

UNIVERSIDAD DE
MURCIA



Máster en Matemática Avanzada

2020/2021

Propiedades de la entropía residual acumulada aplicada a sistemas coherentes

Autor:

D. Miguel López Marín

Tutor:

D. Jorge Luis Camacho Navarro

Curso:

2020/2021

Declaración de originalidad

D. Miguel López Marín autor del Trabajo Fin de Máster titulado: *Propiedades de la entropía residual acumulada aplicada a sistemas coherentes*, bajo la tutela de **D. Jorge Luis Camacho Navarro**,

DECLARA,

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 21 de junio de 2021.

Fdo.: Miguel López Marín.

En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Índice general

Introducción	9
1. Conceptos previos	13
1.1. Variable aleatoria	13
1.2. Modelos paramétricos univariantes	18
1.2.1. Distribución normal	18
1.2.2. Distribución exponencial	19
1.2.3. Distribución Weibull	20
1.3. Teoría de cópulas	20
2. Fiabilidad de sistemas	23
2.1. Estructura de los sistemas	23
2.2. Vida útil de un sistema	27
2.3. Representación basada en la signatura de un sistema	27
2.4. Representación basada en distorsiones	33
3. Entropía residual acumulada	39
3.1. Entropía residual como alternativa a la entropía de Shannon	39
3.2. Propiedades generales de la entropía residual acumulada	40
4. Entropía residual acumulada aplicada a sistemas coherentes	47
4.1. Aplicación a sistemas coherentes	47
4.2. Límites para la entropía residual acumulada de sistemas coherentes	52
4.3. Ordenación de sistemas basada en la entropía residual acumulada	57
Bibliografía	63
Apéndice	65

Índice de figuras

Figura 1: Función de densidad de la distribución normal con $\mu=0$ y $\sigma=1$	19
Figura 2: Representación gráfica de la densidad de la distribución exponencial con $\theta=1$	19
Figura 3: Representación gráfica de la densidad de la distribución Weibull con $\alpha=2$ y $\beta=1$	20
Figura 4: Representación del sistema de orden 6 del Ejemplo 2.1.1	25
Figura 5: Representación del sistema 2-out-of-3 del Ejemplo 2.1.2	26
Figura 6: Sistema de orden 4 del Ejemplo 2.3.2	33
Figura 7: Comparación entre la entropía residual y la desviación típica de una distribución Weibull con $\beta=1$ en función de α	41

Índice de tablas

Tabla 2.1.1. Cortes y caminos minimales de los sistemas semi-coherentes de orden 3	26
Tabla 2.3.1. Signaturas de los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d.	30
Tabla 4.1.1. Signatura, signatura minimal, distorsión y entropía residual de todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y distribución exponencial	50
Tabla 4.2.1. Cotas $\beta_1, \beta_2, I_q, \varepsilon_L$ y ε_U de todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y distribución exponencial de media uno	57
Tabla 4.3.1. Signatura minimal y DSM de todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y distribución exponencial	61

Introducción

En términos generales cualquier ser vivo o máquina tiende a deteriorarse con el transcurso del tiempo con la consecuente disminución de sus características y prestaciones hasta que, finalmente, se produce un fallo ya sea a largo plazo o de forma más inmediata. Si entendemos por sistema un objeto de carácter complejo que está compuesto por un determinado número de componentes, como puede ser el cuerpo humano o una cadena de montaje, el análisis de la fiabilidad de sistemas se basa en determinar probabilísticamente el tiempo en el que un sistema o sus componentes funcionan antes de producirse el fallo.

Esta área de investigación ha crecido de manera notoria durante las últimas décadas y su utilidad e interés alcanza múltiples campos como reflejan sus aplicaciones en ingeniería, medicina, física, etc. Por ejemplo, el análisis de fiabilidad se presenta como una herramienta muy útil para establecer comparaciones entre sistemas, ya que lograr discernir que diseño es mejor respecto a otro y optimizar los tiempos de vida de sus componentes resulta actualmente muy importante en la industria.

Por tanto, motivado por la gran importancia de este campo de las matemáticas, este trabajo presenta en primer lugar los conceptos fundamentales de la teoría de fiabilidad de sistemas, enunciándose los teoremas y proposiciones principales. Concretamente, se estudian tanto los tipos de estructuras como los tipos de representaciones posibles de los sistemas coherentes.

Posteriormente, se presenta una nueva medida de dispersión de una variable aleatoria como alternativa a la conocida entropía de Shannon. Esta nueva medida de dispersión denominada entropía residual acumulada está basada en el uso de la función de supervivencia \bar{F} en vez del empleo de la función de densidad f utilizada en la entropía de Shannon.

Las propiedades de esta nueva entropía son aplicadas a sistemas coherentes cuyas componentes se encuentren idénticamente distribuidas, logrando encontrar los límites de la entropía residual acumulada cuando se trabaja con la vida útil de sistemas y describiéndose un criterio de comparación de sistemas alternativo a los comúnmente empleados. Como complemento a la revisión bibliográfica de los resultados teóricos, a lo largo de los capítulos se presentan una serie de ejemplos, los cuales son de elaboración

propia, basados en el uso de las herramientas y teoremas descritos para facilitar la comprensión de los contenidos desarrollados.

A continuación se exponen los objetivos, extensión y estructura detallada que seguirá la memoria de este Trabajo de Fin de Máster (TFM).

Objetivos generales

Estudiar las propiedades de la entropía acumulada residual y su aplicación en el estudio de sistemas coherentes.

Objetivos específicos

- Desarrollar una base teórica en relación al concepto de sistema y el análisis de su fiabilidad.
- Estudiar el concepto de entropía residual acumulada, definido por Rao et al. [18] y sus principales propiedades.
- Aplicar el concepto de entropía residual acumulada a sistemas coherentes de acuerdo a las ideas propuestas por Toomaj, Sunoj y Navarro [17] y comprobar los resultados obtenidos por los autores.
- Aplicar los resultados a ejemplos prácticos relacionados con el análisis de fiabilidad de sistemas.

Estructura del trabajo

El trabajo se divide en 4 capítulos:

- El **Capítulo 1** está dedicado a conceptos previos. Concretamente, se introducen conceptos como el de función de distribución de una variable aleatoria continua y el concepto de cópula, los cuales son empleados a lo largo del desarrollo de la memoria. Las cópulas se usarán para modelizar la independencia de los componentes de un sistema.
- En el **Capítulo 2** se desarrolla una base teórica sobre el concepto de sistema. Los sistemas coherentes son unos de los pilares fundamentales en el desarrollo de este TFM, por lo que es necesario en este capítulo enunciar sus propiedades y teoremas principales. Se destacan las representaciones de la fiabilidad de un sistema usando firmas o distorsiones.

- En el **Capítulo 3**, tomando como referencia el trabajo de Rao et al. [18], se introduce el concepto de entropía residual acumulada como una medida de dispersión alternativa a la conocida entropía de Shannon. Se estudian sus propiedades principales.
- El **Capítulo 4** desarrolla el cómo aplicar el concepto de entropía residual acumulada a sistemas coherentes siguiendo la propuesta realizada por Toomaj, Sunoj y Navarro [17].

En el **Apéndice** se proporciona el código de la herramienta de graficación y de cálculo empleada en la construcción de las figuras y realización de algunos de los ejemplos del TFM. Concretamente, se ha trabajado con el programa R-Studio.

Capítulo 1: Conceptos previos

Como se ha mencionado en la introducción en este primer capítulo se enuncian las definiciones y herramientas matemáticas necesarias para el seguimiento de los capítulos posteriores.

1.1. Variable aleatoria

Una variable aleatoria (v.a.) es la variable la cual es imposible de predecir su valor de forma exacta. Por tanto, el cálculo de su valor se estima en términos probabilísticos tal y como se indica en [6]. Una v.a. puede ser del tipo discreta o continua. En el estudio de fiabilidad de sistemas en la gran mayoría de casos se trabaja con v.a. continuas por lo que esta sección se centra en dicho tipo de variables.

Para definir el concepto de v.a. es necesario previamente introducir los conceptos de espacio muestral y probabilidad.

Definición 1.1.1. Sea Ω un conjunto no vacío, S una familia de subconjuntos de Ω y Pr una función definida sobre la familia de S y que asigna a cada suceso un número real

$$Pr: S \rightarrow \mathbb{R}$$

siendo:

- Ω el espacio muestral.
- S los sucesos.
- Pr la función de probabilidad.

Un espacio de probabilidad estará definido por la terna (Ω, S, Pr) que cumpla las siguientes propiedades:

1. $\Omega \in S$.
2. $A \in S \Rightarrow A^c \in S$.
3. $A_1, A_2, \dots \in S \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in S$.
4. Si $A \in S \Rightarrow 0 \leq Pr(A)$.
5. $Pr(\Omega) = 1$.
6. Si $A_n \in S$ para $n = 1, 2, \dots$ siendo $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j \Rightarrow$
 $Pr(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr(A_n)$.

Una vez definido el espacio muestral y el concepto de probabilidad es posible introducir formalmente el concepto de v.a..

Definición 1.1.2. Dado un espacio de probabilidad definido por la terna (Ω, S, Pr) , se denomina v.a. sobre dicho espacio a la aplicación

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

la cual cumple la condición

$$X^{-1}(-\infty, x] \in S, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Una v.a. continua tendrá asociada sus correspondientes funciones de distribución, supervivencia y densidad que se introducen formalmente a continuación.

Definición 1.1.3. Dado el espacio de probabilidad (Ω, S, Pr) y sea X una v.a., su función de distribución es

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F(x) = Pr(X \leq x).$$

Cumple las siguientes propiedades:

1. F es no decreciente.
2. F es continua por la derecha.
3. $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$.

Definición 1.1.4. Dado el espacio de probabilidad (Ω, S, Pr) y sea X una v.a., su función de supervivencia es

$$\bar{F}: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$\bar{F}(x) = Pr(X > x) = 1 - F(x).$$

Cumple las siguientes propiedades:

1. $\bar{F}(x)$ es decreciente.
2. $\bar{F}(x)$ es continua por la derecha.
3. $\bar{F}(-\infty) = 1$ y $\bar{F}(\infty) = 0$.

Definición 1.1.5. Dada una v.a. X ésta será una v.a. absolutamente continua si existe una función no negativa

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

denominada función de densidad tal que

$$F(x) = \Pr(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u)du, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

siendo $F(x)$ la función de distribución.

La función de densidad debe verificar las siguientes condiciones:

1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Si en vez de trabajar con una v.a. se trabaja con un conjunto de variables aleatorias se debe emplear el concepto de vector aleatorio. Este vector aleatorio estará compuesto por un determinado número n de variables aleatorias.

Definición 1.1.6. Se denominará vector aleatorio continuo de dimensión n , (X_1, \dots, X_n) definido sobre el espacio de probabilidad (Ω, S, P) a la aplicación

$$(X_1, \dots, X_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$$

la cual cumple la condición

$$X_i^{-1}(-\infty, x_i] \in S, \quad \forall x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Al igual que cuando se trabaja con una sola v.a., a este vector aleatorio n -dimensional se le asocia sus correspondientes funciones de distribución y de densidad.

Definición 1.1.7. La función de distribución conjunta n -dimensional será la función

$$F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$$

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow F(x_1, \dots, x_n) = \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n).$$

Como se indica en [21] cumple las siguientes propiedades:

1. $\Delta_a^b F(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}^n / a < b$.
2. F es continua por la derecha en cada variable.
3. $F(\infty, \dots, \infty) = 1$.

4. $F(x_1, \dots, x_n) = 0$, si existe algún $x_i = -\infty$.

Definición 1.1.8. Un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) es de tipo continuo si existe una función no negativa

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

denominada función de densidad conjunta la cual verifica

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n,$$

$$\forall x_i \in \mathbb{R} \text{ con } i = 1, 2, \dots, n,$$

siendo $F(x_1, \dots, x_n)$ la denominada función de distribución conjunta.

A partir de las funciones de densidad y distribución conjuntas se pueden obtener las correspondientes funciones de densidad y de distribuciones marginales.

Definición 1.1.9. Sea (X_1, \dots, X_n) un vector aleatorio continuo de dimensión n definido sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{S}, Pr)$, cualquier subvector $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}), i_1 < \dots < i_k = 1, \dots, n$, es de tipo continuo y su función de distribución conjunta, denominada función de distribución marginal, viene dada por

$$F_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = \int_{-\infty}^{x_{i_1}} \dots \int_{-\infty}^{x_{i_k}} f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), \quad \forall x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}.$$

Donde $f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ es la denominada función de densidad marginal que viene dada por

$$f_{i_1 \dots i_k}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i_1-1} dx_{i_1+1} \dots dx_{i_k-1} dx_{i_k+1} \dots dx_n,$$

$$\forall x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}.$$

Las variables aleatorias pueden ser independientes, intercambiables e independiente e idénticamente distribuidas. Asumir estas propiedades en determinados casos es de gran importancia cuando se estudia fiabilidad de sistemas.

Definición 1.1.10. Dado un vector aleatorio (X_1, \dots, X_n) n -dimensional el cual para cada variable aleatoria X_i con $i = 1, \dots, n$ tiene asociada su correspondiente función de distribución marginal F_i , estas variables aleatorias serán denominadas independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) si se da la condición de que

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_1) \dots F(x_n), \quad \forall x_1, \dots, x_n.$$

Las variables aleatorias serán denominadas independientes (i.d.) si se cumple la condición de que

$$F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \dots F_n(x_n), \quad \forall x_1, \dots, x_n.$$

Por último, las variables serán intercambiables si se da la condición de que sus funciones de distribución son intercambiables, es decir, presentan simetría respecto a permutaciones σ de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}), \quad \forall \sigma.$$

A continuación se introducen los conceptos de esperanza de una variable aleatoria y de medida de dispersión. En primer lugar la esperanza de una v.a. representa el valor medio del fenómeno que representa dicha variable.

Definición 1.1.11. Dada una variable aleatoria X continua, su esperanza matemática $E(X)$ viene dada por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

que debe cumplir la condición de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty.$$

Por otro lado las medidas de dispersión son el conjunto de fórmulas que permiten medir el grado variabilidad de una v.a.. La medida de dispersión empleada en capítulos posteriores es la desviación típica definida a continuación.

