



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

**ESPACIOS DE CURVATURA
CONSTANTE**

César Tomás Martínez

Curso 2013-2014

**Espacios de curvatura constante;
Otra geometría es posible**

César Tomás Martínez

5 de septiembre de 2014

Dirigido por:
Dr. Miguel Ángel Meroño Bayo

Índice general

Introduction	7
Introducción	11
1. Modelos básicos de curvatura constante	15
1.1. Nomenclatura y conceptos básicos	15
1.2. Geodésicas y fórmula de Gauss	18
1.3. Tres modelos de curvatura constante	23
1.3.1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n	23
1.3.2. La esfera \mathbb{S}^n	24
1.3.3. El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n	27
2. Clasificación de las formas espaciales	31
2.1. Campos de Jacobi	32
2.2. Determinando la métrica mediante la curvatura	34
2.3. Espacios recubridores y acciones de grupos	38
2.4. Formas espaciales	41
3. Conclusiones y consecuencias posteriores	47
Bibliografía	51
Índice de símbolos	53
Índice terminológico	55

Introduction

Among all the riemannian manifolds, those with constant curvature are the simplest. So it is not surprising that these were precisely the first ones to appear in a non-euclidean geometric structure searching, that which does not satisfy the Euclid's fifth postulate. The most stable and accepted cosmological studies suggest that the universe has the easiest way possible, which motivates the study of spaces of constant curvature from a geometric and topological point of view.

Since Gauss introduced his idea of curvature in surfaces, there were several mathematicians who tried to formalize a concept of curvature geometrically reasonable in more than two dimensions "surfaces". But it was not until the middle of the nineteenth century when it appeared B. Riemann with his model to generalize surfaces to n dimensions. He considered topological spaces called manifolds locally homeomorphic to open sets in \mathbb{R}^n and with a differentiable structure. Following this path, he used the Gauss curvature definition to give a concept of curvature at a point associated with 2-dimensional planes, what we know as sectional curvature. It was born a theory that extended the concepts used until then in two-dimensional geometry and opened a world of possibilities. It is in the Riemannian manifolds theory where this work is framed.

The main theorem on which this report relates catalogues and classifies all manifolds of constant sectional curvature K with two topological constraints; they have to be complete and connected. These specific manifolds are named space forms, and the German mathematician W. Killing was the first to study them and to get significant results. Killing gave the name 'Clifford-Klein space form problem' to the problem of classifying them.

In his article [7] written for the German researching journal *Mathematische Annalen* in 1891 he presented the riemannian manifolds of arbitrary constant curvature and well-formulated the problem of finding all of them. This caught the attention of many mathematicians and physicists of the time, especially Einstein in pursuing his theory of general relativity, and É.Cartan, in his theory of symmetric spaces.

In 1926, another German H. Hopf presented in [6] another solution that was consistent with the resolution proposed by Killing, and that is why the fundamental theorem of this work is usually known as Killing-Hopf theorem.

If we think of spaces of constant curvature in arbitrary dimension n , the simplest and most widely used in geometry throughout history is the flat Euclidean space (with constant curvature zero). It was the only considered until the early nineteenth century, when Gauss, Lobachevsky and Bolyai began to consider non-Euclidean geometries, by not satisfying the Euclid's fifth postulate. Trying to deny this last postulate, first constructions led to the invention of what is known as hyperbolic space, which far from reaching an absurd got proved that is as consistent as Euclidean model. This hyperbolic space is the first with constant negative curvature. The last case of non-Euclidean geometry, this time with positive constant curvature, would be the spherical or elliptical space, which does not satisfy the fifth postulate in a sense that giving a straight line (geodesic line) and an external point, there is no geodesic without cutting the first one.

Euclidean \mathbb{R}^n , hyperbolic \mathbb{H}^n and spherical \mathbb{S}^n spaces are the three basic models of constant sectional curvature. As couldn't be otherwise, we devote the first chapter of this report to study them in depth. To that end, we will need the help from several tools of Riemannian geometry. We begin the chapter making a little reminder of the main concepts in manifolds theory, so that the reader gets familiar with the basics. In the second section, a brief review of the well-known concept in geometry of geodesic will be exposed, to then jump right into some results catalogued in submanifolds theory. About the three basic models of constant curvature, we'll see that the spherical and hyperbolic can be seen as manifolds embedded in the Euclidean space and in what we'll see is known as the Lorentz-Minkowski space respectively. Therefore, for further study, we will introduce some concepts of submanifolds as the Gauss formula. This determines the curvature of a submanifold by means of the ambient manifold curvature and the second fundamental form tensor, an extension of the well-known concept from surfaces.

In order to finish the first chapter, we use all the results exposed above to make a study of the basic models of spaces of constant curvature. We'll define all three models, with some having more than one interpretation. We'll prove that they have null, positive and negative constant sectional curvature and we'll see how are the geodesic curves in each of the spaces. It will be determined a characterization for geodesic in submanifolds as intersection with 2-dimensional planes, which we will apply, logically, to the sphere and hyperbolic. Some of these checks will be supported with homemade graphic material, in order to clarify or improve its understanding.

In the second chapter we enter fully into the main result that concerns us in this memory, the Killing-Hopf theorem. To its proof, got mainly from [3], we need a lot of notions and results that escape from the ones related to the degree in mathematics, which we must include. There are two mainly tools we'll use; the É. Cartan theorem and covering spaces. The Cartan theorem is not only catalogued in spaces of constant curvature, it has a more general character. What is proved is that, in a certain way the metric of a manifold can be determined by means of

its curvature. More precisely, if we have two manifolds M and \tilde{M} and we consider between them the map $f := \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$, where $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ is a linear isometry, if their curvature tensors R and \tilde{R} are the same, then f is a local isometry. This is a major result for a part of the proof of the theorem that concerns us. Moreover, from the Cartan theorem it can be extract more information regarding the manifolds of constant sectional curvature. A quite remarkable corollary (see corollary 2.2.2) shows that these spaces we are studying have a sufficiently large number of local isometries. From this we can particularly deduce that it is always possible to displace two small triangles located at different positions and verify whether they can be superimposed (in which case they are said to be equal or congruent). This property of ‘free mobility of triangles’ is fundamental in the construction of elementary geometries and was considered as a postulate to be satisfied by non-Euclidean geometries.

To prove the Cartan theorem we need a fairly common tool in Riemannian geometry, Jacobi fields. Thus we’ll begin the second chapter giving the definition and studying some results, so that later we go right into the proof of the Cartan theorem and its consequences.

The third section will be dedicated to the second concept we mentioned that we will need, covering spaces. We will introduce its definition and the definition of an action of a group on a set, paying particular attention to the universal covering (the only simply connected or ‘without holes’) and free and discontinuous actions. All these concepts are included within the area of algebraic topology, but they are transferred to the geometry for our theory purposes providing them with a suitable metric and studying cases when they may have a differential character.

Once we’ve seen all the recipes needed for the proof of the Killing-Hopf theorem, we are able to prove it. We will use the last section of the second chapter to the two main results of this paper, theorem 2.4.2 and proposition 2.4.1. What is extracted from these two statements, as we predicted, is the classification of all space forms, or equivalently, all complete Riemannian manifolds with constant sectional curvature. We will see that such manifolds have the form \tilde{M}/Γ , where $\tilde{M} \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n \text{ or } \mathbb{H}^n\}$ depending on the value of K , and Γ is a subgroup of the group of isometries of the manifold \tilde{M} that acts in a totally discontinuous manner (definition 2.3.5). We will get as an outstanding corollary from the main theorem that *the only simply connected space forms are the three basic spaces of constant curvature models*.

Once we have check that all the space forms can be seen as a cocient of one of the three models studied in chapter 1, the problem of classifying all them has turned into the problem of finding all the subgroups of the isometries which act free and in a totally discontinuous manner on $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$ and \mathbb{H}^n . This problem, with a much strong algebraic character rather than geometric, is a very complex question. Such is its difficulty, that these subgroups have been just clasified for the spherical case with constant positive curvature. This cataloguing was solved during the sixties, and the

interested reader can find an exposition in the John A. Wolf book [14], chapters 4 to 7.

Although the problem is currently unsolved for the euclidean and hyperbolic spaces, there are some classifications of specific space forms in these two spaces. We dedicate the last chapter of this report to present some of them. Thus, for instance, we will see that *the complete connected surfaces of constant Gauss curvature $K = 0$ are the euclidean plane, the cylinder, the tori, the Moebius band and the Klein bottle*, so all flat space forms of two dimensions are classified. Another important result we will prove, this time a positive constant curvature case, asserts that *the only space forms of even dimension and constant curvature $K = 1$ are the sphere S^n and the real projective space \mathbb{P}^n* .

In conclusion, the purpose of this work is, in one hand, to prove the space forms classification theorem, which provides them with the geometric structure of one of the cocients \mathbb{R}^n/Γ , S^n/Γ or \mathbb{H}^n/Γ , and in the other hand, to introduce some of the most significant classifications of some particular space forms.

*César Tomás Martínez,
September 1st, 2014.*

Introducción

De entre todas las variedades riemannianas, aquéllas con curvatura constante son las más simples. Por ello no es de extrañar que fuesen precisamente éstas las primeras que surgieran en la búsqueda de una estructura geométrica no Euclídea, aquélla que no satisface el quinto postulado de Euclides.

Los estudios cosmológicos más estables y aceptados apuntan a que el universo posee la forma más sencilla posible, lo que motiva el estudio de los espacios de curvatura constante desde un punto de vista geométrico y topológico.

Desde que Gauss introdujese su idea de curvatura en superficies, fueron varios los que intentaron formalizar un concepto de curvatura razonable geoméricamente para "superficies" de más de dos dimensiones. Pero no fue hasta mediados del siglo XIX cuando apareció B. Riemann con su modelo para generalizar superficies a n dimensiones. Consideraba espacios topológicos denominados variedades, cumpliendo que fuesen homeomorfos localmente a abiertos de \mathbb{R}^n y que tuviesen una estructura diferenciable. Siguiendo esta línea, aprovechó la definición de curvatura de Gauss para dar un concepto de curvatura en un punto asociado a planos 2-dimensionales, lo que conocemos por curvatura seccional. Nació así una teoría que extendía lo hasta entonces utilizado en geometría de dos dimensiones y abría un mundo de posibilidades. Es en la teoría de variedades riemannianas donde se enmarca este trabajo.

El teorema principal sobre el que versa esta memoria cataloga y clasifica todas las variedades de curvatura seccional constante K con dos restricciones topológicas; completitud y conexión. Estas variedades específicas reciben el nombre de formas espaciales, y fue el matemático alemán W. Killing el primero en estudiarlas y obtener importantes resultados. Killing se refería al problema de clasificar las formas espaciales como 'el problema de las formas espaciales de Clifford-Klein'.

En su artículo [7] escrito en 1891 en la revista de investigación alemana *Mathematische Annalen* presentó las variedades riemannianas de curvatura constante arbitraria y formuló de manera correcta el problema de encontrarlas todas. Esto despertó la atención de muchos matemáticos y físicos de la época, en especial Einstein, en proceso de obtener su teoría de la relatividad general, y É. Cartan, en su teoría de espacios simétricos.

En 1926, el también alemán H. Hopf presentó en [6] otra solución que estaba en

consonancia con la resolución propuesta por Killing, y es por esto que el teorema fundamental de este trabajo suele ser conocido como teorema de Killing-Hopf.

Si pensamos en espacios de curvatura constante de dimensión arbitraria n , el más sencillo y más usado en geometría a lo largo de la historia es el espacio euclídeo, que es llano (con curvatura constante nula). Fue el único considerado hasta principios del siglo XIX, cuando Gauss, Lobachevski y Bolyai comenzaron a considerar geometrías no euclídeas, que no satisficieran el quinto postulado de Euclides. Intentando negar este último postulado, las primeras construcciones llevaron a la invención de lo que se conoce como espacio hiperbólico, el cual lejos de llegar a un absurdo consiguió probarse que era tan consistente como el modelo euclídeo. Este espacio hiperbólico es el primero con curvatura constante negativa.

El último caso de geometría no euclídea, con curvatura constante, esta vez positiva, sería el espacio esférico o elíptico, el cual no satisface el quinto postulado en el sentido de que por un punto exterior a una ‘recta’ (línea geodésica), no existe ninguna geodésica que no corte a la primera.

Los espacios euclídeo \mathbb{R}^n , hiperbólico \mathbb{H}^n y esférico \mathbb{S}^n son los tres modelos básicos de curvatura seccional constante. Como no podía ser de otra manera, dedicamos el primer capítulo de esta memoria a estudiarlos en profundidad, para lo cual necesitaremos la ayuda de varias herramientas de la geometría de Riemann. Comenzaremos el capítulo haciendo un pequeño recordatorio de los principales conceptos de la teoría de variedades, con objeto de que el lector se familiarice con las nociones básicas. En la segunda sección se dará un breve repaso del, tan conocido en geometría, concepto de geodésica, para seguidamente pasar a resultados catalogados en teoría de subvariedades. De los tres modelos básicos de curvatura constante, veremos que el esférico y el hiperbólico pueden ser vistos como variedades inmersas en el espacio euclídeo y en lo que veremos que se conoce como espacio de Lorentz-Minkowski respectivamente. Por ello, para su posterior estudio, introduciremos conceptos de subvariedades como la fórmula de Gauss. Esta determina la curvatura de una subvariedad a partir de la curvatura de la variedad ambiente y del tensor segunda forma fundamental, una extensión del conocido concepto para superficies.

