UNIVERSIDAD DE
MURCIA

FACULTAD DE
MATEMÁTICAS

Teoría descriptiva en análisis funcional

Máster Universitario en Matemática Avanzada

Autor: Esteban Martínez Vañó

Tutores: Antonio Avilés López y Abraham Rueda Zoca

Introducción

La teoría descriptiva de conjuntos es una rama relativamente nueva de las matemáticas que nace a comienzos del siglo XX asociada a matemáticos tan relevantes como Baire, Borel o Lebesgue.

Como su nombre indica, esta teoría consiste en el estudio de cierto tipo de conjuntos, pero se diferencia de la teoría de conjuntos clásica en dos importantes matices. El primero de ellos es que los objetos a estudiar tendrán cierta estructura, concretamente se estudian subconjuntos de ciertos espacios topológicos con muy buenas propiedades conocidos como espacios polacos. La segunda diferencia, y es la que le da el sobrenombre de “descriptiva”, es que estos subconjuntos no serán arbitrarios, sino que se *describen* a partir de conjuntos más sencillos (por ejemplo, los abiertos del espacio topológico) y ciertas operaciones conjuntistas básicas.

Desde su nacimiento importantes matemáticos y lógicos tales como Lusin, Alexandroff, Sierpiński, Tarski o Gödel, se interesaron por esta teoría en alza e hicieron importantes aportaciones a ella, de tal modo que para la segunda mitad de siglo ya era una teoría consolidada y con nombre propio. Más aún, desde los años 50 comenzaron a surgir numerosas aplicaciones, demostrando no solo su fuerza como una teoría matemática en si misma, sino por su aplicación en áreas tan diversas como teoría de la probabilidad, estadística, análisis funcional, economía, programación dinámica o teoría de representación de grupos.

Una de sus aplicaciones al análisis funcional es la clasificación y el estudio de complejidad de familias y estructuras entre espacios de Banach separables, que serán los temas que se desarrollarán en el texto.

Los primeros estudios en esta línea se remontan a la tesis de Bossard de 1994 [8], donde considera un espacio de Banach separable Z universalmente isométrico[1], y plantea codificar cada espacio de Banach separable como un subespacio cerrado de Z.

Esta familia de todos los subespacios cerrados de Z, que denotaremos por $SB(Z)$, admite una topología polaca a través de la conocida estructura de Effros-Borel. Esto nos permite ver cada espacio de Banach separable como un punto en un espacio polaco, y utilizar herramientas de la teoría descriptiva de conjuntos para resolver problemas de clasificación y complejidad en espacios de Banach.

Aunque los trabajos de Bossard arrojan luz sobre numerosas cuestiones, resulta que no hay una forma canónica de dotar a $SB(Z)$ de una topología polaca. Por tanto, las herramientas y resultados que desarrolla permiten discernir si ciertas familias y estructuras entre espacios de Banach pertenecen a dos grandes tipos de conjuntos dentro de la teoría descriptiva (conjuntos de Borel y analíticos), proveyendo ya de una valiosa información

[1] Es decir, tal que dado X un espacio de Banach separable, existe una isometría lineal $J : X \longrightarrow Z$.

respecto a la complejidad de las mismas, pero no permiten dar un mayor detalle de clasificación que sí existe dentro de esta teoría de conjuntos.

Con estas ideas en mente, Godefroy y Saint-Raymond dieron en su artículo de 2018 [15] con una forma de extender las ideas de Bossard para poder abordar estos problemas. Consideran cierta familia de topologías polacas sobre $SB(Z)$ que denominan *admisibles*, mediante las cuales todos los resultados desarrollados con las ideas de Bossard siguen siendo válidos, pero con la cualidad de ser muy parecidas entre sí, lo que si permite estudiar los detalles que en los trabajos anteriores no era posible.

Inspirados por estas ideas de Godefroy y Saint-Raymond, en 2019 los matemáticos checos Cúth, Doležal, Doucha y Kurka desarrollaron en [12] otra codificación en apariencia muy distinta a la anterior, pues no utiliza un espacio universal sino que codifica los espacios de Banach separables como pseudonormas en ciertos espacios de sucesiones.

A pesar de la pérdida de intuición en la codificación, los autores prueban que sus nuevos métodos arrojan resultados muy similares a la de Godefroy y Saint-Raymond y además, demuestran una gran cantidad de resultados sobre la complejidad de numerosas familias y estructuras de espacios de Banach separables, probando ser una codificación realmente útil en la práctica.

Este trabajo tendrá pues un doble objetivo. Por una parte, pretende ser una introducción a los aspectos más básicos de la teoría descriptiva de conjuntos, mientras que por otra, busca mostrar las aplicaciones de esta estudiando las codificaciones para los espacios de Banach separables descritas anteriormente.

El texto se ha estructurado en cuatro capítulos, procurando que al menos cualquier estudiante finalizando un grado en matemáticas sea capaz de leerlo cómodamente. En general, se pueden distinguir dos bloques principales en el texto. Los dos primeros capítulos sientan las bases en topología, análisis funcional y teoría descriptiva de conjuntos, necesarios para la comprensión del texto; mientras que los dos últimos explican en detalle las codificaciones de los espacios de Banach separables planteadas en [15] y [12], la relación entre ambas y ciertos ejemplos prácticos de clasificación de espacios de Banach. Además, al final del trabajo se incluyen numerosos anexos con información relevante y complementaria para el texto, con el fin de conseguir un trabajo autocontenido y completo, pero sin sobrecargar las secciones importantes.

El Capítulo 1 se titula *Espacios metrizables y normados*, y en él se introducen conceptos básicos sobre estos dos temas.

En la Sección 1.1 se trata con espacios metrizables, introduciendo el concepto de compleción, cierta caracterización para subespacios completamente metrizables y recordando las propiedades más importantes de la separabilidad en espacios metrizables.

La Sección 1.2 se centra en los espacios normados, en particular en la compleción de estos. Por un lado, se enuncian y demuestran varios resultados que permiten pasar de un espacio pseudonormado a un espacio de Banach, preservando en medida de lo posible la estructura original. Por otra parte, el final de la sección se dedica a introducir algunas definiciones y lemas sobre densidad y representabilidad finita en espacios de Banach que serán necesarios para el Capítulo 3.

El Capítulo 2 se titula *Teoría descriptiva de conjuntos*, y pretende ser una introducción lo más autocontenida posible a esta teoría.

La Sección 2.1 introduce el concepto de espacio polaco, que no es más que un espacio completamente metrizable y separable, y se subdivide a su vez en dos subsecciones.

En la primera de ellas se dan resultados generales y de universalidad sobre este tipo de espacios, mientras que en la segunda se estudia el espacio de Baire y se introducen los esquemas de Suslin que serán necesarios en la Sección 2.3.

La Sección 2.2 es la más importante de cara a la segunda parte del texto pues se introduce la jerarquía de Borel en un espacio metrizable, una clasificación de los conjuntos que pueden obtenerse a partir de concatenar las operaciones de unión e intersección de abiertos y cerrados. Esta clasificación es precisamente la que permitirá distinguir distintas clases de espacios de Banach en función de la "complejidad" de los conceptos que las definen.

La sección se divide a su vez en tres subsecciones donde se estudian respectivamente las propiedades básicas de la jerarquía; las aplicaciones que, en cierto modo, la preservan entre espacios metrizables distintos; y por último, se estudian ciertas propiedades de los espacios polacos que nos muestran la gran flexibilidad que tiene trabajar con ellos.

En la Sección 2.3 se estudian los conjuntos analíticos. Se parte de una sencilla definición que muestra que, esencialmente, son las imágenes continuas de los conjuntos de Borel, y se dan varias caracterizaciones hasta llegar a la definición original planteada por Suslin. La sección concluye con el teorema de separación de Lusin, y como corolario de este se prueba un importante teorema de Suslin que caracteriza los conjuntos de Borel en función de los analíticos.

La última sección del capítulo, la Sección 2.4, trata sobre los espacios de Borel estándar que son el nexo de unión entre la estructura medible y topológica de un espacio medible. En particular, por tratarse de un ejemplo canónico y relevante para el Capítulo 3, se estudia con más detalle la estructura de Effros-Borel.

En el Capítulo 3, titulado *Codificaciones de los espacios de Banach separables*, se ponen en práctica los conocimientos de teoría descriptiva de conjuntos y se aplican al análisis funcional, estudiándose dos posibles codificaciones para los espacios de Banach separables así como la relación entre ambas.

Concretamente, en la Sección 3.1 se estudia la codificación de Godefroy y Saint-Raymond descrita en [15], la cual consiste en considerar un espacio de Banach separable universalmente isométrico y codificar los espacios de Banach separables como sus subespacios cerrados.

La Sección 3.2 se divide en cuatros subsecciones y se estudia la codificación propuesta por Cúth, Doležal, Doucha y Kurka en [12]. En la primera subsección se presenta su codificación, la cual consiste en codificar los espacios de Banach separables mediante pseudonormas sobre V, el espacio de sucesiones en $\mathbb{Q}$ de soporte finito. Las dos siguientes subsecciones presentan propiedades importantes sobre estos espacios de pseudonormas, introducen ciertos subespacios importantes y relacionan la representabilidad finita de espacios de Banach con ciertos subconjuntos cerrados de pseudonormas. Por último, en la cuarta subsección se presenta un ejemplo de aplicación para estos espacios de pseudonormas, demostrando que la aplicación que asigna a cada espacio metrizable y compacto K, su espacio de funciones reales continuas $\mathcal{C}(K)$, es continua.

La última sección del capítulo, la Sección 3.3, es la más técnica del texto y en ella se muestra como las dos codificaciones presentadas en las secciones anteriores son esencialmente equivalentes. Es decir, la complejidad que establece una de ellas para cualquier clase de espacios de Banach separables es prácticamente la misma que la que establece la otra. Como se ha dicho, esta sección es la más exigente del trabajo a nivel técnico e incluye demostraciones bastante largas. Por tanto, se ha procurado esquematizarlas de modo que se pueda hacer una lectura cómoda de ellas tanto si únicamente se desea entender las ideas principales, como si se busca profundizar en los detalles. Los detalles que requieren explicaciones más largas y que podrían distraer de la idea general de estas demostraciones se han relegado al Anexo F.

Por último, en el Capítulo 4, de título *Ejemplos: El espacio* ℓ_2, se presentan algunos ejemplos prácticos utilizando la codificación por pseudonormas.

En la Sección 4.1 se estudia en detalle las clases de isometría e isomorfía del espacio de Hilbert separable ℓ_2, obteniendo dos caracterizaciones de dicho espacio. En concreto, se muestra que ℓ_2 se caracteriza por ser el único espacio de Banach separable con clase de isometría cerrada y clase de isomorfía F_σ en la codificación por pseudonormas.

La Sección 4.2 concluye el texto exponiendo la clasificación, dentro de los espacios de pseudonormas, de las familias más conocidas de espacios de Banach separables.

Tras el último capítulo, el texto concluye con una serie de anexos donde se incluye material adicional que ayuda a la compresión del texto, así como ciertas demostraciones necesarias para su desarrollo pero que no son lo suficiente relevantes para incluirlas en el texto principal.

Como se observa, el texto se sitúa en la frontera entre dos grandes ramas de las matemáticas, el análisis funcional y la teoría descriptiva de conjuntos. Por tanto, es necesario introducir una gran cantidad de conceptos y resultados tanto de cada rama como de la conexión entre ambas, resultando en un texto de considerable longitud.

Con esto en mente, se ha puesto especial cuidado tanto en esta introducción como en el desarrollo del trabajo en guiar al lector de la mejor forma posible. De este modo, aquellos lectores con conocimientos más avanzados en alguna de las partes, puedan saltarse los capítulos correspondientes a estas y leer el resto del texto cómodamente; mientras que al mismo tiempo, el lector no especializado debería ser capaz de entender todos los conceptos y demostraciones sin necesidad de consultar fuentes externas.

Así, la aportación principal del autor ha sido:

Por una parte, seleccionar y recopilar información de diversos libros y artículos especializados, y exponerlos juntos de forma coherente y conexa para dar una base teórica solida con la que poder abordar los artículos más avanzados [15] y [12].

Y, por otra parte, entender las demostraciones de los artículos anteriores y demostrar aquellos detalles omitidos en las mismas o dejados a cargo del lector, con el fin de explicarlas de forma muy detallada y dar una visión general y profunda de ambos artículos.

Cabe destacar, que gracias a este estudio detallado de los artículos se detectó un error en la demostración de [12, Thm. 4.13], el cual tras contactar con las autores y gracias a sus respuestas queda subsanado en este trabajo.

También, en el Lema 3.3.9 (Lemma 2.18 en [12]) se definen ciertas aplicaciones β_k y se relega al lector a demostrar el Lema F.3 de los anexos, donde se prueba que dichas aplicaciones están bien definidas y son continuas. La razón de poner este lema en los anexos no es caprichosa, si no más bien forzosa, pues su demostración es tan larga y técnica que llevaría al lector a perder completamente el hilo de la demostración principal.

Pues bien, la demostración de este Lema F.3 es cosecha propia del autor (con ayuda de sus muy buenos tutores), pues como hemos dicho es uno de esos detalles dejados a cargo del lector en [12].

Al observar la longitud y dificultad técnica de los argumentos, consideré que sería buena idea ponerse en contacto con alguno de los autores del artículo y preguntarles por dicha demostración, con el fin de saber si los argumentos que ellos tenían en mente eran más sencillos. Muy amablemente, obtuve una respuesta por parte de Doucha el cual, aunque no había escrito dicha parte del artículo, me exponía algunas ideas generales que corroboraban que efectivamente, la demostración escrita en detalle era tan larga como sospechábamos.

Estos hechos ponen de manifiesto el esfuerzo realizado a la hora de demostrar detalles no incluidos en los artículos trabajados y en general, en el especial cuidado en que el trabajo sea completo y riguroso.

Índice

1. Espacios metrizables y normados **1**

1.1. Espacios metrizables 1

1.2. Espacios normados 9

2. Teoría descriptiva de conjuntos **19**

2.1. Espacios polacos 20

2.1.1. Conceptos generales 20

2.1.2. El espacio de Baire 30

2.2. La jerarquía de Borel 38

2.2.1. Definición y propiedades básicas 39

2.2.2. Aplicaciones medibles 47

2.2.3. Cambios en la topología polaca 50

2.3. Conjuntos analíticos 55

2.4. Espacios de Borel estándar 70

3. Codificaciones de los espacios de Banach separables **75**

3.1. Codificación de Godefroy y Saint-Raymond 76

3.1.1. Topologías admisibles 77

3.1.2. Topología de Wijsman 89

3.2. Codificación de Cúth, Doležal, Doucha y Kurka 97

3.2.1. Codificación mediante pseudonormas 97

3.2.2. Los espacios $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$ 101

3.2.3. Relación entre $\mathcal{P}$ y la representabilidad finita 111

3.2.4. Un ejemplo de uso de las topologías anteriores 116

3.3. Comparación entre las codificaciones 119

4. Ejemplos: El espacio ℓ_2 **157**

4.1. Espacios de Hilbert separables de dimensión infinita 157

4.2. Otros ejemplos relevantes 173

Anexos **181**
A. Axiomas de separación en espacios topológicos . . . 181
B. Resultados en espacios métricos y normados . . . 183
C. La topología de Vietoris . . . 199
D. Teoremas de inducción y recursión transfinita . . . 208
E. Resultados sobre bases en espacios topológicos . . . 213
F. Detalles de algunas demostraciones . . . 215

Índice alfabético **227**

Bibliografía **229**

Capítulo 1

Espacios metrizables y normados

Dedicaremos este primer capítulo a recordar los conceptos más básicos sobre espacios métricos y normados, así como ciertos resultados y definiciones que necesitaremos a lo largo del texto.

El capítulo no pretende ser una exposición detallada sobre los temas que abarca, pero sí se pondrá énfasis en demostrar aquellos resultados que se utilicen con frecuencia en el texto o tengan una relevancia mayor de cara a otros conceptos que se desarrollen más adelante.

Más información sobre los temas tratados en el capítulo pueden encontrarse en cualquier buen texto de topología y análisis funcional. En particular, destacamos para la Sección 1.1 los libros de topología general [27] o [37], pues enfocan los temas desde el punto de vista del análisis matemático; o en castellano, [23]. Respecto a la Sección 1.2, destacamos por su completitud [11] y [34] o, para una visión más resumida y desde un contexto más amplio del análisis real, también se puede consultar [14, Chps. 5, 6].

1.1. Espacios metrizables

Comencemos recordando los conceptos de pseudométrica y métrica.

Definición 1.1.1. *Si X es un conjunto no vacío, una aplicación $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es una* ***pseudométrica*** *en X si cumple las siguientes condiciones:*

(i) $\rho(x,x) = 0$, $\forall x \in X$;

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, $\forall x, y \in X$;

(iii) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$, $\forall x, y, z \in X$.

Si además la aplicación satisface la siguiente condición:

(iv) *Dados $x, y \in X$, si $\rho(x,y) = 0$ entonces $x = y$;*

se dice que ρ es una ***métrica*** *en X.*

El par (X, ρ) se denominará espacio pseudométrico, respectivamente métrico si se cumple la última condición.

Observemos que las condiciones en la definición implican que una pseudométrica ρ en un conjunto X será siempre una función positiva, pues dados $x, y \in X$

$$\rho(x,y) = \frac{1}{2}(\rho(x,y) + \rho(y,x)) \geq \frac{1}{2}\rho(x,x) = 0.$$

En un espacio métrico se puede definir el concepto de conjunto abierto de forma que $A \subset X$ es abierto, si para cada $x \in A$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$.
Es un resultado básico comprobar que el conjunto de todos los abiertos en un espacio métrico constituye una topología, la cual diremos que es inducida por la métrica.

Otro concepto también muy importante es el de compleción de un espacio métrico.

Definición 1.1.2. *Si (X,ρ) un espacio métrico, decimos que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X es de* ***Cauchy*** *en (X,ρ) si dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq n_0$ se cumple que*

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Si toda sucesión de Cauchy en (X,ρ) es convergente se dice que el espacio es ***completo****.*

Las definiciones anteriores motivan la siguiente definición que usaremos muy a menudo durante el texto.

Definición 1.1.3. *Si (X,τ) es un espacio topológico, diremos que X es* ***metrizable*** *si existe una métrica ρ sobre X tal que la topología inducida por ρ es justamente τ. Diremos en este caso que ρ es una métrica compatible para el espacio topológico X.*

Más aún, diremos que X es ***completamente metrizable*** *si ρ es una métrica completa, y en este caso se dirá que ρ es una métrica completamente compatible para X.*

Teniendo en cuenta la definición anterior, diremos que dos métricas ρ, ρ' sobre un conjunto X son **equivalentes** si la topología inducida por ambas es la misma.

Observemos que el concepto de convergencia es un concepto puramente topológico, por lo que si es X un espacio metrizable y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a cierto $x \in X$, para cualquier métrica ρ compatible con X, se cumplirá que $\rho(x_n, x) \to 0$.
En contra, el concepto de sucesión de Cauchy es puramente métrico y por tanto para métricas distintas, aunque equivalentes, una misma sucesión puede ser de Cauchy para una de ellas y no para la otra[1]. Ahora bien, si ambas métricas son completas, entonces las sucesiones de Cauchy coinciden con las sucesiones convergentes, y por ser equivalentes y lo mencionado para la convergencia, tendremos que en este caso ambas métricas si tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

[1] El ejemplo clásico consiste en considerar en $\mathbb{R}$ la métrica usual $\rho(x,y) = |x - y|$ y la métrica dada por $\rho'(x,y) = |\text{atan}(x) - \text{atan}(y)|$.

Puesto que $\text{atan} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ es un homeomorfismo (con la topología usual de $\mathbb{R}$), la definición de continuidad para espacios métricos y la propia definición de ρ' nos dan que ambas métricas son equivalentes. Sin embargo, la sucesión $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $(\mathbb{R}, \rho')$ (pues la función arcotangente converge a un valor finito cuando x tiende a infinito), pero claramente no es de Cauchy en $(\mathbb{R}, \rho)$.

La compleción es pues una propiedad muy deseable de los espacios métricos pues permite la identificación biunívoca entre un concepto puramente métrico como son las sucesiones de Cauchy, con un concepto topológico como es la convergencia de sucesiones.

Así, si un espacio métrico (X, ρ) no es completo, sería deseable encontrar algún espacio métrico completo $(\hat{X}, \hat{\rho})$ que en cierto modo extienda a X y de modo que la distancia entre los puntos de X, visto dentro de $\hat{X}$, se preserve.

Esta noción es la que se conoce como compleción de un espacio métrico y queda recogida en la siguiente definición.

Definición 1.1.4. *Si (X, ρ) un espacio métrico, una **compleción** de X es un par*

$$\left[(\hat{X}, \hat{\rho}), j : (X, \rho) \longrightarrow (\hat{X}, \hat{\rho})\right]$$

donde $\hat{X}$ es un espacio métrico completo y j es una isometría[2] *de modo que $j(X)$ es denso en $\hat{X}$.*

Como enuncia el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [37, Thm. 24.4], todo espacio métrico admite una compleción y, en cierto sentido, esta es única.

Teorema 1.1.1. *Todo espacio métrico (X, ρ) admite una compleción y además si $[\hat{X}, j]$ y $[\tilde{X}, h]$ son dos compleciones de X se cumple que $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ son isométricamente isomorfos.*

Una idea que se debe tener clara es que aunque la completitud es una propiedad de los espacios métricos, ser completamente metrizable es una propiedad topológica y por tanto, es preservada por homeomorfismos. Es decir, pueden existir espacios métricos no completos que sean completamente metrizables al verlos como espacios topológicos.

Un resultado siguiendo esta linea de la metrizabilidad y la completitud es el siguiente teorema, que resulta sumamente útil a la hora de construir nuevos espacios (completamente) metrizables a partir de otros ya conocidos.

Teorema 1.1.2. *Si $\{X_m\}_{m \in M}$ es una familia a lo sumo numerable de espacios (completamente) metrizables, entonces su producto cartesiano $X = \prod X_m$ con la topología producto es (completamente) metrizable.*

La demostración para el caso finito consiste simplemente en observar que si es $M = \{m_1, \cdots, m_n\}$ y son $\rho_1, \cdots, \rho_n$ métricas (completamente) compatibles para los espacios $X_{m_1}, \cdots, X_{m_n}$ respectivamente, entonces la aplicación $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x, y) = \max\{\rho_1(x_1, y_1), \cdots, \rho_n(x_n, y_n)\}$$

es una métrica (completamente) compatible con X.

Por otra parte, la demostración para el caso infinito puede hallarse en [37, Thm. 22.3, Thm. 24.11], aunque si cabe destacar las ideas principales de la prueba.

[2] Recordemos que una isometría $f : (X, \rho) \longrightarrow (Y, \rho')$ es una aplicación entre espacios métricos que preserva la métrica, es decir, tal que dados $x, y \in X$ se tiene que $\rho'(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$.

Si es $M = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ y ρ_n una métrica (completamente) compatible con X_{m_n} para cada $n \in \mathbb{N}$, las ideas principales en la demostración son:

- Comprobar que dados $x, y \in X_{m_n}$,

$$\rho_n'(x, y) = \min\{1, \rho_n(x, y)\}$$

  es una métrica (completamente) compatible con X_{m_n} acotada por 1.

- Comprobar que la aplicación $\rho : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho_n'(x_n, y_n)}{2^n}$$

  donde $x_n = x(m_n), y_n = y(m_n)$, es una métrica (completamente) compatible en X que induce la topología producto.

Nuestro siguiente objetivo será caracterizar los subespacios de espacios completamente metrizables que también son completamente metrizables.

Para ello, precisamos en primer lugar de la caracterización en el caso de espacios métricos y de una serie de resultados técnicos que demostramos a continuación.

Proposición 1.1.3. *Si (X, ρ) es un espacio métrico completo e Y un subespacio de X, entonces Y con la métrica restringida es completo si, y solo si, Y es cerrado.*

Demostración:

Supongamos en primer lugar que Y es cerrado y consideremos ρ_Y la restricción de la métrica a Y.

Dada pues $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en (Y, ρ_Y), claramente es también una sucesión de Cauchy en (X, ρ) y como ρ es una métrica completa, tenemos que existe $x \in X$ tal que $y_n \longrightarrow x$.

Ahora bien, al ser Y cerrado y cada $y_n \in Y$ se tiene que $x \in Y$, luego $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en Y y efectivamente (Y, ρ_Y) es completo.

Recíprocamente si (Y, ρ_Y) es completo, entonces dada una sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en Y y convergente a cierto $y \in X$, tenemos que esta será de Cauchy en Y (por ser convergente) y de la completitud de Y, concluimos que converge a cierto punto de Y.

Puesto que X es un espacio métrico, en particular es Hausdorff, con lo que el límite de sucesiones es único y tenemos pues que $y \in Y$, probando pues que Y es cerrado. ■

Lema 1.1.4. *Sean $\{X_i\}_{i\in I}$, $\{Y_i\}_{i\in I}$ dos familias de espacios topológicos indexadas por un conjunto arbitrario I y de modo que X_i es homeomorfo a Y_i para cada $i \in I$. Entonces, sus productos cartesianos con la topología producto son homeomorfos.*

Demostración:

Sean $X = \prod X_i$, $Y = \prod Y_i$ y $f_i : X_i \longrightarrow Y_i$ homeomorfismos entre los correspondientes espacios para cada $i \in I$.

Definamos entonces $F : X \longrightarrow Y$ tal que

$$F(x)(i) = f_i(x(i)),$$

y veamos que es el homeomorfismo buscado.

En primer lugar, F es una biyección pues $G : Y \longrightarrow X$ dada por

$$G(y)(i) = f_i^{-1}(y(i))$$

es claramente su inversa.

Veamos ahora que F es continua.

Por la propiedad universal de la topología producto para ver su continuidad basta ver que $\pi_i^Y \circ F$ son continuas para cada $i \in I$, donde π_i^Y son las proyecciones i-ésimas en Y. Ahora bien, esto es claro pues $\pi_i^Y \circ F = f_i \circ \pi_i^X$, ya que dado $x \in X$

$$(\pi_i^Y \circ F)(x) = \pi_i^Y(F(x)) = F(x)(i) = f_i(x(i)) = f_i(\pi_i^X(x)) = (f_i \circ \pi_i^X)(x).$$

Luego con todo, F es continua y como de forma totalmente análoga se prueba la continuidad de G, concluimos que efectivamente es el homeomorfismo buscado. ■

Antes de enunciar los siguientes resultados que serán muy útiles cuando tratemos con espacios polacos, recordemos cierta notación que emplearemos de forma habitual a lo largo del trabajo.

Si es X un espacio topológico, diremos que un conjunto $Y \subset X$ es G_δ si es intersección numerable de conjuntos abiertos de X; y diremos que es F_σ si es unión numerable de conjuntos cerrados.

Teorema 1.1.5. *Si X es un espacio metrizable e $Y \subset X$ un G_δ, entonces Y es homeomorfo a un conjunto cerrado de $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

<u>Demostración:</u>

Si $Y = X$ entonces el teorema es claro pues este es homeomorfo al conjunto cerrado $X \times \{0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}\}$, luego supongamos que Y es un subconjunto propio de X.

Como Y es un G_δ distinto de X, tenemos que existe una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos propiamente contenidos en X tal que

$$Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus A_n).$$

Sean pues $F_n = X \setminus A_n$, que serán cerrados no vacíos en X, ρ una métrica compatible en X y consideremos la aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = \rho(x, F_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como la función distancia de un punto a un cerrado en un espacio metrizable es continua, tenemos que cada coordenada de f es continua y, por la propiedad universal de la topología producto, f es continua.

Ahora, como en virtud del Teorema 1.1.2 el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es metrizable, en particular es Hausdorff. Por tanto, al ser f continua el grafo de f es cerrado en $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Si denotamos por G el grafo de f, la aplicación $i : X \longrightarrow G$ dada por

$$i(x) = (x, f(x))$$

es continua, pues cada componente lo es.

Además, su inversa es simplemente $\pi : G \longrightarrow X$ la proyección en la primera componente, que es claramente continua, con lo que i es un homeomorfismo.

Observemos ahora que

$$i(Y) = G \cap \left(X \times (0, +\infty)^{\mathbb{N}}\right).$$

Efectivamente, si es $y \in Y$, entonces $y \notin F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, luego $f_n(y) = \rho(y, F_n) > 0$ y así, $i(y) = (y, f(y)) \in X \times (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$.

Recíprocamente, si es $(x, f(x)) \in G \cap \left(X \times (0, +\infty)^{\mathbb{N}}\right)$ entonces tenemos que

$$f_n(x) = \rho(x, F_n) > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, $x \notin F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y así $x \in Y$ cumpliendose que $(x, f(x)) = i(x) \in i(Y)$.

Con todo, al ser G cerrado en $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de lo anterior se deduce que $i(Y)$ es cerrado en $X \times (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$.

Por otra parte, observemos que, como $(0, +\infty)$ es claramente homeomorfo a $\mathbb{R}$, el Lema 1.1.4 nos garantiza que $X \times (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Por tanto, si es h un homeomorfismo entre $X \times (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$ y $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, tendremos que $h(i(Y))$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y homeomorfo a Y, con lo que finalizamos la prueba. ■

Enunciaremos a continuación el teorema de Lavrentieff cuya demostración puede encontrarse en [37, Thm. 24.9] o [26, Thm. 3.9] y, como consecuencia de este y los resultados anteriores, obtendremos ya el teorema de caracterización de subespacios completamente metrizables buscado.

Teorema 1.1.6. (Lavrentieff) *Si X e Y son espacios métricos completos, $A \subset X$, $B \subset Y$ y $h : A \longrightarrow B$ un homeomorfismo, entonces h puede extenderse a un homeomorfismo $h^* : A^* \longrightarrow B^*$ donde A^*, B^* son conjuntos G_δ en X e Y respectivamente y que cumplen que $A \subset A^* \subset \bar{A}$ y $B \subset B^* \subset \bar{B}$.*

Teorema 1.1.7. *Si X es un espacio metrizable e Y un subconjunto de X se cumplen:*

(i) *Si X es completamente metrizable e Y es un G_δ en X, entonces Y con la topología relativa es completamente metrizable.*

(ii) *Si Y es completamente metrizable con la topología relativa a X, entonces Y es un G_δ en X.*

Demostración:

Comencemos demostrando **(i)**.

Observemos que como $\mathbb{R}$ es completamente metrizable, por el Teorema 1.1.2 el espacio $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ también lo es y, por el mismo teorema, también lo será $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Ahora, por el teorema 1.1.5, Y es homeomorfo a un subconjunto cerrado F de $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el cual, por la Proposición 1.1.3, será completamente metrizable[3].

[3] Observemos que si ρ una métrica completamente compatible en $X \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, entonces ρ_F es una métrica compatible en F y, por la Proposición 1.1.3, (F, ρ_F) es un espacio métrico completo.

Por tanto, Y es homeomorfo a un espacio completamente metrizable y efectivamente es completamente metrizable.

Pasemos ahora a demostrar **(ii)**.

Sea ρ una métrica compatible en X, $[\hat{X}, j]$ una compleción de X y ρ' una métrica completamente compatible en Y.

Observemos en primer lugar que la aplicación $j : X \longrightarrow j(X)$ será un homeomorfismo por ser j una isometría, luego si denotamos por $Z = j(Y)$, tendremos que $f : Y \longrightarrow Z$ dada por $f = j|_Y$ será también un homeomorfismo.

Si consideramos entonces a Y como un subconjunto de (Y, ρ'), por el teorema de Lavrentieff podemos extender f a un homeomorfismo $f^* : Y^* \longrightarrow Z^*$ siendo Z^*, Y^* conjuntos G_δ en $\hat{X}$ e Y respectivamente, cumpliendo que $Z \subset Z^* \subset \bar{Z}$ e $Y \subset Y^* \subset \bar{Y}$.

Ahora, como $\bar{Y} = Y$ se tiene que $Y^* = Y$ y, al ser f^* una extensión de f, será $f^* = f$.

Por tanto, $Z^* = f^*(Y) = f(Y) = j(Y)$ y obtenemos que $j(Y)$ es G_δ en $\hat{X}$.

Con todo, existe una sucesión de abiertos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $\hat{X}$ tal que

$$j(Y) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

y así,

$$Y = j^{-1}(j(Y)) = j^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} j^{-1}(A_n).$$

Como por la continuidad de j cada $j^{-1}(A_n)$ es abierto en X, concluimos que efectivamente Y es un G_δ en X. ■

Todos los espacios que trabajaremos en el texto serán métricos y separables, por lo tanto dedicaremos el final de la sección a recordar el concepto de separabilidad y su relación con los espacios métricos.

Definición 1.1.5. *Se dice que un espacio topológico X es **separable** si contiene un subconjunto numerable y denso.*

La separabilidad es también una propiedad muy deseable pues en numerosas ocasiones resulta mucho más sencillo demostrar cierta propiedad en un subconjunto denso y luego extenderla al espacio total, con lo que si además el subconjunto denso es numerable, las demostraciones pueden acortarse enormemente.

En el caso de los espacios metrizables la separabilidad conlleva además una propiedad topológica muy buena tal como se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.8. *Un espacio metrizable es separable si, y solo si, tiene una base topológica numerable.*

Demostración:

En general cualquier espacio topológico X con base numerable $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ será separable[4].

[4] Destacamos que esta afirmación es equivalente al axioma de elección numerable en $\mathbb{R}$, como puede verse en [19, Thm. 4.54].

Efectivamente, basta tomar $D = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ siendo cada $u_n \in U_n$, y es claro que este conjunto es denso en X pues su intersección con cualquier abierto de la base dada es no vacía.

Para el recíproco, supongamos que X es un espacio metrizable, siendo ρ una métrica compatible, y D un subconjunto numerable y denso.

Veamos que

$$\mathcal{B} = \left\{ B_\rho\left(d, \frac{1}{n}\right) : d \in D, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base numerable de X.

La numerabilidad es clara por ser D y $\mathbb{N}$ numerables, y para ver que es base basta demostrar que dado U un abierto cualquiera de X y $x \in U$, existen cierto $d \in D$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $x \in B_\rho(d, 1/n) \subset U$.

Como U es abierto en X y $x \in U$, tenemos que existe cierto $\varepsilon > 0$ tal que $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. Consideremos pues un $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ y observemos que por la densidad de D existirá cierto $d \in D$ tal que $\rho(d, x) < 1/2n$.

Con todo

$$x \in B_\rho\left(d, \frac{1}{2n}\right) \subset B_\rho\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset B_\rho(x, \varepsilon) \subset U,$$

lo que concluye la demostración. ■

Otro importante resultado respecto a la separabilidad en espacios métricos que también emplearemos es el siguiente.

Teorema 1.1.9. *Si X es un espacio metrizable y compacto entonces X es separable.*

Demostración:

Sea ρ una métrica compatible en X, entonces por la compacidad de X para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que existe un conjunto finito de puntos de X, $X_n = \{x_1^n, \cdots, x_{k_n}^n\}$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{k_n} B\left(x_i^n, \frac{1}{n}\right) \tag{1.1}$$

Definiendo entonces

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

tenemos que es numerable y basta ver que es denso para probar la separabilidad de X.

Sin más, dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ se cumple por (1.1) que existe un $x_j^n \in X_n \subset D$ tal que

$$\rho(x, x_j^n) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Esto prueba que D es denso en X y que efectivamente el espacio es separable. ■

En general, la separabilidad no se comporta bien con la topología relativa a subconjuntos de un espacio, es decir, un espacio topológico X puede ser separable y un subconjunto $Y \subset X$ con la topología relativa no serlo.

Sin embargo, para el caso de espacios metrizables este no es el caso tal como recogen las siguientes proposiciones con las que finalizamos la sección.

Proposición 1.1.10. *Sea X un espacio metrizable e Y un subconjunto denso de X. Entonces, si Y con la topología relativa a X es separable se cumple que X es separable.*

Demostración:

Como Y es separable, existe D un subconjunto numerable y denso de Y y basta ver que $\mathrm{cl}_X(D) = X$ para concluir que efectivamente X es separable.

Si es ρ una métrica compatible en X, basta demostrar pues que dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe un $d \in D$ tal que $\rho(x, d) < \varepsilon$.

Ahora, por ser Y es denso en X, tenemos que existe un $y \in Y$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon/2$ y como D es denso en Y, existe $d \in D$ tal que $\rho(y, d) < \varepsilon/2$, luego

$$\rho(x, d) \leq \rho(x, y) + \rho(y, d) < \varepsilon,$$

y finalizamos la demostración. ∎

Proposición 1.1.11. *Si X un espacio metrizable y separable e Y un subconjunto de X, entonces Y con la topología relativa a X es también separable.*

Demostración:

Puesto que X es metrizable, por el Teorema 1.1.8 tendrá una base numerable $\mathcal{B}$.

Ahora, es claro que Y con la topología relativa es también metrizable, y que además

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base numerable de Y, luego aplicando nuevamente el Teorema 1.1.8, concluimos que Y es separable. ∎

1.2. Espacios normados

Tal como hemos hecho con los espacios métricos, comencemos por la definición de pseudonorma y norma.

Definición 1.2.1. *Si X es un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ con valor absoluto, una aplicación $\mu : X \longrightarrow \mathbb{K}$ se dice que es una **pseudonorma** en X si cumple las siguientes condiciones:*

(i) $\mu(\lambda x) = |\lambda|\, \mu(x)$, $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$;

(ii) $\mu(x + y) \leq \mu(x) + \mu(y)$, $\forall x, y \in X$.

Si además, la aplicación satisface la siguiente condición:

(iii) *Dado $x \in X$, si $\mu(x) = 0$ entonces $x = 0_X$;*

*se dice que μ es una **norma** en X.*

El par (X, μ) se denominará espacio pseudonormado, respectivamente normado si se cumple la última condición.

A lo largo del texto consideraremos que el cuerpo $\mathbb{K}$ de la definición es $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$. Además, cuando hablemos en general de un espacio normado X, siempre pensaremos que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y si no se especifica lo contrario denotaremos su norma por $\|\cdot\|$.

Observemos que tal como ocurría con las pseudométricas, las condiciones en la definición implican que una pseudonorma μ sobre un espacio vectorial X será siempre una función positiva, pues dado $x \in X$

$$\mu(x) = \frac{1}{2}(\mu(x) + \mu(-x)) \geq \frac{1}{2}\mu(0_X) = \frac{1}{2}\mu(0 \cdot x) = 0.$$

Todo espacio normado X tiene una estructura canónica como espacio métrico al considerar la métrica inducida por la norma

$$\rho(x, y) = |x - y| .$$

Esta métrica nos permite pues considerar sobre un espacio normado la estructura topológica inducida por la métrica. Por tanto, cuando hablemos sobre conceptos topológicos en un espacio normado, a no ser que se indique lo contrario, siempre será pensando en la topología inducida por esta métrica.

Con todo, el tipo de espacios normados que nos interesará principalmente en este trabajo son los **espacios de Banach**, es decir, los espacios normados completos siendo la completitud respecto a la métrica inducida por la norma.

Tal como ocurre en cualquier rama de las matemáticas solo hemos definido la mitad de la estructura sobre la que queremos trabajar, es decir, ya hemos definido los objetos a estudiar pero aún debemos definir los morfismos entre ellos. Puesto que estamos tratando con espacios vectoriales a los que hemos dotado de una estructura topológica, tiene sentido considerar como morfismos las aplicaciones lineales continuas las cuales en este caso admiten la siguiente caracterización.

Proposición 1.2.1. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, son equivalentes:*

(i) *T es continua.*

(ii) *T es continua en 0_X.*

(iii) *T es uniformemente continua.*

(iv) *Existe un $C > 0$ tal que para todo $x \in X$ se cumple que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$.*

(v) *$T(B_X)$ está acotada en Y, es decir, $\sup_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y < \infty$.*

La proposición anterior nos permite definir la **norma de una aplicación lineal** $T : X \longrightarrow Y$ de cualquiera de las siguientes formas equivalentes

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y = \sup_{x \in \mathring{B}_X} \|T(x)\|_Y = \sup_{x \in \mathbb{S}_X} \|T(x)\|_Y = \\ &= \inf \{C > 0 : \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X , \ \forall x \in X\} . \end{aligned}$$

Teniendo ya bien definidos y caracterizados los objetos y morfismos, el último paso antes de definir conceptos más complicados es discernir cuando consideraremos que dos espacios normados constituyen la misma estructura, que en nuestro caso admite de dos posibles definiciones.

Definición 1.2.2. *Si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son dos espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal, decimos que T es un **isomorfismo** si es biyectiva, continua y con inversa continua.*

*En caso de existir una aplicación de este tipo diremos que X e Y son **isomorfos**, lo que representaremos por $X \simeq Y$.*

*Por otra parte, diremos que T es una **isometría** si se verifica que*

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X \,, \ \forall x \in X.$$

*Si además T es sobreyectiva, diremos que es un **isomorfismo isométrico** y en este caso se dice que X e Y son **isométricamente isomorfos**, lo que denotaremos por $X \equiv Y$.*

Es muy sencillo ver que toda isometría lineal es inyectiva y continua, y que si además es sobreyectiva, entonces su inversa es también una isometría con lo que todo isomorfismo isométrico es un isomorfismo.

Observamos pues que si dos espacios son isomorfos, la linealidad y la continuidad del isomorfismo nos garantizan que la estructura vectorial y topológica se preservan. Además, es un ejercicio sencillo comprobar que también se preserva la completitud, por lo que dos espacios de Banach isomorfos son esencialmente la misma estructura desde el punto de vista vectorial y topológico. Si además precisamos conservar la estuctura normada, debemos exigir que los espacios sean isométricamente isomorfos, lo cual a efectos prácticos nos dice que los dos espacios son "idénticos".

Tal como ocurría con las métricas existe también el concepto de **normas equivalentes** el cual se define del mismo modo, es decir, dos normas sobre un espacio vectorial serán equivalentes si inducen la misma topología. Nuevamente, en el caso de espacios normados existe una caracterización muy útil que enunciamos a continuación.

Proposición 1.2.2. *Sea X un espacio vectorial real y $\|\cdot\|_1 \,, \|\cdot\|_2$ dos normas sobre X, son equivalentes:*

(i) *$\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes.*

(ii) *La aplicación identidad $I : (X, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ es un isomorfismo.*

(iii) *Existen constantes positivas α, β tales que*

$$\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2 \,, \ \forall x \in X.$$

Es un resultado muy conocido y que emplearemos a menudo el hecho de que para un espacio vectorial X de dimensión finita todas sus normas son equivalentes.

Más aún, esto permite probar dos hechos muy relevantes sobre los espacios normados de dimensión finita.

El primero de los resultados es que toda aplicación lineal de un espacio de dimensión finita en cualquier otro espacio normado es continua y el segundo que todos los espacios de dimensión finita n son isomorfos entre sí.

Estos dos hechos sobre los espacios de dimensión finita hacen que el análisis funcional se centre principalmente en el estudio de los espacios de dimensión infinita que es donde aparece una mayor variedad de espacios.

Para finalizar con las nociones básicas recordaremos brevemente el concepto de espacio dual y bidual.