Definición 1.1.12. Dada una v.a. X se define la desviación típica como

$$\sigma = \sqrt{E[(X - E(X))^2]} \geq 0$$

la cual cumple las siguientes propiedades:

1. $\sigma(a) = 0, a \in \mathbb{R}.$
2. $\sigma(a + X) = \sigma(X), a \in \mathbb{R}.$
3. $\sigma(aX) = |a|\sigma(X), a \in \mathbb{R}.$

Para concluir esta sección entorno al concepto de v.a. es importante introducir la comparación de variables aleatorias, ya que éste es uno de los objetivos relevantes en fiabilidad de sistemas. Estas comparaciones se realizan comparando medidas asociadas a las variables, por ejemplo la comparación de desviaciones típicas de las variables aleatorias. En esta sección se definen los criterios de orden estocástico usual y el orden dispersivo que serán empleados en capítulos posteriores.

Definición 1.1.13. Sean dos variables X e Y , X será menor que Y en el orden estocástico, denotado por $X \leq_{st} Y$, si $F(x) \geq G(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

El orden estocástico cumple las siguientes propiedades:

1. $X \leq_{st} X$ (el orden estocástico es reflexivo).
2. Si $X \leq_{st} Y$ e $Y \leq_{st} Z$, entonces $X \leq_{st} Z$ (el orden estocástico es transitivo).
3. $X \leq_{st} Y$ e $X \geq_{st} Y$ no se verifican salvo que $F = G$ (el orden estocástico es antisimétrico). Sin embargo X e Y pueden tener valores distintos.
4. Si $X \leq_{st} Y$ se cumple la condición de $E(g(X)) \leq E(g(Y))$ para toda función g creciente. El recíproco de esta propiedad también es cierto.

Definición 1.1.14. Sean X e Y dos variables aleatorias con funciones de supervivencia \bar{F} \bar{G} respectivamente, se cumplirá que X es menor que Y en el orden dispersivo ($X \leq_d Y$) si se cumple que

$$\bar{F}^{-1}(u) - \bar{F}^{-1}(v) \leq \bar{G}^{-1}(u) - \bar{G}^{-1}(v), \quad \forall u, v / 0 < u \leq v < 1.$$

Esta condición es equivalente, si X e Y son variables aleatorias absolutamente continuas con funciones de densidad f y g respectivamente, a la expresión

$$g(\bar{G}^{-1}(v)) \leq f(\bar{F}^{-1}(v)), \quad \forall v / 0 < v < 1.$$

1.2. Modelos paramétricos univariantes

En esta segunda sección del capítulo se definen algunos de los modelos de distribuciones más empleados en el estudio de variables aleatorias tal y como indican Rausand y Hoyland [13] y que son muy empleados cuando se estudian sistemas.

1.2.1. Distribución normal

Dada una v.a. X , ésta sigue una distribución Normal con parámetros valor esperado o media μ y desviación típica σ si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

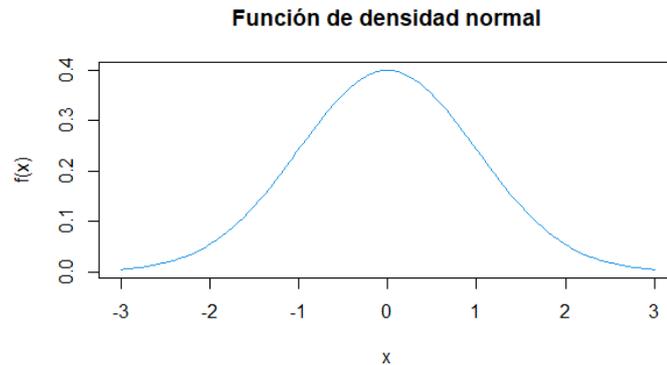


Figura 1: Función de densidad de la distribución normal con $\mu=0$ y $\sigma=1$. Fuente: Elaboración propia.

1.2.2. Distribución exponencial

Dada una variable aleatoria X , ésta seguirá una distribución exponencial con parámetro $\theta > 0$ si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \theta e^{-\theta x}, \quad \forall x > 0.$$

= 0 en el resto.

Un resultado importante de este modelo es el valor de su esperanza

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\theta}.$$

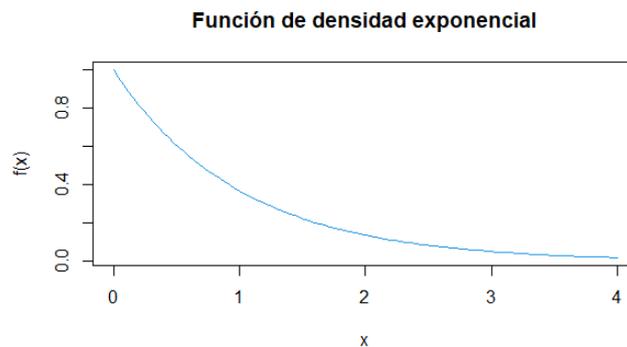


Figura 2: Representación gráfica de la densidad de la distribución exponencial con $\theta = 1$. Fuente: Elaboración propia.

1.2.3. Distribución Weibull

Dada una variable aleatoria X , ésta sigue una distribución Weibull con parámetros α y $\beta > 0$ si su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad \forall x > 0.$$
$$= 0 \text{ en el resto.}$$

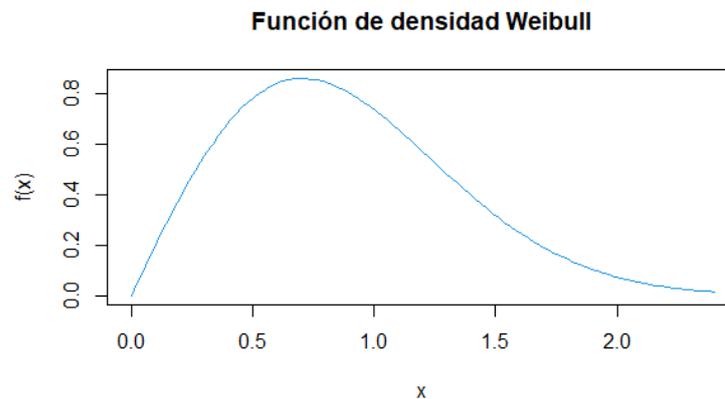


Figura 3: Representación gráfica de la densidad de la distribución Weibull con $\alpha=2$ y $\beta=1$. Fuente: Elaboración propia.

1.3. Teoría de cópulas

Para concluir el capítulo se presentan algunos resultados básicos de la teoría de cópulas la cual es utilizada cuando se introducen dependencias en el estudio de fiabilidad de sistemas. El uso de la palabra “cópula” proviene del latín y significa conexión de manera análoga al concepto de cópula empleado en lingüística. Concretamente, el estudio de cópulas permite describir cómo de dependientes son las variables aleatorias entre sí. Para el desarrollo de los conceptos que se exponen en esta sección se ha seguido el libro de Nelsen [12].

En primer lugar se debe definir el concepto de cópula.

Definición 1.3.1. Sea C una función de distribución multivariante, C será una cópula si sus marginales tienen una distribución uniforme a lo largo del intervalo $[0,1]$.

Proposición 1.3.1. Sea C una función

$$C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

entonces C es una cópula si se cumplen las siguientes propiedades:

1. C es creciente y continua por la derecha en cada componente.
2. $C(u_1, u_2, \dots, \underset{i}{0}, \dots, u_n) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall u \in [0, 1]^n$.
3. $C(1, 1, \dots, \underset{i}{u}, \dots, 1) = u, \forall i = 1, 2, \dots, n, \forall u \in [0, 1]$.
4. $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in [0, 1]^n$, con $a_i \leq b_i, \forall i = 1, \dots, n$, se verifica

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{\sum_{j=1}^n i_j} C(u_{1,i_1}, \dots, u_{n,i_n}) \geq 0,$$

donde $u_{j,1} = a_j$ y $u_{j,2} = b_j, \forall j = 1, \dots, n$.

Uno de los resultados más importantes dentro de la teoría de cópulas es el denominado Teorema de Sklar. La formulación de este teorema permite establecer la relación entre la cópula asociada a un vector de variables aleatorias y la función de distribución conjunta, empleando para ello sus distribuciones marginales.

Teorema 1.3.1. (Teorema de Sklar) Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias con función de distribución conjunta F y funciones de distribución marginales F_1, \dots, F_n , entonces existe una cópula C la cual cumple

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)), \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Además, si las distribuciones marginales son continuas entonces la cópula es única.

De manera análoga se pueden construir cópulas por medio de la función de distribución y sus marginales de la forma

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)).$$

El Teorema de Sklar tiene gran importancia en el estudio de la fiabilidad de sistemas. Puede interpretarse como la descomposición de la función de distribución conjunta en dos partes, por un lado la estructura de dependencia de un vector en términos de su cópula y por otro lado el comportamiento de las componentes en términos de sus funciones de distribución marginales.

Otro concepto relevante en cópulas es la cópula de supervivencia la cual se define a continuación.

Definición 1.3.2. Dado un vector aleatorio X_1, \dots, X_n con sus correspondientes funciones de supervivencia $\bar{F}_i(x_i) = Pr(X_i > x_i)$, entonces la cópula de supervivencia \hat{C} es la cópula que verifica

$$\bar{F}(x_1, \dots, x_n) = Pr(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n) = \hat{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_n(x_n)), \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Si las distribuciones marginales son continuas entonces \hat{C} es única y puede calcularse como

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_n) = \bar{F}(\bar{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \bar{F}_n^{-1}(u_n)).$$

A modo de conclusión se exponen algunos de ejemplos de familias de cópulas bivariantes muy empleadas en modelización y que, algunas de ellas, serán utilizadas en capítulos posteriores.

- Cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern:

$$C(u, v) = uv[1 + \theta(1 - u)(1 - v)], \quad \theta \in [-1, 1].$$

- Cópula de Clayton:

$$C(u, v) = [\max(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1, 0)]^{-\frac{1}{\theta}}, \quad \theta > -1, \theta \neq 0.$$

- Cópula cota superior de Frechet-Hoeffding:

$$C(u, v) = \min(u, v).$$

- Cópula cota inferior Frechet-Hoeffding:

$$C(u, v) = \max(u + v - 1, 0).$$

Capítulo 2: Fiabilidad de sistemas

En este capítulo se introducirán las propiedades y teoremas principales empleados para el estudio de la fiabilidad de sistemas. Tal y como indican Dai y Wang [5] se entiende formalmente la fiabilidad de sistemas como el estudio que tiene como objetivo, dado un sistema, analizar la probabilidad de que el sistema en conjunto, o alguna de sus componentes, funcione bajo las condiciones establecidas para un periodo específico de tiempo.

2.1. Estructura de los sistemas

En primer lugar es necesario definir formalmente el concepto de sistema.

Definición 2.1.1. Un sistema de orden n es una función Booleana

$$\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\},$$

donde $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$ representa el estado del sistema y los estados de las componentes quedan representadas por $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ respectivamente. Una componente tendrá asociado 1 si funciona y 0 si no funciona.

Definición 2.1.2. Un sistema de orden n semi-coherente es una función Booleana

$$\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\},$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. La función φ es creciente.
2. La función satisface $\varphi(0, \dots, 0) = 0$ y $\varphi(1, \dots, 1) = 1$.

Definición 2.1.3. Un sistema de orden n coherente es una función Booleana

$$\varphi : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\},$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. La función φ es creciente.
2. La función φ es estrictamente creciente en cada variable en al menos un punto.

Proposición 2.1.1. Todo sistema coherente es un sistema semi-coherente.

Demostración. Si se cumple la propiedad (2) de los sistemas coherentes, entonces en particular la función φ es estrictamente creciente en x_1 en al menos un punto.

$$0 = \varphi(0, x_2, \dots, x_n) < \varphi(1, x_2, \dots, x_n) = 1.$$

Utilizando la propiedad (1) de los sistema coherentes se obtiene que

$$0 \leq \varphi(0, \dots, 0) \leq \varphi(0, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$1 = \varphi(1, x_2, \dots, x_n) \leq \varphi(1, \dots, 1) \leq 1.$$

De donde se deduce que $\varphi(0, \dots, 0) = 0$ y $\varphi(1, \dots, 1) = 1$.

Una vez definido lo que es un sistema es relevante introducir los conceptos de caminos y cortes. Estos caminos y cortes permiten representar cómo es la estructura del sistema.

Definición 2.1.4. Un conjunto no vacío

$$P \subseteq \{1, \dots, n\},$$

será un camino para el sistema φ si

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1, \text{ cuando } x_i = 1 \quad \forall i \in P,$$

siendo camino minimal si no contiene a otros caminos.

Definición 2.1.5. Un conjunto no vacío

$$C \subseteq \{1, \dots, n\},$$

será un corte para el sistema φ si

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0, \text{ cuando } x_i = 0 \quad \forall i \in C,$$

siendo corte minimal si no contiene otros cortes.

Los sistemas tendrán un determinado número de caminos y cortes minimales según su estructura. Principalmente, existen dos tipos de estructuras, los sistemas en series y los sistemas en paralelo. El resto de estructuras serán combinaciones de estos dos tipos de sistemas.

Definición 2.1.6. Un sistema de orden n en serie viene dado por

$$\varphi_{1:n}(x_1, \dots, x_n) := \min(x_1, \dots, x_n).$$

Análogamente, un sistema de orden n en paralelo viene dado por

$$\varphi_{n:n}(x_1, \dots, x_n) := \max(x_1, \dots, x_n).$$

Ejemplo 2.1.1. Supongamos que se está trabajando con un sistema de orden 6 que viene dado por la expresión

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \min(x_1, \max(\min(x_2, \max(x_4, x_5)), \min(x_3, x_6))).$$

Este sistema está representado en la Figura 4 y sus correspondientes caminos y cortes minimales vendrán dados respectivamente por:

- Cortes minimales $\rightarrow C_1 = \{1\}, C_2 = \{2,3\}, C_3 = \{2,6\}, C_4 = \{4,5,6\}, C_5 = \{3,4,5\}$.
- Caminos minimales $\rightarrow P_1 = \{1,2,4\}, P_2 = \{1,2,5\}, P_3 = \{1,3,6\}$.

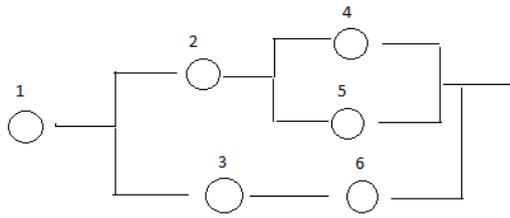


Figura 4: Representación del sistema de orden 6 del Ejemplo 2.1.1. Fuente: Elaboración propia.

