in \Delta^{n+1}$  con  $0 < t_0 < 1$ , se cumple

$$t_0 + \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-t_0} \sum_{i=1}^{n+1} t_i = \frac{1-t_0}{1-t_0} = 1 \Rightarrow \left( \frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{n+1}}{1-t_0} \right) \in \Delta^n$$

Los casos  $t_0 = 0$  y  $t_0 = 1$  son obvios, por lo tanto,  $(D\sigma)(t_0, \dots, t_{n+1}) \in X$ , para todo  $(t_0, \dots, t_{n+1})$ .

¿ $D\sigma$  es continua? Sí, pues

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow 0} F\left(\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{n+1}}{1-t_0}\right), t_0\right) &= F(\sigma(t_1, \dots, t_{n+1}), 0) = \sigma(t_1, \dots, t_{n+1}). \\ \lim_{t_0 \rightarrow 1} F\left(\sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{n+1}}{1-t_0}\right), t_0\right) &= x_0. \end{aligned}$$

Como sabemos que  $\sigma$  es continua, no hay problemas en el último caso.

Visto esto, podemos decir que  $D\sigma \in S_{n+1}(X)$ , o sea,  $D\sigma: \Delta^{n+1} \rightarrow X$  es continua. Por linealidad, definimos  $D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$ , para todo  $n \geq 0$ . Entonces  $\partial(D\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial^i(D\sigma)$ , donde  $\partial^i(D\sigma) \in S_n(X)$ . Luego

$$\begin{aligned} \partial^0(D\sigma)(s_0, \dots, s_n) &= D\sigma(0, s_0, \dots, s_n) = \sigma(s_0, \dots, s_n) \Rightarrow \partial^0(D\sigma) = \sigma. \\ \partial^1(D\sigma)(s_0, \dots, s_n) &= D\sigma(s_0, 0, s_1, \dots, s_n) \\ &= F\left(\sigma\left(0, \frac{s_1}{1-s_0}, \dots, \frac{s_n}{1-s_0}\right), s_0\right) \\ &= F\left((\partial^0\sigma)\left(\frac{s_1}{1-s_0}, \dots, \frac{s_n}{1-s_0}\right), s_0\right) \\ &= D(\partial^0\sigma)(s_0, \dots, s_n) \Rightarrow \partial^1(D\sigma) = D(\partial^0\sigma). \end{aligned}$$

En general, si  $1 \leq i \leq n+1$ :

$$\begin{aligned} \partial^i(D\sigma)(s_0, \dots, s_n) &= D\sigma(s_0, s_1, \dots, s_{i-1}, 0, s_i, \dots, s_n) \\ &= F\left(\sigma\left(\frac{s_1}{1-s_0}, \dots, \frac{s_{i-1}}{1-s_0}, 0, \frac{s_i}{1-s_0}, \dots, \frac{s_n}{1-s_0}\right), s_0\right) \\ &= F\left((\partial^{i-1}\sigma)\left(\frac{s_1}{1-s_0}, \dots, \frac{s_n}{1-s_0}\right), s_0\right) \\ &= D(\partial^{i-1}\sigma)(s_0, \dots, s_n) \Rightarrow \partial^i(D\sigma) = D(\partial^{i-1}\sigma). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \partial(D\sigma) &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial^i(D\sigma) = \partial^0(D\sigma) + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \partial^i(D\sigma) \\ &= \sigma - \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} D(\partial^{i-1}\sigma) = \sigma - D(\partial\sigma) \end{aligned} \quad (2.3)$$

pues, realizando el cambio de variable  $i - 1$  por  $j$  en el último sumatorio de (2.3), se obtiene  $D(\partial\sigma) = D(\sum_{j=0}^n (-1)^j \partial^j \sigma)$ .

De ahí

$$\partial(D\sigma) + D(\partial\sigma) = \sigma \text{ para todo } \sigma \in S_n(X),$$

y extendiendo a cadenas,

$$\partial(Dc) + D(\partial c) = c \text{ para todo } c \in C_n(X).$$

■

**Teorema 2.3.6. (Invarianza homotópica de la homología).**

*i) Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  aplicaciones homotópicas (como aplicaciones continuas). Entonces  $f_{\#}, g_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$  son algebraicamente homotópicas (como aplicaciones de cadenas). Es decir, existe una sucesión de homomorfismos de grupos  $D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$  tal que  $\partial D + D\partial = g_{\#} - f_{\#}$ .*

*ii) Por tanto, si  $f$  y  $g$  son homotópicas, se tiene que  $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ .*

*Demostración.* Veamos *i*).

Partimos de que  $f \simeq g$ , entonces existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow Y$ , con  $I = [0, 1]$ , tal que  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ . Queremos definir  $D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$  utilizando esta homotopía, y poder llegar así a que  $f_{\#} \simeq g_{\#}$  (Véase la Definición 1.2.1).

Como siempre, trabajamos con los generadores de  $C_n(X)$ . Sea  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  un  $n$ -símplex. Dicho esto, empezamos aplicando un procedimiento que consiste en subdividir el producto  $\Delta^n \times I$  en  $(n + 1)$ -símplices.

$$\Delta^n \times I \subset \mathbb{R}^{n+1} \times I \subset \mathbb{R}^{n+2}$$

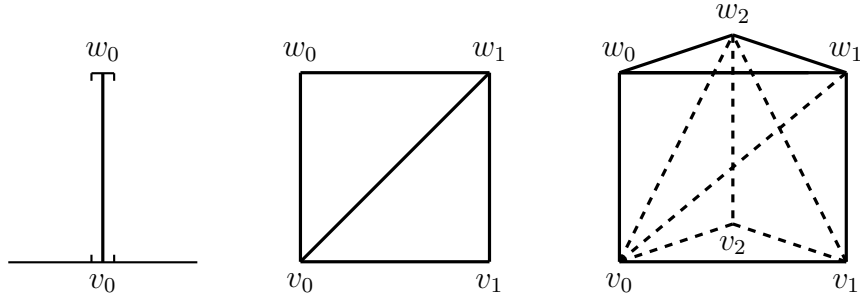
En  $\Delta^n \times I$  denotamos

$$\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n], \text{ siendo } v_i = (e_i, 0)$$



$$\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n], \text{ siendo } w_i = (e_i, 1)$$

donde  $e_i$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Es decir,  $v_i$  y  $w_i$  tienen la misma imagen bajo la proyección  $\Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$ . La Figura 2.2 muestra los casos  $n = 0, 1, 2$ . Por ejemplo, en el caso  $n = 1$ ,  $\Delta^1 \times \{0\} = [v_0 = (1, 0, 0), v_1 = (0, 1, 0)]$ ,  $\Delta^1 \times \{1\} = [w_0 = (1, 0, 1), w_1 = (0, 1, 1)]$  y vemos el cuadrado  $\Delta^1 \times I$  como unión de los triángulos  $[v_0, w_0, w_1] \cong \Delta^2$  y  $[v_0, v_1, w_1] \cong \Delta^2$ .



**Figura 2.2:** Subdivisión de  $\Delta^n \times I$  en  $(n + 1)$ -símplices para  $n = 0, 1, 2$ .

Entonces deducimos que

$$\Delta^n \times I = \bigcup_{i=0}^n [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n],$$

donde  $[v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$  es un  $(n + 1)$ -símplex contenido en  $\Delta^n \times I$ . La intersección de dos símplices de estos es una cara  $n$ -dimensional.