Para terminar el primer capítulo, usamos todo lo expuesto anteriormente para hacer un estudio de los espacios básicos de curvatura constante. Definiremos los tres espacios, y presentaremos tres modelos distintos isométricos para el caso hiperbólico. Demostraremos que tienen curvatura seccional constante nula, positiva y negativa, respectivamente, y veremos cómo son las curvas geodésicas en cada uno de los espacios. Se verá también una caracterización para las geodésicas en la esfera y el hiperbólico como intersección de dichas variedades con planos 2-dimensionales. Algunas de estas comprobaciones serán apoyadas con material gráfico de elaboración propia, en aras de esclarecer o mejorar su entendimiento.

Ya en el segundo capítulo nos adentramos de lleno en el resultado principal que nos concierne en esta memoria, el teorema de Killing-Hopf. Para su demostración, extraída principalmente de [3], necesitamos una gran cantidad de nociones y resultados no estudiados en el grado en matemáticas que debemos incluir. Principalmente son dos las herramientas que usaremos; el teorema de É. Cartan y los espacios recubridores. El teorema de Cartan no se cataloga únicamente dentro de los espacios de curvatura constante, tiene un carácter más general. Lo que demuestra es que, en cierto modo, la curvatura de una variedad determina localmente su métrica. Más concretamente, si tenemos dos variedades riemannianas M y \tilde{M} y consideramos la aplicación entre ellas $f := \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$, donde $i : T_p M \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$ es una isometría lineal, si sus tensores curvatura R y \tilde{R} coinciden, entonces f es una isometría local. Este es un resultado fundamental para una parte de la demostración del teorema que nos atañe. Además, del teorema de Cartan se puede extraer más información referida a las variedades de curvatura seccional constante. Un corolario bastante notable (véase corolario 2.2.2) nos muestra que estos espacios que estamos estudiando tienen un número suficientemente grande de isometrías locales. De esto particularmente se desprende que en los espacios de curvatura constante siempre es posible desplazar dos triángulos pequeños situados en diferentes posiciones y comprobar si se pueden superponer (en cuyo caso se dice que son iguales o congruentes). Esta propiedad de ‘libre desplazamiento de triángulos’ es fundamental en las construcciones de geometrías elementales, tanto que fue considerada como un postulado que deben satisfacer las geometrías no euclídeas.

Para demostrar el teorema de Cartan necesitamos una herramienta de uso bastante frecuente en geometría riemanniana, los campos de Jacobi. Por ello comenzaremos el segundo capítulo dando la definición y estudiando algunos resultados, para posteriormente desarrollar la prueba del teorema de Cartan y sus consecuencias. La tercera sección la dedicaremos al segundo concepto que hemos mencionado que vamos a necesitar, los espacios recubridores. Introduciremos su definición y la de acción de un grupo sobre un conjunto, prestando especial atención al recubridor universal (el único simplemente conexo o ‘sin agujeros’) y a las acciones libres y discontinuas. Todos estos conceptos se engloban dentro del área de topología algebraica, pero se trasladan a la geometría para nuestra teoría dotándolos con un carácter diferencial y una métrica adecuada.

Una vez vistas todas las recetas necesarias para la prueba del teorema de Killing-Hopf, estamos en condiciones de demostrarlo. Emplearemos la última sección del segundo capítulo para exponer y desarrollar los dos resultados principales de este trabajo, el teorema 2.4.2 y la proposición 2.4.1. Lo que se extrae de estos dos enunciados, como vaticinamos, es la clasificación de todas las formas espaciales, o equivalentemente, todas las variedades riemannianas completas y conexas de curvatura seccional constante. Veremos que tales variedades son de la forma \tilde{M}/Γ , donde $\tilde{M} \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n \text{ ó } \mathbb{H}^n\}$ según sea el valor de K , y Γ es un subgrupo del grupo de

isometrías de la variedad \tilde{M} que actúa de forma totalmente discontinua (definición 2.3.5). Del teorema principal que demostraremos, obtendremos como corolario relevante que *las únicas formas espaciales simplemente conexas son los tres modelos básicos de espacios de curvatura constante*.

Una vez comprobado que todas las formas espaciales pueden ser vistas como un cociente de uno de los tres modelos estudiados en el capítulo 1, el problema de clasificarlas se traslada al problema de encontrar todos los subgrupos de las isometrías que actúan totalmente discontinua y libremente sobre \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n y \mathbb{H}^n . Este problema, de carácter mucho más algebraico que geométrico, es una cuestión muy compleja. Tanto es así que tales subgrupos sólo han sido clasificados para el caso esférico de curvatura constante positiva. Dicha catalogación fue resuelta durante los años sesenta, y el lector interesado puede encontrarla en el libro de John A. Wolf [14], capítulos 4-7.

Aunque el problema sigue en la actualidad sin ser resuelto por completo para los espacios euclídeo e hiperbólico, hay algunas clasificaciones de formas espaciales particulares en estos dos espacios. Dedicamos el último capítulo de esta memoria a presentar algunas de ellas. Así, por ejemplo, veremos que *las superficies completas y conexas con curvatura de Gauss constante $K = 0$ son el plano euclídeo, el cilindro, el toro, la banda de Möbius y la botella de Klein*, por lo que todas las formas espaciales llanas en dimensión 2 están clasificadas. Otro resultado importante que probaremos, esta vez en curvatura constante positiva, afirma que *las únicas formas espaciales con curvatura constante $K = 1$ de dimensión par son la esfera \mathbb{S}^n y el espacio proyectivo real \mathbb{P}^n* .

De esta forma, el propósito de este trabajo es, por un lado, demostrar el teorema de clasificación de las formas espaciales, el cual les da estructura geométrica de uno de los cocientes \mathbb{R}^n/Γ , \mathbb{S}^n/Γ ó \mathbb{H}^n/Γ , y por otro, introducir algunas de las clasificaciones de formas espaciales más notables que se conocen hasta la fecha.

*César Tomás Martínez,
1 de Septiembre de 2014.*

Capítulo 1

Modelos básicos de curvatura constante

En este primer capítulo se comenzará haciendo un repaso por los conceptos básicos de geometría de Riemann, centrándonos en la curvatura principalmente, y se fijará la notación que emplearemos a lo largo de todo el texto. Seguidamente presentaremos los tres espacios de curvatura seccional constante, \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n y \mathbb{H}^n , y los estudiaremos a fondo. Comprobaremos que, efectivamente son de curvatura constante y veremos algunas propiedades y cómo son las geodésicas en los tres espacios.

1.1. Nomenclatura y conceptos básicos

Con objeto de entrar en materia y centrarnos en la parte del área de geometría de Riemann que nos compete, solo se verán los conceptos y resultados que utilizaremos a lo largo del escrito. Para una mayor profundización en la teoría de variedades y geometría de Riemann consúltese [12], [3] ó [10].

Una variedad diferenciable M de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff y $2AN$ que es localmente homeomorfo a abiertos de \mathbb{R}^n . Llamaremos carta o sistema de coordenadas en M al par (U, x) donde U es un abierto de la variedad y $x : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo sobre V conjunto abierto.

Sea $p \in M$, dos cartas (U_i, x_i) y (U_j, x_j) que cubren p , $(U_i \cap U_j \neq \emptyset)$ se dicen *compatibles* si la aplicación $x_j \circ x_i^{-1} : x_i(U_i \cap U_j) \rightarrow x_j(U_i \cap U_j)$ es un difeomorfismo.

Además, para que M sea una variedad tiene que tener una *estructura diferenciable*, esto es, una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, x_i)\}_{i \in I}$ compatibles dos a dos, que cubren toda la variedad ($M = \bigcup_{i \in I} U_i$) y que sea maximal, en el sentido de que cualquier carta compatible con todas las cartas de \mathcal{A} está en \mathcal{A} .

Una variedad riemanniana M está provista de una métrica g , y usualmente se denota en conjunto (M, g) . La mayoría de las veces, y salvo que se especifique lo contrario, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representará la métrica de la variedad. Un tensor métrico o métrica no es más que un tensor covariante de tipo $(0,2)$ que lo que hace es asignar a cada punto $p \in M$ un producto escalar $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal, simétrico y definido positivo (si no cumple esta última condición se denominará métrica semi-riemanniana no degenerada). $T_p M$ denota el espacio tangente de M en p , el cual tiene estructura de espacio vectorial.

Se puede probar que si (U, x) es una carta con $p \in U$, entonces $\{\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_n\}$ es una base algebraica de $T_p M$. Aquí ∂_i es una aplicación sobre $\mathcal{C}^\infty(p)$ dada por

$$\partial_i(f)(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial u^i}(x(p)),$$

donde (u^1, \dots, u^n) son las coordenadas de \mathbb{R}^n a través de x .

Así mismo, $\mathfrak{X}(M)$ representará el conjunto de campos de vectores X tangentes a la variedad, el cual a cada punto $p \in M$ le asocia $X_p \in T_p M$.

Con objeto de poder obtener una definición de segunda derivada y derivada covariante extrapolable al caso de n dimensiones en geometría de riemanniana se define el concepto de conexión afín sobre M . Esta es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

denotada por $\nabla_X Y \equiv \nabla(X, Y)$ y que es \mathcal{C}^∞ -lineal sobre el primer campo, \mathbb{R} -lineal sobre el segundo campo, y se cumple $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Relacionando este concepto con la métrica g de la variedad M se obtiene por el teorema fundamental de la geometría riemanniana la conexión de Levi-Civita, la única conexión afín simétrica y compatible con la métrica (véase [3] pag. 55). Resulta especialmente útil la expresión local de esta conexión. Dada una carta (U, x) en la variedad, tenemos que

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

donde las funciones Γ_{ij}^k se conocen con el nombre de coeficientes de la conexión o *Símbolos de Christoffel* con respecto a (U, x) .

Jugando con el hecho de que la conexión de Levi-Civita ∇ es compatible con la métrica, los símbolos de Christoffel se pueden calcular localmente en términos de las componentes de la métrica de la variedad como

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right), \quad (1.1)$$

donde (g^{ij}) denota la matriz inversa de (g_{ij}) . Aquí podemos ver que, debido a la simetría de la métrica, $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

En cuanto a la curvatura de una variedad riemanniana, viene descrita por lo que se conoce como el tensor curvatura de Riemann, el cual se define a partir del operador curvatura.

Definición 1.1.1. *Llamamos operador curvatura de Riemann de M a la aplicación $R: \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y, Z) = \nabla_{[X, Y]}Z + \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z, \quad (1.2)$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y donde $[X, Y]$ representa el corchete de Lie aplicado a los campos X e Y (véase [3] pag. 27).

De esta manera, el tensor curvatura se puede definir como el tensor que, para cada $p \in M$, asigna una aplicación multilinear $R_p: T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ con $R_p(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y, Z), W \rangle_p$. Por simplicidad, y cuando no haya lugar a confusión, denotaremos indistintamente el operador y el tensor curvatura como R y además omitiremos el punto sobre el que actuamos.

En coordenadas locales, las componentes R_{ijk}^l de R , es decir,

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^n R_{ijk}^l \partial_l,$$

se expresan en función de los símbolos de Christoffel de la siguiente manera:

$$R_{ijk}^l = \sum_s \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \sum_s \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l + \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i}. \quad (1.3)$$

Como consecuencia, dado que los símbolos de Christoffel se escriben en términos de la métrica, desde un punto de vista teórico es posible calcular el tensor curvatura de Riemann a partir de las componentes de la métrica.

Una forma de darle un sentido más geométrico a la curvatura es intentar llevarlo al caso de superficies (variedades de 2 dimensiones). Para ello, dado un punto $p \in M$ y dos vectores $v, w \in T_p M$, generan un plano 2 dimensional Π contenido en $T_p M$ no degenerado (en cuyo caso se cumple que $\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2 \neq 0$). Si consideramos todas las geodésicas (véase siguiente sección) que parten de p y tienen su velocidad en el plano Π , lo que obtenemos es una superficie 2-dimensional S_Π en M que hereda la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si se calcula la curvatura de Gauss de S_Π en p obtenemos lo que se conoce como curvatura seccional asociada al plano Π , denotada por $K(\Pi)$. Más formalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 1.1.2. Dado un punto $p \in M$ y un subespacio 2-dimensional Π de $T_p M$ generado por $\{v, w\}$, se define la curvatura seccional $K(\Pi)$ asociada a dicho plano como

$$K(\Pi) \equiv K(v, w) = \frac{R_p(v, w, v, w)}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2} \quad (1.4)$$

Es sencillo probar que el número $K(\Pi)$ no depende de la base escogida, es decir, si tomamos otros dos vectores linealmente independientes \mathbb{R} -combinación lineal de la base original, obtenemos la misma curvatura seccional.

Definición 1.1.3. Una variedad riemanniana se dice que tiene curvatura constante si tiene curvatura seccional K constante. Si la variedad tiene curvatura constante nula se dice que es llana.

Para estas variedades, el tensor curvatura de Riemann adquiere una forma muy sencilla.

