

Universidad de Murcia, Facultad de Matemáticas

# TEOREMA DE SINGULARIDAD DE PENROSE

Beatriz Fuentes Sánchez



Dirigido por Miguel Ángel Javaloyes

# Declaración de originalidad

Beatriz Fuentes Sánchez como autora del trabajo *Teorema de Singularidad de Penrose* tutorizado por Miguel Ángel Javaloyes, declaro<sup>1</sup> que el trabajo que presento es original, en el sentido de que he puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas, y que no infringe el copyright de ninguna persona.

Murcia, a 22 de junio de 2021

---

<sup>1</sup>Se ha entregado a la Facultad de Matemáticas de la universidad de Murcia una copia firmada de esta declaración de originalidad.

# Resumen

Se puede decir que 1965 es una fecha importante para la historia de la Relatividad General. Cincuenta años después de que Einstein publicara sus famosas ecuaciones de campo, aparece de la mano del matemático Roger Penrose el gran Teorema de singularidad que demostraría definitivamente que se pueden formar agujeros negros en estrellas no idealizadas. Es tal la importancia de este teorema que en 2020 se le otorgó el Premio Nobel de física a Roger Penrose, junto con Andrea M. Ghez y Reinhard Genzel, por su contribución al estudio de agujeros negros.

En primer lugar vamos a poner en contexto este hallazgo. Antes de 1964, existía una resistencia generalizada entre la comunidad científica a aceptar la existencia de agujeros negros. Ya cuando Schwarzschild envió a Einstein la primera solución de sus ecuaciones de campo y le advirtió de que, cuando la masa esféricamente simétrica de una estrella era suficientemente grande en comparación con el radio de la misma, llegaba un punto en el que los rayos de luz no podían salir. Esta región sería lo que ahora se conoce como horizonte de sucesos, y en ese momento Einstein consideró que se trataba de un artificio matemático con pocas probabilidades de existir en el mundo físico real.

Alrededor del año 1928, cuando las leyes de la mecánica cuántica estaban en auge, se entendía que una estrella con cierta masa y circunferencia, cuando se enfría, va reduciendo progresivamente el radio de su circunferencia, manteniendo su masa prácticamente constante. Según la masa inicial de dicha estrella, podría ir aumentando su densidad hasta acabar explotando, o, por el contrario, se convertiría en una enana blanca. En cambio, en 1935, Subrahmanyan Chandrasekar presentó ante la Royal Astronomical Society en Londres los cálculos que demostraban que una enana blanca no podía tener una masa superior a 1,4 soles. Esto implicaba que una estrella con masa superior a esta cantidad límite, cuando se enfriase y redujese su radio, no podía convertirse en una estrella blanca, pero tampoco podía explotar (porque la gravedad superaría a la presión de la estrella), se concluía entonces que la estrella debía implosionar. Aunque todavía en este momento hubo físicos y astrónomos que rechazaban esta teoría, este hecho supondría el impulso del estudio de los agujeros negros.

Después de distintas aportaciones al tema, unos años más tarde, en 1939 J. Robert Oppenheimer y Hartland Snyder decidieron estudiar la implosión de una estrella esférica. Aunque prácticamente no comentaron lo que significaban sus ecuaciones, éstas indicaban que, después de crear un horizonte de agujero negro a su alrededor, la estrella esférica continuaba implosionando hasta alcanzar una densidad infinita y volumen cero, después de lo cual se funde en una *singularidad espacio-temporal*.

Una singularidad, coloquialmente, es una región donde la curvatura del espacio-tiempo se hace infinitamente grande, y el espacio-tiempo deja de existir como una única cosa. Puesto que la gravedad de marea es una manifestación de la curvatura espacio-temporal, una singularidad es también una región de gravedad de marea infinita, es decir, una región en donde la gravedad ejerce un tirón infinito sobre los objetos a lo largo de algunas direcciones y una compresión infinita a lo largo de otras [5]. Puede haber distintos tipos de singularidad, según la manera en la que ésta estire y comprima los objetos que entran en ella. La singularidad que describían las ecuaciones de Oppenheimer-Snyder era muy sencilla, ésta estiraba todos los objetos radialmente y los comprimía transversalmente, de la misma forma que la gravedad de marea produce las mareas de los océanos en la Tierra.

A pesar de estos resultados, la existencia de infinitos hacía dudar a la comunidad científica de la credibilidad de las ecuaciones. Un grupo de investigadores dirigido por John Wheeler identificó el estiramiento y compresión infinitos como un mensaje de que la relatividad general fallaba dentro de un agujero negro, consideraba que la mecánica cuántica debía impedir que la gravedad de marea se hiciera realmente infinita dentro del agujero negro. Otro grupo, liderado por Isaac Markovich Khalatnikov y Evgeny Michailovich Lifshitz pensaban que la existencia de infinitos en los cálculos indicaba que éstos eran erróneos (1963). Consideraban que las idealizaciones extremas del modelo de Oppenheimer-Snyder, entre ellas, que la estrella fuera esférica, sin rotación y que no hubiese materia expulsada ni radiación derramada, eran las responsables de que se formase la singularidad. Por otro lado, en 1955, Raychadhuri publica el primer teorema de singularidad. En su trabajo introdujo la llamada ecuación de Raychadhuri que permite conocer la convergencia o divergencia de las geodésicas según el tensor curvatura. Con Raychadhuri se inicia una década fructífera para el estudio de las singularidades, que desembocará finalmente en el teorema de singularidad de Penrose.

Como hemos mencionado antes, todavía en 1964, Isaac Khalatnikov y Evgeny Lifshitz estaban convencidos de que cuando una estrella real, con deformaciones internas aleatorias, implosiona para formar un agujero negro, dichas deformaciones se harían cada vez mayores y detendrían la implosión antes de que se pudiese formar una singularidad. Fue este mismo año cuando Roger Penrose, con estudios matemáticos y finalmente atraído por la física, tuvo la feliz idea de introducir la topología en el estudio de la relatividad general. Con esta rama de las matemáticas consiguió demostrar que cualquier estrella que implote hasta tal punto de que su gravedad es lo suficientemente grande para atraer hacia dentro los rayos de luz salientes, debe acabar formando una singularidad. En su trabajo Penrose establece que una variedad presentará una singularidad si existe una geodésica causal incompleta. También es el primero en hablar de las *superficies atrapadas* que, como veremos en este trabajo, juegan un papel fundamental en el teorema de singularidad.

El teorema de Penrose salió a la luz en 1965 y, aunque generó muchas dudas debido al poco control que tenían los físicos teóricos de entonces en topología, finalmente acabó por considerarse cierto y en 1969 Evgeny Lifshitz reconoció su error.

En este trabajo se detallarán todas las definiciones y resultados necesarios para entender el Teorema de Penrose. Empezaremos por una revisión de conceptos básicos de geometría de Riemann, en el siguiente capítulo presentamos varios resultados de la teoría de variaciones, y

también de los puntos conjugados y puntos focales. Después, en el tercer capítulo, demostramos una serie de proposiciones que nos servirán para saber cuándo dos puntos de una variedad pueden unirse mediante una curva temporal. Finalmente, en los siguientes dos capítulos, introducimos la causalidad en variedades de Lorentz y definiciones como las de conjuntos acronales e hipersuperficies y desarrollos de Cauchy, que nos llevarán por fin al Teorema de Penrose.

Una vez demostrado el teorema principal del trabajo, añadimos también el Teorema de Singularidad de Stephen Hawking, en su versión fuerte y su versión débil.

# Abstract

It could be said that 1965 was an important year for General Relativity history. Fifty years after publication of Einstein's field equations, Roger Penrose's Singularity Theorem came out. This theorem would definitively prove that black holes can form in non-idealised stars. This result gave Roger Penrose, in 2020, along with Andrea M. Ghez y Reinhard Genzel, the Nobel prize in physics, in honour of his contributions to the study of black holes.

First of all, we are going to contextualise the publication of this theorem. Before 1964, there was a widespread resistance to accept the existence of black holes. Already in 1916, Schwarzschild warned Einstein that, when the spherically symmetric mass of a star was sufficiently large compared to the radius of the star, there is a point at which light rays can't come back. Currently, this area is known as the event horizon but in 1916, Einstein considered it was a mathematical contrivance unlikely to exist in the real physical world.

Around 1928, when laws of quantum mechanics were developing, it was understood that a star with a certain mass and circumference, whenever it cools down, it gradually reduces the radius of its circumference, keeping its mass practically constant. Depending on the initial mass of such a star, it could either increase in density and eventually explode, or, on the contrary, become a white dwarf star. However, in 1935, Subrahmanyan Chandrasekar presented his calculations to the Royal Astronomical Society in London, showing that a white dwarf star could not have a mass greater than 1.4 suns. This statement implied that a star with a mass greater than this amount, when it cooled down and the circumference ratio decrease, it could not become a white star, but neither could it explode (because gravity would overcome the pressure of the star), it was then concluded that the star must implode. Although there were still physicists and astronomers who rejected this theory, the limit mass for white dwarf stars promoted the study of black holes.

After several contributions to the possibility of stars to implode, a few years later, in 1939, J. Robert Oppenheimer and Hartland Snyder decided to study the implosion of a spherical star. Although they didn't almost discussed about what their equations meant, they indicated that, after creating a black hole horizon around it, the spherical star continued imploding until it reached infinite density and zero volume, after which it merges into a *space-time singularity*.

A singularity, explained in simple terms, is a region where the curvature of space-time becomes infinitely large, and space-time doesn't exist as an union. Since tidal gravity is a manifestation of space-time curvature, a singularity is also a region of infinite tidal gravity, i.e., a region where gravity exerts an infinite pull on objects along some directions and an infinite grasp along

---

others, [5]. There are different types of singularity, depending on how the singularity stretches and compresses the objects inside itself. The singularity described by the Oppenheimer-Snyder equations was very simple, it stretched all objects radially and compressed them transversely, in the same way that tidal gravity produces the tides of the oceans on Earth.

Despite these results, the existence of infinities made the scientific community doubt about the credibility of the equations. A group of scientifics led by John Wheeler identified infinite stretching and compression as a message that general relativity failed inside a black hole, and believed that quantum mechanics should prevent tidal gravity from actually becoming infinite inside the black hole. Another group, led by Isaac Markovich Khalatnikov and Evgeny Michailovich Lifshitz, thought that the existence of infinities in calculations indicated that they were wrong (1963). They believed that extreme idealisations of the Oppenheimer-Snyder model, including the star being spherical, non-rotating and with no ejected matter or spilled radiation, were responsible for the formation of the singularity. On the other hand, in 1955, Raychadhuri published the first singularity theorem. In his paper he introduced the *Raychadhuri equation* which allows to know geodesics' convergence or divergence in terms of the Riemann tensor. Raychadhuri marks the beginning of a fruitful decade in the study of singularities, which will eventually lead to Penrose's singularity theorem.

As mentioned earlier, in 1964, Isaac Khalatnikov and Evgeny Lifshitz were convinced that when a real star, with random internal deformations, implodes to form a black hole, these deformations would get bigger and bigger and stop the implosion before a singularity could form. It was in the same year when Roger Penrose, with a background in mathematics and eventually attracted to physics, had the "happy idea" of introducing topology into the study of general relativity. With this branch of mathematics he managed to show that any star that implodes to such an extent that its gravity could pull in the outgoing light rays, must eventually form a singularity. In his work, Penrose set that a manifold would have a singularity if there is a causal incomplete geodesic. He is also the first one to talk about trapped surfaces, which, as we will see in this paper, play a fundamental role in the singularity theorem.

Penrose's theorem came out in 1965 and, although it generated many doubts due to the theoretical physicists' inexperience in topology, it was finally considered to be true and in 1969 Evgeny Lifshitz recognised his mistake.

In this work we will detail each definition and result necessary to understand the Penrose Theorem. We start with a review of basic concepts of Riemannian geometry, in the next chapter we present several results about variations' theory, and also about conjugate points and focal points. Then, in the third chapter, we prove some propositions that will help us to know when two points of a manifold can be joined by a time curve. Finally, in the last two chapters, we introduce causality in Lorentz submanifolds and definitions such as those of achronal sets and hypersurfaces and Cauchy developments, which will finally lead us to the Penrose Theorem.

Having proved the work's main theorem, we also add Stephen Hawking's Singularity Theorem, in its strong and weak version.

# Índice general

<b>1. Variedades semi-Riemannianas</b>	<b>10</b>
1.1. Concepto de variedad diferenciable y vectores tangentes . . . . .	10
1.2. Tensores . . . . .	11
1.3. Curvatura . . . . .	14
1.4. Geodésicas . . . . .	15
1.5. Transporte paralelo . . . . .	16
1.6. La función exponencial . . . . .	17
1.7. La conexión inducida y la conexión normal . . . . .	17
1.8. Curvas integrales . . . . .	19
1.9. Geometría de Lorentz . . . . .	19
<b>2. Teoría de variaciones</b>	<b>22</b>
2.1. Variaciones y campos de Jacobi . . . . .	22
2.2. Cálculo de variaciones . . . . .	23
2.3. Puntos conjugados y puntos focales . . . . .	29
2.3.1. Puntos focales a lo largo de geodésicas nulas . . . . .	39
<b>3. Un teorema de causalidad</b>	<b>43</b>
<b>4. Causalidad en variedades de Lorentz</b>	<b>49</b>
4.1. Relaciones de causalidad . . . . .	49
4.2. Curvas límite . . . . .	52
4.3. Condiciones de causalidad . . . . .	53
4.4. Conjuntos acronales . . . . .	57
4.5. Hipersuperficies de Cauchy . . . . .	58
4.6. Desarrollos de Cauchy . . . . .	60
<b>5. Teorema de Singularidad de Penrose</b>	<b>64</b>

<b>6. Teoremas de singularidad de Stephen Hawking</b>	<b>68</b>
6.1. Hipersuperficies espaciales . . . . .	68
6.2. Horizontes de Cauchy . . . . .	69
6.3. Teoremas de Stephen Hawking . . . . .	71
<b>Bibliografía</b>	<b>75</b>

# Capítulo 1

## Variedades semi-Riemannianas

En este capítulo introducimos al lector en la teoría básica de la Geometría de Riemann, fundamental para poder hablar de singularidades desde un punto de vista matemático.

### 1.1. Concepto de variedad diferenciable y vectores tangentes

**Definición 1.1** Dado un conjunto  $M$ , llamamos *carta* de  $M$  a una aplicación biyectiva  $\psi : \mathcal{U} \subset M \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ , siendo  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

Por tanto, a partir de ahora, cuando hablemos de curvas  $\alpha$  o funciones  $f$  diferenciables en el conjunto  $M$ , estaremos diciendo que las composiciones  $\psi \circ \alpha$  y  $f \circ \psi^{-1}$  son diferenciables.

Un mismo conjunto puede admitir distintas cartas, y necesitamos que no haya problemas en la intersección de los dominios de las mismas, para ello surge el concepto de cartas compatibles.

**Definición 1.2** Decimos que dos cartas  $\psi_1 : \mathcal{U}_1 \subset M \rightarrow U_1 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\psi_2 : \mathcal{U}_2 \subset M \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^n$  son *compatibles* cuando

$$\psi_1 \circ \psi_2^{-1} : \psi_2(U_1 \cap U_2) \rightarrow \psi_1(U_1 \cap U_2)$$

es un difeomorfismo.

Con esta idea ya podemos definir las variedades diferenciables.

**Definición 1.3** Diremos que un conjunto  $M$  es una variedad diferenciable cuando esté dotado de un atlas de cartas,  $\mathcal{A} = \{\psi_i\}_i$ , que cubren todo  $M$  y son compatibles dos a dos.

A partir de aquí vamos a ir definiendo los distintos elementos de las variedades diferenciables. Sea  $\mathcal{F}(M)$  el conjunto de funciones reales  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables.

**Definición 1.4** Decimos que  $v : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  es un vector tangente a  $M$  en  $p$  si:

- Es  $\mathbb{R}$ -lineal, es decir,  $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$
- y satisface la regla de Leibniz:  $(v(fg)) = v(f)g + fv(g)$

donde  $f, g \in \mathcal{F}(M)$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ . Denotaremos como  $T_p M$  al conjunto formado por todos los vectores tangentes a  $M$  en el punto  $p$ , conocido como *espacio tangente* a  $M$  en  $p$ .

**Definición 1.5** Llamaremos campo vectorial a una función que asigna a cada punto de la variedad un vector de su espacio tangente. Según la definición de vector tangente, el campo vectorial se puede entender como una función  $X : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$  que es  $\mathbb{R}$ -lineal y satisface la regla de Leibniz.

El conjunto de todos los campos diferenciables se denota por  $\mathfrak{X}(M)$ . Una de las operaciones con campos más comunes en geometría de Riemann es el corchete de Lie.

**Definición 1.6** Dados  $v, W \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos el corchete de Lie de  $V$  y  $W$ , denotado como  $[V, W] \in \mathfrak{X}(M)$  mediante

$$[V, W](f) = V(W(f)) - W(V(f))$$

Este campo es  $\mathbb{R}$ -lineal, anti-simétrico, y cumple la identidad de Jabobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Esta última definición nos dará pie a la siguiente sección en la que definimos los tensores.

**Definición 1.7** Una forma lineal sobre  $T_p M$  se conoce como covector en  $p$ . El conjunto de todos los covectores en  $p$  se denota por  $T_p^* M$  y se conoce como espacio cotangente a  $M$  en  $p$ .

## 1.2. Tensores

**Definición 1.8** Dado un espacio vectorial  $V$  y denotando por  $V^*$  el espacio dual de  $V$  (los covectores), definimos un tensor de tipo  $(r, s)$  sobre  $V$  como una aplicación  $\mathbb{R}$ -multilineal:

$$t : (V^*)^r \times V^s \rightarrow \mathbb{R}$$

Esta noción se traslada a variedades diferenciables como sigue:

**Definición 1.9** Un campo de tensores o, sencillamente, un tensor de tipo  $(r, s)$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es una aplicación  $T$  que asigna a cada punto  $p \in M$  un tensor  $T_p$  de tipo  $(r, s)$  sobre  $T_p M$ .

Se dice que  $r$  es el grado contravariante de  $T$ ,  $s$  su grado covariante y  $r + s$  su grado total. Un tensor covariante de grado  $s$  es un tensor de tipo  $(0, s)$  y un tensor *contravariante* de grado  $r$  es un tensor de tipo  $(r, 0)$ .

Al conjunto formado por todos los tensores diferenciables de tipo  $(r, s)$  sobre una variedad  $M$  lo denotaremos por  $\mathcal{T}_s^r(M)$ .

Veamos ahora como se expresa un tensor localmente en un sistema de coordenadas. Si  $(U, x)$  es una carta de  $M$  con  $x = (x^1, \dots, x^n)$  y  $T \in \mathcal{T}_s^r(M)$  entonces, en el abierto  $U$ ,

$$T = \sum_{1 \leq i_k, j_l \leq n} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \dots \otimes \partial_{i_r} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

donde  $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})$  son los *componentes tensoriales* de  $T$  en el sistema de coordenadas  $(U, x)$ . Estas funciones identifican unívocamente al tensor y permiten la interpretación de los tensores en coordenadas.

Una de las operaciones más importantes que se puede hacer con tensores, y que es utilizada para calcular el conocido tensor de Ricci a partir de los componentes del tensor de Riemann, es la contracción de tensores. Esta operación nos permite pasar de un tensor de tipo  $(r, s)$  a uno de tipo  $(r-1, s-1)$ . La definición formal es la siguiente:

**Definición 1.10** Dado un tensor  $T$  de tipo  $(r, s)$ , si  $1 \leq a \leq r$  y  $1 \leq b \leq s$ , se define la *contracción sobre los índices  $(a, b)$*  como la contracción del tensor resultante al mantener fijos todos los índices salvo el  $a$ -ésimo y el  $b$ -ésimo. El tensor obtenido de tipo  $(r-1, s-1)$  se denota por  $C_b^a(T)$ .

Llegados a este punto, es interesante conocer también cómo derivar tensores.

**Definición 1.11** Si denotamos como  $\mathcal{T}(M)$  al conjunto de todos los tensores  $\mathcal{T}_s^r$  para todo  $r, s < n$ . Una derivación tensorial es una familia de aplicaciones  $\mathbb{R}$ -lineales

$$\mathcal{D} : \mathcal{T}(M) \longrightarrow \mathcal{T}(M)$$

tal que  $\mathcal{D}(\mathcal{T}_s^r(M)) \subset \mathcal{T}_s^r(M)$  para cada  $r, s \geq 0$ . Además para dos tensores  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}(M)$  cualesquiera se tiene que:

$$\mathcal{D}(T_1 \otimes T_2) = \mathcal{D}(T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes \mathcal{D}(T_2)$$

Ahora que ya sabemos derivar tensores en una variedad, también podemos derivar campos vectoriales en una variedad con la siguiente definición.

**Definición 1.12** Una conexión  $\nabla$  en una variedad diferenciables  $M$  es una función  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$  tal que:

1.  $\nabla_V W$  es  $\mathcal{F}(M)$ -lineal en  $V$ ,
2.  $\nabla_V W$  es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $W$ ,
3.  $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$  para  $f \in \mathcal{F}(M)$  y  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$

Al término  $\nabla_V W$  se le llama derivada covariante de  $W$  respecto a  $V$  para la conexión afín  $\nabla$ .

Por tanto, dado una conexión afín  $\nabla$  y un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , podemos definir una derivación tensorial  $\nabla_X$ .

Para llegar al concepto de variedad semi-Riemanniana, primero necesitamos conocer la forma de medir en una variedad diferenciable. Necesitaremos también las siguientes definiciones algebraicas:

**Definición 1.13** Sea  $V$  un espacio vectorial, una forma bilineal sobre  $V$  es una función  $\mathbb{R}$ -bilineal  $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ . En este trabajo consideraremos únicamente formas bilineales simétricas, es decir,  $b(v, w) = b(w, v)$  para todo  $v, w$ .

También será muy importante la siguiente clasificación de las formas bilineales:

**Definición 1.14** Una forma bilineal simétrica  $b$  sobre un espacio vectorial  $V$  es:

1. definida positiva [negativa] si  $v \neq 0$  implica que  $b(v, v) > 0$  [ $b(v, v) < 0$ ].
2. semidefinida positiva [negativa] si  $b(v, v) \geq 0$  [ $b(v, v) \leq 0$ ] para todo  $v \in V$ .
3. *no degenerada* si  $b(v, w) = 0$  para todo  $w \in V$  implica que  $v = 0$ .

Un concepto importante es también el *índice* de una forma bilineal. Este se define como la dimensión del subespacio de  $V$  de mayor dimensión sobre el cual la forma bilineal es definida negativa. Este número coincide con el número de vectores temporales de cualquier base ortonormal.

Un caso concreto de forma bilineal es el *producto escalar*, que utilizaremos con frecuencia en este trabajo. La definición formal es la siguiente:

**Definición 1.15** Dado un espacio vectorial  $V$ , un *producto escalar*  $g$  sobre  $V$  es una forma bilineal simétrica y no degenerada. A veces aparecerá escrito como  $g(v, w) = \langle v, w \rangle$ .

**Definición 1.16** El *carácter causal* de un vector  $v \in V$  se define como:

- *espacial* si  $g(v, v) > 0$  ó  $v = 0$ ,
- *temporal* si  $g(v, v) < 0$ ,
- *nulo* si  $g(v, v) = 0$  y  $v \neq 0$

**Definición 1.17** Un *tensor métrico* (o simplemente *métrica*)  $g$  sobre una variedad diferenciable  $M$  es un tensor covariante de grado 2 sobre  $M$  de forma que  $g_p$  es un producto escalar sobre  $T_p M$ , para todo  $p \in M$ , y el índice de  $g_p$  es constante.

Podemos ya definir el concepto que da nombre a este capítulo:

**Definición 1.18** Una variedad *semi-Riemanniana* es un par  $(M, g)$  formado por una variedad diferenciable  $M$  y un tensor métrico  $g$  sobre  $M$ .

Con el tensor métrico ya podemos medir en una variedad, por ejemplo, para obtener la norma de un vector tangente, como  $g(v, v)$  puede ser negativo, según el carácter causal de  $v$ , se define la *norma* de  $v$  como  $|v| = |g(v, v)|^{1/2}$ .

Hay dos casos particulares de especial relevancia: el de *variedad riemanniana* cuando el índice es cero y el de *variedad de Lorentz* cuando el índice es uno. Este último tipo de variedad pseudo-riemanniana es el utilizado en la teoría general de la relatividad.

En un sistema de coordenadas  $(U, x)$  el tensor métrico  $g$  se escribe como:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

donde  $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu) = \langle \partial_\mu, \partial_\nu \rangle$  son las componentes de  $g$ .

El ejemplo más sencillo de tensor métrico se obtiene considerando en  $\mathbb{R}^n$ , fijado  $0 \leq \lambda \leq n$  y con las coordenadas naturales  $(u^1, \dots, u^n)$ , el tensor

$$g_\lambda = k_\mu du^\mu \otimes du^\mu$$

con  $k_\mu = -1$  si  $\mu \leq \lambda$  y  $k_\mu = 1$  si  $\mu \geq \lambda + 1$ . La variedad pseudo-riemanniana  $(\mathbb{R}^n, g_\lambda)$  se denota por  $\mathbb{R}_\lambda^n$  y se conoce como *espacio pseudo-euclídeo* de dimensión  $n$  e índice  $\lambda$ . En el caso particular  $\lambda = 0$ ,  $\mathbb{R}_0^n \equiv \mathbb{R}^n$  es el *espacio euclídeo* de dimensión  $n$ , el ejemplo más sencillo de variedad riemanniana. Por otro lado,  $\mathbb{R}_1^n \equiv \mathbb{L}^n$  se conoce como el *espacio de Minkowski* de dimensión  $n$ . Precisamente  $\mathbb{L}^4$  es la variedad de Lorentz de la que hablábamos anteriormente.

### 1.3. Curvatura

En esta sección estudiamos los tensores que nos dan información sobre la curvatura de una variedad semi-Riemanniana. Para ello, el elemento fundamental es el de la conexión Levi-Civita.

**Definición 1.19** Dada una métrica semi-Riemanniana  $g$ , existe una única conexión afín, definida en 1.12, tal que:

1. Es libre de torsión, es decir,  $\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$ .
2. Es compatible con la métrica:

$$X(g(V, W)) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$$

Dicha métrica está determinada por la *fórmula de Koszul*:

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, X) &= V(g(W, X)) + W(g(X, V)) - X(g(V, W)) \\ &\quad - g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]) \end{aligned}$$

**Definición 1.20** Sea  $M$  una variedad semi-Riemanniana y  $\nabla$  su conexión de Levi-Civita. El *tensor curvatura de Riemann*  $R$  asociado a  $M$  es el tensor de tipo (1,3) dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$$

Este tensor cumple las siguientes propiedades:

1.  $R_{xy} = -R_{yx}$ .
2.  $\langle R_{xy}v, w \rangle = -\langle R_{xy}w, v \rangle$ .
3.  $R_{xyz} + R_{yzx} + R_{zxy} = 0$ .
4.  $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$ .

La propiedad que más se utilizará en este trabajo es la segunda, significa que el tensor de Riemann es *anti-autoadjunto*. La tercera propiedad se conoce como *primera identidad de Bianchi*.

En algunos casos utilizaremos también la curvatura seccional de un *plano tangencial*, esto es un subespacio bidimensional del espacio tangente  $T_p M$ . Para definir la curvatura seccional necesitamos primero lo siguiente:

$$Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$$

Un plano tangencial  $\Pi$  generado por los vectores  $v, w$  será no degenerado si y solo si  $Q(v, w) \neq 0$ .

**Definición 1.21** Sea  $\Pi$  un plano tangencial a  $M$  en  $p$ . El número

$$K(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{Q(v, w)}$$

que será independiente de la base  $v, w$  elegida para  $\Pi$ . Este número se conoce como la *curvatura seccional*  $K(\Pi)$  de  $\Pi$ .

A partir del tensor curvatura de Riemann se puede llegar al *tensor de Ricci* mediante una contracción.

**Definición 1.22** Sea  $R$  el tensor curvatura de Riemann de una variedad  $M$ . Se define el *tensor curvatura de Ricci* como la contracción  $C_2^1(R) \in \mathcal{T}_2^0(M)$ . En coordenadas locales, lo que hacemos es dejar fijos el primer índice contravariante y el segundo covariante, quedando finalmente:

$$R_{ij} = R_{ijm}^m$$

En el trabajo usaremos también la siguiente expresión del tensor de Ricci en función de una base ortonormal:

$$Ric(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m}^Y, E_m \rangle$$

donde  $\varepsilon_m = \langle E_m, E_m \rangle$ .

## 1.4. Geodésicas

Uno de los conceptos fundamentales de este trabajo será el de geodésicas. Recordamos aquí algunas definiciones y propiedades al respecto.

**Definición 1.23** Una *geodésica* en una variedad semi-Riemanniana  $M$  es una curva  $\gamma: I \rightarrow M$  cuyo campo de vectores  $\gamma'$  es paralelo. También se pueden definir como aquellas curvas cuya aceleración es cero,  $\gamma'' = 0$ .

Igual que en el caso de las curvas integrales aparecen aquí un par de lemas de unicidad.

**Lema 1.1 (3.22)** Si  $v \in T_p(M)$  entonces existe un intervalo  $I$  en torno a  $0$  y una única geodésica  $\gamma: I \rightarrow M$  tal que  $\gamma'(0) = v$ .