Una estructura bastante empleada son los sistemas *k-out-of-n* los cuales son sistemas donde al menos k de sus n componentes deben funcionar para que el sistema funcione correctamente.

Definición 2.1.7. Un sistema *k-out-of-n* viene dado por

$$\varphi_{n-k+1:n}(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad \text{si } x_1 + \dots + x_n \geq k$$

o en caso contrario por

$$\varphi_{n-k+1:n}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad \text{si } x_1 + \dots + x_n < k.$$

En éste tipo de sistema los conjuntos de caminos minimales vienen dados por todos los conjuntos con exactamente k componentes, es decir, los sistemas *k-out-of-n* tienen $\binom{n}{k}$ caminos minimales. Se puede observar por la definición dada que el sistema *1-out-of-n* corresponde al sistema en paralelo $\varphi_{n:n}$ y el sistema *n-out-of-n* es equivalente al sistema en serie $\varphi_{1:n}$. Si $(x_{1:n}, \dots, x_{n:n})$ representa el vector en orden creciente obtenido de (x_1, \dots, x_n) , es decir, $x_{1:n} = \min(x_1, \dots, x_n)$, $x_{2:n}$ es el segundo valor más pequeño y así sucesivamente hasta llegar a $x_{n:n} = \max(x_1, \dots, x_n)$, entonces

$$\varphi_{n-k+1:n}(x_1, \dots, x_n) = x_{n-k+1:n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Esta representación es equivalente a emplear la representación de los estadísticos ordenados los cuales se definen formalmente a continuación.

Definición 2.1.8. Dada un vector de variables aleatorias continuas (X_1, \dots, X_n) y sea considerado la ordenación de estas variables de forma creciente, denotadas por $X_{1:n}, \dots, X_{n:n}$, entonces la v.a. $X_{k:n}$ que toma el valor k -enésimo es conocido como el estadístico de orden k y $(X_{1:n}, \dots, X_{n:n})$ es el conjunto de estadísticos ordenados.

Ejemplo 2.1.2. Un ejemplo de sistema k -out-of- n es el sistema 2-out-of-3, en el cual deben funcionar dos de sus tres componentes. Viene dado por la expresión

$$\varphi_{2:3}(x_1, x_2, x_3) = x_{2:3} = \max(\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3), \min(x_2, x_3)).$$

Este sistema no podría graficarse de manera análoga al Ejemplo 4.1.1 ya que tienen que repetirse componentes (ver Figura 5).

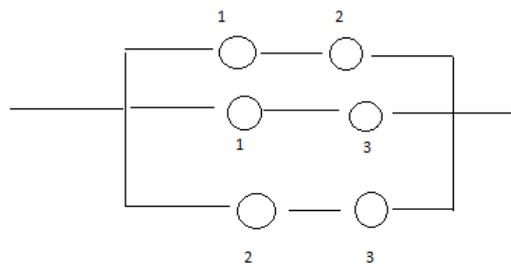


Figura 5: Representación del sistema 2-out-of-3 del Ejemplo 2.1.2. Fuente: Elaboración propia.

Para concluir la sección en la Tabla 2.1.1 se resumen los caminos y cortes minimales de todos los sistemas semi-coherentes de orden 3.

N	$\varphi_N(x_1, x_2, x_3)$	Caminos	Cortes
1	$x_{1:3} = \min(x_1, x_2, x_3)$	{1,2,3}	{1}·{2}, {3}
2	$\min(x_2, x_3)$	{2,3}	{2}·{3}
3	$\min(x_1, x_2)$	{1,2}	{1}, {2}
4	$\min(x_1, x_3)$	{1,3}	{1}, {3}
5	$\min(x_1, \max(x_2, x_3))$	{1,2}, {1,3}	{1}, {2,3}
6	$\min(x_2, \max(x_1, x_3))$	{1,2}, {2,3}	{2}, {1,3}
7	$\min(x_3, \max(x_1, x_2))$	{3,2}, {1,3}	{3}, {2,1}
8	x_3	{3}	{3}
9	x_2	{2}	{2}
10	x_1	{1}	{1}
11	$x_{2:3}$	{1,2}, {1,3}, {2,3}	{1,2}, {1,3}, {2,3}
12	$\max(x_3, \min(x_2, x_1))$	{3}, {1,2}	{1,3}, {2,3}

13	$\max(x_2, \min(x_1, x_3))$	$\{2\}, \{1,3\}$	$\{1,2\}, \{2,3\}$
14	$\max(x_1, \min(x_2, x_3))$	$\{1\}, \{3,2\}$	$\{1,3\}, \{2,1\}$
15	$\max(x_2, x_3)$	$\{2\}, \{3\}$	$\{2,3\}$
16	$\max(x_1, x_3)$	$\{1\}, \{3\}$	$\{1,3\}$
17	$\max(x_1, x_2)$	$\{1\}, \{2\}$	$\{1,2\}$
18	$x_{3:3} = \max(x_1, x_2, x_3)$	$\{1\}, \{2\}, \{3\}$	$\{1,2,3\}$

Tabla 2.1.1. Cortes y caminos minimales de los sistemas semi-coherentes de orden 3.

Fuente: Navarro y Del Águila [8].

2.2. Vida útil de un sistema.

Sean X_1, \dots, X_n variables aleatorias positivas en una terna (Ω, S, Pr) que representan la vida útil de las componentes de un sistema, entonces la vida útil del sistema T se obtiene en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.1. Sea φ un sistema semi-coherente de orden n con caminos minimales y cortes minimales

$$P_1, P_2, \dots, P_r,$$

$$C_1, C_2, \dots, C_s,$$

entonces la vida útil de sistema T viene dada por

$$T = \max_{1 \leq j \leq r} \min_{i \in P_j} X_i$$

o de forma análoga empleando los cortes minimales como

$$T = \min_{1 \leq j \leq s} \max_{i \in C_j} X_i.$$

La v.a. T tendrá asociada su correspondiente función de distribución F_T . La función de distribución representa la probabilidad de que el sistema o una de sus componentes fallen antes de un determinado tiempo t . A partir de la función de distribución de la variable aleatoria se define la función de supervivencia o fiabilidad la cual tiene en cuenta las unidades que no fallan en un determinado tiempo t .

2.3. Representación basada en la signatura de un sistema

En este apartado se desarrollarán los conceptos relacionados con la representación de la fiabilidad de un sistema a partir de las funciones de fiabilidad de sus componentes. Este tipo de representaciones se basan en el hecho de que un sistema falla cuando una de sus componentes falle. Es necesario asumir algunas hipótesis previas:

1. Los tiempos de vida de las componentes deberán ser idénticamente distribuidos e independientes entre sí, es decir, i.i.d., por lo que sus distribuciones serán representadas como F .
2. La función de distribución F debe ser continua.

El primer autor que desarrolló la representación por firmas para estudiar la fiabilidad de un sistema coherente fue Samaniego (ver [14] y [15]).

Teorema 2.3.1. (Samaniego, 1985). Sea T el tiempo de vida media de un sistema coherente con tiempos de vida media de sus componentes X_1, \dots, X_n del tipo i.i.d., teniendo todas una función de distribución continua F , entonces la función de supervivencia del sistema se puede escribir como

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n s_i \bar{F}_{i:n}(t), \quad (1)$$

siendo $\bar{F}_{i:n}(t)$ la función de supervivencia asociada al estadístico ordenado $X_{i:n}$ y donde los coeficientes positivos s_1, \dots, s_n cumplen

$$\sum_{i=1}^n s_i = 1.$$

El vector $s = (s_1, \dots, s_n)$ se denomina firma del sistema.

Demostración. Los eventos $T = X_{i:n}$ con $i = 1, \dots, n$ son particiones del espacio de probabilidad debido a que F es continua y $Pr(X_i = X_j) = 0$ si se tiene $i \neq j$.

Empleando la ley de probabilidad total

$$\begin{aligned} \bar{F}_T(t) &= \sum_{i=1}^n Pr((T > t) \cap (T = X_{i:n})) = \sum_{i=1}^n Pr(T = X_{i:n})Pr(T > t | T = X_{i:n}) = \\ &= \sum_{i=1}^n Pr(T = X_{i:n})Pr(X_{i:n} > t | T = X_{i:n}) = \sum_{i=1}^n Pr(T = X_{i:n})Pr(X_{i:n} > t), \end{aligned}$$

donde solo se han considerado los términos con $Pr(T = X_{i:n}) > 0$ y que la última igualdad tiene en cuenta la independencia de los eventos $(T = X_{i:n})$ y $(X_{i:n} > t)$. De la demostración se obtiene que $Pr(T = X_{i:n}) = s_i$ y

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n Pr(T = X_{i:n}) = 1.$$

La signatura se introdujo como una medida de rendimiento de un sistema presentándose como una alternativa para indexar los tipos de sistemas coherentes. Concretamente, la signatura se define como un vector n -dimensional cuya i -ésima coordenada representa la probabilidad de que el sistema falle debido al fallo de la i -ésima componente.

El cálculo de los coeficientes s_i viene determinado completamente por la estructura del sistema y se pueden calcular como indica Boland [4] con el uso de la expresión

$$s_i = \frac{1}{\binom{n}{i-1}} \sum_{\sum_{j=1}^n x_j = n-i+1} \varphi(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{\binom{n}{i}} \sum_{\sum_{j=1}^n x_j = n-i} \varphi(x_1, \dots, x_n). \quad (2)$$

La signatura es empleada para el diseño y comparación de sistemas ya que un análisis de las signaturas de dos sistemas podría permitir discernir qué sistema es más óptimo. Un ejemplo de su aplicación es que la comparación respecto a ciertos órdenes estocásticos podría ser establecida simplemente empleando la comparación de las signaturas de los sistemas como se indica en [11].

Proposición 2.3.1. Si X_1, \dots, X_n son i.i.d. sus funciones de supervivencia se obtienen a partir de (1) y de

$$\bar{F}_{i:n}(t) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} F^j(t) \bar{F}^{n-j}(t). \quad (3)$$

Ejemplo 2.3.1. Dado un sistema T de orden 4 cuyas componentes son i.i.d. y viene dado por la expresión $T = \min(x_1, \max(x_2, \min(x_3, x_4)))$, el cálculo de sus signaturas a partir de (2) viene dado por

$$s_1 = \frac{1}{\binom{4}{0}} \sum_{\sum_{j=1}^4 x_j = 4} \varphi(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{\binom{4}{1}} \sum_{\sum_{j=1}^4 x_j = 3} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{4}.$$

$$s_2 = \frac{1}{\binom{4}{1}} \sum_{\sum_{j=1}^4 x_j = 3} \varphi(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{\binom{4}{2}} \sum_{\sum_{j=1}^4 x_j = 2} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{7}{12}.$$

$$s_3 = \frac{1}{\binom{4}{2}} \sum_{\sum_{j=1}^4 x_j = 2} \varphi(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{\binom{4}{3}} \sum_{\sum_{j=1}^4 x_j = 1} \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{6}.$$

$$s_4 = \frac{1}{\binom{4}{3}} \sum_{\sum_{j=1}^n x_j=1} \varphi(x_1, \dots, x_n) - \frac{1}{\binom{4}{1}} \sum_{\sum_{j=1}^n x_j=0} \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Además, las funciones de supervivencia empleando (3) se calculan como

$$\bar{F}_{1:4}(t) = \sum_{j=0}^0 \binom{4}{j} F^j(t) \bar{F}^{4-j}(t) = \bar{F}^4(t).$$

$$\bar{F}_{2:4}(t) = \sum_{j=0}^1 \binom{4}{j} F^j(t) \bar{F}^{4-j}(t) = \bar{F}^4(t) + 4F(t)\bar{F}^3(t) = -3\bar{F}^4(t) + 4\bar{F}^3(t).$$

$$\bar{F}_{3:4}(t) = \sum_{j=0}^2 \binom{4}{j} F^j(t) \bar{F}^{4-j}(t) = \bar{F}^4(t) + 4F(t)\bar{F}^3(t) + 6F^2(t)\bar{F}^2(t) = 3\bar{F}^4(t) + 6\bar{F}^2(t) - 8\bar{F}^3(t).$$

Por lo que la función de supervivencia del sistema T a partir de (1) se obtiene finalmente como

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^4 s_i \bar{F}_{i:4} = \frac{1}{4} \bar{F}^4(t) + \frac{7}{12} (-3\bar{F}^4(t) + 4\bar{F}^3(t)) + \frac{1}{6} (3\bar{F}^4(t) + 6\bar{F}^2(t) - 8\bar{F}^3(t)) = -\bar{F}^4(t) + \bar{F}^3(t) + \bar{F}^2(t).$$

En la Tabla 2.4.1 se recogen las firmas de los sistemas coherentes de orden 1-4 con componentes i.i.d.. Esta tabla permite verificar que el sistema del Ejemplo 2.3.1, que corresponde al sistema 12 de la tabla, ha sido calculado de la forma correcta.

i	T_i	Signatura
1	$X_{1:1} = X_1$	(1)
2	$X_{1:2} = \min(X_1, X_2)$	(1,0)
3	$X_{2:2} = \max(X_1, X_2)$	(0,1)
4	$X_{1:3} = \min(X_1, X_2, X_3)$	(1,0,0)
5	$\min(X_1, \max(X_2, X_3))$	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
6	$X_{2:3} (2 - out - of - 3)$	(0,1,0)
7	$\max(X_1, \min(X_2, X_3))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$
8	$X_{3:3} = \max(X_1, X_2, X_3)$	(0,0,1)
9	$X_{1:4} = \min(X_1, X_2, X_3, X_4)$	(1,0,0,0)
10	$\max(\min(X_1, X_2, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$
11	$\min(X_{2:3}, X_4)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0, 0)$
12	$\min(X_1, \max(X_2, X_3), \max(X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$
13	$\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4))$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$
14	$X_{2:4} (3 - out - of - 4)$	(0,1,0,0)

15	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3, X_4), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$
16	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
17	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_1, X_3), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$
18	$\max(\min(X_1, X_2), \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
19	$\max(\min(X_1, \max(X_2, X_3, X_4)), \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$
20	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_1, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
21	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$
22	$\min(\max(X_1, X_2), \max(X_1, X_3, X_4), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$
23	$X_{3:4} (2 - \text{out} - \text{of} - 4)$	$(0, 0, 1, 0)$
24	$\max(X_1, \min(X_2, X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
25	$\max(X_1, \min(X_2, X_3), \min(X_3, X_4))$	$(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$
26	$\max(X_{2:3}, X_4)$	$(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$
27	$\min(\max(X_1, X_2, X_3), \max(X_2, X_3, X_4))$	$(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
28	$X_{4:4} = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$	$(0, 0, 0, 1)$

Tabla 2.3.1. Signaturas de los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d.. Fuente: Navarro, Samaniego, Balakrishnan y Bhattacharya [11].