De la misma forma que en (2.1), para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ , existe una aplicación afín  $\varphi_i$  definida por

$$\begin{aligned} \varphi_i: \Delta^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2} &\longrightarrow [v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n] \subset \Delta^n \times I \subset \mathbb{R}^{n+2} \\ (t_0, \dots, t_{n+1}) &\longmapsto \sum_{k=0}^i t_k v_k + \sum_{k=i+1}^{n+1} t_k w_{k-1} \end{aligned}$$

y, así, podemos considerar la composición

$$F \circ (\sigma \times id_I) \circ \varphi_i: \Delta^{n+1} \xrightarrow{\varphi_i} \Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times id_I} X \times I \xrightarrow{F} Y$$

O sea, para todo  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $F \circ (\sigma \times id_I) \circ \varphi_i \in S_{n+1}(Y)$ . Visto todo esto, podemos definir  $D: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(Y)$ , el cual llamamos **operador prisma**, por<sup>3</sup>

$$D\sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i (F \circ (\sigma \times id_I) \circ \varphi_i)$$

<sup>3</sup>Escribimos por comodidad  $D\sigma$  en lugar de  $D(\sigma)$ .

para todo  $\sigma \in S_n(X)$ . Esta expresión equivale a

$$D\sigma := \sum_{i=0}^n (-1)^i F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, v_1, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}$$

donde  $F \circ (\sigma \times 1): \Delta^n \times I \xrightarrow{\sigma \times 1} X \times I \xrightarrow{F} Y$ . Falta ver que el operador prisma satisface la relación básica  $\partial D = g_{\#} - f_{\#} - D\partial$ .

Geoméricamente,  $\partial D$  representa el borde del prisma, y los tres términos de la derecha representan la base  $\Delta^n \times \{0\}$ , la tapa  $\Delta^n \times \{1\}$  y las caras  $\partial\Delta^n \times I$  del prisma. Calculamos el borde de  $D\sigma$ :

$$\begin{aligned} \partial(D\sigma) &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial^j(D\sigma) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^i (-1)^j \partial^j(F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}) \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j \partial^j(F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}) \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^j \partial^j(F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_{j-1}, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, \widehat{v}_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_{j-1}, \dots, w_n]} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_{j-1}, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, \widehat{v}_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j < i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{i=0}^n F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_{i-1}, \widehat{v}_i, w_i, \dots, w_n]} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$- \sum_{j=0}^n F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_j, \widehat{w}_j, w_{j+1}, \dots, w_n]} \quad (2.7)$$

$$- \sum_{j>i} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]}. \quad (2.8)$$

Para pasar de (2.4) a (2.5) hemos realizado dos cambios de variable: En el primero hemos llamado  $k = j - 1$ , entonces  $j > i$  si, y sólo si,  $j \geq i + 1$  si, y sólo si,  $k = j - 1 \geq i$ ; en el segundo, hemos intercambiado la variable  $k$  por la variable  $j$ .

(2.7) y (2.8) son el resultado de desdoblar (2.5) en los casos  $i = j$  y  $j > i$ . Observemos que en (2.6) y (2.7) se cancelan todos los sumatorios salvo los casos  $i = 0$  y  $j = n$  (Si  $i > 0$  entonces se cancela con el  $j = i - 1$ ). Por lo tanto, en  $i = 0$  nos queda

$$F \circ (\sigma \times 1)|_{[w_0, \dots, w_n]} = F \circ (\sigma \times 1)|_{\Delta^n \times \{1\}} = g \circ \sigma = g_{\#}(\sigma)$$

$$F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_n]} = F \circ (\sigma \times 1)|_{\Delta^n \times \{0\}} = f \circ \sigma = f_{\#}(\sigma)$$

pues, para todo  $s \in \Delta^n$ ,  $F \circ (\sigma \times 1)(s, 1) = F(\sigma(s), 1) = F_1(\sigma(s)) = g(\sigma(s))$  y, de igual manera,  $F \circ (\sigma \times 1)(s, 0) = F(\sigma(s), 0) = F_0(\sigma(s)) = f(\sigma(s))$ .

Luego

$$\begin{aligned} \partial(D\sigma) &= g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma) - \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \\ &\quad - \sum_{i>j} (-1)^{i+1} (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]} \\ &= g_{\#}(\sigma) - f_{\#}(\sigma) - D(\partial\sigma) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} D(\partial\sigma) &= D\left(\sum_{j=0}^n (-1)^j \partial^j \sigma\right) = \sum_{j=0}^n (-1)^j D(\partial^j \sigma) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^j (-1)^i F \circ (\partial^j \sigma \times id_I) \circ \varphi_i \\ &= \sum_{i<j} (-1)^i (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n]} \\ &\quad + \sum_{i>j} (-1)^{i+1} (-1)^j F \circ (\sigma \times 1)|_{[v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]}. \end{aligned}$$

La prueba de *ii*) es muy sencilla. Hemos visto que  $f \simeq g$  implica  $f_{\#} = g_{\#}$ , y aplicando el Teorema 1.2.2 resulta que  $f_* = g_*$ , como se quería demostrar. ■

En vista de las propiedades funtoriales y del teorema de invarianza homotópica, se obtiene como consecuencia el siguiente resultado, con el cual cerramos el capítulo:

**Corolario 2.3.7.** *Sea  $f: X \rightarrow Y$  una equivalencia homotópica. Entonces  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  es un isomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos para todo  $n \geq 0$ .*

*Demostración.* Si  $X \simeq Y$  existen aplicaciones continuas  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq id_X$  y  $f \circ g \simeq id_Y$ . Entonces, aplicando el apartado ii) del Teorema 2.3.6,

$$(g \circ f)_* = (id_X)_* \quad \text{y} \quad (f \circ g)_* = (id_Y)_*$$

y de aquí se sigue que

$$g_* \circ f_* = id_{H_n(X)} \quad \text{y} \quad f_* \circ g_* = id_{H_n(Y)}$$

Luego se tiene un isomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos  $f_*$ , cuya inversa es  $g_*$ .

$$H_n(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{f_*} \\ \xleftarrow{g_*} \end{array} H_n(Y)$$

■

# Capítulo 3

## Homología relativa

Con el fin de ser capaces de utilizar grupos de homología eficazmente, es necesario poder determinar la estructura de éstos para varios espacios; hasta el momento sólo podemos hacer esto para unos pocos espacios, por ejemplo, para los espacios contráctiles. En la mayoría de los casos, la definición de  $H_n(X)$  es poco útil como medio de cálculo de su estructura. Para seguir avanzando, en este capítulo vamos a generalizar nuestra definición anterior de grupos de homología, definiendo grupos de homología relativa para cualquier par  $(X, Y)$ , que consiste en un espacio topológico cualquiera  $X$  e  $Y$  un subespacio de  $X$ . A lo largo de este capítulo se toma como referencia [7].

Sea  $Y$  un subespacio de un espacio topológico  $X$ . Hacemos uso de la observación que ya hicimos al comienzo de la demostración de la Proposición 2.1.11. Como la inclusión  $i: Y \hookrightarrow X$  es continua, se tiene el homomorfismo inyectivo  $i_{\#}: C_n(Y) \rightarrow C_n(X)$  definido por  $i_{\#}(\sum_{\sigma \in S_n(Y)} n_{\sigma} \sigma) = \sum_{\sigma \in S_n(Y)} n_{\sigma} i_{\#}(\sigma)$ , para todo  $\sigma \in S_n(Y)$ . De modo que

$$i_{\#}(C_n(Y)) = \{c \in C_n(X) : \text{Im } c \subset Y\} \equiv C_n(Y)$$

y podemos considerar  $\{(C_n(Y), \partial)\}_{n \geq 0}$  como subcomplejo de  $\{(C_n(X), \partial)\}_{n \geq 0}$ . El homomorfismo  $i_{\#}$  induce el homomorfismo  $i_*: H_n(Y) \rightarrow H_n(X)$ . Observemos que si  $c \in C_n(Y)$  tal que  $\partial c = 0$ , escribiremos

$$[c]_Y = \{c + \partial d : \text{para todo } d \in C_{n+1}(Y)\} \subset H_n(Y)$$

como la clase de homología de  $c$  vista en  $Y$  y

$$[c]_X = \{c + \partial d : \text{para todo } d \in C_{n+1}(X)\} \subset H_n(X)$$

como la clase de homología de  $c$  vista en  $X$ . Luego definimos  $i_*$  por  $i_*([c]_Y) = [i_{\#}(c)] \equiv [c]_X$ . Asimismo,

$$[c]_Y = 0 \text{ si, y sólo si, existe } d \in C_{n+1}(Y) \text{ tal que } c = \partial d,$$

y de igual forma

$$[c]_X = 0 \text{ si, y sólo si, existe } d \in C_{n+1}(X) \text{ tal que } c = \partial d.$$

Al ser  $i_*$  un homomorfismo,  $[c]_Y = 0$  implica que  $[c]_X = 0$ .