Definición 1.2.3. *Si X es un espacio normado, se define su* ***espacio dual*** *que denotaremos por X^* como el espacio vectorial formado por todas las aplicaciones lineales y continuas de X en $\mathbb{R}$.*

Definiendo sobre X^* la norma

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X} |f(x)|, \ \forall f \in X^*$$

se obtiene que X^* es siempre un espacio de Banach.

Definimos además el ***espacio bidual*** *de X como el espacio dual de X^* y lo denotamos por X^{**}.*

Respecto a notación, en ocasiones trabajaremos sobre el espacio formado por todas las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{R}$, sean o no continuas, y lo denotaremos por $X^{\#}$.

Existe una relación canónica entre un espacio de Banach y su bidual a través de la **inyección canónica**, que se define como la aplicación $J : X \longrightarrow X^{**}$ tal que para cada $x \in X$ se define $J(x) : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$J(x)(x^*) = x^*(x).$$

Empleando el Corolario 1.2.9 se ve fácilmente que J es una isometría lineal, con lo que de ser sobreyectiva nos indica que X y su bidual serían isométricamente isomorfos. En este caso, si J es sobreyectiva, se dirá que el espacio X es **reflexivo**.

Tras esta breve introducción en los conceptos más básicos del análisis funcional, pasaremos ahora a ver dos resultados que nos permitan pasar de un espacio pseudonormado a un espacio de Banach de forma que preservemos todo lo posible la estructura original de la pseudonorma.

El primer paso será pues pasar de una pseudonorma a una norma, y la forma típica de hacerlo es mediante el uso del espacio cociente.

Teorema 1.2.3. *Sea (X, μ) un espacio pseudonormado y definamos*

$$N = \{x \in X : \mu(x) = 0\}.$$

Entonces N es un subespacio vectorial de X y si definimos $\tilde{\mu} : X/N \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{\mu}(x + N) = \mu(x),$$

se tiene que $(X/N, \tilde{\mu})$ es un espacio normado.

Demostración:
Veamos en primer lugar que N es un subespacio vectorial de X.
Sin más, dados $x, y \in N$ tenemos que

$$0 \leq \mu(x+y) \leq \mu(x) + \mu(y) = 0,$$

con lo que $\mu(x+y) = 0$ y así, $x + y \in N$.
También, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mu(\lambda x) = |\lambda| \, \mu(x) = 0,$$

con lo que $\lambda x \in N$ y efectivamente N es un subespacio vectorial de X.
Podemos pues formar el espacio vectorial cociente X/N con las operaciones canónicas y observemos en primer lugar que $\tilde{\mu}$ está bien definida.
Si $x + N = y + N$ entonces $x - y \in N$ y con ello

$$|\mu(x) - \mu(y)| \leq \mu(x-y) = 0.$$

Así, $\mu(x) = \mu(y)$ y efectivamente, $\tilde{\mu}(x+N) = \tilde{\mu}(y+N)$.
Resta únicamente ver que es una norma, pero esto es claro pues si son $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumplen:

- $\tilde{\mu}(x+N) = 0 \Leftrightarrow \mu(x) = 0 \Leftrightarrow x \in N \Leftrightarrow x + N = N$;
- $\tilde{\mu}((x+N)+(y+N)) = \tilde{\mu}((x+y)+N) = \mu(x+y) \leq \mu(x)+\mu(y) = \tilde{\mu}(x+N)+\tilde{\mu}(y+N)$;
- $\tilde{\mu}(\lambda(x+N)) = \tilde{\mu}((\lambda x)+N) = \mu(\lambda x) = |\lambda| \, \mu(x) = |\lambda| \, \tilde{\mu}(x+N)$.

Es decir, $\tilde{\mu}$ satisface las tres condiciones que definen una norma y efectivamente $(X/N, \tilde{\mu})$ es un espacio normado. ■

El segundo paso será el de compleción, es decir, pasar de un espacio normado a un espacio de Banach nuevamente intentando que se preserve la norma original en la medida de lo posible. Como la completitud es un concepto métrico, el proceso y la definición es realmente análogo al mencionado para los espacios métricos, pero la estructura de espacio normado y el uso del bidual facilita enormemente las cosas como veremos en el siguiente teorema.

Definición 1.2.4. *Si (X, μ) es un espacio normado, decimos que un par*

$$\left[(\hat{X}, \hat{\mu}), j : X \longrightarrow \hat{X}\right]$$

es una ***compleción*** *de X si $(\hat{X}, \hat{\mu})$ es un espacio de Banach, j es una isometría lineal y $j(X)$ es denso en $\hat{X}$.*

Teorema 1.2.4. *Todo espacio normado admite una compleción.*

Demostración:
Sea (X, μ) un espacio normado, entonces su bidual (X^{**}, μ^{**}) es un espacio de Banach y la inyección canónica $i : X \longrightarrow X^{**}$ es una isometría lineal.

Si consideramos pues $\hat{X} = \mathrm{cl}_{X^{**}}(i(X))$ y $\hat{\mu} = \mu^{**}|_{i(X)}$, tenemos que por ser $\hat{X}$ cerrado en X^{**}, la Proposición 1.1.3 nos garantiza que $(\hat{X}, \hat{\mu})$ es un espacio de Banach. Si definimos además $j = i|^{\hat{X}}$, entonces $j : X \longrightarrow \hat{X}$ sigue siendo una isometría lineal y además $j(X)$ es denso en $\hat{X}$ pues

$$\mathrm{cl}_{\hat{X}}(j(X)) = \hat{X} \cap \mathrm{cl}_{X^{**}}(j(X)) = \hat{X} \cap \mathrm{cl}_{X^{**}}(i(X)) = \hat{X}$$

Por tanto, el par $\left[(\hat{X}, \hat{\mu}), j : X \longrightarrow \hat{X}\right]$ es una compleción de X tal como buscábamos. ■

Además, tal como ocurría con los espacios métricos, la completitud de un espacio normado es en cierto modo única, resultado que emplearemos en numerosas ocasiones en la segunda codificación que veremos para los espacios de Banach separables.

Teorema 1.2.5. *Si (X, μ) es un espacio normado y*

$$\left[(\hat{X}, \hat{\mu}), j : X \longrightarrow \hat{X}\right]$$
$$\left[(\tilde{X}, \tilde{\mu}), h : X \longrightarrow \tilde{X}\right]$$

dos compleciones de X, entonces $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ son isométricamente isomorfos.

Demostración:

Por definición tenemos que j y h son isometrías lineales siendo $j(X), h(X)$ densos en $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ respectivamente, luego tenemos los isomorfismos isométricos

$$\begin{aligned} j^{-1} &: j(X) \longrightarrow X, \\ h^{-1} &: h(X) \longrightarrow X \end{aligned}$$

a partir de los cuales podemos formar los isomorfismos isométricos

$$\begin{aligned} f = h \circ j^{-1} &: j(X) \longrightarrow h(X), \\ g = j \circ h^{-1} &: h(X) \longrightarrow j(X). \end{aligned}$$

Ahora, $f : j(X) \longrightarrow \tilde{X}$ es una aplicación lineal isométrica y, como $j(X)$ es denso en $\hat{X}$, por el Teorema B.6, existe una única isometría lineal $F : \hat{X} \longrightarrow \tilde{X}$ tal que $F|_{j(X)} = f$.

Análogamente, existe también una única isometría lineal $G : \tilde{X} \longrightarrow \hat{X}$ tal que $G|_{h(X)} = g$.

Por tanto, para ver que $\hat{X}$ y $\tilde{X}$ son isométricamente isomorfos basta ver que $F \circ G = \mathrm{Id}_{\tilde{X}}$ y $G \circ F = \mathrm{Id}_{\hat{X}}$ pues de este modo, estos son los isomorfismos isométricos buscados.

Sin más sea $x \in \tilde{X}$ y observemos que, como $h(X)$ es denso en $\tilde{X}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en $h(X)$ tal que $x_n \longrightarrow x$, luego por la continuidad de F y G tenemos que

$$\begin{aligned} (F \circ G)(x) &= F\left(G\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)\right) = F\left(\lim_{n\to\infty} G(x_n)\right) = \lim_{n\to\infty} F(G(x_n)) = \\ &\underset{x_n \in h(X)}{=} \lim_{n\to\infty} F(g(x_n)) \underset{g(x_n)\in j(X)}{=} \lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} x_n = x. \end{aligned}$$

Puesto que el $x \in \tilde{X}$ era arbitrario, hemos demostrado que efectivamente $F \circ G = \mathrm{Id}_{\tilde{X}}$.

El caso con $G \circ F$ se ve de forma completamente análoga utilizando la densidad de $j(X)$ en $\hat{X}$, con lo que queda demostrado el teorema. ■

Aún más, si es (X, μ) un espacio normado, por el Lema B.1 existe un par

$$[(Y, \nu), \iota : X \longrightarrow Y]$$

que es una compleción de X de modo que $X \subset Y$ como subespacio denso, ι es la inclusión y $\nu|_X = \mu$.

Esto nos permite fijar los conceptos, con lo que cuando hablemos de una compleción de un espacio normado X nos referiremos siempre a un espacio de Banach $\hat{X}$ que contiene a X como subespacio denso y tal que su norma restringida a X es precisamente la norma original de X.

Recordemos que nuestro objetivo principal es codificar los espacios de Banach separables como puntos de un cierto espacio topológico. Sin embargo, como mencionaremos más adelante, el hecho de que no exista el conjunto de todos los espacios de Banach impide que dicha tarea pueda realizarse de forma directa y se precisan pues de unos espacios muy especiales que denominaremos universalmente isométricos y que definimos a continuación.

Definición 1.2.5. *Un espacio de Banach separable X se dice que es* ***universalmente isométrico*** *si dado cualquier otro espacio de Banach separable Y existe una isometría $j : Y \longrightarrow X$.*

Observemos que en la definición anterior $j(Y)$ es siempre cerrado en X pues, como Y es un espacio de Banach $j(Y)$ también lo será, luego es completo y por la Proposición 1.1.3 será cerrado.

El ejemplo clásico de espacio de Banach separable universalmente isométrico es el espacio $\mathcal{C}([0, 1])$ es decir, el espacio de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ dotado de la norma del supremo[5]. Este es un resultado clásico demostrado por Banach y Mazur en su artículo [3] de 1933 y una demostración más moderna del mismo puede hallarse en [5, Thm. 4].

Recordemos ahora uno de los teoremas centrales del análisis funcional, el teorema de Hahn-Banach, así como algunos corolarios que se desprenden de este que resultarán útiles para ciertas demostraciones.

Teorema 1.2.6. (Teorema de Hahn-Banach) *Sea X un espacio vectorial real, $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}$ un funcional sublineal, $Y \subset X$ un subespacio vectorial de X y $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal dominada por ρ, es decir tal que*

$$|f(y)| \leq p(y), \ \forall y \in Y.$$

Entonces, existe una aplicación lineal $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a f y que además también está dominada por ρ, es decir tal que

$$F(y) = f(y), \ \forall y \in Y;$$

$$|F(x)| \leq \rho(x), \ \ \forall x \in X.$$

Antes de pasar a enunciar los corolarios, puesto que en este texto se utilizará teoría de conjuntos para estudiar aspectos del análisis funcional, cabe mencionar la relación de este importante teorema con los axiomas clásicos de Zermelo-Fraenkel.

[5] Como veremos por el Teorema 2.1.7 se tiene que efectivamente es un espacio de Banach separable.

La demostración clásica del teorema utiliza el lema de Zorn, el cual se sabe que es equivalente al axioma de elección, y aunque puede probarse a partir de otros axiomas más débiles, sí que está demostrado que es independiente de los axiomas de Zermelo-Fraenkel sin el axioma de elección, es decir, no puede probarse ni refutarse su veracidad únicamente a partir de estos.

Para más detalles acerca de este fascinante tema pueden consultarse [25] o los surveys sobre este teorema [10] o [32].

Corolario 1.2.7. *Si X es un espacio vectorial real, μ una pseudonorma en X y $x_0 \in X$, entonces existe un funcional lineal $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \mu(x_0)$ y*

$$|f(x)| \leq \rho(x),\ \forall x \in X.$$

Corolario 1.2.8. *Si X es un espacio normado, Y un subespacio vectorial de X y $f : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua, entonces existe $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una aplicación lineal y continua que extiende a f y tiene la misma norma que ella.*

Corolario 1.2.9. *Si X un espacio normado, entonces para cada $x \in X$ se cumple que*

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)|\,.$$

Para concluir la sección daremos algunas definiciones y resultados que resultarán de mucha utilidad en la Sección 3.2.

Definición 1.2.6. *Si X, Y son espacios normados y $K \geq 1$, un* ***K-isomorfismo*** *entre X e Y es una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ tal que*

$$\frac{1}{K}\|x\| \leq \|T(x)\| \leq K\|x\|\,,\ \forall x \in X.$$

Diremos además que X e Y son ***K-isomorfos*** *si existe un K-isomorfismo sobreyectivo entre ambos.*

Veamos que un K-isomorfismo T entre dos espacios normados X e Y es un isomorfismo en su imagen, luego si X e Y son dos espacios K-isomorfos, en particular son isomorfos[6].

En primer lugar tenemos que si $T(x) = 0_Y$ entonces

$$0 \leq \frac{1}{K}\|x\| \leq \|T(x)\| = 0,$$

con lo que $x = 0_X$ y por tanto, T es inyectiva.

Por otra parte, por la propia definición de K-isomorfimo, T es acotada y al ser lineal, es continua. Además, respecto a $T^{-1} : T(X) \longrightarrow X$ tenemos que será lineal por serlo T y continua pues

$$\left\|T^{-1}(y)\right\| \leq K\left\|T(T^{-1}(y))\right\| = K\|y\|\,.$$

La siguiente definición nos permite establecer una relación entre cierta noción de densidad en espacios métricos y los K-isomorfismos entre espacios de Banach.

[6] Además, esto muestra que la definición de espacios K-isomorfos no es ambigua pues si $T : X \longrightarrow Y$ es un K-isomorfismo sobreyectivo, entonces $T^{-1} : Y \longrightarrow X$ también lo es.

Definición 1.2.7. *Si (X,ρ) es un espacio métrico, $\varepsilon > 0$ e Y, S subconjuntos de X, se dice que Y es **ε-denso** en S si para cada $x \in S$ existe un $y \in Y$ tal que $\rho(x,y) < \varepsilon$.*

Lema 1.2.10. *Existe una función $\phi_1 : [0,1/3[\longrightarrow \mathbb{R}$ continua en cero y con $\phi_1(0) = 0$ con la siguiente propiedad:*
Si $T : E \longrightarrow X$ es una aplicación lineal entre espacios de Banach, $\varepsilon \in (0,1/3)$ y existe $M \subset E$ ε-denso en $\mathbb{S}_E$, la esfera de E, tal que

$$|\|T(m)\| - 1| < \varepsilon, \ \forall m \in M,$$

entonces T es un $(1+\phi_1(\varepsilon))$-isomorfismo entre E y X.

Demostración:
Bajo las condiciones del enunciado, si $e \in \mathbb{S}_E$ entonces, como M es ε-denso en $\mathbb{S}_E$, existe $m \in M$ tal que $\|e - m\| < \varepsilon$ y por tanto

$$\begin{aligned}\|T(e)\| &\leq \|T(e) - T(m)\| + \|T(m)\| < \|T(e-m)\| + (1+\varepsilon) \leq \|T\| \, \|e-m\| + (1+\varepsilon) < \\ &< \|T\| \, \varepsilon + (1+\varepsilon).\end{aligned}$$

Así

$$\|T\| = \sup_{e \in \mathbb{S}_E} \|T(e)\| \leq \|T\| \, \varepsilon + (1+\varepsilon),$$

y con ello

$$\|T\| \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}. \tag{1.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\|T(e)\| &= \|T(m) - (T(m) - T(e))\| \geq \|T(m)\| - \|T(m) - T(e)\| > (1-\varepsilon) - \\ &- \|T(m-e)\| \geq (1-\varepsilon) - \|T\| \, \|m-e\| > (1-\varepsilon) - \|T\| \, \varepsilon \underset{(1.2)}{\geq} (1-\varepsilon) - \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\varepsilon = \\ &= \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon},\end{aligned}$$

con lo que dado $x \in E$, no nulo,

$$\|T(x)\| = \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \geq \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon} \|x\|. \tag{1.3}$$

Definamos pues $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ como $f(t) = \frac{1+t}{1-t}$, entonces $f'(t) = \frac{2}{(1-t)^2}$ y por el teorema del valor medio, dado $t \in (0,1)$ existe $\xi_t \in (0,t)$ tal que

$$f(t) = f(0) + tf'(\xi_t) = 1 + \frac{2t}{(1-\xi_t)^2} \leq 1 + \frac{2t}{(1-t)^2}.$$

Definiendo también $g : [0,1/3[\longrightarrow \mathbb{R}$ como $g(t) = \frac{1-t}{1-3t}$, entonces $g'(t) = \frac{2}{(1-3t)^2}$ y por el teorema del valor medio, dado $t \in (0,1/3)$ existe $\xi_t \in (0,t)$ tal que

$$g(t) = g(0) + tg'(\xi_t) = 1 + \frac{2t}{(1-3\xi_t)^2} \leq 1 + \frac{2t}{(1-3t)^2}.$$

Con todo, si definimos $\phi_1 : [0, 1/3[\longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi_1(t) = \frac{2t}{(1-3t)^2}$$

es claro que $\phi_1(0) = 0$ y que es continua en todo el intervalo.

Además dado $\varepsilon \in (0, 1/3)$ de modo que se cumplan las condiciones del enunciado se tiene por lo visto que

$$\|T(x)\| \underset{(1.2)}{\leq} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\| = f(\varepsilon)\|x\| \leq \left(1 + \frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}\right)\|x\| \leq (1+\phi_1(\varepsilon))\|x\|$$

y

$$\|T(x)\| \underset{(1.3)}{\geq} \frac{1-3\varepsilon}{1-\varepsilon}\|x\| = (g(\varepsilon))^{-1}\|x\| \geq (1+\phi_1(\varepsilon))^{-1}\|x\|,$$

con lo que T es un $(1+\phi_1(\varepsilon))$-isomorfismo entre E y X y ϕ_1 es la función buscada. ■

La definición que se presenta a continuación también probará ser de mucha utilidad en la codificación mediante pseudonormas.

Definición 1.2.8. *Si X, Y son dos espacios de Banach, $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ linealmente independientes, $\{y_1, \cdots, y_n\} \subset Y$ y $K > 0$, escribiremos que*

$$(Y, y_1, \cdots, y_n) \overset{K}{\sim} (X, x_1, \cdots, x_n)$$

si la aplicación lineal $T : \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\} \longrightarrow \operatorname{span}\{y_1, \cdots, y_n\}$ tal que $T(x_i) = y_i$ es un isomorfismo satisfaciendo que

$$\max\left\{\left\|T\right\|, \left\|T^{-1}\right\|\right\} < K.$$

Observemos que la relación anterior es simétrica pues si es

$$(Y, y_1, \cdots, y_n) \overset{K}{\sim} (X, x_1, \cdots, x_n)$$

entonces, como T es un isomorfismo lineal, tenemos que los $y_1, \cdots, y_n$ son linealmente independientes en Y y como la aplicación $\overline{T} : \operatorname{span}\{y_1, \cdots, y_n\} \longrightarrow \operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$ tal que $\overline{T}(y_i) = x_i$ no es más que T^{-1}, se tiene que

$$\max\left\{\left\|\overline{T}\right\|, \left\|\overline{T}^{-1}\right\|\right\} = \max\left\{\left\|T\right\|, \left\|T^{-1}\right\|\right\} < K.$$

Aunque como ya hemos mencionado el interés principal del análisis funcional se centra en los espacios de dimensión infinita, resulta que ciertas propiedades de estos pueden estudiarse a través de sus subespacios de dimensión finita. La rama del análisis funcional que estudia estos fenómenos se conoce como **teoría local** en espacios de Banach y aunque no entraremos en detalles[7], daremos una definición general sobre representabilidad finita que si emplearemos más adelante.

Definición 1.2.9. *Si $\mathcal{F}$ es una clase de espacios de Banach, se dice que un espacio de Banach X es **finitamente representable** en $\mathcal{F}$ si dado cualquier subespacio de dimensión finita E de X y $\varepsilon > 0$, existe un subespacio de dimensión finita F de algún $Y \in \mathcal{F}$ que es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a E.*

Si $\mathcal{F} = \{Y\}$ decimos que X es finitamente representable en Y.

[7] Para más información se pueden consultar los capítulos 12 y 13 de [1].

Capítulo 2

Teoría descriptiva de conjuntos

Los orígenes de la teoría descriptiva de conjuntos podrían situarse a comienzos del siglo XX con los trabajos de Baire sobre funciones reales. La noción de función había sido introducida a mediados del siglo anterior por Dirichlet y Riemann como una correspondencia entre objetos, sin importar ni dar ningún método sobre como podría construirse esta correspondencia. Sin embargo, la mayoría de funciones que se estudiaban estaban determinadas por reglas analíticas concretas, por lo que Baire plantea partir de las funciones continuas y construir el resto a partir de iterar la convergencia puntual de sucesiones de funciones, dando lugar a lo que hoy conocemos como funciones de Baire.

Los trabajos de Baire continuaron de la mano de Borel, quien unos años después introdujo el concepto de conjunto de Borel; y por Lebesgue, quien realizó un minucioso estudio sobre las funciones de Baire, demostrando por ejemplo que tipo de funciones de Baire coinciden con las funciones de Borel.

Paradójicamente el estudio de los conjuntos de Borel vive su clímax a partir de un error en un trabajo de Lebesgue.

Lebesgue supuso sin dudarlo que un conjunto de números reales que sea la proyección de un conjunto de Borel en el plano, es también un conjunto de Borel. Suslin llamó a este tipo de conjuntos, es decir las proyecciones de los conjuntos de Borel, conjuntos analíticos (pues podían construirse utilizando las operaciones analíticas de unión e intersección de intervalos) y demostró que existen conjuntos analíticos que no son de Borel.

Tras este resultado Suslin, junto a su maestro Lusin, hicieron un profundo estudio de los conjuntos analíticos y demostraron su importancia y potencia en el estudio de los propios conjuntos de Borel.

El siguiente paso consistió en ir más allá, introduciendo Lusin y Sierpiński (de forma independiente) otro tipo nuevo de conjuntos, los conjuntos proyectivos, cuyo primer escalón son los conjuntos analíticos. Estos se forman a partir de los conjuntos de Borel e iterando ciertas operaciones conjuntistas simples, luego tanto los conjuntos de Borel como los proyectivos pueden describirse a partir de conjuntos simples e iteraciones de operaciones conjuntistas básicas, por lo que esta rama de las matemáticas terminó denominándose teoría descriptiva de conjuntos.

Tanto la escuela soviética de la mano de Lusin, como la polaca de la mano de Sierpiński, hicieron grandes desarrollos en la teoría pero no fue hasta 1959 que llegó una segunda revolución de la mano de Addison, quien demostró una profunda conexión entre la teoría descriptiva de conjuntos y la teoría de las funciones recursivas. Esto dio pie al desarrollo de una teoría más general conocida como teoría efectiva dentro de la teoría descriptiva de conjuntos, pasando a llamarse teoría clásica a las ideas desarrolladas por Lusin y sus colaboradores.

Esta introducción de conceptos lógicos y conceptos más profundos de la teoría de conjuntos permitió a la teoría descriptiva brillar con luz propia e incluso aportar resultados novedosos e importantes a ramas tan distantes de las matemáticas como son la estadística, el análisis funcional o la teoría de representación de grupos.

Esta sección pretende ser una breve introducción a la teoría descriptiva de conjuntos clásica donde presentaremos los conjuntos de Borel y analíticos, junto a las herramientas necesarias para su aplicación posterior a la clasificación de los espacios de Banach separables.

Para un estudio pormenorizado del tema pueden consultarse los libros de Kechris [26] o Srivastava [35], dos grandes matemáticos que aportaron resultados importantes a la teoría; o en castellano el libro de Carlos Ivorra [22] que se caracteriza por ser, junto al resto de sus libros, completamente autocontenido.

2.1. Espacios polacos

La teoría clásica que comenzó con Suslin y Lusin se basaba en los conjuntos de números reales o de sus extensiones a más dimensiones. Sin embargo, con el desarrollo paralelo de la topología se vió que la teoría descriptiva alcanzaba mayor potencia al trabajar con espacios más generales, los denominamos espacios polacos. El uso de este tipo de espacios no es una mera generalización, pues se emplean en parte por la fuerte conexión que tienen con los espacios de sucesiones y la relación de estos con la teoría de funciones recursivas.

Esta primera sección servirá pues como una introducción a los espacios polacos y sus principales propiedades, así como un estudio en particular del espacio de Baire que nos permitirá también introducir la operación mediante la cual Suslin definió los conjuntos analíticos.

2.1.1. Conceptos generales

Definición 2.1.1. *Un **espacio polaco** es un espacio topológico completamente metrizable y separable.*

Observemos que por el Teorema 1.1.8 podemos enunciar de forma equivalente que un espacio polaco será un espacio topológico completamente metrizable y con base numerable.

Como ya hemos mencionado en la sección sobre espacios métricos, la completitud es una noción métrica pero es importante entender que a los espacios polacos no les imponemos una métrica completa concreta, sino que les exigimos que sean completamente metrizables, es decir, que exista al menos una métrica completa que induzca la topología. Esto permite una mayor generalidad en los resultados como puede apreciarse, por ejemplo, al comparar el siguiente teorema con el Teorema 1.1.3 para espacios métricos completos.

Teorema 2.1.1. *Sea X un espacio polaco e Y un subconjunto de X. Se cumple que Y con la topología relativa es un espacio polaco si, y solo si, Y es un G_δ en X.*

Demostración:

Si Y es un espacio polaco entonces es completamente metrizable y al ser X también metrizable, por el Teorema 1.1.7 (ii), se tiene que efectivamente Y es un G_δ en X.

Recíprocamente, si Y es un G_δ en X, por ser X completamente metrizable podemos aplicar el Teorema 1.1.7 (i) y obtener que Y es completamente metrizable. Además, por la Proposición 1.1.11, Y será también separable y efectivamente es polaco. ■

Con el siguiente teorema podremos construir una gran cantidad de espacios polacos, algunos de ellos muy importantes por sus propiedades universales.

Teorema 2.1.2. *Todo producto a lo sumo numerable de espacios polacos es un espacio polaco.*

Demostración:

Si es $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una familia numerable de espacios polacos, en particular cada uno de ellos es completamente metrizable y por el Teorema 1.1.2 tenemos que su producto X es también completamente metrizable.

Además, como cada X_n es también separable, para cada natural n existe $D_n \subset X_n$ numerable y denso.

Definamos pues

$$D = \prod_{n=1}^{\infty} D_n$$

y sea $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in D$ fijo.

Ahora, consideremos para cada $m \geq 1$ los conjuntos

$$E_m = \{y \in D : y_n = x_n, \forall n > m\}.$$

Claramente cada E_m es numerable[1] y por tanto también lo es

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m.$$

Si vemos que E es además denso en X, entonces quedará probado que el espacio es separable y por lo anterior, que es polaco.

Para ver la separabilidad basta pues considerar A un abierto básico cualquiera de X, y ver que $E \cap A \neq \varnothing$.

Sea pues A un abierto básico propio, es decir, $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ donde cada A_n es abierto en X_n y existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $A_n = X_n$ para cada $n > m$.

Como cada D_n es denso en X_n, tenemos que para cada $n \leq m$, $D_n \cap A_n \neq \varnothing$ y existe pues $d_n \in D_n \cap A_n$. Definamos pues $e \in E_m$ tal que $e_i = d_i$ si $i \leq m$ y $e_i = x_i$ si $i > m$, entonces es claro que $e \in E \cap A$ y efectivamente $E \cap A \neq \varnothing$.

[1] Si es $\{d_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ una enumeración cualquiera de D_n, basta definir $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow E_m$ tal que $f(n_1, \cdots, n_m) = y$ con $y_i = d_{i,n_i}$ si $i \leq m$ e $y_i = x_i$ si $i > m$, y se observa fácilmente que es sobreyectiva.

Por último, la prueba para un producto finito es análoga.

Si es $\{X_n\}_{n=1}^N$ una familia finita de espacios polacos, de nuevo por el Teorema 1.1.2 tenemos que su producto X es completamente metrizable. Además, si definimos D de forma análoga a lo anterior, tenemos en este caso que D es numerable y se comprueba de modo muy similar a lo visto para E que es denso en X, lo que prueba que efectivamente X es un espacio polaco. ■

Como hemos dicho, estos dos teorema nos permiten dar algunos ejemplos importantes:

(i) $\mathbb{R}^n$ es un espacio polaco para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathbb{R}^X$ donde X es un conjunto numerable será un espacio polaco.

(iii) ω con la topología discreta[2] es un espacio polaco pues la métrica discreta es siempre completa, y una base para la topología viene dada por los conjuntos unipuntuales que en este caso es claramente numerable.

(iv) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es un espacio polaco pues $\mathbb{Q}$ es un F_σ en $\mathbb{R}$, luego $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ será un G_δ y por el Teorema 2.1.1 es un espacio polaco[3].

(v) El espacio de Baire se define[4] como $\mathcal{N} = {}^\omega\omega$ y es polaco por (iii) y el Teorema 2.1.2.

(vi) El cubo de Cantor se define como $\mathcal{C} = \{0,1\}^\omega$ y es polaco por la misma razón que el anterior.

(vii) El cubo de Hilbert se define como $\mathbb{H} = [0,1]^\omega$ y por el Teorema 2.1.2 y el teorema de Tychonoff es un espacio polaco compacto.

Como hemos mencionado previamente algunos de los espacios anteriores son de especial importancia por sus propiedades universales dentro de la clase de espacios polacos, y un primer resultado en dicha línea es el siguiente.

Teorema 2.1.3. *Un espacio topológico X es polaco si, y solo si, es homeomorfo a un G_δ del cubo de Hilbert.*

Demostración:

Si Y es un subconjunto de tipo G_δ de $\mathbb{H}$ entonces, por el Teorema 2.1.1, Y es un espacio polaco.

Así, si X es homeomorfo a algún conjunto G_δ de $\mathbb{H}$, lo anterior nos garantiza que es homeomorfo a un espacio polaco y por tanto X es polaco.

---

[2] Por ω entenderemos el conjunto de los naturales (incluyendo el cero), y usaremos esta notación cuando lo tratemos como un ordinal o como un espacio con estructura topológica. En contraste, emplearemos la notación $\mathbb{N}$ cuando tratemos los naturales meramente como un conjunto de índices (que no incluye el cero), pero a nivel conjuntista remarcamos que son el mismo conjunto (salvo el cero).

[3] Es interesante destacar que, aunque a simple vista este ejemplo y el siguiente son completamente distintos, realmente podrían considerarse como parte de un único ejemplo ya que ambos espacios son homeomorfos (ver [26, Thm. 7.7]).

[4] Para no llevar a confusión con el ordinal β^α, cuando nos refiramos a espacios de funciones entre ordinales α y β denotaremos ${}^\alpha\beta$.

Recíprocamente, si X es un espacio polaco entonces es metrizable y con ello completamente regular[5]. Como además tiene una base numerable, por el Teorema E.2 es homeomorfo a un subespacio Y de $\mathbb{H}$.

Ahora, por ser homeomorfo a X, Y es un espacio polaco y como $\mathbb{H}$ también lo es, de nuevo por el Teorema 2.1.1 concluimos que efectivamente Y es un G_δ de $\mathbb{H}$. ■

Veremos en la siguiente subsección que el espacio de Baire también tiene una propiedad universal parecida a la del cubo de Hilbert, pero antes veamos algunos ejemplos de familias de espacios topológicos muy comunes que están incluidas en la clase de los espacios polacos.

Para entender el primer ejemplo, recordemos previamente la noción de espacio localmente compacto.

Definición 2.1.2. *Un espacio topológico X es localmente compacto si para cada punto $x \in X$, existe una base de entornos compactos de x.*

Teorema 2.1.4. *Todo espacio topológico Hausdorff, localmente compacto y con base numerable es polaco.*

Demostración:

Comencemos viendo que el teorema es cierto si consideramos un espacio X que sea Hausdorff, compacto y con base numerable.

Por ser Hausdorff y compacto, tenemos que es un espacio normal[6] y con ello completamente regular. Además, al tener una base numerable, el Teorema E.2 nos garantiza que será homeomorfo a un subespacio Y de $\mathbb{H}$.

Ahora, como $\mathbb{H}$ es polaco, es en particular Hausdorff y como Y es compacto (por ser homeomorfo a X) concluimos que Y es cerrado.

Si es pues ρ una métrica completamente compatible en $\mathbb{H}$ entonces ρ_Y, la métrica restringida a Y, será compatible en Y pero, como Y es cerrado, la Proposición 1.1.3 garantiza que ρ_Y será completamente compatible, luego Y es completamente metrizable.

Al ser pues X homeomorfo a Y, obtenemos que X es también completamente metrizable y como tiene una base numerable, es un espacio polaco.

Supongamos ahora que X es Hausdorff, localmente compacto y $\mathcal{B}$ es una base numerable de X.

Veamos en primer lugar que

$$\mathcal{B}_C = \{U \in \mathcal{B} : \overline{U} \text{ es compacto}\}$$

es también base numerable de X.

Observemos primero que, como $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}$, el conjunto será numerable y cada uno de sus elementos será abierto.

Por tanto, basta ver que dado V abierto en X y $x \in V$, existe $U_x \in \mathcal{B}_C$ tal que $x \in U_x \subset V$.

Como X es localmente compacto existe una base de entornos compactos de x y, por definición de base de entornos, existe pues K_x un entorno compacto de x tal que $K_x \subset V$.

[5] Ver el Anexo A si no se conoce el concepto de completamente regular.

[6] La demostración a este hecho puede hallarse en [37, Thm. 17.10].

Ahora, como $\mathcal{B}$ es base de X, existe $U_x \in \mathcal{B}$ tal que

$$x \in U_x \subset \operatorname{int}(K_x) \subset V,$$

y como X es Hausdorff, K_x es cerrado y se cumple que

$$\overline{U_x} \subset \overline{\operatorname{int}(K_x)} \subset \overline{K_x} = K_x.$$

Con todo, $\overline{U_x}$ es un cerrado contenido en un compacto, luego será compacto y obtenemos pues que $U_x \in \mathcal{B}_C$ y cumple lo deseado, demostrando que $\mathcal{B}_C$ es una base de X.

Sea ahora X^∞ la compactificación de Alexandroff[7] de X.

Como X es localmente compacto tenemos que X^∞ es Hausdorff y compacto, con lo que si vemos que tiene una base numerable, por lo visto al comienzo será un espacio polaco.

Observemos que esto último concluiría la demostración pues al ser X abierto en X^∞, por el Teorema 2.1.1 obtendríamos que efectivamente X es polaco tal como buscamos demostrar.

Así, basta demostrar que el conjunto

$$\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}_C \cup \left\{ \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_i} \right) \cup \{\infty\} : U_i \in \mathcal{B}_C, k \in \mathbb{N} \right\}$$

es base numerable de X^∞.

En primer lugar, como $\mathcal{B}_C$ es numerable y la unión numerable de conjuntos numerables es numerable, se tiene que $\mathcal{B}_\infty$ es numerable.

Por otra parte, la topología de X^∞ es

$$\begin{aligned} \tau_\infty &= \tau \ \cup \ \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \text{ es cerrado y compacto en } X\} = \\ &= \tau \ \cup \ \{(X \setminus K) \cup \{\infty\} : K \text{ es compacto en } X\} \end{aligned}$$

donde τ es la topología de X y la última igualdad se da porque al ser X Hausdorff todo compacto es cerrado.

Por tanto, los elementos de $\mathcal{B}_\infty$ son abiertos en X^∞.

Con esto, para obtener que $\mathcal{B}_\infty$ es base de X^∞ basta ver que dado V un abierto cualquiera de X^∞ y $x \in V$, existe un $U \in \mathcal{B}_\infty$ tal que $x \in U \subset V$.

Si $V \in \tau$, como $\mathcal{B}_C$ es base de X y $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}_\infty$, se cumple lo deseado.

Supongamos pues que $V \notin \tau$, es decir

$$V = (X \setminus K) \cup \{\infty\}$$

con K compacto en X, y distingamos dos posibles situaciones:

---

[7] *Si (X, τ) es un espacio topológico y ∞ un punto cualquiera que no pertenece a X, se define la **compactificación de Alexandroff** o **compactificación por un punto** como el espacio topológico $X^\infty = X \cup \{\infty\}$ dotado de la topología*

$$\begin{aligned} \tau_\infty &= \tau \ \cup \ \{U \in \mathcal{P}(X^\infty) : X^\infty \setminus U \text{ es cerrado y compacto en } X\} = \\ &= \tau \ \cup \ \{U \in \mathcal{P}(X^\infty) : U = (X \setminus K) \cup \{\infty\} \text{ con } K \text{ cerrado y compacto en } X\}. \end{aligned}$$

Se demuestra entonces (ver [27, Chp. 5, Thm. 21]) que efectivamente X^∞ es un espacio topológico, es compacto y X es un subespacio del mismo.

Además, se prueba que X^∞ es Hausdorff si, y solo si, X es Hausdorff y localmente compacto.

- Si $x \neq \infty$ entonces $x \in X \setminus K$ que es abierto en X, luego por ser $\mathcal{B}_C$ base de X, existe $U \in \mathcal{B}_C \subset \mathcal{B}_\infty$ tal que $x \in U \subset K \setminus X \subset V$.

- Si $x = \infty$ entonces como K es compacto y $\mathcal{B}_C$ base de X, existen $U_1, \cdots, U_k \in \mathcal{B}_C$ tales que
$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_i}.$$
Luego
$$\infty \in \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_i}\right) \cup \{\infty\} \subset (X \setminus K) \cup \{\infty\} = V$$
y como $\left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{U_i}\right) \cup \{\infty\} \in \mathcal{B}_\infty$, concluimos.

En cualquier caso existe pues el conjunto U buscado y el teorema queda demostrado. ■

Corolario 2.1.5. *Si X es un espacio metrizable y compacto, entonces es polaco.*

<u>Demostración:</u>

Como X es metrizable y compacto, por el Teorema 1.1.9 tenemos que es separable y por el Teorema 1.1.8 que tiene una base numerable.

Además, por ser metrizable tenemos también que es un espacio de Hausdorff.

Es decir, X que es Hausdorff, compacto y con base numerable y por lo visto al comienzo de la demostración en el teorema anterior concluimos que efectivamente es polaco. ■

El siguiente ejemplo consistirá en probar que si X es un espacio métrico compacto e Y un espacio polaco, entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología inducida por la métrica del supremo será un espacio polaco, por lo que comencemos recordando como se define exactamente esta métrica.

Definición 2.1.3. *Si X es un espacio compacto e Y un espacio metrizable con ρ_Y una métrica compatible en Y, se define la **métrica del supremo** en $\mathcal{C}(X, Y)$ como*
$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho_Y(f(x), g(x)).$$

Es sencillo comprobar, teniendo en cuenta que ρ_Y es una métrica y X es compacto, que la descripción anterior define efectivamente una métrica en $\mathcal{C}(X, Y)$.

De cara a ver que es un espacio polaco, es importante también ver que la topología inducida por la métrica anterior es independiente de la métrica ρ_Y, es decir, que se cumple el siguiente lema.

Lema 2.1.6. *Si X es un espacio compacto e Y un espacio metrizable, entonces dadas dos métricas compatibles en Y, ρ_Y y ρ'_Y, las métricas en $\mathcal{C}(X, Y)$*
$$\rho(f, g) = \sup_{x \in X} \rho_Y(f(x), g(x))$$
y
$$\rho'(f, g) = \sup_{x \in X} \rho'_Y(f(x), g(x))$$
son equivalentes.

Demostración:

Dadas $B_\rho(f,\varepsilon), B_{\rho'}(f,\delta)$ dos bolas en las correspondientes métricas , debemos ver que existen $\bar{\varepsilon}, \bar{\delta} > 0$ tales que

$$\left.\begin{array}{c} B_{\rho'}(f,\bar{\varepsilon}) \subset B_\rho(f,\varepsilon) \\ \\ B_\rho(f,\bar{\delta}) \subset B_{\rho'}(f,\delta) \end{array}\right\}$$

Lo veremos únicamente para el caso de la primera inclusión pues el segundo es completamente análogo.

Dado $x \in X$, como ρ_Y y ρ'_Y son métricas equivalentes en Y, tenemos que existe $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$B_{\rho'_Y}(f(x),\varepsilon_x) \subset B_{\rho_Y}(f(x),\varepsilon/3). \tag{2.1}$$

Ahora si definimos

$$U_x = f^{-1}\left(B_{\rho'_Y}(f(x),\varepsilon_x/2)\right),$$

tenemos que es un entorno abierto de x y además, como dado $z \in U_x$

$$f(z) \in B_{\rho'_Y}(f(x),\varepsilon_x/2),$$

se tiene que

$$\rho'_Y(f(x),f(z)) < \frac{\varepsilon_x}{2}, \;\; \forall z \in U_x. \tag{2.2}$$

Es claro que $\{U_x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento abierto de X y como es compacto, existirán $x_1,\cdots,x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

Definamos pues

$$\bar{\varepsilon} = \min_{1\le i\le n}\{\varepsilon_{x_i}/2\}$$

y veamos que satisface lo deseado.

Observemos que si es $g \in B_{\rho'}(f,\bar{\varepsilon})$ entonces dado $x \in X$ fijo será

$$\rho'_Y(f(x),g(x)) < \bar{\varepsilon}, \tag{2.3}$$

y como además $x \in U_{x_i}$ para algún $i = 1,\cdots,n$, por (2.2) tenemos que

$$\rho'_Y(f(x_i),f(x)) < \frac{\varepsilon_{x_i}}{2}. \tag{2.4}$$

Con esto, tenemos que para algún $i = 1,\cdots,n$ se cumple que

$$f(x) \in B_{\rho'_Y}(f(x_i),\varepsilon_{x_i}),$$

y por (2.1)

$$\rho_Y(f(x),f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.5}$$

Por otro lado, utilizando (2.3) y (2.4)

$$\rho'_Y(g(x), f(x_i)) \leq \rho'_Y(g(x), f(x)) + \rho'_Y(f(x), f(x_i)) < \bar{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} \leq \varepsilon_{x_i},$$

con lo que

$$g(x) \in B_{\rho'_Y}(f(x_i), \varepsilon_{x_i})$$

y de nuevo por (2.1)

$$\rho_Y(g(x), f(x_i)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.6}$$

Finalmente, por (2.5) y (2.6) concluimos que

$$\rho_Y(f(x), g(x)) \leq \rho_Y(f(x), f(x_i)) + \rho_Y(f(x_i), g(x)) < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Por la arbitrariedad de $x \in X$ se tiene pues que

$$\rho(f, g) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon,$$

y así

$$g \in B_\rho(f, \varepsilon)$$

tal como queríamos ver. ■

Por el lema anterior, podemos definir el espacio $\mathcal{C}(X, Y)$ con la **topología del supremo** como el espacio topológico cuya topología es la inducida por la métrica del supremo, y ahora sí demostrar el teorema ya enunciado.

Teorema 2.1.7. *Si X es un espacio metrizable compacto e Y un espacio polaco, entonces $\mathcal{C}(X, Y)$ con la topología del supremo es un espacio polaco.*

Demostración:

Por la propia definición de la topología del supremo es claro que $\mathcal{C}(X, Y)$ es metrizable, y para ver que es completamente metrizable basta demostrar que la métrica definida en 2.1.3 al considerar en Y una métrica completamente compatible es completa.