**Lema 1.2 (3.23)** Sea  $\alpha, \beta: I \rightarrow M$  dos geodésicas. Si hay un número  $a \in I$  tal que  $\alpha'(a) = \beta'(a)$  entonces  $\alpha = \beta$ .

Por último, el siguiente resultado motivará una importante definición que aparecerá a menudo en el capítulo principal de este trabajo.

**Proposición 1.1 (3.24).** Dado cualquier vector  $v \in T_p(M)$  hay una única geodésica  $\gamma_v$  en  $M$  tal que

1. La velocidad inicial de  $\gamma_v$  es  $v$ , es decir  $\gamma_v'(0) = v$ .
2. El dominio  $I_v$  de  $\gamma_v$  es el más largo posible. Por tanto, si  $\alpha: J \rightarrow M$  es una geodésica con velocidad inicial  $v$ , entonces  $J \subset I$  y  $\alpha = \gamma_v|_J$ .

Debido al segundo apartado de esta proposición, podemos llamar a la geodésica  $\gamma$ , la *geodésica maximal* o *geodésica inextensible*. Además, decimos que una geodésica inextensible es *completa* si está definida en toda la recta real. Si no es así, decimos que  $\gamma$  es *incompleta*. De aquí surge otro concepto importante:

**Definición 1.24** Una variedad semi-Riemanniana  $M$  se dice que es *geodésicamente completa* si cada geodésica inextensible es completa. Por el contrario, si existe una geodésica incompleta diremos que  $M$  es *geodésicamente incompleta*.

Indicar también que para hablar de causalidad en las curvas diremos, como es natural, que una curva es *espacial*, *temporal* o *nula* si todos sus vectores velocidad  $\alpha'(s)$  son espaciales, temporales o nulos, respectivamente. Una curva cualquiera no tiene por qué cumplir ninguna de estas características causales pero una geodésica siempre lo hará ya que  $\gamma'$  es paralelo, y la traslación paralela conserva el carácter de los vectores.

De esta forma, en particular, podemos dar las siguientes definiciones:

**Definición 1.25** Diremos que una variedad  $M$  es *luminosamente, espacialmente o temporalmente completa* si todas las geodésicas nulas, espaciales o temporales, respectivamente, son completas. De igual forma diremos que una variedad es *luminosamente, espacialmente o temporalmente incompleta* si existe alguna geodésica con el carácter causal correspondiente que sea incompleta.

Por último, dos términos básicos que también aparecerán en los siguientes resultados son los de *pregeodésica* y *geodésica rota*. Una pregeodésica es simplemente aquella que admite una reparametrización como una geodésica, y una geodésica rota es una curva diferenciable a trozos cuyos segmentos diferenciables son geodésicas.

## 1.5. Transporte paralelo

Un *campo vectorial*  $Z$  a lo largo de una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  asigna cada  $t \in I$  un vector tangente a  $M$  en  $\alpha(t)$ . Cuando  $M$  es una variedad semi-Riemanniana hay una forma natural de definir la variación de  $Z$ :

**Definición 1.26** Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva en una variedad semi-Riemanniana  $M$ . Entonces existe una única función  $Z \rightarrow Z' = DZ/dt$  desde  $\mathfrak{X}(\alpha)$  a  $\mathfrak{X}(\alpha)$  llamada la *derivada covariante inducida*, que cumple lo siguiente:

1.  $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$  con  $a, b \in \mathbb{R}$ .
2.  $(hZ)' = (dh/dt)Z + hZ'$  con  $f \in C^\infty(I)$ .
3.  $(V\alpha)'(t) = D_{\alpha'(t)}(V)$  con  $t \in I, V \in \mathfrak{X}(M)$

Cuando  $Z' = 0$  diremos que  $Z$  es *paralelo*.

**Proposición 1.2 (3.19)** Para una curva  $\alpha : I \rightarrow M$ , sea  $a \in I$  y  $z \in T_{\alpha(a)}(M)$ . Entonces hay un único campo paralelo  $Z$  tal que  $Z(a) = z$ .

Debido a esta unicidad del campo paralelo surge la siguiente definición:

**Definición 1.27** Si  $b \in I$  entonces la función

$$P = P_a^b(\alpha); T_p(M) \longrightarrow T_q(M)$$

que envía cada  $z \in Z(b)$  se llama la *función transporte paralelo a lo largo de  $\alpha$*  desde  $p = \alpha(a)$  hasta  $q = \alpha(b)$ .

## 1.6. La función exponencial

Éste es también un concepto básico que aparecerá en algunos resultados por lo que puede ser útil recordarlo.

**Definición 1.28** Si  $o \in M$ , sea  $\mathcal{D}_o$  el conjunto de vectores  $v \in T_o(M)$  tal que la curva inextendible  $\lambda_v$  es definida al menos en  $[0, 1]$ . La *función exponencial* de  $M$  en  $o$  es la función

$$\exp_o : \mathcal{D}_o \longrightarrow M$$

tal que  $\exp_o(v) = \lambda_v(1)$  para todo  $v \in \mathcal{D}_o$ .

Si  $M$  es completa, entonces  $\mathcal{D}_o = T_o(M)$  para todo punto  $o$  de  $M$ . Una de las ideas más útiles de la función exponencial es la siguiente.

Si fijamos un  $v \in T_o(M)$  y  $t \in \mathbb{R}$ , entonces la geodésica que lleva un punto  $s$  a  $\gamma_v(ts)$  tiene velocidad inicial  $t\gamma'_v(0) = tv$ . Por tanto  $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$  para todo  $s$  y  $t$ . En particular, si  $v \in \mathcal{D}_o$  entonces:

$$\exp_o(tv) = \gamma_v(1) = \gamma_v(t)$$

Lo que significa que la función exponencial lleva las líneas que pasan por el origen de  $T_o(M)$  a las geodésicas de  $M$  a lo largo de  $o$ .

## 1.7. La conexión inducida y la conexión normal

Dada una subvariedad semi-Riemanniana  $M$  de  $\bar{M}$ , podemos descomponer el espacio tangente de  $\bar{M}$  como:

$$T_p\bar{M} = T_pM + T_pM^\perp$$

Asociada a dicha composición tenemos las proyecciones ortogonales

$$\tan: T_p\bar{M} \longrightarrow T_pM \quad \text{y} \quad \text{nor}: T_p\bar{M} \longrightarrow T_pM^\perp$$

**Definición 1.29** Sea  $\bar{\nabla}$  la conexión de Levi-Civita de  $\bar{M}$ , usamos la misma notación para referirnos a la *conexión inducida*:

$$\bar{\nabla}: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

Se cumple además la siguiente propiedad:

**Lema 1.3 (4.3)** Sea  $M$  una subvariedad de  $\bar{M}$  y  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$\nabla_V W = \tan \bar{\nabla}_V W,$$

donde  $\nabla$  es la conexión de Levi-Civita de  $M$ .

Esto nos lleva a preguntarnos por la parte normal de la conexión inducida, que es precisamente la que nos aporta una importante definición.

**Definición 1.30** Llamamos *operador forma* o *segunda forma fundamental* a la función  $II: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  tal que

$$II(V, W) = \text{nor} \bar{\nabla}_V W$$

**Definición 1.31** Sea  $M$  una subvariedad de  $\bar{M}$  y  $e_1, \dots, e_n$  una base de  $M$  en  $p$ , entonces se define el *campo curvatura media*  $H$  en  $p \in M$  como

$$H_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i II(e_i, e_i)$$

Para  $M \subset \bar{M}$ , igual que se considera que la geometría de  $M$  es la de los vectores tangentes a  $M$ , también hay una geometría análoga para los vectores normales a  $M$ .

**Definición 1.32** La *conexión normal* de  $M \subset \bar{M}$  es la función  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  dada por:

$$\nabla_V^\perp Z = \text{nor} \bar{\nabla}_V Z \quad \text{para} \quad V \in \mathfrak{X}(M), Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp.$$

Al elemento  $\nabla_V^\perp Z$  lo llamamos *derivada covariante normal* de  $Z$  con respecto a  $V$ .

Igual que el operador forma medía la diferencia entre  $\nabla$  y  $\bar{\nabla}$ , también mide la diferencia entre  $\nabla^\perp$  y  $\bar{\nabla}$ , pero con una formulación diferente:

**Definición 1.33** Sea  $M \subset \bar{M}$  y  $V \in \mathfrak{X}(M), Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ , definimos

$$\tilde{II}(V, Z) = \tan \bar{\nabla}_V Z$$

de forma que se cumple lo siguiente

$$\bar{\nabla}_V Z = \tilde{II}(V, Z) + \nabla_V^\perp Z$$

En particular,  $\tilde{II}$  tiene la siguiente propiedad:

$$\langle \tilde{II}(V, Z), W \rangle = -\langle II(V, W), Z \rangle$$

Ya que si  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$  y  $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ ,  $\langle Z, W \rangle = 0$ , y derivando tenemos que  $\langle \bar{\nabla}_V Z, W \rangle = -\langle Z, \bar{\nabla}_V W \rangle$ . Entonces:

$$\langle \tilde{II}(V, Z), W \rangle = \langle \bar{\nabla}_V Z, W \rangle - \langle \nabla_V^\perp Z, W \rangle = -\langle Z, \bar{\nabla}_V W \rangle = -\langle Z, \text{nor} \bar{\nabla}_V W \rangle = -\langle Z, II(V, W) \rangle$$

## 1.8. Curvas integrales

**Definición 1.34** Una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  es una *curva integral* de  $V \in \mathfrak{X}(M)$  si  $\alpha' = V_\alpha$ , es decir, si  $\alpha'(t) = V_{\alpha(t)}$  para todo  $t \in I$ .

**Corolario 1.1 (1.50)** Si  $\alpha, \beta : I \rightarrow M$  son curvas integrales de  $V$  tales que  $\alpha(a) = \beta(a)$  para algún  $a \in I$  entonces  $\alpha = \beta$ .

**Definición 1.35** Si consideramos la colección de todas las curvas integrales  $\alpha : I_\alpha \rightarrow M$  de  $V$  que empiezan en  $p \in M$ . El corolario anterior dice que  $\alpha = \beta$  en  $I_\alpha \cap I_\beta$ . Por tanto se tendrá que todas estas curvas definen una única curva integral  $\alpha_p : I_p \rightarrow M$  donde  $I_p = \cup I_\alpha$ . Llamamos a  $\alpha_p$  la *curva integral máxima* de  $V$  empezando en  $p$ .

**Definición 1.36** Se dirá que un campo vectorial es *completo* si cada una de sus curvas integrales está definida en la recta real.

**Definición 1.37** El *flujo* de un campo vectorial completo  $V$  en  $M$  es la función  $\psi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  dado por

$$\psi(p, t) = \alpha_p(t)$$

donde  $\alpha_p$  es la curva integral máxima empezando en  $p$ .

**Definición 1.38** Una curva diferencial a trozos  $\alpha : [0, B) \rightarrow M$  es *extendible* si tiene una extensión continua  $\tilde{\alpha} : [0, B] \rightarrow M$ . Entonces  $q = \tilde{\alpha}(B)$  es llamado un *punto final* o *extremo* de  $\alpha$ .

## 1.9. Geometría de Lorentz

Como ya hemos mencionado debajo de la definición 1.18, una variedad de Lorentz es una variedad semi-Riemanniana con un tensor métrico de índice 1. En esta sección damos algunas definiciones que nos permitirán hablar sobre espacios tangentes y su causalidad en una variedad de Lorentz.

Para ello, definimos en primer lugar un *espacio vectorial de Lorentz*, que es simplemente un espacio vectorial con  $\dim \geq 2$  y con un producto escalar de índice 1.

En la definición 1.16 habíamos presentado el carácter causal de los vectores, esta definición admite una generalización a subespacios vectoriales.

**Definición 1.39** Sea  $W$  un subespacio de un espacio vectorial de Lorentz  $V$  y sea  $g$  el producto escalar de  $V$ . Hay tres posibilidades:

1.  $g|_W$  es definido positivo. Entonces  $W$  es espacial.
2.  $g|_W$  es no degenerado de índice 1. Entonces  $W$  es temporal.
3.  $g|_W$  es degenerado. Entonces  $W$  es luminoso.

Los siguientes dos lemas nos serán de utilidad para demostrar resultados posteriores.

**Lema 1.4 (5.26)** Si  $z$  es un vector temporal en un espacio vectorial de Lorentz, entonces el subespacio  $z^\perp$  es espacial y  $V$  es la suma directa de  $\mathbb{R}z + z^\perp$ .

Lo que quiere decir este lema es que el subespacio  $W$  es temporal si y solo si  $W^\perp$  es espacial. Como  $(W^\perp)^\perp = W$ , las palabras espacial y temporal se pueden intercambiar. Además  $W$  es luminoso si y solo si  $W^\perp$  es luminoso.

**Lema 1.5 (5.28)** Para un subespacio  $W$  de un espacio vectorial de Lorentz, son equivalentes:

1.  $W$  es luminoso, es decir, degenerado.
2.  $W$  contiene un vector nulo, pero no uno temporal.
3.  $W \cap \Lambda = L - 0$ , donde  $L$  es un espacio unidimensional y  $\Lambda$  es el cono nulo de  $V$ .

Si en vez de tener subespacios de un espacio vectorial de Lorentz tenemos una subvariedad  $P$  de una variedad de Lorentz, se cumple que si para todo  $p \in P$  el subespacio  $T_p(P)$  tiene el mismo carácter causal que  $T_p(M)$ , entonces ese carácter causal se le atribuye a la variedad  $P$ .

Describimos a continuación los conos temporales.

**Definición 1.40** Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de todos los vectores temporales en un espacio vectorial de Lorentz  $V$ . Para  $u \in \mathcal{T}$

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\}$$

es el *cono temporal* de  $V$  que contiene a  $u$ . El cono *opuesto* será:

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle > 0\}$$

Como por el Lema 1.4  $u^\perp$  es espacial, el conjunto  $\mathcal{T}$  es la unión disjunta de estos dos conos temporales.

También utilizaremos a veces el siguiente lema.

**Lema 1.6 (5.29)** Dos vectores temporales  $v$  y  $w$  en un espacio vectorial de Lorentz están en el mismo cono temporal si y solo si  $\langle v, w \rangle < 0$ .

La existencia de conos temporales supone un problema ya que, en cualquier campo tangente de Lorentz  $T_pM$ , habrá dos conos temporales y será imposible distinguirlos intrínsecamente. Por tanto debemos elegir uno de los conos, a esta elección se le llama *orientar temporalmente*  $T_pM$ . El problema es que no siempre se podrá orientar un espacio tangente de  $M$  de una forma continua.

**Definición 1.41** Sea  $\tau$  una función en  $M$  que asigna a cada punto  $p$  un cono temporal  $\tau_p$  en  $T_pM$ .  $\tau$  es diferenciable si para cada  $p \in M$  hay un campo vectorial  $V$  en algún entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  tal que  $V_q \in \tau_q$  para todo  $q \in \mathcal{U}$ . A esta función diferenciable  $\tau$  se le llama *orientación temporal* de  $M$ .

Con estos conceptos podemos ya definir lo siguiente:

**Definición 1.42** Un *espacio tiempo* es una variedad de Lorentz de dimensión 4, conexa y orientada.

La orientación de una variedad se denomina *futuro*, y la orientación opuesta *pasado*. De esta forma, un vector tangente en un cono futuro se dice que *apunta hacia el futuro*. Si por el contrario el vector tangente pertenece a un cono pasado, se dirá que *apunta hacia el pasado*. En el trabajo diremos a menudo que una curva apunta hacia el futuro o hacia el pasado, esto significará que su vector velocidad apunta hacia el futuro o hacia el pasado, respectivamente.

# Capítulo 2

## Teoría de variaciones

### 2.1. Variaciones y campos de Jacobi

**Definición 2.1** Una *variación* de un segmento de curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ ,

$$\mathbf{x} : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M,$$

tal que  $\alpha(u) = \mathbf{x}(u, 0)$  para todo  $a \leq u \leq b$ . Si además se cumple que  $\mathbf{x}(a, v) = \alpha(a)$  y  $\mathbf{x}(b, v) = \alpha(b)$  para todo  $v \in (-\delta, \delta)$  se dice que es una *variación propia* o *con extremos fijos*.

Las curvas dependientes del parámetro  $u$  se denominan *longitudinales* y las que dependen de  $v$  son las *transversales*.

**Definición 2.2** Llamamos *campo variacional* de la variación  $\mathbf{x}$  al campo de vectores definido como:

$$V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$$

Cada  $V(u)$  es precisamente la velocidad inicial de la curva transversal  $\alpha_u : v \rightarrow \mathbf{x}(u, v)$ .

Si toda curva longitudinal  $\alpha_v$  de la variación  $\mathbf{x}$  es una geodésica se llama una *variación geodésica*.

**Definición 2.3** Si  $\gamma$  es una geodésica, un campo de vectores  $Y$  en  $\gamma$  que satisface la ecuación de Jacobi  $Y'' = R_{Y\gamma'}(\gamma')$  se denomina *campo de Jacobi*.

En el caso especial de las variaciones geodésicas, se cumple el siguiente resultado:

**Lema 2.1** *El campo variacional  $V$  de una variación geodésica es un campo de Jacobi.*

*Demostración:*

Si  $\mathbf{x}$  es una variación por geodésicas, por definición todas las curvas longitudinales son geodésicas, entonces tenemos que  $\mathbf{x}_{uu} = 0$ .

Además, sabemos que se cumple que  $\mathbf{x}_{vu} = \mathbf{x}_{uv}$  y por tanto

$$\mathbf{x}_{vuu} = \mathbf{x}_{uvu}$$

Ahora, expresando  $x_{uv}$  en coordenadas de la siguiente forma:

$$\mathbf{x}_{uv} = \sum_k \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{x}^k}{\partial v \partial u} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{x}^j}{\partial v} \right\} \partial_k$$

Se comprueba que  $\mathbf{x}_{uv} - \mathbf{x}_{vu} = R(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v)\mathbf{x}$ . De aquí obtenemos también que

$$\mathbf{x}_{vu} = \mathbf{x}_{uv} = R(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u)\mathbf{x}_u + \mathbf{x}_{uv} = R(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u)\mathbf{x}_u.$$

Por tanto  $\mathbf{x}_v$  cumple la ecuación de Jacobi evaluado en todas las curvas longitudinales. En particular se cumple para  $V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$ , y por lo tanto el campo variacional es un campo de Jacobi. □

Debido a este lema la ecuación de Jacobi se conoce también como *ecuación de la desviación geodésica*. Físicamente, si pensamos en la variación por geodésicas como una familia de partículas cayendo en caída libre, entonces el campo variacional  $V$  medirá la posición de unas partículas respecto a otras. Esta ecuación nos dirá si las partículas se van acercando o alejando entre ellas.

Mencionamos a continuación un par de lemas acerca de la unicidad y la caracterización de los campos de Jacobi que usaremos posteriormente para demostrar algunos resultados.

**Lema 2.2 (8.5)** *Sea  $\gamma$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$ , y sea  $v, w \in T_p(M)$ . Entonces existe un único campo de Jacobi en  $\gamma$  tal que  $Y(0) = v$  y  $Y'(0) = w$ .*

**Lema 2.3 (8.7)** *Sea  $Y$  un campo vectorial de una geodésica  $\gamma$ .*

1. *Si  $Y$  es tangente a  $\gamma$  entonces es un campo de Jacobi  $\Leftrightarrow Y'' = 0 \Leftrightarrow Y(s) = (as + b)\gamma'(s)$  para todo  $s$ .*
2. *Si  $Y$  es un campo de Jacobi entonces  $Y \perp \gamma \Leftrightarrow$  existe  $a \neq b$  tal que  $Y(a) \perp \gamma, Y(b) \perp \gamma \Leftrightarrow$  existe un  $a$  tal que  $Y(a) \perp \gamma, Y'(a) \perp \gamma$ .*
3. *Si  $\gamma$  es no nula, entonces  $Y$  es un campo de Jacobi  $\Leftrightarrow$  tanto  $Y^\top$  como  $Y^\perp$  son campos de Jacobi*

## 2.2. Cálculo de variaciones

En la definición 2.1 habíamos introducido el concepto de variación de una curva, pero en geometría semi-Riemanniana a veces es importante conocer en qué medida cambia la longitud de arco de un segmento de curva bajo estas pequeñas variaciones.

Recordemos que el funcional longitud de una curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  se define como sigue:

$$L(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt$$

Formalmente, sea  $\mathbf{x} : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  una variación de un segmento de curva y, para cada  $v \in (-\delta, \delta)$ , sea  $L_{\mathbf{x}}(v)$  la longitud de la curva longitudinal  $u \rightarrow \mathbf{x}(u, v)$ . Entonces  $L_{\mathbf{x}}$  es

una función real con  $L_{\mathbf{x}}(0)$  la longitud de  $\alpha$ . Bajo ciertas condiciones, la función  $L = L_{\mathbf{x}}$  es derivable, y entonces serán útiles las fórmulas de la primera y segunda variación de la longitud de arco de  $\mathbf{x}$ , es decir, para:

$$L'(0) = \left. \frac{dL}{dv} \right|_{v=0} \quad \text{y} \quad L''(0) = \left. \frac{d^2L}{dv^2} \right|_{v=0}.$$

La fórmula de la segunda variación se puede expresar en función del tensor curvatura, y la relación entre las geodésicas y la curvatura resultará tener muchas aplicaciones.

Introducimos en primer lugar una expresión para la primera fórmula de variación que, aunque no considere curvas diferenciables a trozos, también sería válida para esos casos. De todas formas, a continuación demostraremos la primera fórmula variacional más usada, que sí considera explícitamente las curvas diferenciables a trozos. A partir de ahora, cuando hablemos de las curvas  $\alpha$  tales que  $|\alpha'| > 0$ , nos estaremos refiriendo obviamente a las curvas temporales y espaciales, que se diferenciarán únicamente por el *signo de  $\alpha$*  definido como  $\varepsilon = \text{sgn}\langle \alpha', \alpha' \rangle = \pm 1$ .

**Lema 2.4 (10.1)** *Sea  $\mathbf{x}$  una variación del segmento de curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  con  $|\alpha'| > 0$ . Si  $L$  es la función longitud de  $\mathbf{x}$ , entonces*

$$L'(0) = \varepsilon \int_a^b \langle \alpha' / |\alpha'|, V' \rangle du,$$

donde  $\varepsilon$  es el signo de  $\alpha$  y  $V$  es el campo variacional de  $\mathbf{x}$ .

Vemos ahora cómo concretar para el caso de curvas diferenciables a trozos. Una variación  $\mathbf{x}$  de una curva diferenciable a trozos  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es también diferenciable a trozos debido a que  $\mathbf{x}$  es continua, y las rupturas en  $a < u_1 < \dots < u_k < b$  y la restricción de  $\mathbf{x}$  a cada uno de los intervalos  $[u_{i-1}, u_i] \times (-\delta, \delta)$  es también diferenciable. Además también podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\alpha$  y  $\mathbf{x}$  tienen las mismas discontinuidades. Por último, también se tiene que el campo variacional  $V$  de  $\mathbf{x}$  es siempre diferenciable a trozos. Por el contrario, el campo de velocidades  $\alpha'$  siempre tiene una discontinuidad en cada  $u_i$ . Esta continuidad se mide por el siguiente vector tangente:

$$\Delta \alpha'(u_i) = \alpha'(u_i^+) - \alpha'(u_i^-) \in T_{\alpha(u_i)}(M)$$

donde el primer término deriva en  $\alpha|_{[u_i, u_{i+1}]}$  y el segundo en  $\alpha|_{[u_{i-1}, u_i]}$ .

**Proposición 2.1 (10.2) PRIMERA FÓRMULA DE VARIACIÓN.** *Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  una curva diferenciable a trozos con velocidad constante  $c > 0$  y signo  $\varepsilon$ . Si  $\mathbf{x}$  es una variación de  $\alpha$ , entonces:*

$$L'(0) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle du - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta \alpha'(u_i), V(u_i) \rangle + \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle \Big|_a^b$$

donde  $u_1 < \dots < u_k$  son las rupturas de  $\alpha$  y  $\mathbf{x}$ .

*Demostración:*

Como  $|\alpha'| = c$ , el integrando del Lema anterior se convierte en  $\langle \alpha', V' \rangle / c$ . Para hacer la integral usaremos integración por partes. Como se cumple que:

$$\langle \alpha', V' \rangle = (d/du) \langle \alpha', V \rangle - \langle \alpha'', V \rangle,$$

se sigue, por el Teorema fundamental del cálculo, que en cualquier subintervalo  $[u_i, u_{i+1}]$

$$\int_{u_i}^{u_{i+1}} \langle \alpha', V' \rangle du = \langle \alpha', V \rangle \Big|_{u_i}^{u_{i+1}} - \int_{u_i}^{u_{i+1}} \langle \alpha'', V \rangle du.$$

Tomando el sumatorio en la parte izquierda de la expresión anterior desde  $i = 0$  hasta  $i = k$ , obtenemos  $c$  veces la integral del Lema 2.4. A la derecha, para obtener la expresión del enunciado, sólo nos falta ver lo que ocurre en cada  $u_i$ .

$$\langle \alpha'(u_i^-), V(u_i) \rangle - \langle \alpha'(u_i^+), V(u_i) \rangle = -\langle \Delta \alpha'(u_i), V(u_i) \rangle.$$

□

**Corolario 2.1 (10.3)** *Un segmento de curva diferenciable a trozos  $\alpha$  con velocidad constante  $c > 0$  es una geodésica (sin rupturas) si y solo si la primera variación de la longitud arco es cero para toda variación propia de  $\alpha$ .*

*Demostración:*

”  $\implies$  ”

Si  $\alpha$  es una geodésica, entonces  $\alpha'' = 0$  y las rupturas son triviales,  $\Delta \alpha'(u_i) = 0$ . Además, para variaciones propias,  $V(a)$  y  $V(b)$  son cero. Por tanto, sustituyendo en la primera fórmula de variación obtenemos que  $L'(0) = 0$ .

”  $\impliedby$  ”

Suponemos ahora que  $L'(0) = 0$  para toda variación propia  $\mathbf{x}$ . Primero tenemos que ver que cada segmento  $\alpha|_{[u_i, u_{i+1}]}$  es una geodésica. Es suficiente probar que  $\alpha''(t) = 0$  para  $u_i < t < u_{i+1}$ . Sea  $y$  cualquier vector tangente a  $M$  en  $\alpha(t)$ , y sea  $f$  una función meseta con soporte contenido en  $[t - \delta, t + \delta] \subset [u_i, u_{i+1}]$ . Tomamos también un campo de vectores  $Y$  sobre  $\alpha$  obtenido mediante el transporte paralelo de  $y$ , y finalmente definimos  $= fY$ .

Como en una variación propia  $V(a) = 0 = V(b)$ , la variación dada por  $\mathbf{x}(u, v) = \exp_{\alpha(u)}(vV(u))$  es una variación propia de  $\alpha$  cuyo campo variacional es  $V$ . Como  $L'(0) = 0$ , la fórmula de la Proposición 2.1 queda:

$$0 = \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle du = \int_{t-\delta}^{t+\delta} \langle \alpha'', fY \rangle du.$$

Como esto se cumple para todo  $y$ ,  $\delta > 0$  y  $f$ , tenemos que  $\langle \alpha''(t), y \rangle = 0$  para todo  $y$ , y por tanto  $\alpha''(t) = 0$ .

Lo único que queda por probar es que las rupturas son triviales. Para ello, igual que antes, tomamos  $y$  un vector tangente a  $\alpha(u_i)$ , y sea  $f$  una función meseta en  $u_i$  con  $\text{sopf} \subset [u_i, u_{i+1}]$ . Para una variación propia con campo variacional  $fY$ , la primera fórmula de variación queda:

$$0 = L'(0) = -(\varepsilon/c) \langle \Delta \alpha'(u_i), y \rangle \quad \text{para todo } y$$

Por lo que se concluye que  $\Delta \alpha'(u_i) = 0$ .

□

Podemos ya hablar de la segunda fórmula de variación. Si  $\mathbf{x}$  es la variación de un segmento de curva  $\alpha$ , el objetivo es comparar  $L(v)$ , con  $v$  muy pequeño, con la longitud  $L(0)$  de  $\alpha$ . Por tanto, si  $L'(0) = 0$ , esto indicará que  $\alpha$  es un punto crítico del funcional longitud de la variación. Para obtener más información acerca del punto crítico, al igual que con funciones, necesitamos estudiar  $L''(0)$ . De esta forma, la segunda fórmula de variación únicamente será necesaria si  $L'(0) = 0$ , que por el corolario 2.1 implica que  $\alpha$  es una geodésica.

Antes de presentar la expresión de la segunda fórmula de variación, necesitaremos un nuevo concepto. Teníamos que el campo variacional  $V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$  nos da las velocidades de las curvas transversales de  $\mathbf{x}$  conforme atraviesan la curva  $\alpha$ . De igual forma, denominaremos al campo  $A(u) = \mathbf{x}_{vv}(u, 0)$  el *campo de aceleración transversal de  $\mathbf{x}$* , que nos da las aceleraciones de dichas curvas transversales.