Ahora bien, como  $C_n(Y)$  es un subcomplejo de  $C_n(X)$  y ambos son grupos abelianos, ¿qué podemos decir del grupo cociente  $C_n(X)/C_n(Y)$ ?

**Definición 3.0.1.** *Llamamos a*

$$C_n(X, Y) := \frac{C_n(X)}{C_n(Y)} = \{\bar{c} : c \in C_n(X)\}$$

el **grupo de  $n$ -cadenas relativas** del par  $(X, Y)$ .

Como en la sección 1.1.2, denotamos por  $\bar{c}$  a los elementos de  $C_n(X, Y)$ , donde  $\bar{c} = \{c + d : \text{para todo } d \in C_n(Y)\}$ , y si  $c_1, c_2 \in C_n(X)$ , entonces  $\bar{c}_1 = \bar{c}_2$  si, y sólo si,  $c_1 - c_2 \in C_n(Y)$  si, y sólo si,  $\text{Im}(c_1 - c_2) \subset Y$ . Luego, para todo  $c \in C_n(X)$ ,  $\bar{c} = 0$  si, y sólo si,  $\text{Im } c \subset Y$ .

El operador borde  $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  satisface que  $\partial_n(C_n(Y)) \subset C_{n-1}(Y)$ , y de aquí se induce un homomorfismo de grupos cocientes

$$\bar{\partial} = \bar{\partial}_n : C_n(X, Y) \rightarrow C_{n-1}(X, Y)$$

definido por  $\bar{\partial}\bar{c} := \overline{\partial c}$ , para todo  $\bar{c} \in C_n(X, Y)$ . Entonces tenemos que  $\{(C_n(X, Y), \bar{\partial})\}_{n \geq 0}$  es un complejo de cadenas relativo del par  $(X, Y)$ , pues  $\bar{\partial}$  está bien definida y  $(\bar{\partial})^2 = 0$ . A partir de aquí, podemos definir el grupo de los  **$n$ -ciclos relativos**, para  $n \geq 0$ , por

$$Z_n(X, Y) = \text{Ker } \bar{\partial}_n = \{\bar{c} \in C_n(X, Y) : \bar{\partial}\bar{c} = 0 \text{ si, y sólo si, } \text{Im}(\partial c) \subset Y\}$$

y el grupo de los  **$n$ -bordes relativos**, para  $n \geq 0$ , por

$$B_n(X, Y) = \text{Im } \bar{\partial}_{n+1} = \{\bar{\partial}\bar{d} \in C_n(X, Y) : \bar{d} \in C_{n+1}(X, Y)\}$$

Al ser  $(\bar{\partial})^2 = 0$  se sigue que

$$B_n(X, Y) \subset Z_n(X, Y)$$

y, por lo tanto, llegamos a la siguiente definición:

**Definición 3.0.2.** *Se define como el  $n$ -ésimo grupo de la homología relativa del par  $(X, Y)$  al grupo cociente*

$$H_n(X, Y) = \frac{Z_n(X, Y)}{B_n(X, Y)} = \{[\bar{c}] : \bar{c} \in Z_n(X, Y)\}$$

En el caso  $n = 0$ , definimos  $Z_0(X, Y) = C_0(X, Y)$  y  $H_0(X, Y) = \frac{C_0(X, Y)}{B_0(X, Y)}$ .

Por definición del grupo cociente,

$$[\bar{c}] = 0 \text{ si, y sólo si, existe } \bar{d} \in C_{n+1}(X, Y) \text{ tal que } \bar{c} = \bar{\partial} \bar{d} = \overline{\partial d},$$

lo que equivale a decir que

$$[\bar{c}] = 0 \text{ si, y sólo si, existe } d \in C_{n+1}(X) \text{ tal que } \text{Im}(c - \partial d) \subset Y.$$

Intuitivamente hablando, la homología relativa es la que proviene de  $X$  si nos “olvidamos” de  $Y$ .

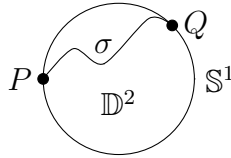
**Ejemplo 3.0.3.** *Supongamos*

$$X = \mathbb{D}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \leq 1\}$$

$$Y = \partial X = \mathbb{S}^{n-1} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 = 1\}$$

Sean  $P, Q \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\sigma: \Delta^1 \rightarrow \mathbb{D}^n$  tal que  $\sigma(1, 0) = P$  y  $\sigma(0, 1) = Q$ . Entonces  $\partial\sigma \neq 0$  en  $C_{n-1}(X)$ , pues  $\partial\sigma = Q - P$ , y en cambio,  $\overline{\partial\sigma} = \overline{\partial\sigma} = 0$  en  $C_{n-1}(X, Y)$ , porque  $\text{Im}(\partial\sigma) \subset Y$ .

Por ejemplo, en el caso  $n = 2$  sería:



En lo que respecta a sucesiones exactas, denotando  $j$  el epimorfismo de  $C_n(X)$  al grupo cociente  $C_n(X, Y)$ , tenemos que

$$0 \longrightarrow \{(C_n(Y), \partial)\}_{n \geq 0} \xrightarrow{i_{\#} = i} \{(C_n(X), \partial)\}_{n \geq 0} \xrightarrow{j_{\#}} \{(C_n(X, Y), \bar{\partial})\}_{n \geq 0} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. En ella definimos la inclusión  $i(c) = c$ , para todo  $c \in C_n(Y)$ , y la proyección  $j(c) = \bar{c}$ , tomando ahora  $c \in C_n(X)$ .

A partir de esta sucesión, se sigue por el Teorema 1.3.7 la existencia de un homomorfismo conector  $\partial_*: H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y)$ , para todo  $n \geq 1$ , tal que

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_n(Y) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, Y) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(Y) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \xrightarrow{j_*} \dots$$

es una sucesión exacta larga, llamada **sucesión exacta del par**  $(X, Y)$ .

Recordemos por el Teorema 1.3.7 la forma de definir  $\partial_*$ , (1.3), y, para este

caso particular, fijamos  $\partial_*([\bar{c}]) = [\partial c]$ , entendiéndonos dónde está cada clase de homología.

$$\begin{array}{ccc}
 & & C_{n-1}(Y) \ni \partial c \\
 & & \downarrow i \\
 c \in C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \ni \partial c \\
 \downarrow j & & \\
 \bar{c} \in C_n(X, Y) & & 
 \end{array}$$

Resumidamente, hemos tomado un elemento  $[\bar{c}]$  de  $H_n(X, Y)$ . Entonces  $\bar{c} \in C_n(X, Y)$  tal que  $\overline{\partial \bar{c}} = \overline{\partial c} = 0$ , es decir,  $\text{Im}(\partial c) \subset Y$ . Como  $j$  es sobreyectiva, podemos elegir un elemento  $c \in C_n(X)$  tal que  $\bar{c} = j(c)$ . Por tanto,  $0 = \overline{\partial c} = \overline{\partial \bar{c}} = \overline{\partial(j(c))} = j(\partial c) = 0$ , luego  $\partial c \in \text{Ker } j = \text{Im } i$ . Pero como  $\partial c \in C_{n-1}(X)$  y, además,  $\text{Im}(\partial c) \subset Y$ , se sigue que  $\partial c \in C_{n-1}(Y)$ . Así, se cumple que  $i(\partial c) = \partial c$ . Y finalmente llegamos a que  $[\partial c] \in H_{n-1}(Y)$ , pues se ve fácilmente que  $\partial c$  es un ciclo.