Sea pues ρ_Y una métrica completamente compatible en Y y $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}(X, Y)$.

Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$

$$\rho(f_m, f_n) = \sup_{x \in X} \rho_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon.$$

Luego, en particular para cada $x \in X$

$$\rho_Y(f_m(x), f_n(x)) < \varepsilon,$$

con lo que $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ es de Cauchy en (Y, ρ_Y) para cada $x \in X$.

Como (Y, ρ_Y) es completo podemos entonces definir $f : X \longrightarrow Y$ como

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

Nuevamente dado $\varepsilon > 0$ y por ser $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq n_0$

$$\sup_{x \in X} \rho_Y(f_m(x), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.7}$$

Además, dado $x \in X$ como $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ tenemos que existe $n_x \geq n_0$ tal que

$$\rho_Y(f_{n_x}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.8}$$

Por tanto, si $n \geq n_0$ por (2.7) y (2.8)

$$\rho_Y(f_n(x), f(x)) \leq \rho_Y(f_n(x), f_{n_x}(x)) + \rho_Y(f_{n_x}(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Es decir, hemos demostrado que dado $\varepsilon > 0$, existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces para cualquier $x \in X$ arbitrario

$$\rho_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

luego tal que

$$\rho(f_n, f) \leq \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Lo anterior prueba en particular que f_n converge uniformemente a f en X, y como cada f_n es continua al ser $f_n \in \mathcal{C}(X, Y)$, concluimos que f es continua y por tanto $f \in \mathcal{C}(X, Y)$. Así, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge en $\mathcal{C}(X, Y)$ a f y queda demostrado que $(\mathcal{C}(X, Y), \rho)$ es completo.

Para ver ahora la separabilidad sea ρ_X una métrica compatible en X, de nuevo ρ_Y una métrica completamente compatible en Y y definamos para cada $n, m \in \mathbb{N}$

$$C_{n,m} = \left\{ f \in \mathcal{C}(X, Y) : \forall x, y \left(\rho_X(x, y) < \frac{1}{m} \Rightarrow \rho_Y(f(x), f(y)) < \frac{1}{n} \right) \right\}.$$

Además, como X es compacto tenemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe

$$X_m = \{x_1^m, \cdots, x_{n_m}^m\}$$

un conjunto finito tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n_m} B\left(x_i^m, \frac{1}{m}\right).$$

Definamos también para cada $n, m \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$A_{n,m} = \left\{ \left(f(x_1^m), \cdots, f(x_{n_m}^m) \right) \in Y^{n_m} : f \in C_{n,m} \right\}.$$

Como Y es un espacio polaco, por el Teorema 2.1.2, Y^{n_m} también será polaco, luego metrizable y separable, y por la Proposición 1.1.11, $A_{n,m}$ también será separable con la topología relativa.

Por tanto, para cada par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ existe $E_{n,m} \subset A_{n,m}$ numerable y denso.

Así, enumerando $E_{n,m}$ podemos escribir

$$E_{n,m} = \left\{ \left(f_k^{n,m}(x_1^m), \cdots, f_k^{n,m}(x_{n_m}^m) \right) : f_k^{n,m} \in C_{n,m} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

y definir

$$D_{n,m} = \{f_k^{n,m}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Con todo, es claro que $D_{n,m} \subset C_{n,m}$ y dado $f \in C_{n,m}$ y $\varepsilon > 0$, tenemos que al ser $E_{n,m}$ denso en $A_{n,m}$ existe un $f_k^{n,m} \in D_{n,m}$ tal que[8]

$$\max \left\{ \rho_Y(f(x_1^m), f_k^{n,m}(x_1^m)), \cdots, \rho_Y(f(x_{n_m}^m), f_k^{n,m}(x_{n_m}^m)) \right\} < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Veamos finalmente que

$$D = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} D_{n,m},$$

el cual es claramente numerable, es denso en $\mathcal{C}(X, Y)$ lo que concluirá la demostración.

Para ello, basta ver que dados $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ y $\varepsilon > 0$, existe $g \in D$ tal que $\rho(f, g) < \varepsilon$.

Como f es continua y X compacto, f será uniformemente continua y tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon/3$, existe pues un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $\rho_X(x, y) < 1/m$ entonces

$$\rho_Y(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}. \tag{2.10}$$

Con esto, $f \in C_{n,m}$ y por (2.9) existe $g \in D_{n,m}$ tal que

$$\max \{\rho_Y(f(z), g(z)) : z \in X_m\} < \frac{1}{n}. \tag{2.11}$$

Dado ahora $x \in X$ cualquiera sabemos que existe $z \in X_m$ tal que $\rho_X(x, z) < 1/m$ y así

$$\begin{aligned} \rho_Y(f(x), g(x)) \leq \rho_Y(f(x), f(z)) + \rho_Y(f(z), g(z)) + \rho_Y(g(z), g(x)) < \\ < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \rho_Y(g(z), g(x)), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se da por (2.10) y (2.11).

Así, como $g \in D_{n,m} \subset C_{n,m}$ concluimos que

$$\rho_Y(f(x), g(x)) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \rho_Y(g(z), g(x)) < \frac{3}{n}.$$

Por la arbitrariedad de $x \in X$ se tiene finalmente que

$$\rho(f, g) = \sup_{x\in X} \rho_Y(f(x), g(x)) \leq \frac{3}{n} < \varepsilon$$

y concluimos la demostración. ■

[8] Consideramos en Y^{n_m} la métrica compatible descrita tras el Teorema 1.1.2.

2.1.2. El espacio de Baire

Como ya hemos mencionado, el espacio de Baire tiene una propiedad universal parecida a la del cubo de Hilbert, pero para estudiarla necesitamos previamente algo de notación.

Recordemos que el espacio de Baire $\mathcal{N} = {}^{\omega}\omega$ no es más que el espacio de sucesiones de números naturales dotado de la topología producto, y de forma análoga denotaremos el espacio de **sucesiones finitas de números naturales** como $\omega^{<\omega}$.

Un elemento $x \in \omega^{<\omega}$ podemos verlo pues como una n-tupla $x = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ y definimos la **longitud** de x como su dominio, es decir, en este caso $\mathrm{lon}(x) = n$.

Dados dos elementos $x, y \in \omega^{<\omega}$ diremos que x **está contenido en** y o que y **contiene a** x, representado por $x \subset y$, si $\mathrm{lon}(x) \leq \mathrm{lon}(y)$ y $x_i = y_i$ para cada $i \leq \mathrm{lon}(x)$.

Por último, si son $x = (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})$ e $y = (y_0, \cdots, y_{m-1})$ definimos la **concatenación** de x e y, como la operación en $\omega^{<\omega}$ dada por

$$x^\frown y = (x_0, \cdots, x_{n-1}, y_0, \cdots, y_{m-1}).$$

En el caso particular en el que $\mathrm{lon}(y) = 1$, es decir $y = (m)$ para algún natural, denotaremos simplemente $x^\frown m$.

La forma natural de relacionar $\mathcal{N}$ y $\omega^{<\omega}$ es mediante la operación de restricción.

Dados $x \in \mathcal{N}$ y $n \in \omega$, definimos la **restricción** de $x = \{x_i\}_{i\in\omega}$ a n como el elemento $x|_n \in \omega^{<\omega}$ de longitud n dado por

$$x|_n = (x_0, \cdots, x_{n-1}).$$

Cabe destacar que la única sucesión de longitud nula es la sucesión vacía, luego $x|_0 = \varnothing$.

Con la notación anterior podemos dar una base muy útil para trabajar con $\mathcal{N}$.

Lema 2.1.8. *Dado* $s \in \omega^{<\omega}$ *tal que* $\mathrm{lon}(s) = n$ *definimos*

$$B_s = \{x \in \mathcal{N} : x|_n = s\}.$$

Con esta notación se cumple que

$$\mathcal{B} = \{B_s : s \in \omega^{<\omega}\}$$

es base de $\mathcal{N}$*.*

Demostración:

En primer lugar, dado $s = (s_0, \cdots, s_{n-1})$, cada B_s es abierto en $\mathcal{N}$ pues podemos expresar

$$B_s = \prod_{i\in\omega} U_i$$

siendo $U_i = \omega$ si $i \geq n$ y $U_i = \{s_i\}$ si $i < n$.

Ahora, como $\{\{k\} : k \in \omega\}$ es base de ω con la topología discreta, tenemos que

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \prod_{i\in\omega} U_i : \exists I = \{i_0, \cdots, i_k\} \subset \omega \text{ tal que } U_i = \omega \text{ si } i \notin I \right.$$
$$\left. \text{y } U_{i_j} = \{n_{i_j}\}, n_{i_j} \in \omega \text{ para } j = 0, \cdots, k \right\}$$

es base de $\mathcal{N}$.

Por tanto, para ver que $\mathcal{B}$ es base, basta demostrar que dado $U \in \overline{\mathcal{B}}$ e $y \in U$, existe cierto $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $y \in B_s \subset U$.

Sin más, como $U \in \overline{\mathcal{B}}$ será de la forma

$$U = \{x \in \mathcal{N} : x_{i_0} = n_{i_0}, \cdots, x_{i_k} = n_{i_k}\}$$

para ciertos $n_{i_0}, \cdots, n_{i_k} \in \omega$ y veamos que definiendo $n = \max\{i_0+1, \cdots, i_k+1\}$ entonces $s = y|_n$ es la sucesión buscada.

Observemos que dado $x \in B_s$, como $y \in U$ y para cada $j = 0, \cdots, k$ es $i_k < n$, tenemos que

$$x_{i_j} = s_{i_j} = y_{i_j} = n_{i_j}, \ \forall j = 1, \cdots, k.$$

Por tanto concluimos que $x \in U$ y con ello que $y \in B_s \subset U$ tal como queríamos ver. ■

Precisaremos además en las demostraciones del concepto de esquema de Suslin y puesto que también será un concepto importante al definir los conjuntos analíticos, lo introduciremos ahora con cierto nivel de detalle.

Definición 2.1.4. *Un* ***esquema de Suslin*** *en un conjunto X es una aplicación A de $\omega^{<\omega}$ en $\mathcal{P}(X)$, el conjunto potencia de X.*

La ***operación de Suslin*** *es la aplicación S que a cada esquema de Suslin A en X le asigna el siguiente conjunto de X*

$$S(A) = \bigcup_{x \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} A(x|_n).$$

Si Y es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$, diremos que un esquema de Suslin A está en Y si $A(s) \in Y$ para cada $s \in \omega^{<\omega}$. En particular, si X es un espacio topológico, diremos que un esquema de Suslin A es abierto, cerrado, compacto, etc. si cada conjunto $A(s)$ lo es.

Si además X es un espacio (completamente) metrizable, diremos que un esquema de Suslin A cumple la ***condición de los diámetros*** *si existe una métrica (completamente) compatible en X tal que para todo $x \in \mathcal{N}$ se cumple que*

$$\lim_{n \to \infty} d\left(A(x|_n)\right) = 0,$$

siendo d el diámetro de los conjuntos y tomando por convenio que $d(\varnothing) = 0$.

Observemos que si un esquema de Suslin A en un espacio metrizable X cumple la condición de los diámetros para cierta métrica compatible ρ, entonces dado $x \in \mathcal{N}$ se tiene que

$$\left| \bigcap_{n \in \omega} A(x|_n) \right| \leq 1.$$

Efectivamente, si fueran x, y dos elementos distintos en la intersección sería

$$d\left(A(x|_n)\right) = \sup\left\{\rho(z_1, z_2) : z_1, z_2 \in A(x|_n)\right\} \geq \rho(x, y), \ \forall n \in \omega,$$

y así

$$\lim_{n \to \infty} d\left(A(x|_n)\right) \geq \rho(x, y) > 0$$

teniendo una contradicción.

Esta observación nos permite pues definir para cada esquema de Suslin A una aplicación asociada $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ donde

$$Z(A) = \left\{ x \in \mathcal{N} : \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) \neq \varnothing \right\},$$

y para cada $x \in Z(A)$ es

$$\{\phi(x)\} = \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n).$$

Esta aplicación tiene dos propiedades muy importantes:

- $\phi(Z(A)) = S(A)$.

  Efectivamente se tiene que

  $$z \in \phi(Z(A)) \Leftrightarrow \exists x \in Z(A) : \phi(x) = z \Leftrightarrow \exists x \in Z(A) : \{z\} = \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) \Leftrightarrow z \in S(A)$$

- ϕ es continua.

  Debemos ver que dado $U \subset X$ abierto se tiene que $\phi^{-1}(U)$ es abierto en $Z(A)$.

  Sea pues $x \in \phi^{-1}(U)$ cualquiera, y observemos que como U es abierto existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\phi(x), \varepsilon) \subset U$.

  Además, como A cumple la condición de los diámetros para ρ, existe también un $n \in \omega$ tal que $d\,(A(x|_n)) < \varepsilon$.

  Entonces, como por definición $\phi(x) \in A(x|_n)$, dado $y \in A(x|_n)$ se tiene que

  $$\rho(y, \phi(x)) \leq d\,(A(x|_n)) < \varepsilon,$$

  y así

  $$A(x|_n) \subset B(\phi(x), \varepsilon) \subset U.$$

  Así, hemos demostrado que

  $$x \in B_{x|_n} \cap Z(A) \subset \phi^{-1}(U),$$

  pues dado $y \in B_{x|_n} \cap Z(A)$ será $y|_n = x|_n$ y con ello

  $$\phi(y) \in A(y|_n) = A(x|_n) \subset U,$$

  es decir, $y \in \phi^{-1}(U)$.

  En definitiva, hemos visto que $\phi^{-1}(U)$ es entorno de todos sus puntos y por tanto abierto en $Z(A)$.

Con todo lo visto, estamos ya en condiciones de establecer los dos teoremas de universalidad para el espacio de Baire, los cuales precisan para demostrarlos de un par de lemas técnicos.

Lema 2.1.9. *Sea X un espacio polaco, ρ una métrica compatible y $U \subset X$ un abierto no vacío. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existen abiertos no vacíos $\{U_n\}_{n\in\omega}$, de diámetro menor que ε y tales que*

$$U = \bigcup_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}.$$

Demostración:

Como X es polaco, en particular es separable, y existe pues $D \subset X$ un subconjunto numerable y denso a partir del cual podemos definir

$$T = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}\right) : x \in D \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n > \frac{2}{\varepsilon} \wedge \overline{B}\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U \right\}.$$

Entonces, $T \neq \varnothing$ (pues $D \cap U \neq \varnothing$ al ser D denso, con lo que si es $x \in D \cap U$ existe n suficiente grande para que $\overline{B}(x, 1/n) \subset U$) y es numerable por serlo D, luego sea $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración cualquiera de T.

Es claro que cada U_n es un abierto no vacío de diámetro menor que ε y por definición se cumple que

$$\bigcup_{n\in\omega} U_n \subset \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n} \subset U.$$

Recíprocamente, si es y un elemento de U, por ser U abierto, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ y

$$B\left(y, \frac{1}{n}\right) \subset U.$$

Además, como D es denso en X, existe cierto $x \in D \cap B(y, 1/2n)$ y así

$$y \in \overline{B}\left(x, \frac{1}{2n}\right) \subset B\left(y, \frac{1}{n}\right) \subset U.$$

Como $1/2n < \varepsilon/2$, concluimos que $B(x, 1/2n) \in T$ y así

$$y \in \bigcup_{n\in\omega} U_n \subset \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}.$$

De la arbitrariedad del punto $y \in U$ obtenemos finalmente que

$$U = \bigcup_{n\in\omega} U_n = \bigcup_{n\in\omega} \overline{U_n}$$

y existe pues la sucesión de abiertos buscada. ■

Lema 2.1.10. *Sea X un espacio polaco, ρ una métrica compatible y F un conjunto F_σ de X. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{F_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos F_σ disjuntos, de diámetro menor a ε, que cumplen que $\overline{F_n} \subset F$ y tales que*

$$F = \bigcup_{n\in\omega} F_n.$$

Demostración:

Como F es un conjunto F_σ tenemos que existe $\{C_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de cerrados en X tal que

$$F = \bigcup_{n\in\omega} C_n.$$

Ahora, como X es polaco, el Teorema 1.1.8 nos garantiza que tiene una base numerable. Además, observemos que

$$\mathcal{B} = \{B(x,\delta) : x \in X, 0 < \delta < \varepsilon/2\}$$

es base de X y por el Teorema E.1 podemos obtener un subconjunto numerable de $\mathcal{B}$ que sea también base de X.

Sea pues $\{B_m\}_{m\in\omega}$ una enumeración cualquiera de las clausuras de los elementos de dicho subconjunto, es decir, cada B_m es una bola cerrada de diámetro menor a ε y de modo que la unión de todas ellas es justo X.

Entonces, tenemos que

$$F = \bigcup_{n\in\omega} C_n = \bigcup_{n\in\omega}(C_n \cap X) = \bigcup_{n\in\omega}\left(C_n \cap \bigcup_{m\in\omega} B_m\right) = \bigcup_{(n,m)\in\omega\times\omega}(C_n \cap B_m),$$

donde cada conjunto $C_n \cap B_m$ es claramente un cerrado de diámetro menor a ε.

Es decir, podemos expresar F como unión numerable de una sucesión de cerrados $\{C'_n\}_{n\in\omega}$ todos ellos con diámetro menor a ε.

Definamos ahora

$$G_n = C'_n \setminus \bigcup_{k<n} C'_k.$$

Es claro entonces que F es unión disjunta de los G_n y como además cada $G_n \subset C'_n$, todos ellos tienen diámetro menor a ε.

Aún más, observemos que

$$G_n = C'_n \cap \bigcap_{k<n}(X \setminus C'_k),$$

luego es intersección de un cerrado y un abierto (que serán dos conjuntos F_σ en virtud del Teorema 2.2.1), y por la Proposición 2.2.4 es un conjunto F_σ.

Con todo, será pues

$$G_n = \bigcup_{m\in\omega} D^n_m$$

para ciertos D^n_m cerrados en X, y definamos para cada par $(n,m) \in \omega\times\omega$ los conjuntos

$$E^n_m = \bigcup_{k\leq m} D^n_k.$$

Entonces, cada E^n_m es cerrado, $E^n_m \subset E^n_{m+1}$ para cada $m\in\omega$ y, considerando $E^n_{-1} = \varnothing$, se cumple que

$$G_n = \bigcup_{m\in\omega}(E^n_m \setminus E^n_{m-1}).$$

De forma análoga a lo dicho para los G_n se tiene que cada $E^n_m \setminus E^n_{m-1}$ es un conjunto F_σ en X. Además, son disjuntos dos a dos (para m,n)[9] y como están contenidos en G_n tienen diámetro menor a ε.

[9] Observemos que para un mismo n, $E^n_m \setminus E^n_{m-1}$ y $E^n_{\bar m} \setminus E^n_{\bar m-1}$ son disjuntos pues los E^n_m forman una sucesión creciente para m; y para el caso en el que $n \neq \bar n$,

$$(E^n_m \setminus E^n_{m-1}) \cap (E^{\bar n}_{\bar m} \setminus E^{\bar n}_{\bar m-1}) \subset G_n \cap G_{\bar n} = \varnothing.$$

Aún más, como $E^n_m \setminus E^n_{m-1} \subset E^n_m$, siendo E^n_m cerrado, tenemos que

$$\overline{E^n_m \setminus E^n_{m-1}} \subset E^n_m \subset G_n \subset F.$$

Como también se cumple que

$$F = \bigcup_{n\in\omega} G_n = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} (E^n_m \setminus E^n_{m-1}),$$

basta considerar $\{F_n\}_{n\in\omega}$ como cualquier enumeración de $\{E^n_m \setminus E^n_{m-1} : m, n \in \omega\}$. ■

Teorema 2.1.11. *Todo espacio polaco es imagen continua del espacio de Baire, es decir, si X es un espacio polaco, existe una aplicación continua y sobreyectiva $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$.*

Demostración:

Sea ρ una métrica completamente compatible para X y definamos de forma recursiva el siguiente esquema de Suslin abierto en X:

- $A(\varnothing) = X$.
- Dado $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $\text{lon}(s) = k \geq 1$, definimos para cada $n \in \omega$

  $$A(s^\frown n) = U_n$$

  siendo $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de abiertos resultado de aplicar el Lema 2.1.9 a $A(s)$ con $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$.

Tenemos entonces que por el Lema 2.1.9 el esquema A cumple:

(i) $A(\varnothing) = X$;

(ii) Si es $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $\text{lon}(s) = k \geq 1$ entonces $d(A(s)) < 1/k$;

(iii) Si $s \subset t$, entonces $\overline{A(t)} \subset A(s)$;

(iv) $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\frown n) = \bigcup_{n\in\omega} \overline{A(s^\frown n)}$.

Dado ahora $x \in \mathcal{N}$, como $A(x|_n) \neq \varnothing$ para cada $n \in \omega$, podemos formar una sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ tal que $p_n \in A(x|_n)$.
Observemos que si son $m > n$, se tiene que $x|_n \subset x|_m$ y por (iii)

$$\overline{A(x|_m)} \subset A(x|_n),$$

de donde $p_n, p_m \in A(x|_n)$.
Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ si es $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$ se cumple que para todo $m > n \geq n_0$

$$\rho(p_n, p_m) \leq d\left(A(x|_n)\right) \underset{\text{(ii)}}{<} \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Por tanto, la sucesión $\{p_n\}_{n\in\omega}$ es de Cauchy en (X, ρ) y como el espacio es completo, converge a cierto punto $p \in X$.

Aún más, dado $n \in \omega$ se tiene por (iii) que para $m \geq n$

$$p_m \in A(x|_m) \subset \overline{A(x|_m)} \subset A(x|_n) \subset \overline{A(x|_n)}.$$

Tomando límites obtenemos que $p \in \overline{A(x|_n)}$ para cada $n \in \omega$ y así

$$p \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x|_n)} \underset{10}{=} \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n).$$

Es decir, hemos visto que dado $x \in \mathcal{N}$ es

$$\bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) \neq \varnothing,$$

y por tanto que $Z(A) = \mathcal{N}$.

Aun más, dado $x \in \mathcal{N}$ tenemos por (ii) que para cada $n \geq 1$

$$d\left(A(x|_n)\right) < \frac{1}{n},$$

con lo que A cumple la condición de los diámetros para ρ.

Por lo visto antes del teorema podemos definir entonces $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ como $f = \phi$, la cual ya sabemos que es continua y resta únicamente ver que sea sobreyectiva.

Sea pues $p \in X$ y $s_0 = \varnothing$, entonces

$$p \in X = A(s_0) \underset{\text{(iv)}}{=} \bigcup_{n\in\omega} A(s_0^\frown n),$$

con lo que existe un $n_1 \in \omega$ tal que $s_0 \subset s_1 = s_0^\frown n_1$ y $p \in A(s_1)$.

De nuevo

$$p \in A(s_1) \underset{\text{(iv)}}{=} \bigcup_{n\in\omega} A(s_1^\frown n),$$

y existe pues un $n_2 \in \omega$ tal que $s_0 \subset s_1 \subset s_2 = s_1^\frown n_2$ y $p \in A(s_2)$.

Mediante este proceso podemos construir (utilizando alguna forma del axioma de elección, por ejemplo el axioma de elección dependiente) un $x \in \mathcal{N}$ tal que

$$p \in \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n)$$

y por lo visto para la función ϕ será

$$\{p\} = \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) = \{\phi(x)\} = \{f(x)\}.$$

Con todo $f(x) = p$ y, por la arbitrariedad de $p \in X$, queda demostrado que es f es sobreyectiva. ■

El teorema anterior nos dice entonces que todo espacio polaco es imagen continua del espacio de Baire, pero la aplicación dada no tiene porque ser inyectiva. Sin embargo, si nos restringimos a subconjuntos cerrados en lugar de considerar todo el espacio $\mathcal{N}$, entonces si podemos obtener una biyección tal como se ve en el siguiente teorema.

---

[10] Al ser $\overline{A(x|_n)} \subset A(x|_{n-1})$ para cada $n \geq 1$ y $A(x|_0) = A(\varnothing) = X$, se cumple que

$$\bigcap_{n\in\omega} \overline{A(x|_n)} \subset X \cap \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) = \bigcap_{n\in\omega} A(x|_n).$$

Teorema 2.1.12. *Si X un espacio polaco, entonces existe un cerrado $C \subset \mathcal{N}$ y una aplicación $f : C \longrightarrow X$ tal que f es continua y biyectiva.*

Demostración:
Sea ρ una métrica completamente compatible para X y definamos de forma recursiva el siguiente esquema de Suslin en X:

- $A(\varnothing) = X$.
- Dado $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $\text{lon}(s) = k \geq 1$, definimos para cada $n \in \omega$

$$A(s^\frown n) = F_n$$

siendo $\{F_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de conjuntos F_σ resultado de aplicar el Lema 2.1.10 a $A(s)$ con $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$.

Tenemos entonces que por el Lema 2.1.10 el esquema A cumple:

(i) $A(\varnothing) = X$;

(ii) Si es $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $\text{lon}(s) = k \geq 1$ entonces $d(A(s)) < 1/k$;

(iii) Si $s \subset t$, entonces $\overline{A(t)} \subset A(s)$ siendo $A(s)$ un conjunto F_σ;

(iv) $A(s) = \bigcup_{n\in\omega} A(s^\frown n)$ siendo la unión disjunta.

Veamos ahora que la aplicación $\phi : Z(A) \longrightarrow X$ cumple[11] lo deseado.

Sabemos ya que es continua y, de forma completamente análoga a lo visto en el teorema anterior, se comprueba que es sobreyectiva.

Veamos que en este caso ϕ es también inyectiva.

Si x, y son puntos distintos de $Z(A)$ y es n el primer natural tal que $x_n \neq y_n$, entonces $s = x|_n = y|_n$ y así

$$\phi(x) \in \bigcap_{m\in\omega} A(x|_m) \subset A(s^\frown x_n)$$

y

$$\phi(y) \in \bigcap_{m\in\omega} A(y|_m) \subset A(s^\frown y_n).$$

Como por (iv), $A(s^\frown x_n)$ y $A(s^\frown y_n)$ son disjuntos tenemos efectivamente que $\phi(x) \neq \phi(y)$, demostrando que ϕ es inyectiva.

Para concluir la demostración basta entonces ver que $Z(A)$ es cerrado en $\mathcal{N}$, o equivalentemente, que $\mathcal{N} \setminus Z(A)$ es abierto.

Sea pues $x \in \mathcal{N} \setminus Z(A)$ y observemos que por definición

$$\bigcap_{n\in\omega} A(x|_n) = \varnothing.$$

[11] Observemos que tal como se ha visto en el teorema anterior, por (ii) A cumple la condición de los diámetros y ϕ está bien definida.

Ahora, si vemos que existe un $m \geq 1$ tal que $A(x|_m) = \varnothing$ entonces

$$x \in B_{x|_m} \underset{12}{\subseteq} \mathcal{N} \setminus Z(A)$$

y obtendríamos que x es un punto interior de $\mathcal{N} \setminus Z(A)$.

Por la arbitrariedad de este punto x, concluiríamos que efectivamente $\mathcal{N} \setminus Z(A)$ es abierto y el teorema quedaría demostrado.

Supongamos pues por reducción al absurdo que $A(x|_n) \neq \varnothing$ para cada $n \in \omega$.

Entonces, para cada $n \in \omega$ tenemos por (ii) que

$$d\left(\overline{A(x|_n)}\right) = d\left(A(x|_n)\right) < \frac{1}{n}$$

y por (iii) que

$$\overline{A(x|_{n+1})} \subset A(x|_n) \subset \overline{A(x|_n)}.$$

En definitiva, $\left\{\overline{A(x|_n)}\right\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados, no vacíos y cuyos diámetros tienden a cero y, como (X, ρ) es completo, el teorema de intersección de Cantor nos permite concluir que

$$\bigcap_{n \in \omega} \overline{A(x|_n)} \neq \varnothing.$$

Sin embargo,

$$\bigcap_{n \in \omega} \overline{A(x|_n)} \underset{(\mathrm{i})}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A(x|_n)} \underset{(\mathrm{iii})}{\subset} \bigcap_{n \in \omega} A(x|_n) = \varnothing$$

y tenemos pues la contradicción buscada. ■

2.2. La jerarquía de Borel

Dado un espacio topológico cualquiera X existe una σ-álgebra canónica asociada a él conocida como la **σ-álgebra de Borel** y que se define como la σ-álgebra generada por la topología de X, es decir, es la menor σ-álgebra que contiene a la topología. Denotaremos esta σ-álgebra por $\mathcal{B}(X)$.

A los conjuntos en dicha σ-álgebra se les denomina **conjuntos de Borel**, y por la propia definición observamos que contiene a todos los abiertos de X. Pero aún más, por ser cerrada al tomar complementos y uniones e intersecciones numerables, observamos que también contiene a los conjuntos cerrados, a los G_δ y F_σ, a uniones numerables de conjuntos G_δ, a intersecciones numerables de conjuntos F_σ, ...

Es decir, la cantidad de conjuntos de Borel es enorme y cabe pensar que aquellos subconjuntos de X que no sean de Borel serán conjuntos muy “raros” y poco relacionados con la

[12] Si es $y \in B_{x|_m}$, será $y|_m = x|_m$ con lo que $A(y|_m) = A(x|_m) = \varnothing$ y así

$$\bigcap_{n \in \omega} A(y|_n) = \varnothing,$$

con lo que efectivamente $y \in \mathcal{N} \setminus Z(A)$.

estructura topológica de X, por lo que en cierto modo los conjuntos de Borel nos permiten determinar la complejidad de un subconjunto de X. Ahora bien, podemos ser aún más finos y observar que la complejidad de los conjuntos G_δ será mayor que la de los abiertos, al ser los primeros intersecciones numerables de estos, con lo que parece deseable establecer dentro de los propios conjuntos de Borel una jerarquía que nos permita clasificarlos con mayor detalle. Ese será el objetivo de esta sección, pero antes de ello profundicemos un poco más en la idea intuitiva de por qué una clasificación de este tipo puede servirnos para estudiar la complejidad de ciertas propiedades matemáticas.

Supongamos que hemos sido capaces de codificar un tipo de estructura matemática mediante puntos de un espacio topológico, por ejemplo como veremos en este texto, los espacios de Banach separables como puntos en un espacio polaco. Entonces, dada una propiedad que hable sobre estas estructuras podemos verla en términos de los puntos del espacio que cumplan la propiedad traducida, es decir, como un subconjunto de nuestro espacio topológico codificador. Ahora, a nivel lógico dicha propiedad se escribirá como una concatenación de cuantificadores "existe" y "para todo", que a nivel conjuntista podemos ver como uniones e intersecciones respectivamente. Por tanto, si la propiedad involucra una gran concatenación de estos símbolos lógicos, su traducción como conjunto es de esperar que sea una concatenación parecida de intersecciones y uniones, con lo que el número de estas últimas en el espacio topológico codificador nos indicará en cierto modo la complejidad de la propiedad. Clasificar pues los subconjuntos de un espacio topológico en función de estas cadenas de uniones e intersecciones es justo lo que vamos a definir en esta sección.

Lo anterior son únicamente ideas intuitivas pero como veremos para las codificaciones de los espacios de Banach separables, estas son las ideas subyacentes de cara a medir la complejidad de distintas familias de espacios de Banach.

Antes de pasar a definir dicha jerarquía de forma precisa, se recomienda al lector que no tenga ningún conocimiento sobre números ordinales que realice una lectura previa del Anexo D, pues aunque no se hace un uso extensivo de los mismos, si es recomendable tener unos conocimientos mínimos sobre ordinales para poder entender plenamente la sección.

2.2.1. Definición y propiedades básicas

Definición 2.2.1. *Si X es un espacio metrizable, definimos los conjuntos*

$$\Sigma_1^0(X) = \{A \subset X : A \text{ es abierto en } X\},$$
$$\Pi_1^0(X) = \{A \subset X : A \text{ es cerrado en } X\} = \left\{X \setminus A : A \in \Sigma_1^0(X)\right\};$$

y, para cada ordinal $\alpha > 1$, definimos por recursión transfinita

$$\Sigma_\alpha^0(X) = \left\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \Pi_\beta^0(X)\right\},$$

$$\Pi_\alpha^0(X) = \left\{X \setminus A : A \in \Sigma_\alpha^0(X)\right\} = \left\{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n : \forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \Sigma_\beta^0(X)\right\}.$$

Se define también para cada $\alpha > 0$

$$\Delta_\alpha^0(X) = \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X).$$

Cuando el espacio X esté claro, a veces representaremos los conjuntos anteriores prescindiendo de la referencia a X, es decir, como $\Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha$ y Δ^0_α.

Observamos que esta jerarquía es justo lo que buscábamos pues $\Sigma^0_1(X)$ es la familia de abiertos de X, $\Pi^0_1(X)$ es la familia de cerrados de X, $\Delta^0_1(X)$ será la familia de subconjuntos de X que son abiertos y cerrados, $\Sigma^0_2(X)$ serán la familia de conjuntos F_σ, $\Pi^0_2(X)$ la familia de conjuntos G_δ y para mayores índices obtenemos familias de mayor complejidad.

El punto interesante de trabajar con espacios metrizables es que la definición anterior, que es la que se conoce como **jerarquía de Borel**, es realmente una jerarquía pues al ir aumentando en complejidad siempre vamos incluyendo a los conjuntos anteriores.

Teorema 2.2.1. *Si X es un espacio metrizable se cumplen*

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \Sigma^0_1(X) & & & & \Sigma^0_2(X) & & & & \Sigma^0_3(X) & & & & \cdots \\
 & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & \\
\Delta^0_1(X) & & & & \Delta^0_2(X) & & & & \Delta^0_3(X) & & & & \Delta^0_4(X) & & \\
 & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & & \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{-45}{$\subset$} & \\
 & & \Pi^0_1(X) & & & & \Pi^0_2(X) & & & & \Pi^0_3(X) & & & & \cdots
\end{array}$$

Es decir, si $0 < \alpha < \beta$ entonces

$$\Sigma^0_\alpha(X) \cup \Pi^0_\alpha(X) \subset \Delta^0_\beta(X).$$

<u>Demostración:</u>

Veamos en primer lugar que $\Pi^0_1 \subset \Pi^0_2$, es decir, que todo cerrado en X es un conjunto G_δ.

Sea pues ρ un métrica compatible en X, F cerrado en X y definamos

$$A_n = \left\{x \in X : \rho(x, F) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Entonces, cada A_n es abierto en X por la continuidad de la función distancia de un cerrado a un punto, y basta ver que

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Efectivamente, si $x \in F$ entonces $\rho(x, F) = 0$ con lo que $x \in A_n$ para cada $n \geq 1$ y así

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Recíprocamente, si es $x \in \bigcap A_n$ y $\varepsilon > 0$ entonces tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon$ será

$$\rho(x, F) < 1/n < \varepsilon,$$

y existe pues un $y \in F$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Con esto, queda demostrado que para cualquier $\varepsilon > 0$ será

$$F \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$$

y así, $x \in \overline{F} = F$.

Observemos ahora que si $A \in \Sigma_1^0$ entonces, por lo visto, $X \setminus A \in \Pi_1^0 \subset \Pi_2^0$ y así

$$A = X \setminus (X \setminus A) \underset{13}{\in} \Sigma_2^0$$

Por tanto, $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_2^0$.
Veamos ahora que para cada $1 \leq \alpha \leq \beta$ se cumple que

$$\Sigma_\alpha^0(X) \subset \Sigma_\beta^0(X). \tag{2.12}$$

Si es $\beta = 2$ queda probado por lo anterior y si es $\beta > 2$ observemos que podemos suponer que $\alpha > 1$, ya que si es cierto en este caso, entonces

$$\Sigma_1^0 \subset \Sigma_2^0 \subset \Sigma_\beta^0.$$

Así, si son $1 < \alpha < \beta$ y $A \in \Sigma_\alpha^0$, por definición A es unión numerable de elementos de

$$\bigcup_{0<\delta<\alpha} \Pi_\delta^0 \subset \bigcup_{0<\delta<\beta} \Pi_\delta^0,$$

con lo que apelando nuevamente a la definición $A \in \Sigma_\beta^0$.
A partir de lo anterior es también claro que si $1 \leq \alpha \leq \beta$ entonces

$$\Pi_\alpha^0(X) \subset \Pi_\beta^0(X), \tag{2.13}$$

pues si $B \in \Pi_\alpha^0$ entonces $B = X \setminus A$ con $A \in \Sigma_\alpha^0 \subset \Sigma_\beta^0$, luego efectivamente $B \in \Pi_\beta^0$.
Por otra parte, si $1 \leq \alpha < \beta$ y $A \in \Sigma_\alpha^0$ podemos expresar

$$A_1 = A \in \Sigma_\alpha^0 \subset \bigcup_{0<\delta<\alpha+1} \Sigma_\delta^0$$

y para cada $n > 1$

$$A_n = X \in \Sigma_1^0 \subset \bigcup_{0<\delta<\alpha+1} \Sigma_\delta^0,$$

obteniendo que

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Pi_{\alpha+1}^0(X) \underset{(2.13)}{\subset} \Pi_\beta^0(X). \tag{2.14}$$

De igual modo, si $1 \leq \alpha < \beta$ y $B \in \Pi_\alpha^0$ podemos expresar

$$B_1 = B \in \Pi_\alpha^0 \subset \bigcup_{0<\delta<\alpha+1} \Pi_\delta^0$$

y para cada $n > 1$

$$B_n = \varnothing \in \Pi_1^0 \subset \bigcup_{0<\delta<\alpha+1} \Pi_\delta^0,$$

[13] Observemos que si $F \in \Pi_\alpha^0$ entonces $F = X \setminus A$ para algún $A \in \Sigma_\alpha^0$, y con ello

$$X \setminus F = X \setminus (X \setminus A) = A \in \Sigma_\alpha^0.$$

obteniendo que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \Sigma^0_{\alpha+1} \underset{(2.12)}{\subset} \Sigma^0_\beta. \tag{2.15}$$

Con todo, concluimos que si $1 \leq \alpha < \beta$ entonces por (2.12) y (2.14)

$$\Sigma^0_\alpha \subset \Sigma^0_\beta \cap \Pi^0_\beta = \Delta^0_\beta;$$

y por (2.13) y (2.15)

$$\Pi^0_\alpha \subset \Sigma^0_\beta \cap \Pi^0_\beta = \Delta^0_\beta$$

lo que concluye la demostración. ■

El siguiente teorema nos muestra que la jerarquía que hemos considerado tiene un final y dicho final se alcanza en el primer ordinal no numerable ω_1, coincidiendo además con la σ-álgebra de Borel y dando también sentido al nombre de la jerarquía.

Teorema 2.2.2. *Si X es un espacio metrizable y α un ordinal mayor o igual a ω_1 entonces*

$$\Sigma^0_\alpha(X) = \Pi^0_\alpha(X) = \Delta^0_\alpha(X) = \Delta^0_{\omega_1}(X) = \Sigma^0_{\omega_1}(X) = \Pi^0_{\omega_1}(X) = \bigcup_{0<\delta<\omega_1} \Delta^0_\delta = \mathcal{B}(X).$$

Demostración:

Sea

$$\mathcal{B} = \bigcup_{0<\delta<\omega_1} \Delta^0_\delta$$

y observemos que por el Teorema 2.2.1 y al ser ω_1 un ordinal límite se tiene que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{0<\delta<\omega_1} \Sigma^0_\delta = \bigcup_{0<\delta<\omega_1} \Pi^0_\delta. \tag{2.16}$$

Además, observemos que si $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$ entonces su unión está en $\mathcal{B}$.

Efectivamente por (2.16) para cada $n \in \mathbb{N}$ existe cierto $\delta_n < \omega_1$ tal que $A_n \in \Pi^0_{\delta_n}$ y si definimos

$$\delta = \sup\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \delta_n,$$

tendremos que al ser cada δ_n numerable (pues $\delta_n < \omega_1$) será δ numerable.

Así, $\delta < \omega_1$ y obtenemos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma^0_{\delta+1} \underset{(2.16)}{\subset} \mathcal{B}.$$

Observemos también que si $A \in \mathcal{B}$ entonces por (2.16) se tiene que $A \in \Sigma^0_\delta$ para algún $0 < \delta < \omega_1$ luego

$$X \setminus A \in \Pi^0_\delta \underset{(2.16)}{\subset} \mathcal{B}.$$

Es decir, $\mathcal{B}$ es un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\varnothing \in \mathcal{B}$ y es cerrado para complementos y uniones numerables, luego es una σ-álgebra en X.

Como además claramente contiene a todos los abiertos de X, hemos demostrado que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}$.

Recíprocamente, tenemos en primer lugar que

$$\Sigma_1^0 \cup \Pi_1^0 \subset \mathcal{B}(X)$$

y supongamos por inducción transfinita que para cada $\alpha < \beta < \omega_1$ es

$$\Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \subset \mathcal{B}(X).$$

Entonces, si $A \in \Sigma_\beta^0$ será por definición

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

con $A_n \in \Pi_{\delta_n}^0$ para algún $0 < \delta_n < \beta$, pero por hipótesis de inducción

$$\Pi_{\delta_n}^0 \subset \mathcal{B}(X),\ \forall n \geq 1,$$

obteniendo que cada $A_n \in \mathcal{B}(X)$ y al ser $\mathcal{B}(X)$ una σ-álgebra

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(X).$$

Por tanto, se cumple que $\Sigma_\beta^0 \subset \mathcal{B}(X)$.

Por otra parte, si $B \in \Pi_\beta^0$ entonces $B = X \setminus A$ para algún $A \in \Sigma_\beta^0 \subset \mathcal{B}(X)$ y de nuevo, por ser $\mathcal{B}(X)$ una σ-álgebra, se tiene que $B \in \mathcal{B}(X)$ y en definitiva que $\Pi_\beta^0 \subset \mathcal{B}(X)$.

Con todo, hemos visto que

$$\Sigma_\beta^0 \cup \Pi_\beta^0 \subset \mathcal{B}(X)$$

y por inducción transfinita concluimos que

$$\Sigma_\alpha^0 \cup \Pi_\alpha^0 \subset \mathcal{B}(X) \tag{2.17}$$

para cada $0 < \alpha < \omega_1$.

En definitiva, tenemos que si $A \in \mathcal{B}$ entonces $A \in \Sigma_\alpha^0$ para algún $0 < \alpha < \omega_1$ y por (2.17), $A \subset \mathcal{B}(X)$, de donde $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}(X)$.

Todo lo visto nos permite concluir que efectivamente

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(X).$$

Veamos ahora que $\Sigma_{\omega_1}^0 = \Pi_{\omega_1}^0 = \Delta_{\omega_1}^0 = \mathcal{B}(X)$.

Por definición y por (2.16), si $A \in \Sigma_{\omega_1}^0$ entonces es unión numerable de elementos de $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X)$ y al ser una σ-álgebra, tenemos que $A \in \mathcal{B}(X)$ de donde $\Sigma_{\omega_1}^0 \subset \mathcal{B}(X)$.