Algo a tener en cuenta es que la representación de Samaniego no es válida cuando se estudia el caso general. Por este motivo es necesario aplicar otros tipos de representación para estudiar la fiabilidad de un sistema. Esta generalización viene dada por la representación basada en los caminos minimales como se indica en el artículo de Navarro y Del Águila [8]. El teorema en el cual se sustenta esta representación de caminos es el siguiente.

Teorema 2.3.2. (Representación basada en los caminos minimales). Sea T la vida de un determinado sistema con caminos minimales P_1, \dots, P_r y vida de sus componentes X_1, \dots, X_n , la función de supervivencia del sistema viene dada por

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^r \bar{F}_{P_i}(t) - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \bar{F}_{P_i \cup P_j}(t) + \dots + (-1)^{r+1} \bar{F}_{P_{i_1 \dots i_r}}(t), \quad (4)$$

$$\forall t \text{ con } \bar{F}_p(t) = Pr(X_p = \min_{j \in P} X_j > t), \quad \text{para } P \subseteq \{1, \dots, n\}.$$

Demostración. Partiendo de la representación de la vida útil de sistema en función de los caminos minimales $T = \max_{1 \leq j \leq r} \min_{i \in P_j} X_i$, entonces

$$\bar{F}_T(t) = Pr(T > t) = Pr\left(\max_{1 \leq j \leq r} \min_{i \in P_j} X_i > t\right) = Pr\left(\bigcup_{i=1}^r (X_{P_i} > t)\right).$$

Finalmente, usando la fórmula de exclusión e inclusión para la unión de eventos se obtiene la expresión (4) teniendo en cuenta que

$$Pr((X_{P_i} > t) \cap (X_{P_j} > t)) = Pr(X_{P_i \cup P_j} > t).$$

Para concluir esta sección de representaciones se enuncia el teorema de representación minimal de la signatura introducido por Navarro, Ruiz y Sandoval [10].

Teorema 2.3.3. Sea T la vida de un sistema coherente (o semicoherente) con tiempo de vida útil de los componentes X_1, X_2, \dots, X_n intercambiables, entonces

$$\bar{F}_T(t) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{F}_{1:i}(t) \quad (5)$$

es la representación de la signatura minimal (a_1, \dots, a_n) donde

$$a_1, \dots, a_n$$

son coeficientes enteros que cumplen las condiciones

$$a_1 + \dots + a_n = 1,$$

y donde

$$\bar{F}_{1:i}(t) = Pr(\min(X_1, \dots, X_i) > t), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Demostración. De la expresión (4) se obtiene que la función de supervivencia del sistema es una combinación lineal de las funciones de supervivencia \bar{F}_p de sistemas en serie. Si las variables aleatorias son intercambiables, entonces \bar{F}_p puede ser remplazada por $\bar{F}_{1:i}$ con $i = |P|$. Por tanto, el teorema es válido para ciertos coeficientes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Además, dichos coeficientes deben presentar la característica de que $a_1 + \dots + a_n = 1$ (basta tomar $t = 0$).

A continuación se expone un ejemplo de un sistema de orden 4 en el cual se calcula su función de supervivencia y su correspondiente signatura minimal haciendo uso de los teoremas vistos a lo largo de la sección.

Ejemplo 2.3.2. Dado un sistema $T = \min(x_1, \max(\min(x_2, x_3), x_4))$ cuyos caminos minimales son $P_1 = \{1,2,3\}$ y $P_2 = \{1,4\}$ (ver Figura 6). Si se emplea (4), la función de supervivencia del sistema viene dada por

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_{\{1,2,3\}}(t) + \bar{F}_{\{1,4\}}(t) - \bar{F}_{\{1,2,3,4\}}(t) = \bar{F}(t, t, t, 0) + \bar{F}(t, 0, 0, t) - \bar{F}(t, t, t, t).$$

Si las componentes son intercambiables entonces la función de supervivencia del sistema viene dada empleando (5) por

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_{1:2}(t) + \bar{F}_{1:3}(t) - \bar{F}_{1:4}(t)$$

de donde se puede obtener la signatura minimal del sistema como

$$a = (0, 1, 1, -1).$$

Si las componentes son i.i.d. entonces la función de supervivencia del sistema se obtiene como

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}^2(t) + \bar{F}^3(t) - \bar{F}^4(t).$$

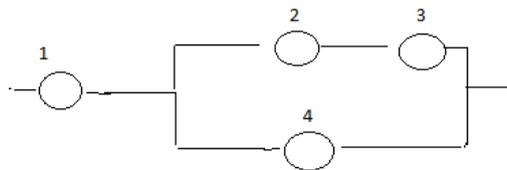


Figura 6: Sistema de orden 4 del ejemplo 2.3.2. Fuente: Elaboración propia.

2.4 Representación de la distorsión de un sistema

El concepto de distribuciones distorsionadas fue introducido en la teoría de elección de bajo riesgo por Yaari [20] y Wang [19]. La idea era estudiar la distorsión o cambio del riesgo de una función de distribución. Posteriormente, se extendieron a distorsiones de n distribuciones por Navarro et al. [9]. La definición formal de distorsión es la siguiente.

Definición 2.4.1. Dadas unas funciones de distribución F_1, \dots, F_n , la distribución distorsionada viene definida por

$$F_Q(t) = Q(F_1(t), \dots, F_n(t)), \quad \forall t,$$

donde

$$Q : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$$

es una función que cumple $Q(0, \dots, 0) = 0, Q(1, \dots, 1) = 1$, siendo Q creciente y continua.

Análogamente, para las funciones de supervivencia se tiene

$$\bar{F}_Q(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)), \quad \forall t,$$

con $\bar{Q}(u_1, \dots, u_n) = 1 - Q(1 - u_1, \dots, 1 - u_n)$ denominada función de distorsión dual.

El objetivo de emplear distribuciones distorsionadas es poder reescribir la función de distribución de un sistema como una distorsión de las funciones de distribuciones de sus componentes. El siguiente teorema nos permite obtener dicha relación gracias a la ayuda del concepto de cópula desarrollado en el Capítulo 1.

Teorema 2.4.1. Sea T la vida útil de un sistema semi-coherente y las vidas útiles de sus componentes vienen dadas por (X_1, \dots, X_n) y tiene una cópula de supervivencia \hat{C} , la función de supervivencia de T viene dada por

$$\bar{F}_T(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)), \quad \forall t, \quad (6)$$

siendo \bar{Q} la función de distorsión dual la cual depende del sistema φ y de \hat{C} .

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\bar{F}_P(t) = Pr(X_P > t) = Pr(\bigcap_{i \in P} (X_i > t)) = \hat{C}_P(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)),$$

con $\hat{C}_P(u_1, \dots, u_n) := \hat{C}(u_1^P, \dots, u_n^P)$. Siendo $u_i^P = u_i$ si $i \in P$ y $u_i^P = 1$ si i no pertenece a P . Empleando la expresión basada en camino minimales (4) se obtiene (6) con

$$\bar{Q}(u) = \sum_{i=1}^r \hat{C}_{P_i}(u) - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \hat{C}_{P_i \cap P_j}(u) + \dots + (-1)^{r+1} \hat{C}_{P_1 \cup \dots \cup P_r}(u),$$

con $u = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$.

Las representaciones de un sistema en serie $X_{1:k}$ vienen dadas por

$$\bar{F}_{1:k}(t) = \bar{Q}_{1:k}(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$$

con

$$\bar{Q}_{1:k}(u_1, \dots, u_n) = \hat{C}(u_1, \dots, u_k, 1, \dots, 1), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Las representaciones de un sistema en paralelo $X_{k:k}$ vienen dadas por

$$\bar{F}_{k:k}(t) = \bar{Q}_{k:k}(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t))$$

con

$$\bar{Q}_{k:k}(u_1, \dots, u_n) = 1 - C(1 - u_1, \dots, 1 - u_k, 1, \dots, 1), \quad \forall k = 1, \dots, n.$$

Si las componentes de los sistemas son independientes el Teorema 2.4.1 se puede simplificar obteniendo los siguientes resultados.

Teorema 2.4.2. Sea T la vida útil de un sistema semi-coherente y las vidas útiles de sus componentes vienen dadas por (X_1, \dots, X_n) y son independientes, la función de supervivencia de T viene dada por

$$\bar{F}_T(t) = \bar{Q}(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_n(t)), \quad \forall t \quad (7)$$

siendo \bar{Q} un polinomio el cual depende solamente de φ .

Demostración. La prueba es análoga a la demostración del Teorema 2.4.2 empleando la condición de que (X_1, \dots, X_n) son independientes y que por tanto empleando (4) se obtiene (7) con

$$\bar{Q}(u) = \sum_{i=1}^r \prod_{k \in P_i} u_k - \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=i+1}^r \prod_{k \in P_i \cup P_j} u_k + \dots + (-1)^{r+1} \prod_{k \in P_1 \cup \dots \cup P_r} u_k.$$

Teorema 2.4.3. Sea T la vida útil de un sistema semi-coherente y las vidas útil de sus componentes viene dada por (X_1, \dots, X_n) son idénticamente distribuidas y tiene una cópula de supervivencia \hat{C} , la función de supervivencia de T viene dada por

$$\bar{F}_T(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)), \quad \forall t, \quad (8)$$

siendo \bar{q} la función de distorsión dual la cual depende de φ y de \hat{C} .

Demostración. Es inmediata a partir (6) teniendo en cuenta que

$$\bar{q}(u) = \bar{Q}(u, \dots, u), \quad \forall u \in [0,1].$$

Teorema 2.4.4. Si T la vida útil de un sistema semi-coherente y las vidas útil de sus componentes (X_1, \dots, X_n) son i.i.d., entonces la función de fiabilidad de T viene dada por

$$\bar{F}_T(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)), \quad \forall t, \quad (9)$$

donde $\bar{q}(u) = \sum_{i=1}^n a_i u^i$ es una función de distorsión y los coeficientes a_i son la signatura minimal del sistema.

Demostración. Es inmediata a partir de los anteriores teoremas o empleando (5) en el caso de componentes i.i.d. teniendo en cuenta de que $\bar{F}_{1:i}(t) = \bar{F}^i(t)$.

Antes de concluir la sección se exponen algunos ejemplos aplicando los teoremas y conceptos desarrollados a lo largo de esta sección.

Ejemplo 2.4.1. Dado un sistema $T = \max(X_1, X_2)$, su función de fiabilidad y su correspondiente distorsión vienen dadas a partir de (4) y (6) respectivamente por

$$\begin{aligned} \bar{F}_T(t) &= \bar{F}_1(t) + \bar{F}_2(t) - \bar{F}_{1:2}(t) = \bar{Q}_{2:2}(\bar{F}_1(t), \bar{F}_2(t)), \\ \bar{Q}_{2:2}(u_1, u_2) &= u_1 + u_2 - \hat{C}(u_1, u_2). \end{aligned}$$

Si las componentes son independientes la distorsión viene dada a partir de (7) por

$$\bar{Q}_{2:2}(u_1, u_2) = u_1 + u_2 - u_1 u_2.$$

Si las componentes son idénticamente distribuidas la distorsión se obtiene a partir de (8) como

$$\bar{q}_{2:2}(u) = 2u - \hat{C}(u, u).$$

Si las componentes son i.i.d. la distorsión aplicando (9) es

$$\bar{q}_{2:2}(u) = 2u - u^2,$$

de donde se obtiene la signatura mínima $a = (2, -1)$.

Ejemplo 2.4.2. Dado un sistema $T = \min(x_1, \max(\min(x_2, x_3), x_4))$, su función de fiabilidad y su correspondiente distorsión vienen dadas a partir de (4) y (6) respectivamente,

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_{\{1,2,3\}}(t) + \bar{F}_{\{1,4\}}(t) - \bar{F}_{\{1,2,3,4\}}(t) = \bar{Q}_T(\bar{F}_1(t), \dots, \bar{F}_4(t)),$$

$$\bar{Q}_T(u_1, \dots, u_4) = \hat{C}(u_1, u_2, u_3, 1) + \hat{C}(u_1, 1, 1, u_4) - \hat{C}(u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Si las componentes son independientes la distorsión se obtiene a partir de (7) como

$$\bar{Q}_T(u_1, \dots, u_4) = u_1 u_2 u_3 + u_1 u_4 - u_1 u_2 u_3 u_4.$$

Si las componentes son idénticamente distribuidas la distorsión viene dada a partir de (8) por

$$\bar{q}_T(u) = \hat{C}(u, u, u, 1) + \hat{C}(u, 1, 1, u) - \hat{C}(u, u, u, u).$$

Si las componentes son i.i.d. la distorsión viene dada a partir de (9) por

$$\bar{q}(u) = u^2 + u^3 - u^4,$$

de donde se obtiene la signatura minimal $a = (0, 1, 1, -1)$.

Capítulo 3: Entropía residual acumulada

En este tercer capítulo se abarca el trabajo desarrollado por Rao et al. [18]. Concretamente, se introduce una medición empleada para la medición de la incertidumbre de una v.a., la entropía residual acumulada, y se estudian sus principales propiedades.

3.1. Entropía residual como alternativa a la entropía de Shannon

En primer lugar es necesario definir el concepto de entropía de Shannon para comprender el concepto de entropía residual acumulada, ya que esta entropía se presenta como una alternativa a la entropía de Shannon que mide la dispersión o incertidumbre a la hora de medir una v.a. y que es muy empleada en diversos campos como la estadística, ingeniería, etc.