A continuación, veamos una propiedad tomada de [3](p. 73) que usaremos posteriormente, y unos conceptos útiles sacados de [1](p. 45-46).

**Proposición 3.0.4.** *Si  $X$  es arcoconexo e  $Y$  es un subespacio no vacío de  $X$ , entonces  $H_0(X, Y) = 0$ .*

*Demostración.* Probemos que  $[\bar{c}] = 0$ , para todo  $[\bar{c}] \in H_0(X, Y)$ .

Sea  $\bar{c} \in Z_0(X, Y)$ , luego  $c \in C_0(X)$  con  $\text{Im}(\partial c) \subset Y$ . Pero esto último es información irrelevante, pues  $\partial c = 0$ .

Escribimos  $c = \sum_{x \in X} n_x \sigma_x$ , con  $n_x \in \mathbb{Z}$  y  $\sigma_x \in S_0(X)$ , e identificando  $\sigma_x$  con  $x$ , pues hay tantos 0-símplices como puntos de  $X$ ,  $c = \sum_{x \in X} n_x x$ . Como las cadenas son sumas finitas, tomamos

$$c = \sum_{i=1}^m n_i x_i, \quad \text{para ciertos } x_1, \dots, x_m \in X.$$

Sabemos que  $[\bar{c}] = 0$  si, y sólo si, existe  $d \in C_1(X)$  con  $\text{Im}(c - \partial d) \subset Y$ . Al ser  $Y \neq \emptyset$ , escogemos un punto  $x_0$  de  $Y$ , y como  $X$  es arcoconexo, existen caminos que unen el punto  $x_0$  con los puntos  $x_i$ . Esto es, para todo  $i = 1, \dots, m$ , consideramos  $\gamma_i: \Delta^1 \rightarrow X$  camino tal que  $\gamma_i(1, 0) = x_0$  y  $\gamma_i(0, 1) = x_i$ . De manera que

$$\partial \gamma_i = x_i - x_0 \Rightarrow x_i - \partial \gamma_i = x_0 \in Y$$



Si ahora tomamos

$$d = \sum_{i=1}^m n_i \gamma_i \in C_1(X)$$

entonces

$$\partial d = \sum_{i=1}^m n_i \partial(\gamma_i) = \sum_{i=1}^m n_i (x_i - x_0) = \sum_{i=1}^m n_i x_i - \left( \sum_{i=1}^m n_i \right) x_0$$

y, llamando  $n := \sum_{i=1}^m n_i \in \mathbb{Z}$ ,

$$\partial d = c - nx_0 \Rightarrow c - \partial d = nx_0 \in Y \Rightarrow \bar{c} = \bar{\partial} \bar{d} = \overline{\partial d}.$$

Por lo tanto,  $\text{Im}(c - \partial d) \in Y$ , y se sigue el final de la prueba. ■

**Definición 3.0.5.** Sea  $X$  un espacio topológico e  $Y$  un subespacio de  $X$ .

i)  $Y$  es un **retracto** de  $X$  si existe una función continua  $r: X \rightarrow Y$ , llamada **retracción**, tal que  $r(y) = y$ , para todo  $y \in Y$ . Dicho de otra forma,  $r \circ i = \text{id}_Y$ , donde  $i: Y \hookrightarrow X$  es la inclusión del subespacio.

ii)  $Y$  es un **retracto de deformación** de  $X$  si existe una retracción  $r: X \rightarrow Y$  tal que  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ . Evidentemente, todo retracto de deformación es un retracto. Es decir,  $Y$  es un retracto de deformación de  $X$  si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que

1.  $F(x, 0) \in Y$ , para todo  $x \in X$ .
2.  $F(y, 0) = y$ , para todo  $y \in Y$ .
3.  $F(x, 1) = x$ , para todo  $x \in X$ .

iii)  $Y$  es un **retracto fuerte de deformación** de  $X$  si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que

1.  $F(x, 0) \in Y$ , para todo  $x \in X$ .
2.  $F(y, t) = y$ , para todo  $y \in Y$ , para todo  $t \in I$ .
3.  $F(x, 1) = x$ , para todo  $x \in X$ .

Que se cumpla 2 es equivalente a decir que  $i \circ r$  es homotópica a  $\text{id}_X$  relativo a  $Y$  ( $i \circ r \simeq \text{id}_X \text{ rel } Y$ ).

**Ejemplo 3.0.6.** El caso típico de retracto fuerte de deformación es el de la esfera unidad  $\mathbb{S}^{n-1}$  contenida en el espacio  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ . Sea  $i: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  la inclusión y  $r: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  la retracción dada por  $r(x) = x/\|x\|$ . Entonces la homotopía definida por

$$F(x, t) = (1 - t) \frac{x}{\|x\|} + tx$$

cumple 1, 2 y 3 de iii). En efecto,  $F(y, t) = y$  si  $y \in \mathbb{S}^{n-1}$ , pues  $\|y\| = 1$ .

# Capítulo 4

## Aplicaciones

En este capítulo calcularemos explícitamente los grupos de homología de las esferas, pero para ello necesitamos ver antes dos resultados importantes sobre el cálculo de las homologías.

### 4.1. Teorema de subdivisión baricéntrica

Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento, no necesariamente por abiertos, de  $X$  (Véase [4]). En esta situación, denotamos  $\overset{\circ}{\mathcal{U}} = \{\overset{\circ}{U} : \forall U \in \mathcal{U}\}$ .<sup>1</sup>

$$\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J} \quad , \quad \overset{\circ}{\mathcal{U}} = \{\overset{\circ}{U}_j\}_{j \in J}$$

Definimos

$$S_n^{\mathcal{U}}(X) := \{\sigma \in S_n(X) : \text{Im } \sigma \subset U, \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\} \subset S_n(X)$$

y sea  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  el grupo abeliano libre generado por  $S_n^{\mathcal{U}}(X)$  que consiste en las cadenas  $c = \sum_i n_i \sigma_i$ , con  $n_i \in \mathbb{Z}$ , tales que cada  $\sigma_i$  tiene su imagen contenida en algún conjunto del cubrimiento  $\mathcal{U}$ . Es decir, para todo  $i$ , existe  $U_i \in \mathcal{U}$  tal que  $\text{Im } \sigma_i \subset U_i$ . Recordemos que

$$\text{Im } c = \bigcup_i \underbrace{\text{Im } \sigma_i}_{\subset U_i}$$

El operador borde  $\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  lleva  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  a  $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ . O sea, para todo  $c \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$  se tiene que  $\partial c \in C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ . Basta verlo para los generadores:

---

<sup>1</sup> $\overset{\circ}{U}$  representa el interior de  $U$ .

Si  $\sigma \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ , entonces  $\partial\sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial^i \sigma$ , y como  $\text{Im}(\partial^i \sigma) \subset \text{Im} \sigma \subset U$  se ve claramente que  $\text{Im}(\partial\sigma) \subset U$ . Por tanto,  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  es un subcomplejo de cadenas de  $C_n(X)$ .