Recíprocamente, si es $A \in \mathcal{B}(X) = \mathcal{B}$ entonces $A \in \Sigma_\delta^0$ para algún $0 < \delta < \omega_1$ y por el Teorema 2.2.1 será $A \in \Sigma_\delta^0 \subset \Sigma_{\omega_1}^0$, con lo que $\mathcal{B}(X) \subset \Sigma_{\omega_1}^0$.

Así queda visto que $\mathcal{B}(X) = \Sigma_{\omega_1}^0$, y como $\mathcal{B}(X)$ es cerrado por complementarios tenemos que

$$\Pi_{\omega_1}^0 = \{X \setminus A : A \in \Sigma_{\omega_1}^0\} = \{X \setminus A : A \in \mathcal{B}(X)\} = \mathcal{B}(X),$$

de donde claramente

$$\Delta_{\omega_1}^0 = \Sigma_{\omega_1}^0 \cap \Pi_{\omega_1}^0 = \mathcal{B}(X).$$

Por último, resta ver que para cada $\alpha \geq \omega_1$ será $\Sigma^0_\alpha = \Pi^0_\alpha = \Delta^0_\alpha = \mathcal{B}(X)$.

Observemos que por el Teorema 2.2.1 y puesto que $\Sigma^0_{\omega_1} = \Pi^0_{\omega_1} = \Delta^0_{\omega_1} = \mathcal{B}(X)$, es claro que $\mathcal{B}(X)$ está contenido en cada uno de estos conjuntos Σ^0_α, Π^0_α y Δ^0_α.

Resta pues ver la otra inclusión, la cual sabemos por lo anterior que es cierta si $\alpha = \omega_1$.

Podemos entonces proceder por inducción transfinita, demostrando que si para cada $\omega_1 \leq \alpha < \beta$ se cumple que los conjuntos Σ^0_α y Π^0_α están contenidos en $\mathcal{B}(X)$, entonces Σ^0_β y Π^0_β también lo están.

Este último paso inductivo se demuestra de forma análoga al visto para demostrar (2.17), por lo que los detalles se omitirán y se da la demostración por concluida. ■

Observemos ahora que la jerarquía de Borel es trivial para espacios numerables.

En efecto, si es X es un espacio métrico numerable entonces podemos distinguir dos posibilidades:

- X es discreto en cuyo caso $\Delta^0_1(X) = \mathcal{P}(X)$ y por tanto todas las clases de Borel son iguales.
- X no es discreto, luego no todo punto es abierto y existe $x \in X$ tal que
  $$\{x\} \in \Pi^0_1(X) \setminus \Sigma^0_1(X)$$
  y así
  $$X \setminus \{x\} \in \Sigma^0_1(X) \setminus \Pi^0_1(X).$$
  Con esto, $\Delta^0_1(X) \subsetneqq \Sigma^0_1(X)$ y $\Delta^0_1(X) \subsetneqq \Pi^0_1(X)$ pero al ser X numerable y todo punto cerrado se cumple que $\Sigma^0_2(X) = \mathcal{P}(X)$, luego la jerarquía de Borel en este caso es

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
& \Sigma^0_1(X) \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneqq"] & \\
\Delta^0_1(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneqq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subsetneqq"] & & \Delta^0_2(X) = \mathcal{P}(X) \\
& \Pi^0_1(X) \arrow[ur, phantom, sloped, "\subsetneqq"] &
\end{tikzcd}$$

En particular lo anterior muestra que si X es un espacio polaco numerable entonces $\mathcal{B}(X) = \mathcal{P}(X)$ pero el siguiente teorema, cuya demostración puede consultarse en [22, Tma. 1.15] o [26, Thm. 22.4], nos dice que la situación es completamente distinta si X es no numerable.

Teorema 2.2.3. *Si X es un espacio polaco no numerable, entonces para cada $1 \leq \alpha < \omega_1$ se cumple que $\Sigma^0_\alpha(X) \neq \Pi^0_\alpha(X)$ y por consiguiente*

$$\Delta^0_\alpha(X) \subsetneqq \Sigma^0_\alpha(X) \subsetneqq \Delta^0_{\alpha+1}(X),$$
$$\Delta^0_\alpha(X) \subsetneqq \Pi^0_\alpha(X) \subsetneqq \Delta^0_{\alpha+1}(X).$$

Observemos que aunque para $\alpha < \omega_1$ las distintas clases de Borel en la jerarquía no son en general σ-álgebras, si cumplen ciertas propiedades de estas que resultarán muy útiles y que enunciamos en la siguiente proposición.

Proposición 2.2.4. *Si X es un espacio metrizable y $0 < \alpha < \omega_1$, entonces $\Sigma^0_\alpha(X)$ es cerrado por uniones numerables e intersecciones finitas y $\Pi^0_\alpha(X)$ es cerrado por intersecciones numerables y uniones finitas.*

En particular, $\Delta^0_\alpha(X)$ es un álgebra sobre X.

Demostración:

Es claro por las definiciones de Σ^0_α y Π^0_α que son cerrados para uniones e intersecciones numerables respectivamente, luego resta ver únicamente la segunda parte del teorema.

Observemos en primer lugar que basta probar que la intersección o unión, en cada caso, de dos elementos pertenece al conjunto correspondiente, pues el caso finito se desprende de este por un sencillo razonamiento por inducción.

Ahora, si $\alpha = 1$ es claro pues la intersección finita de abiertos es un abierto y toda unión finita de cerrados es un cerrado.

Por tanto, supongamos que es cierto para todo $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$ y veamos que entonces lo es para β.

Sin más, sean $A, B \in \Sigma^0_\beta$, es decir

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

y

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

siendo $A_n \in \Pi^0_{\delta_n}$, $B_n \in \Pi^0_{\gamma_n}$ para ciertos $1 \leq \delta_n, \gamma_n < \beta$.

Entonces,

$$A \cap B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(A_n \cap B_m) = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} A_n \cap B_m.$$

Ahora, como para cada par $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, por el Teorema 2.2.1, se tiene que

$$A_n, B_m \in \Pi^0_{\delta_n} \cup \Pi^0_{\gamma_n} \subset \Pi^0_{\max\{\delta_n,\gamma_n\}}$$

siendo $\max\{\delta_n, \gamma_n\} < \beta$, concluimos por hipótesis de inducción que

$$A_n \cap B_m \in \Pi^0_{\max\{\delta_n,\gamma_n\}}$$

y con ello que $A \cap B \in \Sigma^0_\beta$.

Por otra parte, dados $B_1, B_2 \in \Pi^0_\beta$ tenemos que existen $A_1, A_2 \in \Sigma^0_\beta$ tales que $B_i = X \setminus A_i$ para $i = 1, 2$ y así

$$B_1 \cup B_2 = (X \setminus A_1) \cup (X \setminus A_2) = X \setminus (A_1 \cap A_2).$$

Como por lo anterior $A_1 \cap A_2 \in \Sigma^0_\beta$, concluimos que $B_1 \cup B_2 \in \Pi^0_\beta$.

Con todo, hemos visto que el teorema es cierto para $\alpha = 1$ y que si lo suponemos cierto para cada $1 \leq \alpha < \beta < \omega_1$ entonces es cierto para β, con lo que por inducción transfinita queda demostrado. ■

Para finalizar la subsección veamos las relaciones de las clases de Borel con los subespacios.

Teorema 2.2.5. *Si X es un espacio metrizable, Y un subespacio de X y $\alpha \geq 1$ entonces*

$$\Sigma^0_\alpha(Y) = \{A \cap Y : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\},$$
$$\Pi^0_\alpha(Y) = \{A \cap Y : A \in \Pi^0_\alpha(X)\}.$$

Si además X e Y son espacios polacos, entonces para $\alpha \geq 3$ se cumple también que

$$\Sigma^0_\alpha(Y) = \{A \in \Sigma^0_\alpha(X) : A \subset Y\},$$
$$\Pi^0_\alpha(Y) = \{A \in \Pi^0_\alpha(X) : A \subset Y\}.$$

Demostración:
En primer lugar, observemos que el teorema es cierto para $\alpha = 1$ por la forma en la que se construye la topología relativa en Y, luego supongamos que es cierto para $1 \leq \alpha < \beta$ y veamos que entonces lo es para β.
Si es $A \cap Y$ con $A \in \Sigma^0_\beta(X)$, tenemos que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

para ciertos $A_n \in \Pi^0_{\beta_n}(X)$ siendo $1 \leq \beta_n < \beta$.
Entonces, por hipótesis de inducción, $A_n \cap Y \in \Pi^0_{\beta_n}(Y)$ y con ello

$$A \cap Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap Y) \in \Sigma^0_\beta(Y).$$

Recíprocamente, si es $B \in \Sigma^0_\beta(Y)$ tenemos que

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

para ciertos $B_n \in \Pi^0_{\beta_n}(Y)$ siendo $1 \leq \beta_n < \beta$.
Así, por hipótesis de inducción, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe cierto $A_n \in \Pi^0_{\beta_n}(X)$ tal que $B_n = A_n \cap Y$ y con ello

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap Y) = Y \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Denotando

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma^0_\beta(X),$$

concluimos que efectivamente $B = A \cap Y$ como queríamos ver.
Por otra parte, si es $A \cap Y$ con $A \in \Pi^0_\beta(X)$ entonces $X \setminus A \in \Sigma^0_\beta(X)$ y por lo visto

$$(X \setminus A) \cap Y \in \Sigma^0_\beta(Y),$$

de donde
$$A \cap Y = Y \setminus (Y \setminus (A \cap Y)) = Y \setminus ((X \setminus A) \cap Y) \in \Pi^0_\beta(Y).$$
Y recíprocamente, si es $B \in \Pi^0_\beta(Y)$ entonces $Y \setminus B \in \Sigma^0_\beta(Y)$ y por lo visto, existe un $A \in \Sigma^0_\beta(X)$ tal que
$$Y \setminus B = A \cap Y.$$
Por tanto,
$$B = Y \setminus (Y \setminus B) = Y \setminus (A \cap Y) = (X \setminus A) \cap Y$$
siendo $X \setminus A \in \Pi^0_\beta(X)$.

Con todo, la primera parte del teorema queda pues demostrada por inducción transfinita.

Para la segunda parte, solo debemos ver que si X e Y son polacos y $\alpha \geq 3$ entonces
$$\{A \cap Y : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\} = \{A \in \Sigma^0_\alpha(X) : A \subset Y\},$$
$$\{A \cap Y : A \in \Pi^0_\alpha(X)\} = \{A \in \Pi^0_\alpha(X) : A \subset Y\}.$$
La inclusión de derecha a izquierda es trivial en cualquiera de los dos casos y cierta independientemente de si los espacios son polacos o del valor de α, con lo que basta ver la otra inclusión.

Observemos que como X e Y son espacios polacos, por el Teorema 2.1.1, se tiene que Y será un G_δ en X, y por el Teorema 2.2.1
$$Y \in \Pi^0_2(X) \subset \Delta^0_\alpha(X).$$
Así, si es $B = A \cap Y$ con $A \in \Sigma^0_\alpha(X)$ o $A \in \Pi^0_\alpha(X)$, entonces por la Proposición 2.2.4 $B \in \Sigma^0_\alpha(X)$ o $B \in \Pi^0_\alpha(X)$ respectivamente, y como es claro que $B \subset Y$ se da la inclusión deseada. ■

2.2.2. Aplicaciones medibles

Estudiaremos en esta subsección los morfismos que relacionan distintas clases de Borel entre sí, para lo cual daremos una definición general que luego particularizaremos en tres resultados que nos darán las propiedades más importantes sobre estos morfismos.

Definición 2.2.2. *Una **clase de conjuntos** en una clase $\mathcal{X}$ de espacios topológicos es una aplicación Γ tal que a cada espacio topológico $X \in \mathcal{X}$ le asigna un conjunto $\Gamma(X) \in \mathcal{P}(X)$.*

*Llamaremos **clase dual** de Γ a la clase $\neg\Gamma$ dada por*
$$\neg\Gamma(X) = \{X \setminus A : A \in \Gamma(X)\}.$$
*La **clase ambigua** de Γ es la clase $\Delta = \Gamma \cap \neg\Gamma$.*

Definición 2.2.3. *Si Γ es una clase de conjuntos en una clase $\mathcal{X}$ de espacios topológicos, una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre dos espacios de $\mathcal{X}$ se dice que es **Γ-medible** si para todo abierto A en Y se cumple que $f^{-1}(A) \in \Gamma(X)$.*

Así en nuestro contexto consideraremos que $\mathcal{X}$ es la clase de los espacios metrizables y nuestras clases de conjuntos serán las distintas clases de la jerarquía de Borel. Por tanto, los morfismos importantes en este contexto serán las aplicaciones Σ^0_α-medibles.

Observemos de hecho que dados dos espacios metrizables X, Y las aplicaciones Σ^0_1-medibles no son más que las aplicaciones continuas, luego las aplicaciones Σ^0_α-medibles no son más que generalizaciones de las aplicaciones continuas.

Por definición, las aplicaciones Σ^0_α-medibles entre dos espacios metrizables X e Y únicamente nos relacionan los abiertos Y con los conjuntos de $\Sigma^0_\alpha(X)$, pero como muestra el siguiente teorema realmente nos dan mucha más información.

Teorema 2.2.6. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación Σ^0_α-medible entre dos espacios metrizables, entonces para cada ordinal β y cada $A \in \Sigma^0_{1+\beta}(Y)$, $B \in \Pi^0_{1+\beta}(Y)$ se cumple que $f^{-1}(A) \in \Sigma^0_{\alpha+\beta}(X)$ y $f^{-1}(B) \in \Pi^0_{\alpha+\beta}(X)$.*

<u>Demostración:</u>

Veamos en primer lugar, por inducción transfinita sobre β, que el teorema es cierto para cada $A \in \Sigma^0_{1+\beta}(Y)$.

Si $\beta = 0$ entonces A es abierto en Y y por definición $f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\alpha(X) = \Sigma^0_{\alpha+\beta}(X)$.

Supongamos ahora que es cierto para cada $\delta < \beta$ y sea $A \in \Sigma^0_{1+\beta}(Y)$.

Por definición, será

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

con[14] $A_n \in \Pi^0_{1+\delta_n}(Y)$ para ciertos $\delta_n < \beta$.

Entonces, como $\alpha + \delta_n < \alpha + \beta$ para cada $n \geq 1$ y

$$f^{-1}(A_n) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A_n) \underset{\text{(HI)}}{\in} \Pi^0_{\alpha+\delta_n}(X),$$

concluimos que efectivamente

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) \in \Sigma^0_{\alpha+\beta}(X).$$

Por inducción transfinita el resultado será cierto para cada β y cada $A \in \Sigma^0_{1+\beta}(Y)$, con lo que únicamente queda verlo para $B \in \Pi^0_{1+\beta}(Y)$.

Sin más, tenemos que $B = Y \setminus A$ para algún $A \in \Sigma^0_{1+\beta}(Y)$ y por lo visto anteriormente

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \Pi_{\alpha+\beta}(X)$$

concluyendo la demostración. ■

Observemos que si en el teorema anterior $\beta \geq \omega$, por el Lema D.4, podemos decir que si $A \in \Sigma^0_\beta(Y)$ y $B \in \Pi^0_\beta(Y)$ entonces $f^{-1}(A) \in \Sigma^0_{\alpha+\beta}(X)$ y $f^{-1}(B) \in \Pi^0_{\alpha+\beta}(X)$.

[14] Ver Lema D.5.

Aún más, el teorema anterior nos dice en particular que si $f : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios metrizables, entonces dado $A \in \Sigma^0_\beta(Y)$ o $A \in \Pi^0_\beta(Y)$, se tiene que $f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\beta(X)$ o $f^{-1}(A) \in \Pi^0_\beta(X)$ respectivamente.

Efectivamente, si $1 \leq \beta < \omega$ entonces β es un número natural y podemos expresar que $A \in \Sigma^0_{1+(\beta-1)}(Y)$ o $A \in \Pi^0_{1+(\beta-1)}(Y)$, y por el teorema anterior es claro.

Por otra parte, si $\beta \geq \omega$ entonces por el Lema D.4 se da que $\beta = 1 + \beta$ y nuevamente por el teorema es claro el resultado buscado.

Por esta propiedad de las funciones continuas, diremos entonces que las clases de Borel son **cerradas por sustituciones continuas**.

El siguiente corolario nos da una caracterización de las aplicaciones Σ^0_α-medibles para espacios con base numerable, luego por ejemplo para espacios polacos, por lo que resulta ciertamente útil.

Corolario 2.2.7. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios metrizables tales que Y tiene una base numerable $\mathcal{B}_Y$ y $1 \leq \alpha \leq \omega_1$. Entonces f es Σ^0_α-medible si, y solo si, para todo $A \in \mathcal{B}_Y$ se cumple que $f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\alpha(X)$.*

Demostración:

Por definición, para ver la implicación recíproca, basta ver que dado $A \subset Y$ abierto es

$$f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\alpha(X).$$

Esto es inmediato pues como $\mathcal{B}_Y$ es base numerable será $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ para ciertos $A_n \in \mathcal{B}_Y$ y como

$$f^{-1}(A_n) \in \Sigma^0_\alpha(X),\ \forall n \geq 1,$$

aplicando la Proposición 2.2.4

$$f^{-1}(A) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \bigcup_{n=1}^\infty f^{-1}(A_n) \in \Sigma^0_\alpha(X).$$

La implicación directa es trivial pues todo elemento de $\mathcal{B}_Y$ es abierto, luego el coralario queda demostrado. ■

Por último daremos también una caracterización para las aplicaciones $\Sigma^0_{\omega_1}$-medibles, las cuales denominaremos **aplicaciones medibles Borel**.

Teorema 2.2.8. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación entre espacios metrizables tales que Y es separable. Entonces f es medible Borel si, y solo si, es Σ^0_α-medible para algún $1 \leq \alpha < \omega_1$.*

Demostración:

Si f es Σ^0_α-medible para algún $1 \leq \alpha < \omega_1$ entonces dado A abierto en Y será

$$f^{-1}(A) \in \Sigma^0_\alpha(X) \subset \mathcal{B}(X)$$

con lo que efectivamente es medible Borel.

Recíprocamente, sea f medible Borel y $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base numerable de Y, la cual existe por el Teorema 1.1.8.

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos por el Teorema 2.2.2 que

$$f^{-1}(U_n) \in \mathcal{B}(X) = \bigcup_{0<\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha^0(X),$$

con lo que existe $\alpha_n < \omega_1$ tal que

$$f^{-1}(U_n) \in \Sigma_{\alpha_n}^0(X).$$

Definiendo ahora

$$\alpha = \sup\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n$$

tendremos que al ser cada α_n numerable (pues $\alpha_n < \omega_1$) será α numerable y así $\alpha < \omega_1$.

Por el Teorema 2.2.1 es entonces

$$f^{-1}(U_n) \in \Sigma_{\alpha_n}^0(X) \subset \Sigma_\alpha^0(X),\ \forall n \geq 1$$

y aplicando el corolario anterior, f es Σ_α^0-medible y concluimos la prueba. ■

2.2.3. Cambios en la topología polaca

Para finalizar la sección, enunciaremos dos teoremas que muestran lo flexibles que son los espacios polacos respecto a la σ-álgebra de Borel. Concretamente veremos que es posible extender su topología sin que dejen de ser polacos y sin variar sus conjuntos de Borel pero obteniendo propiedades adicionales para ciertos subconjuntos del espacio.

Antes, veamos un lema que nos permite "unir" espacios polacos, y que nos servirá para probar los teoremas citados.

Lema 2.2.9. *Si X e Y son dos espacios polacos disjuntos, entonces $X \cup Y$ admite una topología de espacio polaco que restringida a cada uno de los dos conjuntos es su topología original y en la que ambos son abiertos y cerrados.*

Demostración:

Fijemos métricas completamente compatibles ρ_X y ρ_Y para X e Y respectivamente las cuales, por lo visto tras el Teorema 1.1.2, podemos considerar además acotadas por 1.

Definamos pues $\rho : (X \cup Y) \times (X \cup Y) \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\rho(x,y) = \begin{cases} \rho_X(x,y) & \text{si} \quad x,y \in X \\ \rho_Y(x,y) & \text{si} \quad x,y \in Y \\ 2 & \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observemos que, puesto que X e Y son disjuntos, la aplicación está bien definida y veamos en primer lugar que ρ es una métrica.

Como ρ_X y ρ_Y son métricas, ρ es claramente simétrica y además

$$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x,y \in X \wedge \rho_X(x,y) = 0) \vee ((x,y) \in Y \wedge \rho_Y(x,y) = 0) \Leftrightarrow x = y.$$

Por tanto, resta únicamente ver la desigualdad triangular.

Si $x, y \in X$ y $z \in X$ la desigualdad triangular no es más que la de ρ_X, y si $z \in Y$

$$\rho(x, z) = 2 \leq \rho_X(x, y) + 2 = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

De forma análoga se cumple la desigualdad si $x, y \in Y$, luego resta el caso en el que $x \in X$ e $y \in Y$, o viceversa, pero este es análogo por la simetría de ρ.

Si es $z \in X$ entonces

$$\rho(x, z) = \rho_X(x, z) < 4 = 2 + 2 = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

y si es $z \in Y$ entonces

$$\rho(x, z) = 2 \leq 2 + \rho_Y(y, z) = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

En cualquier caso se da la desigualdad triangular y es ρ es efectivamente una métrica.

Denotemos ahora por τ la topología de $X \cup Y$ inducida por ρ y por σ_X, σ_Y las topologías de X e Y respectivamente.

Entonces, si es τ_X la topología relativa a X en $X \cup Y$, sabemos que τ_X está inducida por la métrica ρ restringida a X la cual, por definición, será ρ_X. Así, tanto τ_X como σ_X están inducidas por ρ_X y podemos concluir que $\tau_X = \sigma_X$.

De forma análoga se ve para Y y efectivamente tenemos que al restringir la topología en $X \cup Y$ a X, Y recuperamos las topologías originales.

Veamos ahora que X e Y son abiertos y cerrados en $X \cup Y$.

Observemos que dado $x \in X$ cualquiera, por la definición de ρ y la acotación de ρ_X se tiene que

$$X = B_\rho\left(x, \frac{3}{2}\right) = \overline{B_\rho}\left(x, \frac{3}{2}\right),$$

lo cual prueba que X es abierto y cerrado en $X \cup Y$, y análogamente se ve para Y.

Resta únicamente ver que $X \cup Y$ con la topología inducida por ρ es efectivamente un espacio polaco.

En primer lugar, como X e Y son separables existen $A \subset X$, $B \subset Y$ numerables y densos en X e Y respectivamente.

Veamos pues que $A \cup B$, que es claramente numerable, es denso en $X \cup Y$.

Observemos que como X e Y son cerrados en $X \cup Y$ y $A \subset X$, $B \subset Y$ tenemos que $\mathrm{cl}_\tau(A) \subset X$ y $\mathrm{cl}_\tau(B) \subset Y$, con lo que

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}_\tau(A \cup B) &= \mathrm{cl}_\tau(A) \cup \mathrm{cl}_\tau(B) = (X \cap \mathrm{cl}_\tau(A)) \cup (Y \cap \mathrm{cl}_\tau(B)) = \mathrm{cl}_{\tau_X}(A) \cup \mathrm{cl}_{\tau_Y}(B) = \\ &= \mathrm{cl}_{\sigma_X}(A) \cup \mathrm{cl}_{\sigma_Y}(B) = X \cup Y.\end{aligned}$$

Esto prueba que efectivamente $A \cup B$ es denso en $X \cup Y$ y con ello que el espacio es separable.

Para finalizar, debemos ver que $(X \cup Y, \tau)$ es completamente metrizable y, por la definición de τ, basta entonces ver que ρ es una métrica completa.

Si $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $(X \cup Y, \rho)$ entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0$ se cumple que

$$\rho(z_n, z_m) < 2.$$

Así, se tiene que $\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subset X$ o $\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty} \subset Y$.

Por tanto, $\{z_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ será de Cauchy en (X, ρ_X) o en (Y, ρ_Y), y por ser estos espacios completos, converge a cierto z en X o en Y.

Puesto que (X, σ_X) e (Y, σ_Y) son subespacios de $(X \cup Y, \tau)$, tenemos que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a z en $X \cup Y$ y el espacio es efectivamente completo. ■

Teorema 2.2.10. *Si X es un espacio polaco y $F \subset X$ un conjunto cerrado, entonces existe una topología en X más fina que la dada con la que X es polaco, sus conjuntos de Borel son los mismos y F es abierto y cerrado.*

Demostración:

Como F es cerrado tenemos que $X \setminus F$ es abierto y, por el Teorema 2.2.1, tenemos que ambos son conjuntos G_δ en X. Así, por el Teorema 2.1.1 son espacios polacos con la topología relativa.

Denotemos pues por
$$X^* = F \cup (X \setminus F)$$
al conjunto X con la topología dada por el lema anterior.

Por dicho lema tenemos que X^* es polaco y F, $X \setminus F$ son abiertos y cerrados en X^*.

Además, si U es abierto en X entonces $U \cap F$ y $U \cap (X \setminus F)$ son abiertos en F y $X \setminus F$ con las topologías relativas a X pero, por el lema anterior, dichas topologías son las mismas que las inducidas en F y $X \setminus F$ por X^*, con lo que $U \cap F$ y $U \cap (X \setminus F)$ son abiertos en F y $X \setminus F$ con las topologías relativas a X^*.

Como F y $X \setminus F$ son abiertos en X^*, tenemos que $U \cap F$ y $U \cap (X \setminus F)$ serán entonces abiertos en X^* y así
$$U = (U \cap F) \cup (U \cap (X \setminus F))$$
es abierto en X^*.

Esto prueba que la topología en X^* es más fina que la de X y en particular que
$$\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X^*),$$
con lo que basta demostrar la inclusión contraria para concluir la prueba.

Sea pues U abierto en X^* y expresemos
$$U = (U \cap F) \cup (U \cap (X \setminus F)). \tag{2.18}$$

Por la misma razón que antes, resulta que $U \cap F$ y $U \cap (X \setminus F)$ son abiertos respectivamente en F y $X \setminus F$ al dotarlos de la topología inducida por X, con lo que existen V_1, V_2 abiertos en X tales que
$$U \cap F = V_1 \cap F \in \mathcal{B}(X),$$
$$U \cap (X \setminus F) = V_2 \cap (X \setminus F) \in \mathcal{B}(X).$$

Por (2.18) tenemos entonces que $U \in \mathcal{B}(X)$, y por la arbitrariedad de U, que todo abierto de X^* está en $\mathcal{B}(X)$.

Por definición de la σ-álgebra de Borel queda demostrado que
$$\mathcal{B}(X^*) \subset \mathcal{B}(X)$$
y concluimos la demostración. ■

Teorema 2.2.11. *Si X un espacio polaco y $B \subset X$ un conjunto de Borel, entonces existe una topología en X más fina que la dada con la que X es polaco, sus conjuntos de Borel son los mismos y B es abierto y cerrado.*

Demostración:

Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los subconjuntos de X que cumplen el teorema, es decir, $B \in \mathcal{B}$ si, y solo si, existe una topología en X más fina que la dada con la que X es polaco, sus conjuntos de Borel son los mismos y B es abierto y cerrado.

Por el teorema anterior tenemos que $\mathcal{B}$ contiene a los cerrados, luego en particular contiene a X y es no vacío.

Además, si $C \in \mathcal{B}$ entonces $X \setminus C \in \mathcal{B}$.

Efectivamente, si es X^* el conjunto X dotado de la topología tal que C satisface las condiciones dichas, entonces para esa misma topología $X \setminus C$ también lo satisface pues al ser C cerrado y abierto $X \setminus C$ también lo es.

En particular, tenemos que los abiertos también están en $\mathcal{B}$ y si vemos que es una σ-álgebra sobre X entonces $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}$ y el teorema quedaría demostrado.

Como ya hemos visto que $X \in \mathcal{B}$ y que es cerrado para complementos, para concluir la demostración basta ver que es cerrado para intersecciones numerables.

Sea pues $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{B}$, $A = \bigcap A_n$ y denotemos por X_n el mismo conjunto X pero dotado de la topología en las condiciones del enunciado para cada A_n.

El resto de la demostración consistirá pues en probar que $A \in \mathcal{B}$.

Por el Teorema 2.1.2 tenemos entonces que $P = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ es también un espacio polaco y denotemos por $j : X \longrightarrow P$ la aplicación diagonal, es decir, $j(x) = \{x\}_{n=1}^{\infty}$.

Veamos en primer lugar que $j(X)$ es cerrado en P, demostrando para ello que $P \setminus j(X)$ es abierto.

Si es $x \in P \setminus j(X)$ existen índices $i, j \geq 1$ tales que $x_i \neq x_j$ y como X es Hausdorff (pues es metrizable) existen abiertos disjuntos U_i, U_j en X tales que $x_i \in U_i$ y $x_j \in U_j$.

Ahora, como las topologías en X_i, X_j son más finas que la de X, tenemos que U_i, U_j son abiertos en X_i, X_j respectivamente y además se cumple que

$$x \in \pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(U_j).$$

Por la continuidad de las proyecciones tenemos que $\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(U_j)$ es abierto en P y además está contenido en $P \setminus j(X)$ pues si $z \in \pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(U_j)$, entonces $z_i \in U_i, z_j \in U_j$ y como son disjuntos $z_i \neq z_j$.

Con todo, $\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(U_j)$ es un entorno abierto de x contenido en $P \setminus j(X)$ y por ser x un punto arbitrario, concluimos que efectivamente $P \setminus j(X)$ es abierto.

Así $j(X)$ es cerrado en P, con lo que por el Teorema 2.2.1 será un G_δ en P y del Teorema 2.1.1 obtenemos que es un espacio polaco.

Sea ahora X^* el conjunto X con la topología incial en X inducida por j.

Como j es claramente inyectiva y X^* está dotado de la topología incial en X inducida por j, tenemos que $j : X^* \longrightarrow j(X)$ es un homeomorfismo.

Es decir, X^* y $j(X)$ son homeomorfos y como este último es polaco, concluimos que X^* es polaco.

Por otra parte, observemos que una base de P la forman las intersecciones finitas de abiertos $\pi_i^{-1}(U_i)$ con U_i abierto en X_i e $i \in \mathbb{N}$, con lo que una base de $j(X)$ está dada por las intersecciones finitas de abiertos de la forma $\pi_i^{-1}(U_i) \cap j(X)$.

Como j es un homeomorfismo, lo anterior muestra que una base de X^* la forman las intersecciones finitas de abiertos de la forma

$$j^{-1}\left(\pi_i^{-1}(U_i) \cap j(X)\right) = j^{-1}\left(\pi_i^{-1}(U_i)\right) \cap X \underset{15}{=} U_i,$$

con U_i abierto en X_i e $i \in \mathbb{N}$.

En particular, como todo abierto de X es abierto en cualquier X_i, tenemos que todo abierto de X es abierto en X^* y así topología de X^* es más fina que la de X.

Esto último también prueba que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{B}(X^*)$ y basta pues ver la otra inclusión.

Sin más, como para cada U_i abierto en X_i se cumple que

$$U_i \in \mathcal{B}(X_i) = \mathcal{B}(X),$$

tenemos que[16] cualquier abierto de X^* está en $\mathcal{B}(X)$, lo que prueba que $\mathcal{B}(X^*) \subset \mathcal{B}(X)$ y en definitiva que $\mathcal{B}(X^*) = \mathcal{B}(X)$.

Observemos ahora que cada A_i es abierto y cerrado en X_i con lo que por lo visto también lo son en X^* y, como A es intersección numerable de estos, A será cerrado en X^*.

Por tanto, tenemos que X^* es un espacio polaco y A un cerrado en él, con lo que aplicando el Teorema 2.2.10 existe una topología polaca en X, que podemos denotar por X^{**} y que cumple:

- La topología en X^{**} es más fina que la de X^*, y por tanto que la de X.
- $\mathcal{B}(X^{**}) = \mathcal{B}(X^*) = \mathcal{B}(X)$.
- A es abierto y cerrado en X^{**}.

Con esto, concluimos que efectivamente $A \in \mathcal{B}$ y con ello la demostración. ■

[15] La última igualdad se obtiene de observar que

$$x \in j^{-1}\left(\pi_i^{-1}(U_i)\right) \Leftrightarrow x \in X \wedge j(x) \in \pi_i(U_i) \Leftrightarrow x \in X \wedge x = \pi_i(j(x)) \in U_i \Leftrightarrow x \in X \cap U_i = U_i.$$

[16] Por ser X^* polaco será metrizable y separable y del Teorema 1.1.8 concluimos que tiene una base numerable. Como además $\{U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k} : k \in \mathbb{N}, U_{i_j} \text{ es abierto en } X_{i_j}\}$ es base de X^*, el Teorema E.1 nos garantiza la existencia de una base numerable contenida en esta.
Así, como todos los elementos de dicha base son de Borel en X y todo abierto de X^* es unión numerable de estos, tenemos que efectivamente todo abierto en X^* es de Borel en X.

2.3. Conjuntos analíticos

Los conjuntos analíticos fueron descritos por primera vez en 1917 de la mano de los matemáticos soviéticos **Nikolai Lusin** y su alumno **Mikhail Suslin** en los artículos [30] y [36]. El enfoque original de dichos matemáticos consiste en construir los conjuntos analíticos como aquellos que pueden obtenerse a partir de los conjuntos de Borel mediante la operación de Suslin descrita en 2.1.4. Sin embargo, existe una definición mucho más práctica y sencilla de manejar la cual daremos a continuación, y relegaremos la equivalencia con la definición original al Teorema 2.3.6.

Definición 2.3.1. *Si X es un espacio polaco, un subconjunto $A \subset X$ es **analítico** si existe un espacio polaco Y, una aplicación continua $f : Y \longrightarrow X$ y un conjunto de Borel $B \in \mathcal{B}(Y)$ tales que $A = f(B)$.*

La familia de los conjuntos analíticos de X la denotaremos por $\Sigma_1^1(X)$ y la de sus complementarios, que denominaremos conjuntos **coanalíticos**, la denotaremos por $\Pi_1^1(X)$.

Por último, denotaremos por

$$\Delta_1^1(X) = \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X).$$

En esencia, la definición anterior nos dice que los conjuntos analíticos son las imágenes continuas de los conjuntos de Borel, con lo que en primer lugar es fácil ver que todo conjunto de Borel es analítico pues basta tomar en la definición anterior $Y = X$ y f como la identidad en X.

Además, observemos que los conjuntos analíticos se comportan respecto a los subespacios del mismo modo que vimos en el Teorema 2.2.5 para los conjuntos de Borel.

Proposición 2.3.1. *Si X es un espacio polaco e Y un subespacio polaco de X, entonces*

$$\Sigma_1^1(Y) = \{A \in \Sigma_1^1(X) : A \subset Y\} = \{A \cap Y : A \in \Sigma_1^1(X)\}.$$

Demostración:

Comencemos viendo la primera igualdad.

Si $A \subset Y$ es analítico entonces existe Z un espacio polaco, $f : Z \longrightarrow Y$ continua y $B \in \mathcal{B}(Z)$ tal que $A = f(B)$.

Si ahora definimos $\bar{f} : Z \longrightarrow X$ tal que $\bar{f}(z) = f(z)$ tenemos que dado $U \subset X$ abierto,

$$\bar{f}^{-1}(U) = \{z \in Z : \bar{f}(z) \in U\} = \{z \in Z : f(z) \in U \cap Y\} = f^{-1}(U \cap Y).$$

Por tanto, como $U \cap Y$ es abierto en Y, obtenemos que $\bar{f}^{-1}(U)$ es abierto en Z y con ello que $\bar{f}$ es continua.

Así, $A = \bar{f}(B)$ y efectivamente A es analítico en X y está contenido en Y.

Recíprocamente, si es $A \subset Y$ un conjunto analítico en X, tenemos que existe Z un espacio polaco, $f : Z \longrightarrow X$ continua y $B \in \mathcal{B}(Z)$ tal que $A = f(B)$.

Así, definimos $\overline{Z} = f^{-1}(Y)$ que será un espacio polaco[17] y $\bar{f} : \overline{Z} \longrightarrow Y$ como $\bar{f} = (f|_{\overline{Z}})\,|^{Y}$, que será claramente continua.

Además, como $f(B) = A \subset Y$ tenemos que

$$B \subset f^{-1}(Y) = \overline{Z}$$

y por el Teorema 2.2.5, $B \in \mathcal{B}(\overline{Z})$.

Con todo, $\bar{f} : \overline{Z} \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios polacos, $B \in \mathcal{B}(\overline{Z})$ y $\bar{f}(B) = f(B) = A$, obteniendo que efectivamente A es un subconjunto analítico de Y.

Respecto a la segunda igualdad, la inclusión de izquierda a derecha es trivial con lo que resta únicamente ver la otra inclusión.

Como Y es polaco sabemos que será un conjunto G_δ de X, luego un conjunto de Borel y por lo dicho antes de la proposición, un conjunto analítico en X.

Así, si es $B = A \cap Y$ con A analítico en X, como la intersección de conjuntos analíticos es un conjunto analítico (ver Teorema 2.3.3), tenemos que B es un conjunto analítico contenido en Y tal como deseábamos demostrar. ■

La notación $\Sigma_1^1(X)$ y $\Pi_1^1(X)$ para los conjuntos analíticos y coanalíticos no es caprichosa sino que son el primer eslabón en una jerarquía similar en forma a la jerarquía de Borel que se conoce como **jerarquía proyectiva** o **jerarquía de Lusin**. No entraremos en más detalles sobre estos conceptos los cuales se pueden consultar en cualquiera de los libros ya citados en la introducción del capítulo.

Veamos ahora una serie de equivalencias que serán útiles para probar distintos teoremas sobre conjuntos analíticos.

Teorema 2.3.2. *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$, son equivalentes:*

(i) *A es analítico;*

(ii) *$A \neq \varnothing$ o existe una función continua $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ tal que $f(\mathcal{N}) = A$;*

(iii) *Existe un cerrado $C \subset \mathcal{N} \times X$ tal que $A = \pi_X(C)$;*

(iv) *Existe un espacio polaco Y y un subconjunto de Borel $B \subset Y \times X$ tal que $A = \pi_X(B)$.*

Demostración:

(i) ⇒ (ii)

Supongamos que $A \neq \varnothing$, entonces como es analitico existe un espacio polaco Y, una función continua $h : Y \longrightarrow X$ y $B \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $A = h(B)$.

Ahora, por el Teorema 2.2.11 podemos considerar una topología más fina sobre Y (denotemos por Y^* al conjunto Y dotado de esta topología) de modo que B sea abierto y cerrado en Y^*.

[17] Como $Y \subset X$ es polaco, por el Teorema 2.1.1, se tiene que Y es un G_δ en X, con lo que por la continuidad de f y el Teorema 2.2.6 tenemos que

$$\overline{Z} = f^{-1}(Y)$$

es un G_δ en Z.
De nuevo, por el Teorema 2.1.1 concluimos que $\overline{Z}$ es un espacio polaco.

En particular, tenemos por el Teorema 2.1.1 que B será un espacio polaco al considerarlo con la topología relativa a Y^* y por el Teorema 2.1.11 que existe $g : \mathcal{N} \longrightarrow B$ continua y sobreyectiva.

Observemos que g será continua al considerar en B la topología relativa a Y^* pero, como esta es más fina que la topología de Y, tenemos que g es también continua considerando en B la topología relativa a Y.

Definiendo entonces $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ como $f = h \circ \iota \circ g$ (siendo $\iota : B \longrightarrow Y$ la inclusión, que es claramente continua) tenemos que es continua y

$$f(\mathcal{N}) = h(\iota(g(\mathcal{N}))) = h(\iota(B)) = h(B) = A.$$

(ii) ⇒ (iii)

Sea $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ dada por (ii) y definamos $h : \mathcal{N} \times X \longrightarrow X \times X$ tal que para cada par $(x, z) \in \mathcal{N} \times X$ sea $h(x, z) = (f(x), z)$.

Observemos entonces que h es continua, pues cada componente lo es.

Además, como X es Hausdorff tenemos por el Teorema A.1 (iii) que la diagonal

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$$

es un conjunto cerrado en $X \times X$.

Con todo, definiendo

$$\begin{aligned} C = h^{-1}(\Delta) = \{(x, z) \in \mathcal{N} \times X : h(x, z) \in \Delta\} = \{(x, z) \in \mathcal{N} \times X : f(x) = z\} = \\ = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

se tiene que es cerrado en $\mathcal{N} \times X$ y

$$\begin{aligned} \pi_X(C) &= \{z \in X : \exists (x, f(x)) \in C \text{ tal que } \pi_X(x, f(x)) = z\} = \\ &= \{z \in X : \exists x \in \mathcal{N} \text{ tal que } f(x) = z\} = f(\mathcal{N}) = A. \end{aligned}$$

(iii) ⇒ (iv)

Basta tomar $Y = \mathcal{N}$ y $B = C$.

(iv) ⇒ (i)

Por el Teorema 2.1.2 tenemos que $Y \times X$ es un espacio polaco, $\pi_X : Y \times X \longrightarrow X$ es continua, $B \in \mathcal{B}(Y \times X)$ y $A = \pi_X(B)$ con lo que, por definición, A es analítico en X. ■

Una primera consecuencia de las caracterizaciones anteriores es el siguiente teorema que nos dice que los conjuntos analíticos se comportan bien para uniones e intersecciones numerables.