Proposición 1.1.1. Si una variedad riemanniana M tiene curvatura constante igual a K , entonces

$$R(X, Y, Z) = K(\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X),$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

1.2. Geodésicas y fórmula de Gauss

En esta sección introduciremos el concepto de geodésica con algunas de sus propiedades y presentaremos la fórmula de Gauss, resultado que caracterizará la curvatura seccional de subvariedades riemannianas a partir de la variedad ambiente. La teoría de subvariedades es muy extensa y en este escrito sólo se presentarán algunos resultados que utilizaremos. Para profundizar en este campo puede verse [12].

Dada una curva diferenciable en la variedad, $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$, denotaremos con $\mathfrak{X}(\alpha)$ los campos de vectores tangentes a la curva α . Así, sea $Z \in \mathfrak{X}(\alpha)$ un campo a lo largo de α , para cada $t \in [0, \infty)$ se tiene que $Z(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Si denotamos por \tilde{X} la restricción a α de un campo $X \in T_p M$, la conexión de Levi-Civita nos permite definir el concepto de derivada covariante a lo largo de α de la siguiente forma:

$$\frac{D\tilde{X}}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)} X.$$

Así, si tomamos $\alpha'(t) \in \mathfrak{X}(\alpha)$ la velocidad de la curva, su derivada covariante $\alpha'' = D\alpha'/dt$ se conoce como la aceleración de la curva α .

Definición 1.2.1. Una curva diferenciable α en M se dice que es geodésica si $\alpha'' = 0$

Nota 1.2.1. Una geodésica no es la imagen de la curva en el espacio, depende de la forma que se recorra. Así pues, que una curva sea geodésica depende tanto de su forma como de su parametrización.

En términos locales, una curva $\alpha(t)$ será geodésica si satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\alpha^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt} = 0, \quad (1.5)$$

para $1 \leq k \leq n$. Todas estas ecuaciones juntas determinan un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Por lo tanto, en virtud del teorema de existencia y unicidad para estos sistemas de ecuaciones, podemos asegurar que se verifica el siguiente resultado.

Teorema 1.2.1. Sea M una variedad riemanniana. Dado un punto $p \in M$ y un vector tangente $v \in T_pM$, existe una única geodésica maximal $\gamma_v : I_v \rightarrow M$, con $0 \in I_v$, tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$.

Nota 1.2.2. En la anterior definición, que γ_v sea maximal significa que siempre que tengamos otra geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ satisfaciendo las mismas condiciones, entonces $I \subset I_v$ y son iguales sobre I .

Pasamos ahora a ver algunas nociones y resultados de teoría de subvariedades que utilizaremos a lo largo de este capítulo. Para una explicación más detallada de este campo consúltese [12] (pag 97-106).

Definición 1.2.2. Sea \overline{M} una variedad riemanniana. Un subconjunto $M \subset \overline{M}$ será una subvariedad riemanniana de \overline{M} si la inclusión $j : M \hookrightarrow \overline{M}$ es una inmersión isométrica. Se llamará codimensión de la subvariedad al número $\dim \overline{M} - \dim M$.

Cuando estemos tratando subvariedades, denotaremos con M la subvariedad incluida en la variedad \overline{M} , es decir, tenemos $M \subset \overline{M}$. Así pues, se tiene una descomposición en subespacios ortogonales dada por $T_p\overline{M} = T_pM + T_pM^\perp$, lo que nos da que para cada vector $x = \tan x + \text{nor } x$.

Globalizando esta notación, tenemos la correspondiente descomposición para campos de vectores en \overline{M} , $X = \tan X + \text{nor } X$ donde para cada $p \in M$, $\tan X_p \in T_pM$ y $\text{nor } X_p \in T_pM^\perp$.

Representaremos con $\overline{\mathfrak{X}}(M)$ el conjunto de campos de vectores que son tangentes a \overline{M} restringidos a los puntos de M . Así, teniendo en cuenta lo anterior,

$$\tan : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \quad \text{y} \quad \text{nor} : \overline{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$$

Siguiendo con la notación, si $\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{X}$ es la conexión de Levi-Civita en la variedad \bar{M} y la restringimos a M , obtenemos una buena definición de conexión inducida

$$\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \rightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M).$$

Aunque no lo demostraremos, es sencillo ver que:

Lema 1.2.1. *Sea $M \subset \bar{M}$ subvariedad. Si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, entonces*

$$\nabla_X Y = \tan \bar{\nabla}_X Y,$$

donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de M .

Tenemos por tanto que si el segundo campo sobre el que actuamos es tangente a M , podemos ver la conexión en M como una proyección de la conexión en \bar{M} sobre $T_p M$ para cada $p \in M$.

Análogamente a esta última definición, pasamos a presentar lo que se conoce como *segunda forma fundamental*.

Definición 1.2.3. *La función $II(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por*

$$II(X, Y) = \text{nor } \bar{\nabla}_X Y,$$

bilineal y simétrica, se denomina tensor segunda forma fundamental de $M \subset \bar{M}$.

De esta forma, en cada punto $p \in M$, II determina una función \mathbb{R} -bilineal

$$\begin{aligned} II : T_p M \times T_p M &\longrightarrow T_p M^\perp \\ (v, w) &\longmapsto II(v, w) \end{aligned}$$

Podemos resumir 1.2.1 y 1.2.3 de la siguiente forma:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y), \quad \text{con } X, Y \in \mathfrak{X}(M), \quad (1.6)$$

donde el primer y segundo sumando son tangente y normal a M respectivamente. Esta descomposición da pie a un resultado fundamental de curvatura conocido como *fórmula de Gauss*.

Teorema 1.2.2 (Fórmula de Gauss). *Sea M una subvariedad semi-riemanniana de \bar{M} , con R y \bar{R} sus tensores curvatura y II el tensor segunda forma fundamental. Para campos de vectores V, W, X, Y tangentes a M se cumple,*

$$\langle R_{VW} X, Y \rangle = \langle \bar{R}_{VW} X, Y \rangle + \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle - \langle II(V, Y), II(W, X) \rangle. \quad (1.7)$$

Demostración. Suponemos que $[V, W] = 0$. Por (1.2) sabemos que

$$\bar{R}(V, W, X, Y) = \langle \bar{R}_{VW}X, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_W \bar{\nabla}_V X, Y \rangle - \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X, Y \rangle = (W, V) - (V, W),$$

donde por la descomposición (1.6) en suma ortogonal

$$(V, W) = \langle \bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W X, Y \rangle = \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle + \langle \bar{\nabla}_V (II(W, X), Y) \rangle.$$

Si volvemos a descomponer la primera conexión, como $Y \perp M$, el primer sumando quedaría $\langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle$. El segundo sumando puede escribirse como

$$V \langle II(W, X), Y \rangle - \langle II(W, X), \bar{\nabla}_V Y \rangle.$$

Dado que $II(W, X)$ es normal a M , esta expresión se reduce a

$$- \langle II(W, X), \text{nor } \bar{\nabla}_V Y \rangle = - \langle II(W, X), II(V, Y) \rangle.$$

Agrupando todas estas observaciones tenemos que

$$(V, W) = \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle - \langle II(W, X), II(V, Y) \rangle.$$

Por lo tanto

$$(W, V) - (V, W) = \langle \nabla_W \nabla_V X, Y \rangle - \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle + \langle II(W, X), II(V, Y) \rangle - \langle II(V, X), II(W, Y) \rangle$$

de donde teniendo en cuenta que $\langle \nabla_W \nabla_V X, Y \rangle - \langle \nabla_V \nabla_W X, Y \rangle = \langle R_{VW}X, Y \rangle$, (pues $[V, W] = 0$), se obtiene el resultado. □

Puesto que este resultado puede aplicarse a vectores tangentes a M en un punto, la fórmula de Gauss aplicada a la ecuación (1.4) de la curvatura seccional nos da una ecuación que utilizaremos bastante en este capítulo. Esta también se conoce como fórmula de Gauss de la curvatura seccional.

Corolario 1.2.1. *Si v, w son vectores linealmente independientes base de un plano Π tangente a M no degenerado, entonces*

$$K(v, w) = \bar{K}(v, w) + \frac{\langle II(v, v), II(w, w) \rangle - \langle II(v, w), II(v, w) \rangle}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}. \quad (1.8)$$

Para terminar esta sección, vamos a presentar un par de resultados que se basan en lo visto anteriormente para caracterizar las geodésicas en subvariedades.

La descomposición ortogonal dada en (1.6) se puede adaptar a campos a lo largo de una curva de la siguiente manera:

Proposición 1.2.1. *Sea $\alpha(s)$ una curva en $M \subset \bar{M}$. Si $Y \in \mathfrak{X}(\alpha)$, entonces*

$$\dot{Y} = Y' + II(\alpha', Y),$$

donde $\dot{Y} = \bar{D}Y/ds$ y $Y' = DY/ds$.

Demostración. Si tomamos un sistema de coordenadas (U, x) de M y escribimos $Y = \sum Y^i \partial x_i$, con respecto a la geometría de \bar{M} obtenemos derivando que

$$\dot{Y} = \sum \frac{dY^i}{ds} \partial x_i + \sum Y^i \bar{\nabla}_{\alpha'}(\partial x_i).$$

Pero $\bar{\nabla}_{\alpha'}(\partial x_i) = \nabla_{\alpha'}(\partial x_i) + II(\alpha', \partial x_i)$ por la conocida descomposición. Por último, teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} Y' &= \nabla_{\alpha'}(\sum Y^i \partial x_i) = \sum \nabla_{\alpha'}(Y^i \partial x_i) \\ &= \sum \alpha'(Y^i) \partial x_i + Y^i \nabla_{\alpha'}(\partial x_i) = \sum \frac{dY^i}{ds} + \sum Y^i \nabla_{\alpha'}(\partial x_i), \end{aligned}$$

se obtiene directamente el resultado □

Corolario 1.2.2. *Si α es una curva en $M \subset \bar{M}$, entonces*

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + II(\alpha', \alpha'), \quad (1.9)$$

donde $\ddot{\alpha}$ es la aceleración de α en \bar{M} , y α'' su aceleración en M .

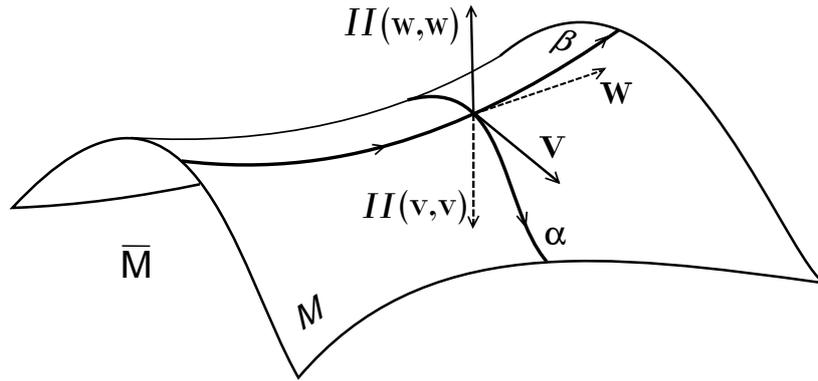


Figura 1.1

Corolario 1.2.3. *Una curva $\alpha \in M \subset \bar{M}$ es una geodésica de M si, y solo si, su aceleración vista en \bar{M} es normal a M en todo punto.*

Esto es obvio, pues por el corolario anterior, que $\ddot{\alpha}$ sea normal a M implica que la aceleración de α en M es cero ($\alpha'' = 0$).

Ya tenemos pues todas las recetas necesarias para estudiar los tres modelos básicos de curvatura constante, que era el objetivo de este capítulo.

1.3. Tres modelos de curvatura constante

En esta sección presentaremos los tres modelos básicos de curvatura seccional constante. Daremos sus definiciones, comprobaremos cuál es su curvatura seccional y veremos cómo son las curvas geodésicas haciendo uso de lo visto anteriormente en este capítulo. Todos ellos son además completos y simplemente conexos.

1.3.1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n

Comenzamos viendo el caso más sencillo de espacio de curvatura constante. Es el primero que se consideró y en cierto modo es el más importante, pues los otros modelos que veremos se pueden ver como subvariedades contenidas en este. El espacio euclídeo n -dimensional, denotado usualmente en otros libros por \mathbb{E}^n , no es más que \mathbb{R}^n provisto de la métrica

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2, \quad (1.10)$$

que es básicamente el producto escalar usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Veamos entonces que $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene curvatura seccional constante.

Proposición 1.3.1. *El espacio euclídeo \mathbb{R}^n provisto de la métrica euclídea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tiene curvatura seccional constante $K = 0$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que las componentes de la métrica euclídea son

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y usando la fórmula (1.1) concluimos que $\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall i, j, k \in 1, 2, \dots, n$. Entonces por la expresión en coordenadas de la curvatura (1.3) se tienen que $R = 0$, y puesto que la curvatura seccional determina la curvatura de la superficie, obtenemos fácilmente que $K = 0$, como queríamos probar. \square

Este resultado era de esperar, ya que, como veremos en el siguiente resultado, las geodésicas en este espacio que parten de un punto $p \in M$ con velocidad contenida

en un plano 2-dimensional Π son rectas. Por tanto la superficie que generan es el propio plano en \mathbb{R}^n , que tiene curvatura cero.

Comprobemos ahora cómo son las geodésicas.