Recordar además que si  $|\alpha'| > 0$ , entonces cualquier campo vectorial  $Y$  sobre  $\alpha$  se separa en la suma  $Y^\top + Y^\perp$  de sus componentes tangente y perpendicular a  $\alpha$ , respectivamente. Además si  $\alpha$  es una geodésica, entonces  $(Y^\perp)' = (Y')^\perp$ , ya que  $\langle Y, \alpha' \rangle' = \langle Y', \alpha' \rangle$ , lo que implica que si  $Y \perp \alpha'$  también  $Y' \perp \alpha'$ . En particular, si  $Y^\perp \perp \alpha'$  también  $(Y^\perp)' \perp \alpha'$ , y si  $Y' \perp \alpha'$ , en particular,  $Y'^\perp \perp \alpha'$ . Debido a esta igualdad, en ambos casos se denotará como  $Y'^\perp$ .

**Teorema 2.1 (10.4) SEGUNDA FÓRMULA DE VARIACIÓN.** Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  un segmento de geodésica con velocidad  $c > 0$  y signo  $\varepsilon$ . Si  $\mathbf{x}$  es una variación de  $\sigma$ , entonces

$$L''(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \{ \langle V'^\perp, V'^\perp \rangle - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle \} du + \frac{\varepsilon}{c} \langle \sigma', A \rangle \Big|_a^b$$

donde  $V$  es el campo variacional y  $A$  el campo de aceleración transversal de  $\mathbf{x}$ .

*Demostración:*

Definimos  $h = h(u, v) = |\mathbf{x}_u(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$ , por tanto  $L(v) = \int_a^b h du$ , y  $L''(v) = \int_a^b (\partial h / \partial v^2) du$ . Ahora, como  $h = |\mathbf{x}_u| = (\varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle)^{1/2}$ , y  $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ , la derivada será:

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} |\mathbf{x}_u| = \frac{1}{2} (\varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle)^{-1/2} 2\varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle = \varepsilon \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle / |\mathbf{x}_u| = (\varepsilon/h) \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial v^2} &= \frac{\varepsilon}{h^2} \left\{ h \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle - \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle \frac{\partial h}{\partial v} \right\} \\ &= \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{uv} \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uvu} \rangle - \frac{\varepsilon}{h^2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{uv} \rangle^2 \right\} \end{aligned}$$

Ahora, expresando el campo  $\mathbf{x}_{uv}$  en coordenadas:

$$\mathbf{x}_{uv} = \sum_k \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{x}^k}{\partial v \partial u} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{x}^i}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{x}^j}{\partial v} \right\} \partial_k$$

Se comprueba que  $\mathbf{x}_{uv} - \mathbf{x}_{vu} = R(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \mathbf{x}_v$ . De aquí obtenemos también que

$$\mathbf{x}_{uvv} = \mathbf{x}_{vuv} = R(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_{vvu}$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} = \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle \mathbf{x}_{vu}, \mathbf{x}_{vu} \rangle + \langle \mathbf{x}_u, R(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v) \mathbf{x}_v \rangle + \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vuu} \rangle - \frac{\varepsilon}{h^2} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vu} \rangle^2 \right\}$$

Si ahora establecemos  $v = 0$ , se producen los siguientes cambios:  $h \rightarrow c$ ,  $\mathbf{x}_u \rightarrow \boldsymbol{\sigma}'$ ,  $\mathbf{x}_v \rightarrow V$ ,  $\mathbf{x}_{vu} \rightarrow V'$ ,  $\mathbf{x}_{vv} \rightarrow A$  y  $\mathbf{x}_{vuu} \rightarrow A'$ . Sustituyendo estos valores en la última expresión tenemos:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \Big|_{v=0} = \frac{\varepsilon}{c} \left\{ \langle V', V' \rangle - \langle R_{V\boldsymbol{\sigma}'} V, \boldsymbol{\sigma}' \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}', A' \rangle - \left( \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \langle \boldsymbol{\sigma}', V' \rangle^2 \right\}.$$

Podemos simplificar dos de los términos de esta expresión. Por un lado, como  $\boldsymbol{\sigma}$  es una geodésica, se cumple que  $\langle \boldsymbol{\sigma}', A' \rangle = (d/du) \langle \boldsymbol{\sigma}', A \rangle$ . Por otro lado, como  $\boldsymbol{\sigma}'/c$  es un vector unitario, la componente tangencial de  $V'$  es  $\varepsilon \langle V', \boldsymbol{\sigma}'/c \rangle (\boldsymbol{\sigma}'/c)$ . Entonces:

$$V' = (\varepsilon/c^2) \langle V', \boldsymbol{\sigma}' \rangle \boldsymbol{\sigma}' + V'^{\perp}$$

por tanto,

$$\langle V', V' \rangle = (\varepsilon/c^2) \langle V', \boldsymbol{\sigma}' \rangle^2 + \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle$$

Sustituyendo finalmente en la última expresión de  $\frac{\partial^2 h}{\partial v^2}$ :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \Big|_{v=0} = \frac{\varepsilon}{c} \left\{ \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle - \langle R_{V\boldsymbol{\sigma}'} V, \boldsymbol{\sigma}' \rangle + \frac{d}{du} \langle \boldsymbol{\sigma}', A \rangle \right\}$$

Finalmente, integrando desde  $a$  hasta  $b$  obtenemos la fórmula del enunciado. □

Para examinar con más detalle las longitudes de las curvas con los mismos puntos extremos, definimos el siguiente conjunto.

**Definición 2.4** Sea  $P$  una subvariedad semi-Riemanniana de  $M$ ,  $q$  cualquier punto de  $M$  y  $[0, b]$  un intervalo. Denotamos como  $\Omega(p, q)$  al conjunto de todas las curvas diferenciables a trozos  $\alpha : [0, b] \rightarrow M$  que van de  $p$  a  $q$ .

Tratar este conjunto  $\Omega(p, q)$  como una variedad nos proporcionará ciertas analogías muy útiles. Si  $\mathbf{x}$  es una variación propia de  $\alpha \in \Omega(p, q)$ , entonces cada curva longitudinal  $u \rightarrow \mathbf{x}(u, v)$  es un punto  $\alpha_v$  de  $\Omega(p, q)$ . Por otro lado, la variación  $\mathbf{x}$  constituye una familia uniparamétrica,  $v \rightarrow \alpha_v$ , por lo que se puede considerar como una curva en  $\Omega(p, q)$  empezando en  $\alpha$ . Al igual que la velocidad inicial de una curva la describe en su punto inicial, la velocidad inicial de  $\mathbf{x}$  es su campo variacional  $V$ . Como  $\mathbf{x}$  es una variación propia,  $V$  es cero en  $a$  y en  $b$ .

Los vectores tangentes a una variedad en un punto  $p$  son exactamente las velocidades iniciales de todas las curvas que empiezan en  $p$ , esto motiva la siguiente definición.

**Definición 2.5** El espacio tangente  $T_\alpha(\Omega)$  a  $\Omega(p, q)$  en  $\alpha$  consiste en todos los campos vectoriales  $V$  en  $\alpha$  diferenciables a trozos tales que  $V(a) = 0$  y  $V(b) = 0$ .

De esta forma, todo vector  $V \in T_\alpha(\Omega)$  está formado por las velocidades iniciales de todas las curvas transversales de la variación propia de  $\alpha$ , es decir, es el campo variacional de dicha variación.

En teoría de variedades, se dice que  $p \in M$  es un *punto crítico* de  $f \in \mathcal{F}(M)$  si  $x(f) = 0$  para todo  $x \in T_p(M)$ . Por tanto el Corolario 2.1 nos dice que las geodésicas no nulas en  $\Omega(p, q)$  son precisamente los puntos críticos de la función longitud de arco en  $\Omega(p, q)$ . En un punto crítico  $p \in M$  de  $f \in \mathcal{F}(M)$  la primera derivada de  $f$  se anula y para estudiar a la función cerca de  $p$  necesitamos las segundas derivadas, que se expresan mediante el Hessiano de  $f$  en  $p$ . Vemos a continuación, cómo se define el análogo a un punto crítico para  $L$ .

**Definición 2.6** La *forma índice*  $I_\sigma$  de una geodésica no nula  $\sigma \in \Omega(p, q)$  es la única forma bilinear

$$I_\sigma : T_\sigma(\Omega) \times T_\sigma(\Omega) \longrightarrow R,$$

tal que si  $V \in T_\sigma(\Omega)$  entonces

$$I_\sigma(V, V) = L''_{\mathbf{x}}(0),$$

donde  $\mathbf{x}$  es cualquier variación propia de  $\sigma$  con campo variacional  $V$ .

Concretamente, si la geodésica  $\sigma$  tiene velocidad  $c > 0$  y signo  $\varepsilon$ , entonces la forma índice se define de la siguiente forma:

$$I_\sigma(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \{ \langle \overset{\perp}{V}', \overset{\perp}{W}' \rangle - \langle R_{V\sigma'} W, \sigma' \rangle \} du$$

para todo  $V, W \in T_\sigma(\Omega)$ .

Resulta que en esta fórmula, los campos de vectores tangenciales podemos despreciarlos ya que, si  $V \in T_\sigma(\Omega)$  es tangente a  $\sigma$ , es decir  $\overset{\perp}{V} = 0$ , entonces

$$I_\sigma(V, W) = 0 \quad \text{para todo } W \in T_\sigma(\Omega)$$

Debido a que si  $V$  es tangente a  $\sigma$ , entonces ambos son colineales y el tensor de Riemann se anula.

Por tanto, obviando las partes tangenciales tendremos que

$$I_\sigma(V, W) = I_\sigma(\overset{\perp}{V}, \overset{\perp}{W}) \quad \text{para todo } V, W \in T_\sigma(\Omega)$$

Por tanto podemos restringir la forma índice únicamente a los campos perpendiculares:

$$T_\sigma^\perp(\Omega) = \{V \in T_\sigma(\Omega) : V \perp \sigma\}$$

A esta restricción la llamaremos  $I_\sigma^\perp$ .

Presentamos también una expresión para la forma índice en el caso de que tengamos una geodésica diferenciable a trozos.

**Corolario 2.2 (10.8)** Sea  $\sigma \in \Omega(p, q)$  una geodésica no nula. Si  $\sigma$  y  $V \in T_\sigma(\Omega)$  tienen las rupturas en  $u_1 < \dots < u_k$ , entonces:

$$I_\sigma(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle V'' - R(\overset{\perp}{V}, \overset{\perp}{\sigma}') \overset{\perp}{\sigma}', \overset{\perp}{W} \rangle du - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta \overset{\perp}{V}', \overset{\perp}{W} \rangle(u_i).$$

*Demostración:*

En la definición 2.6, escribimos

$$\langle \overset{\perp}{V}', \overset{\perp}{W} \rangle = (d/du) \langle \overset{\perp}{V}, \overset{\perp}{W} \rangle - \langle \overset{\perp}{V}'', \overset{\perp}{W} \rangle$$

salvo en las rupturas de la geodésica. Por otro lado, escribimos el último término como:

$$\langle R_{V\sigma'} W, \overset{\perp}{\sigma}' \rangle = -\langle R_{V\sigma'} \overset{\perp}{\sigma}', W \rangle = -\langle R(\overset{\perp}{V}, \overset{\perp}{\sigma}') \overset{\perp}{\sigma}', \overset{\perp}{W} \rangle.$$

Ahora, como la derivada de  $\langle \overset{\perp}{V}', \overset{\perp}{W} \rangle$  no está definida en las rupturas, tendremos:

$$\int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{d}{du} \langle \overset{\perp}{V}', \overset{\perp}{W} \rangle du = \langle \overset{\perp}{V}', \overset{\perp}{W} \rangle \Big|_{u_i}^{u_{i+1}}$$

Como  $W$  se anula en 0 y  $b$ , y para cada ruptura  $u_i (1 \leq i \leq k)$  obtenemos

$$\langle \overset{\perp}{V}'(u_i^-), \overset{\perp}{W}(u_i) \rangle - \langle \overset{\perp}{V}'(u_i^+), \overset{\perp}{W}(u_i) \rangle = -\langle \Delta \overset{\perp}{V}', \overset{\perp}{W} \rangle(u_i).$$

□

## 2.3. Puntos conjugados y puntos focales

**Definición 2.7** Sea  $\sigma$  una geodésica. Dos puntos  $\sigma(a)$  y  $\sigma(b)$  con  $a \neq b$  se dice que son *conjugados a lo largo de  $\sigma$*  si existe un campo de Jacobi  $J$  no nulo en  $\sigma$  tal que  $J(a) = 0$  y  $J(b) = 0$ .

A partir de ahora podremos decir que dos puntos  $p$  y  $q$  de la variedad son conjugados si no hay ambigüedad respecto a los puntos  $a$  y  $b$  tales que  $p = \sigma(a)$  y  $q = \sigma(b)$ . El hecho de que dos puntos sean conjugados no depende de la parametrización de  $\sigma|_{[a,b]}$  por lo que a veces estableceremos que  $a = 0$ .

El siguiente resultado interpreta un punto conjugado  $\sigma(b)$  de  $p = \sigma(0)$  a lo largo de una geodésica  $\sigma$  como un punto en el que casi se alcanzan las geodésicas que empiezan en  $p$  con velocidades iniciales cercanas a  $\sigma'(0)$ . Estas geodésicas vecinas pueden, aunque no necesariamente, alcanzar al punto  $\sigma(b)$ .

**Proposición 2.2 (10.10)** Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  una geodésica que empieza en  $p$ . Son equivalentes:

1.  $\sigma(b)$  es un punto conjugado de  $p = \sigma(0)$  a lo largo de  $\sigma$ .
2. Existe una variación  $x$  no trivial por geodésicas empezando en  $p$  de  $\sigma$  tal que  $x_v(b, 0) = 0$ .
3. La función exponencial  $\exp : T_p(M) \rightarrow M$  es singular en  $b\sigma'(0)$ , es decir, existe un vector tangente  $x$  a  $T_p(M)$  en  $b\sigma'(0)$  tal que  $d\exp_p(x) = 0$ .

Hasta ahora hemos trabajado con segmentos de curva que unían dos puntos de la variedad pero este concepto se puede generalizar sustituyendo el punto inicial por una subvariedad.

**Definición 2.8** Definimos el conjunto  $\Omega(P, q)$  como el conjunto de todas las curvas diferenciables a trozos  $\alpha : [0, b] \rightarrow M$  que van desde  $P$  a  $q$ .

Siguiendo con la notación explicada debajo de la definición 2.4, una curva en  $\Omega(P, q)$  empezando en  $\alpha$  es una variación  $x$  diferenciable a trozos cuyas curvas longitudinales están todas en  $\Omega(P, q)$ . Por tanto la primera curva transversal de  $x$  está en  $P$ , mientras que la última es constante en  $q$ . Decimos que dicha variación  $x$  es una  $(P, q)$ -variación de  $\alpha$ .

Similar a la definición 2.5 tenemos la siguiente:

**Definición 2.9** El espacio tangente  $T_\alpha(\Omega)$  a  $\Omega(P, q)$  en  $\alpha$  consiste en todas los campos diferenciables  $V$  en  $\alpha$  tales que  $V(0) \in T_{\alpha(0)}P$  y  $V(b) = 0$ .

En el Corolario 2.1 habíamos visto que un segmento de una curva con velocidad constante era una geodésica si y solo si era un punto crítico del funcional longitud para una variación propia de la curva. Ahora podemos generalizar esta idea y decir que los puntos críticos de  $L$  en  $\Omega(P, q)$  son las geodésicas  $\sigma \in \Omega(P, q)$  que son normales a  $P$ .

**Corolario 2.3 (10.26)** Sea  $\alpha \in \Omega(P, q)$  con  $|\alpha'| > 0$ . Entonces  $L'(0) = 0$  para toda variación  $x$  de  $\alpha$  en  $\Omega(P, q)$ , si y solo si  $\alpha$  es una geodésica normal a  $P$ .

*Demostración:*

”  $\Leftarrow$  ”

La primera fórmula de variación que aparece en la Proposición 2.1 es:

$$L'(0) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle du - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta \alpha'(u_i), V(u_i) \rangle + \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle \Big|_a^b$$

El primer término se anula porque, al ser  $\alpha$  una geodésica, se tiene que  $\alpha'' = 0$ . El segundo término se anula porque en este caso la geodésica no tiene rupturas. Por último, el tercer término sería el siguiente:

$$\frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle \Big|_0^b = \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha'(b), V(b) \rangle - \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha'(0), V(0) \rangle$$

Pero como todas las curvas longitudinales terminan en  $q$ , entonces  $V(b) = 0$ . Además, al ser  $\alpha$  normal a  $P$ , y  $V(a)$  tangente a  $P$ , entonces  $\alpha'(a) \perp V(a)$ .

”  $\implies$  ”

Por el Corolario 2.1 sabemos que  $\alpha$  es una geodésica. Tomamos ahora un vector  $y \in T_{\alpha(0)}P$ , y un campo  $V \in T_{\alpha}(\Omega)$  tal que  $V(0) = y$ . Sea  $\mathbf{x}$  una variación de  $\alpha$  en  $(P, q)$  cuyo campo variacional es  $V$ . Como en este caso  $V(b) = 0$ ,

$$0 = L'_{\mathbf{x}}(0) = \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle \Big|_0^b = \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha'(0), y \rangle$$

Por tanto  $\alpha'(0) \perp P$ . □

Ahora que hemos visto una caracterización de las geodésicas normales mediante la primera variación del funcional longitud, es interesante comprobar que en la segunda variación aparece el operador forma  $II$ .

En efecto, si  $\sigma \in \Omega(P, q)$  es una geodésica normal, para una variación  $\mathbf{x}$  de  $\sigma$  en  $\Omega(P, q)$ , la expresión  $\langle \sigma', A \rangle \Big|_0^b$  del Teorema 2.1, se reduce a  $-\langle \sigma'(0), A(0) \rangle$ , ya que la última curva transversal de  $\mathbf{x}$  es constante. Si  $\alpha$  es la primera curva transversal, entonces por la definición de  $A$ ,  $A(0) = \alpha''(0)$ . Además, como  $\sigma'(0) \perp P$ ,

$$\langle \sigma'(0), A(0) \rangle = \langle \sigma'(0), \text{nor} \alpha''(0) \rangle = \langle \sigma'(0), II(\alpha'(0), \alpha'(0)) \rangle.$$

Pero  $\alpha'(0) = V(0)$ , donde  $V$  es el campo variacional de  $\mathbf{x}$ . Por tanto podemos concluir que:

$$L''(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \{ \langle V^{\perp}, V^{\perp} - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle \} du + \frac{\varepsilon}{c} \langle \sigma'(0), II(V(0), V(0)) \rangle.$$

Igual que antes, la forma índice de una geodésica normal no nula se define como la única forma bilineal simétrica en  $T_{\sigma}(\Omega)$  tal que  $I_{\sigma}(V, V) = L''_{\mathbf{x}}(0)$  para cualquier variación  $\mathbf{x}$  en  $P$  con campo variacional  $V$ . Por tanto, la simetría del operador forma  $II$  nos da la siguiente expresión para la forma índice que generaliza la de la definición 2.6.

**Corolario 2.4 (10.27)** *Si  $\sigma \in \Omega(P, q)$  es una geodésica normal con velocidad  $c > 0$  y signo  $\varepsilon$ , entonces, para  $V, W \in T_{\sigma}(\Omega)$ ,*

$$I_{\sigma}(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \{ \langle V^{\perp}, W^{\perp} - \langle R_{V\sigma'} W, \sigma' \rangle \} du + \frac{\varepsilon}{c} \langle \sigma'(0), II(V(0), W(0)) \rangle.$$

*Igual que antes tendremos que  $I_{\sigma}(V, W) = I_{\sigma}(\overset{\perp}{V}, \overset{\perp}{W})$  por lo que también podremos hablar de la restricción  $I_{\sigma}^{\perp}$ .*

Nos interesa ahora estudiar un concepto equivalente al de puntos conjugados para el caso de curvas en  $\Omega(P, q)$ , es decir, sustituimos el que era el punto inicial  $p$  por la subvariedad  $P$ . Para ello, necesitamos primero el siguiente resultado.

Habíamos dicho antes que el campo variacional de una variación por geodésicas es un campo de Jacobi. El siguiente resultado es una especie de recíproco para el caso de una variación de geodésicas normales.

**Proposición 2.3 (10.28)** *Un campo de Jacobi  $V$  en una geodésica  $\sigma$  normal a  $P$  es el campo variacional de la variación  $x$  de  $\sigma$  a través de geodésicas normales si y solo si:*

$$V(0) \text{ es tangente a } P \quad \text{y} \quad \tan V'(0) = \tilde{H}(V(0), \sigma'(0)).$$

Un campo de Jacobi satisfaciendo estas condiciones se llamará *campo de  $P$ -Jacobi en  $\sigma$* .

*Demostración:*

”  $\implies$  ”

Sea  $V$  un campo de Jacobi tal que es el campo variacional de dicha variación  $x$ , entonces la primera curva transversal  $\alpha$  de  $x$  está en  $P$ , y el campo vectorial definido como  $Z(v) = x_u(0, v)$  en  $\alpha$  es normal a  $P$ . (Ver Figura 2.1) Entonces  $V(0) = \alpha'(0)$  que es tangente a  $P$ , y

$$V'(0) = x_{vu}(0, 0) = x_{uv}(0, 0) = Z'(0).$$

Pero  $\tan Z' = \tilde{H}(\alpha', Z)$  y, como  $Z(0) = x_u(0, 0) = \sigma'(0)$ , ya tenemos que:

$$\tan V'(0) = \tan Z'(0) = \tilde{H}(\alpha'(0), Z(0)) = \tilde{H}(V(0), \sigma'(0)),$$

como queríamos ver.

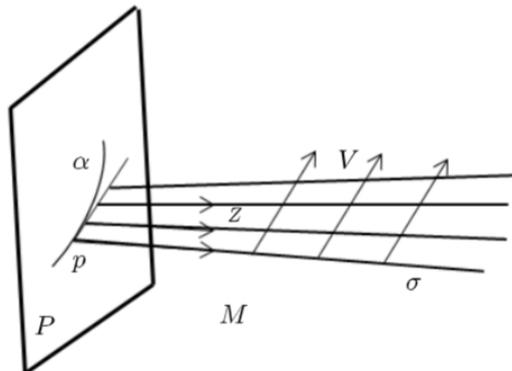


Figura 2.1: Elaboración propia basada en [1], prop. 10.28.

”  $\impliedby$  ”

Suponemos ahora que el campo de Jacobi  $V$  verifica las propiedades del enunciado y veamos que coincide con el campo variacional de una variación  $x$ . Sea  $\alpha$  una curva en  $P$  tal que  $\alpha'(0) = V'(0)$ . Probamos primero que se cumple el siguiente enunciado:

- Existe un campo vectorial  $Z$  en  $\alpha$  tal que  $Z(0) = \sigma'(0)$  y  $Z'(0) = V'(0)$ .

Sean  $A$  y  $B$  dos campos normales paralelos de  $\alpha$  conseguidos a través del transporte paralelo normal de  $\sigma'(0)$  y  $\text{nor}V'(0)$  a lo largo de  $\alpha$ . Si definimos  $Z(v) = A(v) + vB(v)$  para todo  $v$  entonces  $Z(0) = \sigma'(0)$ . Además, como  $\alpha'(0) = V'(0)$ ,

$$Z'(0) = A'(0) + B(0) = \tilde{H}(V(0), \sigma'(0)) + \text{nor}V'(0)$$

Ya que  $A'(0) = \bar{\nabla}_{\alpha'(0)} \sigma'(0) = \tilde{H}(\alpha'(0), \sigma'(0)) + \nabla_{\alpha'(0)}^\perp \sigma'(0)$  y este último término se anula. Además por la segunda hipótesis esto es  $\tan V'(0) + \text{nor} V'(0) = V'(0)$ . Tomando entonces dicho  $Z$ , definimos la variación  $\mathbf{x}$  requerida. Sea  $\exp$  la función exponencial del normal de  $P$ . Entonces  $\mathbf{x}(u, v) = \exp(uZ(v))$  define una variación de  $\sigma$ . Las curvas longitudinales de  $\mathbf{x}$  son geodésicas con velocidad inicial  $Z(v)$ , por tanto son normales a  $P$ .

Si  $Y$  es el campo variacional de  $\mathbf{x}$ , entonces  $Y(0) = \alpha'(0) = V(0)$ . Por construcción,  $\mathbf{x}_u(0, v) = Z(v)$ , por tanto:

$$Y'(0) = \mathbf{x}_{vu}(0, 0) = \mathbf{x}_{uv}(0, 0) = Z'(0) = V'(0)$$

Por el Lema 2.2 esto da  $Y = V$ .

□

Con la definición de los campos  $P$ -Jacobi podemos ya definir el concepto equivalente al de puntos conjugados.

**Definición 2.10** Sea  $\sigma$  una geodésica de  $M$  que es normal a la subvariedad  $P \subset M$ , es decir,  $\sigma(0) \in P$  y  $\sigma'(0) \perp P$ . Entonces decimos que  $\sigma(r)$  con  $r \neq 0$  es un *punto focal* de  $P$  a lo largo de  $\sigma$  si existe un campo de  $P$ -Jacobi  $J$  no nulo en  $\sigma$  tal que  $J(r) = 0$ .

Por el Lema 2.3 un campo de  $P$ -Jacobi  $J$  que se anula en  $r \neq 0$  es siempre perpendicular a  $\sigma$  ya que, al anularse en  $r$ , en particular se cumple que  $J(r) \perp \sigma$  y por ser  $J(0)$  tangente a  $P$ ,  $J(0) \perp \sigma$ .

En un sentido geométrico, se entiende que  $\sigma(b)$  es un punto focal de  $P$  a lo largo de una geodésica normal  $\sigma$  si existe una familia de geodésicas normales con velocidades iniciales cercanas a  $\sigma'(0)$  que casi alcanzan a  $\sigma(b)$ . Formalmente:

**Proposición 2.4 (10.30)** Sea  $\sigma : [0, b] \rightarrow M$  una geodésica normal a  $P$ . Son equivalentes:

1.  $\sigma(b)$  es un punto focal de  $P$  a lo largo de  $\sigma$ .
2. Existe una variación no trivial  $\mathbf{x}$  de  $\sigma$  a través de geodésicas normales a  $P$  para la que  $\mathbf{x}_v(b, 0) = 0$ .
3. La función exponencial<sup>1</sup>  $\exp^\perp : NP \rightarrow M$  es singular en  $b\sigma'(0)$ , es decir, existe un vector no nulo  $x \in T_{b\sigma'(0)}(NP)$  tal que  $d\exp_p(x) = 0$ .

*Demostración:*

(1)  $\rightarrow$  (2)

Si  $\sigma(b)$  es un punto focal, entonces existe un campo de  $P$ -Jacobi no nulo tal que  $J(b) = 0$ . Por la Proposición 2.3, un campo de  $P$ -Jacobi es un campo variacional de una variación  $\mathbf{x}$  de geodésicas normales, es decir,  $J(u) = V(u) = \mathbf{x}_v(u, 0)$  y por tanto  $0 = J(b) = V(b) = \mathbf{x}_v(b, 0)$ .

<sup>1</sup>El conjunto  $NP$  se define como  $NP = \cup\{T_p P^\perp : p \in P\}$ , es decir, es el conjunto de los vectores normales a  $M$ . Por otro lado,  $\pi : NP \rightarrow P$  es la proyección de  $NP$  en  $P$ . Al par  $(NP, P)$  lo llamamos *haz normal*. Lo que hace la función  $\exp^\perp : NP \rightarrow M$  es llevar un  $v \in NP$  a  $\lambda_v(1)$ , donde  $\lambda$  es la geodésica con velocidad inicial  $v$ .

(2)  $\longrightarrow$  (1)

Por hipótesis existe una variación  $\mathbf{x}$  de  $\sigma$  a través de geodésicas normales a  $P$ , por el Lema 2.1 sabemos que el campo variacional  $V$  de esta variación será un campo de Jacobi, y por la Proposición 2.3, es un campo de  $P$ -Jacobi. Además  $V$  cumple que  $V(b) = \mathbf{x}_v(b, 0) = 0$ , por lo que  $\sigma(b)$  es un punto focal a lo largo de  $\sigma$ .

(3)  $\longrightarrow$  (2)

Tenemos que buscar una variación por geodésicas normales que cumpla 2. Por reparametrización vamos a suponer que  $b = 1$ . Sea  $x$  un vector no nulo tangente a  $NP$  en  $\sigma'(0)$  para el cual  $dexp(x) = 0$ , y sea  $p = \sigma(0) \in P$ .

Suponemos primero que  $x$  es un vector tangente a la fibra<sup>2</sup>  $T_p(P)^\perp$  de  $NP$ . Como esta fibra es un subespacio de  $T_p(M)$ , podemos aplicar la Proposición 2.2, por la que  $\sigma(1)$  es un punto conjugado de  $p$  a lo largo de  $\sigma$ , y si el campo variacional es  $P$ -Jacobi, también será un punto focal de  $P$  a lo largo de  $\sigma$ . Entonces tendríamos que se cumple 1, y como ya hemos visto, 1 implica 2.