Definición 3.1.1. Sea X una v.a. no negativa y absolutamente continua con función de densidad f , la entropía de Shannon viene dada por la expresión

$$H(X) = - \int_0^{\infty} f(x) \log f(x) dx. \quad (10)$$

La función \log hace referencia al logaritmo neperiano y por convención se define

$$0 \log 0 = 0.$$

La entropía de Shannon presenta varias propiedades (ver páginas 1-2 de [18] y páginas 35-38 de [16]), de las que destacan, entre otras:

1. $H(X, Y) = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x, y) \log f(x, y) dx dy \leq H(X) + H(Y)$.
2. La entropía de Shannon de una variable continua puede tomar cualquier valor en la recta real.
3. Es imposible, de manera general, aproximar la entropía de Shannon de una variable continua empleando la entropía de la distribución empírica.
4. Dada una v.a. X limitada por un conjunto con medida S la entropía es máxima, es decir, presenta mayor incertidumbre cuando X tiene una distribución uniforme en el intervalo $[0, S]$. Se obtiene por tanto

$$H(X) = - \int_0^S \frac{1}{S} \log\left(\frac{1}{S}\right) dx = \log(S).$$

La entropía residual acumulada introducida en [18] es similar a la entropía de Shannon pero emplea la función de supervivencia como alternativa a la función de densidad. La función de distribución es más regular que la función de densidad, ya que la densidad se calcula como la derivada de la distribución y existen ciertas funciones de distribuciones que no presenten función de densidad, impidiendo el cálculo de la entropía de Shannon.

Definición 3.1.2. Sea $\bar{F}(t)$ la función de supervivencia de una v.a. positiva T . Se define la entropía acumulada residual como

$$\varepsilon(X) = - \int_0^{\infty} \bar{F}(x) \log(\bar{F}(x)) dx. \quad (11)$$

Esta función conserva algunas de las propiedades de la entropía de Shannon. Sin embargo, la entropía acumulada residual presenta un conjunto de propiedades que no posee la entropía de Shannon y que la hace una opción alternativa muy útil. Algunas de las propiedades recogidas en [18] son las siguientes:

1. La entropía residual acumulada es más general que la entropía de Shannon y su definición es válida tanto en dominios discretos como en dominios continuos.
2. Es siempre no negativa.
3. Es posible calcular la entropía residual acumulada empírica a partir de las funciones de distribución empíricas y ésta convergerá a la entropía residual acumulada casi seguramente.
4. Puede ser fácilmente computable para una muestra de datos como ejemplifican Rao et al. [18] en la última sección de su artículo.

3.2. Propiedades generales de la entropía residual acumulada

La entropía residual acumulada está muy relacionada con otras medidas de dispersión a parte de la entropía de Shannon como son la desviación típica σ y la diferencia media de Gini que viene dada por

$$D_G(X) = \int_0^{\infty} 2\bar{F}(x)(1 - \bar{F}(x))dx,$$

ya que por ejemplo se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\varepsilon(aX + b) = a\varepsilon(X)$, $\forall a > 0$ y $b \geq 0$. Una propiedad muy similar a la propiedad definida para la desviación típica en la Sección 1.4..
2. Como $0 \leq x(1 - x) \leq -x \log x$, $\forall x \in [0,1]$, entonces $2\varepsilon(X) \geq D_G(X)$.

A continuación se realiza un cálculo sencillo de la entropía residual acumulada de una v.a. que sigue un modelo Weibull.

Ejemplo 3.2.1. Dada una v.a. la cual sigue un modelo Weibull, su función de supervivencia viene dada por

$$\bar{F}(x) = e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad \forall x \geq 0,$$

y su correspondiente entropía residual acumulada se obtiene empleando (11) como

$$\varepsilon(X) = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} \left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha dx = \frac{\beta}{\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{1}{\alpha}-1} dt = \frac{\beta}{\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right),$$

donde ha sido aplicado el cambio de variable $t^{1/\alpha}\beta = x \rightarrow dx = \frac{dt}{\alpha} \left(\frac{\beta}{t^{1/\alpha}\beta}\right)^{\alpha-1}$ para resolver la integral y donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$. Si se compara este resultado con su desviación típica

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\int_{-\infty}^\infty x^2 \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} dx - \left(\int_{-\infty}^\infty x \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha} dx\right)^2} = \\ &= \sqrt{\beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \beta^2 \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}, \end{aligned}$$

se observa la mencionada relación entre ambas medidas de incertidumbre (ver Figura 7).

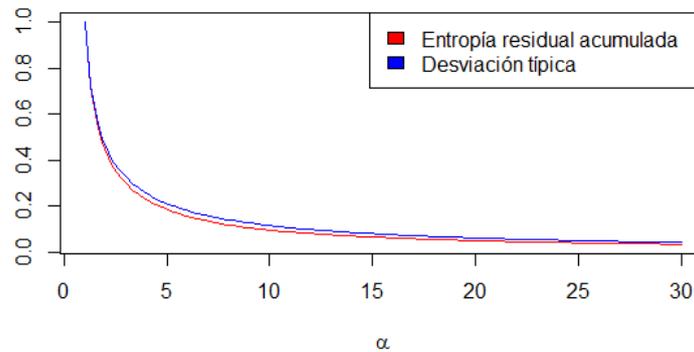


Figura 7: Comparación entre la entropía residual y la desviación típica de una distribución Weibull con $\beta=1$ en función de α . Fuente: Elaboración propia.

Rao et al. [18] en su artículo enuncian un teorema que permite definir un límite inferior para los valores de la entropía residual acumulada de una determinada v.a. X . Dicho teorema es formulado como sigue.

Teorema 3.2.1. Sea X una v.a. aleatoria absolutamente continua y positiva con función de densidad f , entonces

$$\varepsilon(X) \geq Ae^{H(X)},$$

donde $A = e^{\int_0^1 \log(x|\log x|)dx} \approx 0.2065$.

Demostración. Sean \bar{F} y f las funciones de supervivencia y densidad de una v.a. X . Empleando la desigualdad de suma logarítmica ($\sum_i^n a_i \log(\frac{a_i}{b_i}) \geq (\sum_i^n a_i) \log(\frac{\sum_i^n a_i}{\sum_i^n b_i})$ para a_1, \dots, a_n y b_1, \dots, b_n no negativos) se obtiene

$$\int_0^\infty f(x) \log\left(\frac{f(x)}{\bar{F}(x)|\log \bar{F}(x)|}\right) dx \geq \int_0^\infty f(x) dx \log\left(\frac{\int_0^\infty f(x) dx}{\int_0^\infty \bar{F}(x)|\log \bar{F}(x)| dx}\right) = \log\left(\frac{1}{\varepsilon(X)}\right),$$

donde se ha empleado la desigualdad de la suma logarítmica en el dominio continuo y tomado $a(x) = f(x)$ y $b(x) = \bar{F}(x)|\log \bar{F}(x)|$. Esta igualdad es equivalente a la expresión

$$-H(X) - \int_0^\infty f(x) \log(\bar{F}(x)|\log \bar{F}(x)|) dx \geq \log\left(\frac{1}{\varepsilon(X)}\right),$$

$$H(X) + \int_0^\infty f(x) \log(\bar{F}(x)|\log \bar{F}(x)|) dx \leq \log \varepsilon(X).$$

Aplicando el cambio de variable $\bar{F}(x) = y$, se obtiene finalmente

$$H(X) - \int_1^0 \log(y|\log y|) dy = H(X) + \int_0^1 \log(y|\log y|) dy \leq \log \varepsilon(X),$$

que tomando exponenciales a ambos miembros de la desigualdad se llega a la expresión buscada

$$e^{H(X)} A \leq \varepsilon(X),$$

con $A = e^{\int_0^1 \log(x|\log x|)dx} \approx 0.2065$.

La entropía residual acumulada se puede también maximizar bajo ciertas condiciones para obtener ciertos modelos probabilísticos de manera análoga a como sucede con la entropía de Shannon, tal y como indican Asadi et al. [1]. Si $X \geq 0$, entonces

$$\mu = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx$$

y se puede definir una función de densidad decreciente como

$$g(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\mu}, \quad \forall x \geq 0.$$

Por tanto, maximizar la entropía residual fijado un determinado μ es equivalente a maximizar la entropía de Shannon de una función de densidad $g(x)$ como

$$H(X) = - \int_0^{\infty} g(x) \log g(x) dx = - \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(x)}{\mu} \log \frac{\bar{F}(x)}{\mu} dx.$$

Otra característica importante de la entropía residual acumulada es que es especialmente útil para describir la dispersión de la información en problemas relacionados con propiedades de envejecimiento en teoría de fiabilidad, tal y como indican Asadi y Zohrevand [2]. Por ejemplo, la entropía residual es equivalente al valor esperado de la función vida media residual $m(x) = E(X - x | X > 0)$, es decir,

$$\varepsilon(X) = E(m(X)).$$

Se puede obtener una expresión similar en términos de la función razón de fallo acumulada definida como $R(x) = \int_0^x r(z) dz = \int_0^x \frac{f(z)}{\bar{F}(z)} dz = -\log \bar{F}(x)$.

$$\varepsilon(X) = - \int_0^{\infty} \log \bar{F}(x) \int_x^{\infty} f(z) dz dx = \int_0^{\infty} f(z) \int_0^z R(x) dx dz,$$

que es equivalente a $\varepsilon(X) = E[v(X)]$ con $v(x) = \int_0^x R(x) dx$.

Es conocido también que la entropía residual acumulada puede emplearse para obtener la medida denominada distancia acumulativa Kullback-Leibler introducida por Baratpour y Rad [3].

Definición 3.2.1. Sean dos variables aleatorias X e Y no negativas con sus correspondientes funciones de supervivencia $\bar{F}(x)$ y $\bar{G}(x)$ y medias finitas $E(X)$ e $E(Y)$, entonces la distancia acumulativa Kullback-Leibler viene dada por

$$CE(X, Y) = E(Y) - E(X) + \int_0^\infty \bar{F}(x) \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} dx \geq 0. \quad (12)$$

Esta medida permite obtener la discrepancia existente entre las funciones de supervivencia de dos v.a. distintas y, por tanto, de cómo discrepan sus distribuciones. A mayor distancia más discreparán sus funciones de supervivencia. Esta medida es siempre positiva. La demostración de dicha propiedad se basa en el empleo de la desigualdad de la suma logarítmica y de que $x \log \left(\frac{x}{y}\right) \geq x - y$ para todo $x, y > 0$ como sigue,

$$\int_0^\infty \bar{F}(x) \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} dx \geq \int_0^\infty \bar{F}(x) dx \log \frac{\int_0^\infty \bar{F}(x) dx}{\int_0^\infty \bar{G}(x) dx} = E(X) \log \frac{E(X)}{E(Y)},$$

$$CE(X, Y) \geq E(Y) - E(X) + E(X) \log \frac{E(X)}{E(Y)} \geq 0.$$

Otras dos características a tener en cuenta de esta medida son que $CE(X, Y) = 0$ cuando $F = G$ y que $CE(X, Y)$ no es necesariamente igual a $CE(Y, X)$.

Ejemplo 3.2.2. Dadas dos variables aleatorias X e Y cuyas funciones de supervivencia vienen dadas respectivamente por $\bar{F}(x) = e^{-3x/\mu}$ y $\bar{G}(x) = e^{-2x/\mu}$, la distancia acumulativa Kullback-Leibler viene dada a partir de (12) por

$$CE(X, Y) = \int_0^\infty e^{-2x/\mu} dx - \int_0^\infty e^{-\frac{3x}{\mu}} dx + \int_0^\infty e^{-\frac{3x}{\mu}} \log \left(\frac{e^{-\frac{3x}{\mu}}}{e^{-\frac{2x}{\mu}}} \right) dx = 0.055 \mu,$$

donde se observa que no existe mucha distancia entre ambas funciones de supervivencia lo cual tiene sentido, debido a que se han elegidos dos supervivencias que siguen ambas un modelo exponencial para la realización del ejemplo.

Si X es una v.a. no negativa y absolutamente continua con función de supervivencia \bar{F} , si se aplica la transformación $U = F(X)$, la entropía residual acumulativa expresada en (11) se puede reescribir aplicando los cambios $u = \bar{F}(x) \rightarrow du = -f(x)dx, x = \bar{F}^{-1}(u)$ como

$$\varepsilon(X) = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{f(\bar{F}^{-1}(u))} du \quad (13)$$

con $\varphi(u) = -u \log(u)$ y la función $\bar{F}^{-1}(u) = \sup\{x: \bar{F}(x) \geq u\}$ denominada función cuantil de \bar{F} .

Para concluir esta sección se introducirán el concepto de orden referente a la entropía residual acumulada y su relación con el orden dispersivo.

Definición 4.1.5. Sean X e Y dos variables aleatorias, se cumplirá que X es menor que Y en orden de la entropía residual acumulada ($X \leq_{CRE} Y$) si se cumple que

$$\varepsilon(X) \leq \varepsilon(Y).$$

De acuerdo a (13) este orden implica que

$$\varepsilon(X) = \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{f(\bar{F}^{-1}(u))} du \leq \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{g(\bar{G}^{-1}(u))} du = \varepsilon(Y).$$

Debido a que $\varphi(u)$ es igual en ambas entropías residuales se debe cumplir la condición de orden dispersivo vista en la Sección 1.1.

$$f(\bar{F}^{-1}(u)) \geq g(\bar{G}^{-1}(u)), \quad 0 < u < 1.$$

Por lo tanto se obtiene que el orden dispersivo implica el orden de la entropía residual acumulada, es decir, se cumple

$$X \leq_d Y \Rightarrow X \leq_{CRE} Y.$$

Hay que destacar que si se cumple la condición de $\varepsilon(X) = \varepsilon(Y)$ este hecho no implica que las variables aleatorias X e Y sigan la misma distribución. Además, si $Y = \omega(X)$ para una determinada función estrictamente creciente ω en el dominio de X se cumple la condición

$$\begin{aligned} \varepsilon(Y) &= - \int_0^\infty \bar{F}_Y(y) \log(\bar{F}_Y(y)) dy = - \int_0^\infty \bar{F}_X(w^{-1}(x)) \log(\bar{F}_X(w^{-1}(x))) dx \\ &- \int_0^\infty w'(u) \bar{F}_X(u) \log \bar{F}_X(u) du = \varepsilon(X) - \int_0^\infty (w'(u) - 1) \bar{F}_X(u) \log \bar{F}_X(u) du, \end{aligned}$$

donde se ha aplicado el cambio de variable $w^{-1}(x) = u$.