Proposición 1.3.2. *Las curvas geodésicas en el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ son las rectas.*

Demostración. Dado un punto $p = (p^1, p^2, \dots, p^n) \in M$ y un vector $v = (v^1, v^2, \dots, v^n) \in T_p M$ queremos ver cómo son las geodésicas que parten de p con velocidad v . Como hemos visto en la demostración anterior que $\Gamma_{ij}^k = 0$, el sistema de ecuaciones de las geodésicas (1.5) se nos simplifica hasta el punto de quedarnos

$$\frac{d^2 \alpha^k}{dt^2} = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Así, integrando dos veces obtenemos que $\alpha^k(t) = p^k + tv^k$, quedando la ecuación de la geodésica

$$\alpha(t) = p + tv,$$

que es la recta que pasa por p con velocidad v como queríamos demostrar. \square

1.3.2. La esfera \mathbb{S}^n

El siguiente modelo que presentamos de curvatura constante es el espacio esférico. La forma de ver este espacio es considerar \mathbb{R}^{n+1} con la métrica euclídea usual y ver \mathbb{S}^n como la variedad inmersa que cumple:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$$

donde $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

La métrica en este espacio será por tanto la inducida por el euclídeo $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Una propiedad topológica que tiene la esfera, y que no poseen los otros dos espacios es la compacidad. Esta sencilla propiedad es la que nos permitirá resolver el teorema de clasificación en el siguiente capítulo para variedades de curvatura positiva.

Como era de suponer por la definición que hemos dado, usaremos los resultados vistos de teoría de subvariedades para comprobar las propiedades de este espacio.

Proposición 1.3.3. *La esfera \mathbb{S}^n para $n \geq 2$ con la métrica inducida por $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ tiene curvatura seccional constante $K = 1$.*

Demostración. Se puede ver en cualquiera de los libros de referencia o comprobar el lector que la conexión de Levi-Civita $\bar{\nabla}$ de \mathbb{R}^{n+1} viene dada por

$$\bar{\nabla}_X Y = \sum_{i=1}^{n+1} XY^i \partial x_i,$$

campo que evaluado en un punto p sería

$$(\bar{\nabla}_X Y)(p) = \sum_{i=1}^{n+1} dY^i(X_p) \partial x_i.$$

Consideremos ahora el campo de vectores posición $P = \sum_{i=1}^{n+1} u^i \partial x_i$ en $T_p \mathbb{R}^{n+1}$. Este campo es normal a la esfera en cada punto, unitario (pues estamos trabajando con $\mathbb{S}^n(1)$) y notemos que $\bar{\nabla}_X P = \sum_{i=1}^{n+1} X u^i \partial x_i = X$ para todo campo X .

Sólo nos queda ver cómo es el tensor segunda forma fundamental en esta subvariedad. Para ello, si $V, W \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$ y consideramos las relaciones

$$\begin{aligned} \langle II(V, W), P \rangle &= \langle \text{nor } \bar{\nabla}_V W, P \rangle = \langle \bar{\nabla}_V W, P \rangle \\ &= -\langle W, \bar{\nabla}_V P \rangle = -\langle W, V \rangle = -\langle V, W \rangle, \end{aligned}$$

y puesto que P es un campo unitario, deducimos de lo anterior que

$$II(V, W) = -\langle V, W \rangle P.$$

Usando todo esto en la ecuación (1.8) de curvatura seccional en subvariedades y teniendo en cuenta que \mathbb{R}^{n+1} es llano, se obtiene directamente el resultado que estábamos buscando. \square

Pasaremos ahora a ver cómo son las geodésicas en la esfera. Comprobaremos que, tanto en el caso de la esfera como en el hiperbólico, estas están caracterizadas como la curva obtenida por la intersección de planos que pasan por el origen con cada una de las dos subvariedades. En la figura 1.2 puede verse una representación gráfica de una circunferencia o círculo máximo que, como vemos en la siguiente proposición, son las geodésicas de la esfera n -dimensional.

Proposición 1.3.4. *Las curvas geodésicas en la esfera \mathbb{S}^n son las circunferencias máximas parametrizadas proporcionalmente al arco.*

Demostración. Para una curva $\alpha(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ denotemos como siempre su velocidad y aceleración como $\dot{\alpha} = d\alpha/dt$ y $\ddot{\alpha} = d^2\alpha/dt^2$.

Dado un punto $p \in \mathbb{S}^n$ y un vector $v \in T_p \mathbb{S}^n$, la circunferencia máxima que parte de p con velocidad v es fruto de la intersección del plano Π que contiene a v y pasa por el origen de \mathbb{R}^{n+1} con la esfera. Comprobemos que efectivamente estas son las geodésicas que estamos buscando.

Puesto que es una curva plana (contenida en un plano) y p.p.a ($\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = 1$) tenemos que $\ddot{\alpha} \in \Pi$ y que $\dot{\alpha} \perp \ddot{\alpha}$ respectivamente. Además por la definición del plano, el campo posición P_α sobre la curva está en Π y es tangente a la velocidad, luego es colineal con $\ddot{\alpha}$. Por tanto $\ddot{\alpha}$ es normal a \mathbb{S}^n en todo punto, y en virtud del corolario 1.2.3 tenemos que las circunferencias máximas son geodésicas. Por la unicidad de las geodésicas en un punto y una dirección concluimos que son las únicas.

Para ver que toda geodésica no constante γ se puede obtener así, sea Π el plano que pasa por el origen y que contiene a γ' . Entonces una reparametrización por el arco adecuada de $\Pi \cap \mathbb{S}^n$ nos da que $\alpha'(0) = \gamma'(0)$, y por la unicidad de las geodésicas, $\gamma = \alpha$. \square

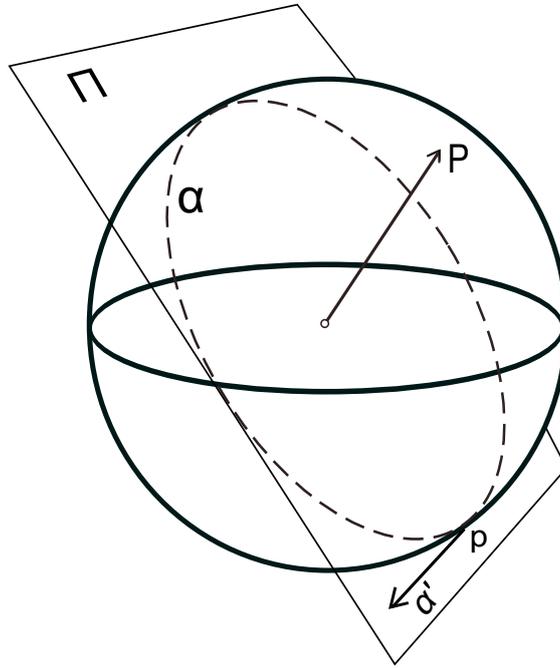


Figura 1.2

Observación 1.3.1. *En particular, toda geodésica de \mathbb{S}^n es periódica de periodo 2π . Fijando un punto p en la esfera, para cada vector unitario $v \in T_p\mathbb{S}^n$, la aplicación \exp_p envuelve la línea radial por v alrededor del círculo máximo del cual es tangente v . Explícitamente se tiene la ecuación*

$$\gamma_{p,v}(t) = \exp_p(tv) = \cos(t)p + \operatorname{sen}(t)v.$$

Se puede comprobar que esta expresión satisface la ecuación 1.5 de las geodésicas. Además, démonos cuenta de que \exp_p es un difeomorfismo de la bola $B_p(\pi) \subset T_p\mathbb{S}^n$ sobre $\mathbb{S}^n \setminus \{-p\}$, por lo que este último es un entorno normal de p .

1.3.3. El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n

Pasamos ahora a estudiar el tercer y último ejemplo de espacio de curvatura seccional constante. Surgió en la historia de la geometría de variedades por la inquietud de encontrar un modelo de curvatura constante negativa, siguiendo la analogía con la esfera. Actualmente tiene numerosas aplicaciones en cosmología y otros campos científicos.

Aquí presentamos tres modelos distintos e isométricos para el espacio hiperbólico.

Definición 1.3.1. *El espacio hiperbólico \mathbb{H}^n puede verse de las siguientes formas:*

1. (Hiperboloide) Cualquiera de las hojas del hiperboloide en \mathbb{R}_1^{n+1} dadas por

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle x, x \rangle = -1\}$$

con la métrica inducida por la del espacio de Lorentz-Minkowski.

2. (Bola de Poincaré) La bola unidad en \mathbb{R}^n con la métrica dada en coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) por

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)$$

3. (Semi espacio de Poincaré) El semi espacio superior de \mathbb{R}^n en coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) con $x^n > 0$. La métrica viene dada por

$$ds^2 = \frac{1}{x_n^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2)$$

Nota 1.3.1. *El espacio de Lorentz-Minkowski es \mathbb{R}_1^{n+1} con la métrica de índice 1 dada por $ds^2 = -dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_{n+1}^2$. Dependiendo de la fuente que se consulte, el signo '-' irá sobre la primera coordenada o sobre la última.*

Aunque no veremos aquí las isometrías explícitas, la prueba del siguiente resultado puede encontrarse en [10] pag. 38-40.

Proposición 1.3.5. *Los tres modelos de espacio hiperbólico definidos en 1.3.1 son isométricos.*

En esta sección, las propiedades que demostraremos para el espacio hiperbólico se harán únicamente para el modelo del hiperboloide dado en 1. Bastaría aplicar las isometrías referenciadas en la anterior proposición para deducir los resultados en los demás modelos.

En aras de poder resolver de forma sencilla el problema de conocer la curvatura del espacio hiperbólico, introduciremos unos pocos conceptos que se catalogan dentro de lo ya visto de teoría de subvariedades. Más concretamente en hipersuperficies ó subvariedades de codimensión 1, que es el caso de \mathbb{S}^n y \mathbb{H}^n . Puede consultarse [12] pag. 106-113 para un estudio más exhaustivo de los resultados que a continuación se presentan.

Definición 1.3.2. *Sea U un campo normal y unitario sobre una hipersuperficie $M \subset \bar{M}$. El campo tensorial S de tipo $(1,1)$ sobre M tal que*

$$\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle \quad \text{para todo } V, W \in \mathfrak{X}(M)$$

se denomina operador forma de M asociado a U .

Observación 1.3.2. *Por la definición de arriba, puntualmente el operador forma determina un operador lineal $S : T_p M \rightarrow T_p M$ para cada punto $p \in M$.*

Lema 1.3.1. *Si S es el operador forma asociado a U , entonces $S(v) = -\bar{\nabla}_v U$.*

Demostración. Como $\langle U, U \rangle$ es constante, si derivamos en la dirección de cualquier campo V , $\langle \bar{\nabla}_V U, U \rangle = 0$. Por lo tanto $\bar{\nabla}_V U$ es tangente a M , para todo $V \in \mathfrak{X}(M)$. Pero si $W \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$\langle S(V), W \rangle = \langle II(V, W), U \rangle = \langle \bar{\nabla}_V W, U \rangle = -\langle \bar{\nabla}_V U, W \rangle,$$

de donde se deduce que $S(V) = -\bar{\nabla}_V U$. □

En este caso particular de subvariedades, la fórmula de Gauss toma la siguiente forma.

Corolario 1.3.1. *Sea S el operador forma de una hipersuperficie semi-Riemanniana $M \subset \bar{M}$. Si v, w son vectores linealmente independientes que generan un plano Π tangente a M no degenerado, entonces*

$$K(v, w) = \bar{K}(v, w) + \epsilon \frac{\langle Sv, v \rangle \langle Sw, w \rangle - \langle Sv, w \rangle^2}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}. \quad (1.11)$$

Nota 1.3.2. *En la anterior expresión ϵ denota el signo de $M \subset \bar{M}$. Este tomará los valores*

$$\epsilon = \begin{cases} +1 & \text{si } \langle z, z \rangle > 0 \text{ para todo vector normal } z \neq 0, \\ -1 & \text{si } \langle z, z \rangle < 0 \text{ para todo vector normal } z \neq 0 \end{cases}$$

En los espacios que estamos viendo, \mathbb{S}^n tiene signo 1 mientras que $\epsilon = -1$ en \mathbb{H}^n .

Estamos ya en disposición de ver cuál es la curvatura seccional de este último espacio.

Proposición 1.3.6. *El hiperboloide \mathbb{H}^n tiene curvatura constante $K = -1$.*

Demostración. Consideremos el campo posición unitario $P = \sum_{i=1}^{n+1} u^i \partial x_i$ en $T_p \mathbb{R}_1^{n+1}$. Por definición se tiene que $\langle P, P \rangle = -1$, por lo que es de carácter temporal, y es normal al hiperboloide. Utilizando lo que se vio en la prueba para la esfera, si $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{H}^n)$, que es un campo espacial ($\langle V, V \rangle > 0$), se cumple que

$$S(V) = -\bar{\nabla}_V P = -V.$$

Aplicando esto a la fórmula de Gauss del corolario 1.3.1 y teniendo en cuenta que \mathbb{R}_1^{n+1} es llano y que en este caso $\epsilon = -1$, se obtiene lo que buscábamos. \square

Pasemos por último a ver cómo son las geodésicas en este tercer espacio.