Si  $\mathbf{x}$  no fuese tangente a la fibra, entonces  $d\pi(x) \neq 0$ , donde  $\pi$  es la proyección de  $NP$  en  $P$ . Si  $Z$  es una curva con velocidad inicial  $Z'(0) = x$ , entonces  $\mathbf{x}(u, v) = exp(uZ'(v))$  es la variación que buscábamos ya que:

$$\mathbf{x}_v(u, v) = dexp(uZ'(v)) \longrightarrow \mathbf{x}_v(1, 0) = dexp(Z'(0)) = dexp(x) = 0$$

(2)  $\longrightarrow$  (3)

Si tomamos  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v) = u\mathbf{x}_u(0, v)$ , por el final de la Proposición 2.3 sabemos que  $\mathbf{x}(u, v) = exp(\tilde{\mathbf{x}}(u, v))$  define una variación de  $\sigma$ , ya que  $Z := \mathbf{x}_u(0, v)$  cumple que  $Z(0) = \mathbf{x}_u(0, 0) = \sigma'(0)$  y  $Z'(0) = \mathbf{x}_{uv}(0, 0) = \mathbf{x}_{vu}(0, 0) = V'(0)$ . Por tanto, tendremos que  $exp(\tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0)) = \mathbf{x}_v(1, 0) = 0$  por hipótesis. Ahora, si consideramos la curva  $\lambda(v) = \mathbf{x}_u(0, v)$ , se tiene que  $\lambda'(v) = \mathbf{x}_{uv}(0, v)$  y por tanto que  $\lambda'(0) = \mathbf{x}_{uv}(0, 0) = \tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0)$ . Es decir,  $\tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0)$  es la velocidad inicial de  $\lambda$  que está en  $NP$ . Aplicando la proyección a  $\lambda$  tenemos que  $\pi(\lambda(v)) = \mathbf{x}(0, v)$  en  $P$ .

Como  $exp(\tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0)) = \mathbf{x}_v(1, 0) = 0$ , la función  $exp$  será singular si  $dexp(\tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0)) = 0$  con  $\tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0) \neq 0$ . Ya que, como hemos visto,  $\tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0)$  es tangente a  $NP$  ya que  $\lambda \in NP$  y  $\lambda'(0) = \tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0)$ . Por el contrario, si  $\tilde{\mathbf{x}}_v(1, 0) = 0$ , bastará tomar  $\tilde{\mathbf{x}}(u, v)$  como variación en la Proposición 2.3 y se tendrá que se cumple el segundo apartado, lo que implicará a su vez que  $exp$  es singular en  $\sigma'(0)$ .

□

**Ejemplo 2.1** Si  $P$  es el hiperboloide  $x^2 + y^2 = 1 + z^2$  en  $\mathbb{R}^3$ . (Ver Figura 2.2). Consideramos el eje  $x$  como una geodésica normal empezando en  $p = (1, 0, 0)$ . Entonces el origen y el punto  $q = (2, 0, 0)$  son puntos focales de  $P$  a lo largo de la geodésica. De hecho las geodésicas a lo largo del círculo  $z = 0$  se juntan en el origen, mientras que las geodésicas normales cercanas a  $p$  que parten de la hipérbola  $y = 0$  casi se juntan en  $q$ .

<sup>2</sup>Sea  $p \in P$  y  $\pi : NP \longrightarrow P$  la proyección, al elemento  $\pi^{-1}(p)$  se le llama *fibra* de  $NP$ .

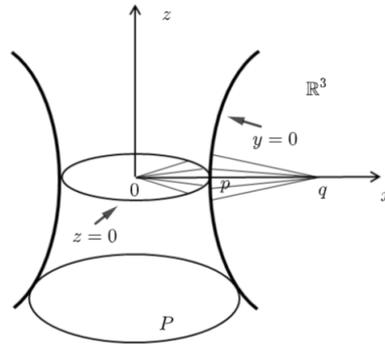


Figura 2.2: Ejemplo de puntos focales. Elaboración propia basada en [1], ejemplo 10.31.

El objetivo ahora es relacionar los puntos focales de una variedad  $P$  a lo largo de una geodésica  $\sigma$  con la forma índice. Esta relación nos permitirá saber si la geodésica maximiza el funcional longitud o no, en función de la existencia de puntos focales.

Para llegar a este resultado necesitamos un par de lemas previos.

**Lema 2.5 (10.15)** Si  $V, W$  son campos de Jacobi en una geodésica  $\sigma$ , entonces  $\langle V', W \rangle - \langle V, W' \rangle$  es una constante.

*Demostración:* Se cumple lo siguiente:

$$\langle V', W \rangle' = \langle V'', W \rangle + \langle V', W' \rangle = -\langle R_{V\sigma'} W, \sigma' \rangle + \langle V', W' \rangle$$

donde se ha usado la definición de campo de Jacobi y que el tensor de Riemann es anti-autoadjunto. La expresión anterior, por las simetrías del tensor de Riemann, es equivalente al desarrollo de  $\langle V, W' \rangle'$ .

□

**Lema 2.6 (10.16)** En una geodésica  $\sigma$  sean  $Y_1, \dots, Y_k$  campos de Jacobi tales que  $\langle Y_i', Y_j \rangle = \langle Y_i, Y_j' \rangle$  para todo  $i, j = 1, \dots, k$ . Si  $V = \sum f_i Y_i$ , entonces

$$\langle V', V' \rangle - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle = \langle A, A \rangle + \langle V, B \rangle',$$

donde  $A = \sum f_i' Y_i$  y  $B = \sum f_i Y_i'$ .

*Demostración:*

Como  $V' = A + B$ ,

$$\begin{aligned} \langle V, B \rangle' &= \langle V', B \rangle + \langle V, B' \rangle = \langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle \\ &\quad + \langle V, \sum f_i' Y_i' \rangle + \langle V, \sum f_i Y_i'' \rangle. \end{aligned}$$

La ecuación de Jacobi  $Y_i'' = R_{Y_i\sigma'} \sigma'$  convierte el último sumando en  $-\langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle$ . Usando la hipótesis sobre los  $Y_i$ , obtenemos lo siguiente:

$$\langle V, \sum f_i' Y_i' \rangle = \sum f_i f_i' \langle Y_j, Y_i' \rangle = \sum f_j f_i \langle Y_j', Y_i \rangle = \langle A, B \rangle.$$

Por tanto,

$$\langle V, B \rangle' = 2\langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle.$$

Como  $\langle V', V' \rangle = \langle A + B, A + B \rangle$ , obtenemos finalmente el resultado. □

**Teorema 2.2 (10.34)** *Sea  $\sigma \in \Omega(P, q)$  una geodésica normal tal que  $\sigma'(s)^\perp$  de  $T_{\sigma(s)}M$  para algún  $s$ , y tiene signo  $\varepsilon$ . Entonces,*

1. *Si no hay puntos focales de  $P$  a lo largo de  $\sigma$ , entonces  $I_\sigma^\perp$  es definido (positivo si  $\varepsilon = 1$ , negativo si  $\varepsilon = -1$ ).*
2. *Si hay un punto focal  $\sigma(s)$ ,  $0 < s < b$ , a lo largo de  $\sigma$ , entonces  $I_\sigma$  no es semidefinida.*

*Demostración:*

(1) Tenemos que probar que  $\varepsilon I_\sigma$  es definida positiva en  $T_\sigma^\perp(\Omega)$ . Sean  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  campos de  $P$ -Jacobi en  $\sigma$  que se anulan en  $u = 0$  y tal que  $Y_1'(0), \dots, Y_{n-1}'(0)$  es una base para  $\sigma'(0)^\perp$ . Por el segundo enunciado de la Proposición 2.3, estos campos de Jacobi son perpendiculares a  $\sigma$ . Es más, como no hay puntos focales a lo largo de  $\sigma$ , para  $0 < u \leq b$  los vectores  $Y_1(u), \dots, Y_{n-1}(u)$  son también una base para  $\sigma'(u)^\perp$ . Por tanto si  $V \in T_\sigma(\Omega)$ , existen funciones  $f_i$  diferenciables a trozos tales que  $V = \sum f_i Y_i$  en  $(0, b]$ . Estas funciones admiten una extensión a  $[0, b]$ . Ahora, resulta que si  $V$  y  $W$  son campos de  $P$ -Jacobi en  $\sigma$ , entonces  $\langle V'(0), W(0) \rangle = \langle V(0), W'(0) \rangle$  ya que, por la Proposición 2.3,  $W(0)$  es tangente a  $P$  y

$$\begin{aligned} \langle V'(0), W(0) \rangle &= \langle \tan V'(0), W(0) \rangle = \langle \tilde{H}(V(0), \sigma'(0)), W(0) \rangle \\ &= -\langle H(V(0), W(0)), \sigma'(0) \rangle = -\langle H(W(0), V(0)), \sigma'(0) \rangle \\ &= \langle V(0), W'(0) \rangle \end{aligned}$$

Por tanto, por el Lema 2.5, se debe cumplir que  $\langle V', W \rangle = \langle V, W' \rangle$ .

Con este último resultado podemos aplicar el Lema 2.6,

$$\langle V', V' \rangle = \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle = \langle A, A \rangle + \langle V, B \rangle'$$

Por el Corolario 2.4, tomando  $c = 1$ ,

$$\varepsilon I_\sigma(V, V) = \int_0^b \langle A, A \rangle du + \langle V, B \rangle|_0^b - \langle \sigma'(0), H(V(0), V(0)) \rangle.$$

Pero como  $V(b) = 0$  y cada  $Y_i$  es un campo de  $P$ -Jacobi, los dos últimos términos se cancelan mutuamente:

$$\begin{aligned} \langle V, B \rangle|_0^b &= -\langle V(0), B(0) \rangle = -\langle V(0), \sum f_i(0) Y_i'(0) \rangle \\ &= -\sum f_i(0) \langle V(0), \tan Y_i'(0) \rangle = -\sum f_i(0) \langle V(0), \tilde{H}(Y_i(0), \sigma'(0)) \rangle \\ &= -\langle V(0), \tilde{H}(V(0), \sigma'(0)) \rangle = \langle H(V(0), V(0)), \sigma'(0) \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, como  $A \perp \sigma$  por ser  $Y_i \perp \sigma$  y la hipótesis es que  $\sigma'(s)^\perp$  es espacial, tenemos que  $\langle A, A \rangle \geq 0$ . Por tanto  $\varepsilon I_\sigma(V, V) \geq 0$ . Además ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_\sigma(V, V) = 0 &\implies \int_0^b \langle A, A \rangle du = 0 \implies \langle A, A \rangle = 0 \\ &\implies A = 0 \implies f_i = cte, f_i(b) = 0 \implies V = 0 \end{aligned}$$

Por tanto podemos concluir que  $I_\sigma^\perp$  es definida.

(2) Para ver esto vamos a encontrar un campo de vectores para el cual la forma índice  $\varepsilon I_\sigma$  sea negativa y otra para la que sea positiva.

Por hipótesis, existe un campo  $P$ -Jacobi con  $J(r) = 0$ . Extendemos  $J$  a un campo  $Y$  sobre  $\sigma$  definiendo  $Y = 0$  en  $\lambda|_{[r,b]}$ . Entonces  $Y$  tendrá una sola ruptura en  $r$ , con  $Y'(r^-) = J'(r) \neq 0$  e  $Y'(r^+) = 0$ . Por tanto  $\Delta Y'(r) \neq 0$ . Por otro lado, por la Proposición 2.3, sabemos que  $Y \perp \sigma'$  ya que es perpendicular a  $\sigma$  en 0 y en  $r$ . Por tanto, teniendo en cuenta esto y que  $\sigma$  es una geodésica, tenemos que

$$0 = \frac{d}{du} \langle Y(u), \sigma'(u) \rangle = \langle Y'(u), \sigma'(u) \rangle + \langle Y(u), \sigma''(u) \rangle = \langle Y'(u), \sigma'(u) \rangle$$

Por tanto concluimos que  $Y' \perp \sigma'$ . Elegimos ahora un campo  $W$  perpendicular a  $\sigma$ , tal que  $W(r) = (\Delta Y')(r)$ . Vamos a encontrar un  $\delta$  tal que  $\varepsilon Y_\sigma(Y + \delta W, Y + \delta W) < 0$ . Sabemos que

$$\varepsilon I_\sigma(Y + \delta W, Y + \delta W) = \varepsilon \{ I_\sigma(Y, Y) + 2\delta I_\sigma(Y, W) + \delta^2 I_\sigma(W, W) \}$$

Como  $Y$  es un campo  $P$ -Jacobi cumple por definición que  $Y'' = R_{Y\sigma'}(\sigma')$ . Además se anula en su única ruptura en  $r$ , por tanto, sustituyendo en la fórmula del Corolario 2.2, obtenemos que  $I_\sigma(Y, Y) = 0$ . Por otro lado,  $\varepsilon I_\sigma(Y, W)$  queda de la siguiente forma

$$-(1/c) \langle \Delta Y', W \rangle(r) = -(1/c) |\Delta Y'(r)|^2 < 0$$

ya que  $W = \Delta Y'(r)$  es perpendicular a  $\sigma$  y  $\sigma'(r)^\perp$  es espacial.

Por tanto, para un  $\delta$  suficientemente pequeño, habremos encontrado un campo de vectores para el que la forma índice es negativa.

Buscamos ahora un campo para el cual la forma índice es positiva. Para esto no será necesaria la existencia de puntos focales. Sea  $y$  cualquier vector perpendicular a  $\sigma'(0)$ , lo extendemos a un campo de vectores  $Y$  a lo largo de  $\sigma$  mediante transporte paralelo. Sabemos que  $\varepsilon \langle y, y \rangle = \varepsilon$ , ya que por hipótesis  $\sigma'(s)^\perp$  es espacial. Tomamos  $\delta > 0$  tal que  $\text{sen}(u/\delta) = 0$  en los extremos de la curva, es decir,  $\delta$  es de la forma  $b/k\pi$ . Definimos entonces el campo  $V = \delta \text{sen}(u/\delta) Y$ . Este campo es perpendicular a  $\sigma$ , ya que  $Y$  lo es.

Para calcular la forma índice vamos a tomar  $|\sigma'| = c = 1$  para simplificar. Además, siguiendo la definición de curvatura seccional 1.21, tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle R_{V, \sigma'} V, \sigma' \rangle &= K(V, \sigma') \{ \langle V, V \rangle \langle \sigma', \sigma' \rangle - \langle V, \sigma' \rangle^2 \} \\ &= K(V, \sigma') \langle V, V \rangle \varepsilon. \end{aligned}$$

Se tiene además que

$$\begin{aligned} V' &= \cos(u/\delta) Y \\ \langle V, V \rangle &= \delta^2 \text{sen}^2(u/\delta) \langle Y, Y \rangle = \delta^2 \text{sen}(u/\delta) \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Entonces, sustituyendo en la expresión de la definición 2.6, y escribiendo  $K = K(V, \sigma')$  tendremos:

$$\begin{aligned} I_\sigma(V, V) &= \varepsilon \int_a^b \{ \langle V', V' \rangle - \langle V, V \rangle \varepsilon \} du \\ &= \varepsilon \int_a^b \{ \langle y, y \rangle \cos^2(u/\delta) - K \delta^2 \text{sen}^2(u/\delta) \varepsilon \langle y, y \rangle \} du \\ &= \int_a^b \{ \cos^2(u/\delta) - K \delta^2 \text{sen}^2(u/\delta) \} du. \end{aligned}$$

Pero  $K$  está acotado en  $[a, b]$ ; por tanto para un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño,  $I_\sigma(V, V)$  será mayor que 0.

□

El primer apartado de este Teorema nos está diciendo que si no hay puntos focales de  $P$  a lo largo de  $\sigma$ , entonces  $I_\sigma^\perp(V, V) = L''(0)$  es siempre mayor que cero si  $\sigma$  es espacial y menor que cero si  $\sigma$  es temporal. Es decir, si el signo de  $\sigma$  es positivo, su longitud será mínima de forma local, y si el signo es negativo, su longitud será máxima también localmente.

Por el contrario, el segundo apartado nos dice que si hay algún punto focal a lo largo de  $\sigma$  entonces,  $I_\sigma(V, V) = L''(0)$  puede tomar valores mayores o menores que 0, es decir, no se maximiza ni se minimiza la longitud.

Aunque la función longitud de arco posee un importante sentido geométrico, su teoría variacional puede ser complicada. Por ello, presentamos otro concepto más general cuya teoría variacional es más simple y nos llevará posteriormente a importantes resultados directamente relacionados con el Teorema de singularidad de Penrose.

**Definición 2.11** Para un segmento de curva  $\alpha : [0, b] \rightarrow M$  en una variedad semi-Riemanniana, la integral

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^b \langle \alpha', \alpha' \rangle du$$

es conocida como la *energía*.

Para una variación diferenciable a trozos  $\mathbf{x}$  de  $\alpha$ ,  $E_{\mathbf{x}}(v)$  será el valor de  $E$  de la curva longitudinal  $u \rightarrow \mathbf{x}(u, v)$ , tal que

$$E_{\mathbf{x}}(v) = \frac{1}{2} \int_0^b \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle du$$

A diferencia de  $L_{\mathbf{x}}$ , la función  $E_{\mathbf{x}}$  siempre es diferenciable sin necesidad de establecer restricciones a  $\mathbf{x}$ . En particular la energía se puede usar para estudiar geodésicas nulas. Como hemos mencionado antes, las fórmulas de variación para  $E$  son más sencillas, mencionamos a continuación un lema que nos llevará posteriormente a dichas fórmulas.

**Lema 2.7 (10.38)** Sea  $\mathbf{x}$  una variación de un segmento de curva  $\alpha$ , con  $V$  el campo variacional y  $A$  el campo de aceleración de  $\mathbf{x}$ . Si  $f = f(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$  entonces:

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=0} &= \langle V', \alpha' \rangle = -\langle V, \alpha'' \rangle + \frac{d}{du} \langle V, \alpha' \rangle, \\ \left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \right|_{v=0} &= \langle V', V' \rangle - \langle R_V \alpha' V, \alpha' \rangle + \langle A', \alpha' \rangle \\ &= -\langle V'' - R_V \alpha' \alpha', V \rangle + \langle A', \alpha' \rangle + \frac{d}{du} \langle V', V \rangle. \end{aligned}$$

Integrando las expresiones anteriores obtenemos finalmente las fórmulas de variación:

**Proposición 2.5 (10.39)** *Sea  $\mathbf{x}$  una variación de  $\alpha : [0, b] \rightarrow M$ , con  $V$  y  $A$  los campos de variación y aceleración transversal. Entonces*

$$E'_{\mathbf{x}}(0) = \int_0^b \langle V'' \rangle du = - \int_0^b \langle V, \alpha'' \rangle du - \sum_{i=1}^k \langle V, \nabla \alpha' \rangle(u_i) + \langle V, \alpha' \rangle \Big|_0^b,$$

donde  $u_1 \dots < u_k$  son las rupturas de  $\mathbf{x}$  y de  $\alpha$ . Además, si  $\alpha$  es una geodésica, entonces:

$$E''_{\mathbf{x}}(0) = \int_0^b \{ \langle V', V' \rangle - \langle R_{V\alpha'} V, \alpha' \rangle \} du + \langle A, \alpha' \rangle \Big|_0^b$$

Si usamos la primera fórmula de variación de  $E$  se puede comprobar que los puntos críticos de  $E$  son precisamente las geodésicas normales desde  $P$  hasta  $q$ . Si  $\sigma$  es una geodésica de este tipo, el análogo a la forma índice para  $L$  es el Hessiano  $H_{\sigma}$  para  $E$ .

**Definición 2.12** *Sea  $\sigma$  una geodésica normal en  $\Omega(P, q)$ . El Hessiano  $H_{\sigma}$  es la única forma  $\mathbb{R}$ -lineal en  $T_{\sigma}(\Omega)$  tal que  $H_{\sigma}(V, V) = E''_{\mathbf{x}}(0)$ , donde  $\mathbf{x}$  es cualquier variación de  $\sigma$  cuyas curvas longitudinales están en  $\Omega(P, q)$  y cuyo campo variacional es  $V$ . Se expresa por tanto de la siguiente forma:*

$$H_{\sigma}(V, W) = \int_0^b \{ \langle V', W' \rangle + \langle R_{V\sigma'} W, \sigma' \rangle \} du - \langle \sigma'(0), II(V(0), W(0)) \rangle.$$

### 2.3.1. Puntos focales a lo largo de geodésicas nulas

Consideramos en esta sección algunas propiedades variacionales de las geodésicas nulas en las variedades de Lorentz.

**Corolario 2.5 (10.40)** *Sea  $\sigma$  una geodésica nula normal a una subvariedad  $P$  de una variedad de Lorentz. Un campo de  $P$ -Jacobi  $V$  en  $\sigma$  es el campo variacional de una variación de  $\sigma$  a través de geodésicas nulas normales a  $P$  si y solo si  $V \perp \sigma$ .*

*Demostración:*

”  $\implies$  ”

Sea  $\mathbf{x}$  la variación de  $\sigma$  a través de geodésicas nulas normales a  $P$ . Entonces  $f = \langle x_u, x_u \rangle$  es idénticamente nulo. Por el Lema 2.7 esto implica que  $\langle V', \sigma' \rangle = 0$ , en particular que  $\langle V'(0), \sigma'(0) \rangle = 0$  y por tanto que  $V'(0) \perp \sigma$ .

Por otro lado, por ser  $V$  un campo de  $P$ -Jacobi, por la Proposición 2.3 sabemos que  $V(0)$  es tangente a  $P$  y por tanto ortogonal a  $\sigma$ . Esto nos dice, por el Lema 2.3 que efectivamente  $V \perp \sigma$ .

”  $\longleftarrow$  ”

Suponemos ahora que tenemos un campo de  $P$ -Jacobi  $V$  y que  $V \perp \sigma$ , veamos que es el campo variacional de una variación de  $\sigma$  por geodésicas nulas normales a  $P$ .

Para ello usaremos la demostración de la Proposición 2.3 ya que la única diferencia es que ahora trabajamos con geodésicas normales *nulas*. Para solventar esta diferencia tomaremos el

campo vectorial  $Z$  de dicha demostración nulo. La demostración se reduce entonces a probar que existe este campo nulo  $Z$  tal que  $Z(0) = \sigma'(0)$  y  $Z'(0) = V'(0)$ .

Como  $V \perp \sigma$  se tiene que  $\langle V, \sigma' \rangle = 0$  y derivando,  $\langle V', \sigma' \rangle + \langle V, \sigma'' \rangle = 0$  donde el último sumando es nulo por ser  $\sigma$  una geodésica. Por tanto tenemos que  $V'(0) \perp \sigma$  y en particular que  $\text{nor}V'(0) \perp \sigma$ . Pero el espacio ortogonal a un vector luminoso es una hipersuperficie luminosa cuyo único vector nulo es  $\sigma'$ , 1.5, por tanto el vector  $\text{nor}V'(0)$  debe ser tangente al cono nulo  $\Lambda$  en el punto  $\sigma'(0)$  de  $\Lambda$ . Tomamos una curva  $\lambda$  en  $\Lambda$  con  $\lambda(0) = \sigma'(0)$  y  $\lambda'(0) \approx \text{nor}V'(0)$ . Entonces, en la curva  $\alpha$  de la demostración de la Proposición 2.3 (cumple que  $\alpha'(0) = V'(0)$ ). Sea  $Z(v)$  el campo normal paralelo obtenido mediante la traslación paralela del vector  $\lambda(v)$  a lo largo de  $\alpha$  hasta  $\alpha(v)$ . Entonces  $Z$  es un campo vectorial nulo en  $\alpha$  normal a  $P$ , y  $Z(0) = \lambda(0) = \sigma'(0)$ . Usando un sistema de campos normales paralelos en  $\alpha$ , se puede comprobar que  $\text{nor}Z'(0) = \text{nor}V'(0)$ , y por tanto que  $Z'(0) = V'(0)$ .

□

Nuestro objetivo ahora será obtener un resultado análogo al Teorema 2.2 pero para geodésicas nulas. Igual que en la sección anterior, escribiremos  $H_\sigma^\perp$  para referirnos a que los campos pertenecen a  $T_\sigma^\perp(\Omega) = \{V \in T_\sigma(\Omega) : V \perp \sigma\}$ .

**Proposición 2.6 (10.41)** *Sea  $P$  una subvariedad espacial de una variedad de Lorentz. Si no hay puntos focales de  $P$  a lo largo de una geodésica normal nula  $\sigma \in \Omega(P, q)$ , entonces  $H_\sigma^\perp$  es semidefinida positiva. Es más, si  $H_\sigma^\perp(V, V) = 0$ , entonces  $V$  es tangente a  $\sigma$ .*

*Demostración:* Sea  $Y_1, \dots, Y_{n-1}$  una base para el espacio de los campos  $P$ -Jacobi en  $\sigma$  que son perpendiculares a  $\sigma$ . Suponemos que  $Y_1(u) = u\sigma'(u)$ . Como no hay puntos focales en  $\sigma$ , los  $Y_i$  no se anulan en ningún punto, y para todo  $V \in T_\sigma^\perp(\Omega)$ , podemos escribir  $V = \sum f_i Y_i$ . De esta forma, por el Lema 2.6 tenemos:

$$\langle V', V' \rangle - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle = \langle A, A \rangle + \langle V, B \rangle'.$$

Igual que en la prueba del Teorema 2.2,  $H_\sigma^\perp(V, V)$  se reduce a  $\int_0^b \langle A, A \rangle du$ . Como  $A = \sum f_i' Y_i$  es ortogonal al vector nulo  $\sigma'$ , (por serlo cada  $Y_i$ ), y el espacio ortogonal a un vector nulo es semi-definido positivo, se deduce que  $\langle A, A \rangle \geq 0$ , y consecuentemente que  $H_\sigma^\perp(V, V)$  es también semidefinida positiva, como queríamos ver.

Por otro lado, si  $H_\sigma(V, V) = 0$ , entonces  $\langle A(u), A(u) \rangle = 0$ , es decir,  $A(u)$  es un vector nulo y, otra vez por el Lema 1.5, solo puede haber un vector nulo que es  $\sigma'$ , esto implica que  $A(u)$  y  $\sigma'(u)$  son colineales y por tanto  $A$  es tangente a  $\sigma$  en todo punto. Pero  $Y_1$  es el único campo de la base tangente a  $\sigma$ , por lo que deberíamos tener  $f_i' = 0$  para  $i > 1$ . Pero como  $V \in T_\sigma^\perp(\Omega)$  se cumple que  $V(b) = 0$ , por tanto  $f_i(b) = 0$ , y como hemos deducido que  $f_i$  debe ser constante, tendremos que  $f_i = 0$  para  $i > 1$ . Es decir  $V = f_1 Y_1$ , que es tangente a  $\sigma$ .

□

Como hemos visto con los últimos resultados, la existencia de puntos focales es fundamental para saber si la función longitud de arco presenta un mínimo o un máximo en una geodésica  $\sigma$  dentro de todas las curvas de  $\Omega(P, q)$ . Por ello nos interesa saber cuándo habrá puntos focales.

Por definición, un punto en una curva es un punto focal si existe un campo de  $P$ -Jacobi que se anule en dicho punto, por tanto, para probar que hay puntos focales necesitaremos restricciones sobre las condiciones iniciales de los campos  $P$ -Jacobi, es decir, sobre el operador forma (ver prop. 2.3), y sobre la ecuación de Jacobi, es decir, sobre la curvatura de la variedad.

Un ejemplo de este tipo de hipótesis es la siguiente proposición, ya que recordemos que la curvatura media se definía en función del operador forma, (ver definición 1.31).

**Proposición 2.7 (10.43)** *Sea  $P$  una subvariedad espacial de dimensión  $n - 2$  de una variedad de Lorentz  $M$  y sea  $H$  la curvatura media normal de  $P$ . Sea  $\sigma$  una geodésica nula normal a  $P$  en  $p = \sigma(0)$  tal que:*

1.  $k(\sigma'(0)) = \langle \sigma'(0), H_p \rangle > 0$ ;
2.  $Ric(\sigma', \sigma') \geq 0$ .

Entonces existe un punto focal  $\sigma(r)$  de  $P$  a lo largo de  $\sigma$  con  $0 < r \leq 1/k$ , donde  $k = k(\sigma'(0))$ , siempre y cuando  $\sigma$  esté definido en este intervalo. Donde al número real  $k$  se le llama convergencia de  $P$ .