Teorema 2.3.3. *Si X es un espacio polaco y $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una familia numerable de conjuntos analíticos en X, entonces la unión e intersección de dicha familia es también un conjunto analítico.*

Demostración:
Por el Teorema 2.3.2 (ii), para cada $n \in \omega$ existe $f_n : \mathcal{N} \longrightarrow X$ una función continua tal que $f_n(\mathcal{N}) = A_n$.
Definamos pues $f : \omega \times \mathcal{N} \longrightarrow X$ dada por $f(n,x) = f_n(x)$, que será continua ya que dado U abierto en X es

$$f^{-1}(U) = \{(n,x) \in \omega \times \mathcal{N} : f_n(x) \in U\} = \bigcup_{n\in\omega} \Big(\{n\} \times \{x \in \mathcal{N} : f_n(x) \in U\} \Big) = \\ = \bigcup_{n\in\omega} \Big(\{n\} \times f_n^{-1}(U) \Big)$$

siendo $\{n\} \times f_n^{-1}(U)$ abierto en $\omega \times \mathcal{N}$.
Ahora, por el Teorema 2.1.2, $\omega \times \mathcal{N}$ es polaco, f es continua, $\omega \times \mathcal{N} \in \mathcal{B}(\omega \times \mathcal{N})$ y

$$f(\omega \times \mathcal{N}) = \{f_n(x) : (n,x) \in \omega \times \mathcal{N}\} = \bigcup_{n\in\omega} f_n(\mathcal{N}) = \bigcup_{n\in\omega} A_n,$$

con lo que efectivamente $\bigcup A_n$ es analítico en X.
Definamos ahora

$$Z = \{x \in \mathcal{N}^\omega : \forall n, m \in \omega, f_m(x_m) = f_n(x_n)\}$$

y veamos que es cerrado en $\mathcal{N}^\omega$, observando que su complementario es abierto.
Sea pues $x \in \mathcal{N}^\omega \setminus Z$, entonces existen $m, n \in \omega$ tales que $f_m(x_m) \neq f_n(x_n)$ y como X es Hausdorff, existen abiertos disjuntos U_m, U_n tales que $f_m(x_m) \in U_m$ y $f_n(x_n) \in U_n$.
Si definimos pues

$$U = \prod_{i\in\omega} V_i$$

siendo $V_i = \mathcal{N}$ si $i \neq m, n$, $V_m = f_m^{-1}(U_m)$ y $V_n = f_n^{-1}(U_n)$, tendremos que U es un entorno abierto de x en $\mathcal{N}^\omega$ tal que $U \subset \mathcal{N}^\omega \setminus Z$.
Es claro que U es abierto y que $x \in U$, pero además si es $y \in U$ entonces $f_m(y_m) \in U_m$ y $f_n(y_n) \in U_n$, y al ser estos conjuntos disjuntos $f_m(y_m) \neq f_n(y_n)$, con lo que $y \notin Z$.
Por tanto, x es un punto interior de $\mathcal{N}^\omega \setminus Z$ y por ser arbitrario se tiene que efectivamente es un abierto en $\mathcal{N}^\omega$.
Con todo Z es cerrado en $\mathcal{N}^\omega$, que es un espacio polaco por el Teorema 2.1.2, y por los Teoremas 2.2.1 y 2.1.1 se tiene que Z es un espacio polaco.
Definamos ahora $g : Z \longrightarrow X$ tal que $g(x) = f_0(x_0)$ y observemos que g es continua.
Efectivamente, dado U abierto en X

$$g^{-1}(U) = \{x \in Z : g(x) \in U\} = \{x \in Z : f_0(x_0) \in U\} = \{x \in Z : x_0 \in f_0^{-1}(U)\} = \\ = \{x \in \mathcal{N}^\omega : x_0 \in f_0^{-1}(U)\} \cap Z = Z \cap \prod_{n\in\omega} Y_n$$

siendo $Y_0 = f_0^{-1}(U)$ e $Y_n = \mathcal{N}$ para $n \geq 1$, con lo que $g^{-1}(U)$ es abierto en Z.
En definitiva, tenemos que Z es polaco, $g : Z \longrightarrow X$ es continua y $Z \in \mathcal{B}(Z)$ con lo que si vemos que

$$g(Z) = \bigcap_{n\in\omega} A_n$$

por definición, la intersección será un conjunto analítico tal como queríamos ver.

Sin más, observemos que si $z \in g(Z)$ entonces existe un $x \in Z$ tal que

$$z = g(x) = f_0(x_0) \in A_0$$

y como $x \in Z$ tenemos que

$$z = f_0(x_0) = f_n(x_n) \in A_n, \;\; \forall n \in \omega,$$

con lo que efectivamente $z \in \bigcap A_n$.

Recíprocamente, si es z un elemento de $\bigcap A_n$, como $f_n(\mathcal{N}) = A_n$, para cada $n \in \omega$ existe $x_n \in \mathcal{N}$ tal que $f_n(x_n) = z$.

Por tanto, definiendo $x = \{x_n\}_{n\in\omega}$ se tiene que $x \in Z$ y

$$z = f_0(x_0) = g(x) \in g(Z),$$

con lo que concluimos la demostración. ■

Observemos que del resultado anterior se desprende claramente que las uniones e intersecciones finitas de conjuntos analíticos es también un conjunto analítico, pues para el caso de la unión bastaría considerar la cola de la sucesión formada por el conjunto vacío, que es analítico al ser de Borel; y para el de la intersección considerar la cola de la sucesión formada por el propio espacio X, que de nuevo es también analítico al ser de Borel.

Otro resultado importante que nos permiten probar las caracterizaciones anteriores es el buen comportamiento de los conjuntos analíticos respecto a las aplicaciones medibles Borel.

Teorema 2.3.4. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación medible Borel entre dos espacios polacos, se cumplen:*

(i) *Si $A \subset X$ es analítico, entonces $f(A)$ es analítico en Y.*

(ii) *Si $B \subset Y$ es analítico, entonces $f^{-1}(B)$ es analítico en X.*

Demostración:

Como $A \subset X$ es analítico, existe un espacio polaco Z, $g : Z \longrightarrow X$ continua y $B \in \mathcal{B}(Z)$ tal que $g(B) = A$.

Observemos entonces que si f fuese continua el teorema es cierto pues tendríamos que $f \circ g : Z \longrightarrow Y$ es continua y

$$(f \circ g)(B) = f(A),$$

con lo que por definición sería $f(A)$ analítico en Y.

Es decir, hemos visto que (i) es cierto para cualquier función continua.

Definamos pues

$$F = \{(x, y) \in X \times Y : x \in A \wedge y = f(x)\},$$

y observemos que

$$\pi_Y(F) = f(A).$$

Luego, como $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios polacos, si vemos que F es analítico en $X \times Y$, por lo visto anteriormente concluimos que efectivamente $f(A)$ será analítico en Y.

Para ver esto último, observemos que

$$F = G_f \cap (A \times Y)$$

donde G_f es la gráfica de f, y por el Teorema 2.3.3 basta comprobar que G_f y $A \times Y$ son analíticos en $X \times Y$.

En primer lugar, veamos que G_f es de Borel y por tanto, analítico.

Definamos $h : X \times Y \longrightarrow Y \times Y$ dada por $h(x, y) = (f(x), y)$ y veamos para comenzar que h es medible Borel.

Si es $U \times V$ un abierto básico de $Y \times Y$ se tiene que

$$h^{-1}(U \times V) = f^{-1}(U) \times V$$

que será de Borel[18] en $X \times Y$ al ser f medible Borel.

Ahora, como $Y \times Y$ es polaco tiene una base numerable, y al ser el conjunto de abiertos básicos una base del espacio, por el Teorema E.1 existe una base numerable formada por abiertos básicos. Aplicando pues el Corolario 2.2.7 junto a lo anterior obtenemos que efectivamente h es medible Borel.

Con esto, si denotamos por $\Delta = \{(y, y) : y \in Y\}$ sabemos por el Teorema A.1 (iii) que es cerrado y como $G_f = h^{-1}(\Delta)$, concluimos por el Teorema 2.2.6 que efectivamente $G_f \in \mathcal{B}(X \times Y)$.

Por otro lado, como A es analítico en X por el Teorema 2.3.2 (ii) existe $h : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continua tal que $h(\mathcal{N}) = A$.

Definiendo entonces $g : \mathcal{N} \times Y \longrightarrow X \times Y$ tal que $g(x, y) = (h(x), y)$ tenemos que g es continua (pues cada componente lo es), $\mathcal{N} \times Y$ es polaco y $\mathcal{N} \times Y \in \mathcal{B}(\mathcal{N} \times Y)$, con lo que por definición

$$A \times Y = g(\mathcal{N} \times Y)$$

será analítico en $X \times Y$.

Por todo lo dicho, queda demostrado en cualquier caso que $f(A)$ es analítico en Y.

Ahora, para el caso con $f^{-1}(B)$ se procede de forma completamente análoga considerando en este caso el conjunto

$$F' = \{(x, y) \in X \times Y : y \in B \wedge y = f(x)\}$$

y observando que $f^{-1}(B) = \pi_X(F')$. ■

---

[18] Es conocido que si es X el producto finito de espacios metrizables y separables $X_1, \cdots, X_n$, se cumple que $\mathcal{B}(X) = \otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$ donde $\otimes_{i=1}^n \mathcal{B}(X_i)$ es la σ-álgebra generada por el conjunto

$$\left\{ \prod_{i=1}^n B_i : B_i \in \mathcal{B}(X_i) \right\}.$$

Demostraciones de estos resultados pueden consultarse en [14, Props. 1.3, 1.5].

El teorema anterior nos dice en particular que un isomorfismo de Borel entre dos espacios polacos, es decir una aplicación medible Borel y biyectiva, hace corresponder de forma biunívoca los conjuntos analíticos de ambos espacios.

Pasemos ahora a demostrar la equivalencia entre la definición dada para los conjuntos analíticos y la original de Lusin y Suslin.

Recordamos que la definición original de conjunto analítico se basa en la operación de Suslin descrita en 2.1.4, luego remitimos al lector a dicha sección para refrescar, si es necesario, dicha definición y la notación empleada en torno a ella.

Resulta útil definir previamente una notación adecuada que facilitará las demostraciones.

Definición 2.3.2. *Si X es un conjunto no vacío y $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, definimos*

$$S(\Gamma) = \{A \in \mathcal{P}(X) : A = S(F) \text{ para algún esquema de Suslin } F \text{ con imagen en } \Gamma\}\,.$$

Es decir, $A \in S(\Gamma)$ si, y solo si, existe un esquema de Suslin $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \Gamma$ tal que $A = S(F)$ siendo S la operación de Suslin.

Teorema 2.3.5. *Si X es un conjunto no vacío y $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, entonces $S(S(\Gamma)) = S(\Gamma)$.*

Demostración:

Si $A \in S(\Gamma)$ consideremos el esquema de Suslin constante $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow S(\Gamma)$ tal que $F(s) = A$, entonces

$$S(F) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n) = A$$

y por definición $A \in S(S(\Gamma))$.

Recíprocamente, si es $A \in S(S(\Gamma))$ entonces existe un esquema de Suslin

$$F : \omega^{<\omega} \longrightarrow S(\Gamma)$$

tal que $A = S(F)$.

Además, para cada $s \in w^{<\omega}$ tenemos que $F(s) \in S(\Gamma)$ con lo que existirá otro esquema de Suslin $G_s : \omega^{<\omega} \longrightarrow \Gamma$ tal que $F(s) = S(G_s)$.

Así,

$$\begin{aligned} x \in A \Leftrightarrow x \in S(F) \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N} : \forall n \in \omega, x \in F(y|_n) \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N} : \forall n \in \omega, x \in S(G_{y|_n}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N} : \forall n \in \omega \left(\exists z \in \mathcal{N} : \forall m \in \omega, x \in G_{y|_n}(z|_m)\right) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists y \in \mathcal{N}, z \in \mathcal{N}^\omega : \forall n, m \in \omega, x \in G_{y|_n}(z_n|_m). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Fijemos ahora una biyección $g : \omega \times \omega \longrightarrow \omega$ tal que $g(0,0) = 0$ y cuya inversa representaremos por $g^{-1}(k) = (k_0, k_1)$.

Definamos entonces $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\omega$ como $f(u) = (u^1, u^2)$ siendo

$$u^1(n) = u(2n+1);$$
$$u^2_n(m) = u(2g(n,m)).$$

Veamos en primer lugar que f es una biyección.

Si son $f(u) = f(v)$ entonces $u^i = v^i$ para $i = 1, 2$ y así

$$u(2n+1) = v(2n+1),\ \forall n \in \omega;$$
$$u(2g(n,m)) = v(2g(n,m)),\ \forall n, m \in \omega.$$

Como g es sobreyectiva, tenemos pues que $u(n) = v(n)$ para cada $n \in \omega$ con lo que $u = v$ y es pues f inyectiva.

Para ver que es sobreyectiva, observemos que si es $(x, z) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\omega$ basta definir $u \in \mathcal{N}$ tal que dado $n \in \omega$, si $n = 2k$ entonces

$$u(n) = u(2k) = z_{k_0}(k_1),$$

y si $n = 2k + 1$

$$u(n) = u(2k+1) = x(k).$$

Pues así

$$u^1(n) = u(2n+1) = x(n),\ \forall n \in \omega,$$
$$u^2_n(m) = u(2g(n,m)) = z_n(m),\ \ \forall n, m \in \omega$$

y efectivamente $f(u) = (x, z)$.

Con esta nueva definición, tenemos que se cumple que

$$x \in A \underset{19}{\Leftrightarrow} \exists u \in \mathcal{N} : \forall k \in \omega, x \in G_{u^1|_{k_0}}(u^2_{k_0}|_{k_1}). \tag{2.20}$$

Además, de la definición de f observamos que para cada $k \in \omega$ se cumple que si tomamos

$$r > \max\{2k_0 - 1, \max\{2g(k_0, i) : 0 \leq i < k_1\}\} \tag{2.21}$$

entonces dado $u \in \mathcal{N}$, para todo $v \in B_{u|_r}$ se cumple que $v^1|_{k_0} = u^1|_{k_0}$ y $v^2_{k_0}|_{k_1} = u^2_{k_0}|_{k_1}$.

Efectivamente, dados $n < k_0$ y $m < k_1$ se tiene que

$$2n + 1 \leq 2k_0 - 1 < r$$

y

$$2g(k_0, m) < r$$

con lo que

$$v^1(n) = v(2n+1) = u(2n+1) = u^1(n),$$
$$v^2_{k_0}(m) = v(2g(k_0,m)) = u(2g(k_0,m)) = u^2_{k_0}(m).$$

---

[19] Si $x \in A$, por (2.19) existen $y \in \mathcal{N}, z \in \mathcal{N}^\omega$ tales que para cada $n, m \in \omega$ se cumple que $x \in G_{y|_n}(z_n|_m)$. Por tanto, tomando el único $u \in \mathcal{N}$ tal que $f(u) = (y, z)$, se tiene que dado $k \in \omega$ como $k_0, k_1 \in \omega$ será $x \in G_{u^1|_{k_0}}(u^2_{k_0}|_{k_1})$.

Recíprocamente, sea $u \in \mathcal{N}$ tal que para cada $k \in \omega$ se cumple que $x \in G_{u^1|_{k_0}}(u^2_{k_0}|_{k_1})$.
Entonces, tomando $(y, z) = f(u)$ se observa que dados $n, m \in \omega$ basta definir $k = g(n, m)$, es decir $(n, m) = (k_0, k_1)$, y tenemos que $x \in G_{y|_n}(z_n|_m)$, con lo que por (2.19) $x \in A$.

Definamos pues $\{r_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión estrictamente creciente tal que r_k satisface (2.21) para cada k y $r_0 = 0$, lo cual es posible pues si $k = 0$ entonces $(k_0, k_1) = (0, 0)$ y el máximo correspondiente en (2.21) vale -1.

Definamos también dos aplicaciones $\phi, \psi : \omega^{<\omega} \longrightarrow \omega^{<\omega}$ tales que dado $s \in \omega^{<\omega}$ sean[20]

$$\phi(s) = u^1|_{k_0},$$
$$\psi(s) = u^2_{k_0}|_{k_1}$$

siendo $k \in \omega$ el mayor natural tal que $r_k \leq \mathrm{lon}(s)$ y u cualquier elemento de $B_{s|_{r_k}}$.

Podemos definir entonces el esquema de Suslin $H : \omega^{<\omega} \longrightarrow \Gamma$ como $H(s) = G_{\phi(s)}(\psi(s))$, y obtenemos finalmente que

$$x \in A \underset{21}{\Leftrightarrow} \exists u \in \mathcal{N} : \forall n \in \omega, x \in H(u|_n). \tag{2.22}$$

Es decir, hemos obtenido que

$$x \in A \Leftrightarrow x \in S(H),$$

con lo que $A = S(H)$ y concluimos que $A \in S(\Gamma)$. ■

[20] Las aplicaciones ϕ y ψ están bien definidas.

Dado $s \in \omega^{<\omega}$ y $k \in \omega$ es el mayor natural tal que $r_k \leq \mathrm{lon}(s)$, definimos $w \in \mathcal{N}$ como $w_n = s_n$ si $n < r_k$ y $w_n = 0$ si $n \geq r_k$. Entonces, $B_{s|_{r_k}} = B_{w|_{r_k}}$ y por (2.21) tenemos que para todo $u \in B_{s|_{r_k}}$ se cumple que

$$u^1|_{k_0} = w^1|_{k_0}$$

y

$$u^2_{k_0}|_{k_1} = w^2_{k_0}|_{k_1},$$

lo que prueba que $\phi(s)$ y $\psi(s)$ son independientes de la elección de $u \in B_{s|_{r_k}}$.

[21] Si $x \in A$, por (2.20) existe cierto $u \in \mathcal{N}$ tal que para cada $k \in \omega$ se cumple que $x \in G_{u^1|_{k_0}}(u^2_{k_0}|_{k_1})$. Por tanto, dado $n \in \omega$ fijo observemos que si es $k \in \omega$ el mayor natural tal que $r_k \leq n$ se tiene que

$$(\phi(u|_n), \psi(u|_n)) = \left(u^1|_{k_0}, u^2_{k_0}|_{k_1}\right),$$

con lo que

$$x \in G_{u^1|_{k_0}}(u^2_{k_0}|_{k_1}) = H(u|_n).$$

Recíprocamente, supongamos que existe un $u \in \mathcal{N}$ tal que para cada $n \in \omega$ se cumple que $x \in H(u|_n)$. Entonces, dado $k \in \omega$ basta tomar $n = r_k$ y tenemos que

$$x \in H(u|_n) = G_{u^1|_{k_0}}(u^2_{k_0}|_{k_1}).$$

Por tanto, de (2.20) concluimos que efectivamente $x \in A$.

Teorema 2.3.6. *Sea X un espacio polaco y $A \subset X$, son equivalentes:*

(i) *A es analítico;*

(ii) *$A = S(F)$ donde F es un esquema de Suslin cerrado que cumple la condición de los diámetros, es decreciente (es decir, si $s \subset t$ entonces $F(t) \subset F(s)$) y tal que, si $A \neq \varnothing$ entonces $F(s) \neq \varnothing$ para todo $s \in \omega^{<\omega}$;*

(iii) *Lo mismo que* (ii) *pero con F abierto en lugar de cerrado;*

(iv) *$A = S(F)$ donde F es un esquema de Suslin analítico.*

<u>Demostración:</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Si $A = \varnothing$ entonces basta considerar el esquema de Suslin constante $F(s) = \varnothing$, el cual es cerrado, claramente cumple la condición de los diámetros y es decreciente.

Por tanto, consideremos que A es no vacío.

Por el Teorema 2.3.2 (ii) existe $f : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continua tal que $f(\mathcal{N}) = A$ y definamos $F : \omega^{<\omega} \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ como

$$F(s) = \overline{f(B_s)},$$

siendo cada B_s los conjuntos dados en el Lema 2.1.8.

Se cumplen entonces:

- F es cerrado.
- F es decreciente, pues si es $s \subset t$ entonces $B_t \subset B_s$ y así $f(B_t) \subset f(B_s)$, concluyendo que $F(t) = \overline{f(B_t)} \subset \overline{f(B_s)} = F(s)$.
- Para cada $s \in \omega^{<\omega}$ es claro que $B_s \neq \varnothing$ y con ello lo es $\overline{f(B_s)} = F(s)$.
- F cumple la condición de los diámetros.

  Sea ρ una métrica completamente compatible en X y $x \in \mathcal{N}$.

  Entonces, dado $\varepsilon > 0$ por la continuidad de f será $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon/2))$ un entorno abierto de x en $\mathcal{N}$ y por el Lema 2.1.8 existe pues $s \in \omega^{<\omega}$ tal que

  $$x \in B_s \subset f^{-1}\left(B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

  Así, si es $\operatorname{lon}(s) = n_0$ tenemos que $s = x|_{n_0}$ y para cada $n \geq n_0$

  $$f\left(B_{x|_n}\right) \subset f\left(B_{x|_{n_0}}\right) = f(B_s) \subset B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

  con lo que

  $$F(x|_n) \subset \overline{B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

  y así

  $$d(F(x|_n)) < \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Por tanto, F cumple todas las condiciones en (ii) y resta únicamente ver que $A = S(F)$.
Sin más, si $x \in \mathcal{N}$ por definición tenemos que

$$f(x) \in \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n)$$

y con ello $A = f(\mathcal{N}) \subset S(F)$.
Recíprocamente, si $y \in S(F)$ existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que

$$y \in \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n)$$

y entonces, para cada $n \in \omega$ tenemos que $y \in \overline{f(B_{x|_n})}$.
Por definición de clausura se tiene entonces que para cada $n \in \omega$

$$B\left(y, \frac{1}{n}\right) \cap f(B_{x|_n}) \neq \varnothing,$$

de donde obtenemos que existe cierto $x^n \in B_{x|_n}$ tal que

$$\rho(f(x^n), y) < \frac{1}{n}. \tag{2.23}$$

Como cada $x^n \in B_{x|_n}$ se tiene que[22] $x^n \longrightarrow x$ en $\mathcal{N}$, y por (2.23) y la continuidad de f

$$y = \lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(x).$$

Con todo, tenemos finalmente que $y \in f(\mathcal{N}) = A$.
(ii) ⇒ (iii)
Sea ρ una métrica completamente compatible en X para la cual F cumpla la condición de los diámetros y definamos para cada $s \in \omega^{<\omega}$ con $\text{lon}(s) = n$

$$F'(s) = \left\{x \in X : \rho(x, F(s)) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Entonces F' es un esquema de Suslin abierto que además cumple:

- F' es decreciente.

  Si es $s \subset t$ entonces por (ii) tenemos que $F(t) \subset F(s)$ y así dado $x \in X$ será

  $$\rho(x, F(s)) \leq \rho(x, F(t)).$$

  Por tanto, si son $m = \text{lon}(t)$, $n = \text{lon}(s)$ y $x \in F'(t)$ se tiene que

  $$\rho(x, F(s)) \leq \rho(x, F(t)) < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$$

  y efectivamente $x \in F'(s)$.

[22] Basta observar que si es V un entorno cualquiera de x en $\mathcal{N}$ entonces existe cierto $s \in \omega^{<\omega}$ tal que $x \in B_s \subset V$, por lo que si es $\text{lon}(s) = m$, se tiene que $s = x|_m$ y para cada $n \geq m$

$$x^n \in B_{x|_n} \subset B_{x|_m} = B_s \subset V.$$

- Si A es no vacío tenemos que dado $s \in \omega^{<\omega}$ es $F(s) \neq \varnothing$, y como $F(s) \subset F'(s)$ concluimos que $F'(s) \neq \varnothing$.

- F' cumple la condición de los diámetros.

  Observemos que dado $s \in \omega^{<\omega}$ con $\operatorname{lon}(s) = n$ y $x, y \in F'(s)$ se tiene que

  $$\rho(x, F(s)), \rho(y, F(s)) < 1/n,$$

  con lo que existen $z_1, z_2 \in F(s)$ tales que $\rho(x, z_1), \rho(y, z_2) < 1/n$ y así

  $$\rho(x, y) \leq \rho(x, z_1) + \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, y) < \frac{2}{n} + \rho(z_1, z_2).$$

  Por tanto, dado $x \in \mathcal{N}$ tenemos que

  $$d(F'(x|_n)) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in F'(x|_n)\} \leq \sup\left\{\frac{2}{n} + \rho(x, y) : x, y \in F(x|_n)\right\} = \\ = \frac{2}{n} + d(F(x|_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Así, F' cumple todo lo pedido por (iii) y resta únicamente ver que $S(F') = A$, para lo cual basta ver que $S(F') = S(F)$.

Sin más, observemos que dado $x \in \mathcal{N}$ como $F(x|_n)$ es cerrado y no vacío para cada $n \in \omega$ y se cumple que $\{F(x|_n)\}_{n\in\omega}$ es decreciente, por el teorema de intersección de Cantor[23] existe cierto $p \in X$ tal que

$$\bigcap_{n\in\omega} F(x|_n) = \{p\}.$$

Ahora, como para cada $n \in \omega$ es $F(x|_n) \subset F'(x|_n)$ se tiene que

$$p \in \bigcap_{n\in\omega} F'(x|_n),$$

y por la observación tras la Definición 2.1.4 obtenemos que

$$\bigcap_{n\in\omega} F'(x|_n) = \{p\} = \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n).$$

Con todo,

$$S(F') = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} F'(x|_n) = \bigcup_{x\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} F(x|_n) = S(F).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv)

Dado que todo conjunto de Borel es analítico, en particular todo abierto es analítico luego el esquema de Suslin F de (iii) es analítico y cumple que $A = S(F)$.

[23] Podemos aplicarlo pues (X, ρ) es completo y $d(F(x|_n)) \longrightarrow 0$.

(iv) ⇒ (i)
Si vemos que
$$\Sigma_1^1(X) = S\left(\Pi_1^0(X)\right)$$
por el Teorema 2.3.5 tendríamos que
$$S\left(\Sigma_1^1(X)\right) = S\left(S\left(\Pi_1^0(X)\right)\right) = S\left(\Pi_1^0(X)\right) = \Sigma_1^1(X),$$
y como por (iv) sabemos que
$$A = S(F) \in S\left(\Sigma_1^1(X)\right),$$
de lo anterior concluiríamos que $A \in \Sigma_1^1(X)$, es decir, que A es analítico.
Por (i) ⇒ (ii) ya sabemos que
$$\Sigma_1^1(X) \subset S\left(\Pi_1^0(X)\right)$$
con lo que resta únicamente demostrar la otra inclusión.
Sea pues $B \in S(\Pi_1^0(X))$, es decir $B = S(G)$ con G un esquema de Suslin cerrado, y consideremos el conjunto cerrado[24]
$$C = \{(x, y) \in \mathcal{N} \times X : \forall n \in \omega, y \in G(x|_n)\}.$$
Si vemos entonces que $B = \pi_X(C)$, por el Teorema 2.3.2 (iii) concluimos que $B \in \Sigma_1^1(X)$ lo que finalizaría la prueba.
Sin más, si es $y \in S(G)$ entonces existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que
$$y \in \bigcap_{n\in\omega} G(x|_n),$$
luego $(x, y) \in C$ y con ello $y \in \pi_X(C)$.
Recíprocamente, si es $y \in \pi_X(C)$ entonces existe un $x \in \mathcal{N}$ tal que $(x, y) \in C$, y por definición,
$$y \in \bigcap_{n\in\omega} G(x|_n) \subset \bigcup_{z\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} G(z|_n) = S(G)$$
lo que concluye la demostración. ■

---

[24] Veamos que $(\mathcal{N} \times X) \setminus C$ es abierto.

Dado $(x, y) \in (\mathcal{N} \times X) \setminus C$ existe un $n \in \omega$ tal que $y \notin G(x|_n)$ y como $G(x|_n)$ es cerrado en X, podemos definir el abierto $U = X \setminus G(x|_n)$.
Así, tenemos que
$$(x, y) \in B_{x|_n} \times U \subset (\mathcal{N} \times X) \setminus C,$$
pues si $(x', y') \in B_{x|_n} \times U$ entonces $x'|_n = x|_n$ e
$$y' \in U = X \setminus G(x|_n) = X \setminus G(x'|_n),$$
de donde $(x', y') \notin C$.
Esto prueba que $(\mathcal{N} \times X) \setminus C$ es entorno de cualquiera de sus puntos y por tanto, que es abierto.

Observemos que los apartados (ii) y (iii) del teorema anterior nos muestran que

$$\Sigma_1^1(X) \subset S\left(\Pi_1^0(X)\right)$$

y

$$\Sigma_1^1(X) \subset S\left(\Sigma_1^0(X)\right),$$

mientras que por (iv) tenemos que, como todo esquema de Suslin cerrado o abierto es analítico, se cumplen

$$S\left(\Pi_1^0(X)\right) \subset \Sigma_1^1(X)$$

y

$$S\left(\Sigma_1^0(X)\right) \subset \Sigma_1^1(X).$$

En definitiva, tenemos que

$$\Sigma_1^1(X) = S\left(\Pi_1^0(X)\right) = S\left(\Sigma_1^0(X)\right).$$

Aun más, como todo esquema Suslin que sea de Borel es analítico, de nuevo por (iv) será

$$S\left(\mathcal{B}(X)\right) \subset \Sigma_1^1(X),$$

y como $\Pi_1^0(X) \subset \mathcal{B}(X)$ también se tiene que

$$\Sigma_1^1(X) = S\left(\Pi_1^0(X)\right) \subset S\left(\mathcal{B}(X)\right)$$

de donde

$$\Sigma_1^1(X) = S(\mathcal{B}(X)).$$

Es decir, los conjuntos analíticos son aquellos que pueden obtenerse a partir aplicar la operación de Suslin a los conjuntos de Borel, que como hemos mencionado al comienzo de la sección fue la definición original dada por Suslin.

Observemos también que por (iv) en el teorema anterior tenemos que

$$S\left(\Sigma_1^1(X)\right) = \Sigma_1^1(X),$$

por lo que la operación de Suslin no proporciona nuevos conjuntos más allá de los conjuntos analíticos.

Hasta ahora, hemos dado varias caracterizaciones de los conjuntos analíticos y hemos visto que todo conjunto de Borel es analítico. Sin embargo, no parece obvio que haya conjuntos analíticos que no sean de Borel.

Como hemos mencionado en la introducción de este segundo capítulo, Suslin demostró que efectivamente existen conjuntos analíticos que no son de Borel y aún más, esto es cierto para cualquier espacio polaco no numerable como muestra el siguiente teorema cuya demostración puede consultarse en [26, Thm. 14.2].

Teorema 2.3.7. (Suslin) *Si X es un espacio polaco no numerable, entonces*

$$\mathcal{B}(X) \subsetneqq \Sigma_1^1(X).$$

Para finalizar la sección veremos dos resultados muy importantes sobre conjuntos analíticos, el teorema de separación de Lusin y la caracterización de Suslin de los conjuntos de Borel.

Definición 2.3.3. *Si X es un espacio polaco y P, Q dos subconjuntos disjuntos de X, diremos entonces que P y Q son* ***separables*** *si existe un conjunto de Borel $B \subset X$ tal que $P \subset B$ y $Q \cap B = \varnothing$.*

Teorema 2.3.8. (Teorema de separación de Lusin) *Si X un espacio polaco y P, Q dos subconjuntos analíticos de X disjuntos entre si, entonces P y Q son separables.*

Demostración:

Observemos en primer lugar que si $A = \bigcup_{m\in\omega} A_m$ y $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ son disjuntos y cada par A_m, B_n es separable por un conjunto de Borel $C_{m,n}$, entonces A y B son separables por

$$C = \bigcup_{m\in\omega} \bigcap_{n\in\omega} C_{m,n}.$$

Efectivamente se cumplen:

- $A \subset C$

  Si $x \in A$ entonces $x \in A_m$ para algún $m \in \omega$ y como $A_m \subset C_{m,n}$ para todo $n \in \omega$, efectivamente $x \in C$.

- $B \cap C = \varnothing$

  Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $x \in B \cap C$.

  Entonces existen ciertos $n, m \in \omega$ tales que $x \in B_n$ y $x \in \bigcap_{k\in\omega} C_{m,k}$, luego

  $$x \in B_n \cap C_{m,n}.$$

  Sin embargo, como $C_{m,n}$ separa A_m y B_n se tiene que $B_n \cap C_{m,n} = \varnothing$ y tenemos una contradicción.

Por otra parte, como P, Q son analíticos por el Teorema 2.3.2 (ii) existen $f, g : \mathcal{N} \longrightarrow X$ continuas tales que $f(\mathcal{N}) = P$ y $g(\mathcal{N}) = Q$.

Definamos ahora para cada $s \in \omega^{<\omega}$ los conjuntos $P_s = f(B_s)$ y $Q_s = g(B_s)$ con lo que

$$\left.\begin{aligned} P_s = f(B_s) = f\left(\bigcup_{m\in\omega} B_{s^\frown m}\right) = \bigcup_{m\in\omega} f(B_{s^\frown m}) = \bigcup_{m\in\omega} P_{s^\frown m} \\ Q_s = g(B_s) = g\left(\bigcup_{m\in\omega} B_{s^\frown m}\right) = \bigcup_{m\in\omega} g(B_{s^\frown m}) = \bigcup_{m\in\omega} Q_{s^\frown m} \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Supongamos pues por reducción al absurdo que P y Q no son separables, entonces como

$$P = f(\mathcal{N}) = f(B_\varnothing) = P_\varnothing$$

y

$$Q = g(\mathcal{N}) = g(B_\varnothing) = Q_\varnothing,$$

por (2.24) y lo visto al comienzo de la demostración tenemos que existen $s^1, t^1 \in \omega^{<\omega}$ de longitud 1 tales que P_{s^1} y Q_{t^1} no son separables.

De igual modo, como P_{s^1} y Q_{t^1} no son separables existen $s^2, t^2 \in \omega^{<\omega}$ de longitud 2 que extienden a s^1 y t^1 respectivamente y tales que P_{s^2} y Q_{t^2} no son separables.

Procediendo de este modo (y por medio del axioma de elección dependiente) podemos construir $x, y \in \mathcal{N}$ tales que $P_{x|_n}$ y $Q_{y|_n}$ no son separables para ningún $n \in \omega$.

Ahora, como $f(x) \in P$ y $g(y) \in Q$ siendo P y Q disjuntos, tenemos que $f(x) \neq g(y)$ y como X es Hausdorff existen abiertos disjuntos U y V de X tales que $f(x) \in U$ y $g(y) \in V$.

Entonces, como por el Lema 2.1.8 tenemos que $\{B_s : s \in \omega^{<\omega}\}$ es base de $\mathcal{N}$ y f, g son continuas, existirán $s, t \in \omega^{<\omega}$ tales que $x \in B_s$, $f(B_s) \subset U$ e $y \in B_t$, $g(B_t) \subset V$.

Por tanto, si son n, m las longitudes de s y t respectivamente, $s = x|_n$, $t = y|_m$ y tomando $k > \max\{n, m\}$ tenemos que

$$P_{x|_k} = f(B_{x|_k}) \subset f(B_s) \subset U$$

y

$$Q_{y|_k} = g(B_{x|_k}) \subset g(B_s) \subset V,$$

con lo que U separa $P_{x|_k}$ y $Q_{y|_k}$ y obtenemos la contradicción buscada. ■

Veamos ahora cómo se puede emplear el teorema de separación que acabamos de probar, para demostrar que los conjuntos de Borel son precisamente aquellos subconjuntos de X que son a la vez analíticos y coanalíticos.

Teorema 2.3.9. (Suslin) *Si X es un espacio polaco, entonces $\Delta^1_1(X) = \mathcal{B}(X)$.*

Demostración:

Si es $A \in \Delta^1_1(X)$ entonces tanto A como $X \setminus A$ son analíticos y por el teorema de separación anterior existe $B \in \mathcal{B}(X)$ tal que $A \subset B$ y $B \cap (X \setminus A) = \varnothing$.

Por tanto, de la segunda igualdad obtenemos que $B \subset A$ y así $A = B \in \mathcal{B}(X)$.

Recíprocamente, si es $A \in \mathcal{B}(X)$ entonces es claro que $A \in \Sigma^1_1(X)$.

Además, como $\mathcal{B}(X)$ es una σ-álgebra tenemos que $X \setminus A \in \mathcal{B}(X)$ y por tanto $X \setminus A$ también es analítico.

Con todo,

$$A = X \setminus (X \setminus A) \in \Pi^1_1(X)$$

y concluimos que efectivamente $A \in \Delta^1_1(X)$. ■

2.4. Espacios de Borel estándar

Finalizaremos esta introducción a la teoría descriptiva de conjuntos definiendo el concepto de espacio de Borel estándar y la estructura de Effros-Borel, la cual aparecerá en la codificación de Godefroy y Saint-Raymond.

Definición 2.4.1. *Un espacio medible (X, S) se dice que es un* ***espacio de Borel estándar*** *si existe una topología polaca sobre X tal que $S = \mathcal{B}(X)$.*

Observemos que si (X, S) es un espacio de Borel estándar, entonces para cualquier $B \in S$ se tiene que (B, S_B) es también un espacio de Borel estándar, donde

$$S_B = \{A \cap B : A \in S\}$$

la σ-álgebra relativa a B.

Efectivamente, si es (X, τ) un espacio polaco tal que $\mathcal{B}(X, \tau) = S$ entonces por el Teorema 2.2.11 existe τ' una topología polaca sobre X más fina tal que B es abierto y cerrado para dicha topología, pero tal que también $\mathcal{B}(X, \tau') = S$. Por tanto, por el Teorema 2.1.1, B con la topología relativa a τ' será un espacio polaco y por el Teorema 2.2.5

$$\mathcal{B}(B) = \{A \cap B : A \in \mathcal{B}(X, \tau')\} = \{A \cap B : A \in S\} = S_B.$$

La observación anterior muestra también que la topología polaca que hace que un espacio de medida sea un espacio de Borel estándar no es única, y puesto que la jerarquía de Borel depende de la topología, no tiene sentido considerarla para espacios de Borel estándar. Sin embargo, puesto que los conjuntos de Borel si serán independientes de la topología, también lo serán los conjuntos analíticos y en general la jerarquía proyectiva que mencionamos en la sección anterior.

El ejemplo canónico sobre espacios de Borel estándar es la estuctura de Effros-Borel que se define como sigue.

Definición 2.4.2. *Si X es un espacio topológico y denotamos por $\mathcal{F}(X)$ la familia de sus subconjuntos cerrados, se define la* ***estructura de Effros-Borel*** *de X como el espacio medible $(\mathcal{F}(X), S)$ donde S es la σ-álgebra generada por el conjunto*

$$\{E^+(U) : U \text{ es abierto en } X\},$$

siendo

$$E^+(U) = \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \varnothing\}.$$

En general, la estuctura de Effros-Borel no es un espacio de Borel estándar pero el siguiente teorema garantiza que esto sí ocurre para espacios polacos.

Teorema 2.4.1. *Si X un espacio polaco, entonces la estructura de Effros-Borel de X es un espacio de Borel estándar.*

La demostración al teorema es bastante técnica y emplea algunas herramientas que se explican en los anexos, con lo que previamente a presentar la prueba en todo rigor veamos las ideas principales de la misma.

Si Z es un espacio topológico y denotamos por $\mathcal{K}(Z)$ la familia de sus subconjuntos compactos, es posible dotar a esta familia de una topología canónica, conocida como la topología de Vietoris.

Dicha topología no es más que la generada por la subbase

$$\mathcal{S} = \{C_U : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{I_U : U \text{ es abierto en } X\},$$

donde

$$C_U = \{K \in \mathcal{K}(X) : K \subset U\},$$
$$I_U = \{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap U \neq \varnothing\}.$$

Además, es posible demostrar que si Z es un espacio polaco entonces $\mathcal{K}(Z)$ con esta topología es también polaco[25].

La idea de la demostración consiste entonces en tomar un espacio $\overline{X}$, metrizable y compacto, que contenga de forma densa a X (ver Teorema B.5) y considerar la aplicación natural entre $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{K}(\overline{X})$ dada por

$$\varphi(F) = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(F).$$

Se prueba entonces que φ es inyectiva y que su imagen es un conjunto G_δ de $\mathcal{K}(\overline{X})$, luego por lo dicho anteriormente, un espacio polaco.

Al dotar entonces a $\mathcal{F}(X)$ de la topología inducida por φ obtenemos que es homeomorfo $\varphi(\mathcal{F}(X))$, luego es polaco.

La demostración concluye pues mostrando que, aunque la topología en $\mathcal{F}(X)$ depende del embedimiento de X en el compacto $\overline{X}$, la σ-álgebra de Borel es independiente y coincide con la estructura de Effros-Borel en X.

Demostración del Teorema 2.4.1:

Por el Teorema B.5 existe $\overline{X}$ un espacio metrizable y compacto tal que contiene a X como subespacio denso.

Consideremos ahora $\mathcal{K}(\overline{X})$ la familia de conjuntos compactos de $\overline{X}$ y definamos la aplicación $\varphi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{K}(\overline{X})$ dada por

$$\varphi(F) = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(F).$$

Dicha aplicación está bien definida pues todo cerrado en un espacio compacto es compacto, y además es inyectiva pues si $\varphi(F_1) = \varphi(F_2)$ entonces

$$F_1 = \mathrm{cl}_X(F_1) = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(F_1) \cap X = \varphi(F_1) \cap X = \varphi(F_2) \cap X = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(F_2) \cap X = \mathrm{cl}_X(F_2) = F_2.$$

Sabemos por el Corolario 2.1.5 que $\overline{X}$ es un espacio polaco y por el Teorema C.7 también lo será $\mathcal{K}(\overline{X})$ al dotarlo de la topología de Vietoris, con lo que si denotamos por

$$G = \mathrm{Im}(\varphi) = \{\mathrm{cl}_{\overline{X}}(F) : F \in \mathcal{F}(X)\}$$

y vemos que es un G_δ en $\mathcal{K}(\overline{X})$, concluimos que es un espacio polaco.

Afirmación 1: G es un conjunto G_δ de $\mathcal{K}(\overline{X})$.

Demostración de la Afirmación 1:

En primer lugar, veamos que dado $K \in \mathcal{K}(X)$ se tiene que

$$K \in G \Leftrightarrow K \cap X \text{ es denso en } K. \tag{2.25}$$

Efectivamente, si $K \in G$ entonces existe $F \in \mathcal{F}(X)$ tal que $K = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(F)$ y así

$$\mathrm{cl}_K(K \cap X) = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(K \cap X) \cap K = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(\mathrm{cl}_{\overline{X}}(F) \cap X) \cap K = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(F) \cap K = K.$$

Recíprocamente, si es $\mathrm{cl}_K(K \cap X) = K$ entonces

$$K = \mathrm{cl}_K(K \cap X) = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(K \cap X) \cap K$$

[25] Ver Anexo C para más información.

con lo que $K \subset \mathrm{cl}_{\overline{X}}(K \cap X)$.

Ahora, como $\overline{X}$ es Hausdorff y K compacto, tenemos que K es cerrado en $\overline{X}$ y definiendo $F = K \cap X$ se da que $F \in \mathcal{F}(X)$.

Con todo, como $F \subset K$ tenemos que

$$K \subset \mathrm{cl}_{\overline{X}}(K \cap X) = \mathrm{cl}_{\overline{X}}(F) \subset \mathrm{cl}_{\overline{X}}(K) = K$$

y tenemos pues que $K = \varphi(F) \in G$.

Observemos ahora que como $\overline{X}$ es metrizable y X completamente metrizable, por el Teorema 1.1.7 (ii) se tiene que X es un G_δ en $\overline{X}$ y existe pues una sucesión de abiertos $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ en $\overline{X}$ tales que

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Además, puesto que $\overline{X}$ es serparable, por el Teorema 1.1.8 existe también $\{V_m\}_{m=1}^\infty$ una base numerable de $\overline{X}$.

Con todo, tenemos por (2.25) que dado $K \in \mathcal{K}(X)$,

$$K \in G \Leftrightarrow K \cap X \text{ es denso en } K \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty}(K \cap U_n) \text{ es denso en } K. \tag{2.26}$$

Demostremos a continuación que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(K \cap U_n) \text{ es denso en } K \Leftrightarrow K \cap U_n \text{ es denso en } K \text{ para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Sin más, observemos que dado $n \in \mathbb{N}$

$$K = \mathrm{cl}_K\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}(K \cap U_k)\right) \subset \mathrm{cl}_K(K \cap U_n) \subset \mathrm{cl}_K(K) = K$$

con lo que efectivamente $K \cap U_n$ es denso en K.

Y recíprocamente, como K es completamente metrizable (pues es cerrado en $\overline{X}$ y podemos aplicar el Teorema 2.1.1) y $\{K \cap U_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de abiertos densos en K, por el teorema de categorías de Baire tendremos que efectivamente

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(K \cap U_n)$$

es denso en K.