Proposición 1.3.7. *Las curvas geodésicas en el espacio hiperbólico \mathbb{H}^n son las hipérbolas p.p.a. obtenidas por la intersección con el hiperboloide de planos que pasan por el origen de \mathbb{R}_1^{n+1} .*

Demostración. Tomemos un punto $p \in \mathbb{H}^n$ y un vector $v \in T_p \mathbb{H}^n$. Al igual que hicimos en el caso de la esfera, consideremos el plano Π que contiene a p , el origen, y a v . Si hacemos la intersección de Π con el hiperboloide obtenemos una curva plana γ con $\ddot{\gamma} \in \Pi$, que por ser p.p.a. $\dot{\gamma} \perp \ddot{\gamma}$. Como el campo posición P_γ sobre la curva está en Π y es tangente a la velocidad, P_γ es colineal con $\ddot{\gamma}$. Por tanto $\ddot{\gamma}$ es normal a \mathbb{H}^n en todo punto, y de nuevo por el corolario 1.2.3 tenemos que este tipo de curvas son geodésicas. Por la unicidad de las geodésicas en un punto y una dirección concluimos que son las únicas y con esto termina la demostración. \square

Observación 1.3.3. *Se puede probar que las curvas descritas anteriormente vienen dadas por la expresión $\gamma_{p,v}(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v$. Para verlo basta con sustituir en la ecuación de las geodésicas 1.5 y ver que se cumple.*

En la figura 1.3 puede verse una representación aproximada de una curva geodésica en el modelo del hiperboloide, obtenida como se ha afirmado en la demostración anterior.

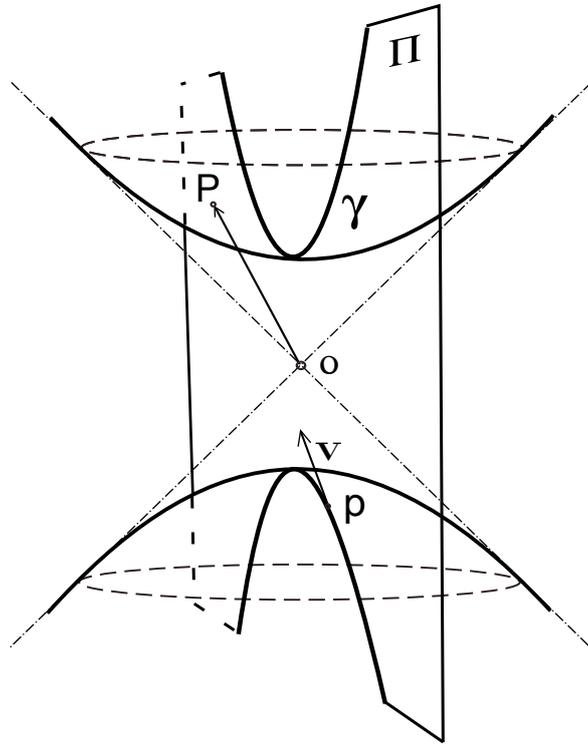


Figura 1.3

Capítulo 2

Clasificación de las formas espaciales

Hasta ahora hemos visto los tres ejemplos básicos de espacios de curvatura constante. De entre todas las variedades riemannianas o semi-riemannianas, las que tienen curvatura seccional constante son las más simples.

Veremos que estos espacios tienen un número suficientemente grande de isometrías locales, lo que significa que podemos trasladar las propiedades geométricas que se cumplan en un punto a cualquier otro punto del espacio. Esto se debe a los resultados presentados por Cartan en su libro *Lecciones de la Geometría de los espacios de Riemann* (véase [4]), el cual fue capaz de determinar en cierto modo la métrica de una variedad a partir de su curvatura.

Además, no es difícil probar que cuando multiplicamos una métrica riemanniana por una constante positiva c , la curvatura seccional de la variedad queda multiplicada por $1/c$ (puede verse con la propia definición de curvatura seccional 1.4). Por tanto podemos suponer que el valor de la curvatura seccional constante de una variedad riemanniana es 1, 0 ó -1, pues cualquier otra siempre podemos reducirla o hacerla equivalente a uno de estos tres casos.

El resultado fundamental que veremos en este capítulo y que es el eje central de este trabajo dará forma topológica y geométrica a todas las variedades de curvatura constante. Para poderlo demostrar introduciremos antes algunas nociones y resultados básicos de espacios recubridores.

Nuestro primer objetivo será demostrar el teorema de Cartan ya mencionado, para lo cual necesitaremos una herramienta de uso recurrente en la geometría diferencial.

2.1. Campos de Jacobi

Para el estudio de los campos de Jacobi introduciremos su definición en primer lugar, y veremos algunas propiedades y consecuencias que se emplearán en demostraciones posteriores.

Definición 2.1.1. Sea M una variedad y $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ una geodésica en M . Dado $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ un campo de vectores a lo largo de γ , se dice que J es un campo de Jacobi a lo largo de γ si cumple que

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)) = 0. \quad (2.1)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de Jacobi.

Observación 2.1.1. Consideremos $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$ una base ortonormal de campos paralelos a lo largo de γ . Dado $J \in \mathfrak{X}(\gamma)$ un campo a lo largo de γ se tiene que

$$J(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) e_i(t),$$

y al ser los e_i paralelos la segunda derivada queda,

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) = \sum_{i=1}^n y_i''(t) e_i(t).$$

Como $R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)) \in \mathfrak{X}(\gamma)$, si denotamos $a_{ij}(t) = \langle R(\gamma'(t), e_i(t), \gamma'(t)), e_j(t) \rangle$, tenemos la siguiente expresión:

$$R(\gamma'(t), J(t), \gamma'(t)) = \sum_{i,j=1}^n y_i(t) a_{ij}(t) e_j(t).$$

Por tanto, la ecuación de Jacobi es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_j''(t) + \sum_{i=1}^n a_{ij}(t) y_i(t) = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

que se trata de un sistema lineal de segundo orden.

El siguiente ejemplo tiene especial importancia, pues caracteriza los campos de Jacobi en variedades de curvatura seccional constante. En ocasiones, con objeto de simplificar la escritura denotaremos $\frac{DJ}{dt}$ como J' .

Ejemplo 2.1.1. (Campos de Jacobi en una variedad de curvatura seccional constante). Sea M una variedad riemanniana con curvatura seccional constante K , $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ una geodésica p.p.a., y tomemos $J \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de Jacobi normal a γ' . Puesto que la curvatura seccional de M es constante, por 1.1.1 tenemos que

$$\langle R(X, Y, W), Z \rangle = K[\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle],$$

para todo $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$. Como consecuencia, dado $T \in \mathfrak{X}(M)$ un campo arbitrario, se tiene

$$\langle R(\gamma', J, \gamma'), T \rangle = K[\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle - \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle] = K \langle J, T \rangle,$$

y como la igualdad es válida para todo $T \in \mathfrak{X}(M)$, se sigue que

$$R(\gamma', J, \gamma') = KJ.$$

Este último implica que la ecuación de Jacobi para variedades de curvatura seccional constante viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{D^2 J}{dt} + KJ = 0.$$

Se trata pues de una ecuación lineal con coeficientes constantes, cuya solución para las condiciones iniciales $J(0) = 0$ y $J'(0) = w(0)$ es

$$J(t) = \begin{cases} \text{sen}(t)w(t), & \text{si } K = 1 \\ tw(t), & \text{si } K = 0 \\ \text{senh}(t)w(t), & \text{si } K = -1. \end{cases}$$

con $w \in \mathfrak{X}(M)$ paralelo y satisfaciendo $|w(t)| = 1$.

Veamos ahora que, esencialmente, existe un único campo de Jacobi a lo largo de una geodésica con condición inicial 0. De forma más concreta, dada $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ una geodésica con $\gamma(0) = p$ y $\gamma'(0) = v$, tomemos J un campo de Jacobi a lo largo de γ con $J(0) = 0$ y $J'(0) = w$. Al ser $J \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar w como un elemento de $T_v(T_p M)$ y construir una curva $v(s)$ en $T_p M$ cumpliendo $v(0) = v$ y $v'(0) = w$. Esto queda detallado en la siguiente proposición:

Proposición 2.1.1. En las condiciones del párrafo anterior, sea $f(t, s) = \exp_p(\frac{t}{\ell}v(s))$, definamos el campo de Jacobi \tilde{J} dado por $\tilde{J}(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$. Entonces $\tilde{J} = J$ en $[0, \ell]$.

Demostración. Es sencillo probar que \tilde{J} define un campo de Jacobi a lo largo de γ y además $\tilde{J}(0) = 0$. Notemos también que, por la definición de diferencial, se tiene

$$d(\exp_p)_{tv}(tw) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_p(\beta(s))$$

siendo β una curva cualquiera en T_pM con condiciones $\beta(0) = tv$, $\beta'(0) = tw$. Tomando entonces $\beta(s) = tv(s)$ obtenemos

$$d(\exp_p)_{tv}(tw) = \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_p(tv(s)) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0).$$

Así, para $s = 0$ la derivada covariante de $\frac{\partial f}{\partial s}$ se calcula como

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} &= \frac{D}{\partial t} (d(\exp_p)_{tv}(tw)) = \frac{D}{\partial t} (td(\exp_p)_{tv}(w)) \\ &= d(\exp_p)_{tv}(w) + t \frac{D}{\partial t} ((d \exp_p)_{tv}(w)). \end{aligned}$$

Por otro lado, para $t = 0$ se tiene

$$\frac{D \tilde{J}}{dt}(0) = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = d(\exp_p)_0(w) = w.$$

Es decir, tenemos J y \tilde{J} dos campos a lo largo de γ con $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$ y $\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D\tilde{J}}{dt}(0) = w$. Así, de la unicidad de campos de vectores deducimos que $J = \tilde{J}$. \square

Corolario 2.1.1. *Dada la geodésica $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$, el campo de Jacobi a lo largo de γ con condiciones iniciales $J(0) = 0$ y $J'(0) = w$ viene dado por:*

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tw), \quad t \in [0, \ell]$$

2.2. Determinando la métrica mediante la curvatura

Sean M y \tilde{M} dos variedades riemannianas de dimensión n y sean $p \in M$ y $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Elijamos una isometría lineal $i : T_pM \rightarrow T_{\tilde{p}}\tilde{M}$. Sea $V \subset M$ un entorno normal de p lo suficientemente pequeño para que la aplicación $\exp_{\tilde{p}}$ esté definida en el conjunto $(i \circ \exp_p^{-1})(V)$. Definimos entonces la función $f : V \rightarrow \tilde{M}$ como

$$f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q) \quad q \in V.$$

Para todo $q \in V$ sabemos que existe una única geodésica p.p.a $\gamma : [0, t] \rightarrow M$ con $\gamma(0) = p$, $\gamma(t) = q$. Denotaremos por P_t al transporte paralelo a lo largo de γ desde $\gamma(0)$ a $\gamma(t)$. Definimos para cada t del dominio la aplicación $\phi_t : T_qM \rightarrow T_{f(q)}\tilde{M}$ dada por

$$\phi_t(v) = \tilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v), \quad v \in T_qM,$$

donde \tilde{P}_t es el transporte paralelo a lo largo de la única geodésica p.p.a $\tilde{\gamma} : [0, t] \rightarrow \tilde{M}$ dada por $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$.

En la figura 2.1 hay una representación gráfica 3-dimensional de cómo actuaría la función f sobre dos hipotéticas variedades M y \tilde{M} . Tengamos en cuenta para su correcta interpretación que, por definición, $\exp_p(tv) = \gamma_{p,v}(t)$, donde $\gamma_{p,v}$ es la única geodésica que parte de p con velocidad v .

Finalmente, denotaremos con R y \tilde{R} las curvaturas de M y \tilde{M} respectivamente.

Teorema 2.2.1 (Cartan). *Con la notación anterior, si para todo $q \in V$ y todos $x, y, u, v \in T_qM$ se cumple que*

$$\langle R(x, y)u, v \rangle = \langle \tilde{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(u), \phi_t(v) \rangle,$$

entonces $f : V \rightarrow f(V) \subset \tilde{M}$ es una isometría local y $df_p = i$.

Demostración. Sea $q \in V$ y una geodésica $\gamma : [0, \ell] \rightarrow M$ p.p.a con $\gamma(0) = p$, $\gamma(\ell) = q$. Sea $v \in T_qM$ y sea J un campo de Jacobi a lo largo de γ dado por las condiciones $J(0) = 0$ y $J(\ell) = v$. Existe $\{e_1, e_2, \dots, e_n = \gamma'(0)\}$ una base ortonormal de T_pM , y $e_i(t)$ será el transporte paralelo de e_i a lo largo de γ para $i = 1, \dots, n$. Escribiendo

$$J(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t)e_i(t),$$

y usando la observación 2.1.1 concluimos que

$$y_j'' + \sum_{i=1}^n \langle R(e_n, e_i)e_n, e_j \rangle y_i = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Consideremos ahora $\tilde{\gamma} : [0, \ell] \rightarrow \tilde{M}$ la única geodésica p.p.a con condiciones iniciales $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$, $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$ y sea $\tilde{J}(t)$ el campo a lo largo de $\tilde{\gamma}$ dado por

$$\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t)), \quad t \in [0, \ell].$$

Si llamamos $\tilde{e}_j(t) = \phi_t(e_j(t))$, por la linealidad de ϕ_t se tiene que

$$\tilde{J}(t) = \phi_t\left(\sum_{i=1}^n y_i(t)e_i(t)\right) = \sum_{i=1}^n y_i(t)\tilde{e}_i(t).$$

Además, por hipótesis tenemos que $\langle R(e_n, e_i)e_n, e_j \rangle = \langle \tilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j \rangle$, lo que nos da el sistema de ecuaciones

$$y_j'' + \sum_{i=1}^n \langle \tilde{R}(\tilde{e}_n, \tilde{e}_i)\tilde{e}_n, \tilde{e}_j \rangle y_i = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

De aquí deducimos que \tilde{J} es un campo de Jacobi a lo largo de $\tilde{\gamma}$ con $\tilde{J}(0) = 0$. Como el transporte paralelo es una isometría, se conservan los módulos, luego $|\tilde{J}(\ell)| = |J(\ell)|$. Si vemos que

$$\tilde{J}(\ell) = df_q(v) = df_q(J(\ell)),$$

habremos terminado la demostración.