*Demostración:*

Por la primera hipótesis sabemos que  $H_p \neq 0$  y por tanto  $n = \dim M \leq 3$ . Sea  $e_3, \dots, e_n$  una base ortonormal para  $T_p(P)$ . Aplicamos una traslación paralela a lo largo de  $\sigma$  a estos vectores para obtener  $E_3, \dots, E_n$  y definimos  $f(u) = 1 - ku$  en  $[0, 1/k]$ . Entonces  $fE_i \in T_\sigma^\perp(\Omega)$  ya que  $fE_i(0) = fe_i \in T_p^\perp(P)$  y  $fE_i(1/k) = 0$ . Además, por la definición 2.12,

$$\begin{aligned} H_\sigma^\perp(fE_i, fE_i) &= \int_0^{1/k} \{ \langle f'E_i, f'E_i \rangle - \langle R_{f'E_i\sigma'} fE_i, \sigma' \rangle \} du - \langle \sigma'(0), II(fE_i(0), fE_i(0)) \rangle \\ &= \int_0^{1/k} \{ f'^2 - f^2 \langle R_{E_i\sigma'} E_i \rangle \} du - \langle \sigma'(0), II(e_i, e_i) \rangle \\ &= k - \int_0^{1/k} \{ f^2 \langle R_{E_i\sigma'} E_i \rangle \} du - \langle \sigma'(0), II(e_i, e_i) \rangle \end{aligned}$$

donde  $E_3, \dots, E_n$  y  $\sigma'$  cubren solo  $n - 1$  dimensiones de  $M$ , pero como  $\sigma$  es nula, la dimensión que falta no está involucrada en el cálculo de la curvatura de Ricci. Veamos esta última afirmación, como  $\sigma'$  es un vector nulo, sea  $w$  otro vector nulo tal que  $\langle \sigma', w \rangle = -1$ , estos dos vectores generan un plano de Lorentz  $\Pi$ . Entonces si llamamos  $E_1 = (\sigma' + w)/\sqrt{2}$  y  $E_2 = (\sigma' - w)/\sqrt{2}$  forman una base ortonormal para  $\Pi$  siendo  $E_1$  temporal y  $E_2$  espacial. Se tiene entonces que:

$$Ric(\sigma', \sigma') = -\langle R_{\sigma'E_1}^{\sigma'}, E_1 \rangle + \langle R_{\sigma'E_2}^{\sigma'}, E_2 \rangle + \sum_{i=3}^n \langle R_{\sigma'E_i}^{\sigma'}, E_i \rangle.$$

Donde los dos primeros términos se anulan ya que:

$$\begin{aligned} \langle R_{\sigma'E_1}^{\sigma'}, E_1 \rangle &= \frac{1}{2} \langle R_{\sigma'\sigma'}^{\sigma'} + R_{\sigma'w}^{\sigma'}, \sigma' + w \rangle \\ &= \frac{1}{2} \{ \langle R_{\sigma'\sigma'}^{\sigma'}, \sigma' \rangle + \langle R_{\sigma'\sigma'}^{\sigma'}, w \rangle + \langle R_{\sigma'w}^{\sigma'}, \sigma' \rangle + \langle R_{\sigma'w}^{\sigma'}, w \rangle \} \\ &= \frac{1}{2} \langle R_{\sigma'w}^{\sigma'}, w \rangle \end{aligned}$$

Y  $\langle R_{\sigma'E_2}^{\sigma'}, E_2 \rangle$  da el mismo resultado. Por tanto, podemos escribir que:

$$Ric(\sigma', \sigma') = \sum_{i=3}^n \langle R_{\sigma'E_i}^{\sigma'}, E_i \rangle$$

Añadiendo este último resultado a la expresión para  $H_{\sigma}^{\perp}(fE_i, fE_i)$  obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum H_{\sigma}^{\perp}(fE_i, fE_i) &= (n-2)k - \int_0^{1/k} f^2 Ric(\sigma', \sigma') du - \langle \sigma'(0), (n-2)H_p \rangle \\ &= - \int_0^{1/k} f^2 Ric(\sigma', \sigma') du \leq 0,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que  $H_p = \sum II(e_i, e_i)/(n-2)$  y que  $\langle \sigma'(0), H_p \rangle = k$ . Por tanto se deduce que  $H_{\sigma}^{\perp}$  es semidefinida negativa y por la Proposición 2.6 esto implica que hay algún punto focal de  $P$  en  $\sigma$ .

□

El número  $k$  resulta ser un indicador de convergencia inicial. Si  $z$  son los vectores normales a la variedad  $P$ .

- Si  $k > 0$  las geodésicas  $\gamma_z$  convergen inicialmente a  $\sigma$ .
- Si  $k < 0$  las geodésicas  $\gamma_z$  divergen inicialmente.
- Si  $k = 0$  las geodésicas  $\gamma_z$  son inicialmente paralelas.

# Capítulo 3

## Un teorema de causalidad

En el estudio de variedades de Lorentz es útil saber cuándo dos puntos pueden ser unidos mediante una curva temporal. En este capítulo veremos que siempre existen curvas temporales desde  $p$  a  $q$  arbitrariamente cercanas a toda curva causal  $\alpha$  con los mismos extremos, salvo que  $\alpha$  sea una geodésica nula sin puntos conjugados.

**Lema 3.1 (10.45)** *Sea  $\alpha$  un segmento de curva causal en una variedad de Lorentz  $M$ , y sea  $x$  una variación de  $\alpha$  con campo variacional  $V$ . Si  $\langle V', \alpha' \rangle < 0$ , entonces para un  $v > 0$  suficientemente pequeño, la curva longitudinal  $\alpha_v$  de  $x$  es temporal.*

*Demostración:*

Como  $\alpha$  es causal,

$$\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle(u, 0) = \langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle \leq 0 \quad \text{para todo } u.$$

Pero  $\alpha$  está definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y,

$$\left. \frac{\partial}{\partial v} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle \right|_{v=0} = 2 \langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_u \rangle(u, 0) = 2 \langle V', \alpha' \rangle < 0.$$

Por tanto si  $v > 0$  es suficientemente pequeño, entonces  $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle(u, v) < 0$  para todo  $u$ , es decir,  $\alpha_v$  es temporal. □

Antes de demostrar la siguiente proposición, vamos a ver que si  $\alpha'$  y  $\alpha''$  son colineales entonces  $\alpha$  es una pregeodésica.

Si  $\alpha''$  y  $\alpha'$  son colineales, podemos escribir  $\alpha''(s) = f(s)\alpha'(s)$ . Por otro lado, sabemos que una reparametrización  $\beta = \alpha \circ h$  será una geodésica si  $\beta'' = 0$ . Es decir:

$$\begin{aligned} \beta'' &= (\alpha \circ h)'' = (\alpha'(h)h')' = \alpha''(h)h'^2 + \alpha'(h)h'' = f(h)\alpha'(h)h'^2 + \alpha'(h)h'' \\ &= \alpha'(h)[f(h)h'^2 + h''] = 0 \iff \alpha'(h) = 0 \quad \text{ó} \quad f(h)h'^2 + h'' = 0 \end{aligned}$$

Veamos ahora que si  $\beta$  es una reparametrización con velocidad constante, entonces es una geodésica. Que  $\beta$  tenga velocidad constante significa que  $\beta' = \alpha'(h)h' = c$ , por tanto  $h' = c/\alpha'(h)$  y

$$h'' = \frac{-c\alpha''h'}{(\alpha'(h))^2} = \frac{-cf(h)\alpha'(h)h'}{(\alpha'(h))^2} = \frac{-c^2f(h)}{(\alpha'(h))^2}$$

Entonces, si sustituimos este valor en la expresión obtenida arriba tenemos:

$$\frac{-c^2 f(h)}{(\alpha'(h))^2} + f(h) \left( \frac{c}{\alpha'(h)} \right) = -c^2 f(h) + f(h)c^2 = 0$$

Y por tanto  $\beta$  es una geodésica.

**Proposición 3.1 (10.46)** *En una variedad de Lorentz  $M$ , si  $\alpha$  es una curva causal desde  $p$  a  $q$  que no es una pregeodésica nula, entonces existe una curva temporal desde  $p$  a  $q$  arbitrariamente cercana a  $\alpha$ .*

*Demostración:*

Podemos suponer que el dominio de  $\alpha$  es  $[0, 1]$ . Consideramos dos casos especiales.

*Caso 1.  $\alpha'(0)$  ó  $\alpha'(1)$  son temporales.*

Haremos la prueba con  $\alpha'(1)$  temporal, si fuese  $\alpha'(0)$  temporal se demostraría de forma análoga. Sea  $W$  el campo obtenido mediante el transporte paralelo de  $\alpha'(1)$  a lo largo de  $\alpha$ . De esta forma  $W$  y  $\alpha'$  están siempre en el mismo cono causal, y como  $W$  es temporal,  $\langle W, \alpha' \rangle < 0$ . Por continuidad, se cumple que hay un  $\delta > 0$  tal que  $\langle \alpha', \alpha' \rangle < -\delta$  en  $[1 - \delta, 1]$ .

Sea ahora  $f$  una función diferenciable en  $[0, 1]$  que se anula en los extremos y con  $f' > 0$  en  $[0, 1 - \delta]$ . Definimos el campo  $V = fW$  y entonces,

$$\langle V', \alpha' \rangle = f' \langle W, \alpha' \rangle + f \langle W', \alpha' \rangle = f' \langle W, \alpha' \rangle \text{ es negativo en } [0, 1 - \delta].$$

Donde el segundo término se anula porque al ser  $W$  el transporte paralelo,  $W' = 0$ , (ver definición 1.26).

Sea ahora  $x$  una variación propia con campo variacional  $V$ . Por el Lema 3.1 para  $v > 0$  suficientemente pequeño la curva longitudinal  $\alpha_v$  es temporal en  $[0, 1 - \delta]$  y permanecerá temporal en  $[1 - \delta, 1]$ .

*Caso 2.  $\alpha$  es una curva diferenciable nula*

Como  $\alpha$  es nula se tiene que  $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$  y por tanto, derivando:

$$\frac{\partial}{\partial u} \langle \alpha', \alpha' \rangle = 2 \langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$$

Y por tanto  $\alpha'' \perp \alpha'$ . Ahora bien,  $\alpha''$  no puede ser siempre colineal con  $\alpha'$  ya que entonces, como hemos visto antes de la proposición,  $\alpha$  admitiría una reparametrización como una geodésica nula. Por tanto la función  $\langle \alpha'', \alpha' \rangle \geq 0$  no puede ser idénticamente nula ya que entonces  $\alpha''$  sería un vector nulo ortogonal a  $\alpha'$  que también es nulo y los vectores ortogonales nulos son colineales, ya que el espacio ortogonal a un vector nulo es degenerado y por el Lema 1.5 solo puede haber un vector nulo, por lo que ambos deben ser colineales.

Sea  $W$  un campo paralelo de vectores temporales en  $\alpha$  en el mismo cono causal que  $\alpha'$  en cada punto. De esta forma se tiene que  $\langle W, \alpha' \rangle < 0$ . Sea  $V = fW + g\alpha''$  donde  $f$  y  $g$  se anulan

en los extremos y se determinarán de tal forma que  $\langle V', \alpha' \rangle < 0$ . Como  $\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$ , se tiene que  $\langle \alpha''', \alpha' \rangle + \langle \alpha'', \alpha'' \rangle = 0$  y entonces:

$$\langle V', \alpha' \rangle = f' \langle W, \alpha' \rangle + g' \langle \alpha'', \alpha' \rangle + g \langle \alpha''', \alpha' \rangle = f' \langle W, \alpha' \rangle - g \langle \alpha'', \alpha'' \rangle. \quad (3.1)$$

Como la función  $h = \langle \alpha'', \alpha'' \rangle / \langle W, \alpha' \rangle$  no es idénticamente nula existe una función diferenciable  $g$  que se anula en los extremos y tal que:

$$\int_0^1 gh du = -1.$$

Si ahora definimos  $f(u) = \int_0^u (gh + 1) du$  se cumple que  $f$  se anula en los extremos y además  $f' = gh + 1 > gh = g \langle \alpha'', \alpha'' \rangle / \langle W, \alpha' \rangle$ . Sustituyendo este valor de  $f'$  en (3.1) obtenemos finalmente que  $\langle V', \alpha' \rangle < 0$ , ya que se tenía que  $\langle W, \alpha' \rangle < 0$ . Aplicando de nuevo el Lema 3.1 se obtiene el resultado.

Para terminar la prueba habría que considerar también otros casos más sencillos. Si  $\alpha'$  es temporal en algún punto  $s$  distinto de los extremos, se aplicaría el Caso 1 en los intervalos  $[0, s]$  y  $[s, 1]$ .

Si  $\alpha$  es una curva nula diferenciable a trozos, salvo que todos los segmentos de  $\alpha$  se puedan reparametrizar como una geodésica nula, por el Caso 2 alguno de ellos admite una variación como curva temporal entonces una pequeña variación como la anterior daría el resultado.

Por último queda el caso en el que  $\alpha$  es una geodésica nula rota. Basta con suponer que hay una sola ruptura en  $0 < s < 1$ . Sea  $W$  el campo de vectores en  $\alpha$  conseguido por la traslación paralela del vector  $\Delta\alpha'(s) = \alpha'(s^+) - \alpha'(s^-)$ . Estas dos velocidades están por definición en el mismo cono causal por lo que  $\langle W, \alpha' \rangle < 0$  en  $[0, s^-]$  y positivo en  $[s^+, 1]$ . Se toma ahora una función  $f$  diferenciable a trozos en  $[0, 1]$  que se anule en los extremos y tenga derivada positiva en  $[0, s^+]$  y negativa en  $[s^+, 1]$ . Entonces para  $V = fW$  se tiene que  $\langle V', \alpha' \rangle < 0$  y de nuevo por el Lema 3.1 se obtiene el resultado. □

La pregunta natural que surge después de esta proposición es si un segmento de geodésica nula  $\sigma$  puede aproximarse por una curva temporal mediante una variación propia. Esto será posible si existe un punto conjugado  $\sigma(r)$  de  $\sigma(0)$  con  $0 < r < b$  ya que, asumiendo que alguna geodésica nula  $\tau$  que va desde  $p = \sigma(0)$  y que casi alcanza  $\sigma(r)$  efectivamente lo alcanza, podemos aplicar la proposición anterior con la geodésica nula rota  $\tau + \sigma|_{[r, b]}$ .

La demostración formal de este resultado requiere varios lemas y proposiciones que incluimos a continuación.

El siguiente lema demuestra que todo  $V \in T_\alpha(\Omega)$  es el campo variacional de alguna  $(P, q)$ -variación de  $\alpha$ .

**Lema 3.2 (10.49)** *Si  $\alpha \in \Omega(P, q)$ , sea  $V \in T_\alpha(\Omega)$  y  $A$  un campo de vectores en  $\alpha$  tal que  $\text{nor}A(0) = II(V(0), V(0))$  y  $A(b) = 0$ . Entonces existe una  $(P, q)$ -variación  $x$  de  $\alpha$  tal que su campo variacional y su campo de aceleración transversal son precisamente  $V$  y  $A$ .*

*Demostración:*

Si  $P$  es un único punto entonces  $A(0) = V(0) = 0$  y bastará con definir:

$$x(u, v) = \exp_{\sigma(u)} \left[ vV(u) + \frac{1}{2}v^2A(u) \right].$$

Si  $\dim P > 0$ , es fácil encontrar una variación de  $\alpha$  de la forma  $X(u, v) = \exp Z(u, v)$  tal que (1) la primera curva transversal esté contenida en  $P$  y tenga velocidad inicial  $V(0)$  y aceleración  $\tan A(0)$  y (2) la última curva transversal sea constante en  $q$ .

Denotamos al campo variacional de esta variación como  $W(u) \approx Z_v(u, 0)$  y a su campo de aceleración como  $B(u) \approx Z_{vv}(u, 0)$ . Se tiene que tanto  $V - W$  como  $A - B$  son cero en los extremos. Por tanto,

$$\exp \left\{ Z(u, v) + v(V(u) - W(u)) + \frac{1}{2}v^2(A(u) - B(u)) \right\}$$

es una variación con las propiedades requeridas. □

Para probar la siguiente Proposición se ha utilizado la demostración que aparece en [1] pero con un par de modificaciones obtenidas de [6].

**Proposición 3.2 (10.48)** *Sea  $P$  una subvariedad espacial de una variedad de Lorentz, y sea  $\sigma \in \Omega(P, q)$  una geodésica normal nula. Si  $P$  tiene un punto focal a lo largo de  $\sigma$  antes de  $q$ , entonces existe una curva temporal desde  $P$  a  $q$  arbitrariamente cercana a  $\sigma$ .*

*Demostración:*

Sea  $\sigma(r)$  el primer punto focal de  $P$  a lo largo de  $\sigma$ . Por la Proposición 3.1, como ya habíamos considerado el caso en el que la curva sea una geodésica nula rota, bastará con encontrar una curva temporal en  $[0, r + \delta]$ , ya que después podremos unirla con la curva en  $(r + \delta, b]$  para algún  $\delta > 0$  está cubierto. Es suficiente por tanto probar que existe una variación propia de  $\sigma|_{[r+\delta]}$  en un segmento de curva temporal, ya que aquí hay un punto focal y esto no se había considerado antes. Sea  $J$  un P-campo de Jacobi en  $\sigma$  que se anula en  $r$ .

1. Existe un  $\delta > 0$  tal que  $J = fU$  en  $[0, r + \delta]$  donde  $U$  es un campo de vectores espacial unitario en  $\sigma$  y  $f > 0$  en  $(0, r)$ .

Como  $J$  es un campo de P-Jacobi que se anula 0 y en un punto focal, se cumple que  $J$  es ortogonal a  $\sigma$ . De hecho podemos afirmar que  $J$  nunca es tangente a  $\sigma$  en  $(0, r)$ . Si lo fuera, se tendría que  $J(a) = c\sigma'(a)$  para algún  $a \in (0, r)$  entonces se puede comprobar fácilmente que  $J(u) - \frac{cu}{a}\sigma'(u)$  verifica las condiciones de la Proposición 2.3 y por tanto sería un P-campo de Jacobi no nulo en  $\sigma$  que se anula en  $a$  antes del punto focal en  $\sigma(r)$  lo que contradice el hecho de que  $\sigma(r)$  es el primer punto focal.

Como  $M$  es de Lorentz,  $J$  es espacial en  $[0, r]$ . (Ver [6], Lema 5.4) Ahora, por ser  $\sigma(r)$  un punto focal,  $J(r) = 0$  y, se cumpla o no que  $J(0) = 0$ , sabemos que existe un campo de vectores  $Y$  en  $\sigma$  tal que  $J(u) = u(r - u)Y(u)$ . (Ver [1], ejercicio 1.17) Ahora, como estamos suponiendo que  $J'(0) \neq 0$ , se tendrá que  $Y(0) \neq 0$ , y lo mismo pasará con  $Y(r)$  ya que

$$J'(r) = [-Y(u) + (r - u)Y'(u)] \Big|_{u=r} = -Y(r).$$

Lo que implica que  $Y(r) \neq 0$  porque si no  $J'(r) = 0 = J(r)$  y entonces  $J$  sería idénticamente nulo. Tomando  $U = Y/|Y|$  y  $f(u) = u(r - u)|Y(u)|$  obtenemos el  $J = fU$  que buscábamos.

2. Para algún  $\delta > 0$  existe un campo de vectores  $V$  en  $\sigma$  que se anula en 0 y  $r + \delta$ , es perpendicular a  $\sigma$  y cumple  $\langle V'' - R_{V\sigma'}^\sigma, V \rangle > 0$  en  $(0, r + \delta)$ .

Para  $J = fU$  tomamos  $V = (f + g)U = J + gU$  donde  $g$  se determinará después. Se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} V'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'} &= J'' + (g'U + gU')' - R_{V\sigma'}^{\sigma'} = J'' + g''U + g'U' + g'U' + gU'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'} \\ &= g''U + 2g'U' + \underbrace{J'' + gU'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'}}_{g[U'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'}]} \end{aligned}$$

donde se ha utilizado el hecho de que  $J$  verifica la ecuación de Jacobi:

$$J'' = R_{J\sigma'}^{\sigma'} = R_{(V-gU)\sigma'}^{\sigma'} = R_{V\sigma'}^{\sigma'} - R_{gU\sigma'}^{\sigma'} \longrightarrow J'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'} = -gR_{U\sigma'}^{\sigma'}.$$

Por otro lado, como  $U$  es unitario, se cumple:

$$\begin{aligned} \langle V'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'} \rangle &= \langle g''U + 2g'U' + g[U'' - R_{U,\sigma'}^{\sigma'}], (f + g)U \rangle \\ &= (f + g)g'' + 2g'(f + g)\langle U', U \rangle + g(f + g)\langle U'' - R_{U,\sigma'}^{\sigma'}, U \rangle \quad (3.2) \\ &= (f + g)(g'' + gh) \end{aligned}$$

donde hemos llamado  $h = \langle U'' - R_{U,\sigma'}^{\sigma'}, U \rangle$ . Sea ahora  $-a^2$  con  $a > 0$  una cota inferior para  $h$  en  $[0, r + \delta]$  y sea  $g(u) = b(e^{au} - 1)$  donde  $b > 0$  está determinado por la condición  $g(r + \delta) = -f(r + \delta)$ . Obtenemos entonces que  $g'' = a^2(g + b)$  y por tanto:

$$g'' + gh = a^2(g + b) + gh = g(a^2 + h) + a^2b > 0 \text{ en } (0, r + \delta)$$

La función  $(f + g)$  es positiva en  $(0, r]$  y cero en  $r + \delta$ . Haciendo  $\delta > 0$  más pequeño si fuera necesario podemos suponer que  $r + \delta$  es el único cero de  $f + g$  en  $(0, r + \delta]$ . Entonces  $f + g$  y  $g'' + gh$  son ambas positivas en  $(0, r + \delta)$  y por (3.2).  $V$  tiene las propiedades requeridas.

3. *Existe una variación propia  $x$  de  $\sigma|_{[0, r + \delta]}$  cuyas curvas longitudinales  $\sigma_v$ , para un  $v$  suficientemente pequeño, son temporales en  $(0, r + \delta)$ , y por tanto causales en  $[0, r + \delta]$ .*

Sea  $N$  un campo de vectores paralelo nulo en  $\sigma$  con  $\langle N, \sigma' \rangle = -1$ . Vamos a definir un campo de aceleración  $A$  que verifique el lema anterior, para así poder deducir que existe una variación en  $(P, q)$  de  $x$  cuyo campo de aceleración es  $A$ . Sea  $t^* = r + \delta$ . Por el punto anterior de la demostración sabemos que existe un  $V$  que cumple lo siguiente:

$$\varepsilon < -\langle V'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'}, V \rangle \quad \text{en } [t^*/4, 3t^*/4]$$

Con esto, definimos la función:

$$\rho(u) = \begin{cases} \varepsilon u, & 0 \leq u \leq t^*/4, \\ \varepsilon(-u + t^*/2), & t^*/4 \leq u \leq 3t^*/4, \\ -\varepsilon(t^* - u), & 3t^*/4 \leq u \leq t^* \end{cases} \quad (3.3)$$

De esta forma, elegiremos el siguiente campo de aceleración

$$A(u) = \langle V'(u), V(u) - \rho(u) \rangle N(u) = \langle V'(u), V(u) \rangle N(u) - \rho(u)N(u).$$

Ahora, como  $\sigma$  es nula,  $\langle \sigma', \sigma' \rangle = 0$ , por lo que en  $v = 0$  la función  $f = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle$  definida en 2.7, es nula. En la segunda fórmula del mismo lema para  $\partial^2 f / \partial v^2$ , el segundo término queda:

$$\langle A', \sigma' \rangle = \langle \langle V', V \rangle' N, \sigma' \rangle + \langle \langle V', V \rangle N', \sigma' \rangle - \rho' \langle N, \sigma' \rangle - \rho \langle N', \sigma' \rangle = -\langle V', V \rangle' + \rho'.$$

Donde el segundo y último términos se anulan ya que  $\langle N, \sigma' \rangle = -1$  y derivando se obtiene  $\langle N', \sigma' \rangle + \langle N, \sigma'' \rangle = 0$  y  $\sigma'' = 0$  por ser  $\sigma$  una geodésica.

Finalmente nos queda en la expresión para  $\partial^2 f / \partial v^2$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \Big|_{v=0} = -\langle V'' - R_{V\sigma'}^{\sigma'}, V \rangle + \rho'$$

Ahora tenemos que la derivada de la función  $\rho$  es la siguiente:

$$\rho'(u) = \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leq u \leq t^*/4, \\ -\varepsilon, & t^*/4 \leq u \leq 3t^*/4, \\ \varepsilon, & 3t^*/4 \leq u \leq t^* \end{cases} \quad (3.4)$$

Por lo que el término anterior es siempre negativo. Por tanto, para valores de  $v$  muy pequeños la segunda derivada será menor que 0, y como la función en  $v = 0$  valía cero, es decir, en ese punto es cóncava hacia abajo, por lo que para un  $v$  suficientemente pequeño se tendrá que  $f(u, v) = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle \sigma'_v(u), \sigma'_v(u) \rangle \leq 0$ .

Para terminar bastaría aplicar la Proposición 3.1 para las curvas diferenciables a trozos  $\sigma_v + \sigma|_{[r + \delta, 1]}$ .

□

**Lema 3.3 (10.50)** *Si  $\sigma \in \Omega(P, q)$  es una geodésica nula que no es normal a  $P$ , existe una curva temporal arbitrariamente cercana a  $\sigma$  en  $\Omega(P, q)$ .*

*Demostración:*

Como  $\sigma \in \Omega(P, q)$  es una geodésica nula que no es normal a  $P$ , existe un vector  $y \in T_{\sigma(0)}P$  tal que  $\langle y, \sigma'(0) \rangle \neq 0$ . Escribiendo si fuera necesario  $-y$ , podemos suponer que  $\langle y, \sigma'(0) \rangle > 0$ . Definimos el campo  $V(u) = (1 - (u/b))Y(u)$ , donde  $Y(u)$  es la traslación paralela de  $y$  a lo largo de  $\sigma$ . Entonces según la Definición 2.5 se comprueba fácilmente que  $V \in T_{\sigma}(\Omega)$  y por el Lema 3.2 existe una  $(P, q)$ -variación de  $\sigma$  con campo variacional  $V$ .

Con esta definición se cumple que  $V' = -\frac{1}{b}Y(u) + (1 - u/b)Y'(u) = -\frac{1}{b}Y(u)$  ya que  $Y'(u) = 0$  por ser  $Y$  paralelo. Y por tanto:

$$\langle V', \sigma' \rangle = -\frac{\langle Y, \sigma' \rangle}{b} = -\frac{\langle y, \sigma'(0) \rangle}{b} < 0.$$

Aplicando finalmente el lema 3.1 tenemos que existe una curva temporal arbitrariamente cercana a  $\sigma$  en  $\Omega(P, q)$ .

□

Ya podemos resumir todos estos resultados en un único teorema:

**Teorema 3.1 (10.51)** *Sea  $P$  una subvariedad espacial de una variedad de Lorentz  $M$ . Si  $\alpha \in \Omega(P, q)$  es una curva causal, existe una curva temporal arbitrariamente cercana a  $\alpha$  en  $\Omega(P, q)$ , salvo que  $\alpha$  sea una geodésica nula normal a  $P$  a lo largo de la cual no hay puntos focales de  $P$  antes de  $q$ .*

# Capítulo 4

## Causalidad en variedades de Lorentz

Cuando hablamos de causalidad en una variedad de Lorentz, nos referimos a la cuestión de qué puntos de la variedad se pueden unir mediante curvas causales. Esto, en relatividad, significa saber qué eventos pueden influenciar o ser influenciados por otro evento dado. Todos los conceptos que veremos en este capítulo son los que nos permitirán demostrar en el siguiente el Teorema de Singularidad de Penrose.

### 4.1. Relaciones de causalidad

**Definición 4.1** Definimos a continuación las relaciones de causalidad. Si  $p, q \in M$  entonces:

1.  $p \ll q$  significa que hay una curva temporal apuntando hacia el futuro en  $M$  desde  $p$  hasta  $q$ .
2.  $p < q$  significa que hay una curva causal apuntando hacia el futuro en  $M$  desde  $p$  hasta  $q$ . Evidentemente se cumple que si  $p \ll q$  entonces también  $p < q$ . Escribiremos  $p \leq q$  cuando pueda ser  $p < q$  o  $p = q$ . Para un subconjunto  $A$  de  $M$ , el subconjunto:

$$I^+(A) = \{q \in M : \text{existe un } p \in A \text{ con } p \ll q\}.$$

Este conjunto se denomina el *futuro cronológico* de  $A$ , y

$$J^+(A) = \{q \in M : \text{existe un } p \in A \text{ con } p \leq q\},$$

se conoce como el *futuro causal* de  $A$ .

Según estas definiciones se cumple que  $J^+(A) \supset A \cup I^+(A)$ . Para un único punto se define el futuro cronológico como  $I^+(p) = \{q : p \ll q\}$ . De igual forma, se define el futuro causal de un punto como  $J^+(p) = \{q : p \leq q\}$ .

Las relaciones definidas anteriormente son transitivas, además, se cumple lo siguiente:

**Corolario 4.1 (14.1)** Si  $x \ll y$  e  $y \leq z$ , o si  $x \leq y$  e  $y \ll z$ , entonces  $x \ll z$ .

*Demostración:*

Si  $x \ll y$  e  $y \leq z$ , como existe una curva temporal entre  $x$  e  $y$  y otra causal entre  $y$  y  $z$ , uniendo ambas curvas tendremos una curva causal entre  $x$  y  $z$ . Por el Teorema ?? sabemos que existe una curva temporal entre  $x$  y  $z$ , es decir, se cumple que  $x \ll z$ . Lo mismo ocurriría con la otra opción. □

Este resultado se puede resumir en que:

$$I^+(A) = I^+(I^+(A)) = I^+(J^+(A)) = J^+(I^+(A)) \subset J^+(J^+(A)) = J^+(A).$$

Un conjunto abierto  $\mathcal{U}$  de  $M$  es una variedad de Lorentz orientada temporalmente y las relaciones de causalidad intrínsecas en  $\mathcal{U}$  implican las correspondientes relaciones en  $M$ . Denotaremos  $I^+(A, \mathcal{U})$  el futuro cronológico en la variedad  $\mathcal{U}$  del conjunto  $A \subset \mathcal{U}$ . Entonces se cumplirá que  $I^+(A, \mathcal{U}) \subset I^+(A) \cap \mathcal{U}$ . Esta observación es particularmente útil para el caso en el que  $\mathcal{U}$  sea un conjunto abierto convexo ya que la causalidad intrínseca de  $\mathcal{U}$  será la de Minkowski.