De esta forma, la inclusión  $i: C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_n(X)$  es una aplicación de cadenas, haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_n^{\mathcal{U}}(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X) \\ i \downarrow & & i \downarrow \\ C_n(X) & \xrightarrow{\partial} & C_{n-1}(X) \end{array}$$

Es por eso que se induce una sucesión de homomorfismos de grupos cociente

$$i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X) \tag{4.1}$$

donde  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$  son los grupos de homología del subcomplejo  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ . Para todo  $[c] \in H_n^{\mathcal{U}}(X)$ , se define  $i_*$  por  $i_*([c]) = [c]_X$ , visto en  $H_n(X)$ .

Diferenciamos  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$  de  $H_n(X)$ , pues en un principio no son iguales:

- $H_n^{\mathcal{U}}(X) = Z_n^{\mathcal{U}}(X)/B_n^{\mathcal{U}}(X) = \{[c] : c \in Z_n^{\mathcal{U}}(X) \Leftrightarrow \partial c = 0\}$ , siendo  $c \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , es decir, cadenas formadas sólo por simplex  $\mathcal{U}$ -pequeños (su imagen está contenida en algún elemento de  $\mathcal{U}$ ).  
Si  $[c_1]$  y  $[c_2]$  son dos elementos de  $H_n^{\mathcal{U}}(X)$ , entonces

$$[c_1] = [c_2] \Leftrightarrow \text{existe } d \in C_{n+1}^{\mathcal{U}}(X) \text{ tal que } c_1 - c_2 = \partial d.$$

- Como ya sabemos,  $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X) = \{[c]_X \equiv [c] : c \in Z_n(X) \Leftrightarrow \partial c = 0\}$ , donde  $c$  es una cadena cualquiera contenida en  $X$ .  
Si  $[c_1]_X$  y  $[c_2]_X$  son dos elementos de  $H_n(X)$ , en este caso

$$[c_1]_X = [c_2]_X \Leftrightarrow \text{existe } d \in C_{n+1}(X) \text{ tal que } c_1 - c_2 = \partial d.$$

A continuación enunciamos el siguiente resultado, conocido como el teorema de subdivisión baricéntrica, cuya demostración excede el nivel de esta memoria. La demostración en sí no es excesivamente complicada y utiliza ideas de las que ya hemos visto en la construcción del operador prisma, pero es muy técnica y bastante larga. Por ello, hemos preferido enunciar el resultado y centrarnos más en las aplicaciones del mismo, que son en sí mucho más interesantes y nos permitirán concluir esta memoria con el cálculo de la homología de las esferas.

**Teorema 4.1.1. (Teorema de subdivisión baricéntrica).**

Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U}$  un cubrimiento de  $X$ . Si  $\overset{\circ}{\mathcal{U}}$  también es un cubrimiento de  $X$ , entonces el homomorfismo  $i_*: H_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_n(X)$ , inducido por la inclusión  $i: C_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_n(X)$ , es un isomorfismo para todo  $n \geq 0$ .

**Observación.** Si  $c \in C_n(X)$ , no es verdad que necesariamente  $c \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , pero sí es cierto que existe un  $\hat{c} \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$  tal que  $[c] = [\hat{c}]$ , es decir,  $c - \hat{c} = \partial d$ .

## 4.2. Sucesión exacta de Mayer-Vietoris

Como aplicación del Teorema de subdivisión baricéntrica vamos a ver la sucesión de Mayer-Vietoris, que será muy útil para el cálculo de grupos de homología. En esta sección y en la siguiente hemos consultado [5].

Consideremos el caso no trivial más sencillo: Sea  $X$  un espacio topológico y  $\mathcal{U} = \{U, V\}$  un cubrimiento de  $X$  cuyos interiores  $\{\overset{\circ}{U}, \overset{\circ}{V}\}$  también cubren el espacio  $X$ .

$$X = U \cup V, \quad \text{con } U \subset X \quad \text{y} \quad V \subset X$$

Definimos

$$S_n(U) = \{\sigma \in S_n(X) : \text{Im } \sigma \subset U\}$$

$$S_n(V) = \{\sigma \in S_n(X) : \text{Im } \sigma \subset V\}$$

luego  $C_n(U)$  y  $C_n(V)$  son dos subcomplejos de cadenas de  $C_n(X)$ . Por otra parte, como  $U \cap V \subset X$  también, tenemos que

$$S_n(U \cap V) = \{\sigma \in S_n(X) : \text{Im } \sigma \subset U \cap V\} = S_n(U) \cap S_n(V)$$

y, por tanto,  $C_n(U \cap V) = C_n(U) \cap C_n(V)$ . Además, por definición de  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , se ve claramente que

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) = C_n(U) + C_n(V) \tag{4.2}$$

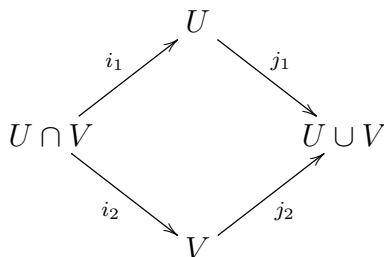
El operador borde  $\partial: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$  lleva  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$  a  $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ , por esa razón,  $\{(C_n^{\mathcal{U}}(X), \partial)\}_{n \geq 0}$  es un complejo de cadenas.

Recordemos que en el Ejemplo 1.3.10 explicábamos la sucesión de Mayer-Vietoris abstracta para un complejo  $\mathcal{C}$  y dos subcomplejos  $\mathcal{C}', \mathcal{C}''$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}' + \mathcal{C}''$  y de ahí se obtenía la sucesión exacta corta

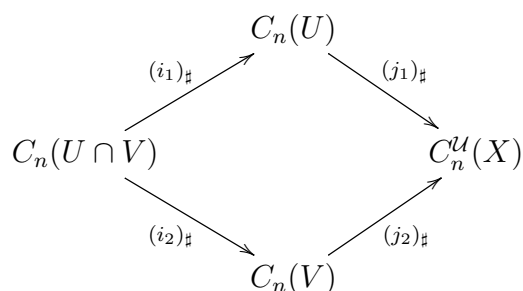
$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{C}' \cap \mathcal{C}'' & \xrightarrow{i} & \mathcal{C}' \oplus \mathcal{C}'' & \xrightarrow{j} & \mathcal{C} \longrightarrow 0 \\ & & c & \longmapsto & (c, c) & & \\ & & & & (c, c') & \longmapsto & c - c' \end{array}$$

En este caso particular, partimos del complejo  $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ , cuyos subcomplejos son  $C_n(U)$  y  $C_n(V)$ , se cumple (4.2) y  $C_n(U) \cap C_n(V) = C_n(U \cap V)$ . Hay

cuatro inclusiones:



las cuales inducen los homomorfismos



y se tiene la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} C_n(U) \oplus C_n(V) \xrightarrow{\psi} C_n^U(X) \longrightarrow 0 \quad (4.3)$$

donde se define  $\varphi(c) = ((i_1)_\# \oplus (i_2)_\#)(c) = ((i_1)_\#(c), (i_2)_\#(c)) = (c, c)$ , para todo  $c \in C_n(U \cap V)$ , y  $\psi(c_1, c_2) = (j_1)_\#(c_1) - (j_2)_\#(c_2) \equiv c_1 - c_2$ , para todo  $(c_1, c_2) \in C_n(U) \oplus C_n(V)$ .