Ahora bien, como $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$, derivando en 0 y teniendo en cuenta la definición de ϕ_t tenemos que $\tilde{J}'(0) = i(J'(0))$. Por otra parte, como $J(t)$ y $\tilde{J}(t)$ son campos de Jacobi que se anulan en $t = 0$, por el corolario 2.1.1 sabemos que se cumple

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)) \quad \text{y} \quad \tilde{J}(t) = d(\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t\tilde{J}'(0)).$$

Usando este resultado junto con la linealidad de i obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\ell) &= d(\exp_{\tilde{p}})_{\ell\tilde{\gamma}'(0)} \ell i(J'(0)) = d(\exp_{\tilde{p}})_{\ell\tilde{\gamma}'(0)} i(\ell J'(0)) \\ &= d(\exp_{\tilde{p}})_{\ell\tilde{\gamma}'(0)} \circ i \circ (d(\exp_p)_{\ell\gamma'(0)})^{-1}(J(\ell)) = df_q(J(\ell)), \end{aligned}$$

que prueba lo que afirmábamos y con esto termina la demostración. □

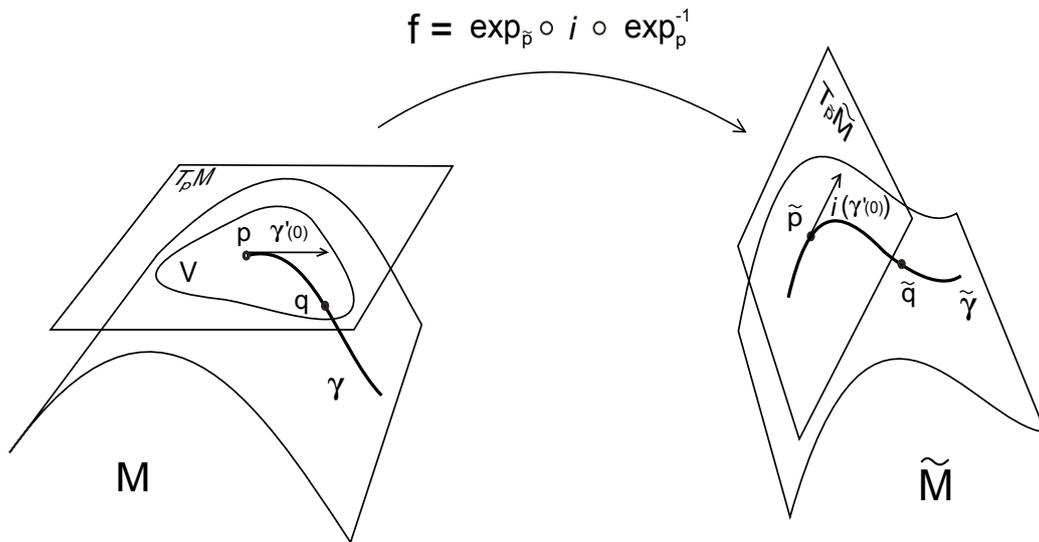


Figura 2.1

Observación 2.2.1. *Démos cuenta de que, al ser $f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$, si \exp_p y $\exp_{\tilde{p}}$ fuesen difeomorfismos sobre todo $T_p M$ y $T_{\tilde{p}} \tilde{M}$, f estaría definida globalmente en todo M . En este caso y bajo las condiciones del teorema 2.2.1, f sería una isometría entre M y \tilde{M} .*

Este teorema lo que nos está diciendo es que, en las condiciones propuestas con $f : V \subset M \rightarrow \tilde{M}$, si para todo $q \in V$ se conserva el tensor curvatura ($R_q(x, y, u, v) = \tilde{R}_{f(q)}(\phi_t(x), \phi_t(y), \phi_t(u), \phi_t(v))$), f es una isometría local. En cierto sentido esto implica que la métrica está determinada localmente por la curvatura. Riemann dio una afirmación equivalente a esta en [13] pag. 289, pero por lo que conocemos hasta ahora, la primera prueba de este teorema local fue presentada por E. Cartan en [4] pag. 238.

Una versión global del teorema fue presentada por W. Ambrose en 1956 (véase [1]). El lector puede encontrar una prueba sencilla del teorema de Ambrose en Cheeger y Ebin ([15]).

En busca de nuestro objetivo, haremos hincapié en los dos corolarios que vienen a continuación, los cuales se deducen inmediatamente del teorema de Cartan.

Corolario 2.2.1. *Sean M y \tilde{M} espacios con igual curvatura constante y la misma dimensión n . Tomemos dos puntos $p \in M$ y $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y elijamos bases ortonormales $\{e_j\}_{j=1}^n \in T_p M$ y $\{\tilde{e}_j\}_{j=1}^n \in T_{\tilde{p}} \tilde{M}$. Entonces existen entornos $V \subset M$ de p , $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ de \tilde{p} y una isometría $f : V \rightarrow \tilde{V}$ tal que $df_p(e_j) = \tilde{e}_j$.*

Demostración. Eligiendo la isometría i del teorema de tal forma que $i(e_j) = \tilde{e}_j$, como la condición de la curvatura se cumple por hipótesis, la afirmación se sigue del teorema de Cartan. \square

Si hacemos esto mismo pero en dos entornos locales del mismo espacio, obtenemos directamente el siguiente resultado. Éste nos viene a decir que un espacio de curvatura constante posee tantas isometrías locales entre entornos de dos puntos distintos como queramos.

Corolario 2.2.2. *Sea M un espacio de curvatura constante y tomemos dos puntos cualesquiera p y q de M . Consideremos bases ortonormales cualesquiera $\{e_j\}$ y $\{f_j\}$ de $T_p M$ y $T_q M$ respectivamente. Entonces existen entornos U de p y V de q , y una isometría $g : U \rightarrow V$ tal que $dg_p(e_j) = f_j$.*

Hay que tener en cuenta que todos estos resultados se han demostrado para una definición de f específica, en la que entra en juego la aplicación exponencial. Podríamos plantearnos ahora una cuestión más general. Querríamos saber si, dado un difeomorfismo $f : M \rightarrow \tilde{M}$ que conserva la curvatura en el sentido de que

$$R_p(X, Y, Z, T) = \tilde{R}_{f(p)}(df_p(X), df_p(Y), df_p(Z), df_p(T)),$$

para todo $p \in M$ y todos $X, Y, Z, T \in T_p M$, es una isometría.

En el caso de dos dimensiones, que sería una especie de recíproco del teorema Egregium de Gauss, es falso, incluso en compactos. Ejemplos que ilustran esta afirmación son las dilataciones u homotecias. El caso no compacto es más complejo, pero puede verse un ejemplo en [2] pag. 237.

Para el caso general $n = \dim M = \dim \tilde{M} \geq 4$ la cuestión es sorprendentemente cierta. El lector interesado puede encontrar esto en [8] y [9]. Para $n = 3$ el problema fue tratado por Yau en [16].

2.3. Espacios recubridores y acciones de grupos

En esta sección se van a presentar conceptos que, teniendo un carácter topológico y algebraico, se trasladan al ámbito de la geometría diferencial. Aquí veremos únicamente las definiciones y resultados que utilizaremos en las demostraciones que estamos persiguiendo en esta memoria. Para un estudio más exhaustivo de lo que a continuación se va a ver remitimos al lector a los libros [11] y [14].

Definición 2.3.1. Sean M y \tilde{M} variedades diferenciables de la misma dimensión. Diremos que una aplicación diferenciable $\rho : \tilde{M} \rightarrow M$ es una aplicación recubridora si es sobreyectiva y cumple la siguiente condición: para todo $p \in M$ existe un entorno U_p tal que, si $\rho^{-1}(U_p) = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ son las componentes conexas de la antiimagen del entorno (hojas), entonces $\rho|_{V_\alpha} : V_\alpha \rightarrow U_p$ es un difeomorfismo $\forall \alpha \in I$.

Se denominará recubridor de M al par (\tilde{M}, ρ) , donde $\rho : \tilde{M} \rightarrow M$ es una aplicación recubridora, y \tilde{M} será el espacio recubridor. Al cardinal de I se le llamará el número de hojas del recubridor.

Ejemplo 2.3.1. El ejemplo típico de aplicación recubridora es $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dado por $\rho(x) = (\cos(x), \sin(x))$, de donde obtenemos que \mathbb{R} recubre a \mathbb{S}^1 . Es fácil probar que si tomamos cualquier subconjunto $J \subsetneq \mathbb{R}$, este no es un recubrimiento de la circunferencia en \mathbb{R}^2 .

Presentamos ahora una caracterización de aplicación recubridora a partir de ciertas condiciones topológicas de los espacios.

Proposición 2.3.1. Sea $\rho : \tilde{M} \rightarrow M$ un difeomorfismo local. Si \tilde{M} es compacto y M es conexo, entonces ρ es una aplicación recubridora.

Demostración. Véase [2] pag. 374. □

A continuación pasamos a dar un resultado que es de vital importancia para el contexto matemático que necesitaremos. La prueba de lo que ahora se presenta puede encontrarse en [12] pag. 444.

Teorema 2.3.1. *Toda variedad conexa tiene un recubridor simplemente conexo.*

Es sencillo ver que, dados dos recubridores simplemente conexos (\tilde{M}_1, ρ_1) y (\tilde{M}_2, ρ_2) de la misma variedad M , existe un difeomorfismo $\psi : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$ tal que $\rho_2 \circ \psi = \rho_1$. De aquí se deduce el siguiente corolario, que dará pie al concepto de recubridor universal.

Corolario 2.3.1. *El recubridor simplemente conexo de una variedad es único salvo difeomorfismos.*

El recubridor que satisface las condiciones del corolario anterior recibe el nombre de *recubridor universal*, y será fundamental para demostrar los dos resultados principales de esta memoria.

Veamos ahora lo que se conoce como transformación recubridora.

Definición 2.3.2. *Sea $\rho : \tilde{M} \rightarrow M$ una aplicación recubridora. Un difeomorfismo $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ diremos que es una transformación recubridora si $\rho \circ \varphi = \rho$, es decir, si conserva las fibras. Denotaremos con $G_\rho(\tilde{M})$ al grupo de las transformaciones recubridoras de \tilde{M} respecto a ρ con la composición.*

Pasamos a continuación a exponer el concepto algebraico de acción de grupo sobre un conjunto, para luego relacionarlo con lo hasta ahora visto de espacios recubridores.

Definición 2.3.3. *Decimos que el grupo G actúa sobre el conjunto M (por la izquierda) si existe una aplicación*

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto gx \end{aligned}$$

satisfaciendo que $1_G x = x$; $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ para todo $x \in M$ y $g_1, g_2 \in G$ (asociatividad).

Diremos que el grupo G actúa *libremente* o sin puntos fijos sobre M cuando verifica que si para un punto $x \in M$ se tiene que $gx = x$, entonces $g = 1_G$.

Definición 2.3.4. *Se llama órbita del punto $x \in M$ al conjunto*

$$Gx = \{gx : g \in G\}$$

El conjunto de todas las órbitas se denota por M/G .

Existe una proyección natural $\pi : M \rightarrow M/G$ dada por $\pi(x) = Gx$, la que a cada punto del conjunto le asocia su órbita correspondiente.

La acción del grupo G se dirá *transitiva* sobre M si $Gx = M$ para todo $x \in M$, esto es, si existe una única órbita.

Nota 2.3.1. Si (\tilde{M}, ρ) es el recubridor universal de una variedad M , se puede probar que $G_\rho(\tilde{M})$ actúa transitivamente sobre cada fibra $\rho^{-1}(p)$ para todo $p \in M$.

Por último, explicaremos lo que significa que un grupo actúe de forma totalmente discontinua sobre un conjunto. Este tipo de grupos es el que nos dará la base para demostrar los resultados de clasificación que estamos buscando.

Definición 2.3.5. Sea M una variedad y G un grupo de difeomorfismos. Diremos que G actúa de forma totalmente discontinua sobre M si para cada $p \in M$ existe un entorno U tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, $\forall g \in G$, $g \neq 1_G$.

Veamos una proposición que relaciona el concepto algebraico anterior con los espacios recubridores.

Proposición 2.3.2. Sea M una variedad de Riemann y (\tilde{M}, ρ) un recubridor de M . El conjunto $G_\rho(\tilde{M})$ de todas las transformaciones recubridoras es un grupo de difeomorfismos de \tilde{M} que actúa de forma totalmente discontinua sobre \tilde{M} .