Enunciamos a continuación un par de lemas que nos serán útiles posteriormente:

**Lema 4.1 (14.2)** Si  $\mathcal{U}$  es un conjunto abierto convexo en  $M$ , entonces:

1. Para  $p \neq q$  en  $\mathcal{U}$ ,  $q \in J^+(p, \mathcal{U}) \Leftrightarrow \vec{pq}$  es una curva causal apuntando hacia el futuro (análogamente con  $I^+$ ).
2.  $I^+(p, \mathcal{U})$  es abierto en  $\mathcal{U}$  (y por tanto en  $M$ ).
3.  $J^+(p, \mathcal{U})$  es la clausura en  $\mathcal{U}$  de  $I^+(p, \mathcal{U})$ .
4. La relación  $\leq$  es cerrada en  $\mathcal{U}$ ; es decir, si  $\{p_n\} \rightarrow p$  y  $\{q_n\} \rightarrow q$ , con todos los puntos en  $\mathcal{U}$ , entonces  $q_n \in J^+(p_n, \mathcal{U})$  para todo  $n$  implica que  $q \in J(p, \mathcal{U})$ .
5. Una curva causal  $\alpha$  contenida en un conjunto compacto  $K$  de  $\mathcal{U}$  es (continuamente) extendible.

De todas estas propiedades resulta que únicamente la segunda se cumple para una variedad  $M$  arbitraria, de hecho, se cumple un resultado aún más fuerte.

**Lema 4.2 (14.3)** La relación  $\ll$  es abierta; es decir, si  $p \ll q$  en  $M$ , existen entornos  $U$  y  $V$  de  $p$  y  $q$  respectivamente, tal que  $p' \ll q'$  para cualesquiera  $p' \in U$  y  $q' \in V$ .

*Demostración:* Sea  $\sigma$  una curva temporal desde  $p$  hasta  $q$ . Si  $\mathcal{C}$  es un entorno convexo de  $q$ , sea  $q^-$  un punto de  $\mathcal{C}$  en  $\sigma$  antes de  $q$ . De igual forma, sea  $p^+$  un punto de  $\sigma$  entre  $p$  y  $q^-$  contenido en un entorno convexo  $\mathcal{C}'$  de  $p$ . Por el lema anterior sabemos que  $I^+(q^-, \mathcal{C})$  y  $I^-(p^+, \mathcal{C}')$  son abiertos en  $M$ . Por tanto son los abiertos que buscamos ya que, si  $q' \in I^+(q^-, \mathcal{C})$  y  $p' \in I^-(p^+, \mathcal{C}')$ , existe una curva temporal desde  $q'$  a  $q^-$  y otra de  $p^+$  a  $p'$ . Pero uniendo estas curvas con la que une  $p^+$  y  $q^-$ , conseguiremos una curva temporal que una  $p'$  y  $q'$ . Como queríamos ver. □

Este lema conecta la causalidad con la topología de  $M$ . Implica, en particular, que el futuro cronológico  $I^+(A)$  de cualquier conjunto  $A$  es abierto.

Demostramos ahora dos resultados que también nos serán útiles.

**Corolario 4.2 (14.5)** Si  $\alpha$  es una curva causal apuntando hacia el futuro desde  $A$  hasta un punto  $q \in J^+(A) - I^+(A)$ , entonces  $\alpha$  es una geodésica nula que no tiene puntos conjugados antes que  $q$  y no alcanza a  $I^+(A)$  antes de  $q$ .

*Demostración:*

Si  $q \in J^+(A) - I^+(A)$  entonces existe una curva luminosa  $\alpha$  que une  $A$  y  $q$ . Por el Teorema 3.1 sabemos que si tenemos una curva causal  $\alpha \in \Omega(A, q)$  existe otra temporal muy próxima a  $\alpha$  también en  $\Omega(A, q)$  salvo que  $\alpha$  sea una geodésica nula normal a  $A$  en la que no hay puntos focales de  $A$  antes de  $q$ . Por tanto, como no puede haber una curva temporal cercana a  $\alpha$  porque  $q \notin I^+(A)$  entonces  $\alpha$  debe ser una geodésica normal a  $A$  en la que no hay puntos focales de  $A$  antes de  $q$ .

Ahora bien, tenemos que ver que si no hay puntos focales antes de  $q$  tampoco hay puntos conjugados. Pongamos que el dominio de  $\alpha$  es  $[0, b]$  con  $\alpha(0) = p \in A$  y  $\alpha(b) = q$ . Que no haya puntos focales indica que no existe ningún campo de  $A$ -Jacobi no nulo tal que  $J(r) = 0$  con  $0 < r < b$ . Pero esto implica por definición que no hay puntos conjugados de  $A$  antes de  $q$  ya que para eso debe existir un campo de Jacobi  $J$  tal que  $J(0) = 0$  y también  $J(r) = 0$  con  $0 < r < b$ , y como un campo de  $A$ -Jacobi es en particular un campo de Jacobi, se tiene el resultado.

Sólo nos queda probar que  $\alpha$  no alcanza a  $I^+(A)$ . Si  $\alpha(s) \in I^+(A)$  para algún  $s \in (0, b)$  entonces existiría una curva temporal que une un  $p \in A$  con  $\alpha(s)$ . Pero entonces tendríamos que  $p \ll \alpha(s)$  y que  $\alpha(s) \leq q$  y por el Corolario 4.1 esto implicaría que  $p \ll q$  es decir existiría una curva temporal entre  $p$  y  $q$  y entonces  $q \in I^+(A)$ , lo que contradice la hipótesis. □

**Corolario 4.3 (14.6)** Para un subconjunto  $A$ , se cumple:

1.  $\text{int}J^+(A) = I^+(A)$
2.  $J^+(A) \subset \overline{I^+(A)}$ , cumpliéndose la igualdad si y solo si  $J^+(A)$  es un conjunto cerrado.

*Demostración:*

1. Vemos ambas implicaciones:

$$\diamond I^+(A) \supset \text{int}J^+(A)$$

$I^+(A) \subset J^+(A)$  y como ya se dedujo del Lema 4.1,  $I^+(A)$  es abierto luego  $I^+(A) \subset \text{int}J^+(A)$ .

$$\diamond \text{int}J^+(A) \subset I^+(A)$$

Si  $q \in \text{int}J^+(A)$ , existe un entorno  $\mathcal{C}$  de  $q$  tal que  $I^-(q, \mathcal{C})$  contendrá algún punto de  $J^+(A)$ . Sea  $p$  ese punto de  $J^+(A)$  contenido en  $I^-(q, \mathcal{C})$ , entonces  $q \in I^+(p) \subset I^+(J^+(A))$  y ya vimos que  $I^+(J^+(A)) \subset I^+(A)$ .

2.  $J^+(p)$  son todos los  $q \in M$  tales que  $p \leq q$ , si tomamos el propio  $p$  es claro que  $p \in \overline{I^+(p)}$ . Sea otro  $q$  tal que  $p < q$ . Sea  $\alpha$  la curva causal entre  $p$  y  $q$ ,  $\mathcal{C}$  un entorno de  $q$  y  $q^-$  un punto de  $\alpha$  en  $J^-(q, \mathcal{C})$ . Por el Lema 4.1 apartado 3, se tiene que  $q \in J^+(q^-, \mathcal{C}) \subset \overline{I^+(q^-, \mathcal{C})}$ . Pero  $\overline{I^+(q^-, \mathcal{C})} \subset I^+(q^-) \cap \mathcal{C} \subset I^+(J^+(p)) \subset I^+(p)$ . Por tanto hemos deducido que  $q \in I^+(q^-, \mathcal{C}) \subset I^+(p)$ . □

## 4.2. Curvas límite

**Definición 4.2** Una curva  $\lambda$  es una *curva límite* de la sucesión  $\{\lambda_n\}$  si existe una subsucesión  $\{\lambda'_n\}$  tal que para todo  $p \in \text{Im}(\lambda)$  cada entorno de  $p$  interseca a todas las curvas  $\{\lambda'_n\}$  menos a un número finito.

De aquí se deduce que una curva es curva límite de la sucesión  $\{\lambda_n\}$  si existe una subsucesión  $\{\lambda'_n\}$  tal que para todo  $p \in \text{Im}(\lambda)$ ,  $\{\lambda'_n\}$  converge a  $p$ .

**Proposición 4.1 (3.31 BEEM)** Sea  $\{\gamma_n\}$  una sucesión de curvas inextensibles futuras no espaciales en  $(M, g)$ . Si  $p$  es un punto de acumulación de la sucesión  $\{\gamma_n\}$ , entonces existe una curva límite  $\gamma$  futura inextensible que no es espacial tal que  $p \in \gamma$ .

*Demostración:*

Daremos la demostración para curvas inextensibles en general. Sea  $h$  una métrica completa de Riemann para  $M$  con distancia  $d_0$ . Y tomamos para cada  $\gamma_n$  una parametrización por longitud de arco con respecto a  $h$ . Entonces el dominio de cada  $\gamma_n$  es  $\mathbb{R}$  ya que cada curva es inextensible. Cambiando las parametrizaciones si fuera necesario, podemos tomar una subsucesión  $\{\gamma_m\}$  de  $\{\gamma_n\}$  tal que  $\gamma_m(0) \rightarrow p$  cuando  $m \rightarrow \infty$ , ya que  $p$  es un punto de acumulación de la sucesión  $\gamma_n$ . Usando el hecho de que  $\gamma_m$  tiene una parametrización por longitud de arco con respecto a  $h$ , obtenemos

$$d_0(\gamma_m(t_1), \gamma_m(t_2)) \leq |t_1 - t_2| \quad (4.1)$$

para cada  $m$  y  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Entonces las curvas  $\{\gamma_m\}$  forman una familia equicontinua.<sup>1</sup> Además, como  $\gamma_m(0) \rightarrow p$ , existe un  $N$  a partir del cual  $d_0(\gamma_m(0), p) < 1$  para todo  $m \geq N$ . Esto implica que para un determinado  $t_0 \in \mathbb{R}$ , la curva  $\gamma_m|_{[-t_0, t_0]}$  de la subsucesión queda dentro del conjunto compacto  $\{q \in M : d_0(p, q) \leq t_0 + 1\}$  para todo  $m \geq N$ . Por tanto, por el teorema de Ascoli-Arcelá, se puede obtener una curva continua  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  y una subsucesión  $\{\gamma_k\}$  de la subsucesión  $\{\gamma_m\}$  tal que  $\{\gamma_k\}$  converge uniformemente a  $\gamma$  en cada subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ . Claramente se tendrá que  $\gamma_k(0) \rightarrow p = \gamma(0)$ . La convergencia de  $\{\gamma_k\}$  a  $\gamma$  también implica que  $d_0(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq |t_1 - t_2|$  para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ . Queda entonces ver que  $\gamma$  no es espacial y que es inextensible.

Para ver que  $\gamma$  no es espacial, fijamos  $t_1 \in \mathbb{R}$  y sea  $U$  un entorno normal<sup>2</sup> convexo de  $(M, g)$  que contiene a  $\gamma(t_1)$ . Tomamos  $\delta > 0$  tal que el conjunto  $\{q \in M : d_0(\gamma(t_1), q) < \delta\}$  está contenido en  $U$ . Si  $t_1 < t_2 < t_1 + \delta$ , entonces la convergencia uniforme en los subconjuntos compactos implica que para un  $k$  suficientemente grande, el conjunto  $\gamma_k|_{[t_1, t_2]}$  permanece en  $U$ . Usando  $\gamma_k(t_1) \rightarrow \gamma(t_1)$ ,  $\gamma_k(t_2) \rightarrow \gamma(t_2)$ ,  $\gamma_k(t_1) \leq_U \gamma_k(t_2)$  para un  $k$  suficientemente grande, y el hecho de que  $U$  es un entorno normal convexo, obtenemos que  $\gamma(t_1) \leq_U \gamma(t_2)$ . Por tanto  $\gamma|_{[t_1, t_2]}$  es una curva futura no espacial en  $U$ , (ver [3], prop. 4.5.1). Se sigue que  $\gamma$  es una curva no espacial dirigida hacia el futuro en  $(M, g)$ .

Solo queda probar que  $\gamma$  es inextensible. Lo probamos solo con inextensibilidad futura ya que con la inextensibilidad pasada es equivalente. Suponemos por reducción al absurdo que

<sup>1</sup>Un conjunto de funciones  $f : K \rightarrow X$  es equicontinuo en un punto  $x_0 \in K$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para toda  $f$ ,

$$d_X(f(z), f(z_0)) < \varepsilon \quad \text{si} \quad d_K(z, z_0) < \delta.$$

<sup>2</sup>Un entorno  $\mathcal{C}$  es un entorno normal de  $M$  si es la imagen bajo el difeomorfismo  $\exp$  de un entorno del espacio tangente

$\gamma$  no es futura inextensible. Entonces  $\gamma(t) \rightarrow q_0 \in M$  conforme  $t \rightarrow \infty$ . Sea  $U'$  un entorno normal convexo de  $q_0$  tal que  $\overline{U'}$  es un conjunto compacto contenido en la carta  $(V, x)$  de  $M$ , con coordenadas locales  $(x_1, \dots, x_n)$  tales que  $f = x_1 : U' \rightarrow \mathbb{R}$  es una función temporal para  $U'$ . Como las curvas no espaciales están contenidas en el cono, para ir de un nivel a otro de la función tiempo el camino más lento será ir por los conos de luz. Pero esos caminos tienen una longitud acotada. Es decir se cumple que para un  $t_1$  tal que  $f(\gamma(t_1)) \in \overline{U'}$  se cumple que una curva espacial desde  $f^{-1}(f(\gamma))$  hasta  $f^{-1}(q_0)$  no puede tener longitud mayor que  $\delta' > 0$ , (ver [2], pp. 75-76).

Por otro lado, para un  $k$  suficientemente grande debe cumplirse que  $\gamma_k|_{[t_1+1, t_1+\delta'+2]} \subset f^{-1}([f(\gamma(t_1)), f(q_0)])$ . Como la longitud  $L_0(\gamma_k|_{[t_1+1, t_1+\delta'+2]}) = \delta' + 1$  para todo  $k$ , llegamos por tanto a una contradicción.

□

### 4.3. Condiciones de causalidad

En este apartado definimos las condiciones de causalidad que se deben cumplir para poder hablar de separación temporal entre dos puntos y establecer que los conjuntos  $J^+(p)$  y  $J^-(p)$  son cerrados.

**Definición 4.3** Si una variedad  $M$  no contiene curvas temporales cerradas decimos que se verifica la *condición cronológica*. Este es un requisito prácticamente imprescindible en física ya que si existen dichas curvas cerradas significaría que uno puede viajar en el tiempo y encontrarse a sí mismo más joven, lo que daría lugar a muchas paradojas.

**Definición 4.4** Se dice que una variedad  $M$  satisface la *condición de causalidad* si no contiene curvas causales cerradas.

Además, se dirá que la condición de causalidad (o la cronológica) se cumple en un punto  $p$  si no hay curvas causales cerradas que pasen por  $p$ , y se cumplirá en un subconjunto  $A$  si se cumple en todo  $p \in A$ .

**Definición 4.5** La *condición fuerte de causalidad* se cumple en  $p \in M$  si dado cualquier entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$ , existe otro entorno  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  de  $p$  tal que cualquier segmento de curva causal con extremos en  $\mathcal{V}$  está enteramente contenida en  $\mathcal{U}$ .

Esto viene a decir que las curvas causales que empiecen arbitrariamente cerca de  $p$  y dejen algún entorno previamente fijado no pueden volver a estar arbitrariamente cerca de  $p$ . Es decir, no hay curvas causales casi cerradas en  $p$ . En el siguiente dibujo se muestra lo que no puede ocurrir si se cumple la condición fuerte de causalidad.

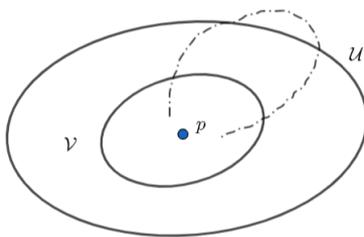


Figura 4.1: Incumplimiento de la condición fuerte de causalidad. Elaboración propia

**Definición 4.6** Si  $p, q \in M$ , la *separación temporal*  $\tau(p, q)$  desde  $p$  a  $q$  es:

$$\sup\{L(\alpha) : \alpha \text{ es un segmento de curva causal futura desde } p \text{ a } q\}$$

Se tendrá que  $\tau(p, q) = \infty$  si el conjunto de longitudes no está acotado, y  $\tau(p, q) = 0$  si es vacío, es decir, si  $q \notin J^+(p)$ .

Cuando se alcanza el supremo, el significado físico de  $\tau(p, q)$  es el de la duración del viaje más lento en  $M$  desde  $p$  hasta  $q$ .

De forma similar se define la *separación temporal*  $\tau(A, B)$  de los subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $M$  como  $\sup\{\tau(a, b) : a \in A, b \in B\}$ .

**Lema 4.3 (14.17)** La función separación  $\tau : M \times M \rightarrow [0, \infty]$  es *semicontinua inferiormente*.

*Demostración:*

Si  $\tau(p, q) = 0$ , entonces no hay nada que probar. Suponemos entonces que  $q \in I^+(p)$  y que  $0 < \tau(p, q) < \infty$ .

Dado un  $\delta > 0$ , debemos encontrar entornos  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{V}$  de  $p$  y  $q$ , respectivamente, tales que si  $p' \in \mathcal{U}$  y  $q' \in \mathcal{V}$ , entonces  $\tau(p', q') > \tau(p, q) - \delta$ .

Sea  $\alpha$  una curva temporal desde  $p$  hasta  $q$  con  $L(\alpha) > \tau(p, q) - \delta/3$ . Sea  $\mathcal{C}$  un entorno convexo de  $q$  y sea  $q_1$  un punto previo a  $q$  de  $\alpha$  en  $\mathcal{C}$ . A partir de ahora escribiremos  $[r, r']$  para referirnos al segmento de geodésica en  $\mathcal{C}$  desde  $r$  hasta  $r'$ . Como la longitud de esos segmentos depende de forma continua de los puntos extremos, existe un entorno  $\mathcal{V}$  de  $q$  tal que si  $q' \in \mathcal{V}$ , entonces  $[q_1, q']$  es causal y  $L[q_1, q'] > L([q_1, q]) - \delta/3$ . Como  $[q_1, q]$  es una geodésica, tiene al menos la misma longitud que el segmento de  $\alpha$  desde  $q_1$  a  $q$ .

La misma construcción para  $p$  nos da el entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  tal que si  $p' \in \mathcal{U}$  y  $q' \in \mathcal{V}$ , ambos se pueden unir por una curva causal cuya longitud cumple que  $L > L(\alpha) - \delta/3 > \tau(p, q) - \delta$ .

□

A partir de ahora utilizaremos a menudo la notación  $J(p, q) = J^+(p) \cap J^-(q)$ , siendo este conjunto el más pequeño que contiene todas las curvas futuras causales desde  $p$  hasta  $q$ . Con esta notación, queremos establecer condiciones suficientes para la existencia de una geodésica causal de  $p$  a  $q$  de mayor longitud. La primera condición obvia es que se cumpla que  $p < q$ . La segunda la establecemos en el siguiente resultado:

**Definición 4.7** Se dice que  $M$  es *globalmente hiperbólica* si se cumple la condición fuerte de causalidad y para cada  $p < q$  el conjunto  $J(p, q)$  es compacto.

**Lema 4.4 (6.1 BEEM)** Sea  $K$  un conjunto globalmente hiperbólico. Entonces con  $p, q \in M$  y  $q \in J^+(p)$ , existe una geodésica causal hacia el futuro desde  $p$  hasta  $q$  con  $L(\lambda) = \tau(p, q)$ .

*Demostración:*

Para los siguientes resultados será suficiente con probar el caso en el que  $p \leq q$ . Como se cumple la condición fuerte de causalidad en  $K$ , el funcional longitud de arco  $L : \Omega(p, q) \rightarrow \mathbb{R}$  es semicontinuo superiormente en la topología  $C^0$ , (ver [2], sección 3.3). Por tanto existe una curva  $\lambda_0 \in \Omega(p, q)$  con  $L(\lambda_0) = \sup\{L(\lambda) : \lambda \in \Omega(p, q)\}$ . Del Corolario 2.1 se deduce que si  $\lambda_0$  no es una reparametrización de una geodésica, se puede construir una curva  $\sigma \in \Omega(p, q)$  con  $L(\sigma) \geq L(\lambda_0)$ , lo que es una contradicción. □

Esto implica que si el conjunto es globalmente hiperbólico cualquier par de puntos unidos por una curva causal pueden ser unidos por una geodésica causal de mayor longitud.

Como la condición de que toda una variedad sea globalmente hiperbólico puede ser muy exigente, también es útil la siguiente definición.

**Definición 4.8 (14.20)** Un subconjunto  $\mathcal{H}$  de  $M$  es globalmente hiperbólico si:

1. Se cumple la condición fuerte de causalidad en  $\mathcal{H}$ .
2. Si  $p, q \in \mathcal{H}$  con  $p < q$ , entonces  $J(p, q)$  es compacto y está contenido en  $\mathcal{H}$ .

Por el Lema 4.4, en un conjunto globalmente hiperbólico  $\mathcal{H}$  existe una geodésica causal de  $M$  uniendo cualesquiera dos puntos tales que  $p < q$ .

**Lema 4.5 (14.21)** Si  $\mathcal{U}$  es un conjunto abierto globalmente hiperbólico, la función separación temporal  $\tau$  de  $M$  es continua en  $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ .

*Demostración:* Sabemos que la función  $\tau$  es semicontinua inferiormente por el Lema 4.3. Supongamos por reducción al absurdo que no es semicontinua superiormente en  $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ . Entonces existe un  $\delta > 0$  y sucesiones  $\{p_n\} \rightarrow p$  y  $\{q_n\} \rightarrow q$  tales que  $\tau(p_n, q_n) \geq \tau(p, q) + \delta$ .

Como  $\tau(p_n, q_n) > 0$ , existe una curva causal  $\alpha_n$  desde  $p_n$  a  $q_n$  tal que  $L(\alpha_n) > \tau(p_n, q_n) - 1/n$ . Como  $\mathcal{U}$  es abierto contiene puntos  $p^- \ll p$  y  $q^+ \gg q$ . Podemos suponer que las sucesiones  $\{p_n\}$  y  $\{q_n\}$  están contenidas en los conjuntos abiertos  $I^+(p^-)$  y  $I^-(q^+)$ , respectivamente. Se sigue entonces que las curvas  $\alpha_n$  están todas en el conjunto  $J(p^-, q^+)$ . (Ver Figura 4.2).

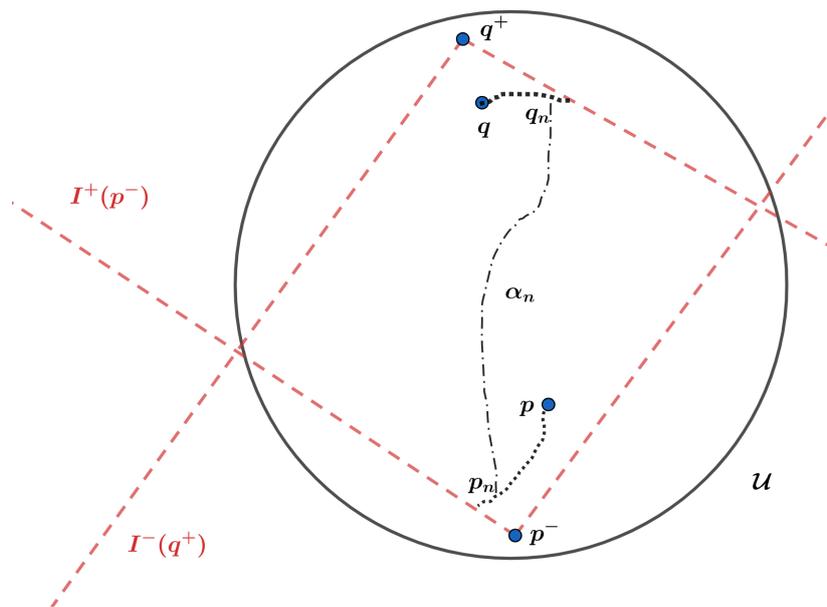


Figura 4.2: Elaboración propia

Como  $\mathcal{U}$  es globalmente hiperbólico, se puede aplicar el Lema 4.4 con  $K = J(p^-, q^+)$  para probar que existe una geodésica causal  $\lambda$  desde  $p$  hasta  $q$  con  $L(\lambda) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} L(\alpha_n) = \tau(p_n, q_n) \geq \tau(p, q) + \delta$ . Y esto es imposible por la definición de  $\tau$ .

□

Ya vimos en el Lema 4.1 que si  $\mathcal{U}$  es un conjunto convexo entonces la relación  $\leq$  es cerrada. A continuación lo probamos para el caso en el que  $\mathcal{U}$  es globalmente hiperbólico.

**Lema 4.6 (14.22)** Si  $\mathcal{U}$  es un conjunto abierto en  $M$  que es globalmente hiperbólico, la condición de causalidad  $\leq$  de  $M$  es cerrada en  $\mathcal{U}$ .

*Demostración:*

Tenemos que probar que si  $\{p_n\} \rightarrow p$  y  $\{q_n\} \rightarrow q$  con todos los puntos en  $\mathcal{U}$ , entonces  $p_n \leq q_n$  para todo  $n$  implica que  $p \leq q$ .

Si tomamos  $p_n = q_n$  el resultado es trivial por tanto suponemos que  $p_n \leq q_n$  para todo  $n$ . Sea  $\alpha_n$  una curva causal desde  $p_n$  hasta  $q_n$ . Como  $\mathcal{U}$  es abierto contiene puntos  $p^- \ll p$  y  $q^+ \gg q$ . Podemos suponer que las sucesiones  $\{p_n\}$  y  $\{q_n\}$  están contenidas en los conjuntos abiertos  $I^+(p^-)$  e  $I^-(q^+)$ , respectivamente, (ver Figura 4.2). Se sigue entonces que las curvas  $\alpha_n$  desde  $p_n$  a  $q_n$  están todas en el conjunto  $J(p^-, q^+)$  y, si  $p \neq q$ , por el Lema 4.4 de nuevo obtenemos una geodésica causal  $\lambda$  que une  $p$  y  $q$  y por tanto  $p < q$ .

□

Em particular, si  $M$  es globalmente hiperbólica entonces los conjuntos  $J^+(p)$ ,  $J^-(p)$  y  $J(p, q)$  son cerrados.

### 4.4. Conjuntos acronales

**Definición 4.9** Un conjunto  $A$  de  $M$  es *acronal* si nunca se cumple la relación  $p \ll q$  para  $p, q \in A$ , es decir, si ninguna curva temporal alcanza a  $A$  más de una vez.

**Definición 4.10** Una *variedad topológica  $n$ -dimensional*  $T$  es un espacio de Hausdorff tal que cada punto tiene un entorno homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.11** Un subespacio  $S$  de  $T$  es una *hipersuperficie topológica* si para cada  $p \in S$  existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  en  $T$  y un homeomorfismo de  $\mathcal{U}$  en un abierto de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\phi(\mathcal{U} \cap S) = \phi(\mathcal{U}) \cap \Pi$ , donde  $\Pi$  es un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.12** Un subconjunto  $F$  de  $M$  es un *conjunto futuro* si se cumple que  $I^+(F) \subset F$ .

Por ejemplo, si  $B$  es cualquier conjunto, entonces  $J^+(B)$  es un conjunto futuro. Si  $F$  es un conjunto futuro, a su complementario  $M \setminus F$  lo llamamos conjunto pasado.

**Definición 4.13** El *borde* de un conjunto acronal  $A$  consiste en todos los puntos  $p \in \bar{A}$  tales que todo entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  contiene una curva temporal desde  $I^-(p, \mathcal{U})$  hasta  $I^+(p, \mathcal{U})$  que no toca a  $A$ .

**Ejemplo 4.1** En  $\mathbb{R}^2$  el intervalo  $A = \{(0, x) : 0 \leq x \leq 1\}$  es acronal y tiene dos puntos borde,  $(0, 0)$  y  $(0, 1)$ . Pero si consideramos el conjunto  $A$  como un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , entonces el borde de  $A$  es  $\bar{A}$ .

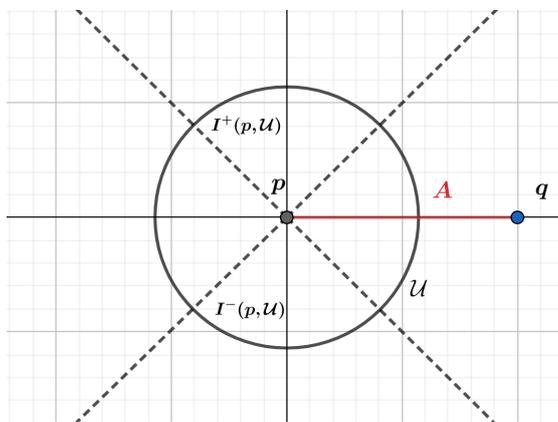


Figura 4.3: Elaboración propia

**Corolario 4.4 (14.27)** La frontera de un conjunto futuro  $F$  es una hipersuperficie topológica acronal cerrada.

*Demostración:*

Sea  $p \in bdF$ . Si  $q \in I^+(p)$ , entonces  $I^-(q)$  es un entorno de  $p$  y por tanto contiene algún punto de  $F$ . Entonces si  $p'$  es ese punto, se tendrá que  $q \in I^+(p')$  y por tanto que  $q \in I^+(F) \subset F \longrightarrow I^+(p) \subset F$  y, dualmente, como  $M \setminus F$  es un conjunto pasado,  $I^-(p) \subset M - F$ .