**Teorema 4.2.1. (Mayer-Vietoris).**

En esta situación, existe para todo  $n$  un homomorfismo conector  $\Delta: H_n(X) \rightarrow H_{n-1}(U \cap V)$  tal que la siguiente sucesión es exacta larga

$$\begin{array}{c}
 \cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{i_* \circ \psi_*} H_n(X) \\
 \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(X) \longrightarrow 0 \quad (4.4)
 \end{array}$$

La sucesión (4.4) se llama **sucesión exacta de Mayer-Vietoris** de la terna  $(X, U, V)$ . Sabemos  $i_*$  por (4.1), y las aplicaciones  $\varphi_*$  y  $\psi_*$  son obvias:  $\varphi_*[c] = ((i_1)_* \oplus (i_2)_*)[c] = ((i_1)_*[c], (i_2)_*[c])$  y  $\psi_*([c_1], [c_2]) = (j_1)_*[c_1] - (j_2)_*[c_2]$ .

*Demostración.* Tenemos la sucesión (4.3). Por el Teorema 1.3.7, existe un homomorfismo  $\partial_*: H_n^U \rightarrow H_{n-1}(U \cap V)$  tal que

$$\cdots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi_*} H_n^U(X) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

es una sucesión exacta larga. Aplicando ahora el Teorema de subdivisión baricéntrica, se tiene el isomorfismo

$$H_n^U(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{i_*} \\ \xleftarrow{i_*^{-1}} \end{array} H_n(X)$$

Es decir,

$$\dots \rightarrow H_n(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{i_* \circ \psi_*} H_n(X) \xrightarrow{\partial_* \circ i_*^{-1}} H_{n-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

es exacta, y denotamos  $\partial_* \circ i_*^{-1} = \Delta$ . ■

### 4.3. Homología de las esferas

Como aplicación importante al Teorema de Mayer-Vietoris, calcularemos la homología de las esferas. Recordemos que  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ .

#### 4.3.1. Homología de $\mathbb{S}^0$

$\mathbb{S}^0$  es unión disjunta de componentes arcoconexas.

$$\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\} = \{-1\} \dot{\cup} \{1\}$$

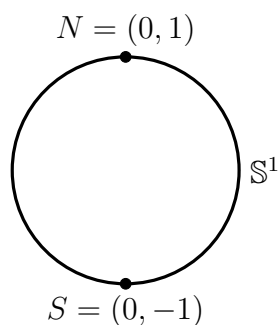
Entonces, utilizando la Proposición 2.1.11 se obtiene

$$H_m(\mathbb{S}^0) \cong H_m(\{-1\}) \oplus H_m(\{1\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

puesto que conocemos la homología de los espacios unipuntuales.

#### 4.3.2. Homología de $\mathbb{S}^1$

En primer lugar, sabemos que  $H_0(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  porque  $\mathbb{S}^1$  es arcoconexo.



Para el resto de casos, usamos la sucesión Mayer-Vietoris de la siguiente forma: Tomamos  $U = \mathbb{S}^1 - \{N\}$  y  $V = \mathbb{S}^1 - \{S\}$  dos conjuntos abiertos tales que  $\mathbb{S}^1 = U \cup V$ . Se tienen los siguientes homeomorfismos, vía la proyección estereográfica:

$$\begin{aligned} U &\approx \mathbb{R} \\ V &\approx \mathbb{R} \\ U \cap V &= \mathbb{S}^1 - \{N, S\} \approx \mathbb{R} - \{1 \text{ punto}\} \end{aligned}$$

Por una parte, al ser  $\mathbb{R}$  contráctil, se tiene

$$H_m(U) \cong H_m(V) \cong H_m(\mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

Por otra parte,  $\mathbb{R} - \{1 \text{ punto}\} \simeq \mathbb{S}^0$ . En general  $\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\} \simeq \mathbb{S}^{n-1}$ . Veámoslo:

$\mathbb{S}^{n-1}$  es un retracto fuerte de deformación de  $\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}$  (en el Ejemplo 3.0.6 se veía para  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ), luego existe una retracción  $r: \mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , dada por  $r(x) = x/\|x\|$ , tal que  $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$  e  $i \circ r \simeq id_{\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}}$ , siendo  $i$  la inclusión de  $\mathbb{S}^{n-1}$  a  $\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}$ . Definíamos la homotopía  $F$  como  $F(x, t) = (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$ . Entonces podemos deducir que los espacios  $\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}$  y  $\mathbb{S}^{n-1}$  son homotópicamente equivalentes, para todo  $n \geq 1$ , y como la homología es un invariante homotópico, se sigue que

$$H_*(\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}) \cong H_*(\mathbb{S}^{n-1})$$

Luego

$$H_m(U \cap V) \cong H_m(\mathbb{R} - \{1 \text{ punto}\}) \cong H_m(\mathbb{S}^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$$

Tenemos la sucesión exacta larga

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_m(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{\psi_*} H_m(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(U \cap V) \\ \xrightarrow{\varphi_*} H_{m-1}(U) \oplus H_{m-1}(V) \xrightarrow{\psi_*} H_{m-1}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \cdots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Para el caso  $m \geq 2$ , sustituyendo arriba se obtiene la sucesión

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_m(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\Delta} 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Esto es,  $\Delta$  es un isomorfismo, por lo que  $H_m(\mathbb{S}^1) = 0$ .

Para el caso  $m = 1$ , sustituyendo en (4.5) se tiene

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_*} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta} 0 \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

Probemos que  $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \varphi_*: H_0(U \cap V) &\longrightarrow H_0(U) \oplus H_0(V) \\ [c]_{U \cap V} &\longmapsto ([c]_U, [c]_V) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_*: H_0(U) \oplus H_0(V) &\longrightarrow H_0(\mathbb{S}^1) \\ ([c_1]_U, [c_2]_V) &\longmapsto [c_1]_{\mathbb{S}^1} - [c_2]_{\mathbb{S}^1} \end{aligned}$$

De (4.6) resulta que  $\Delta$  es inyectivo, entonces afirmamos

$$H_1(\mathbb{S}^1) \cong \text{Im } \Delta = \text{Ker } \varphi_* \cong \mathbb{Z}$$

Si vemos que  $\text{Ker } \varphi_* \cong \mathbb{Z}$ , ya habremos terminado.

$U \cap V$  divide a la circunferencia en dos componentes arcoconexas, cada una de las cuales es contráctil. Por ello, elegimos un generador en cada componente conexa, que serán puntos, por ejemplo,  $P = (1, 0)$  y  $Q = (-1, 0)$  y definimos

$$H_0(U \cap V) = \{p[P]_{U \cap V} + q[Q]_{U \cap V} : p, q \in \mathbb{Z}\}$$

Observemos que

$$[P]_{U \cap V} \neq [Q]_{U \cap V}$$

desde el punto de vista homotópico, pues no hay un camino en  $U \cap V$  que los una, y que

$$[P]_U = [Q]_U \Leftrightarrow \text{existe } \sigma: \Delta^1 \rightarrow U \text{ tal que } Q - P = \partial\sigma$$

Luego  $[P]_U = [Q]_U = [S]_U$  y  $[P]_V = [Q]_V = [N]_V$ . Visto esto,

$$\varphi_*(p[P]_{U \cap V} + q[Q]_{U \cap V}) = (p[P]_U + q[Q]_U, p[P]_V + q[Q]_V) = (p+q)([S]_U, [N]_V)$$

Entonces el núcleo de  $\varphi_*$  es

$$\text{Ker } \varphi_* = \{p[P]_{U \cap V} + q[Q]_{U \cap V} : p+q = 0\} = \{p[P]_{U \cap V} - p[Q]_{U \cap V} : p \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$$

En resumen,

$$H_m(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{si } m = 1, \\ 0 & \text{si } m \geq 2. \end{cases} \quad (4.7)$$

### 4.3.3. Homología de $\mathbb{S}^n$ , $n \geq 2$

Para  $m = 0$ , la Proposición 2.1.12 nos dice que  $H_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ , ya que  $\mathbb{S}^n$  es arcoconexo para todo  $n \geq 1$  (En particular, para  $n \geq 2$ ). De nuevo, para



ver los demás casos, usamos Mayer-Vietoris.  $N$  y  $S$  denotan los polos norte y sur, entonces tomamos

$$U = \mathbb{S}^n - \{N\} \approx \mathbb{R}^n$$

$$V = \mathbb{S}^n - \{S\} \approx \mathbb{R}^n$$

$$U \cap V = \mathbb{S}^n - \{N, S\} \approx \mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\} \supset \mathbb{S}^{n-1}$$

$\mathbb{R}^n$  es contráctil, luego  $H_m(U) \cong H_m(V) \cong H_m(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } m \geq 1. \end{cases}$

$\mathbb{S}^{n-1}$  es un retracto fuerte de deformación de  $\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}$ , entonces sabemos que  $\mathbb{S}^{n-1}$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}$  y así,  $H_m(U \cap V) \cong H_m(\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}) \cong H_m(\mathbb{S}^{n-1})$ , para todo  $m$ .