Demostración. Esta claro que es un grupo de difeomorfismos por la definición de transformación recubridora. Sea $\varphi \in G_\rho(\tilde{M})$, un punto $p \in M$ y un entorno suyo U_p . Por definición conserva las fibras, $\rho \circ \varphi = \rho$, y como, en particular φ es continua, también conserva las componentes conexas de $\rho^{-1}(U)$, es decir, $\varphi(V_\alpha) = V_\beta$, para $V_\alpha, V_\beta \subset \rho^{-1}(U)$. De aquí obtenemos que si $\varphi(V_\alpha) \cap V_\alpha \neq \emptyset$ entonces $\varphi|_{V_\alpha} = I$. Con esta idea, un sencillo argumento prueba que el conjunto (cerrado) en donde φ es la identidad es también abierto, y por tanto es todo \tilde{M} . \square

Si consideramos en M/G la topología cociente inducida por $\pi : M \rightarrow M/G$, se puede probar una especie de recíproco del enunciado anterior.

Proposición 2.3.3. En las condiciones anteriores, si G actúa de forma totalmente discontinua sobre M , entonces $G = G_\pi(M)$ es el grupo de transformaciones recubridoras y además actúa transitivamente sobre $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in M$.

Demostración. Véase [11], pag. 164-165. \square

2.4. Formas espaciales

Estamos ya en disposición de poder probar el teorema principal de este texto, que da nombre y caracteriza el título de este trabajo. Antes de ello introduciremos algunos lemas y resultados que utilizaremos en la prueba de dicho teorema, remitiéndonos a las fuentes pertinentes para aquellos cuya demostración entraña una gran cantidad de información extra. Comenzaremos viendo lo que da nombre a este capítulo y se conoce como forma espacial, un tipo de variedades con unas propiedades específicas.

Definición 2.4.1. *Se denomina forma espacial a una variedad riemanniana completa, conexa y con curvatura seccional constante.*

Lema 2.4.1. *Sean $f_i : M \rightarrow N$, $i = 1, 2$, dos isometrías locales entre la variedad conexa M y N . Si existe un punto $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ y $d(f_1)_p = d(f_2)_p$, entonces $f_1 = f_2$.*

Demostración. Tomemos un entorno normal V de p lo suficientemente pequeño para que f_1 y f_2 restringidas a V sean difeomorfismos (y por lo tanto isometrías), y que $f_1^{-1}(f_2(V)) \subset V$. Definamos entonces $\varphi = f_1^{-1} \circ f_2 : V \rightarrow V$. Tenemos claramente que $\varphi(p) = p$ y

$$d\varphi_p = d(f_1^{-1} \circ f_2)_p = d(f_1^{-1})_{f_2(p)} \circ d(f_2)_p = 1_{T_p V}$$

es la identidad. Ahora, si $q \in V$, por ser entorno normal existe un único vector $v \in T_p M$ y una única geodésica $\gamma_{p,v}$ tal que $\exp_p(v) = \gamma_{p,v}(1) = q$. Teniendo en cuenta que las geodésicas se conservan por isometrías, $f_1(\gamma)$ y $f_2(\gamma)$ son geodésicas en N que nacen de $f_1(p) = f_2(p)$ con velocidad $d(f_1)_p(v) = d(f_2)_p(v)$. Por la unicidad de las geodésicas llegamos a que $f_1(\gamma) = f_2(\gamma)$, y en particular $f_1(\gamma(1)) = f_2(\gamma(1))$. De aquí se obtiene que $\varphi(q) = q$, y como esto se puede hacer para todo $q \in V$, concluimos que φ es la identidad y por ende $f_1 = f_2$ en V .

Para extenderlo a toda la variedad, como M es conexa podemos unir todo punto $r \in M$ a p a través de un camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ con $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = r$. Definimos entonces el conjunto

$$A = \{t \in [0, 1] : f_1(\alpha(t)) = f_2(\alpha(t)) \text{ y } d(f_1)_{\alpha(t)} = d(f_2)_{\alpha(t)}\}.$$

Por lo anterior sabemos que $\sup A > 0$, ya que $V \neq \emptyset$. Si suponemos que $\sup A = t_0 \neq 1$, repitiendo el razonamiento anterior con un entorno normal de $\alpha(t_0)$ llegamos a una contradicción.

Por lo tanto $A = [0, 1]$ y $f_1(r) = f_2(r)$ para todo $r \in M$. □

Damos por último una característica aplicada únicamente a las variedades de curvatura seccional no positiva. Este resultado será de suma importancia para el

teorema que nos compete y nos remitimos a la sección 3 del capítulo 7 de [3] para su demostración.

Teorema 2.4.1 (Hadamard). *Sea M una variedad riemanniana completa y simplemente conexa con $K_p(\Pi) \leq 0$, para todo $p \in M$ y todo $\Pi \in T_p M$. Entonces M es difeomorfa a \mathbb{R}^n , donde $n = \dim M$. En particular, la aplicación exponencial $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ es un difeomorfismo.*

Presentamos ya el tan ansiado teorema de clasificación de espacios de curvatura constante, el cual combinado con la proposición siguiente 2.4.1, caracteriza y da forma a estos espacios.

Teorema 2.4.2 (Teorema de clasificación). *Sea M una forma espacial con curvatura seccional constante K de dimensión n . El recubridor universal \tilde{M} de M , con la métrica inducida por la aplicación recubridora, es isométrico a:*

- a) \mathbb{H}^n , si $K = -1$
- b) \mathbb{R}^n , si $K = 0$
- c) \mathbb{S}^n , si $K = 1$

Demostración. Por definición \tilde{M} es simplemente conexa, y por ser M completa y conexa, al ser la aplicación recubridora un difeomorfismo local, \tilde{M} también lo es, con curvatura seccional constante K .

Vamos a considerar los casos a) y b), denotando por \mathcal{N} a los espacios \mathbb{H}^n y \mathbb{R}^n . Fijados $p \in \mathcal{N}$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y una isometría lineal $i : T_p \mathcal{N} \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$, consideremos la aplicación:

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : \mathcal{N} \rightarrow \tilde{M}.$$

Por el teorema de Cartan 2.2.1, f es una isometría local, y por el teorema de Hadamard 2.4.1 f es un difeomorfismo. De este modo, f es la isometría buscada, probando así la veracidad del enunciado en los casos a) y b).

Para el caso de curvatura constante positiva, fijemos $p \in \mathbb{S}^n$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y una isometría lineal $i : T_p \mathbb{S}^n \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{M}$. Sea $q \in \mathbb{S}^n$ el punto antípoda de p , definimos

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q\} \rightarrow \tilde{M},$$

que por el teorema de Cartan es una isometría local. Esto es así ya que al quitarle el punto antípoda lo convertimos en un entorno normal, como se vio en la observación 1.3.1.

Elegimos ahora otro punto $p' \in \mathbb{S}^n$ siendo $p' \neq p, q$. Llamemos $\tilde{p}' = f(p')$ e $i' = df_{p'}$ y definimos

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ i' \circ \exp_{p'}^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{q'\} \rightarrow \tilde{M},$$

donde de nuevo q' es el punto antípoda de p' .

Observemos que $W := \mathbb{S}^n \setminus (\{q\} \cup \{q'\})$ es conexo (pues estamos considerando $n \geq 2$), y por la elección de los puntos, $p' \in W$. Además se cumple que

$$f(p') = \tilde{p}' = f'(p') \quad \text{y} \quad df_{p'} = i' = df'_{p'}$$

y en virtud del lema 2.4.1, $f = f'$ en W .

Como consecuencia podemos definir una función $g : \mathbb{S}^n \rightarrow \tilde{M}$ como

$$g(r) = \begin{cases} f(r) & \text{si } r \in \mathbb{S}^n \setminus \{q\} \\ f'(r) & \text{si } r \in \mathbb{S}^n \setminus \{q'\} \end{cases}$$

Está claro que g es una isometría local puesto que f y f' lo son, y en particular es un difeomorfismo local. Por la compacidad de \mathbb{S}^n y la conexión de \tilde{M} , aplicando la proposición 2.3.1, g es una aplicación recubridora. Si además tenemos en cuenta que \tilde{M} y \mathbb{S}^n son simplemente conexas, y que por ser \mathbb{S}^n recubridor de \tilde{M} también lo es de M , por la unicidad salvo difeomorfismos del recubridor universal llegamos a que g es un difeomorfismo. Como además es una isometría local, concluimos que g es una isometría, como queríamos demostrar. \square

Corolario 2.4.1. *Las únicas formas espaciales simplemente conexas son los tres modelos básicos de espacios de curvatura seccional constante \mathbb{H}^n , \mathbb{R}^n y \mathbb{S}^n .*

Demostración. Como hemos comprobado al final de la demostración anterior, si consideramos la identidad en M como recubridor, al ser M simplemente conexo y ser el recubridor universal (\tilde{M}, ρ) único salvo difeomorfismos, tenemos que $\rho : \tilde{M} \rightarrow M$ es un difeomorfismo. Si consideramos como en el teorema anterior la métrica en \tilde{M} inducida por ρ , entonces ρ es un isomorfismo local, concluyendo así que \tilde{M} y M son isométricas. Aplicando el teorema anterior queda probado el enunciado. \square

Veremos ahora que este último teorema reduce la determinación de todas las formas espaciales a un problema de teoría de grupos. Para lo que viene a continuación, usaremos todo lo visto en la sección anterior de acciones de grupos sobre variedades y espacios recubridores.

Supongamos que M es una variedad riemanniana y sea Γ un subgrupo del grupo de isometrías de M que actúe de forma totalmente discontinua. Se puede comprobar fácilmente (ver [3] pag. 23) que M/Γ puede ser dotada de una estructura diferenciable, en el sentido de que $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es un difeomorfismo local. Para que sea también una isometría local, podemos asociar una métrica a M/Γ inducida por (M, π) del siguiente modo:

Dado $p \in M/\Gamma$, elijamos un $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ de entre todas las hojas del recubridor. Entonces para cada par $v, w \in T_p(M/\Gamma)$, definimos

$$\langle v, w \rangle_p = \langle d\pi^{-1}(v), d\pi^{-1}(w) \rangle_{\tilde{p}}.$$

Al actuar Γ de forma totalmente discontinua sobre M , por la proposición 2.3.3, $\Gamma = G_\pi M$ actúa transitivamente sobre $\pi^{-1}(p)$. Esto hemos visto que significa que $\Gamma x = \pi^{-1}(p)$ para cada $x \in \pi^{-1}(p)$, lo que en nuestro caso se traduce en que dado cualquier $\tilde{q} \in \pi^{-1}(p)$ existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(\tilde{p}) = \tilde{q}$. Así $\Gamma\tilde{p} = \Gamma\tilde{q}$, por lo tanto la métrica que hemos dado sobre M/Γ no depende del $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ escogido y está bien definida. A esta se le denomina métrica sobre M/Γ inducida por el recubridor $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$, y al haberla definido mediante la proyección (*pull-back*), π es una isometría local.

Por cómo hemos presentado el espacio M/Γ , observemos que M/Γ es completo y conexo si, y solo si M es completo y conexo, y M/Γ tiene curvatura constante si, y solo si M tiene curvatura constante. Tomando $M = \{\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n\}$ concluimos pues que M/Γ es una variedad completa y conexa de curvatura constante $K = \{1, 0, -1\}$ respectivamente. Vamos a ver con la siguiente proposición que de esta forma podemos obtener todas las variedades con esas propiedades.

Proposición 2.4.1. *Sea M una variedad riemanniana completa, conexa y con curvatura seccional constante $K \in \{1, 0, -1\}$. Entonces M es isométrica a \tilde{M}/Γ , donde $\tilde{M} \in \{\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n\}$ respectivamente, Γ es un subgrupo del grupo de isometrías de \tilde{M} que actúa de forma totalmente discontinua sobre \tilde{M} , y la métrica sobre \tilde{M}/Γ es la inducida por el recubrimiento $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$.*

Demostración. Consideremos el recubrimiento universal $\rho : \tilde{M} \rightarrow M$, asociándole a \tilde{M} la métrica recubridora, la que hace que ρ sea una isometría local (*pull-back*),

$$\langle v, w \rangle_{\tilde{p}} = \langle d\rho_{\tilde{p}}(v), d\rho_{\tilde{p}}(w) \rangle_p, \quad \text{para cualesquiera } v, w \in T_{\tilde{p}}\tilde{M}.$$

Si $\Gamma = G_\rho(\tilde{M})$ es el grupo de las transformaciones recubridoras de ρ entonces, por ser ρ una isometría local y $\rho \circ \gamma = \rho$, para toda $\gamma \in \Gamma$, Γ es un subgrupo del grupo de isometrías de \tilde{M} . Además, por la proposición 2.3.2, Γ actúa de forma totalmente discontinua sobre \tilde{M} . Así pues, por la observación hecha anteriormente, podemos asociar a \tilde{M}/Γ la métrica inducida por la proyección recubridora $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$.