Esto implica que  $I^+(bdF)$  y  $I^-(bdF)$  son disjuntos y por tanto que  $bdF$  es acronal. Si no fuese así existirían dos puntos  $q, q' \in bdF$  tales que  $q \ll q'$  pero si tomamos un punto  $p$  en la

curva que los une, tendremos que  $q \ll p$  y que  $p \ll q'$ , es decir,  $p \in I^+(bdF)$  y  $p \in I^-(bdF)$ , lo que es una contradicción. Esto implica también que  $bdF$  no tiene puntos en el borde ya que  $I^+(p) \subset intF$  e  $I^-(p) \subset extF$  para  $p \in bdF$ . Entonces para todo entorno  $\mathcal{U}$  de  $p \in \overline{bdF} = bdF$  una curva temporal que vaya de  $I^+(p, \mathcal{U})$  a  $I^-(p, \mathcal{U})$  va a tener que pasar por  $bdF$ .

□

## 4.5. Hipersuperficies de Cauchy

Las hipersuperficies de Cauchy que estudiaremos en esta sección serán las que nos permitan formular los Teoremas de Hawking y el Teorema de Penrose en los capítulos 5 y 6.

**Definición 4.14** Una *hipersuperficie de Cauchy* de  $M$  es un subconjunto  $S$  que es alcanzado únicamente una vez por toda curva temporal inextensible en  $M$ .

**Lema 4.7 (14.29)** Una *hipersuperficie de Cauchy*  $S$  es una hipersuperficie topológica cerrada y acronal y es alcanzada por toda curva causal inextensible.

*Demostración:*

Por la definición de  $S$  podemos deducir que  $M$  es la unión disjunta de  $I^+(S)$ ,  $S$ ,  $I^-(S)$ , ya que por ejemplo si  $p \in I^+(S) \cap S$  se tendría que existe un  $q \in S$  tal que  $q \ll p$  y además  $p \in S$  por lo que habría una curva temporal que alcanza más de una vez a  $S$ . Por tanto, cualquier curva que pase por  $S$  toca inevitablemente a  $I^+(S)$  y a  $I^-(S)$  y esto implica que  $S$  es la frontera de estos dos conjuntos abiertos. Además, sabemos que  $I^+(I^+(S)) \subset I^+(S)$  y por tanto  $I^+(S)$  es un conjunto futuro. Esto nos permite deducir por el Corolario 4.4 que  $S$  es una hipersuperficie topológica cerrada y acronal.

Falta ver ahora que toda curva causal inextensible alcanza a  $S$ . Sea  $\alpha$  una curva inextensible causal. Suponemos por reducción al absurdo que no alcanza a  $S$ . Sea  $\alpha(0) \in I^+(\alpha(0), M - S)$ , más concretamente,  $\alpha(0) \in I^+(S)$ . Por el Lema 4.8 que demostraremos a continuación, existe una curva temporal  $\beta$  pasada que no toca a  $S$ .

Cualquier curva futura temporal que empiece en  $\beta(0)$  debe permanecer en  $I^+(S)$  (porque de otra forma tocaría a  $S$ ), entonces uniendo esta curva con  $\beta$  tendríamos una curva temporal inextensible que no alcanza a  $S$ , lo que contradice el hecho de que ésta sea una hipersuperficie de Cauchy.

□

**Lema 4.8 (14.30)** Sea  $\alpha$  una curva causal pasada inextensible que empieza en  $p$  y que no alcanza al conjunto cerrado  $C$ .

1. Si  $p_0 \in I^+(p, M - C)$ , existe una curva temporal pasada inextensible que empieza en  $p_0$  y que no alcanza a  $C$ .
2. Si  $\alpha$  no es una geodésica nula sin puntos conjugados, existe una curva temporal pasada que empieza en  $\alpha(0)$  y que no toca a  $C$ .

*Demostración:*

Como  $\alpha$  es pasada inextensible, podemos suponer que su dominio es  $[0, \infty]$  y que la sucesión  $\{\alpha(n)\}$  no converge.

(1) Trabajamos únicamente en la variedad  $M - C$ . Como la curva apunta hacia el pasado y se cumple que  $p_0 \gg \alpha(0)$  también se cumple que  $p_0 \gg \alpha(1)$ . Entonces existe un punto tal que  $\alpha(1) \ll p_1 \ll p_0$ . Continuando por inducción conseguimos la sucesión  $\{p_n\}$  con  $\alpha(n) \ll p_n \ll p_{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ . Uniendo cada  $p_{n-1}$  con  $p_n$  por un segmento temporal obtenemos una curva temporal pasada  $\beta$  en  $M - C$  con  $\beta(0) = p_0$ . Durante la construcción podemos tomar los  $p_n$  tan cerca de  $\alpha(n)$  como queramos, de tal forma que  $\{p_n\}$  no converga. Por tanto, por definición,  $\beta$  es una curva inextensible.

(2) Si  $\alpha$  no es una geodésica sin puntos conjugados, sabemos que no lo es concretamente en  $\alpha[0, 1]$ . Además, como si no hay puntos conjugados tampoco hay focales y  $\alpha[0, 1]$  es compacto y disjunto de  $C$ , podemos aplicar el Teorema 3.1 y deducimos que el segmento de curva se puede deformar en un segmento temporal con los mismos extremos y aun evitando  $C$ . Sea  $\alpha_1$  la curva causal obtenida de  $\alpha$  mediante la sustitución de  $\alpha[0, 1]$  por este segmento temporal que hemos obtenido.

Ahora, puede que  $\alpha[1, \infty]$  sea una geodésica sin puntos conjugados, pero para un  $\delta_1 > 0$  pequeño,  $\alpha[1 - \delta_1, 2]$  no lo es. Como antes, podemos obtener una curva  $\alpha_2$  sustituyendo este segmento por un segmento de curva temporal que también evita a  $C$ . Iterando este último paso conseguimos una curva temporal pasada  $\beta$  desde  $\alpha(0)$  que evita a  $C$ .

Si tomamos igual que en (1) una sucesión de  $\{\delta_n\}$  que converge a 0 lo suficientemente rápido, podremos asegurar que  $\beta$  sea una curva inextensible pasada.

□

**Proposición 4.2 (14.31)** *Sea  $S$  una hipersuperficie de Cauchy en  $M$ , y sea  $X$  un campo de vectores temporal en  $M$ . Si  $p \in M$ , una curva integral máxima de  $X$  a través de  $p$  alcanza a  $S$  en un único punto  $\rho(p)$ . Entonces  $\rho : M \rightarrow S$  es una función continua, abierta y sobreyectiva en  $S$  dejando sus puntos fijos. En particular,  $S$  es conexo.*

*Demostración:*

Por la definición de curva integral maximal sabemos que ésta también es inextensible. Sea  $\tilde{\psi} : \mathcal{D} \rightarrow M$  el flujo de  $X$  con  $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R}$ . Como  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy, por el Lemma 4.7 también es una hipersuperficie topológica acronal en  $M$ . Entonces  $\mathcal{D}(S) = (S \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$  es una hipersuperficie topológica acronal en  $\mathcal{D}$ . La restricción  $\psi : \mathcal{D}(S) \rightarrow M$  es continua, y, como  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy, se tiene que  $\psi$  es inyectiva. Ya que si  $\psi(p, t) = \psi(p, t')$  por definición  $\alpha_p(t) = \alpha_p(t')$ , y entonces se cumpliría que  $\alpha_p(t) \ll \alpha_p(t')$ , lo que contradice la acronalidad de  $\mathcal{D}(S)$ . Además  $\psi$  también es sobreyectiva.

$\mathcal{D}(S)$  y  $M$  son variedades de la misma dimensión, por tanto, por el teorema de la invarianza del dominio<sup>3</sup>,  $\psi$  es un homeomorfismo.

La proyección  $\pi : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$  es abierta, continua y sobreyectiva. Pero, teniendo en cuenta la definición de  $\rho$ , se cumple que  $\rho = \pi \circ \psi^{-1}$ , ya que  $\rho \psi(p, t) = \rho \alpha_p(t) = \alpha_p(0) = p$  para

<sup>3</sup>El teorema de la invarianza del dominio dice que si  $U$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función inyectiva y continua, entonces  $f(U) = V$  es abierto y  $f$  es un homeomorfismo entre  $U$  y  $V$

$p \in S$ . Por tanto  $\rho$  tiene las mismas características que  $\pi$ . Como  $M$  es conexa,  $S$  también debe de serlo.

□

## 4.6. Desarrollos de Cauchy

Para terminar este capítulo definimos los desarrollos de Cauchy, que nos permitirán saber qué eventos podemos deducir a partir de nuestro conjunto inicial. De hecho, a veces se pueden llamar a los desarrollos de Cauchy dominios de dependencia porque, como veremos, todo lo que ocurre en el desarrollo de Cauchy de  $A$  depende de  $A$ .

**Definición 4.15** Si  $A$  es un subconjunto acronal de  $M$ , el *desarrollo futuro de Cauchy* de  $A$  es el conjunto  $D^+(A)$  de todos los puntos  $p \in M$  tales que toda curva causal pasada inextensible que pase a través de  $p$  alcanza a  $A$ . (En particular,  $A \subset D$ ).

Dualmente se define *desarrollo pasado de Cauchy* y se escribe  $D^-(A)$ . De esta forma, llamaremos  $D^+(A) \cup D^-(A)$  al *desarrollo de Cauchy* de  $A$ .

En Relatividad, el conjunto  $D^+(A)$  es la parte del futuro causal de  $A$  que es predecible a partir de  $A$ ; ninguna partícula pasada inextensible puede alcanzar un punto  $q$  en  $D^+(A)$  sin antes haber pasado por  $A$ .

En este punto es interesante hacer las siguientes observaciones:

**Observación 4.1** Si  $A$  es un conjunto acronal, sabemos por definición que ninguna curva temporal alcanza a  $A$  más de una vez, por tanto, será una hipersuperficie de Cauchy si además toda curva temporal inextensible lo alcanza, si esto ocurre, entonces por el Lema 4.7 también es alcanzado por toda curva causal inextensible. Por tanto, sea  $p \in M$  y  $\alpha$  una curva causal inextensible que pasa por  $p$ , por lo dicho anteriormente dicha curva tendrá que alcanzar a  $A$ , es decir  $p \in D(A)$ . Deducimos entonces que un conjunto acronal  $A$  es una hipersuperficie de Cauchy si y solo si  $D(A) = M$ .

**Observación 4.2** Se cumple además que  $D^+(A) \subset A \cup I^+(A) \subset J^+(A)$ . Como suponemos que  $A$  es acronal,  $D^+(A)$  e  $I^-(A)$  son disjuntos, ya que si  $q \in D^+(A) \cap I^-(A)$ , por pertenecer a  $D^+(A)$  existe un  $p \in A$  tal que  $p \leq q$  y por pertenecer a  $I^-(A)$  existe un  $p_1 \in A$  tal que  $q \ll p_1$  y por el Corolario 4.1 se tendría que  $p \ll p_1$  con ambos puntos en  $A$ , lo que contradiría el hecho de que  $A$  es acronal. Esto implica por tanto que  $D^+(A) \cap D^-(A) = A$  y que  $D^+(A) - A = D(A) \cap I^+(A)$ .

**Definición 4.16** Llamaremos *regresión* al hecho de que una curva causal pasada  $\alpha$  que empieza en  $D^+(A)$  no puede abandonar  $D^+(A)$  sin haber alcanzado primero a  $A$ .

Esto ocurre porque, si suponemos que  $\alpha(s) \notin D^+(S)$ , tendría que existir una curva causal pasada inextensible  $\beta$  empezando en  $\alpha(s)$  y que no alcanzara a  $A$ . Pero la curva  $\alpha|_{[0,s]} + \beta$  pero  $\alpha|_{[0,s]} + \beta$  debe alcanzar a  $A$ , y por tanto  $\alpha|_{[0,s]}$  alcanza a  $A$ .

**Lema 4.9 (14.37)** *Si  $A$  es acronal y  $p \in \text{int}D(A)$ , entonces toda curva causal inextensible que pase a través de  $p$  alcanza a  $I^+(A)$  y a  $I^-(A)$ .*

*Demostración:*

Podemos suponer que  $p \in I^+(A) \cup A$ . Sea  $\alpha$  una curva causal pasada inextensible empezando en  $p$ . Por el Lema 4.8 (1) tomando como  $C$  el conjunto vacío, tenemos que existe una curva pasada inextensible  $\beta$  que empieza en un punto  $p_0$  de  $I^+(p, M)$ , por ejemplo podemos tomarlo de  $D(A) \cup I^+(A) \subset D^+(A)$  ya que  $I^+(I^+(A)) = I^+(A)$  y como  $A$  es acronal se tiene que  $D(A) = M$ . Además  $D(A) \cup I^+(A) \subset D^+(A)$  por la observación 4.2. Por la demostración del Lema 4.2 sabemos que se cumplirá que cada  $\beta(s)$  tiene un punto de  $\alpha$  en  $I^-(\beta(s))$ . Como  $\beta$  alcanza a  $A$ , por el fenómeno de regresión, entonces  $\alpha$  debe alcanzar a  $I^-(A)$ .

Sea ahora  $\gamma$  una curva causal futura inextensible que empieza en  $p$ . Si  $p \in A$ , entonces el caso dual al de la curva pasada nos dice que  $\gamma$  alcanza a  $I^+(A)$ , y si  $p \in I^+(A)$  no queda nada que probar.

□

**Teorema 4.1 (6.6.3 HAWKING Y ELLIS)** *Si  $A$  es un conjunto acronal, entonces  $\text{int}D(A)$  (si no es vacío) es globalmente hiperbólico.*

*Demostración:*

(1) Vemos que se cumple la condición de causalidad en  $D(A)$ .

Por reducción al absurdo suponemos que sí existe una curva cerrada causal  $\gamma$  en  $p \in D(A)$ . Si recorremos  $\gamma$  repetidas veces nos da una curva inextensible causal  $\tilde{\gamma}$  que debe tocar  $A$  (ya que  $p \in D(A)$ ). Pero  $\tilde{\gamma}$  está tocando a  $A$  repetidas veces, y como por el Teorema 3.1 existe una curva temporal con los mismos extremos y que cumpliría lo mismo que  $\tilde{\gamma}$ , se contradice que  $A$  sea acronal.

(2) Veamos que se cumple la condición fuerte de causalidad en  $p \in \text{int}D(A)$ .

Suponemos que no se cumple. Sea  $\mathcal{U}$  un entorno de  $p$ , existe otro entorno  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  de  $p$  tal que existe una sucesión de curvas causales futuras  $\lambda_n$  cuyos extremos convergen a  $p$  y que en algún momento salen de  $\mathcal{U}$ . Por simplicidad establecemos que el dominio de estas curvas es  $[0, 1]$ . Por la Proposición 4.1, tomando  $p$  como punto de acumulación, existe una curva límite  $\lambda$  que pasa por  $p$  y es causal e inextensible. Por el Lema 4.9, dicha curva alcanza a  $I^+(A)$ , digamos en  $\lambda(s)$ , y por la definición de curva límite, existe una subsucesión  $\{\lambda_m\}$  tal que para todo  $\lambda(s)$  cada entorno interseca a todas las curvas  $\{\lambda_m\}$  menos a un número finito. Por tanto algún  $\lambda_m(s_0)$  también está en  $I^+(A)$  y, como por el Teorema 3.1, existe una curva temporal con los mismos extremos que  $\lambda$ , se debe cumplir que a partir de  $\lambda_m(s_0)$  todos los  $\lambda_m(s)$  permanecen también en  $I^+(A)$ .

Consideramos ahora la sucesión  $\{\lambda_m|[s, 1]\}$  de curvas pasadas desde  $\lambda_m(1)$  a  $\lambda_m(s)$ . Usando el Lema 4.1 dualmente y tomando  $\lambda_m(1)$  como punto de acumulación, obtendremos que existe una curva límite  $\tilde{\lambda}$  causal pasada y que es inextensible. Por el Lema 4.9 sabemos que  $\tilde{\lambda}$  alcanza a  $I^-(A)$ , pero como las curvas  $\lambda_m$  eran futuras y teníamos que  $\lambda_m(s) \in I^+(A)$ , se contradice el hecho de que  $A$  sea acronal.

(3) Vemos que el conjunto  $J(p, q)$  es compacto para  $p, q \in \text{int}D(A)$ .

Para ello, vamos a tomar una sucesión de puntos en  $J(p, q)$  y encontrar una subsucesión que converja en el mismo conjunto.

Caso 1: Si  $p, q \in I^-(A)$  y  $p \in J^-(q)$ .

Partimos de que existe una sucesión de puntos  $\{x_n\}$  en  $J(p, q)$  y vamos a encontrar una subsucesión de puntos que converja. Consideramos la sucesión infinita de curvas causales futuras  $\{\lambda_n\}$  que parten desde  $p$ , pasan por  $x_n$  y llegan hasta  $q$ . (Ver Figura 4.4). Por el Lema 4.1, tomando como punto de acumulación a  $p$ , existe la curva límite  $\lambda$  que es futura y que pasa por  $p$ . Esta curva límite debe tener un punto final en  $q$  porque sino sería inextensible y, como  $p \in I^-(A)$ , también tenemos que  $p \in D^-(A)$ , y por definición, debe alcanzar a  $A$  en un punto  $\tilde{p}$ . Por la definición de curva límite, ésta debe pasar por  $q$ , porque sino habría un punto de  $\lambda$  en el que su entorno no interseca a todas las curvas de la subsucesión  $\{\lambda'_i\}$  menos a un número finito. Por tanto, podemos obtener una curva desde  $\tilde{p}$  hasta  $q$  y como  $q \in I^-(A)$ , otra desde  $q$  hasta  $A$ , lo que contradice la acronalidad de  $A$ . Por tanto  $\lambda$  debe tener un punto final en  $q$  y por la definición de curva límite tenemos que existe una subsucesión  $\{\lambda'_i\}$  tal que para todo  $p \in \lambda$ ,  $\{\lambda'_i\}$  converge a  $p$ . Por tanto ya tenemos la subsucesión  $\{x_m\} \equiv \{\lambda'_i\}$  convergente en  $J(p, q)$ .

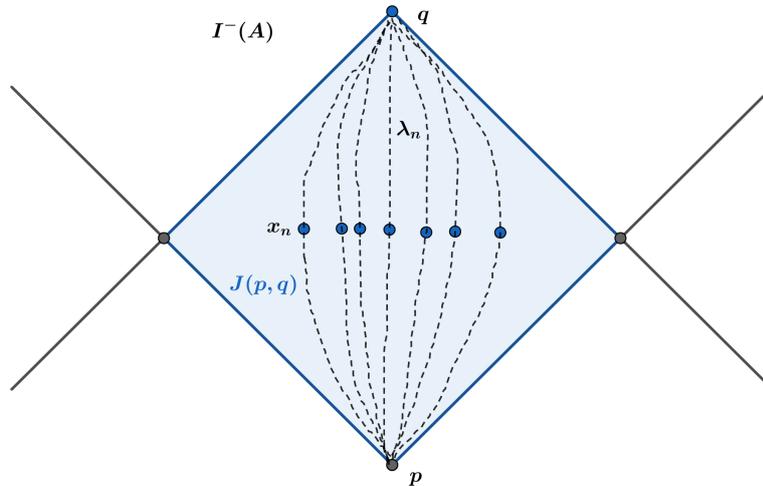


Figura 4.4: Imagen de elaboración propia

Caso 2:  $p \in J^-(A)$ ,  $q \in J^+(A) \cap J^+(p)$ .

Considerando igual que antes la sucesión de puntos  $\{x_n\}$  y la sucesión de curvas  $\{\lambda_n\}$ . Volvemos a tener una curva límite  $\lambda$  desde  $p$  y si ésta tuviera un punto final en  $q$ , por el mismo procedimiento del caso 1 obtendríamos una subsucesión convergente en  $J(p, q)$ .

Si no tuviera punto final en  $q$  la curva sería inextensible, por el Lema 4.9 tendrá algún punto  $y \in I^+(A)$ . Por la definición de curva límite, existe una subsucesión  $\{\lambda'_n\}$  que converge a un punto  $r$  para todo  $r \in \lambda$  entre  $p$  e  $y$ .

Sea  $\tilde{\lambda}$  la curva límite pasada desde  $q$  de la subsucesión  $\{\lambda'_n\}$  recorrida en sentido contrario. Si  $\tilde{\lambda}$  tiene punto final en  $p$ , podemos tomar la subsucesión convergente que nos da la definición de curva límite y sabremos que ésta converge en  $J(p, q)$ .

Si por el contrario  $\tilde{\lambda}$  no acaba en  $p$  pero sí pasa por  $y$ , podremos unir la curva  $\lambda$  que parte desde  $p$  con la curva  $\tilde{\lambda}$  que parte desde  $q$  y llegaría hasta algún punto entre  $p$  e  $y$ . Recorriendo esta última curva en sentido contrario tendríamos una curva límite desde  $p$  hasta  $q$  y podríamos, igual que en los casos anteriores, encontrar la subsucesión.

Por último, si  $\tilde{\lambda}$  no tiene punto final en  $p$  y no pasa por  $y$ , entonces tendrá algún  $z \in I^-(A)$  de nuevo por el Lema 4.9. Sea  $\{\lambda''_n\}$  una subsucesión de  $\{\lambda'_n\}$  que converge a  $r$  para todo  $r$  entre  $q$  y  $z$ . Sea  $V$  un entorno abierto de  $\tilde{\lambda}$  que no contiene a  $y$ . Entonces para un  $n$  suficientemente grande se tendrá que todos los puntos en  $\lambda''_n \cap J^+(A)$  están contenidos en  $A$ . Pero esto es imposible porque  $y$  es el límite de las  $\lambda''_n$  y pertenecía a  $I^+(A)$ , lo que contradice la acronalidad.

Por tanto hemos probado que siempre encontramos una subsucesión convergente y  $J(p, q)$  es compacto. Sólo quedarían los casos en los que  $p, q \in I^+(A)$  y  $q \in J^-(A)$ ,  $p \in J^+(A)$  se demostrarían de forma similar.

□

**Corolario 4.5 (14.39)** *Si  $M$  tiene una hipersuperficie de Cauchy, entonces  $M$  es globalmente hiperbólica.*

*Demostración:*

Si  $S$  es la hipersuperficie de Cauchy, entonces, por el Lema 4.7 es acronal y por la Observación 4.1 esto significa que  $D(S) = M$ , y por tanto  $\text{int}D(S) = M$ . Finalmente, por el Teorema 4.1 tenemos que  $M$  es globalmente hiperbólico.

□

# Capítulo 5

## Teorema de Singularidad de Penrose

Finalmente vamos a demostrar aquí el teorema principal del trabajo. En primer lugar, tenemos que definir lo que es una singularidad. Como ya indicamos en la introducción, una de las grandes ideas que tuvo Penrose era la de definir una singularidad como la existencia de geodésicas luminosas o temporales incompletas, que, como ya definimos debajo de la Proposición 1.1, son aquellas geodésicas inextensibles que no están definidas en toda la recta real.

Recordemos que una variedad será incompleta si existe una geodésica incompleta. En particular, en este capítulo hablaremos de variedades luminosamente incompletas hacia el futuro, lo que significa que existe alguna geodésica nula incompleta que apunta hacia el futuro.

En primer lugar, si  $P$  es una subvariedad de  $M$  con codimensión<sup>1</sup>  $\geq 2$ . Si  $H$  es la curvatura media del campo vectorial  $P$ , entonces, en cada espacio vectorial normal  $T_p(P)^\perp$  se tiene lo siguiente:

1.  $\mathbf{k}(v) = \langle H, v \rangle > 0$  para todos los vectores nulos  $v$  apuntando hacia el futuro y normales a  $P$ .
2.  $\mathbf{k}(w) = \langle H, w \rangle > 0$  para todos los vectores causales  $w$  apuntando hacia el futuro y normales a  $P$ .
3.  $H$  es temporal y apunta hacia el pasado.

Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 5.1** Una subvariedad espacial de  $M$  es *futura convergente* si su curvatura media  $H$  es temporal y apunta hacia el pasado. En relatividad, una superficie futura convergente se conoce como una *superficie atrapada*.

Como hemos indicado debajo de la Proposición 2.7, el hecho de que  $\mathbf{k}(v) = \langle H, v \rangle > 0$  para todos los vectores nulos y normales a  $P$  apuntando hacia el futuro, indica que las geodésicas  $\gamma_v$  convergen formando la superficie atrapada.

**Observación 5.1** Para un subconjunto  $A$  de  $M$ , si llamamos  $E^+(A) = J^+(A) - I^+(A)$ , es fácil ver que  $E^+(A)$  es acronal y que  $A \subset E^+(A)$  si y solo si  $A$  es acronal. Si  $p \in A$  significa que  $p \in E^+(A)$  esto implica que si tomamos otro  $q \in A$ , por hipótesis  $q \in E^+(A)$  y este conjunto es acronal luego no se puede dar que  $p \ll q$ , es decir,  $A$  es acronal. Además por el Corolario

---

<sup>1</sup>La codimensión de una subvariedad  $P$  de  $M$  es  $(\dim M - \dim P)$

4.2 también se cumple que  $E^+(A)$  está generado por geodésicas nulas sin puntos conjugados. Si  $q \in E^+(A)$  y  $\alpha$  es una curva causal que apunta hacia el futuro desde  $A$  hasta  $q$ , entonces  $\alpha$  es una geodésica nula sin puntos conjugados antes de  $q$ .

**Definición 5.2** Un subconjunto cerrado, acronal y compacto  $A$  de  $M$  es un *conjunto atrapado futuro* si  $E^+(A)$  es compacto. De igual forma si  $E^-(A)$  es compacto se dirá que es un *conjunto atrapado pasado*.

**Proposición 5.1 (14.60)** *Suponemos que*

1.  $Ric(v, v) \geq 0$  para todos los vectores  $v$  nulos tangentes a  $M$ .
2.  $M$  es una variedad luminosamente completa hacia el futuro.

Si  $P$  es una subvariedad de  $M$   $(n-2)$ -dimensional compacta acronal que es futura convergente entonces  $P$  es una superficie atrapada futura.

*Demostración:*

Globalmente,  $P$  no tiene por qué admitir un campo normal de vectores nulos, pero para cada  $p \in P$  podemos elegir un par de vectores nulos que apunten al futuro que localmente caigan en dos campos normales independientes de vectores. El subespacio  $\tilde{P} \subset N(P)$  formado por estos vectores nulos es un doble recubrimiento de  $P$  y por tanto es compacto. Sea ahora  $v \in \tilde{P}$ , es decir, un vector normal nulo, por la Proposición 2.7, si se cumple que

1.  $\mathbf{k}(v) = \langle v, H_p \rangle > 0$
2.  $Ric(v, v) \geq 0$

entonces existe un punto focal  $\lambda_v(r)$  a lo largo de la geodésica  $\lambda_v$  con  $0 \leq r \leq 1/\mathbf{k}(v)$  donde  $\mathbf{k}(v) = \langle H, v \rangle > 0$ . Como  $\mathbf{k}$  es una función continua en el compacto  $\tilde{P}$ , existe un número  $b > 0$  tal que para todo  $v \in \tilde{P}$  existe un punto focal de  $P$  a lo largo de  $\lambda_v|_{[0, b)}$ .

Si  $q \in E^+(P)$ , por la observación 5.1 existe una geodésica nula  $\lambda$  desde  $P$  a  $q$ . Como  $q \notin I^+(P)$ ,  $\lambda \in \Omega(P, q)$  es una curva causal y además no puede haber una curva temporal con los mismos extremos y arbitrariamente cercana a porque entonces se tendría que  $q \in I^+(P)$ . Por tanto, por el Teorema 3.1 debe ser una geodésica nula  $P$ -normal que no tiene puntos focales antes de  $q$ . Como  $M$  es completa,  $\lambda$  debe ser una reparametrización de algún  $\lambda_v$ . Por tanto concluimos que:

$$E^+(P) \subset \exp(K) \text{ donde } K = \{sv \in N(P) : v \in \tilde{P} \quad \text{y} \quad 0 \leq s \leq b\}$$

Como  $\tilde{P}$  es compacto y  $K$  también se deduce que  $\exp(K)$  también lo es. Finalmente, para ver que  $E^+(P)$  es compacto, sea  $\{q_n\}$  una sucesión en  $E^+(P)$ . Alguna subsucesión  $\{q_m\}$  convergerá a un punto  $q \in \exp(K) \subset J^+(P)$ . Pero  $q$  no puede estar en  $I^+(A)$  ya que ningún  $q_n$  lo está, por tanto  $q \in E^+(P)$ .

□

**Teorema 5.1 PENROSE (14.61)** *Suponemos que*

- $Ric(v, v) \geq 0$  para todos los vectores nulos tangentes a  $M$ .
- $M$  tiene una hipersuperficie de Cauchy  $S$  no compacta.
- $P$  es una subvariedad  $(n - 2)$ -dimensional de  $M$  compacta y acronal que es futura convergente.

Entonces  $M$  es una variedad luminosamente incompleta hacia el futuro.