La sucesión exacta larga queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_m(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_m(U) \oplus H_m(V) \xrightarrow{\psi_*} H_m(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(U \cap V) \\ \xrightarrow{\varphi_*} H_{m-1}(U) \oplus H_{m-1}(V) \xrightarrow{\psi_*} H_{m-1}(\mathbb{S}^n) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

En el caso  $m \geq 2$  esta sucesión se reduce a

$$0 \longrightarrow H_m(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta} H_{m-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

de donde se deduce que  $\Delta$  es un isomorfismo.

**Propiedad 1.**  $H_m(\mathbb{S}^n) \cong H_{m-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ , para todo  $m \geq 2$  y  $n \geq 2$ .

De esta propiedad se obtienen dos consecuencias:

**Consecuencia 1.** Si  $m = n$ , entonces  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ , para todo  $n \geq 1$ .

*Demostración.* Se demuestra por inducción en  $n$ .

Para  $n = 1$  se cumple por (4.7). Supongamos cierto para  $n - 1$  y veamos qué ocurre con  $n \geq 2$ . Por la propiedad tenemos que  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ , y aplicando la hipótesis de inducción,  $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ . ■

**Consecuencia 2.**  $H_m(\mathbb{S}^n) = 0$  si  $m > n$ , para todo  $n \geq 2$ .

*Demostración.* De nuevo, usamos inducción en  $n$ .

Para  $n = 2$ ,  $H_m(\mathbb{S}^2) \cong H_{m-1}(\mathbb{S}^1) = 0$ , porque  $m > 2$ , entonces  $m - 1 > 1$  y por (4.7) se tiene la igualdad a cero. Para  $n = 3$ ,  $H_m(\mathbb{S}^3) \cong H_{m-1}(\mathbb{S}^2) = 0$ , pues si  $m > 3$  entonces  $m - 1 > 2$  y estaríamos en el caso  $n = 2$ . Supongamos cierto para  $n - 1$ . Como  $m > n$  implica  $m - 1 > n - 1$ ,  $H_m(\mathbb{S}^n) \cong H_{m-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$  por la hipótesis de inducción. ■

Observemos que, para  $n = 2$ ,  $H_1(\mathbb{S}^2)$  no lo podemos calcular aún, para  $n = 3$ ,  $H_2(\mathbb{S}^3) \cong H_1(\mathbb{S}^2)$  y volvemos a tener el mismo problema. Igualmente, tampoco sabemos  $H_1(\mathbb{S}^3)$ . De modo que vamos reduciendo los grupos de homología hasta llegar al grupo de homología de la esfera de dimensión uno, cuyo cálculo desconocemos aún para  $n \geq 2$ . Es por eso que para poder concluir el cálculo de la homología de las esferas hace falta ver la siguiente propiedad:

**Propiedad 2.**  $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$ , para todo  $n \geq 2$ .

*Demostración.* La sucesión exacta larga sería:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_1(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_1(U) \oplus H_1(V) \xrightarrow{\psi_*} H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta} H_0(U \cap V) \\ \xrightarrow{\varphi_*} H_0(U) \oplus H_0(V) \xrightarrow{\psi_*} H_0(\mathbb{S}^n) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Como  $n \geq 2$ , se tiene que  $n - 1 \geq 1$  y  $H_0(U \cap V) \cong H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  por ser  $\mathbb{S}^{n-1}$  arcoconexo. Luego visto esto y con los datos obtenidos anteriormente, esta sucesión equivale a

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_*} \mathbb{Z}$$

Como es una sucesión exacta,  $\Delta$  es un homomorfismo inyectivo. Afirmamos que

$$H_1(\mathbb{S}^n) \cong \text{Im } \Delta = \text{Ker } \varphi_* = 0$$

siendo  $\varphi_*: H_0(U \cap V) \rightarrow H_0(U) \oplus H_0(V)$ . Una vez demostrado que  $\text{Ker } \varphi_* = 0$ , se acaba la prueba.

Debido a que  $U \cap V$  sólo tiene una componente conexa, elegimos un punto  $P \in U \cap V$ , obviamente distinto de  $N$  y  $S$ , tal que  $[P]_{U \cap V}$  sea un generador de  $H_0(U \cap V)$ . Es decir,

$$H_0(U \cap V) = \{p[P]_{U \cap V} : p \in \mathbb{Z}\}$$

y definimos  $\varphi_*$  por

$$\varphi_*(p[P]_{U \cap V}) = (p[P]_U, p[P]_V) = p([P]_U, [P]_V)$$

Entonces, como  $[P]_U$  y  $[P]_V$  son generadores de  $H_0(U)$  y  $H_0(V)$ , respectivamente, distintos de cero

$$\text{Ker } \varphi_* = \{p[P]_{U \cap V} : p = 0\} = 0.$$

■

**Consecuencia 3.**  $H_m(\mathbb{S}^n) = 0$  si  $m < n$ , para todo  $n \geq 2$  ( $m \neq 0$ ).

En definitiva, recopilando los datos:

**Teorema 4.3.1. (Homología de las esferas).**

Para  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{S}^n$  tiene los siguientes grupos de homología singular:

$$H_m(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{si } 0 < m < n, \\ \mathbb{Z} & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m > n. \end{cases}$$

**Corolario 4.3.2.** Se verifica:

- i)  $\mathbb{S}^n \approx \mathbb{S}^m \Leftrightarrow n = m$ .
- ii)  $\mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^m \Leftrightarrow n = m$ .
- iii)  $\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m \Leftrightarrow n = m$ .

*Demostración.* Los apartados i) y ii) son consecuencia directa de la invarianza topológica y homotópica de la homología. Para el apartado iii), sabiendo que  $\mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\}$  es homotópico a  $\mathbb{S}^{n-1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^m &\Rightarrow \mathbb{R}^n - \{1 \text{ punto}\} \approx \mathbb{R}^m - \{1 \text{ punto}\} \\ &\Leftrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \approx \mathbb{S}^{m-1} \Leftrightarrow n - 1 = m - 1 \Leftrightarrow n = m \end{aligned}$$

■

## 4.4. El teorema del punto fijo de Brouwer

Tomamos como referencia [2] y [4]. Del cálculo de la homología de las esferas se sigue la siguiente propiedad:

**Proposición 4.4.1.** No existe ninguna retracción del disco  $\mathbb{D}^n$  en su frontera  $\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ , para todo  $n \geq 2$ .