La medida de incertidumbre presentada en esta sección, la entropía residual acumulada, puede emplearse para diversos casos prácticos. Concretamente, esta medida es muy útil a la hora de realizar estudios sobre las propiedades de sistemas empleando la representación basada en firmas de los mismos. En el siguiente capítulo se estudiará cómo se puede aplicar esta medida a sistemas coherentes.

Capítulo 4: Entropía residual acumulada aplicada a sistemas coherentes

En este último capítulo se estudia la aplicación de la entropía residual acumulada a sistemas coherentes desarrollada por Toomaj, Sunoj y Navarro [17].

4.1. Aplicación a sistemas coherentes

Si se trabaja con un sistema cuyos tiempos de vida de las componentes son i.i.d. y con una función de distribución común F , de acuerdo al Teorema 3.5.1., la función de supervivencia del sistema vendrá dada a partir de las expresiones (1), (2) y (3).

Si se quiere calcular la correspondiente entropía residual acumulada del sistema se debe emplear la transformación $U = \bar{F}(X)$. Se tiene por tanto la variable aleatoria $U_i = \bar{F}_i(X_i)$ uniformemente distribuida en el intervalo $[0,1]$ y $W_{i:n} = \bar{F}(X_{i:n})$ que tiene una distribución beta con $n - i + 1$ e i parámetros y con una función de distribución

$$G_{i:n}(w) = \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (1-w)^j w^{n-j}, \quad 0 \leq w \leq 1. \quad (14)$$

Por tanto, la transformación $V = \bar{F}(T)$, donde T es el tiempo de vida del sistema, tiene la función de distribución

$$G_V(v) = \sum_{i=1}^n s_i G_{i:n}(v), \quad 0 \leq v \leq 1. \quad (15)$$

De esta transformación se obtiene la relación $\bar{F}(t) = \bar{G}_V(\bar{F}(t))$, que permite reescribir la expresión de la entropía a partir de la expresión (13) como

$$\varepsilon(T) = \int_0^1 \frac{\varphi(G_V(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv, \quad (16)$$

con el cambio de variable $\bar{F}(t) = v$. A continuación, se expone el ejemplo de un sistema al cual se le calculará su entropía residual acumulada.

Ejemplo 4.1.1. Sea $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$ un sistema coherente con componentes i.i.d. y cuya signatura es $s = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Se calculará su entropía residual si las componentes

siguen una función de supervivencia $\bar{F}(t) = e^{-t/\mu}$ con $\mu > 0$ y $t \geq 0$. En primer lugar se calculan los correspondientes $G_{i:n}(t)$ empleando (14) como

$$G_{2:3}(t) = \sum_{j=0}^1 \binom{3}{j} (1-w)^j w^{n-j} = -2w^3 + 3w^2,$$

$$G_{3:3}(t) = \sum_{j=0}^2 \binom{3}{j} (1-w)^j w^{n-j} = w^3 - 3w^2 + 3w,$$

con lo que a partir de (15) se obtiene

$$G_V(v) = -\frac{4}{3}v^3 + 2v^2 + \frac{1}{3}v^3 - v^2 + v = -v^3 + v^2 + v.$$

Por otro lado se necesita el cálculo de la inversa de la función de supervivencia

$$\bar{F}^{-1}(v) = -\mu \ln(v) \Rightarrow f(\bar{F}^{-1}(v)) = v/\mu.$$

Finalmente, la entropía residual acumulada en este ejemplo se puede calcular empleando (16) como

$$\varepsilon(T) = -\mu \int_0^1 \frac{(-v^3 + v^2 + v) \ln(-v^3 + v^2 + v)}{v} dv = 0.9567\mu.$$

Una alternativa para el cálculo de la entropía residual de un sistema es la posibilidad de reescribir la función de distribución de un sistema coherente cuando sus componentes son i.d. como una distorsión tal y como indica el Teorema 3.6.3.. En particular, si las componentes son intercambiables

$$\bar{q}(v) = \sum_{i=1}^n a_i \hat{C}(v_i) = G_V(v), \quad (17)$$

con $v_i = (u_1, \dots, u_n)$ y con $u_1 = \dots = u_i = v$ y $u_{i+1} = \dots = u_n = 1$, \hat{C} es la cópula de supervivencia y los a_1, \dots, a_n los coeficientes de la signatura minimal del sistema. Esta alternativa de cálculo se emplea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.2. Sea la signatura minimal $a = (1, 1, -1)$ de un sistema $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$ de componentes i.d. que siguen una función de supervivencia común $\bar{F}(t) = e^{-t/\mu}$ con $\mu > 0$ y $t \geq 0$. Empleando las expresiones (16) y (17)

$$\varepsilon(X)$$

$$= -\mu \int_0^1 \frac{(\hat{C}(v, 1, 1) + \hat{C}(v, v, 1) - \hat{C}(v, v, v)) \log(\hat{C}(v, 1, 1) + \hat{C}(v, v, 1) - \hat{C}(v, v, v))}{v} dv$$

Si esta cópula sigue por ejemplo un modelo Farlie-Gumbel-Morgenstern con $\theta = 1$

$$C(u_1, u_2, u_3) = u_1 u_2 u_3 [1 + (1 - u_1)(1 - u_2)(1 - u_3)],$$

la función de supervivencia del sistema es

$$\bar{F}_T(t) = \bar{F}_{1:1}(t) + \bar{F}_{1:2}(t) - \bar{F}_{1:3}(t) = \bar{q}(\bar{F}(t)),$$

donde $\bar{q}(v) = \hat{C}(v, 1, 1) + \hat{C}(v, v, 1) - \hat{C}(v, v, v) = v + v^2 - v^3(1 + (1 - v)^3)$. Por tanto la entropía residual finalmente es calculada para este ejemplo como

$$\begin{aligned} \varepsilon(T) &= -\mu \int_0^1 \frac{(v + v^2 - v^3(1 + (1 - v)^3)) \ln(v + v^2 - v^3(1 + (1 - v)^3))}{v} dv \\ &= 0.9655\mu. \end{aligned}$$

En particular, si las componentes del sistema que se estudia tienen sus componentes i.i.d., la distorsión puede expresarse simplificada y de manera alternativa a (15) como

$$\bar{q}(v) = \sum_{i=1}^n a_i v^i = G_V(v), \quad (18)$$

quedando la expresión de la entropía residual finalmente como

$$\varepsilon(T) = -\sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 \frac{v^i \log(\sum_{i=1}^n a_i v^i)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv. \quad (19)$$

Ejemplo 4.1.3. Sea la signatura minimal $a = (1, 1, -1)$ de un sistema $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$ de componentes i.i.d. que siguen una función de supervivencia común $\bar{F}(t) = e^{-t/\mu}$ con $\mu > 0$ y $t \geq 0$. Empleando las expresiones (18) y (19) se obtiene que la entropía residual del sistema es

$$\varepsilon(X) = -\mu \int_0^1 \frac{(-v^3 + v^2 + v) \ln(-v^3 + v^2 + v)}{v} dv = 0.9567\mu,$$

que proporciona el mismo resultado del Ejemplo 4.2.1 como cabría esperar.

En la Tabla 4.1.1 se expone la entropía residual de todos los sistemas coherentes de orden 4 cuyas componentes son i.i.d. y siguen una distribución exponencial de media uno. En esta tabla se puede observar que los Ejemplos 4.1.1 y 4.1.3 han sido realizados de forma correcta ya que coinciden con los resultados que obtuvieron los autores originales para su sistema número 7 que ha sido el escogido para realizar los ejemplos.

I	a	S	$\varepsilon(X)$	$\sigma(T)$
1	(1)	(1)	1.0000	1.0000
2	(0,1)	(1,0)	0.5000	0.5000
3	(2,-1)	(0,1)	1.1137	1.1180
4	(0,0,1)	(1,0,0)	0.3333	0.3333
5	(0,2,-1)	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$	0.5758	0.5773
6	(0,3,-2)	(0,1,0)	0.5974	0.6009
7	(1,1,-1)	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$	0.9566	0.9574
8	(3,-3,1)	(0,0,1)	1.1580	1.1667
9	(0,0,0,1)	(1,0,0,0)	0.2500	0.2500
10	(0,0,2,-1)	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$	0.3814	0.3818
11	(0,0,3,-2)	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, 0, 0)$	0.4064	0.4082
12	(0,1,1,-1)	$(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{1}{6}, 0)$	0.5061	0.5069
13	(0,3,-3,1)	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$	0.6255	0.6291
14	(0,0,4,-3)	(0,1,0,0)	0.4139	0.4166
15	(0,1,2-2)	$(0, \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0)$	0.4984	0.5000
16	(0,2,0,-1)	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$	0.5568	0.5590
17	(0,2,0,-1)	$(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$	0.5568	0.5590
18	(0,3,-2,0)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	0.5974	0.6009
19	(0,3,-2,0)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	0.5974	0.6009
20	(0,4,-4,1)	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$	0.6238	0.6291
21	(0,4,-4,1)	$(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$	0.6238	0.6291
22	(0,5,-6,2)	$(0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 0)$	0.6385	0.6455
23	(0,6,-8,3)	(0,0,1,0)	0.6431	0.6508
24	(1,0,1,-1)	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	0.9607	0.9610
25	(1,2,-3,1)	$(0, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4})$	0.9446	0.9465
26	(1,3,-5,2)	$(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4})$	0.9255	0.9279
27	(2,0,-2,1)	$(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1.0793	1.0833
28	(4,-6,4,-1)	(0,0,0,1)	1.1815	1.1932

Tabla 4.1.1. Signatura, signatura minimal, distorsión y entropía residual de todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y distribución exponencial. Fuente: Toomaj, Sunoj y Navarro [17].

Para concluir esta sección se enuncia un teorema en relación a la expresión de la entropía residual acumulada en función de la dispersión $\bar{q}(v)$ cuando el sistema tiene componentes i.i.d.. Concretamente, el teorema permite comparar la entropía residual acumulada de dos sistemas con la misma estructura pero con diferentes componentes i.i.d..

Teorema 4.1.1. Sean T_1 y T_2 la vida útil de dos sistemas coherentes con la misma estructura, con componentes i.i.d. de vidas útiles X_1, \dots, X_n y Y_1, \dots, Y_n , con una misma cópula C , funciones de distribución F y G y sus correspondientes funciones de densidad f y g .

1. Si $X \leq_d Y$ entonces $T_1 \leq_{CRE} T_2$.
2. Si $X \leq_{CRE} Y$ y

$$\inf_{v \in A_1} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \geq \sup_{v \in A_2} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)},$$

$$A_1 = \{v \in [0,1]: f(\bar{F}^{-1}(v)) > g(\bar{G}^{-1}(v))\},$$

$$A_2 = \{v \in [0,1]: f(\bar{F}^{-1}(v)) \leq g(\bar{G}^{-1}(v))\},$$

entonces $T_1 \leq_{CRE} T_2$.

Demostración. Para probar (1) como los dos sistemas tienen la misma estructura e igual cópula, presentan ambos la misma distorsión. Como se cumple $X \leq_d Y$, entonces

$$\frac{\varphi(\bar{q}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} \leq \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{g(\bar{G}^{-1}(v))}, \quad \forall 0 < v < 1, \varphi(\bar{q}(v)) > 0,$$

lo que implica que

$$\varepsilon(X) = \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv \leq \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{g(\bar{G}^{-1}(v))} dv = \varepsilon(Y).$$

Para probar 2 partiendo de $X \leq_{CRE} Y$ se tiene

$$\varepsilon(Y) - \varepsilon(X) = \int_0^1 \left(\frac{\varphi(\bar{q}(v))}{g(\bar{G}^{-1}(v))} - \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} \right) dv \geq 0.$$

Si se define $\Delta(u) = \frac{\varphi(u)}{g(\bar{G}^{-1}(u))} - \frac{\varphi(u)}{f(\bar{F}^{-1}(u))}$, la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\varepsilon(Y) - \varepsilon(X) &= \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \Delta(v) dv = \int_{A_1} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \Delta(v) dv + \int_{A_2} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \Delta(v) dv \\
&\geq \inf_{v \in A_1} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \int_{A_1} \Delta(u) dv + \sup_{v \in A_2} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \int_{A_2} \Delta(u) dv \\
&\geq \sup_{v \in A_2} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \int_{A_2} \Delta(u) dv \geq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto la entropía residual del sistema T_2 es mayor que la entropía residual de T_1 lo que implica por definición que $T_X \leq_{CRE} T_Y$ que era lo que se buscaba demostrar.

4.2. Límites para la entropía residual acumulada de sistemas coherentes

En esta sección se estudian los límites de la entropía residual acumulada aplicadas a sistemas coherentes. En la práctica cuando se estudian sistemas con un gran número de componentes o éstos tienen una estructura compleja, el cálculo de la entropía residual acumulada no resulta un cálculo trivial. Cuando se presentan estos problemas es importante conocer de forma aproximada el comportamiento de los límites de la entropía residual acumulada de la vida útil del sistema.

Algunos de los resultados principales en relación a estos límites de la entropía residual vienen recogidos en las siguientes proposiciones.

Proposición 4.2.1. Sea T la vida útil de un sistema coherente con componentes i.d. cuyas vidas útiles son X_1, \dots, X_n y sea \bar{q} la función de distorsión asociada, entonces se cumple

$$\beta_1 \varepsilon(X_1) \leq \varepsilon(T) \leq \beta_2 \varepsilon(X_1), \quad (20)$$

con

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \inf_{v \in (0,1)} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)}, \\
\beta_2 &= \sup_{v \in (0,1)} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)}
\end{aligned}$$

y $\varphi(v) = -v \log(v)$.

Demostración: El límite inferior puede obtenerse a partir de las expresiones (16) y (17):

$$\begin{aligned}\varepsilon(T) &= \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv = \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \frac{\varphi(v)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv \\ &\geq \inf_{v \in (0,1)} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} \int_0^1 \frac{\varphi(v)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv = \beta_2 \varepsilon(X_1).\end{aligned}$$

La demostración para el límite superior es análoga.