Aún más, veamos que

$$\begin{aligned} &K \cap U_n \text{ es denso en } K \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \\ &\qquad \Leftrightarrow \forall n, m \in \mathbb{N}, (K \cap V_m \neq \varnothing \Rightarrow K \cap (V_m \cap U_n) \neq \varnothing). \end{aligned} \tag{2.28}$$

Efectivamente, dados $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $V_m \cap K \neq \varnothing$ tenemos que $V_m \cap K$ es un abierto no vacío en K y por ser $K \cap U_n$ denso en K será

$$K \cap (V_m \cap U_n) = (K \cap U_n) \cap (K \cap V_m) \neq \varnothing.$$

Recíprocamente, tenemos que dado $n \in \mathbb{N}$ fijo para cada m tal que $V_m \cap K \neq \varnothing$ se cumple que
$$(K \cap U_n) \cap (K \cap V_m) \neq \varnothing.$$
Entonces, como $\{V_m \cap K\}_{m=1}^{\infty}$ base de K, obtenemos que efectivamente $K \cap U_n$ es denso en K.

Con todo, si denotamos por
$$I = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 : K \cap V_m \neq \varnothing\},$$
de (2.26), (2.27) y (2.28) obtenemos que
$$G = \bigcap_{(n,m)\in I} \{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap (V_m \cap U_n) \neq \varnothing\}$$
y queda pues demostrado que es un G_δ en $\mathcal{K}(X)$. ■

Así, $\varphi : \mathcal{F}(X) \longrightarrow G$ es una biyección siendo G un espacio polaco, con lo que si consideramos la topología incial inducida por φ en $\mathcal{F}(X)$, se cumple que $\mathcal{F}(X)$ es homeomorfo a G y con ello un espacio polaco.

Resta pues únicamente ver que la σ-álgebra de Borel en $\mathcal{F}(X)$ dada por esta topología es precisamente la estructura de Effros-Borel en el espacio X.

Por el Teorema C.8 sabemos que $\mathcal{B}(\mathcal{K}(\overline{X}))$ está generada por los conjuntos
$$\left\{K \in \mathcal{K}(\overline{X}) : K \cap U \neq \varnothing\right\}$$
para cada abierto U de $\overline{X}$ y que por el Teorema 2.2.5 es
$$\mathcal{B}(G) = \left\{G \cap A : A \in \mathcal{B}\left(\mathcal{K}(\overline{X})\right)\right\}.$$
Por tanto, $\mathcal{B}(G)$ está generado por los conjuntos
$$\{K \in G : K \cap U \neq \varnothing\}$$
para cada abierto U de $\overline{X}$.

Como φ es un homeomorfismo entre $\mathcal{F}(X)$ y G, $\mathcal{B}(\mathcal{F}(X))$ está generado por
$$\varphi^{-1}\left(\{K \in G : K \cap U \neq \varnothing\}\right) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \varphi(F) \cap U \neq \varnothing\}$$
para cada abierto U de $\overline{X}$.

Ahora bien, dado U abierto en $\overline{X}$ observemos que precisamente por el hecho de ser abierto será
$$\begin{aligned}\{F \in \mathcal{F}(X) : \varphi(F) \cap U \neq \varnothing\} = \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \varnothing\} = \\ = \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap (U \cap X) \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$
Además, como la topología original de X es la misma que la relativa a $\overline{X}$ al verlo como subespacio tenemos que
$$\left\{U \cap X : U \text{ es abierto en } \overline{X}\right\} = \{V \subset X : V \text{ es abierto en } X\},$$
con lo que concluimos que $\mathcal{B}(\mathcal{F}(X))$ está generado por
$$\{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap V \neq \varnothing\}$$
para cada V abierto en X, que es precisamente la estructura de Effros-Borel en X. ■

Capítulo 3

Codificaciones de los espacios de Banach separables

La idea tras este capítulo es codificar los espacios de Banach separables como puntos de un espacio polaco para estudiar la complejidad de sus estructuras básicas así como para arrojar luz sobre cuestiones acerca de clasificación o problemas de universalidad.

Puesto que la clase de todos los espacios de Banach separables no es un conjunto, no es posible imponer directamente una topología polaca y resulta necesario parametrizar de alguna forma esta clase.

La primera idea sobre dicha parametrización puede encontrarse en el artículo de Bossard [7], o con mayor detalle en su tesis [8] o la traducción y expansión del artículo original al inglés [9].

Bossard toma el espacio universalmente isométrico $Z = \mathcal{C}(\Delta)$, donde Δ es el conjunto de Cantor, y considera la familia de todos sus subconjuntos cerrados $\mathcal{F}(Z)$. Como Z es polaco, su estructura de Effros-Borel asociada será un espacio de Borel estándar y demuestra que $SB(Z)$, la familia de todos los subespacios cerrados de Z, también es polaco con la topología relativa. Por la universalidad de Z, codifica entonces los espacios de Banach separables como los elementos de $SB(Z)$, es decir, como los subespacios cerrados de Z.

Bajo este marco Bossard demuestra resultados muy interesantes entre los que, por la finalidad de este trabajo, destacamos dos de ellos.

Demuestra en primer lugar que las relaciones[1] de isomorfismo, ser isomorfo a un subespacio, cociente o suma directa son analíticas no borelianas, lo cual arroja cierta luz sobre la complejidad en problemas de clasificación de espacios de Banach.

Por otra parte, demuestra también que ciertas familias de espacios de Banach como son los espacios reflexivos o espacios que no contienen copias isomorfas de ℓ_1 son igualmente coanalíticas no borelianas.

[1] Decir que una relación es de Borel o analítica significa que la relación vista como subconjunto de $SB(Z) \times SB(Z)$ es de Borel o analítica.

Por ejemplo, que la relación de isomorfismo sea analítica significa que el conjunto

$$\{(X, Y) \in SB(Z) \times SB(Z) : X \simeq Y\}$$

es analítico en $SB(Z) \times SB(Z)$.

Más detalles sobre todos estos resultados pueden consultarse en los artículos de Bossard mencionados o en el libro de Dodos sobre espacios de Banach y teoría descriptiva de conjuntos [13], donde se hace una recopilación de todos los resultados relevantes en los trabajos de Bossard y de otros matemáticos que continuaron esta linea de investigación.

Aunque los trabajos de Bossard arrojan luz sobre numerosas cuestiones, presentan dos problemas principales.

El primero de ellos subyace en la propia relación de isometría entre espacios de Banach separables, pues resulta que no es posible asignar cada espacio de Banach separable a un punto en un espacio polaco de forma que espacios isométricamente isomorfos resulten en el mismo punto[2].

El otro problema fundamental es que no hay una forma natural de dotar al espacio $SB(Z)$ de una topología polaca canónica y por tanto no es posible distinguir entre diferentes niveles de complejidad dentro de los conjuntos de Borel, pues como ya hemos visto la jerarquía de Borel depende de la topología.

Aunque el primer problema parece insalvable, en 2018 Godefroy y Saint-Raymond dieron en su artículo [15] con una forma de extender las ideas de Bossard para poder atacar el segundo problema.

Ellos consideran cierta familia de topologías que denominan *admisibles* (ver Sección 3.1) las cuales inducen la estructura de Effros-Borel en $\mathcal{F}(Z)$ y con la propiedad de que entre distintas topologías admisibles la jerarquía de Borel varía relativamente poco, lo que permite estudiarla y dar mayor detalle sobre la complejidad en las estructuras en espacios de Banach.

Inspirados por estas ideas de Godefroy y Saint-Raymond, en 2019 los matemáticos checos Cúth, Doležal, Doucha y Kurka desarrollaron en [12] otra codificación en apariencia muy distinta a la anterior, pues no utiliza un espacio universal sino que codifica los espacios de Banach separables como pseudonormas de ciertos espacio de sucesiones (ver Sección 3.2).

A pesar de la pérdida de intuición en la codificación, los autores prueban que esta codificación arroja resultados muy similares a la de Godefroy y Saint-Raymond (ver Sección 3.3) y además demuestran una gran cantidad de resultados sobre la complejidad de numerosas familias y estructuras de espacios de Banach separables, probando ser una codificación realmente útil en la práctica.

3.1. Codificación de Godefroy y Saint-Raymond

Como ya hemos mencionado en la introducción, la idea de Godefroy y Saint-Raymond también consiste en codificar los espacios de Banach separables como los subconjuntos cerrados de un espacio de Banach universal, pero introduciendo el concepto de topología admisible para poder distinguir entre las distintas clases de Borel.

Es decir, si X es un espacio de Banach separable universalmente isométrico y denotamos por $SB(X)$ el conjunto de sus subespacios cerrados dotado de lo que en breve definiremos como una topología admisible, entonces cualquier otro espacio de Banach separable Y será isométricamente isomorfo a un elemento $F \in SB(X)$.

[2] Ver [31] para más información.

Como $SB(X)$ será un espacio polaco con esta topología, podemos discernir para familias cerradas por isometría de espacios de Banach la clase de Borel a las que estas pertenecen sin más que considerar en $SB(X)$ el conjunto formado por todos los elementos que estén en dicha familia.

3.1.1. Topologías admisibles

Comencemos pues viendo la definición de topología admisible introducida en [15].

Definición 3.1.1. *Sea X un espacio polaco, denotemos por $\mathcal{F}(X)$ la familia de todos sus subconjuntos cerrados y dado $U \subset X$ un abierto denotemos por*

$$E^+(U) = \{F \in \mathcal{F}(X) : U \cap F \neq \varnothing\}.$$

Decimos entonces que una topología polaca τ en el conjunto $\mathcal{F}(X)$ es ***admisible*** *en X si satisface:*

(i) *Para cada abierto U de X, $E^+(U)$ es τ-abierto;*

(ii) *Existe una subbase de τ tal que todo conjunto de esta subbase es una unión numerable de conjuntos de la forma $E^+(U) \setminus E^+(V)$ con U, V abiertos de X.*

Si X es un espacio de Banach separable denotaremos por $SB(X) \subset \mathcal{F}(X)$ el conjunto de los subespacios vectoriales cerrados de X y por $SB_\infty(X)$ el subconjunto de $SB(X)$ formado por los subespacios cerrados de dimensión infinita.

Una topología en $SB(X)$ o $SB_\infty(X)$ se dice que es ***admisible*** *si está inducida por una topología admisible en $\mathcal{F}(X)$.*

Observemos en primer lugar que la σ-álgebra de Borel para cualquier topología admisible τ será la estructura de Effros-Borel sobre X.

Basta ver que si τ es una topología admisible en X, entonces $\mathcal{B}(\mathcal{F}(X))$ está generada precisamente por los conjuntos $E^+(U)$ para cada abierto U de X.

Sin más, si denotamos por $\sigma(E^+)$ la σ-álgebra generada por dichos conjuntos, es decir la estructura de Effros-Borel en X, por (i) en la definición de topología admisible es claro que $\sigma(E^+) \subset \mathcal{B}(\mathcal{F}(X))$.

Recíprocamente, como τ es una topología admisible en X, por la condición (ii) de la definición, tenemos que existe $\mathcal{S}$ una subbase de $\mathcal{F}(X)$ tal que si $A \in \mathcal{S}$ existen $\{U_n\}, \{V_n\}$ sucesiones de abiertos en X tales que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^+(U_n) \setminus E^+(V_n).$$

Ahora como $(\mathcal{F}(X), \tau)$ es polaco tiene una base numerable y si es $\mathcal{B}_\mathcal{S}$ la base asociada a $\mathcal{S}$, por el Teorema E.1 existe $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\mathcal{S}$ numerable que es también base de $(\mathcal{F}(X), \tau)$.

Así, dado $B \in \tau$ podemos expresar

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k_n} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[E^+(U_m^{i,n}) \setminus E^+(V_m^{i,n})\right]$$

para ciertos $U_m^{i,n}, V_m^{i,n}$ abiertos en X, luego es claro que $B \in \sigma(E^+)$ y con ello que $\mathcal{B}(\mathcal{F}(X)) \subset \sigma(E^+)$ tal como deseábamos ver.

Lo anterior demuestra que los conjuntos de Borel para cualquier topología admisible en $\mathcal{F}(X)$ son precisamente aquellos que resultan de considerar la estructura de Effros-Borel en X.

En particular, todos los resultados establecidos por Bossard seguirán siendo válidos para esta codificación y es por tanto una extensión de dichos trabajos.

A continuación veremos que la aplicación identidad entre dos topologías admisibles es Σ_2^0-medible, con lo que por el Teorema 2.2.6 y el Lema D.4, tenemos que si $\beta \geq \omega$, entonces los conjuntos $\Sigma_\beta^0(\mathcal{F}(X))$ y $\Pi_\beta^0(\mathcal{F}(X))$ son los mismos para cualquier par de topologías admisibles distintas τ y τ'.

Si $1 \leq \beta < \omega$, entonces cualquier subconjunto Y que pertenezca a la clase Σ_β^0 para τ, estará en la clase $\Sigma_{\beta+1}^0$ para τ' y viceversa, luego las variaciones por la elección de la topología admisible son mínimas.

Proposición 3.1.1. *Si τ y τ' son dos topologías admisibles en un espacio polaco $\mathcal{F}(X)$, entonces la identidad*

$$I : (\mathcal{F}(X), \tau) \longrightarrow (\mathcal{F}(X), \tau')$$

es una aplicación Σ_2^0-medible.

Demostración:

Como τ' es una topología admisible en X, tal como hemos visto anteriormente se tiene que dado $B \in \tau'$ podemos expresar

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k_n} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[E^+(U_m^{i,n}) \setminus E^+(V_m^{i,n})\right]$$

para ciertos $U_m^{i,n}, V_m^{i,n}$ abiertos en X.

Como

$$E^+(U_m^{i,n}) \setminus E^+(V_m^{i,n}) = E^+(U_m^{i,n}) \cap \left[\mathcal{F}(X) \setminus E^+(V_m^{i,n})\right],$$

tenemos que es la intersección de un abierto con un cerrado tanto en τ' como en τ, luego es un conjunto Σ_2^0 de $\mathcal{F}(X)$ para cualquiera de las dos topologías y así

$$I^{-1}(B) = B \in \Sigma_2^0(\mathcal{F}(X))$$

demostrando que efectivamente I es Σ_2^0-medible. ■

Para finalizar con la definición, observemos que la relación $x \in F$ es Π_2^0 en $X \times \mathcal{F}(X)$.

Efectivamente, si es $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base numerable de X tenemos que dado $F \in \mathcal{F}(X)$ se cumple que

$$\begin{aligned} x \in F \Leftrightarrow x \in \mathrm{cl}_X(F) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, [x \in U_n \Rightarrow U_n \cap F \neq \varnothing] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \left[(x, F) \in U_n \times E^+(U_n) \vee (x, F) \in (X \setminus U_n) \times \mathcal{F}(X)\right], \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\{(x, F) \in X \times \mathcal{F}(X) : x \in F\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\left(U_n \times E^+(U_n)\right) \cup \left((X \setminus U_n) \times \mathcal{F}(X)\right)\right].$$

Aunque no será estrictamente necesario que lo satisfagan, puesto que la mayoría de ejemplos de topologías admisibles lo hacen y en base a lo anterior, es natural imponer a las topologías admisibles también la siguiente condición:

(iii) *El conjunto* $\{(x, F) \in X \times \mathcal{F}(x) : x \in F\}$ *es cerrado en* $X \times \mathcal{F}(x)$ *para cada cerrado* F *de* X*.*

Veamos a continuación que el espacio real de trabajo respecto a la codificación de espacios de Banach separables $SB(X)$ es también polaco con la topología heredada.

Lema 3.1.2. *Si* X *es un espacio normado y* $H \in \mathcal{F}(X)$ *se cumplen:*

(i) $H \in SB(X)$ *si, y solo si,* $0_X \in H$ *y* $p - q/2 \in H$ *para cada* $p, q \in H$*.*

(ii) *Si es* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión densa en* X*, entonces* $H \in SB(X)$ *si, y solo si,* $0_X \in H$ *y para cada* $p, q, n \in \mathbb{N}$ *se cumple una de las tres condiciones siguientes:*

- $H \cap B\left(x_p, \frac{1}{2^n}\right) = \varnothing$*;*
- $H \cap B\left(x_q, \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \varnothing$*;*
- $H \cap B\left(x_p - \frac{x_q}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \neq \varnothing$*.*

Demostración:

Demostremos en primer lugar **(i)**.

Si $H \in SB(X)$ es claro que por ser un subespacio vectorial entonces $0_X \in H$ y dados $p, q \in H$ se tiene que $p - q/2 \in H$, luego basta demostrar el recíproco.

Supongamos pues que $0_X \in H$ y $p - q/2 \in H$ para cada $p, q \in H$.

En primer lugar, sabemos que $H \neq \varnothing$ y si vemos que es un subespacio vectorial, puesto que $H \in \mathcal{F}(X)$, concluimos que efectivamente $H \in SB(X)$.

Sin más, basta ver que dados $p, q \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se cumple que $p - q \in H$ y que $\lambda p \in H$.

Lo primero es claro pues como por hipótesis $p - q/2 \in H$ tenemos que utilizando de nuevo dicha hipótesis

$$p - q = \left(p - \frac{q}{2}\right) - \frac{q}{2} \in H.$$

Para ver la segunda condición comencemos demostrando que es cierta si $\lambda = n \in \mathbb{Z}$.

Si $n = 1$ es claro pues $1p = p \in H$; y si es cierto para n entonces como ya hemos visto con lo anterior que H es un grupo para la suma se tiene que

$$(n + 1)p = np + p \in H.$$

Por inducción, queda entonces demostrado para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además, si $n = 0$ es claro pues $0p = 0_X \in H$ y si $n < 0$ entonces

$$np = (-|n|)p = |n|(0_X - p) \in H,$$

con lo que queda demostrado para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observemos además, que esta propiedad también es cierta para $\lambda = 2^{-n}$ con $n \geq 1$. Efectivamente, si $n = 1$ entonces por la primera condición

$$\frac{1}{2}p = 0_X - \frac{-p}{2} \in H,$$

y de nuevo, si es cierta para n entonces $2^{-n}p \in H$ y por el caso para $n = 1$,

$$\frac{1}{2^{n+1}}p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n}p\right) \in H.$$

Nuevamente este caso queda demostrado por inducción para todo $n \geq 1$.
Por otra parte, como dado $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos expresarlo como

$$\lambda = \lfloor\lambda\rfloor + (\lambda - \lfloor\lambda\rfloor)$$

donde $\lambda - \lfloor\lambda\rfloor \in [0, 1)$, obtenemos que

$$\lambda p = \lfloor\lambda\rfloor p + (\lambda - \lfloor\lambda\rfloor)\, p$$

y como ya sabemos que $\lfloor\lambda\rfloor p \in H$, basta ver que $\alpha p \in H$ para cualquier $\alpha \in (0, 1)$.
Dado pues $\alpha \in (0, 1)$, sabemos por la representación en base 2 de los números reales que existe una sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{0, 1\}$ tal que

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k}.$$

Representando entonces por $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales, tenemos por lo visto para las potencias negativas de 2 que

$$s_n p = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{2^k}\right) p = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{2^k} p \in H,$$

y como H es cerrado

$$\alpha p = \lim_{n\to\infty} s_n p \in H$$

lo que concluye la demostración de (i).
Pasemos ahora a demostrar **(ii)**.
En primer lugar, si $H \in SB(X)$ y dados p, q, n se cumplen que

$$H \cap B\left(x_p, \frac{1}{2^n}\right) \neq \varnothing$$

y

$$H \cap B\left(x_q, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \neq \varnothing,$$

entonces existen $h_1, h_2 \in H$ tales que $\|h_1 - x_p\| < 2^{-n}$ y $\|h_2 - x_q\| < 2^{-n+1}$ con lo que

$$\left\|\left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right) - \left(x_p - \frac{x_q}{2}\right)\right\| \leq \|h_1 - x_p\| + \frac{1}{2}\|h_2 - x_q\| < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Como $h_1 - h_2/2 \in H$ concluimos que

$$H \cap B\left(x_p - \frac{x_q}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \neq \varnothing$$

como queríamos ver.

Recíprocamente, si son $h_1, h_2 \in H$ entonces, como $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es denso en X, tenemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen x_{p_n}, x_{q_n} tales que

$$x_{p_n} \in B\left(h_1, \frac{1}{2^n}\right),$$
$$x_{q_n} \in B\left(h_2, \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Por tanto para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$H \cap B\left(x_{p_n}, \frac{1}{2^n}\right) \neq \varnothing$$

y

$$H \cap B\left(x_{q_n}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \neq \varnothing,$$

con lo que por hipótesis será entonces

$$H \cap B\left(x_{p_n} - \frac{x_{q_n}}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}\right) \neq \varnothing.$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n \in H$ tal que

$$\left\| f_n - \left(x_{p_n} - \frac{x_{q_n}}{2}\right)\right\| < \frac{1}{2^{n-1}},$$

y con ello

$$\left\| f_n - \left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right)\right\| \leq \left\| f_n - \left(x_{p_n} - \frac{x_{q_n}}{2}\right)\right\| + \left\| \left(x_{p_n} - \frac{x_{q_n}}{2}\right) - \left(h_1 - \frac{h_2}{2}\right)\right\| <$$
$$< \frac{1}{2^{n-1}} + \|x_{p_n} - h_1\| + \frac{1}{2}\|x_{q_n} - h_2\| < \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Con esto, obtenemos que f_n converge a $h_1 - h_2/2$ y al ser H cerrado, se tiene que

$$h_1 - \frac{h_2}{2} \in H.$$

Al ser $h_1, h_2 \in H$ arbitrarios por (i) concluimos que efectivamente $H \in SB(X)$. ■

Proposición 3.1.3. *Si X es un espacio de Banach separable y τ una topología admisible en X, entonces $SB(X)$ es un conjunto G_δ en $(\mathcal{F}(X), \tau)$ y con ello un espacio polaco con la topología heredada.*

Demostración:
Como X es separable existe $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X y denotemos

$$\begin{aligned} B_0^n &= B\left(0_X, \frac{1}{2^n}\right), \\ B_p^n &= B\left(x_p, \frac{1}{2^n}\right), \\ B_{p,q}^{n-1} &= B\left(x_p - \frac{x_q}{2}, \frac{1}{2^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Por (ii) en el lema anterior tenemos que dado $H \in \mathcal{F}(X)$ se cumple que

$$\begin{aligned} H \in SB(X) \Leftrightarrow 0_X \in H \wedge \forall p, q, n \in \mathbb{N}, \Big[& H \cap B_p^n = \varnothing \vee \\ & \vee H \cap B_q^{n-1} = \varnothing \vee H \cap B_{p,q}^{n-1} \neq \varnothing \Big] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow H \cap B\left(0_X, \frac{1}{2^n}\right) \neq \varnothing, \forall n \in \mathbb{N} \wedge & \\ \wedge \forall p, q, n \in \mathbb{N}, \Big[H \notin E^+\left(B_p^n\right) \vee H \notin E^+\left(B_q^{n-1}\right) & \vee H \in E^+\left(B_{p,q}^{n-1}\right)\Big]. \end{aligned}$$

Por tanto, si denotamos la expresión $(p, q, n) \in \mathbb{N}^3$ por $(*)$, se tiene que

$$SB(X) = \bigcap_{(*)} \left[\underbrace{E^+\left(B_{p,q}^{n-1}\right)}_{\Sigma_1^0 \subset \Pi_2^0} \cup \underbrace{\left(\mathcal{F}(X) \setminus E^+\left(B_p^n\right)\right)}_{\Pi_1^0 \subset \Pi_2^0} \cup \underbrace{\left(\mathcal{F}(X) \setminus E^+\left(B_q^{n-1}\right)\right)}_{\Pi_1^0 \subset \Pi_2^0} \right] \cap \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} E^+\left(B_0^n\right)}_{\Pi_2^0},$$

y efectivamente concluimos que

$$SB(X) \in \Pi_2^0(\mathcal{F}(X))$$

tal como queríamos demostrar. ■

Es conocido que para la estructura de Effros-Borel existe un teorema de selección demostrado por Kuratowski, Ryll y Nardzewski [26, Thm. 12.13] el cual asegura que dado un espacio polaco X existe una sucesión de funciones de Borel $\{f_p : \mathcal{F}(X) \longrightarrow X\}_{p=1}^{\infty}$ tales que para cada $F \in \mathcal{F}(X)$ no vacío, $\{f_p(F)\}_{p=1}^{\infty}$ es denso en F.

La estructura topológica que da a $SB(X)$ las topologías admisibles permiten refinar dicho teorema y obtener funciones continuas en lugar de funciones de Borel, como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.4. *Si X es un espacio de Banach universalmente isométrico y τ una topología admisible en X, entonces existe una sucesión de funciones continuas*

$$\{f_p : SB(X) \longrightarrow X\}_{p=1}^{\infty}$$

tal que dado $F \in SB(X)$ se cumple que

$$F = \overline{\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\}}.$$

Demostración:
Como X es separable existe $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X y denotemos por

$$\Omega_{k,n} = B\left(x_k, \frac{1}{2^n}\right),$$
$$V_{k,n} = \{F \in SB(X) : F \cap \Omega_{k,n} \neq \varnothing\}$$

y definamos $\phi_{k,n} : V_{k,n} \longrightarrow \mathcal{F}(X)$ tal que

$$\phi_{k,n}(F) = \overline{F \cap \Omega_{n,k}}.$$

Entonces se cumplen:

- V_{k_n} es abierto en $SB(X)$ pues $V_{k,n} = SB(X) \cap E^+(\Omega_{k,n})$.
- $\phi_{k,n}(F)$ es cerrado, convexo y no vacío.

  Efectivamente, es no vacío pues si $F \in V_{k,n}$ entonces $F \cap \Omega_{k,n} \neq \varnothing$ y es cerrado por ser la clausura de un conjunto. Además, como F es un subespacio vectorial es convexo y como $\Omega_{k,n}$ también lo es, tenemos que $F \cap \Omega_{k,n}$ es convexo y con ello lo será también su clausura, es decir, $\phi_{k,n}(F)$.
- $\phi_{n,k}$ es inferiormente hemicontinua[3].

  Sea $F \in V_{k,n}$ y U un abierto de X tal que $\phi_{k,n}(F) \cap U \neq \varnothing$, entonces

  $$\overline{F \cap \Omega_{k,n}} \cap U \neq \varnothing$$

  y como U es abierto tenemos que $F \cap (U \cap \Omega_{n,k}) \neq \varnothing$.

  Definiendo

  $$V = V_{k,n} \cap E^+(U \cap \Omega_{k,n})$$

  tenemos que V es un entorno abierto de F y si es $F' \in V$, entonces $F' \in V_{k,n}$ y $F' \cap (U \cap \Omega_{n,k}) \neq \varnothing$ luego

  $$\phi_{k,n}(F') \cap U = \overline{F' \cap \Omega_{n,k}} \cap U \neq \varnothing$$

  tal como queríamos ver.
- Como $V_{k,n}$ es abierto en $SB(X)$ por el Teorema 2.2.1 tenemos que es un G_δ en $SB(X)$ y así, el Teorema 2.1.1 nos asegura que es polaco con la topología relativa. En particular, $V_{k,n}$ será metrizable y por el teorema de Stone[4] concluimos que será paracompacto.

---

3 *Si X, Y son espacios topológicos, una aplicación $f : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ se dice que es* ***inferiormente hemicontinua*** *en un punto $x \in X$ si para todo abierto U de Y tal que $U \cap f(x) \neq \varnothing$ existe V un entorno de x tal que*

$$f(z) \cap U \neq \varnothing, \ \forall z \in V.$$

Diremos que f es inferiormente hemicontinua si lo es para cada punto de X.

4 *Si X es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de X, decimos que $\mathcal{U}$ es* ***localmente finita*** *si dado $x \in X$ existe un entorno del punto que intersecta únicamente una cantidad finita de conjuntos $U \in \mathcal{U}$. Decimos que X es* ***paracompacto*** *si es Hausdorff y cualquier cubrimiento abierto de X admite un subcubrimiento localmente finito.*

Teorema (A. H. Stone): *Todo espacio metrizable es paracompacto.*

La demostración al teorema puede consultarse en [37, Thm. 20.9].

Por todo lo anterior, el teorema de selección de Michael[5] nos asegura que existe $\psi_{k,n} : V_{k,n} \longrightarrow X$ continua tal que

$$\psi_{k,n}(F) \in \phi_{k,n}(F), \ \ \forall F \in V_{k,n}. \tag{3.1}$$

Ahora, como $V_{k,n}$ es abierto en $SB(X)$ por el Teorema 2.2.1 sabemos que será un F_σ y por tanto existe una sucesión creciente[6] $\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$ de cerrados en $SB(X)$ tales que

$$V_{k,n} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Así, para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos que F_m y $SB(X) \setminus V_{k,n}$ son cerrados disjuntos con lo que por el lema de Uryshon existe $\chi_{k,n,m} : SB(X) \longrightarrow [0,1]$ continua tal que

$$\left.\begin{array}{ll} \chi_{k,n,m}(F) = 1 & \text{si} \quad F \in F_m \\ \\ \chi_{k,n,m}(F) = 0 & \text{si} \quad F \in SB(X) \setminus V_{k,n} \end{array}\right\}$$

Observemos además que

$$\chi_{V_{k,n}} = \lim_{m\to\infty} \chi_{k,n,m}.$$

Efectivamente, si $F \in V_{k,n}$ entonces existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F \in F_{m_0}$ y por tanto $\chi_{k,n,m}(F) = 1$ para todo $m \geq m_0$, obteniendo que

$$\lim_{m\to\infty} \chi_{k,n,m}(F) = 1 = \chi_{V_{k,n}}(F).$$

Por otra parte, si $F \notin V_{k,n}$ entonces $\chi_{k,n,m}(F) = 0$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y así

$$\lim_{m\to\infty} \chi_{k,n,m}(F) = 0 = \chi_{V_{k,n}}(F).$$

Definamos ahora $f_{k,n,m} : SB(X) \longrightarrow X$ como

$$f_{k,n,m}(F) = \chi_{k,n,m}(F)\psi_{k,n}(F).$$

En primer lugar, observemos que $f_{k,n,m}$ está bien definida pues si $F \notin V_{k,n}$ entonces $\chi_{k,n,m}(F) = 0$ y así tomamos $f_{k,n,m}(F) = 0_X$.

Además, como $\chi_{k,n,m}$ es continua en $SB(X)$ y $\psi_{k,n}$ es continua en $V_{k,n}$ que es abierto, tenemos que $f_{k,n,m}$ es continua en $V_{k,n}$. Como también hemos visto que $f_{k,n,n} \equiv 0$ en $SB(X) \setminus V_{k,n}$ tenemos que también es claramente continua en $SB(X) \setminus \overline{V_{k,n}}$.

[5] **Teorema de selección de Michael:** *Si $\phi : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ es una aplicación inferiormente hemicontinua entre X un espacio paracompacto e Y un espacio de Banach de modo que $\phi(x)$ es no vacío, cerrado y convexo para cada $x \in X$, entonces existe $f : X \longrightarrow Y$ continua tal que $f(x) \in \phi(x)$ para cada $x \in X$.*

La demostración puede consultarse en [2, Thm. 17.66].

[6] Si no fuera creciente consideremos $\widetilde{F_m} = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$ y entonces cada $\widetilde{F_m}$ es cerrado en $SB(X)$, forman una sucesión creciente y es claro que

$$V_{k,n} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \widetilde{F_m}.$$

Ahora, si es $F \in \partial V_{k,n}$ y $\{F_p\}_{p=1}^{\infty}$ una sucesión en $SB(X)$ convergente a F tenemos que al ser $\chi_{n,k,m}$ continua será

$$\lim_{p\to\infty} \chi_{k,n,m}(F_p) = \chi_{k,n,m}(F) \underset{F\notin V_{k,n}}{=} 0$$

y así tenemos que:

- Si $F_p \notin V_{k,n}$ es claro que $\|f_{k,n,m}(F_p)\| = 0$.
- Si $F_p \in V_{k,n}$ entonces como por (3.1)

  $$\psi_{k,n}(F_p) \in \phi_{k,n}(F_p) = \overline{F_p \cap \Omega_{k,n}} \subset \overline{\Omega_{k,n}} = \overline{B\left(x_k, 2^{-n}\right)}$$

  tendremos que

  $$\begin{aligned}\|f_{k,n,m}(F_p)\| &= \|\chi_{k,n,m}(F_p)\psi_{k,n}(F_p)\| = \chi_{k,n,m}(F_p)\, \|\psi_{k,n}(F_p)\| \leq \\ &\leq \chi_{k,n,m}(F_p)\left[\|x_k\| + \frac{1}{2^n}\right] \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Luego, en cualquier caso tenemos que

$$\lim_{p\to\infty} f_{k,n,m}(F_p) = 0_X = f_{k,n,m}(F)$$

y tenemos pues que $f_{k,n,m}$ es continua en F.
Además, observemos que $f_{k,n,m}(F) \in F$ pues si $F \in V_{k,n}$ por (3.1) es

$$\psi_{k,n}(F) \in \phi_{k,n}(F) = \overline{F \cap \Omega_{k,n}} \subset \overline{F} = F$$

y como $\chi_{k,n,m}(F) \in [0,1]$, al ser F un espacio vectorial es claro que

$$f_{k,n,m}(F) = \chi_{k,n,m}(F)\psi_{k,n}(F) \in F.$$

Si $F \notin V_{k,n}$ como $f_{k,n,m}(F) = 0_X$ es claro que está en F.
Con todo, al ser F cerrado tenemos que

$$\overline{\{f_{k,n,m}(F) : k, m, n \in \mathbb{N}\}} \subset F,$$

y si vemos que se da la igualdad, entonces basta tomar $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ como cualquier enumeración de $\{f_{k,n,m} : (k,m,n) \in \mathbb{N}^3\}$.
Sin más, sean $a \in F$ fijo, $\varepsilon > 0$ y tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \varepsilon$.
Por la densidad de $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ en X sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_0} \in B(a, 2^{-n_0-1})$ y así $a \in F \cap \Omega_{k_0,n_0+1}$, con lo que $F \in V_{k_0,n_0+1}$ y

$$\psi_{k_0,n_0+1}(F) \in \phi_{k_0,n_0+1}(F) = \overline{F \cap \Omega_{k_0,n_0+1}} \subset F \cap \overline{\Omega_{k_0,n_0+1}} \underset{7}{\subseteq} B(a,\varepsilon). \tag{3.2}$$

Con esto, si denotamos por $V = V_{k_0,n_0+1}$ tenemos que

$$1 = \chi_V(F) = \lim_{m\to\infty} \chi_{k_0,n_0+1,m}(F),$$

[7] Si $y \in \overline{B(x_{k_0}, 2^{-n_0-1})}$ entonces

$$\|a-y\| \leq \|a - x_{k_0}\| + \|x_{k_0} - y\| < \frac{1}{2^{n_0+1}} + \frac{1}{2^{n_0+1}} = \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

y así

$$\lim_{m\to\infty} f_{k_0,n_0+1,m}(F) = \lim_{m\to\infty} \chi_{k_0,n_0+1,m}(F)\psi_{k_0,n_0+1}(F) = \psi_{k_0,n_0+1}(F) \underset{(3.2)}{\in} B(a,\varepsilon).$$

Por tanto, para m suficiente grande tenemos que

$$f_{k_0,n_0+1,m}(F) \in B(a,\varepsilon).$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario hemos probado que para cualquier entorno V de a se tiene que

$$V \cap \{f_{k,n,m}(F) : k,m,n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing,$$

y así

$$a \in \overline{\{f_{k,n,m}(F) : k,m,n \in \mathbb{N}\}}$$

lo que concluye la demostración. ■

Este teorema nos permite, entre otras cosas, demostrar que $SB_\infty(X)$ también será un espacio polaco al dotarlo de cualquier topología admisible.

Corolario 3.1.5. *Si X es un espacio de Banach separable universalmente isométrico, τ una topología admisible en X y* Fin *la familia de subespacios de dimensión finita de X, entonces*

$$\mathrm{Fin} \in \Sigma_2^0(SB(X)).$$

Además, $SB_\infty(X)$ es un G_δ de $SB(X)$ y por tanto un espacio polaco con la topología inducida.

Demostración:

Por el teorema anterior existe una sucesión $\{f_p : SB(X) \longrightarrow X\}_{p=1}^{\infty}$ de funciones continuas tales que para cada $F \in SB(X)$ se cumple que

$$F = \overline{\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\}}.$$

Ahora, si es $F \subset X$ un subespacio de dimensión finita tenemos que será cerrado y por tanto, $F \in SB(X)$.

Además, como $f_p(F) \in F$ para cada $p \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$V = \mathrm{span}\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\} \subset F,$$

con lo V es un subespacio de dimensión finita de X, luego cerrado, y se cumple que

$$V = \overline{V} \subset F = \overline{\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{\mathrm{span}\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\}} = \overline{V} = V.$$

Por tanto, tenemos que

$$F = \mathrm{span}\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\},$$

y por ser de dimensión finita existe un $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$F = \mathrm{span}\{f_p(F) : 1 \leq p \leq q\}.$$

Con todo, veamos que

$$F \in \text{Fin} \Leftrightarrow F \in SB(X) \wedge \exists q \in \mathbb{N} : \forall k \in \mathbb{N}, \{f_1(F), \cdots, f_q(F), f_k(F)\} \text{ es lin. dep. en } X. \tag{3.3}$$

En primer lugar, si $F \in \text{Fin}$ por lo visto tenemos que existe un $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$F = \text{span}\{f_p(F) : 1 \leq p \leq q\}.$$

Así, dado $k \in \mathbb{N}$ sabemos que

$$f_k(F) \in \text{span}\{f_p(F) : 1 \leq p \leq q\}$$

y efectivamente $\{f_1(F), \cdots, f_q(F), f_k(F)\}$ es linealmente dependiente en X.
Recíprocamente, supongamos que $F \in SB(X)$ y existe un $q \in \mathbb{N}$ tal que

$$f_k(F) \in \text{span}\{f_p(F) : 1 \leq p \leq q\}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces definiendo

$$V = \text{span}\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\},$$

se tiene que

$$V = \text{span}\{f_p(F) : 1 \leq p \leq q\}$$

y por tanto que $V \in \text{Fin}$ y es cerrado.
Con esto,

$$F = \overline{\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\}} \subset \overline{V} = V = \text{span}\{f_p(F) : 1 \leq p \leq q\} \subset F$$

y obtenemos que $F = V$, es decir, que $F \in \text{Fin}$.
Con todo, de (3.3) concluimos que

$$\text{Fin} = \bigcup_{q=1}^{\infty} \underbrace{\{F \in SB(X) : \forall k \in \mathbb{N}, \{f_1(F), \cdots, f_q(F), f_k(F)\} \text{ es lin. dep. en } X\}}_{M_q}$$

y basta ver que cada M_q es cerrado en $SB(X)$, o equivalentemente que

$$\begin{aligned} SB(X) \setminus M_q &= \{F \in SB(X) : \exists k \in \mathbb{N}, \{f_1(F), \cdots, f_q(F), f_k(F)\} \text{ es lin. indep. en } X\} = \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{\{F \in SB(X) : \{f_1(F), \cdots, f_q(F), f_k(F)\} \text{ es lin. indep. en } X\}}_{L_{q,k}} \end{aligned}$$

es abierto en $SB(X)$, lo cual será cierto si cada $L_{q,k}$ es abierto.
Definamos para ver esto último $\phi_{q,k} : SB(X) \longrightarrow X^{q+1}$ dada por

$$\phi_{q,k}(F) = (f_1(F), \cdots, f_q(F), f_k(F)).$$

Entonces, como cada f_i es continua, al considerar en X^{q+1} la topología producto tendremos que $\phi_{q,k}$ es continua y si denotamos por

$$U = \{(x_1, \cdots, x_q, x_{q+1}) \in X^{q+1} : \{x_1, \cdots, x_{q+1}\} \text{ es lin. indep. en } X\},$$

observamos que

$$\phi_{n,k}^{-1}(U) = \{F \in SB(X) : (f_1(F), \cdots, f_q(F), f_k(F)) \in U\} = L_{q,k}$$

y como por el Lema B.8 sabemos que U es abierto en X^{q+1}, obtenemos que efectivamente cada $L_{q,k}$ es abierto.

Para finalizar, respecto a $SB_\infty(X)$ observemos que

$$SB_\infty(X) = SB(X) \setminus \text{Fin}$$

y como acabamos de ver que Fin $\in \Sigma_2^0(X)$, obtenemos que efectivamente $SB_\infty(X)$ es un G_δ de $SB(X)$. ■

Ya hemos visto que dado X un espacio de Banach separable universalmente isométrico tanto $SB(X)$ como $SB_\infty(X)$ son espacios polacos al dotarlos de una topología admisible y que la diferencia entre las clases de Borel para dos topologías admisibles es mínima, luego el último paso para sentar las bases de la codificación será comprobar que la elección del espacio universalmente isométrico es también irrelevante, y eso lo pone de manifiesto la siguiente proposición.

Proposición 3.1.6. *Si X e Y son dos espacios de Banach separables universalmente isométricos y τ_1, τ_2 topologías admisibles en X e Y respectivamente, entonces existe una aplicación Σ_2^0-medible $f : (SB(X), \tau_1) \longrightarrow (SB(Y), \tau_2)$ tal que para cada $F \in SB(X)$ se tiene que F y $f(F)$ son isométricos.*

Más aún, es posible tomar f de modo que para cada abierto V de Y existe un abierto U de X tal que

$$f^{-1}(E_{SB}^+(V)) = E_{SB}^+(U).$$

Demostración:

Como Y es universalmente isométrico, tenemos que existe $j : X \longrightarrow Y$ una isometría lineal y además, por ser X es un espacio de Banach $j(X)$ es cerrado en Y.

Definamos pues $f : SB(X) \longrightarrow SB(Y)$ tal que $f(F) = j(F)$ para cada $F \in SB(X)$ y observemos que entonces se cumplen:

- f está bien definida pues al ser $j : X \longrightarrow j(X)$ un isomorfismo lineal isométrico, dado $F \in SB(X)$ se tiene que $j(F)$ es un subespacio vectorial cerrado de $j(X)$, y como $j(X)$ es cerrado en Y, concluimos que $j(F) \in SB(Y)$.

- Dado $V \subset Y$ abierto si definimos $U = j^{-1}(V)$ será un abierto en X y tenemos que

$$\begin{aligned} f^{-1}(E_{SB}^+(V)) &= \{F \in SB(X) : f(F) \in E^+(V)\} = \{F \in SB(X) : j(F) \in E^+(V)\} = \\ &= \{F \in SB(X) : j(F) \cap V \neq \varnothing\} = \{F \in SB(X) : F \cap j^{-1}(V) \neq \varnothing\} = \\ &= E_{SB}^+(U). \end{aligned}$$

- f es Σ_2^0-medible.

  Como τ_2 es admisible en Y sabemos que $SB(Y)$ con la topología relativa es polaco, y por lo visto al comienzo de la sección, dado B abierto en $SB(Y)$ podemos expresar

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k_n} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[E_{SB}^+(U_m^{i,n}) \setminus E_{SB}^+(V_m^{i,n}) \right]$$

para ciertos $U_m^{i,n}, V_m^{i,n}$ abiertos en Y, con lo que

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k_n} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[f^{-1}\left(E_{SB}^{+}(U_m^{i,n})\right) \setminus f^{-1}\left(E_{SB}^{+}(V_m^{i,n})\right) \right].$$

Ahora, por el punto anterior tenemos que para cada $U_m^{i,n}, V_m^{i,n}$ abiertos de Y existirán $W_m^{i,n}, Z_m^{i,n}$ abiertos de X de modo que

$$f^{-1}\left(E_{SB}^{+}(U_m^{i,n})\right) = E_{SB}^{+}(W_m^{i,n})$$

y

$$f^{-1}\left(E_{SB}^{+}(V_m^{i,n})\right) = E_{SB}^{+}(Z_m^{i,n}),$$

por lo que

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k_n} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[E_{SB}^{+}(W_m^{i,n}) \setminus E_{SB}^{+}(Z_m^{i,n}) \right]$$

que es claramente un conjunto Σ_2^0 de $SB(X)$.