*Demostración:*

Vamos a suponer por reducción al absurdo que  $M$  es una variedad futura luminosamente incompleta. Como  $M$  tiene una hipersuperficie de Cauchy, por el Corolario 4.5  $M$  es globalmente hiperbólica. Por el Lema 4.6 los conjuntos  $J^+(p)$  y  $J^-(p)$  son cerrados para todo  $p \in M$ . Como  $P$  es compacto el conjunto  $J^+(P)$  es cerrado, (ver [1], ejercicio 14. 4). Por el Lema 4.3 se tiene que  $\text{int}J^+(P) = I^+(P)$  y entonces  $E^+(P) = J^+(P) - I^+(P) = J^+(P) - \text{int}J^+(P) = \text{bd}J^+(P)$ . Como  $J^+(P)$  es un conjunto futuro, el Corolario 4.4 dice que su frontera es una hipersuperficie topológica acronal cerrada. Además, como suponemos que la variedad es luminosamente completa, se cumplen las condiciones de la Proposición 5.1, en la que probamos que  $E^+(P)$  es compacta.

Para la hipersuperficie de Cauchy  $S$  consideramos la función  $\rho : E^+(P) \longrightarrow S$  que, igual que en la Proposición 4.2, lleva un punto  $p \in E^+(P)$  al único punto alcanzado por una curva integral máxima de un campo de vectores temporal  $X$  en  $M$  que pase a través de  $p$ . Entonces  $\rho$  es continua y como hemos visto que  $E^+(P)$  es acronal, la unicidad de las curvas integrales implica que  $\rho$  es inyectiva. Por el teorema de la invarianza del dominio  $\rho$  es un homeomorfismo sobreyectivo de  $E^+(P)$  en algún subconjunto abierto de  $S$ . Como  $E^+(P)$  es compacto,  $\rho(E^+(P))$  también lo es, y por tanto es cerrado en  $S$ . Además, como por la Proposición 4.2  $\rho$  es una función abierta,  $\rho(E^+(P))$  es también abierto. Pero como  $S$  es conexo, los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el total y el vacío, por lo que debe ser  $\rho(E^+(P)) = S$ , es decir,  $\rho : E^+(P) \longrightarrow S$  es un homeomorfismo.

Por tanto, como  $E^+(P)$  es compacto, se debería cumplir que  $S$  también lo es, pero esto no puede ser porque  $S$  no es compacta. Concluimos entonces que  $M$  debe ser luminosamente incompleta hacia el futuro.  $\square$

Para finalizar el capítulo, vamos a relacionar la demostración del teorema con la imagen que aparece en el artículo original de Penrose, [9].

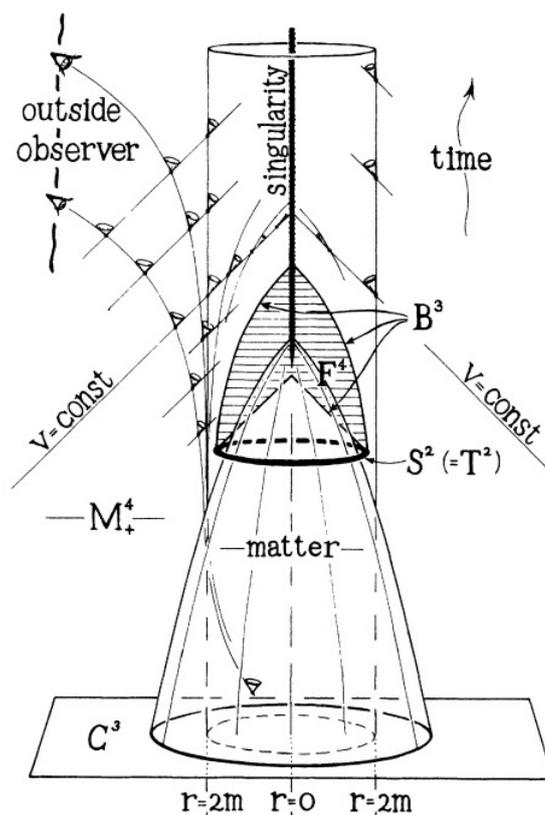


Figura 5.1: Imagen obtenida de [9]

En el dibujo,  $M$  es la variedad que contiene una hipersuperficie de Cauchy, llamada aquí  $C^3$ . Como vemos, se forma una subvariedad atrapada,  $S^2 = T^2$ , de la que salen en línea recta los vectores entrantes y encorvados los vectores salientes,  $B^3$ . Como ya habíamos comentado antes, en el dibujo se ve cómo estos vectores convergen. El conjunto  $E^+(P)$  definido en la teoría sería la superficie rayada  $F^4$ .

Por tanto, lo que hemos hecho en la demostración del Teorema 5.1 es demostrar en primer lugar que  $F^4 = bdJ^+(S^2)$ , y con la Proposición 5.1 vemos que  $F^4$  es compacto. Después hemos encontrado un homeomorfismo  $\rho$  desde  $F^4$  a  $C^3$ , pero como  $F^4$  es compacta,  $C^3$  también debería de serlo, lo que es una contradicción. De esta forma  $M$  debe ser luminosamente incompleta hacia el futuro, es decir, existe alguna geodésica nula futura que tenga un “fin repentino”, es decir, que sea incompleta.

# Capítulo 6

## Teoremas de singularidad de Stephen Hawking

Una vez demostrado el teorema principal de este trabajo, explicamos también los teoremas de singularidad de Stephen Hawking, en su versión fuerte y débil, ya que para su comprensión necesitaremos muchos de los resultados probados hasta ahora. Aun así, necesitamos algunos conceptos nuevos que presentamos en las dos primeras secciones de este capítulo.

### 6.1. Hipersuperficies espaciales

En esta sección usaremos a menudo la siguiente definición.

**Definición 6.1** Un subconjunto  $B$  de  $M$  se dice que es *acausal* si nunca se da la relación  $p < q$  para  $p, q \in B$ . Es decir, ninguna curva causal alcanza a  $B$  más de una vez.

**Lema 6.1 (14.42)** Una hipersuperficie acronal espacial  $S$  es acausal.

*Demostración:*

Por reducción al absurdo suponemos que existe una curva causal futura  $\alpha$  cuyos extremos son  $\alpha(0)$  y  $\alpha(1)$  en  $S$ . Si  $\alpha$  no es una geodésica nula, por la Proposición 3.1 existe una curva temporal con los mismos extremos que  $\alpha$  y arbitrariamente cercana a  $\alpha$ . Pero esto contradice la acronalidad de  $S$ . Si  $\alpha$  fuese una geodésica nula, entonces  $\alpha'(0)$  no puede ser normal a  $S$ , ya que es un vector nulo y para ser normal a  $S$  debe ser temporal, por ser  $S$  una hipersuperficie espacial. Entonces por el Lema 3.3 también existe una curva temporal como en el caso anterior y volvemos a tener una contradicción.

□

La demostración del siguiente lema se puede encontrar en [1].

**Lema 6.2 (14.43)** Si  $S$  es una hipersuperficie acausal en  $M$ , entonces  $D(S)$  es abierto (y por tanto globalmente hiperbólico).

El siguiente teorema demuestra la existencia de geodésicas que maximizan la distancia entre  $S$  y su desarrollo de Cauchy futuro.

**Teorema 6.1 (14.44)** *Sea  $S$  es una hipersuperficie espacial acronal cerrada en  $M$ . Si  $q \in D^+(S)$ , existe una geodésica desde  $S$  hasta  $q$  cuya longitud es  $\tau(S, q)$ . Por tanto  $\gamma$  es normal a  $S$  y no tiene puntos focales de  $S$  antes de  $q$  ( $\gamma$  es temporal excepto en el caso trivial  $q \in S$ ).*

*Demostración:*

Por el Lema 6.1, como  $S$  es una hipersuperficie acronal, también es acausal, por lo que podemos usar el Lema 6.2, que nos indica que  $D(S)$  es globalmente hiperbólico. Se tiene además que el conjunto  $J^-(p) \cap D^+(S)$  es compacto, (ver [1], lema 14.40) y si lo intersecamos con  $S$ ,  $J^-(p) \cap D^+(S) \cap S = J^-(p) \cap S$ , seguirá siendo compacto. Por el Lema 4.5, la función que mide la distancia a  $q$ ,  $\tau(x, q)$ , es continua en  $J^-(q) \cap S$ , por tanto alcanza el máximo digamos en  $p$ . Evidentemente este máximo es  $\tau(p, q) = \tau(S, q)$ . Por la Proposición 4.4, existe una geodésica  $\gamma$  desde  $p$  hasta  $q$  de longitud  $\tau(p, q) = \tau(S, q)$ . Asumiendo que  $q \notin S$ , se cumple que  $p \ll q$ , ya que no puede ser  $p < q$ , por ser  $S$  acausal. Por lo que  $\tau(p, q) > 0$ , y  $\gamma$  es temporal. El Corolario 2.3 nos dice que el máximo de la longitud sólo se puede dar si  $\gamma$  es normal a  $S$ . Por otro lado, como la geodésica es temporal y hemos visto que se alcanza el máximo, el Teorema 2.2 nos dice que no puede haber puntos focales a lo largo de  $\gamma$ .

□

## 6.2. Horizontes de Cauchy

El futuro de la frontera del desarrollo de Cauchy  $D^+(A)$  se define como sigue.

**Definición 6.2** Si  $A$  es un conjunto acronal, su *horizonte de Cauchy futuro*  $H^+(A)$  es

$$\overline{D^+(A)} - I^-(D^+(A)) = \{p \in \overline{D^+(A)} : I^+(p) \text{ no alcanza a } D^+(A)\}$$

El sentido físico del horizonte de Cauchy es que es el límite que separa la región controlada por  $A$  de la que no se puede conocer a partir de  $A$ . Por tanto, si  $H^+(A)$  no es el conjunto vacío, no se puede predecir todo el futuro de  $A$  a partir de  $A$ . (Ver Figura 6.1).

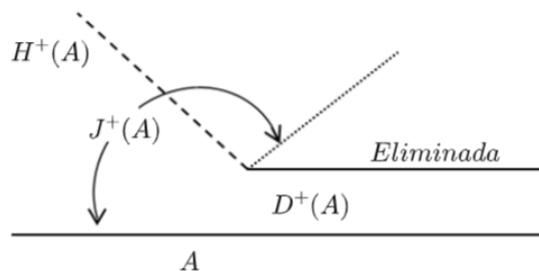


Figura 6.1: Elaboración propia basada en [1] pág. 429.

Dualmente, el *horizonte de Cauchy pasado*  $H^-(A)$  es el límite que separa  $D^-(A)$  de  $J^-(A)$ . El *horizonte de Cauchy* de  $A$  se define como  $H(A) = H^-(A) \cap H^+(A)$ .

**Lema 6.3 (14.51)** Para un conjunto cerrado acronal  $A$ ,  $\overline{D^+}(A)$  es el conjunto  $T$  de todos los puntos  $p$  tales que toda curva pasada temporal inextensible que pasa a través de  $p$  alcanza a  $A$ .

*Demostración:*

$$\diamond \overline{D^+}(A) \subset T$$

Suponemos por reducción al absurdo que hay un  $p \in \overline{D^+}(A) - T$ . Entonces existe una curva temporal inextensible  $\alpha$  que empieza en  $p$  y que no alcanza a  $A$ . Tenemos por tanto que  $p \notin A$ , y entonces  $p$  tiene un entorno convexo  $\mathcal{U}$  que no interseca a  $A$ . Nos movemos ahora desde  $p$  hacia el pasado en  $\alpha$  hasta un punto  $r$  todavía dentro de  $\mathcal{U}$ . Entonces  $I^+(r, \mathcal{U})$  contiene a  $p$  y por tanto a un punto  $q \in D^+(A)$ , ya que  $p \in \overline{D^+}(A)$ . La curva desde  $q$  hasta  $r$  en  $\mathcal{U}$ , unida con la geodésica pasada  $\alpha$  desde  $r$ , forman una curva temporal pasada que no alcanza a  $A$ , lo que contradice el hecho de que  $q \in D^+(A)$ .

$$\diamond T \subset \overline{D^+}(A)$$

Si  $q \in T - \overline{D^+}(A)$ , tomamos un  $r \in I^-(q, M - \overline{D^+}(A))$ . Por tanto hay una curva pasada inextensible causal en  $r$  que no alcanza a  $A$ . Pero entonces por el Lema 4.8 existe una curva temporal pasada inextensible a través de  $q$  que no alcanza a  $A$ . Lo que implicaría que  $q \notin T$ , y esto es una contradicción.

□

**Lema 6.4 (14.52)** Si  $A$  es un conjunto acronal cerrado, entonces  $bdD^+(A) = A \cap H^+(A)$ <sup>1</sup>.

*Demostración:*

Si  $p \in A$ , como  $A \subset D^+(A)$  y  $A$  es acronal y cerrado, si consideramos una curva temporal que pase por  $p$  solo una parte de la curva estará en  $D^+(A)$ , por lo que  $p \in bdD^+(A)$ . Además, si  $p \in H^+(A)$ , se tiene que  $p \in bdD^+(A)$ , lo vemos. Por definición, si  $p \in H^+(S)$ , entonces  $p \in \overline{D^+}(S)$ . Por reducción al absurdo suponemos que  $p \in \text{int}D^+(S)$ , entonces existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  totalmente contenido en  $D^+(A)$ . Como  $p \in D^+(A)$ , existe una curva  $\gamma$  causal pasada inextensible que une  $p$  con un punto  $q$  en  $A$ . Tomamos otro punto  $q' \in \mathcal{U}$  de  $\gamma$  antes que  $p$ . Entonces  $I^+(p, \mathcal{U})$  contiene a  $q' \in D^+(S)$ . Pero en particular  $p \in H^+(S)$ , y por definición esto implica que  $I^+(p)$  no puede alcanzar a  $D^+(S)$ . Hemos llegado por tanto a una contradicción.

Con todo esto tenemos que  $A \cap H^+(A) \subset bdD^+(A)$ . Para probar la implicación contraria suponemos que  $p \in bdD^+(A) - A - H^+(A)$ . Entonces  $p \in \overline{D^+}(A) - A$ , por tanto, por el Lema anterior,  $p \in I^+(A)$ . También se tenía que  $p \in \overline{D^+}(A) - H^+(A)$ , entonces, por la definición de  $H^+(A)$ , hay un punto  $q \in I^+(p) \cap D^+(A)$ . Por tanto el conjunto  $I^+(A) \cap I^-(q)$  es un entorno de  $p$  que, por regresión, está contenido en  $D^+(A)$ . Pero esto contradice que  $p \in bdD^+(A)$ .

□

**Proposición 6.1 (14.53)** Sea  $S$  una hipersuperficie topológica cerrada acausal. Entonces se cumple que  $H^+(S) = I^+(S) \cap bdD^+(S) = \overline{D^+}(S) - D^+(S)$ . En particular,  $H^+(S)$  y  $S$  son disjuntos.

<sup>1</sup>Escribiremos  $bdD$  para referirnos a la frontera topológica del conjunto  $D$ .

*Demostración:*

1. Usando la definición de  $H^+(S)$  y el Lema 6.3, obtenemos que  $H^+(S) \subset \overline{D^+(S)} \subset S \cup I^+(S)$ .
2. Se tiene que  $D^+(S)$  no interseca a  $H^+(S)$ . Por el Lema 6.2  $D(S)$  es abierto, y si  $p \in D^+(S) \subset D(S)$ , entonces  $I^+(p)$  alcanza a  $D(S)$ , pero no a  $D^-(S)$ . Entonces  $I^+(p)$  interseca a  $D^+(S)$ , por lo que  $p \notin H^+(S)$ .
3. Como  $S \subset D^+(S)$ , (1) y (2) implican que  $H^+(S) \subset S \cup I^+(S) \subset D^+(S) \cup I^+(S) = I^+(S)$ , ya que si  $p \in D^+(S)$  toda curva inextensible pasada que pasa por  $p$  alcanza a  $S$  digamos en  $q$ , entonces, cambiando el sentido de esa curva inextensible se tendrá que  $p \in I^+(S)$ , por lo que  $D^+(S) \cup I^+(S) = I^+(S)$ .
4. Si intersecamos  $I^+(S)$  con  $bdD^+(S) = S \cup H^+(S)$ , por (3) se tiene que  $I^+(S) \cap bdD^+(S) = H^+(S)$ .
5. Entonces por el apartado (2) se cumple que  $H^+(S) \subset \overline{D^+(S)} - D^+(S)$ . Vemos la implicación contraria. Sea un  $p \in \overline{D^+(S)} - D^+(S)$ . Entonces si  $q \in I^+(p)$ , hay una curva temporal pasada desde  $q$  hasta  $p$ , y ésta no alcanza a  $S$  ya que  $p \notin S \cup I^-(S)$ , esto es porque si  $p \in I^-(S)$  entonces no podría estar en  $bdD^+(S)$  ya que, por el Lema 6.4 y el apartado (3), se tiene que  $bdD^+(S) \subset H^+(S) \subset I^+(S)$  y como  $S$  es acronal,  $I^+(S)$  e  $I^-(S)$  son disjuntos. Por la Proposición 4.8 también hay una curva pasada causal inextensible que empieza en  $p$  y no alcanza a  $S$ . Entonces  $q \notin D^+(S)$  y consecuentemente, por la definición de  $H^+(S)$ ,  $p \in H^+(S)$ . Por lo que concluimos que  $H^+(S) = \overline{D^+(S)} - D^+(S)$ .

□

### 6.3. Teoremas de Stephen Hawking

En primer lugar necesitamos la siguiente definición.

**Definición 6.3** Si  $S$  es una hipersuperficie espacial en una variedad de Lorentz  $n$ -dimensional orientada, se llama *convergencia futura de  $S$*  y se escribe  $\mathbf{k}$ , al valor real,  $\mathbf{k} = \langle U, H \rangle$  donde  $U$  es un campo unitario que apunta hacia el futuro normal a  $S$ , y  $H$  es el campo curvatura media.

Para demostrar el Teorema de Hawking en su versión fuerte, primero necesitamos probar el siguiente lema, que es el Ejercicio 14.9 de [1].

**Lema 6.5** Si  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy entonces  $H(S) = \emptyset$ .

*Demostración:*

Tenemos lo siguiente

$$bd(D(S)) = bd(D^+(S) \cup D^-(S)) \subset bdD^+(S) \cup bdD^-(S) = S \cup H(S),$$

donde la última igualdad se debe al Lema 6.4, que podemos aplicar porque por el Lema 4.7 una hipersuperficie de Cauchy es acronal. También por el mismo lema,  $S$  es una hipersuperficie topológica, y por el Lema 6.2  $D(S)$  es abierto. Como también sabemos que  $D(S)$  contiene a  $S$ ,

deducimos que  $\text{bd}D(S)$  no contiene puntos de  $S$ , lo que implica que  $\text{bd}D(S) \subset H(S)$ . Por otro lado, como ya vimos en la prueba del Lema 6.4, siempre se tiene que  $H(S) \subset \text{bd}D(S)$ .

Ahora, por la Observación 4.1, se cumple que  $D(S) = M$ , lo que implica que  $\text{bd}D(S) = \emptyset$  porque estamos considerando variedades sin borde, lo que por la igualdad anterior implica que  $H(S) = \emptyset$ .

□

**Teorema 6.2 (14.55A) STEPHEN HAWKING. VERSIÓN FUERTE.** *Suponemos que  $\text{Ric}(v, v) \geq 0$  para todo vector temporal  $v$  de  $M$ . Sea  $S$  una hipersuperficie de Cauchy espacial futura con convergencia futura  $\mathbf{k} \geq b > 0$ . Entonces toda curva temporal apuntando hacia el futuro que empiece en  $S$  tiene una longitud máxima de  $1/b$ .*

*Demostración:*

Como  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy, por el Lema 4.7 es una hipersuperficie cerrada y acronal. Aplicando ahora el Teorema 6.1 con  $q \in D^+(S) - S$ , existe una geodésica  $\lambda$  temporal y normal que empieza en  $S$  y acaba en  $q$  con  $L(\lambda) = \tau(S, q)$ , y que además no tiene puntos focales de  $S$  antes de  $q$ . Si  $L(\lambda) > 1/b$  entonces podríamos aplicar la Proposición 2.7 para deducir que existe un punto focal  $\lambda(r)$  de  $S$ , con  $0 \leq r \leq 1/\mathbf{k}(\lambda'(0))$ , pero ya hemos visto que esto no puede ocurrir. Por tanto,

$$D^+(S) \subset \{q \in M : \tau(S, q) \leq 1/b\}.$$

Como  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy, por el Lema 6.5,  $H^+(S) = \emptyset$ . Ahora, una curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en  $S$  y deja  $D^+(S)$  debe cortar a  $\text{bd}D^+(S)$  pero, por la Proposición 6.1, como  $H^+(S) = I^+(S) \cap \text{bd}D^+(S)$ , el punto de la curva que corta a  $\text{bd}D^+(S)$  pertenecerá a ambos conjuntos, por lo que  $H^+(S) \neq \emptyset$ . Por tanto, ninguna curva temporal que empiece en  $S$  puede dejar  $D^+(S)$ . En términos de subconjuntos, se tiene que

$$I^+(S) \subset D^+(S) \subset \{q \in M : \tau(S, q) \leq 1/b\}$$

es decir, cualquier curva temporal apuntando hacia el futuro que empieza en  $S$  tiene como mucho longitud  $1/b$ .

□

Cuando en este teorema se invierte la orientación de las curvas, obtenemos que la convergencia pasada supone singularidades en el pasado.

En particular este teorema resulta ser una buena argumentación para el resultado de Robertson-Walker, ([1], prop. 12.15), que nos dice, de forma general, que un universo de Robertson-Walker tiene un principio definido y que, si no continúa expandiéndose, después de contraerse durante un tiempo, acabará llegando a su final.

Un universo de Robertson-Walker es de la forma<sup>2</sup>

$$M(k, f) = I \times_f S,$$

<sup>2</sup>Sean  $B$  y  $F$  son variedades semi-Riemannianas y  $f > 0$  una función diferenciable en  $B$ . El producto torcido  $M = B \times_f F$  es la variedad producto  $B \times F$  dotado con el tensor métrico

$$g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F)$$

con  $\pi$  y  $\sigma$  las proyecciones de  $B \times F$  sobre  $B$  y  $F$ , respectivamente, y  $\pi^*$ ,  $\sigma^*$  los pull-backs de las métricas.

donde  $S$  es una variedad de Riemann tridimensional con curvatura constante  $k = -1, 0$  o  $1$ , y  $f > 0$  es una función diferenciable en el abierto  $I$  en  $\mathbb{R}$ . Para saber más sobre universos de Robertson-Walker consultar [1], pp. 341-350.

Se puede comprobar que el Teorema 6.2 es una generalización del resultado mencionado anteriormente para el caso en el que  $S$  es completa, (ver [1], pág. 433). Como nuestro universo parece ser aproximadamente el universo de Robertson-Walker, este teorema sugiere que nuestro universo presenta una singularidad pasada, lo que se conoce como big bang.

Demostramos a continuación la versión débil del teorema anterior, en la que  $S$  no tiene por qué ser una hipersuperficie de Cauchy.

**Teorema 6.3 (14.55B) STEPHEN HAWKING. VERSIÓN DÉBIL.** *Suponemos que  $\text{Ric}(v, v) \geq 0$  para todo vector temporal  $v$  de  $M$ . Sea  $S$  una hipersuperficie espacial compacta con convergencia futura  $k > 0$ . Entonces  $M$  es futura temporal incompleta.*

*Demostración:*

Sea  $b := \min\{k(z) : z \in NS\} > 0$ . Vamos a probar lo siguiente.

1. Existe una geodésica inextensible apuntando hacia el futuro que es normal y empieza en  $S$  con longitud  $\leq 1/b$ .

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $S$  es acronal, (ver Prop. 14.48 en [1]), y por el Lema 6.1 acausal. Con lo que tenemos hasta ahora podemos aplicar la primera parte de la prueba anterior y obtenemos que  $D^+(S) \subset \{q \in M : \tau(S, q) \leq 1/b\}$ . Si se cumpliera que  $H^+(S) = \emptyset$  podríamos aplicar también la segunda parte de la demostración anterior y tendríamos el resultado. Suponemos entonces que  $H^+(S) \neq \emptyset$ .

Ahora por reducción al absurdo suponemos también que no hay ninguna geodésica inextensible y apuntando hacia el futuro con longitud menor que  $1/b$ . Vamos a intentar llegar a una contradicción. Para ello necesitamos probar un par de resultados.

2. Si  $q \in H^+(S)$ , hay una geodésica normal desde  $S$  a  $q$  de longitud  $\tau(S, q) \leq 1/b$ . Sea

$$B := \{z \in NS, z \text{ nulo o } z \text{ apuntando hacia el futuro tal que } |z| \leq 1/b\}.$$

Como  $S$  es compacto,  $B$  también lo es. Como  $q \in H^+(S) \subset \overline{D^+(S)}$ , existe una sucesión  $\{q_n\} \subset D^+(S)$  tal que  $q_n \rightarrow q$ . Aplicando el Teorema 6.1 obtenemos que para cada punto  $q_n$  existe una geodésica desde  $S$  hasta  $q_n$  cuya longitud es  $\tau(S, q_n)$  y sin puntos focales antes de  $q_n$ . Por tanto podemos tomar un  $v_n \in B$  tal que  $\exp(v_n) = q_n$ . Además, como  $B$  es compacto,  $\{v_n\} \rightarrow v \in B$  y por continuidad  $q_n \rightarrow \exp(v)$ , es decir,  $q = \exp(v)$ . Ahora,  $|v_n|$  converge a  $|v| \leq 1/b$ , siendo  $v$  temporal por ser ortogonal a  $S$ . Además, por la definición de la función exponencial aplicada a  $NS$ , (nota de pie pág. 30),  $|v_n| = \tau(S, q_n)$ . Como la función  $\tau(S, q)$  es semicontinua inferiormente por el Lema 4.3, entonces  $|v| \geq \tau(S, q)$ . Como hemos asumido que (1) era falsa, la geodésica  $\gamma_v$  está definida en  $[0, 1]$ , por tanto va desde  $S$  hasta  $q$  y tiene longitud  $|v|$ , por lo que debe cumplirse que  $\tau(S, q) = |v|$ .

3. La función  $p \rightarrow \tau(S, p)$  es estrictamente decreciente para las generadoras pasadas de  $H^+(S)$ . Las generadoras de  $H^+(S)$  son las geodésicas nulas pasadas inextensibles que empiezan en cada punto de  $H^+(S)$ , no tienen puntos conjugados y están enteramente

contenidas en  $H^+(S)$ , extendiéndose lo máximo posible hacia el futuro dentro de este conjunto.

Sea  $\alpha$  una geodésica generadora y suponemos que su dominio cumple que  $s < t$ . Por el apartado (2) cambiando el sentido de la geodésica, existe una geodésica pasada normal  $\sigma$  desde  $\alpha(t)$  a  $S$  con longitud  $\tau(S, \alpha(t))$ . Como  $\alpha$  es nula, la curva causal  $\alpha|_{[s,t]} + \sigma$  tiene rupturas y por tanto se puede alargar por una pequeña variación propia. Entonces,

$$\tau(S, \alpha(s)) > L(\alpha|_{[s,t]} + \sigma) = L(\sigma) = \tau(S, \alpha(t))$$

Podemos ya encontrar la contradicción que buscábamos. Como hemos supuesto que (1) es falsa, la función exponencial está definida en todo  $B$ . Entonces se tiene que  $H^+(S)$  es compacto, ya que es cerrado (por ser un cerrado menos un abierto) y por (2) está contenido en la imagen continua del conjunto compacto  $B$ . Pero la función  $\tau(S, p)$  es semicontinua inferiormente, y por tanto su restricción a  $H^+(S)$  también, por lo que alcanza el mínimo en algún punto. Esto contradice (3) ya que existe una geodésica generadora que se extiende indefinidamente hacia el pasado desde cada punto de  $H^+(S)$ .

□

# Bibliografía

- [1] O'Neill, B.(1983). *Semi-Riemannian Geometry with applications to relativity*. New York: INC/ Academic Press.
- [2] Beem, John K., Ehrlich, Paul E., Easley, Kevil. L. (1996). *Global Lorentzian Geometry*. 2nd ed. New York: INC/ Marcel Dekker.
- [3] Hawking, S.W., Ellis, G.F.R. (1973). *The large Scale Estructure of space-time*.1st ed. Cambridge University Press.
- [4] Senovilla, J. M., Garfinkle, D. (2015). The 1965 Penrose singularity theorem. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12), 124008.
- [5] Thorne, S.T. (2010). *Agujeros negros y tiempo curvo, el escandaloso legado de Einstein*. 1st ed. Barcelona: Editorial Planeta, S.A.
- [6] Javaloyes, M.A., Aazami, A. (2015). Penrose's singularity theorem in a Finsler spacetime. *IOPscience*, 33. DOI: 10.1088/0264-9381/33/2/025003.
- [7] Albaradejo, A. (2016). *Teoremas de singularidad en Relatividad General*. Trabajo Fin de Máster.
- [8] Mezzera, C. (2014). *Geometría Lorentziana y singularidades*. Trabajo Fin de Grado.
- [9] Penrose, R. (1965). Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical review letters*, vol. 44, 3.
- [10] Gallo, E. (2020). *Roger Penrose y los teoremas de singularidades*. Conferencia <https://www.youtube.com/watch?v=pI9wP5hjxot=1348s>.