Proposición 4.2.2. Sea T la vida útil de un sistema coherente con componentes i.d. con una función de densidad f y una función de distorsión \bar{q} . Si S es el soporte de f ,

$$m = \inf_{x \in S} f(x),$$

$$M = \sup_{x \in S} f(x),$$

entonces se verifica la condición

$$\frac{1}{M} I_q \leq \varepsilon(T) \leq \frac{1}{m} I_q, \quad (21)$$

con

$$I_q = - \int_0^1 \bar{q}(v) \log(\bar{q}(v)) dv. \quad (22)$$

Demostración: A partir de la expresión (16), teniendo en cuenta que

$$m \leq f(\bar{F}^{-1}(v)) \leq M, 0 \leq v \leq 1,$$

se obtiene

$$\varepsilon(T) = \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv \leq \frac{1}{m} \int_0^1 \varphi(\bar{q}(v)) dv.$$

De forma análoga se puede obtener el límite inferior.

Se debe tener en cuenta que la expresión (21) depende de los extremos de la función de densidad f por lo que no existirá límite inferior si $M = \infty$ y no existirá límite superior si $m = 0$.

A continuación, empleando el sistema del Ejemplo 4.1.3., se calcularán los límites de un sistema con componentes i.i.d..

Ejemplo 4.2.1. Sea la signatura minimal $a = (1, 1, -1)$ de un sistema $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$ de componentes i.i.d. a partir de la expresión (22) se obtiene

$$I_q = - \int_0^1 (-v^3 + v^2 + v) \ln(-v^3 + v^2 + v) dv \approx 0.2075.$$

A partir de este valor de I_q se van a estudiar los límites para ciertos modelos de la función de distribución.

Si se emplea un modelo con función de densidad exponencial

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}}, \quad \forall x > 0,$$

los valores obtenidos son $m = 0$ y $M = \frac{1}{\mu}$, por lo que a partir de (21) se obtiene

$$0.2075\mu \leq \varepsilon(T) \leq \infty.$$

A partir de la Proposición 4.2.1. β_1 y β_2 se calculan como

$$\beta_1 = \inf_{v \in (0,1)} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} = \inf_{v \in (0,1)} \frac{(-v^3 + v^2 + v) \log(-v^3 + v^2 + v)}{v \log v} = 0.$$

$$\beta_2 = \sup_{v \in (0,1)} \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{\varphi(v)} = \sup_{v \in (0,1)} \frac{(-v^3 + v^2 + v) \log(-v^3 + v^2 + v)}{v \log v} \approx 1.05.$$

$$\varepsilon(X_1) = \int_0^1 \frac{\varphi(v)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv = -\mu \int_0^1 \log v = \mu.$$

Por lo que finalmente la expresión de los límites para este sistema de ejemplo resulta como

$$0 \leq \varepsilon(T) \leq 1.05 \mu.$$

Proposición 4.2.3. El límite inferior de β_1 es nulo para todo sistema mezclado con componentes i.i.d. y signatura (s_1, \dots, s_n) siempre que se cumpla la condición de que $s_1 = 0$ o $s_n = 0$. En particular el límite inferior es nulo para todo sistema coherente con $n > 1$ componentes del tipo i.i.d..

La demostración puede verse en [17] (Proposición 3).

La siguiente proposición proporciona los límites generales de la entropía residual acumulada de un sistema T a partir de la signatura del sistema y la entropía residual de un sistema k-out-of-n.

Proposición 4.2.4. Sea T la vida útil de un sistema coherente con signatura (s_1, \dots, s_n) cuyas componentes son del tipo i.i.d., entonces

$$\varepsilon_L(T) \leq \varepsilon(T) \leq \varepsilon_U(T), \quad (23)$$

donde $\varepsilon_L(T)$ y $\varepsilon_U(T)$ vienen dadas por

$$\varepsilon_L(T) = \sum_{i=1}^n s_i \varepsilon(X_{i:n}), \quad (24)$$

$$\varepsilon_U(T) = \min_{1 \leq j \leq n} (\varepsilon(T, X_{j:n}) + E(X_{j:n}) - E(T)),$$

con $\varepsilon(X, Y) = - \int_0^\infty \bar{F}(t) \log \bar{G}(t) dt$, siendo $\bar{F}(t)$ la función de supervivencia de la v.a. X y $\bar{G}(t)$ la función de supervivencia de la v.a. Y .

Demostración: A partir de la representación de Samaniego se tiene $\bar{q} = \sum_{i=1}^n s_i \bar{q}_{i:n}$. Donde $\bar{q}_{i:n} = G_{i:n}$ es la distorsión correspondiente asociada a $X_{i:n}$. A partir de (16) y teniendo en cuenta la convexidad de φ se obtiene

$$\varepsilon(X) = \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv \geq \int_0^1 \frac{\sum_{i=1}^n s_i \varphi(\bar{q}_{i:n}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv = \sum_{i=1}^n s_i \varepsilon(X_{i:n}).$$

Para obtener el límite superior se debe emplear la expresión (12)

$$CE(T, X_{j:n}) = E(X_{j:n}) - E(T) + \varepsilon(T, X_{j:n}) - \varepsilon(T) \geq 0, \quad 1 \leq j \leq n,$$

tal que $\bar{F}_T(t) = 0$ si $\bar{F}_{j:n}(t) = 0$. Se debe encontrar el mínimo en términos de $1 \leq j \leq n$.

A partir de (1) se puede reescribir el límite superior como

$$\min_j (\varepsilon(T, X_{j:n}) + E(X_{j:n}) - E(T)) = \varepsilon_L(T) + \min_j \left(\sum_{i=1}^n s_i CE(X_{i:n}, X_{j:n}) \right) \quad (25)$$

El índice óptimo j^* debe satisfacer

$$\varepsilon(T, X_{j^*:n}) + E(X_{j^*:n}) - E(T) = \varepsilon_L(T) + \min_{1 \leq j \leq n} (\varepsilon(T, X_{j:n}) + E(X_{j:n}) - E(T)).$$

Por lo tanto, el índice j^* se obtiene a partir de

$$c_T(j^*) = \sum_{i=1}^n s_i CE(X_{i:n}, X_{j^*:n}) = \min_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n s_i CE(X_{i:n}, X_{j:n}) \right). \quad (26)$$

Ejemplo 4.2.2. Dado el sistema $T = \max(X_1, \min(X_2, X_3))$ de componentes i.i.d. y función de distribución una exponencial, se van a calcular sus correspondientes $\varepsilon_L(T)$, $\varepsilon_U(T)$ y j^* . En primer lugar se calcula el límite inferior empleando (24) como

$$\begin{aligned} \varepsilon_L(T) &= \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}_{2:3}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv + \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{\varphi(\bar{q}_{3:3}(v))}{f(\bar{F}^{-1}(v))} dv \\ &= \frac{-2\mu}{3} \int_0^1 \frac{(3v^2 - 2v^3)\log(3v^2 - 2v^3)}{v} dv \\ &\quad - \frac{\mu}{3} \int_0^1 \frac{(3v - 3v^2 + v^3)\log(3v - 3v^2 + v^3)}{v} dv \\ &= \frac{2\mu}{3}(0.5973) + \frac{\mu}{3}(1.1580) = 0.7842\mu. \end{aligned}$$

Por otro lado para calcular el j óptimo empleando (26) se tiene

$$\begin{aligned} c_T(j^*) &= \min_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n s_i CE(X_{i:n}, X_{j:n}) \right) \\ &= \min \left(\frac{2}{3} CE(X_{2:3}, X_{1:3}) + \frac{1}{3} CE(X_{3:3}, X_{1:3}), \frac{2}{3} CE(X_{2:3}, X_{2:3}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} CE(X_{3:3}, X_{2:3}), \frac{2}{3} CE(X_{2:3}, X_{3:3}) + \frac{1}{3} CE(X_{3:3}, X_{3:3}) \right) = \\ &= \min(1.7990\mu, 0.4011\mu, 0.3738\mu) = 0.3738\mu \rightarrow j^* = 3. \end{aligned}$$

Una vez obtenido el j^* de (25) se puede calcular el límite superior para concluir el ejemplo como

$$\varepsilon_U(T) = 0.7842\mu + 0.3738\mu = 1.158\mu.$$

Para concluir la sección en la Tabla 4.2.1 se recogen para todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y función de distribución exponencial los correspondientes $\beta_1, \beta_2, I_q, \varepsilon_L$ y ε_U . Esta tabla sirve como confirmación que los cálculos realizados en los Ejemplos 4.2.1 y 4.2.2 se han realizado de forma correcta ya que coinciden con los resultados de los autores originales para el sistema número 7.

I	β_1	β_2	I_q	$\varepsilon_L(T)$	$\varepsilon_U(T)$	j^*
1	1	1.0000	0.2500	1.0000	1.0000	1
2	0	2.0000	0.2222	0.5000	0.5000	1
3	0	2.0000	0.1869	1.1137	1.1137	2
4	0	3.0000	0.1875	0.3333	0.3333	1
5	0	1.1509	0.2216	0.5094	0.5974	2
6	0	1.0121	0.1980	0.5974	0.5974	2
7	0	1.0564	0.2075	0.7843	1.1579	3
8	0	3.0000	0.1464	1.1580	1.1580	3
9	0	4.0000	0.1600	0.2500	0.2500	1
10	0	2.0000	0.1976	0.3320	0.4139	2
11	0	1.3437	0.1957	0.3729	0.4139	2
12	0	1.2493	0.2128	0.4111	0.5177	2
13	0	1.0572	0.2245	0.4876	0.6963	3
14	0	1.1591	0.1845	0.4139	0.4139	2
15	0	1.0967	0.1954	0.4521	0.5177	2
16	0	1.0543	0.1993	0.4903	0.6216	2
17	0	1.0543	0.1993	0.4903	0.6216	2
18	0	1.0121	0.1980	0.5285	0.6431	3
19	0	1.0121	0.1980	0.5285	0.6431	3
20	0	1.0002	0.1924	0.5667	0.6431	3
21	0	1.0002	0.1924	0.5667	0.6431	3
22	0	1.0052	0.1830	0.6049	0.6431	3
23	0	1.0202	0.1703	0.6431	0.6431	3
24	0	1.0125	0.2196	0.6631	1.0609	3
25	0	1.0982	0.1924	0.7395	1.0609	3
26	0	1.1367	0.1746	0.7777	1.0609	3
27	0	2.0000	0.1653	0.9123	1.1815	4
28	0	4.0000	0.1198	1.1815	1.1815	4

Tabla 4.2.1. Cotas $\beta_1, \beta_2, I_q, \varepsilon_L$ y ε_U de todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y distribución exponencial de media uno. Fuente: Toomaj, Sunoj y Navarro [17].

4.3. Ordenación de sistemas basada en la entropía residual acumulada

La naturaleza física de la estructura de ciertos sistemas algunas veces llega a complicar la comparación de los mismos por medio de comparaciones estocásticas usuales. También es conocido que la función de supervivencia de un sistema T estará localizada entre la de los sistemas en series y paralelo, es decir, $X_{1:n} \leq_{st} T \leq X_{n:n}$. Por tanto, Toomaj, Sunoj y Navarro [17] proponen comparar los sistemas acorde a cómo se parecen éstos en estructura (o función de distribución) a sistemas en serie o sistemas en paralelo, considerando que un sistema será mejor cuanto más cercano al sistema en paralelo se encuentre. Para esta nueva propuesta de comparación de sistemas los autores hacen uso de la entropía residual acumulada.

En primer lugar es necesario definir una nueva distancia entre dos distribuciones basada en la distancia acumulativa Kullback-Leibler expresada en (12), siendo esta nueva medida una versión simétrica de la distancia Kullback-Leibler.

Definición 4.3.1. Sean dos variables aleatorias X e Y positivas y con sus correspondientes funciones de supervivencia $\bar{F}(x)$ y $\bar{G}(x)$, entonces la distancia acumulativa Kullback-Leibler simétrica viene dada por

$$SCE(X, Y) = CE(X, Y) + CE(Y, X) = \int_0^{\infty} [\bar{F}(x) - \bar{G}(x)] \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} dx. \quad (27)$$

Esta medida es positiva ya que empleando la desigualdad de la suma logarítmica y la propiedad de $x \log \left(\frac{x}{y}\right) \geq x - y$ para todo $x, y > 0$, se obtiene que

$$\begin{aligned} SCE(X, Y) &= \int_0^{\infty} \bar{F}(x) \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} dx + \int_0^{\infty} \bar{G}(x) \log \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} dx \\ &\geq \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx \log \frac{\int_0^{\infty} \bar{F}(x)}{\int_0^{\infty} \bar{G}(x)} dx + \int_0^{\infty} \bar{G}(x) dx \log \frac{\int_0^{\infty} \bar{G}(x)}{\int_0^{\infty} \bar{F}(x)} dx \\ &= E(X) \log \frac{E(X)}{E(Y)} + E(Y) \log \frac{E(Y)}{E(X)} \geq 0. \end{aligned}$$

Además, esta medida es simétrica y solo será nula si se da la condición $\bar{F}(x) = \bar{G}(x)$. Las siguientes proposiciones recogen una serie de propiedades de interés de esta nueva medida.

Proposición 4.3.1. Sean X, Y, Z variables aleatorias con correspondientes funciones de distribución F, G y H . Si $X \leq_{st} Y \leq_{st} Z$, entonces se cumple que $SCE(X, Y) \leq SCE(X, Z)$ y que $SCE(Y, Z) \leq SCE(X, Z)$.

Demostración. Como la función $(x - 1)\log x$ es decreciente en el intervalo $(0, 1)$ y es creciente en el intervalo $(1, \infty)$, entonces la condición $\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t) \leq \bar{H}(t)$ para $t > 0$ implica que

$$[\bar{G}(x) - \bar{F}(x)] \log \frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)} \leq [\bar{H}(x) - \bar{F}(x)] \log \frac{\bar{H}(x)}{\bar{F}(x)}, \quad t > 0,$$

$$0 \leq [\bar{G}(x) - \bar{H}(x)] \log \frac{\bar{G}(x)}{\bar{H}(x)} \leq [\bar{F}(x) - \bar{H}(x)] \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{H}(x)}, \quad t > 0,$$

Que integrando a ambos lados demuestra la expresión deseada.