- Dado $F \in SB(X)$ se cumple que

$$f(F) = j(F) \equiv F$$

al ser $j : X \longrightarrow j(X)$ una isometría lineal.

Por tanto, f es la aplicación buscada y la proposición queda demostrada. ■

3.1.2. Topología de Wijsman

Para finalizar la sección veremos un ejemplo de topología admisible conocida como topología de Wijsman.

Sea X un espacio polaco, ρ una métrica completamente compatible en X y consideremos $\{\alpha_j\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X.

Definamos entonces la aplicación $T : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tal que para cada cerrado F de X es

$$T(F) = \{\rho(\alpha_n, F)\}_{n=1}^{\infty}.$$

Se define pues la **topología de Wijsman** como la topología inicial en $\mathcal{F}(X)$ inducida por T al considerar la topología producto en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Veremos en el Teorema 3.1.8 que una subbase para la topología de Wijsman está formada por los subconjuntos de $\mathcal{F}(X)$ de la forma

$$U(\alpha_n, r) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(\alpha_n, F) < r\},$$
$$V(\alpha_n, r) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(\alpha_n, F) > r\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ y $r > 0$.

Más aún, veremos a continuación que dados $x \in X$ y $r > 0$, los conjuntos

$$U(x, r) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(x, F) < r\},$$
$$V(x, r) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(x, F) > r\}$$

son abiertos, lo que junto a lo anterior prueba que

$$\mathcal{S} = \{U(x,r), V(x,r) : x \in X, r > 0\}$$

es una subbase de $\mathcal{F}(X)$ con la topología de Wijsman.

Esto último muestra que la topología no depende de la sucesión densa escogida para definir T, aunque si depende fuertemente de la métrica ρ.

Veamos, como hemos dicho, que dados $x \in X$ y $r > 0$ los conjuntos $U(x,r), V(x,r)$ son efectivamente abiertos.

Realizaremos la prueba para $U(x,r)$ notando que la demostración para $V(x,r)$ es análoga.

Sin más, dado $F_0 \in U(x,r)$ tenemos que tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x, \alpha_n) < \frac{1}{2}(r - \rho(x, F_0))$$

se cumplen:

- $\rho(\alpha_n, F_0) \leq \rho(x, \alpha_n) + \rho(x, F_0) < r - \rho(x, \alpha_n)$;
- Si $F \in U(\alpha_n, r - \rho(x, \alpha_n))$ entonces $\rho(x, F) \leq \rho(x, \alpha_n) + \rho(\alpha_n, F) < r$.

Por tanto, tenemos que

$$F_0 \in U(\alpha_n, r - \rho(x, \alpha_n)) \subset U(x,r)$$

lo que prueba que F_0 es un punto interior de $U(x,r)$.

Por la arbitrariedad de F_0, concluimos que efectivamente $U(x,r)$ es abierto.

Para demostrar que la topología de Wijsman es admisible, necesitamos en primer lugar ver que es una topología polaca sobre $\mathcal{F}(X)$ para lo cual precisamos del siguiente lema.

Lema 3.1.7. *Sea X un espacio polaco, ρ una métrica completamente compatible en X, $\{\alpha_j\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X y $T : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la aplicación que induce la topología de Wijsman en $\mathcal{F}(X)$. Entonces, se cumple que T es un homeomorfismo en su imagen siendo además $T(\mathcal{F}(X)) = Z$ con*

$$Z = \Big\{ \{t_j\}_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall j,k \in \mathbb{N}, |t_j - t_k| \leq \rho(\alpha_j, \alpha_k) \wedge \\ \Big(\forall n, j \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : t_k < 2^{-n} \wedge \rho(\alpha_j, \alpha_k) < t_j + 2^{-n} \Big) \Big\}$$

un conjunto G_δ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Demostración:

Puesto que la topología en $\mathcal{F}(X)$ es la inducida por T, para ver que es un homeomorfismo en su imagen basta ver que T es inyectiva.

Sean pues F_1, F_2 dos cerrados distintos en X y supongamos, sin pérdida de generalidad, que existe $x \in F_1 \setminus F_2$.

Como F_2 es cerrado, se tiene que

$$\varepsilon = \rho(x, F_2) > 0$$

y por la densidad de la sucesión $\{\alpha_j\}_{n=1}^{\infty}$ existe cierto $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x, \alpha_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Así,

$$\rho(\alpha_{j_0}, F_1) \leq \rho(\alpha_{j_0}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

y

$$\rho(\alpha_{j_0}, F_2) \geq \rho(x, F_2) - \rho(\alpha_{j_0}, x) > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

En definitiva, hemos probado que

$$\rho(\alpha_{j_0}, F_1) \neq \rho(\alpha_{j_0}, F_2)$$

obteniendo pues que $T(F_1) \neq T(F_2)$ y demostrando que T es inyectiva.
Veamos ahora que $T(\mathcal{F}(X)) \subset Z$ demostrando que si $F \in \mathcal{F}(X)$ entonces $T(F) \in Z$.
Por comodidad, definamos para cada $j \in \mathbb{N}$

$$t_j = \left(T(F)\right)_j = \rho(\alpha_j, F).$$

Entonces, tenemos en primer lugar que dados $j, k \in \mathbb{N}$

$$|t_j - t_k| = |\rho(\alpha_j, F) - \rho(\alpha_k, F)| \underset{8}{\leq} \rho(\alpha_j, \alpha_k),$$

con lo que resta comprobar la segunda condición de pertenencia en Z.
Dados $n, j \in \mathbb{N}$, puesto que $t_j + 2^{-n-1}$ no es cota inferior de $\{\rho(\alpha_j, x) : x \in F\}$, existe cierto $x \in F$ tal que $\rho(\alpha_j, x) < t_j + 2^{-n-1}$.
Por otra parte, de la densidad de $\{\alpha_j\}$ en X, tenemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\alpha_k, x) < 2^{-n-1}$ y con ello

$$t_k = \rho(\alpha_k, F) \leq \rho(\alpha_k, x) < 2^{-n-1} < 2^{-n}.$$

Como además se tiene que

$$\rho(\alpha_j, \alpha_k) \leq \rho(\alpha_j, x) + \rho(x, \alpha_k) < t_j + 2^{-n-1} + 2^{-n-1} = t_j + 2^{-n},$$

obtenemos que se cumple la segunda condición y que efectivamente $T(F) \in Z$.

---

[8] *Fijado $F \in \mathcal{F}(X)$, la aplicación $g : (X, \rho) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \rho(x, F)$ es lipschitziana de constante 1, es decir, para cada $x, y \in X$ se cumple que*

$$|g(x) - g(y)| \leq \rho(x, y).$$

Efectivamente, tenemos que

$$\rho(x, F) \leq \rho(x, y) + \rho(y, F)$$

y

$$\rho(y, F) \leq \rho(y, x) + \rho(x, F),$$

con lo que

$$|g(x) - g(y)| = |\rho(x, F) - \rho(y, F)| \leq \rho(x, y).$$

Para demostrar ahora que $Z \subset T(\mathcal{F}(X))$, consideremos $\{t_j\}_{j=1}^{\infty} \in Z$ y veamos que existe un cerrado F en X tal que $t_j = \rho(\alpha_j, F)$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

Comencemos pues definiendo f una aplicación sobre el conjunto $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ que asigna a cada α_j el correspondiente t_j.

Afirmación 1: Existe una única función $\bar{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana de constante 1 que extiende a f.

Demostración de la Afirmación 1:

Veamos en primer lugar que f es uniformemente continua.

Efectivamente, dado $\varepsilon > 0$ si es $\rho(\alpha_j, \alpha_k) < \varepsilon$ entonces

$$|f(\alpha_j) - f(\alpha_k)| = |t_j - t_k| \leq \rho(\alpha_j, \alpha_k) < \varepsilon$$

donde la primera desigualdad se da por ser $\{t_j\} \in Z$.

Con todo, por el Teorema B.6 existe una única función continua $\bar{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que extiende a f y basta ver que es lipschitziana de constante 1.

Sin más, dados $x, y \in X$ consideremos $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ e $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ dos sucesiones de $\{\alpha_j\}$ convergentes a x e y respectivamente.

Entonces, por lo visto anteriormente para f se cumple para cada $j \in \mathbb{N}$ que

$$\left|\bar{f}(x_j) - \bar{f}(y_j)\right| = |f(x_j) - f(y_j)| \leq \rho(x_j, y_j).$$

Como $\bar{f}$ y ρ son continuas tomando límites en la expresión anterior obtenemos efectivamente que

$$\left|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)\right| \leq \rho(x, y)$$

tal como queríamos demostrar. ■

Definamos pues $F = \bar{f}^{-1}(\{0\})$, que será cerrado en X por la continuidad de $\bar{f}$, y veamos que es el cerrado buscado.

Por un lado, dado $j \in \mathbb{N}$ tenemos que para todo $x \in F$ se cumplirá que $\bar{f}(x) = 0$, con lo que

$$t_j = f(\alpha_j) = \bar{f}(\alpha_j) - \bar{f}(x) \leq \rho(\alpha_j, x).$$

Por la arbitrariedad del punto $x \in F$, tenemos entonces que $t_j \leq \rho(\alpha_j, F)$.

Para ver la otra desigualdad comencemos con la siguiente afirmación.

Afirmación 2: Dado $j \in \mathbb{N}$ fijo y $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de naturales $\{k_p\}_{p=1}^{\infty}$ tal que $k_1 = j$, $t_{k_p} < \varepsilon 2^{-p}$ y

$$\rho(\alpha_{k_p}, \alpha_{k_{p+1}}) < t_{k_p} + \varepsilon 2^{-p}.$$

Además, la sucesión $\{\alpha_{k_p}\}_{p=1}^{\infty}$ es de Cauchy en (X, ρ).

Demostración de la Afirmación 2:

Consideremos $k_1 = j$ y supongamos que tenemos la sucesión construida hasta k_p.

Entonces, tomando $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n} < \varepsilon 2^{-(p+1)}$ y por ser $\{t_j\} \in Z$, sabemos que existe cierto k_{p+1} tal que $t_{k_{p+1}} < 2^{-n} < \varepsilon 2^{-(p+1)}$ y de modo que

$$\rho(\alpha_{k_p}, \alpha_{k_{p+1}}) < t_{k_p} + 2^{-n} < t_{k_p} + \varepsilon 2^{-(p+1)} < t_{k_p} + \varepsilon 2^{-p}.$$

Lo anterior nos permite, utilizando el axioma de elección dependiente, construir la sucesión buscada.

Para ver ahora que dicha sucesión de de Cauchy observemos en primer lugar que dados $q \geq p$ se cumple que

$$\rho(\alpha_{k_p}, \alpha_{k_q}) \leq \sum_{j=0}^{q-p-1} \rho(\alpha_{k_{p+j}}, \alpha_{k_{p+j+1}}) < \sum_{j=0}^{q-p-1} \left(t_{k_{p+j}} + \varepsilon 2^{-(p+j)}\right) < 2\varepsilon \sum_{j=0}^{q-p-1} 2^{-(p+j)} =$$
$$= 2\varepsilon \sum_{j=p}^{q-1} 2^{-j} < 2\varepsilon \sum_{j=p}^{q} 2^{-j}. \tag{3.4}$$

Por tanto, dado $\delta > 0$ basta tomar $p_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=p}^{q} 2^{-j} < \frac{\delta}{2\varepsilon}, \ \forall q \geq p \geq p_0,$$

lo cual siempre es posible por la convergencia de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}$, y por lo anterior se cumple la condición de Cauchy para δ. ■

Por la Afirmación 2, tenemos entonces que dado $j \in \mathbb{N}$ fijo y $\varepsilon > 0$ arbitrario existe cierto $x \in X$ tal que $\alpha_{k_p} \longrightarrow x$ y como

$$\bar{f}(x) = \lim_{p\to\infty} \bar{f}(\alpha_{k_p}) = \lim_{p\to\infty} t_{k_p} = 0,$$

tenemos además que $x \in \bar{f}^{-1}(\{0\}) = F$.

Finalmente, se cumple para todo $p > 1$ que

$$\rho(\alpha_j, F) \leq \rho(\alpha_j, x) \leq \rho(\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2}) + \rho(\alpha_{k_2}, \alpha_{k_p}) + \rho(\alpha_{k_p}, x) < t_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2} + \rho(\alpha_{k_2}, \alpha_{k_p}) +$$
$$+ \rho(\alpha_{k_p}, x) \underset{(3.4)}{<} t_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon \sum_{j=2}^{\infty} 2^{-j} + \rho(\alpha_{k_p}, x),$$

con lo cual tomando límites para p tendiendo a infinito obtenemos que

$$\rho(\alpha_j, F) \leq t_{k_1} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = t_j + \frac{3}{2}\varepsilon.$$

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$, obtenemos finalmente que $\rho(\alpha_j, F) \leq t_j$.

Con todo lo visto, hemos demostrado que $T(F) = \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ y en definitiva que

$$Z = T(\mathcal{F}(X)).$$

Resta únicamente ver que Z es un G_δ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Comencemos definiendo para cada $j, k \in \mathbb{N}$ las aplicaciones $\pi_{j,k} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$\pi_{j,k}\left(\{t_p\}_{p=1}^{\infty}\right) = \left(\pi_j\left(\{t_p\}_{p=1}^{\infty}\right), \pi_k\left(\{t_p\}_{p=1}^{\infty}\right)\right) = (t_j, t_k).$$

Por la continuidad de las proyecciones en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cada una de estas aplicaciones es continua y como el conjunto

$$D_{j,k} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : |t - s| \leq \rho(\alpha_j, \alpha_k)\}$$

es cerrado en $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$C_{j,k} = (\pi_{j,k})^{-1}(D_{j,k})$$

es cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Definiendo ahora para cada $j, k, n \in \mathbb{N}$ los abiertos de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$A_{k,n} = \pi_k^{-1}\left(\left(-\infty, 2^{-n}\right)\right)$$

y

$$B_{j,k,n} = \pi_j^{-1}\left(\left(\rho(\alpha_j, \alpha_k) - 2^{-n}, +\infty\right)\right),$$

obtenemos finalmente que

$$Z = \left[\bigcap_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} C_{j,k}\right] \cap \left[\bigcap_{(n,j)\in\mathbb{N}^2} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_{k,n} \cap B_{j,k,n})\right]$$

demostrando que Z es un G_δ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. ■

Teorema 3.1.8. *Si X es un espacio polaco la topología de Wijsman para cualquier métrica completamente compatible en X es admisible.*

Demostración:

Sea ρ una métrica completamente compatible en X, $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X y $T : \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la aplicación que induce la topología de Wijsman en $\mathcal{F}(X)$.

Por el lema anterior sabemos que $\mathcal{F}(X)$ es homeomorfo a un conjunto G_δ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y como $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es polaco, por el Teorema 2.1.1 concluimos que $\mathcal{F}(X)$ es polaco con la topología de Wijsman.

Para ver entonces que la topología de Wijsman es admisible debemos comprobar que se cumplen las condiciones (i) y (ii) de la Definición 3.1.1.

Dado pues U abierto en X, por la densidad de la sucesión $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$ existirá cierto conjunto $J \subset \mathbb{N}$ y una sucesión $\{r_j\}_{j\in J}$ tal que[9]

$$U = \bigcup_{j\in J} B(\alpha_j, r_j).$$

[9] Sabemos que para cada $x \in U$ existe un $0 < \varepsilon_x < 1$ tal que $B(x, \varepsilon_x) \subset U$ y además, por la densidad de la sucesión $\{\alpha_j\}_{j=1}^{\infty}$, existe cierto $j_x \geq 1$ tal que $\rho(x, \alpha_{j_x}) < \varepsilon_x/2$.
Definamos entonces

$$J = \{j_x \in \mathbb{N} : x \in U\}$$

y para cada $j \in J$

$$r_j = \sup\{\varepsilon_x/2 : \exists x \in U \text{ tal que } j_x = j\}.$$

Veamos en primer lugar que dado $j \in J$ se tiene que $B(\alpha_j, r_j) \subset U$.
Si $y \in B(\alpha_j, r_j)$ entonces $\rho(y, \alpha_j) < r_j$ y por la definición de supremo existe cierto $x \in U$ tal que $j = j_x$ y $\rho(y, \alpha_j) < \varepsilon_x/2$.
Así

$$\rho(y, x) \leq \rho(y, \alpha_j) + \rho(\alpha_j, x) < \varepsilon_x$$

y con ello

$$y \in B(x, \varepsilon_x) \subset U$$

como queríamos ver.

Por otra parte, dado dado $x \in U$ tenemos que $j_x \in J$ y $\rho(x, \alpha_{j_x}) < \varepsilon_x/2 \leq r_{j_x}$ con lo que $x \in B(\alpha_{j_x}, r_{j_x})$ y en definitiva

$$U = \bigcup_{j\in J} B(\alpha_j, r_j).$$

Con esto, observemos que podemos expresar

$$\begin{aligned}E^+(U) &= \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap U \neq \varnothing\} = \{F \in \mathcal{F}(X) : \exists j \in J \text{ tal que } F \cap B(\alpha_j, r_j) \neq \varnothing\} = \\ &= \bigcup_{j \in J} \{F \in \mathcal{F}(X) : F \cap B(\alpha_j, r_j) \neq \varnothing\} = \bigcup_{j \in J} \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(\alpha_j, F) < r_j\} = \\ &= \bigcup_{j \in J} T^{-1}\left(\pi_j^{-1}\big((-\infty, r_j)\big)\right).\end{aligned}$$

Por tanto, por la definición de la topología de Wijsman, se cumple que efectivamente $E^+(U)$ es abierto para dicha topología.

Para probar (ii) observemos en primer lugar que una base para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es

$$\mathcal{S} = \left\{ \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists \Lambda \subset \mathbb{N} \text{ finito tal que } Y_n = \mathbb{R} \text{ si } n \notin \Lambda \text{ e } \right.$$

$$\left. Y_n \text{ es un intervalo abierto si } n \in \Lambda \right\},$$

y por la definición de topología inicial, una base para la topología de Wijsman será

$$\mathcal{B} = \left\{ T^{-1}\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right) : \prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n \in \mathcal{S} \right\}.$$

Ahora, dado $\prod Y_n \in \mathcal{S}$ existe $\Lambda \subset \mathbb{N}$ finito tal que $Y_n = \mathbb{R}$ si $n \notin \Lambda$ e $Y_n = (a_n, b_n)$ para ciertos $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ si $n \in \Lambda$, con lo que

$$T^{-1}\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(\alpha_n, F) \in Y_n, \forall n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \Lambda} \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(\alpha_n, F) \in Y_n\}.$$

Empleando entonces la notación dada al comienzo de la subsección, concluimos que

$$T^{-1}\left(\prod_{n \in \mathbb{N}} Y_n\right) = \bigcap_{n \in \Lambda} \Big(U(\alpha_n, b_n) \cap V(\alpha_n, a_n)\Big) \tag{3.5}$$

siendo $U(\alpha_n, b_n), V(\alpha_n, a_n)$ abiertos en la topología de Wijsman pues

$$U(\alpha_n, b_n) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(\alpha_n, F) < b_n\} = T^{-1}\left(\pi_n^{-1}\big((-\infty, b_n)\big)\right)$$

y

$$V(\alpha_n, a_n) = \{F \in \mathcal{F}(X) : \rho(\alpha_n, F) > a_n\} = T^{-1}\left(\pi_n^{-1}\big((a_n, +\infty)\big)\right).$$

Con todo, tenemos que el conjunto

$$\mathcal{T} = \{U(\alpha_j, r), V(\alpha_j, r) : j \in \mathbb{N}, r > 0\}$$

es una subbase de $\mathcal{F}(X)$ con la topología de Wijsman, pues por (3.5) el conjunto de todas sus intersecciones finitas contiene a $\mathcal{B}$ y es pues una base.

Por lo visto al comienzo de la demostración es claro que

$$U(\alpha_j, r) = E^+(B(\alpha_j, r)) = E^+(B(\alpha_j, r)) \setminus E^+(\varnothing).$$

Por tanto, si vemos que dados $j \in \mathbb{N}$ y $r > 0$ se puede expresar

$$V(\alpha_j, r) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(X) \setminus E^+(U_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^+(X) \setminus E^+(U_n)$$

para ciertos abiertos U_n de X, habremos demostrado entonces (ii) y con ello que la topología de Wijsman es efectivamente admisible.

Sin más, fijados $j \in \mathbb{N}$ y $r > 0$ definamos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = B\left(\alpha_j, r + 2^{-n}\right)$$

y observemos que

$$F \in V(\alpha_j, r) \Leftrightarrow \rho(\alpha_j, F) > r \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \rho(\alpha_j, F) \geq r + 2^{-n} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : F \cap U_n = \varnothing \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : F \notin E^+(U_n) \Leftrightarrow F \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(X) \setminus E^+(U_n).$$

Es decir, la sucesión $\{U_n\}$ cumple lo deseado y nos permite concluir la demostración. ■

Para finalizar la sección veamos que la topología de Wijsman satisface también la condición (iii) para las topologías admisibles, es decir, que el conjunto

$$\{(x, F) \in X \times \mathcal{F}(X) : x \in F\}$$

es cerrado.

Observemos que si definimos $f : X \times \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, F) = \rho(x, F)$ y vemos que es continua, se tiene entonces que

$$\{(x, F) \in X \times \mathcal{F}(X) : x \in F\} = \{(x, F) \in X \times \mathcal{F}(X) : f(x, F) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$$

con lo que efectivamente es cerrado, tal como queremos ver.

Para ver la continuidad, observemos en primer lugar que dados $F, G \in \mathcal{F}$, $x, y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\begin{aligned} |f(x,F) - f(y,G)| &= |\rho(x,F) - \rho(y,G)| \leq |\rho(x,F) - \rho(\alpha_n,F)| + |\rho(\alpha_n,F) - \rho(\alpha_n,G)| + \\ &+ |\rho(\alpha_n,G) - \rho(y,G)| \leq \rho(x,\alpha_n) + |\rho(\alpha_n,F) - \rho(\alpha_n,G)| + \rho(y,\alpha_n) \leq \\ &\leq 2\rho(\alpha_n,x) + \rho(x,y) + |\rho(\alpha_n,F) - \rho(\alpha_n,G)| \end{aligned} \tag{3.6}$$

donde la segunda desigualdad es consecuencia de lo visto en la nota al pie 8, es decir, que fijado $G \in \mathcal{F}(X)$ la función $\rho(x, G)$ es lipschitziana de constante 1.

Sean pues $x \in X$ y $F \in \mathcal{F}(X)$ fijos y $\varepsilon > 0$ cualquiera.

En primer lugar, observemos que por la densidad de la sucesión $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tenemos que existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(\alpha_{n_0}, x) < \varepsilon/6$.

Por otra parte, definamos $Y_n = \mathbb{R}$ si $n \neq n_0$ e

$$Y_{n_0} = \left(\rho(\alpha_{n_0}, F) - \frac{\varepsilon}{3}, \rho(\alpha_{n_0}, F) + \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Con esto, definamos el entorno abierto de (x, F) en $X \times \mathcal{F}(X)$

$$V = B\left(x, \frac{\varepsilon}{3}\right) \times T^{-1}\left(\prod_{n=1}^{\infty} Y_n\right)$$

y observemos que si $(y, G) \in V$ entonces

$$|f(y,G) - f(x,F)| \underset{(3.6)}{\leq} 2\rho(\alpha_{n_0}, x) + \rho(x,y) + |\rho(\alpha_{n_0}, F) - \rho(\alpha_{n_0}, G)| < \varepsilon.$$

Esto último prueba la continuidad de f y con ello concluimos que efectivamente la topología de Wijsman es una topología admisible que además satisface la condición (iii).

3.2. Codificación de Cúth, Doležal, Doucha y Kurka

En esta sección estudiaremos la codificación para los espacios de Banach separables propuesta por los matemáticos checos Marek Cúth, Martin Doležal, Michal Doucha y Ondřej Kurka en su artículo [12].

3.2.1. Codificación mediante pseudonormas

A diferencia del enfoque de Godefroy y Saint-Raymond la codificación que veremos a continuación dista considerablemente de la idea original de Bossard y se pierde la intuición tan fuerte de esta idea, pero a cambio se obtiene un marco de trabajo y unas herramientas muy potentes que permiten estudiar un gran número familias de espacios de Banach separables y obtener sus mejores cotas de complejidad.

Partiremos de V el espacio de sucesiones en $\mathbb{Q}$ con soporte finito, es decir,

$$V = \{v \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \exists I \subset \mathbb{N} \text{ finito tal que } v_i = 0 \text{ si } i \notin I\}$$

dotado de la estructura vectorial típica de los espacios de sucesiones sobre un cuerpo.

Es fácil comprobar que una una base numerable canónica para V será $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde $(e_i)_n = \delta_{i,n}$ siendo

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = i \\ \\ 0 & \text{si} \quad n \neq i \end{cases}$$

Por tanto, dado $v \in V$ existen coeficientes $a_{i_1}, \cdots, a_{i_n} \in \mathbb{Q}$ no nulos y únicos tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_{i_j} e_{i_j}.$$

Habitualmente expresaremos también

$$v = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i,$$

entendiendo que pueden existir coeficientes a_i nulos; o incluso expresaremos

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i,$$

donde se entiende que únicamente una cantidad finita de coeficientes a_i es no nula y realmente la suma es finita.

Observemos que en las dos últimas expresiones vistas los coeficientes a_i también están determinados de forma única, por lo que cualquiera de estas representaciones determina v de forma unívoca.

Una última nota importante sobre este espacio es que es numerable, lo cual como veremos es importante a lo hora de establecer una topología en el espacio sobre el que trabajaremos. Esta es además la razón por la que partimos de V como espacio base y no directamente de c_{00} el espacio de sucesiones en $\mathbb{R}$ con soporte finito.

Para ver la cardinalidad de V observemos que si definimos para cada $n \geq 1$

$$V_n = \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, a_i \in \mathbb{Q} \right\},$$

tenemos que V_n es equipotente a $\mathbb{Q}^n$, luego es numerable, y como

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

concluimos que efectivamente es numerable.

El espacio principal sobre el que trabajaremos será $\mathcal{P}$ el conjunto de todas las pseudonormas sobre V dotado de la topología producto heredada de $\mathbb{R}^V$.

El siguiente lema muestra la importancia de la numerabilidad de V.

Lema 3.2.1. *$\mathcal{P}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^V$ y por tanto es un espacio polaco.*

Demostración:

Puesto que V es numerable, el Teorema 2.1.2 nos garantiza que $\mathbb{R}^V$ será un espacio polaco, luego en particular metrizable, y para ver que $\mathcal{P}$ es cerrado bastará demostrar que dada una sucesión cualquiera $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}$ convergente a cierto $\mu \in \mathbb{R}^V$ se tiene que $\mu \in \mathcal{P}$, es decir, basta ver que μ es una pseudonorma sobre V.

Sean pues $v \in V$ y $\lambda \in \mathbb{Q}$, entonces como cada μ_n es una pseudonorma tenemos que

$$\mu_n(\lambda v) = |\lambda| \, \mu_n(v), \ \forall n \geq 1. \tag{3.7}$$

Ahora, por la convergencia punto a punto en la topología producto se cumple que

$$\mu_n(\lambda v) \longrightarrow \mu(\lambda v)$$

y

$$|\lambda| \, \mu_n(v) \longrightarrow |\lambda| \, \mu(v),$$

con lo que por (3.7) y la unicidad de los límites de sucesiones en espacios de Hausdorff concluimos que

$$\mu(\lambda v) = |\lambda| \, \mu(v).$$

Por otra parte, dados $v, w \in V$ de nuevo por ser cada μ_n una pseudonorma se cumple que

$$\mu_n(v + w) \leq \mu_n(v) + \mu_n(w), \ \ \forall n \geq 1. \tag{3.8}$$

Por la convergencia puntual en la topología producto tenemos entonces que

$$\mu_n(v+w) \longrightarrow \mu(v+w)$$

y

$$\mu_n(v) + \mu_n(w) \longrightarrow \mu(v) + \mu(w),$$

con lo que por (3.8) se concluye que

$$\mu(v+w) \leq \mu(v) + \mu(w)$$

obteniendo que efectivamente μ es una pseudonorma.

Así, $\mathcal{P}$ es cerrado en $\mathbb{R}^V$ y por el Teorema 2.2.1 será un G_δ, con lo que aplicando el Teorema 2.1.1 concluimos finalmente que $\mathcal{P}$ es un espacio polaco. ■

Una subbase para la topología producto en $\mathbb{R}^V$ viene dada por

$$\mathcal{S} = \left\{\pi_v^{-1}(I) : v \in V, I \text{ es un intervalo abierto en } \mathbb{R}\right\},$$

donde π_v son las proyecciones canónicas en el producto cartesiano, es decir,

$$\pi_v^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}^V : \pi_v(x) \in I\} = \{x \in \mathbb{R}^V : x(v) \in I\}.$$

Por tanto, una subbase de $\mathcal{P}$ vendrá dada por

$$\mathcal{S}_{\mathcal{P}} = \{U[v,I] : v \in V, I \text{ es un intervalo abierto en } \mathbb{R}\}$$

siendo

$$U[v,I] = \pi_v^{-1}(I) \cap \mathcal{P} = \{\mu \in \mathcal{P} : \mu(v) \in I\}.$$

Dado $\mu \in \mathcal{P}$ denotaremos por $\bar{\mu}$ la única pseudonorma sobre c_{00} que la extiende (ver Lema B.2) y definimos

$$N_\mu = \{x \in c_{00} : \bar{\mu}(x) = 0\}.$$

Denotaremos ahora por $\tilde{\mu} : c_{00}/N_\mu \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación dada por

$$\tilde{\mu}(x + N_\mu) = \bar{\mu}(x), \ \forall x + N_\mu \in c_{00}/N_\mu.$$

Por el Teorema 1.2.3, obtenemos entonces que $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$ será un espacio normado.

Cuando sea claro por el contexto denotaremos los elementos de c_{00}/N_μ como $x + N_\mu = \bar{x}$.

Denotaremos también

$$\overline{V} = \{v + N_\mu : v \in V\}.$$

Además, si $\bar{\mu}$ ya es una norma sobre c_{00} como $N_\mu = \{0_{c_{00}}\}$ y $(c_{00}, \bar{\mu}) \equiv (c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$, consideraremos directamente el espacio $(c_{00}, \bar{\mu})$ en lugar de $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$.

Por último, el Teorema 1.2.4 nos garantiza que existe una compleción[10] $(X_\mu, \hat{\mu})$ de $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$ de modo que c_{00}/N_μ es un subespacio denso de X_μ y con $\hat{\mu}|_{c_{00}/N_\mu} = \tilde{\mu}$.

[10] Si $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$ ya es completo definimos simplemente $X_\mu = c_{00}/N_\mu$ y $\hat{\mu} = \tilde{\mu}$.

Antes de continuar, remarcamos que a lo largo del texto se mantendrá la notación descrita, es decir, si μ es una pseudonorma cualquiera en $\mathcal{P}$ denotaremos por:

- $\bar{\mu}$ la única pseudonorma sobre c_{00} que extiende a μ y $N_\mu = \{x \in c_{00} : \bar{\mu}(x) = 0\}$.
- $\tilde{\mu}$ la norma definida sobre c_{00}/N_μ como $\tilde{\mu}(x + N_\mu) = \bar{\mu}$, para cada $x + N_\mu \in c_{00}/N_\mu$.
- Si no hay lugar a confusión los elementos de c_{00}/N_μ se denotarán por $\bar{x} = x + N_\mu$, siendo $\overline{V} = \{\bar{v} : v \in V\}$.
- $(X_\mu, \hat{\mu})$ es cualquier compleción del espacio $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$ cumpliendo que c_{00}/N_μ es un subespacio denso de X_μ y $\hat{\mu}|_{c_{00}/N_\mu} = \tilde{\mu}$.

Con toda la notación clara, pasemos ahora a ver que este proceso de extensión de pseudonormas proporciona una caracterización de la clase de espacios de Banach separables.

Si $(Y, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach separable por definición existe una sucesión densa $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$ y podemos construir a partir de ella una aplicación $\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que dado

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in V$$

es

$$\mu(v) = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\|.$$

Entonces, tenemos que $\mu \in \mathcal{P}$ pues dados $v, w \in V$, con $v = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n$ y $w = \sum_{n=1}^\infty b_n e_n$, y $\lambda \in \mathbb{Q}$ se cumplen:

$$\mu(\lambda v) = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) e_n\right) = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n) y_n \right\| = \left\| \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| = |\lambda| \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| = |\lambda|\, \mu(v),$$

$$\begin{aligned}\mu(v + w) = \mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) e_n\right) &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) y_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n \right\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n \right\| = \mu(v) + \mu(w).\end{aligned}$$

Además, es claro que por la unicidad de $\bar{\mu}$ esta viene dada por

$$\bar{\mu}(x) = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\|$$

siendo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_{00}.$$

Veamos ahora que $(Y, \|\cdot\|)$ es una compleción de $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$.

Sea pues $j : c_{00}/N_\mu \longrightarrow Y$ tal que para cada $x = \sum_{n=1}^\infty a_n e_n \in c_{00}$ es

$$j(x + N_\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n.$$

Entonces, en primer lugar j está bien definida pues si son $x + N_\mu = x' + N_\mu$ tenemos que $x - x' \in N_\mu$ con lo que

$$\bar{\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_n')e_n\right) = 0$$

y por definición

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_n')y_n\right\| = 0.$$

Así,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' y_n$$

y efectivamente $j(x + N_\mu) = j(x' + N_\mu)$.

Por otra parte, j es claramente lineal y la definición de $\bar{\mu}$ nos garantiza que es una isometría ya que

$$\|j(x + N_\mu)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\right\| = \bar{\mu}(x) = \tilde{\mu}(x + N_\mu).$$

Resta únicamente ver que $j(c_{00}/N_\mu)$ es denso en Y, para lo cual basta observar que por la linealidad de j

$$j(c_{00}/N_\mu) = j(\mathrm{span}\{\overline{e_n} : n \in \mathbb{N}\}) = \mathrm{span}\{j(\overline{e_n}) : n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\},$$

y así

$$Y = \mathrm{cl}_Y\left(\{y_n : n \in \mathbb{N}\}\right) \subset \mathrm{cl}_Y\left(\mathrm{span}\{y_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = \mathrm{cl}_Y\left(j(c_{00}/N_\mu)\right) \subset Y.$$

Con todo, $[Y, j]$ es efectivamente una compleción de $(c_{00}/N_\mu, \tilde{\mu})$.

Hemos visto pues que dado un espacio de Banach separable Y, existe $\mu \in \mathcal{P}$ tal que Y es una compleción de c_{00}/N_μ con lo que, por el Teorema 1.2.5, tenemos que $Y \equiv X_\mu$.

Es decir, dado Y cualquier espacio de Banach separable existe $\mu \in \mathcal{P}$ tal que Y es isométricamente isomorfo a X_μ. De forma recíproca veremos más adelante que para cada $\mu \in \mathcal{P}$ se tiene que X_μ es separable, con lo que $\mathcal{P}$ supone efectivamente una codificación de los espacios de Banach separables.

La estructura de espacio polaco de $\mathcal{P}$ nos permite entonces preguntarnos por la complejidad de cualquier familia de espacios de Banach separables dentro de la codificación, donde la complejidad la establecemos en función de la clase de Borel a la que pertenezca dicha familia.

3.2.2. Los espacios $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$

Puesto que los espacios de Banach de dimensión finita se comportan relativamente bien, es útil introducir dos subconjuntos de $\mathcal{P}$ que nos permitan trabajar únicamente con espacios de dimensión infinita

$$\mathcal{P}_\infty = \{\mu \in \mathcal{P} : \dim(X_\mu) = \infty\},$$
$$\mathcal{B} = \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : N_\mu = \{0_{c_{00}}\}\}.$$

El segundo de estos espacios admite una caracterización que resultará muy útil.

Lema 3.2.2. *Son equivalentes:*

(i) $\mu \in \mathcal{B}$;

(ii) $(c_{00}, \bar{\mu})$ *es un espacio normado;*

(iii) $\{e_n + N_\mu : n \in \mathbb{N}\}$ *es linealmente independiente en* c_{00}/N_μ.

Demostración:

(i) ⇒ (ii)

Si $N_\mu = \{0_{c_{00}}\}$ tenemos entonces que $\bar{\mu}(x) = 0$ si, y solo si, $x = 0_{c_{00}}$ luego efectivamente $\bar{\mu}$ es una norma en c_{00}.

(ii) ⇒ (iii)

Si $\bar{\mu}$ es una norma en c_{00} entonces $N_\mu = \{0_{c_{00}}\}$ y con ello c_{00}/N_μ es isomorfo a c_{00} como espacio vectorial, pues basta considerar $f : c_{00} \longrightarrow c_{00}/N_\mu$ dada por $f(x) = x + N_\mu$.

Como $\{e_n + N_\mu : n \in \mathbb{N}\}$ es la imagen por f de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y este último conjunto es linealmente independiente en c_{00}, concluimos que efectivamente el conjunto dicho es linealmente independiente en c_{00}/N_μ.

(iii) ⇒ (i)

Dado $x \in c_{00}$ con

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

tenemos que $x \in N_\mu$ si, y solo si,

$$x + N_\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i(e_i + N_\mu) = N_\mu,$$

y por la independencia lineal de los $e_i + N_\mu$, tenemos que esto último se da si, y solo si, $a_i = 0$ para cada $i = 1, \cdots, n$.

Por tanto, hemos visto que $x \in N_\mu$ si, y solo si, $x = 0_{c_{00}}$, es decir, $N_\mu = \{0_{c_{00}}\}$.

Además, como $\{e_n + N_\mu : n \in \mathbb{N}\} \subset X_\mu$ tenemos que también son linealmente independientes en este espacio y por tanto debe tener dimensión infinita, con lo que efectivamente queda probado que $\mu \in \mathcal{B}$. ■

Antes de comprobar que los últimos espacios definidos son polacos observemos que estos también proporcionan una codificación de los espacios de Banach separables, en este caso de dimensión infinita, bajo el mismo proceso que lo hace $\mathcal{P}$.

Es decir, queremos ver que dado Y un espacio de Banach separable de dimensión infinita existen $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ y $\nu \in \mathcal{B}$ tales que $Y \equiv X_\mu \equiv X_\nu$.

Para el caso de $\mathcal{P}_\infty$ la misma pseudonorma obtenida al final de la subsección anterior es válida pues la dimensión del espacio no afecta en nada al proceso por el cual la obtenemos.

Sin embargo, para el caso de $\mathcal{B}$ tenemos por el lema anterior que debemos obtener una norma. Esto es posible sin más que modificar ligeramente el argumento dado para $\mathcal{P}$, exigiendo que la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ densa en Y tomada al principio sea además linealmente independiente, lo cual es posible por el Lema B.10.

Efectivamente, en este caso tendríamos que para la pseudonorma obtenida

$$\bar{\mu}(x) = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\|$$

se cumple que, si $\bar{\mu}(x) = 0$ entonces

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \right\| = 0$$

luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = 0_{c_{00}},$$

y por la independencia lineal de los y_n, tenemos que $a_n = 0$ para cada $n \geq 1$.

Es decir, si $\bar{\mu}(x) = 0$ entonces $x = 0_{c_{00}}$, con lo que $\bar{\mu}$ es una norma y por el lema anterior concluimos $\mu \in \mathcal{B}$.

Como ya hemos dicho, nuestro siguiente objetivo será demostrar que $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos G_δ de $\mathcal{P}$ y así, por el Teorema 2.1.1, serán espacios polacos.

Para verlo introduciremos una proposición más fuerte a partir de la cual obtendremos el resultado como corolario, pero antes veamos algunos de lemas que relacionan c_{00} con V y que necesitaremos en la prueba.

Lema 3.2.3. *Sean $\mu \in \mathcal{P}$, $v_1, \cdots, v_n \in V$, $E = \operatorname{span}\{v_1, \cdots, v_n\} \subset c_{00}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, dado $y \in E$ existe $x \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{v_1, \cdots, v_n\}$ tal que $\bar{\mu}(y - x) < \varepsilon$.*

Demostración:

Puesto que $y \in E$ será

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

para ciertos $y_i \in \mathbb{R}$ y, por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, existirán ciertas sucesiones de números racionales $\{y_i^m\}_{m=1}^{\infty}$ tales que $y_i^m \longrightarrow y_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$.

Así, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces

$$|y_i - y_i^m| < \frac{\varepsilon}{nK}, \ \forall i = 1, \cdots, n$$

donde $K = \max\{\mu(v_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

Definiendo entonces $x_i = y_i^{m_0}$ para cada $i = 1, \cdots, n$ y

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in E \cap V,$$

se tiene que

$$\bar{\mu}(y - x) = \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) v_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| \, \bar{\mu}(v_i) \leq K \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i^{m_0}| < \varepsilon$$

que es justo lo que buscábamos. ■

Lema 3.2.4. *Sean $\mu \in \mathcal{P}$, $v_1, \cdots, v_n \in V$, $E = \text{span}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \subset c_{00}/N_\mu$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, dado $y \in E$ existe algún $x^* \in \text{span}_{\mathbb{Q}}\{v_1, \cdots, v_n\}$ tal que $\tilde{\mu}(y - x) < \varepsilon$ siendo $x = x^* + N_\mu$.*

Demostración:

Puesto que $y \in E$ será

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i \bar{v}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right) + N_\mu$$

para ciertos $y_i \in \mathbb{R}$, luego definiendo

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$$

por el lema anterior existe

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$$

tal que $\bar{\mu}(y^* - x^*) < \varepsilon$.

Por tanto, definiendo $x = x^* + N_\mu \in E \cap \overline{V}$ tendremos que

$$\tilde{\mu}(y - x) = \tilde{\mu}((y^* - x^*) + N_\mu) = \bar{\mu}(y^* - x^*) < \varepsilon$$

tal como buscábamos. ■

Lema 3.2.5. *Sean $\mu \in \mathcal{P}$, $v_1, \cdots, v_n \in V$, $E = \text{span}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \subset X_\mu$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe un conjunto finito N contenido en $\text{span}_{\mathbb{Q}}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ de modo que es ε-denso en $\mathbb{S}_E$ la esfera de E y tal que para cada $\bar{v} \in N$ se cumple que*

$$\tilde{\mu}(\bar{v}) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon).$$

Demostración:

Como $(E, \tilde{\mu})$ es un espacio normado de dimensión finita el teorema de Riesz nos dice que $\mathbb{S}_E$ será compacto.

Así, como

$$\mathbb{S}_E \subset \bigcup_{x \in \mathbb{S}_E} B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

por compacidad tenemos que existen $y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{S}_E$ tales que

$$\mathbb{S}_E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por el Lema 3.2.4 sabemos que existen $z_1, \cdots, z_n \in \text{span}_{\mathbb{Q}}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ tales que

$$\tilde{\mu}(y_i - z_i) < \varepsilon/2$$

para cada $i = 1, \cdots, n$.