Al ser ρ el recubrimiento universal, por la nota 2.3.1, Γ actúa transitivamente sobre la antiimagen por ρ de cada punto de M . De esta forma, dados dos puntos $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$, $\rho(\tilde{x}) = \rho(\tilde{y})$ si, y solo si $\Gamma\tilde{x} = \Gamma\tilde{y}$, están en la misma clase de equivalencia y por tanto $\pi(\tilde{x}) = \pi(\tilde{y})$. Esto muestra que las clases de equivalencia dadas por ρ y π en \tilde{M} son las mismas, de donde se induce una biyección $\xi : M \rightarrow \tilde{M}/\Gamma$ de forma que

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\pi} & \tilde{M}/\Gamma \\ & \searrow \rho & \uparrow \xi \\ & & M \end{array}$$

hace el diagrama conmutativo, $\pi = \xi \circ \rho$.

Al ser π y ρ isometrías locales, ξ es también una isometría local, y como es una biyección concluimos que ξ es una isometría de M a \tilde{M}/Γ . Por el teorema 2.4.2 sabemos que el recubrimiento universal \tilde{M} es isométrico a uno de los tres espacios básicos de curvatura constante, con lo que queda probada la afirmación del enunciado.

□

Capítulo 3

Conclusiones y consecuencias posteriores

Los dos resultados fundamentales del capítulo anterior suponen un avance increíble en el estudio de los espacios de curvatura constante. Tanto es así que, como hemos visto, toda variedad completa y conexa de curvatura seccional constante puede ser vista desde un punto de vista geométrico y topológico como un cociente. Pero lo que simplifica la cuestión es que se trata de un cociente de uno de los tres modelos básicos ya mencionados y estudiados en esta memoria, por un subgrupo un tanto especial de las isometrías de dicho espacio. Por lo tanto, la proposición 2.4.1 reduce el problema de encontrar todas las formas espaciales, al problema de determinar todos los subgrupos del grupo de isometrías que actúan de forma totalmente discontinua sobre cada uno de los modelos completos, conexos y simplemente conexos \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n y \mathbb{H}^n .

Este es un problema bastante complejo de teoría de grupos. Tal es su complejidad, que la solución para dos de los tres modelos, el eucídeo y el hiperbólico, sigue siendo en la actualidad un problema abierto. La determinación de tales subgrupos de las isometrías de la esfera es la única que conocemos, y fue resuelta en la década de los sesenta. John A. Wolf, en su libro titulado ‘Espacios de curvatura constante’ publicado en 1984, dio la clasificación detallada de los subrupos de las isometrías de \mathbb{S}^n que actúan de forma totalmente discontinua. Empleó los descubrimientos y avances llevados a cabo por Zassenhaus y G. Vincent en [5], y remitimos al lector interesado a la consulta de [14], secciones 4-7, donde la clasificación de las formas espaciales esféricas está detalladamente expuesta.

En el estudio detallado de las formas espaciales hemos llegado a un punto en el que, el alto contenido de materia relativa al álgebra de grupos nos impide continuar nuestro camino. Profundizar más en este campo de subgrupos supera con creces las pretensiones de esta memoria, en la que ha primado la geometría diferencial.

Por ello, en aras de no romper con la tónica de este trabajo, presentamos en esta última sección, aunque en la mayoría de los casos sin demostración, algunos resultados importantes que se han podido probar, hasta la fecha, de clasificación de ciertas formas espaciales. Todos estos, por supuesto, basan su veracidad en los dos resultados principales presentados en esta memoria.

Las catalogaciones que expondremos han sido seleccionadas por contener el nivel exigido en el Grado en Matemáticas. Otros muchos resultados, cuyo nivel de dificultad supera al que a este trabajo se le presupone, pueden ser consultados en [14].

Comenzamos viendo un teorema que clasifica todas las formas espaciales llanas en dimensión 2.

Teorema 3.0.3. *Las superficies completas y conexas con curvatura de Gauss constante $K = 0$ son el plano euclídeo, el cilindro, el toro, la banda de Möbius y la botella de Klein.*

La prueba de este enunciado puede encontrarse en [14] pag. 75-77.

Como podemos observar, este es un claro ejemplo en el que la geometría riemanniana, de dimensiones generalizadas, deja su huella en geometría de superficies, restringiéndose a 2 dimensiones. El teorema anterior afirma que son solo esas cinco superficies orientables (salvo isometrías) las superficies llanas completas y conexas.

Siguiendo con el caso de superficies, veamos un resultado cuya prueba puede encontrarse en [3] pag. 167.

Proposición 3.0.2. *Toda superficie compacta y orientable, distinta de la esfera \mathbb{S}^2 o el toro \mathbb{T}^2 , admite una métrica de curvatura constante negativa.*

Lo que nos aporta el enunciado anterior es la solución a un problema que tardó en aparecer en la geometría no euclídea. Fueron muchos matemáticos de renombre los que intentaron encontrar una superficie con curvatura constante negativa, y fue Beltrami el primero que dio una solución, el conocido como disco de Beltrami, con una métrica un tanto abstracta. Aunque no daremos aquí la métrica explícita de la proposición anterior, sabemos que, en superficies como el 2-toro ó toro con dos agujeros, podemos poner una métrica que las haga de curvatura constante negativa.

Pasamos al caso de curvatura constante positiva, pero restringiéndonos al caso de dimensión par. La siguiente proposición afirma que en el caso de curvatura $K = 1$

constante, y dimensión par, solo hay dos variedades; la esfera y el espacio proyectivo. Comenzaremos definiendo este último espacio.

Definición 3.0.2. *El espacio proyectivo real n -dimensional $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ o simplemente \mathbb{P}^n se define como el espacio cociente \mathbb{R}^{n+1}/\sim donde $x \sim y \leftrightarrow x = \lambda y$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Nota 3.0.1. *Lo anterior puede verse geoméricamente como el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen con la topología heredada de \mathbb{R}^{n+1} y la métrica inducida por la proyección. Teniendo en cuenta esto, podemos simplificar el conjunto ambiente sobre el que aplicamos la relación de equivalencia. Otra manera entonces de ver el espacio proyectivo sería $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/\{\pm I\}$ donde $\{\pm I\} \subset \mathbf{O}(n+1)$ son la identidad y la antípoda.*

Proposición 3.0.3. *Sea M una variedad riemanniana completa y conexa de dimensión par $n = 2m$, y con curvatura seccional constante $K = 1$. Entonces M es isométrica a la esfera \mathbb{S}^n o al espacio proyectivo real \mathbb{P}^n .*

En particular, las únicas superficies completas y conexas de curvatura de Gauss positiva constante son, salvo isometrías, la esfera \mathbb{S}^2 y el plano proyectivo $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\{\pm I\}$.

Demostración. Es un hecho bastante conocido en geometría que el grupo ortogonal $\mathbf{O}(2m+1) = \mathbf{O}(n+1)$ es el grupo de isometrías de \mathbb{S}^n y además actúa transitivamente sobre la variedad. Tomemos un conjunto $\Gamma \subset \mathbf{O}(2m+1)$ que actúe de forma totalmente discontinua sobre \mathbb{S}^n . Si $\gamma \in \Gamma$ tiene determinante $+1$ entonces, por ser de dimensión par, existe un valor propio de γ igual a 1 . El vector propio es un punto fijo $x \in \mathbb{S}^n$ tal que $\gamma(x) = x$, y como Γ actúa libremente, $\gamma = I$. En otro caso, si $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ tiene determinante -1 , entonces $\tilde{\gamma}^2$ tiene determinante 1 , y por lo anterior deducimos que $\tilde{\gamma}^2 = I$. Por lo tanto $\tilde{\gamma}$ sólo puede tener como valores propios ± 1 . Si 1 fuese valor propio de $\tilde{\gamma}$, tendríamos que $\tilde{\gamma} = I$, lo que contradice que $\det \tilde{\gamma} = -1$, por lo tanto tenemos que $\tilde{\gamma} = -I$.

De esta forma $\Gamma \subset \{I, -I\}$ y aplicando la proposición 2.4.1 obtenemos que M es isométrica a $\mathbb{S}^n/I = \mathbb{S}^n$ ó a $\mathbb{S}^n/\{\pm I\} = \mathbb{P}^n$. \square

Cabe destacar también en esta sección, el resultado probado en el corolario 2.4.1. En él hemos clasificado todas las formas espaciales simplemente conexas, viendo que solo están en esta categoría los tres modelos básicos de curvatura seccional constante, frecuentemente nombrados en esta memoria.

Para terminar nuestro estudio de las formas espaciales, nos centraremos en un tipo de variedades especiales, las variedades diferenciales *homogéneas*. Estas se caracterizan por tener todos sus puntos geoméricamente iguales. Más concretamente, una variedad riemanniana M es homogénea si, dados dos puntos $p, q \in M$, existe una isometría $F : M \rightarrow M$ tal que $F(p) = q$.

El último teorema, con el que cerramos el trabajo, clasifica todas las formas espaciales homogéneas con curvatura constante $K \leq 0$. Fue probado por J. A. Wolf en 1960, y remitimos, una última vez, al lector interesado a [14] pag. 88-91, para su demostración. En el caso de curvatura constante positiva $K > 0$, las formas espaciales homogéneas también están clasificadas. Por la complejidad de los subgrupos no se han incluido en el siguiente teorema, pero pueden consultarse en la citada referencia.

Teorema 3.0.4. *Sea M una variedad riemanniana homogénea, conexa y con curvatura constante $K \leq 0$, de dimensión n .*

Si $K < 0$, entonces M es isométrica al espacio hiperbólico \mathbb{H}^n .

Si $K = 0$, entonces M es isométrica al producto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^{n-m}$ de un espacio euclídeo por un toro riemanniano llano.

Bibliografía

- [1] W. AMBROSE, *Parallel translation of riemannian curvature*, Annals of Mathematics, 64 (1956), pp. 337–363.
- [2] M. P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, 1976.
- [3] ———, *Riemannian Geometry (Mathematics: Theory & Applications)*, 1992.
- [4] E. CARTAN, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, 2^a ed., 1951.
- [5] G. VINCENT, *Les groupes linéaires finis sans points fixes*, Commentarii Mathematici Helvetici, 20 (1947), pp. 117–171.
- [6] H. HOPF, *Zum clifford-kleinschen raumproblem*, Mathematische Annalen, 95 (1926), pp. 313–339.
- [7] W. KILLING, *Ueber die clifford-klein'schen raumformen*, Mathematische Annalen, 39 (1891), pp. 257–278.
- [8] R. KULKARNI, *Curvature and metric*, Annals of Mathematics, 91 (1970), pp. 311–331.
- [9] ———, *Curvature structures and conformal transformations*, Journal of Differential Geometry, 4 (1970), pp. 425–451.
- [10] J. M. LEE, *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Springer-Verlag, 1997.
- [11] W. MASSEY, *Algebraic Topology, An Introduction*, Harcourt, New York, 1967.
- [12] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [13] B. RIEMANN, *On the hypotheses which lie at the foundations of geometry*, Dover, New York, 1959.

- [14] J. A. WOLF, *Spaces of constant curvature*, Publish or Perish Inc., 5^a ed., 1984.
- [15] J. C. Y D. EBIN, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North-Holland, Amsterdam, 1975.
- [16] S. YAU, *Curvature preserving diffeomorphisms*, *Annals of Mathematics*, 100 (1974), pp. 121–130.

Índice de símbolos

\mathbb{R}	—	Cuerpo de los números reales.
\mathbb{R}^n	—	Espacio euclídeo n-dimensional.
\mathbb{S}^n	—	Esfera unidad n-dimensional.
\mathbb{H}^n	—	Espacio hiperbólico n-dimensional.
\mathbb{P}^n	—	Espacio proyectivo real n-dimensional .
$T_p M$	—	Espacio tangente a M en el punto p .
$\mathfrak{X}(M)$	—	Conjunto de los campos de vectores tangentes a la variedad.
P	—	Campo posición.
$\mathfrak{X}(\gamma)$	—	Conjunto de los campos de vectores tangentes a lo largo de γ .
ds^2	—	Métrica asociada a una variedad.
∇	—	Conexión de Levi-Civita.
\exp_p	—	Aplicación exponencial en el punto p .
Γ_{ij}^k	—	Símbolos de Christoffel.
S	—	Operador forma.
ϵ	—	Signo de la subvariedad.
R	—	Operador/tensor curvatura.
$K(\Pi)$	—	Curvatura seccional asociada a Π .

Índice terminológico

- Acción de un grupo
 - totalmente discontinua, 40
 - libre, 39
 - transitiva, 39
- Aplicación
 - exponencial, 35
 - difeomorfismo, 43
 - isometría local, 35
- Curva
 - diferenciable, 18
 - geodésica, 19
- Curvatura
 - operador, 17
 - seccional, 17
 - tensor, 17
- Estructura diferenciable, 15
- Fórmula de Gauss
 - riemanniana, 21
 - semi-riemanniana, 28
- Jacobi
 - campo, 32
 - ecuación, 32
- Operador forma, 28
- Recubridor
 - aplicación, 38
 - espacio, 38
 - hojas, 38
 - métrica, 44
 - transformación, 39
 - universal, 39
- Símbolos de Christoffel, 16
- Segunda forma fundamental, 20
- Teorema
 - Cartan, 35
 - de Clasificación, 42
 - Hadamard, 42
- Transporte paralelo, 34
- Variedad
 - completa, 41
 - riemanniana, 15
 - simplemente conexa, 42