Como $X_{1:n} \leq_{st} T \leq_{st} X_{n:n}$ es válido para cualquier sistema, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 4.3.2. Sea T la vida útil de un sistema coherente con vidas útiles de sus componentes X_1, \dots, X_n , entonces

$$SCE(T, X_{i:n}) \leq SCE(X_{1:n}, X_{n:n}), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Puede definirse la medida de distancia simétrica para T como

$$DSM(T) = \frac{SCE(T, X_{1:n}) - SCE(T, X_{n:n})}{SCE(X_{1:n}, X_{n:n})}. \quad (28)$$

A partir de esta última proposición se tiene que $-1 \leq DSM \leq 1$. DSM será igual a 1 si sólo si $T =_{st} X_{n:n}$ y DSM será igual a -1 si sólo si $T =_{st} X_{1:n}$. Este hecho indica que si la medida está próxima a -1 la distribución de T es próxima a la del sistema en serie y si la medida es próxima a 1 la distribución de T es próxima a la del sistema en paralelo.

Definición 4.3.2. Sean T_1 y T_2 las vidas útiles de dos sistemas coherentes, T_2 será preferible en el orden DSM ($T_1 \leq_{DSM} T_2$), si $DMS(T_1) \leq DMS(T_2)$.

Si las componentes de un sistema T son i.d. a partir de la combinación de (27) y las transformaciones realizadas a lo largo del capítulo anterior se obtiene

$$SCE(T, X_{i:n}) = \int_0^1 \frac{\bar{q}(v) - \bar{q}_{i:n}(v)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} \log \frac{\bar{q}(v)}{\bar{q}_{i:n}(v)} dv, \quad i = 1, \dots, n. \quad (29)$$

Finalmente, la expresión para la nueva distancia es

$$DSM(T) = \frac{SCE(T, X_{1:n}) - SCE(T, X_{n:n})}{SCE(X_{1:n}, X_{n:n})}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & SCE(T, X_{1:n}) - SCE(T, X_{n:n}) \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\bar{q}(v) - \bar{q}_{1:n}(v)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} \log \frac{\bar{q}(v)}{\bar{q}_{1:n}(v)} - \int_0^1 \frac{\bar{q}(v) - \bar{q}_{n:n}(v)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} \log \frac{\bar{q}(v)}{\bar{q}_{n:n}(v)} \right), \\ & SCE(X_{1:n}, X_{n:n}) = \int_0^1 \frac{\bar{q}_{n:n}(v) - \bar{q}_{1:n}(v)}{f(\bar{F}^{-1}(v))} \log \frac{\bar{q}_{n:n}(v)}{\bar{q}_{1:n}(v)} dv. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.1. Si se consideran dos sistemas coherentes dados por los números 13 y 17 de la Tabla 4.1.1, estos sistemas no son comparables con el orden estocástico usual [7]. El cálculo de $DSM(T)$ si sus componentes son i.i.d. y siguen una distribución exponencial vienen dadas por

$$SCE(T_{13}, X_{1:n}) = \mu \int_0^\infty \frac{(3v^2 - 3v^3)}{v} \log \frac{(3v^2 - 3v^3 + v^4)}{v^4} dv = 1.1115\mu,$$

$$\begin{aligned} SCE(T_{13}, X_{n:n}) &= \mu \int_0^\infty \frac{(3v^2 - 3v^3 + v^4) - 1 + (1-v)^4}{v} \log \frac{(3v^2 - 3v^3 + v^4)}{1 - (1-v)^4} dv \\ &= 2.6314\mu, \end{aligned}$$

$$SCE(X_{1:n}, X_{n:n}) \mu \int_0^\infty \frac{1 - (1-v)^4 - v^4}{v} \log \frac{1 - (1-v)^4}{v^4} dv = 10.1016\mu,$$

$$DSM(T_{13}) = \frac{1.1115\mu - 2.6314\mu}{10.1016\mu} = -0.1505.$$

$$SCE(T_{17}, X_{1:n}) = \mu \int_0^\infty \frac{2v^2 - 2v^4}{v} \log \frac{2v^2 - v^4}{v^4} dv = 1.0000\mu,$$

$$SCE(T_{17}, X_{n:n}) \mu \int_0^\infty \frac{2v^2 - v^4 - 1 + (1-v)^4}{v} \log \frac{2v^2 - v^4}{1 - (1-v)^4} dv = 2.9373\mu,$$

$$DSM(T_{17}) = \frac{1.000\mu - 2.9373\mu}{10.1016\mu} = -0.1917.$$

Con los cálculos realizados resulta que $T_{17} \leq_{DSM} T_{13}$, así que el sistema T_{13} es más cercano a la distribución de un sistema en paralelo y por tanto preferible al sistema T_{17} .

En la Tabla 4.3.1 se recogen los cálculos de DSM para todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y que siguen una distribución exponencial. Los resultados de esta tabla elaborada por los autores originales sirve como verificación de que el Ejemplo 4.3.1 ha sido realizado de manera correcta ya que el resultado para el sistema 17, que es el que he escogido para realizar los ejemplos, es prácticamente idéntico al que he obtenido.

I	a	$DSM(T)$
1	(1)	
2	(0,1)	-1.0000
3	(2,-1)	1.0000
4	(0,0,1)	-1.0000
5	(0,2,-1)	-0.3333
6	(0,3,-2)	-0.1807
7	(1,1,-1)	0.3079
8	(3,-3,1)	1.0000
9	(0,0,0,1)	-1.0000
10	(0,0,2,-1)	-0.5923
11	(0,0,3,-2)	-0.5147
12	(0,1,1,-1)	-0.3256
13	(0,3,-3,1)	-0.1505
14	(0,0,4,-3)	-0.4522
15	(0,1,2-2)	-0.2840
16	(0,2,0,-1)	-0.1918
17	(0,2,0,-1)	-0.1918
18	(0,3,-2,0)	-0.1171
19	(0,3,-2,0)	-0.1171
20	(0,4,-4,1)	-0.0515
21	(0,4,-4,1)	-0.0515
22	(0,5,-6,2)	0.0084

23	(0,6,-8,3)	0.0645
24	(1,0,1,-1)	0.2042
25	(1,2,-3,1)	0.3011
26	(1,3,-5,2)	0.3476
27	(2,0,-2,1)	0.5763
28	(4,-6,4,-1)	1.0000

Tabla 4.3.1. Signatura minimal y DSM de todos los sistemas de orden 4 con componentes i.i.d. y distribución exponencial. Fuente: Toomaj, Sunoj y Navarro [17].

Para concluir la sección se enuncia un teorema que relaciona el orden estocástico de las signaturas de un sistema con el orden *DMS* de las vidas útiles de dos sistemas coherentes.

Teorema 4.3. Sean T_1 y T_2 las vidas útiles de dos sistemas coherentes con signaturas s_1 y s_2 con componentes i.i.d. (o intercambiables) y función de distribución común F (con cópula común C), entonces si se cumple $s_1 \leq_{st} s_2$ se cumple que $T_1 \leq_{DSM} T_2$.

Demostración. Si se cumple que $s_1 \leq_{st} s_2$ entonces $X_{1:n} \leq_{st} T_1 \leq_{st} T_2 \leq_{st} X_{n:n}$ por el Teorema 2.1 de Navarro et al. [11]. Debido a esta condición, a partir de la Proposición 4.3.1 se tiene que

$$SCE(T_1, X_{1:n}) \leq SCE(T_2, X_{1:n}),$$

$$SCE(T_1, X_{n:n}) \geq SCE(T_2, X_{n:n}),$$

de donde se deduce el resultado deseado debido a que

$$DSM(T_1) = \frac{SCE(T_1, X_{1:n}) - SCE(T_1, X_{n:n})}{SCE(X_{1:n}, X_{n:n})} \leq \frac{SCE(T_2, X_{1:n}) - SCE(T_2, X_{n:n})}{SCE(X_{1:n}, X_{n:n})} = DSM(T_2).$$

Bibliografía

- [1] Asadi, M., Ebrahimi, N., Soofi, E.S. y Zarezadeh, S. (2014). New maximum entropy methods for modeling lifetime distribution. *Naval Research Logistics* 61, 427-434.
- [2] Asadi, M. y Zohrevand, Y. (2007). On the dynamic cumulative residual entropy. *Journal of Statistical Planning and Inference* 137, 1931-1941.
- [3] Baratpour, S. y Rad, A.H. (2012). Testing goodness of fit for exponential distribution base on cumulative residual entropy. *Communications in Statistics Theory and Methods* 41, 1387-1396.
- [4] Boland, P. (2001). Signatures of indirect majority systems. *Journal of Applied Probability* 38, 597-603.
- [5] Dai, S. y Wang, M. (1992). Reliability analysis in engineering applications. *John Wiley & Sons Inc.*
- [6] Muruzabal, J.J. (2014). Cálculo de probabilidades y teoría de variable aleatoria. *Garceta Grupo Editorial.*
- [7] Navarro, J. (2016). Stochastics comparisons of generalized mixtures and coherent systems. *TEST* 25, 150-169.
- [8] Navarro, J. y Del Águila, Y. (2017). Stochastic comparisons of distorted distributions, coherent systems and mixtures with ordered components. *Metrika* 80, 627-64.
- [9] Navarro, J., Del Águila, Y., Sordo, M.A. y Suárez-Llorens, A. (2016). Preservation of stochastic orders under the formation of generalized distorted distributions. Applications to coherent systems. *Methodology and Computing in Applied Probability* 18, 529-545.
- [10] Navarro, J., Ruiz, J.M. y Sandoval, C.J. (2008). Properties of systems with exchangeable Pareto components. *Statistical Papers* 48, 177-190.
- [11] Navarro, J., Samaniego, F.J., Balakrishnan, N. y Bhattacharya, D. (2008). On the application and extension of system signatures to problems in engineering reliability. *Naval Research Logistics* 55, 313-327.
- [12] Nelsen, R. (2007). An introduction to copulas. Springer Series in Statistics. *Springer.*

- [13] Rausand, M. y Hoyland, (2004). A system reliability theory models. Statistical methods and applications. *A John Wiley & Sons Inc.*
- [14] Samaniego, F.J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems. *IEEE Transactions on Reliability* 34, 69-72.
- [15] Samaniego, F.J. (2007). System Signatures and their applications in engineering reliability. *International Series in Operations Research & Management Science* 110, Springer.
- [16] Shannon, E. y Claude, A. (1948). Mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal* 27, 379-423.
- [17] Toomaj, A., Sunoj, S.M. y Navarro, J. (2017). Some properties of the cumulative residual entropy of coherent and mixed systems. *Journal of Applied Probability* 54, 1-15.
- [18] Rao, M., Chen, Y., Vermuri, B. C., y Wang, F. (2004). Cumulative residual entropy: a new measure of information. *IEEE Transactions on Information Theory* 50, 1220-1228.
- [19] Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *Astin Bulletin* 26, 71-92.
- [20] Yaari, M.E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica* 55, 95-115.
- [21] Zoroa, P. y Zoroa, N. (2008). Elementos de probabilidades. *Diego Marín Librero.*

Apéndice

En este apéndice se adjunta el código en R empleado para la creación de las gráficas y cálculos incorporados a lo largo de la memoria.

Gráficas de la sección 1.2.

1. Figura 1: `curve(dnorm(x, mean = 0, sd=1), from=-3, to=3, main = "Función de densidad normal", ylab="f(x)", col=4)`
2. Figura 2: `curve(dexp(x, rate =1), from=0, to=3, main = "Función de densidad exponencial", ylab="f(x)", col=4)`
3. Figura 3: `curve(dWEI(x, mu =1, sigma=2), from=0, to=2.5, main = "Función de densidad exponencial", ylab="f(x)", col=4)`

Gráficas de la sección 3.1

1. Figura 7: `curve(gamma(1+1/x)/x, from=1, to=30, col="red", type="l", ylab="", xlab =expression (alpha))`
`curve(sqrt(gamma(1+2/x) - (gamma(1+1/x))^2), from=1, to=30, col="blue", type="l", ylab="", xlab = "alpha", add=TRUE)`
`legend(x ="topright", legend = c("Entropía residual acumulada", "Desviación típica"), fill = c("red", "blue"))`

Integrales de la sección 4.2.

Ejemplo 4.2.1.

```
integrate(function(x) (3*exp(-2*x)-2*exp(-3*x))*log( (3*exp(-2*x)-2*exp(-3*x))/(3*exp(-x)-3*exp(-2*x)+exp(-3*x))), lower = 0, upper = inf)
```

```
integrate(function(x) 3*exp(-2*x)-2*exp(-3*x), lower = 0, upper = Inf)
```

```
integrate(function(x) 3*exp(-x)-3*exp(-2*x)+exp(-3*x), lower = 0, upper = Inf)
```

```
integrate(function(x) (3*exp(-x)-3*exp(-2*x)+exp(-3*x)) *log( (3*exp(-x)-3*exp(-2*x)+exp(-3*x)) / (3*exp(-2*x)-2*exp(-3*x))), lower = 0, upper = inf)
```

```

integrate(function(x) exp(-3*x), lower = 0, upper = Inf)

integrate(function(x) 3*exp(-2*x)-2*exp(-3*x), lower = 0, upper
= Inf)

integrate(function(x) (3*exp(-2*x)-2*exp(-3*x))*log( (3*exp(-
2*x)-2*exp(-3*x) )/(exp(-3*x) )), lower = 0, upper = inf)

integrate(function(x) (3*exp(-x)-3*exp(-2*x)+exp(-3*x)) *log(
(3*exp(-x)-3*exp(-2*x)+exp(-3*x)) /(exp(-3*x))), lower = 0,
upper = inf)

integrate(function(x) 3*exp(-2*x), lower = 0, upper = Inf)

integrate(function(x) 2*exp(-x), lower = 0, upper = Inf)

integrate(function(x) (2*exp(-x))*log( (2*exp(-x)) /(3*exp(-
2*x))), lower = 0, upper = inf)

```

Integrales de la sección 4.3.

Ejemplo 4.3.1.

```

integrate( function(x) ((1-(1-x)^4-x^4)/x)*log( (1-(1-x)^4)/x^4
), lower=0, upper=1)

integrate( function(x) ((3*x^2-3*x^3)/x)*log((3*x^2-3*x^3+x^4
)/x^4), lower=0, upper=1)

integrate( function(x) ((3*x^2-3*x^3+x^4-1+(1-
x)^4)/x)*log((3*x^2-3*x^3+x^4)/(1-(1-x)^4) ), lower=0, upper=1)

integrate( function(x) ((2*x^2-2*x^4)/x)*log((2*x^2-x^4)/x^4),
lower=0, upper=1)

integrate( function(x) ((2*x^2-x^4-1+(1-x)^4)/x)*log((2*x^2-x^4
)/(1-(1-x)^4)), lower=0, upper=1)

```