*Demostración.* Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un retracto  $r: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ . Sea  $i: \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{D}^n$  la inclusión. Por ser  $r$  retracto,  $r \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$ , y por las propiedades functoriales, se induce

$$r_* \circ i_* = (r \circ i)_* = (id_{\mathbb{S}^{n-1}})_* = id_{H_m(\mathbb{S}^{n-1})}, \quad \text{para todo } m.$$

Entonces se tiene la siguiente cadena de homología

$$r_* \circ i_* : H_m(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_m(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{r_*} H_m(\mathbb{S}^{n-1})$$

Particularmente, en el caso  $m = n - 1$ ,

$$r_* \circ i_* : H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{r_*} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$$

y para  $n \geq 2$  ( $n - 1 \geq 1$ ), sabemos que  $H_{n-1}(\mathbb{D}^n) = 0$  por ser  $\mathbb{D}^n$  contráctil y, por la Proposición 4.3.1, se obtiene que  $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$ . Por lo tanto, tenemos el diagrama

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{r_*} \mathbb{Z}$$

que cumple que  $r_* \circ i_* = id_{\mathbb{Z}}$  lo cual es absurdo pues un generador de  $\mathbb{Z}$  tiene por imagen de  $i_*$  el cero; y al ser  $r_*$  un homomorfismo  $r_*(0) = 0$  en contradicción con que  $r_* \circ i_* = id_{\mathbb{Z}}$ . ■

La Proposición 4.4.1 es cierta también para  $n = 1$ , pero en este caso la demostración es mucho más sencilla. En efecto, si  $n = 1$  se tiene  $\mathbb{D}^1 = [-1, 1]$  y  $\partial\mathbb{D}^1 = \{-1, 1\}$  es un conjunto discreto formado por dos puntos, y en particular no es conexo. Por lo tanto, las únicas aplicaciones continuas de  $\mathbb{D}^1$  en  $\partial\mathbb{D}^1$  son las dos aplicaciones constantes  $c_{-1}$  y  $c_1$ , y no existe ninguna retracción de  $\mathbb{D}^1$  en su frontera.

Ahora deducimos un teorema de gran importancia para la matemática en general, probado por Brouwer en 1910, y con él cerramos el capítulo.

**Teorema 4.4.2. (Teorema del punto fijo de Brouwer).**

*Toda aplicación continua  $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  tiene algún punto fijo, para todo  $n \geq 1$ .*

*Demostración.* Recordemos que  $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ .

- Caso  $n = 1$ .

Sea  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  continua. Considero ahora la función  $g(x) = f(x) - x$  tal que

$$g(-1) = f(-1) + 1 \geq 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

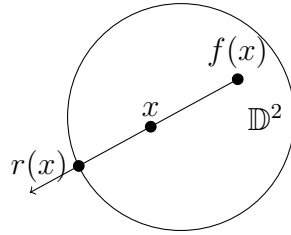
pues  $-1 \leq f(x) \leq 1$ . Por el Teorema de Bolzano<sup>2</sup>, existe un punto  $c \in [-1, 1]$  tal que  $g(c) = f(c) - c = 0$ , es decir,  $f(c) = c$ .

---

<sup>2</sup>Teorema de Bolzano: Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado  $[a, b]$  que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

- Caso  $n \geq 2$ .

Supongamos que  $f: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$  es continua y no tiene puntos fijos, o sea,  $x \neq f(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{D}^n$ . Consideramos la semirrecta  $f(x) + t(x - f(x))$ , para  $t \geq 0$ , que va de  $f(x)$  a  $x$ , de esta forma, proyectamos sobre la esfera  $\mathbb{S}^{n-1} = \partial\mathbb{D}^n$  y a ese punto le llamamos  $r(x)$ . Claramente, si  $x \in \partial\mathbb{D}^n$  original,  $r(x) = x$ . La Figura 4.1 ilustra el caso  $n = 2$ .



**Figura 4.1:** El Teorema de Brouwer

Definimos entonces  $r(x) := (f(x) + t(x - f(x))) \cap \partial\mathbb{D}^n$ . Esto es,

$$\begin{aligned} \|f(x) + t(x - f(x))\|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 + 2t\langle f(x), x - f(x) \rangle + t^2\|x - f(x)\|^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \underbrace{\|x - f(x)\|^2 t^2}_a + \underbrace{2\langle f(x), x - f(x) \rangle t}_b + \underbrace{\|f(x)\|^2 - 1}_c &= 0 \end{aligned}$$

Tenemos  $at^2 + bt + c = 0$ , con  $a = \|x - f(x)\|^2 > 0$ . Estudiemos el signo del discriminante  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac = 4\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - 4\|x - f(x)\|^2(\|f(x)\|^2 - 1) \\ &= \underbrace{4\langle f(x), x - f(x) \rangle^2}_{\geq 0} + \underbrace{4\|x - f(x)\|^2}_{> 0} \underbrace{(1 - \|f(x)\|^2)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Este último caso es mayor o igual a cero pues  $\|f(x)\|^2 \leq 1$ . Por tanto,  $\Delta \geq 0$ . Además, no puede ser  $\Delta = 0$ , porque si esto ocurriera entonces:

- 1)  $\langle f(x), x - f(x) \rangle = 0 = \langle f(x), x \rangle - \|f(x)\|^2$
- 2)  $1 - \|f(x)\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = 1$

De sustituir 2) en 1) resulta  $\langle x, f(x) \rangle = 1$ . Pero usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,  $\langle x, f(x) \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|f(x)\|^2 \leq 1$ . Luego se tiene la igualdad en Cauchy-Schwarz, lo cual implica que  $x = \mu f(x)$  con  $\|x\|^2 = 1 = \mu^2$ , y de aquí se sigue que  $\mu = \pm 1$ . Pero al ser  $x \neq f(x)$ , se toma  $\mu = -1$ , entonces  $x = -f(x)$  y llegamos así a una contradicción, pues no se cumple

que  $1 = \langle x, f(x) \rangle = -\|x\|^2 < 0$ .

En resumen,  $\Delta > 0$ , y las raíces de  $at^2 + bt + c = 0$  son:

$$\begin{aligned} t &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2\langle f(x), x - f(x) \rangle \pm \sqrt{4\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + 4\|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{2\|x - f(x)\|^2} \\ &= \frac{-\langle f(x), x - f(x) \rangle \pm \sqrt{\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2} \end{aligned}$$

Hay dos raíces, que son

$$\begin{aligned} t_-(x) &= \frac{-\langle f(x), x - f(x) \rangle - \sqrt{\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2} \\ t_+(x) &= \frac{-\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 + \|x - f(x)\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|x - f(x)\|^2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

pero  $t_-(x) < 0$  y  $t_+(x) \geq 0$ . Entonces

$$r(x) = f(x) + t_+(x)(x - f(x))$$

con  $t_+(x)$  dada por (4.8). De modo que  $r(x)$  es continua.

Además,  $r$  es una retracción del disco en la esfera

$$r: \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

ya que  $r(x) = x$ , para todo  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ , y acabamos de ver que  $r$  es continua. Pero llegamos a una contradicción, porque la Proposición 4.4.1 nos dice que esto no es posible, y como consecuencia, hemos probado que  $f$  tiene algún punto fijo. ■

# Bibliografía

- [1] Bredon, Glen E., *Topology and geometry*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] Crossley, Martin D., *Essential Topology*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [3] Greenberg, Marvin J., Harper, John R., *Algebraic Topology: A First Course*. The Benjamin, New-York, 1981.
- [4] Hatcher, Allen, *Algebraic topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [5] Lee, John M., *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [6] Lima, Elon L., *Homologia básica*. Projeto Euclides, 2009.
- [7] Massey, William S., *Singular Homology Theory*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [8] Munkres, James R., *Topología* 2ª edición. Prentice-Hall, 2002.
- [9] Wallace, Andrew H., *An Introduction to Algebraic Topology*. Pergamon Press, New York, 1957.