Así, dado $i = 1, \cdots, n$ se cumple que

$$B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset B(z_i, \varepsilon)$$

pues si $z \in B(y_i, \varepsilon/2)$ entonces

$$\tilde{\mu}(z - z_i) \leq \tilde{\mu}(z - y_i) + \tilde{\mu}(y_i - z_i) < \varepsilon.$$

Por tanto, tenemos que

$$\mathbb{S}_E \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i, \varepsilon) \tag{3.9}$$

donde podemos considerar que $\mathbb{S}_E \cap B(z_i, \varepsilon) \neq \varnothing$ para cada $i = 1, \cdots, n$.
Definamos pues $N = \{z_1, \cdots, z_n\}$ y observemos que por (3.9) es ε-denso para $\mathbb{S}_E$.
Además, dado $z_i \in N$ tenemos que tomando $e \in \mathbb{S}_E \cap B(z_i, \varepsilon)$ se cumple que

$$1 - \varepsilon < \tilde{\mu}(e) - \tilde{\mu}(e - z_i) \leq \tilde{\mu}(z_i) \leq \tilde{\mu}(e) + \tilde{\mu}(z_i - e) < 1 + \varepsilon,$$

con lo que N es el conjunto buscado. ■

Proposición 3.2.6. *Si X un espacio de Banach, $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ linealmente independientes y $v_1, \cdots, v_n \in V$, entonces para cada $K > 1$ el conjunto*

$$\mathcal{N}(\{x_i\}_{i=1}^n, K, \{v_i\}_{i=1}^n) = \{\mu \in \mathcal{P} : (X_\mu, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n) \overset{K}{\sim} (X, x_1, \cdots, x_n)\}$$

es abierto en P.

Demostración:
Sea $\mu \in \mathcal{N}(\{x_i\}_{i=1}^n, K, \{v_i\}_{i=1}^n)$, entonces la aplicación lineal T que manda cada x_i en $\bar{v}_i$ con $i = 1, \cdots, n$ es un isomorfismo lineal (luego en particular $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente en X_μ) tal que

$$\max\left\{\left\|T\right\|, \left\|T^{-1}\right\|\right\} < L \tag{3.10}$$

para algún $0 < L < K$.
Si consideramos ahora ϕ_1 la aplicación del Lema 1.2.10, como es $\phi_1(0) = 0$ y es continua, existe un $0 < \delta < 1/3$ tal que si $t \in [0, \delta)$ entonces

$$\phi_1(t) < \frac{K - L}{L},$$

luego tomando $0 < \varepsilon < \delta/2$ se tiene que

$$\phi_1(2\varepsilon) < \frac{K - L}{L}$$

es decir,

$$L(1 + \phi_1(2\varepsilon)) < K. \tag{3.11}$$

Definamos ahora $E = \mathrm{span}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \subset X_\mu$ con la norma inducida y observemos que por el Lema 3.2.5 existe $N = \{z_1, \cdots, z_n\}$, un conjunto finito contenido en $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ de modo que es ε-denso en $\mathbb{S}_E$ la esfera de E y tal que para cada $z_i \in N$ se cumple que

$$\tilde{\mu}(z_i) \in (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon). \tag{3.12}$$

Ahora, como cada z_i pertenece al espacio $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$, existirán ciertos $w_1, \cdots, w_n$ en $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{v_1, \cdots, v_n\}$ tales que $z_i = w_i + N_\mu$.
Definamos entonces

$$U = \{\nu \in \mathcal{P} : |\nu(w_i) - \mu(w_i)| < \varepsilon, i = 1, \cdots, n\} = \bigcap_{i=1}^{n} U[w_i, (\tilde{\mu}(z_i) - \varepsilon, \tilde{\mu}(z_i) + \varepsilon)].$$

El conjunto U es entonces un entorno abierto de μ y basta ver que

$$U \subset \mathcal{N}(\{x_i\}_{i=1}^n, K, \{v_i\}_{i=1}^n)$$

para concluir que efectivamente este último es abierto.
Dado $\nu \in U$ consideremos el espacio $E' = \operatorname{span}\{v_1 + N_\nu, \cdots, v_n + N_\nu\}$ y la aplicación lineal[11]

$$I : (E, \tilde{\mu}) \longrightarrow (E', \tilde{\nu})$$

tal que

$$I(v_i + N_\mu) = v_i + N_\nu.$$

Entonces, como N es 2ε-denso en $\mathbb{S}_E$ y como para cada $i = 1, \cdots, n$ se cumple que

$$\begin{aligned}|\tilde{\nu}(I(z_i)) - 1| = |\tilde{\nu}(I(w_i + N_\mu)) - 1| = |\tilde{\nu}(w_i + N_\nu) - 1| \leq |\nu(w_i) - \mu(w_i)| + |\tilde{\mu}(z_i) - 1| < \\ \underset{\nu \in U}{<} \varepsilon + |\tilde{\mu}(z_i) - 1| \underset{(3.12)}{<} 2\varepsilon,\end{aligned}$$

por el Lema 1.2.10 obtenemos que I es un $(1+\phi_1(2\varepsilon))$-isomorfismo entre $(E, \tilde{\mu})$ y $(E', \tilde{\nu})$.
Por tanto, dado $x \in E$ se cumple que

$$(1 + \phi_1(2\varepsilon))^{-1}\tilde{\mu}(x) \leq \tilde{\nu}(I(x)) \leq (1 + \phi_1(2\varepsilon))\tilde{\mu}(x),$$

y como además I es sobreyectiva, por lo observado tras la Definición 1.2.6 concluimos que I es un isomorfismo y

$$\max\left\{\left\|I\right\|, \left\|I^{-1}\right\|\right\} \leq 1 + \phi_1(2\varepsilon). \tag{3.13}$$

Así, si es ahora

$$F : (\operatorname{span}\{x_1, \cdots, x_n\}, \|\cdot\|_X) \longrightarrow (E', \tilde{\nu})$$

[11] *Si son $\mu, \nu \in \mathcal{P}$ y $v_1, \cdots, v_n \in V$ tales que $\{v_1 + N_\mu, \cdots, v_n + N_\mu\}$ es linealmente independiente en X_μ, entonces la aplicación lineal $I : \operatorname{span}\{v_1 + N_\mu, \cdots, v_n + N_\mu\} \longrightarrow \operatorname{span}\{v_1 + N_\nu, \cdots, v_n + N_\nu\}$ tal que $I(v_i + N_\mu) = v_i + N_\nu$ está bien definida.*

Si $\sum_{i=1}^n a_i(v_i + N_\mu) = \sum_{i=1}^n b_i(v_i + N_\mu)$ entonces $a_i = b_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$ y tenemos pues que

$$\begin{aligned}I\left(\sum_{i=1}^n a_i(v_i + N_\mu)\right) = \sum_{i=1}^n a_i I(v_i + N_\mu) = \sum_{i=1}^n a_i(v_i + N_\nu) = \sum_{i=1}^n b_i(v_i + N_\nu) = \sum_{i=1}^n b_i I(v_i + N_\mu) = \\ = I\left(\sum_{i=1}^n b_i(v_i + N_\mu)\right),\end{aligned}$$

concluyendo que I está bien definida.

dada por $F(x_i) = v_i + N_\nu$, es claro que $F = I \circ T$ y de (3.10) y (3.13) obtenemos que

$$\|F\| = \|I \circ T\| \leq \|I\| \, \|T\| < L(1 + \phi_1(2\varepsilon)) \underset{(3.11)}{<} K,$$
$$\left\|F^{-1}\right\| = \left\|T^{-1} \circ I^{-1}\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \left\|I^{-1}\right\| < L(1 + \phi_1(2\varepsilon)) \underset{(3.11)}{<} K.$$

Con todo, hemos probado que

$$(X_\nu, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n) \overset{K}{\sim} (X, x_1, \cdots, x_n)$$

y por tanto, $\nu \in \mathcal{N}(\{x_i\}_{i=1}^n, K, \{v_i\}_{i=1}^n)$ demostrando que es abierto en $\mathcal{P}$. ■

Corolario 3.2.7. *Si $v_1, \cdots, v_n \in V$, entonces el conjunto*

$$\{\mu \in \mathcal{P} : \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \text{ es linealmente independiente en } X_\mu\}$$

es abierto en $\mathcal{P}$.

Demostración:
Observemos que si $\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ es linealmente independiente en X_μ entonces

$$E = \text{span}\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$$

es un espacio de dimensión n y, por la equivalencia de normas en espacios de dimensión finita, tenemos que existen $M, N > 0$ tal que para todo $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ es

$$N\tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{v}_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \leq M\tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{v}_i\right).$$

Por tanto, si consideramos la aplicación

$$T : (\ell_1^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E, \tilde{\mu})$$

dada por $T(e_i) = \overline{v_i}$, esta será un isomorfismo lineal.
Ahora, en primer lugar si es $x = (x_1, \cdots, x_n)$ entonces

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{v}_i$$

con lo que

$$\tilde{\mu}(T(x)) = \tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^n x_i \bar{v}_i\right) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \tilde{\mu}(\bar{v}_i) \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\mu}(\bar{v}_i) \sum_{i=1}^n |x_i| = n \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\mu}(\bar{v}_i) \, \|x\|_1,$$

y así

$$\|T\| \leq n \max_{1 \leq i \leq n} \tilde{\mu}(\bar{v}_i).$$

Por otra parte, si es

$$\bar{v} = \sum_{i=1}^n x_i \bar{v}_i$$

entonces

$$T^{-1}(\bar{v}) = (x_1, \cdots, x_n)$$

y

$$\left\|T^{-1}(\bar{v})\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq M\tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{v}_i\right) = M\tilde{\mu}(\bar{v}),$$

con lo que

$$\left\|T^{-1}\right\| \leq M.$$

Con todo, tomando

$$K = \max\left\{M, n \max_{1\leq i\leq n} \tilde{\mu}(\bar{v}_i)\right\} + 1$$

se tiene que

$$(X_\mu, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n) \overset{K}{\sim} (\ell_1^n, e_1, \cdots, e_n).$$

Recíprocamente, si es $(X_\mu, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n) \overset{K}{\sim} (\ell_1^n, e_1, \cdots, e_n)$ para algún $K > 1$ entonces por definición la aplicación

$$T : (\ell_1^n, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (E_\mu, \tilde{\mu})$$

dada por $T(e_i) = \bar{v}_i$ es un isomorfismo lineal, con lo que debe ser $\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ linealmente independiente en X_μ.

En definitiva, hemos demostrado que $\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ es linealmente independiente en X_μ si, y solo si, existe un $K > 1$ tal que $(X_\mu, \bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n) \overset{K}{\sim} (\ell_1^n, e_1, \cdots, e_n)$ y por tanto

$$Y = \{\mu \in \mathcal{P} : \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \text{ es lin. indep. en } X_\mu\} = \bigcup_{K>1} \mathcal{N}(\{e_i\}, K, \{v_i\}),$$

que por la proposición anterior es abierto. ■

Corolario 3.2.8. *Los conjuntos $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$ son G_δ en $\mathcal{P}$ y con ello espacios polacos con la topología relativa.*

Demostración:

Observemos en primer lugar que dado $\mu \in \mathcal{P}$ se tiene que X_μ tiene dimensión infinita si, y solo si, c_{00}/N_μ tiene dimensión infinita ya que todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Así si X_μ tiene dimensión infinita, c_{00}/N_μ tiene dimensión infinita y como

$$\{\overline{e_n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \overline{V}$$

es un sistema generador, existe una base de cardinal numerable contenida en este conjunto.

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \subset \overline{V}$ linealmente independiente en c_{00}/N_μ y por tanto en X_μ.

Recíprocamente, si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto $\{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \subset \overline{V}$ linealmente independiente en X_μ es claro que debe tener dimensión infinita.

Con esto, si dados $v_1, \cdots, v_n$ denotamos por

$$Y_{v_1,\cdots,v_n} = \{\mu \in \mathcal{P} : \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \text{ es linealmente independiente en } X_\mu\}$$

obtenemos que

$$\mu \in \mathcal{P}_\infty \Leftrightarrow \mu \in \mathcal{P} \wedge \forall n \in \mathbb{N}, \exists \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\} \subset \overline{V} \text{ lin. indep. en } X_\mu \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V : \mu \in Y_{v_1, \cdots, v_n}.$$

Por tanto, si denotamos por V_n la familia de subconjuntos de n elementos de V y para cada $z \in V_n$ denotamos sus elementos por z_i tenemos que

$$\mathcal{P}_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{z \in V_n} Y_{z_1, \cdots, z_n} \right).$$

Como por el Corolario 3.2.7 cada conjunto $Y_{z_1, \cdots, z_n}$ es abierto en $\mathcal{P}$ concluimos que efectivamente $\mathcal{P}_\infty$ es un conjunto G_δ de $\mathcal{P}$.

Por otra parte, para $\mathcal{B}$ por el Lema 3.2.2 sabemos que

$$\mathcal{B} = \{\mu \in \mathcal{P} : \{\overline{e_n}\}_{n=1}^\infty \text{ es lin. indep. en } X_\mu\},$$

con lo que denotando

$$Y_m = \{\mu \in \mathcal{P} : \{\overline{e_n}\}_{n=1}^m \text{ es lin. indep. en } X_\mu\}$$

tenemos que

$$\mathcal{B} = \bigcap_{m=1}^\infty Y_m.$$

Como por el Corolario 3.2.7 cada Y_m es abierto en $\mathcal{P}$ concluimos que efectivamente $\mathcal{B}$ es un conjunto G_δ en $\mathcal{P}$. ■

Con todo lo visto, es fácil ya demostrar que X_μ es un espacio separable para cada $\mu \in \mathcal{P}$, lo que cierra completamente la codificación por pseudonormas.

Teorema 3.2.9. *Si $\mu \in \mathcal{P}$ entonces $\overline{V}$ es un conjunto denso y numerable en X_μ y con ello X_μ es separable.*

Demostración:

Como c_{00}/N_μ es denso en X_μ, por la Proposición 1.1.10 basta ver que c_{00}/N_μ es separable.

Aún más, por la demostración de dicha proposición tenemos que si vemos que $\overline{V}$ es denso en c_{00}/N_μ, puesto que claramente es numerable por serlo V, tendremos que $\overline{V}$ es también un conjunto numerable y denso en X_μ.

Sin más, dado $x \in c_{00}/N_\mu$ y $\varepsilon > 0$ tenemos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in \operatorname{span}\{\overline{e_1}, \cdots, \overline{e_n}\},$$

con lo que por el Lema 3.2.4 existe pues $\bar{v} \in \overline{V}$ tal que

$$\tilde{\mu}(x - \bar{v}) < \varepsilon$$

y efectivamente $\overline{V}$ es denso en c_{00}/N_μ. ■

Para finalizar la subsección introduciremos también otros dos tipos de familias que en cierto sentido son complementarias de $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$ y que serán útiles en la siguiente sección.

Dado $d \in \mathbb{N}$ definimos

$$\mathcal{P}_d = \{\mu \in \mathcal{P} : \dim(X_\mu) = d\},$$
$$\mathcal{B}_d = \{\mu \in \mathcal{P} : \overline{e_1}, \cdots, \overline{e_d} \text{ es base de } X_\mu \text{ y } \mu(e_i) = 0, \forall i > d\}.$$

Tal como con todos los espacios que hemos definido, estos últimos también son polacos.

Corolario 3.2.10. *Para cada $d \in \mathbb{N}$ se tiene que el conjunto $\mathcal{P}_d$ es un G_δ de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{B}_d$ es un Δ_2^0 de $\mathcal{P}_d$.*
En particular, ambos espacios con la topología heredada de $\mathcal{P}$ son polacos.

Demostración:
Como ya hemos visto en la demostración del Corolario 3.2.8, dado $\mu \in \mathcal{P}$ se tiene que X_μ tiene dimensión finita si, y solo si, c_{00}/N_μ tiene dimensión finita.
Además, en este caso como c_{00}/N_μ tiene dimensión finita es un espacio de Banach y por tanto $X_\mu = c_{00}/N_\mu$.
Así dado $d \in \mathbb{N}$ como $\{\overline{e_i} : i \in \mathbb{N}\}$ es siempre un conjunto generador de c_{00}/N_μ, tenemos que $\dim(X_\mu) = d$ si, y solo si, existe $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{N}^d$ tal que $\{\overline{e_{x_1}}, \cdots, \overline{e_{x_d}}\}$ es base de X_μ.
Obtenemos entonces que[12]

$$\mathcal{P}_d = \bigcup_{x \in \mathbb{N}^d} \Bigg[\{\mu \in \mathcal{P} : \overline{e_{x_1}}, \cdots, \overline{e_{x_d}} \text{ son lin. indep. en } X_\mu\} \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\mu \in \mathcal{P} : \overline{e_{x_1}}, \cdots, \overline{e_{x_d}}, \overline{e_k} \text{ son lin. dep. en } X_\mu\}\Bigg].$$

Por el Corolario 3.2.7 tenemos entonces que el primer conjunto dentro de la unión es abierto y que la intersección numerable será un cerrado, luego por el Teorema 2.2.1 ambos pertenecen a $\Sigma_2^0(\mathcal{P})$ y efectivamente $\mathcal{P}_d \in \Sigma_2^0(\mathcal{P})$.
Por otra parte, observemos que dado $\mu \in \mathcal{P}$ se tiene que

$$\mu(e_i) = 0 \Leftrightarrow \overline{e_i} = N_\mu \Leftrightarrow \{\overline{e_i}\} \text{ es lin. dep. en } X_\mu,$$

con lo que dado $d \in \mathbb{N}$ es

$$\mathcal{B}_d = \mathcal{P}_d \cap \{\mu \in \mathcal{P} : \overline{e_1}, \cdots, \overline{e_d} \text{ son lin. indep. en } X_\mu\} \cap \cap \bigcap_{i=d+1}^{\infty} \{\mu \in \mathcal{P} : \{\overline{e_i}\} \text{ es lin. dep. en } X_\mu\}.$$

De nuevo, por el el Corolario 3.2.7 y teniendo en cuenta la intersección con $\mathcal{P}_d$, tenemos que $\mathcal{B}_d$ es intersección de un abierto y un cerrado en $\mathcal{P}_d$, con lo que por el Teorema 2.2.1 es efectivamente un Δ_2^0 de $\mathcal{P}_d$. ■

[12] Estamos empleando de forma implícita en la igualdad un conocido resultado en álgebra lineal (puede consultarse en [29, Thm. 5.1, Chap. 3.5]) que establece que dado un espacio vectorial $V \neq \{0\}$, un conjunto generador G y un conjunto linealmente independiente $L \subset G$, existe una base B de V tal que $L \subset B \subset V$.

3.2.3. Relación entre $\mathcal{P}$ y la representabilidad finita

En esta subsección estudiaremos la relación entre los espacios de pseudonormas descritos y la representabilidad finita. En concreto veremos que dado un espacio de Banach separable X de dimensión infinita, el conjunto de pseudonormas μ en cualquiera de estos espacios tales que X_μ es finitamente representable en X es cerrado.

Para comenzar, precisamos de cierta notación.

Dado Z un espacio de Banach separable e $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}$ denotaremos

$$\langle Z \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \equiv Z\},$$
$$\langle Z \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \simeq Z\}.$$

Si tomamos $\mathcal{I} = \mathcal{P}$ prescindiremos del superíndice en la notación anterior.

Por otra parte, relacionamos la representabilidad finita con el espacio $\mathcal{P}$ de modo que dado $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ y X un espacio de Banach separable, decimos que X es **finitamente representable** en $\mathcal{F}$ si es finitamente representable en $\{X_\mu : \mu \in \mathcal{F}\}$.

Antes de pasar a ver el resultado principal de la subsección precisamos del siguiente lema cuya demostración es directa[13] a partir de [1, Lemma 12.1.7].

Lema 3.2.11. *Sea $\mathcal{F}$ una familia de espacios de Banach, $\mu \in \mathcal{P}$ y $\{k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\{\overline{e_{k(n)}} : 1 \leq n \leq \dim(X_\mu)\}$ es linealmente independiente en X_μ y*

$$X_\mu = \mathrm{cl}\left(\mathrm{span}\left\{\overline{e_{k(n)}} : 1 \leq n \leq \dim(X_\mu)\right\}\right).$$

Entonces, X_μ es finitamente representable en $\mathcal{F}$ si, y solo si, para cada natural n menor o igual a la dimensión de X_μ y $\varepsilon > 0$ existe un subespacio de dimensión finita F de algún $Y \in \mathcal{F}$ tal que es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a

$$\left(\mathrm{span}\left\{\overline{e_{k(1)}}, \cdots, \overline{e_{k(n)}}\right\}, \tilde{\mu}\right).$$

Proposición 3.2.12. *Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ tal que $\langle X_\mu \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \mathcal{F}$ para cada $\mu \in \mathcal{F}$, entonces*

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \textit{ es finitamente representable en } \mathcal{F}\}$$

donde $\mathcal{I} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}\}$.

En particular, si X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita entonces

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\right) = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \textit{ es finitamente representable en } X\}.$$

Demostración:

Comencemos demostrando la primera igualdad en la proposición, viendo primero la inclusión de derecha a izquierda apoyándonos en la siguiente afirmación.

Afirmación 1: Sean $\nu \in \mathcal{I}$ tal que X_ν es finitamente representable en $\mathcal{F}$, $v_1, \cdots, v_n \in V$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $\mu \in \mathcal{F}$ tal que

$$|\mu(v_i) - \nu(v_i)| < \varepsilon, \ \forall i = 1, \cdots, n. \tag{3.14}$$

[13] Realmente en [1, Lemma 12.1.7] se trata únicamente el caso en el que $\mathcal{F}$ esta formado por un espacio de Banach, pero la generalización a una familia arbitraria de estos es directa.

Entonces, dado $\nu \in \mathcal{I}$ tal que X_ν es finitamente representable en $\mathcal{F}$ y un abierto básico cualquiera en $\mathcal{I}$ que contenga a ν

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U[v_i, I_i] \cap \mathcal{I},$$

tenemos que $\nu(v_i) \in I_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$.

Además, existe para cada $i = 1, \cdots, n$ un $\varepsilon_i > 0$ tal que

$$(\nu(v_i) - \varepsilon_i, \nu(v_i) + \varepsilon_i) \subset I_i,$$

con lo que definiendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i : 1 \leq i \leq m\}$ tenemos que

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} U[v_i, (\nu(v_i) - \varepsilon, \nu(v_i) + \varepsilon)] \cap \mathcal{I} \subset U.$$

Ahora, por la Afirmación 1 sabemos que existe $\mu \in \mathcal{F}$ tal que

$$|\mu(v_i) - \nu(v_i)| < \varepsilon, \ \forall i = 1, \cdots, n$$

lo que nos permite concluir que $\mu \in W \subset U$.

Hemos visto pues que dado cualquier abierto básico U que contenga a ν se cumple que $U \cap \mathcal{F} \neq \varnothing$, lo que prueba que efectivamente $\nu \in \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}(\mathcal{F})$ como queríamos ver.

Basta entonces demostrar la Afirmación 1.

Demostración de la Afirmación 1:

Consideremos $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{v_1, \cdots, v_n\} \subset \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{e_j : 1 \leq j \leq m\},$$

y definamos

$$C = \max_{1 \leq i \leq n} \nu(v_i)$$

y

$$Z = \mathrm{span}\{\overline{e_1}, \cdots, \overline{e_m}\} \subset X_\nu.$$

Como X_ν es finitamente representable en $\mathcal{F}$ existe $\eta \in \mathcal{F}$ y un subespacio de dimensión finita $F \subset X_\eta$ tal que Z y F son $(1 + \varepsilon/2C)$-isomorfos, es decir, existe $T : Z \longrightarrow F$ un $(1 + \varepsilon/2C)$-isomorfismo sobreyectivo.

Denotemos ahora por $x_i = T(\overline{e_i})$ para cada $i = 1, \cdots, m$ y observemos que por el Lema B.9 existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X_\eta$ que extiende a la anterior y tal que

$$\mathrm{cl}_{X_\eta}(\mathrm{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}) = X_\eta.$$

Para el caso en el que $\mathcal{I} = \mathcal{B}$ como $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ es linealmente independiente exigimos además que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ sea linealmente independiente en X_η.

Definamos ahora μ tal que dado $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in V$ es

$$\mu(v) = \hat{\eta}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right).$$

Es directo por la definición dada comprobar que μ es una pseudonorma en V y además en el caso en el que $\mathcal{I} = \mathcal{B}$, por la independencia lineal de los $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, tenemos que su extensión a c_{00} será una norma pues

$$\overline{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = 0 \Leftrightarrow \hat{\eta}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0_{X_\eta} \Leftrightarrow a_i = 0,\ \forall i \geq 1.$$

Veamos que además $X_\mu \equiv X_\eta$.

Por el Teorema 1.2.5 basta ver que existe una isometría lineal $j : c_{00}/N_\mu \longrightarrow X_\eta$ tal que su imagen es densa en X_η.

Sin más, definamos

$$j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

y observemos en primer lugar que está bien definida pues si son

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i + N_\mu$$

entonces

$$0 = \overline{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) e_i\right) = \hat{\eta}\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) x_i\right),$$

de donde obtenemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) x_i = 0_{X_\eta}$$

y así que

$$j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i = j\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i + N_\mu\right).$$

Además, es claro por la definición que j es lineal y, por como hemos definido μ, será una isometría pues

$$\hat{\eta}\left(j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right)\right) = \hat{\eta}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \overline{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right).$$

Por último, observemos que por la linealidad de j

$$\begin{aligned} j\left(c_{00}/N_\mu\right) &= j\left(\operatorname{span}\{e_i + N_\mu : i \in \mathbb{N}\}\right) = \operatorname{span}\{j(e_i + N_\mu) : i \in \mathbb{N}\} = \\ &= \operatorname{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

y como por la elección de los x_i el último conjunto es denso en X_μ, tenemos que j es precisamente la isometría lineal buscada.

En resumen, tenemos que en cualquier caso $\mu \in \mathcal{I}$ y que $\mu \in \langle X_\eta \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$, luego como $\eta \in \mathcal{F}$ por hipótesis tendremos que $\mu \in \mathcal{F}$.

Para demostrar la Afirmación 1 resta únicamente ver que μ satisface (3.14).

Sin más, si es cada
$$v_i = \sum_{k=1}^{m} a_k^i e_k$$
entonces
$$\begin{aligned}\mu(v_i) &= \hat{\eta}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^i x_k\right) = \hat{\eta}\left(T\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^i \overline{e_k}\right)\right) \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2C}\right)\hat{\nu}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^i \overline{e_k}\right) = \\ &= \left(1+\frac{\varepsilon}{2C}\right)\hat{\nu}(v_i+N_\nu) = \left(1+\frac{\varepsilon}{2C}\right)\nu(v_i),\end{aligned}$$
y así
$$\mu(v_i) - \nu(v_i) \leq \frac{\varepsilon}{2C}\nu(v_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \forall i = 1, \cdots, n. \tag{3.15}$$
De forma análoga,
$$\begin{aligned}\mu(v_i) &= \hat{\eta}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^i x_k\right) = \hat{\eta}\left(T\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^i \overline{e_k}\right)\right) \geq \left(1+\frac{\varepsilon}{2C}\right)^{-1}\hat{\nu}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^i \overline{e_k}\right) = \\ &= \left(1+\frac{\varepsilon}{2C}\right)^{-1}\nu(v_i) \geq \left(1-\frac{\varepsilon}{2C}\right)\nu(v_i)\end{aligned}$$
y de nuevo
$$\mu(v_i) - \nu(v_i) \geq -\frac{\varepsilon}{2C}\nu(v_i) \geq -\frac{\varepsilon}{2}, \forall i = 1, \cdots, n. \tag{3.16}$$
Con todo, de (3.15) y (3.16) obtenemos que
$$|\mu(v_i) - \nu(v_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \ \forall i = 1, \cdots, n$$
con lo que μ satisface (3.14) y la afirmación queda demostrada. ■

Para ver ahora la otra inclusión, supongamos que es $\nu \in \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}(\mathcal{F})$ y veamos que X_ν es finitamente representable en $\mathcal{F}$.

Como $\{e_k + N_\nu : k \in \mathbb{N}\}$ es un sistema generador de c_{00}/N_ν y este último espacio es denso en X_ν, existe una sucesión $\{k(i)\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\{e_{k(i)} + N_\nu : 1 \leq i \leq \dim(X_\nu)\}$ es linealmente independiente en X_ν y
$$X_\nu = \mathrm{cl}\left(\mathrm{span}\left\{e_{k(i)} + N_\nu : 1 \leq i \leq \dim(X_\nu)\right\}\right).$$

Por el Lema 3.2.11 basta ver entonces que fijados $n \leq \dim(X_\nu)$ y $\varepsilon > 0$ existe $\mu \in \mathcal{F}$ y un subespacio F de X_μ tal que es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a $(E_\nu, \tilde{\nu})$, donde
$$E_\nu = \mathrm{span}\left\{e_{k(1)} + N_\nu, \cdots, e_{k(n)} + N_\nu\right\}.$$

Consideremos en primer lugar ϕ_1 la aplicación dada por el Lema 1.2.10, la cual por ser continua y cumplir que $\phi_1(0) = 0$ nos garantiza que existe un $0 < \delta < 1/6$ tal que $\phi_1(2\delta) < \varepsilon$.

Además, por el Lema 3.2.5 tenemos que existe N un conjunto finito contenido en
$$\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{e_{k(1)} + N_\nu, \cdots, e_{k(n)} + N_\nu\}$$

de modo que es δ-denso en $\mathbb{S}_{E_\nu}$ y tal que para cada $\bar{v} \in N$ se cumple que

$$\tilde{\nu}(\bar{v}) \in (1-\delta, 1+\delta). \tag{3.17}$$

Por otra parte, como $\nu \in \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}(\mathcal{F})$ si para cada $\bar{v} \in N$ fijamos un representante $v \in V$ entonces

$$\mathcal{F} \cap \bigcap_{\bar{v}\in N} U[v, (\nu(v)-\delta, \nu(v)+\delta)] \neq \varnothing,$$

con lo que tomando μ un elemento de dicha intersección se tiene que para todo $\bar{v} \in N$

$$|\mu(v) - \nu(v)| < \delta. \tag{3.18}$$

Definamos pues

$$F = \mathrm{span}\{e_{k(1)} + N_\mu, \cdots, e_{k(n)} + N_\mu\} \subset X_\mu$$

y veamos que es el subespacio buscado.

Consideremos pues la aplicación $I : (E_\nu, \tilde{\nu}) \longrightarrow (F, \tilde{\mu})$ dada por

$$I(e_{k(i)} + N_\nu) = e_{k(i)} + N_\mu, \ \forall i = 1, \cdots, n$$

y observemos que se cumplen:

- Por la nota al pie 11 y la independencia lineal de $e_{k(1)} + N_\nu, \cdots, e_{k(n)} + N_\nu$ en X_ν, tenemos que I está bien definida.
- I es una aplicación lineal sobreyectiva entre espacios de Banach.
- $N \subset E_\nu$ es 2δ-denso en $\mathbb{S}_{E_\nu}$.
- Dado $\bar{v} \in N$ se cumple por (3.17) y (3.18) que

$$\begin{aligned}|\tilde{\mu}(I(\bar{v})) - 1| &= |\tilde{\mu}(v+N_\mu) - 1| \leq |\tilde{\mu}(v+N_\mu) - \tilde{\nu}(\bar{v})| + |\tilde{\nu}(\bar{v}) - 1| = \\ &= |\mu(v) - \nu(v)| + |\tilde{\nu}(\bar{v}) - 1| < 2\delta.\end{aligned}$$

Aplicando pues el Lema 1.2.10 tenemos que I es un $(1+\phi_1(2\delta))$-isomorfismo y al ser $\phi_1(2\delta) < \varepsilon$, será en particular un $(1+\varepsilon)$-isomorfismo sobreyectivo.

En definitiva, hemos demostrado que F es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a E_ν, lo que finaliza la demostración de la primera igualdad.

Para demostrar la segunda parte de la proposición, dado X un espacio de Banach separable de dimensión infinita definamos $\mathcal{F} = \langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$.

Observemos entonces que $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ y que si es $\mu \in \mathcal{F}$ entonces $\langle X_\mu \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \mathcal{F}$.

Efectivamente, si $\nu \in \langle X_\mu \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$ entonces ν es un elemento de $\mathcal{I}$ tal que $X_\nu \equiv X_\mu$ y, como $X_\mu \equiv X$, obtenemos que $X_\nu \equiv X$ y efectivamente $\nu \in \mathcal{F}$.

Por tanto, podemos aplicar lo visto anteriormente obteniendo que

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\right) = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es finitamente representable en } \langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\},$$

y por el Lema B.13

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\right) = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es finitamente representable en } X\}$$

con lo que la proposición queda demostrada. ■

La proposición anterior nos da de forma inmediata el resultado que buscábamos.

Corolario 3.2.13. *Si X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita, entonces el conjunto*

$$\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es finitamente representable en } X\}$$

es cerrado en $\mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}\}$.

3.2.4. Un ejemplo de uso de las topologías anteriores

Concluiremos la introducción a los espacios de pseudonormas con un bonito ejemplo que nos muestra su potencia como codificación de los espacios de Banach así como algunas de sus propiedades. En particular, los emplearemos para demostrar que la aplicación que asigna a cada espacio metrizable y compacto K, su espacio de funciones reales continuas $\mathcal{C}(K)$, es continua.

De forma más precisa, como por el Teorema 1.1.9 sabemos que todo espacio metrizable y compacto es separable, el Teorema 1.1.8 nos asegura que tendrán una base numerable y así el Teorema E.2 nos permite considerar como codificación para los espacios metrizables y compactos el espacio $\mathcal{K}([0,1]^\omega)$, al cual dotaremos de la topología de Vietoris[14] ya introducida en la Sección 2.4.

Entonces, como para cada $K \in \mathcal{K}([0,1]^\omega)$ tenemos que $\mathcal{C}(K)$ es un espacio de Banach separable, demostremos que existe una aplicación continua $\rho : \mathcal{K}([0,1]^\omega) \longrightarrow \mathcal{P}$ tal que $X_{\rho(K)} \equiv \mathcal{C}(K)$.

Como $[0,1]^\omega$ es metrizable y compacto tenemos que $\mathcal{C}([0,1]^\omega)$ será un espacio normado y separable con la norma del supremo, con lo que por el Lema B.10 existe una sucesión $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ en $\mathcal{C}([0,1]^\omega)$ que es linealmente independiente y densa.

Así, para cada $K \in \mathcal{K}([0,1]^\omega)$ definimos $\rho(K)$ tal que dado $v = \sum_{k=1}^\infty a_k e_k \in V$ es

$$\rho(K)(v) = \sup_{x \in K} \left| \sum_{k=1}^\infty a_k f_k(x) \right|.$$

Por ser K compacto y $\sum_{k=1}^\infty a_k f_k$ continua, tenemos que $\rho(K)$ es una aplicación bien definida de V en $\mathbb{R}$. Además, es sencillo ver que por definición es una pseudonorma en V con lo que $\rho(K) \in \mathcal{P}$.

Ahora, para ver que $X_{\rho(K)} \equiv \mathcal{C}(K)$, como ya hemos hecho anteriormente, basta demostrar que $\mathcal{C}(K)$ es una compleción de $c_{00}/N_{\rho(K)}$. Es decir, basta ver que existe una isometría lineal $j : c_{00}/N_{\rho(K)} \longrightarrow \mathcal{C}(K)$ tal que su imagen es densa en $\mathcal{C}(K)$.

Sin más, definamos para cada $x = \sum_{k=1}^\infty a_k \overline{e_k} \in c_{00}/N_{\rho(K)}$

$$j(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k \overline{f_k},$$

donde $\overline{f_k} = f_k|_K$.

Es claro entonces que $j(x) \in \mathcal{C}(K)$ y veamos que j está bien definida.

[14] Para más información puede consultarse el Anexo C.

Si son

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{e_k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \overline{e_k} = y$$

entonces por definición de $N_{\rho(K)}$ tenemos que

$$0 = \overline{\rho(K)}(x-y) = \overline{\rho(K)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) e_k \right) = \sup_{x \in K} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) f_k(x) \right|.$$

Por tanto, para cada $x \in K$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - b_k) f_k(x) = 0,$$

y así

$$j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{f_k} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \overline{f_k} = j(y).$$

Además, se ve fácilmente a partir de la definición que j es lineal, pero aún más es también una isometría pues

$$\|j(x)\|_{\infty} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{f_k} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in K} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{f_k}(x) \right| = \overline{\rho(K)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \widetilde{\rho(K)}(x).$$

Por último, como por el Lema B.4 tenemos que $\left\{ \overline{f_k} : k \in \mathbb{N} \right\}$ es denso en $\mathcal{C}(K)$ y

$$\left\{ \overline{f_k} : k \in \mathbb{N} \right\} = \{ j(\overline{e_k}) : k \in \mathbb{N} \} \subset j(c_{00}/N_{\rho(K)}),$$

concluimos que efectivamente $j(c_{00}/N_{\rho(K)})$ es denso en $\mathcal{C}(K)$.

Resta pues ver la continuidad de ρ, para lo cual basta ver que dado $v \in V$ e I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ se cumple que $\rho^{-1}(U[v, I])$ es abierto en $\mathcal{K}([0,1]^{\omega})$.

Es decir, demostraremos que dado $K_0 \in \rho^{-1}(U[v, I])$ se cumple que es un punto interior. Supongamos pues que $v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ y observemos que como K_0 es compacto y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$ continua tenemos que existe un $x_0 \in K_0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0) \right| = \sup_{x \in K_0} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \right| = \rho(K_0)(v).$$

Ahora como $\rho(K_0) \in U[v, I]$ se tiene que $\rho(K_0)(v) \in I$ y existirá pues cierto $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0) \right| - \varepsilon, \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0) \right| + \varepsilon \right) = (\rho(K_0)(v) - \varepsilon, \rho(K_0)(v) + \varepsilon) \subset I. \tag{3.19}$$

Veamos ahora que la siguiente afirmación, junto a todo lo visto anteriormente, nos permite ya concluir la demostración.

Afirmación 1: Existen abiertos U, V en $[0,1]^\omega$ tales que $x_0 \in U$, $K_0 \subset V$ y además

$$\inf_{x\in U}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| > \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0)\right| - \varepsilon \tag{3.20}$$

y

$$\sup_{x\in V}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| < \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0)\right| + \varepsilon. \tag{3.21}$$

Por la afirmación anterior, definiendo

$$A = \{K \in \mathcal{K}\left([0,1]^\omega\right) : K \subset V \wedge K \cap U \neq \varnothing\}$$

se tiene que A es un entorno abierto de K_0 y si además vemos que $A \subset \rho^{-1}(U[v, I])$, obtenemos que efectivamente K_0 es un punto interior de $\rho^{-1}(U[v, I])$.
Basta ver entonces que $\rho(A) \subset U[v, I]$.
Sin más, si es $\mu \in \rho(A)$ entonces existe un $K \in A$ tal que $\mu = \rho(K)$ y tomando $y \in K \cap U$

$$\mu(v) = \rho(K)(v) = \sup_{x\in K}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| \underset{K\subset V}{\leq} \sup_{x\in V}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| \underset{(3.21)}{<} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0)\right| + \varepsilon,$$

$$\mu(v) = \sup_{x\in K}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| \geq \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(y)\right| \underset{y\in U}{\geq} \inf_{x\in U}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| \underset{(3.20)}{>} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0)\right| - \varepsilon.$$

Por (3.19) concluimos que $\mu(v) \in I$ y con ello $\mu \in U[v, I]$ tal como buscábamos demostrar.
Para finalizar la prueba resta únicamente ver la veracidad de la Afirmación 1.
<u>Demostración de la Afirmación 1:</u>
Definamos $f \in \mathcal{C}\left([0,1]^\omega\right)$ como

$$f = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k\right|.$$

Entonces, por ser f continua en $x_0 \in K_0$ existe un abierto U de $[0,1]^\omega$ tal que $x_0 \in U$ y

$$f(U) \subset \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por tanto, tenemos que para cada $x \in U$ se cumple que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon/2$ y así

$$\inf_{x\in U}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)\right| = \inf_{x\in U} f(x) \geq f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} > f(x_0) - \varepsilon = \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0)\right| - \varepsilon.$$

Por otra parte, definamos ahora

$$V = f^{-1}\left(\bigcup_{x\in K_0}\left(f(x) - \frac{\varepsilon}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$$

que será abierto en $[0,1]^\omega$ por la continuidad de f y cumple claramente que $K_0 \subset V$.

Entonces, si es $x \in V$ se tiene que

$$f(x) \in \left(f(z) - \frac{\varepsilon}{2}, f(z) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

para algún $z \in K_0$ y, por la definición de x_0,

$$f(x) < f(z) + \frac{\varepsilon}{2} \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con todo,

$$\sup_{x \in V} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x) \right| = \sup_{x \in V} f(x) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon = \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x_0) \right| + \varepsilon$$

y efectivamente U y V son los abiertos buscados. ■

3.3. Comparación entre las codificaciones

Dedicaremos esta última sección a demostrar que no hay una gran diferencia entre las clases de Borel obtenidas por la codificación mediante topologías admisibles y cualquiera de las codificaciones por pseudonormas.

Es decir, veremos que existen aplicaciones Σ^0_α-medibles entre los distintos espacios $SB(X)$, $SB_\infty(X)$ y $\mathcal{P}, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}$ con α relativamente pequeño y que preservan la codificación, con lo que gracias al Teorema 2.2.6 podemos garantizar que la diferencia entre clases es mínima.

El primer resultado en esta linea nos muestra que cualquier cualquier clase de complejidad obtenida en $\mathcal{P}$ será la misma para $SB(X)$.

Teorema 3.3.1. *Si X es un espacio de Banach separable universalmente isométrico y τ una topología admisible en X, entonces existe una aplicación continua*

$$\phi : (SB(X), \tau) \longrightarrow \mathcal{P}$$

tal que para cada $F \in SB(X)$ se cumple que $F \equiv X_{\phi(F)}$.

Demostración:

Por el Teorema 3.1.4 existe una familia $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funciones continuas de $SB(X)$ en X tal que dado $F \in SB(X)$ se cumple que

$$F = \overline{\{f_n(F) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Dado $F \in SB(X)$ definimos entonces $\phi(F) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in V$ es

$$\phi(F) \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \right) = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(F) \right\|.$$

Entonces, por la definición de ϕ es claro que $\phi(F) \in \mathcal{P}$ y para ver que $F \equiv X_{\phi(F)}$, en virtud del Teorema 1.2.5, basta ver que F es una compleción de $Y = c_{00}/N_{\phi(F)}$.

Es decir, basta encontrar una isometría lineal $j : Y \longrightarrow F$ tal que $j(Y)$ es denso en F.

Sin más, denotaremos por comodidad $\mu = \phi(F)$ y definimos

$$j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(F).$$

Observemos primero que j está bien definida pues si son

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i + N_\mu$$

entonces

$$0 = \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) e_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) f_i(F)\right\|,$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) f_i(F) = 0_X$$

y así

$$j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(F) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i(F) = j\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i + N_\mu\right).$$

Además, la imagen de j está contenida en F pues $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(F) \in F$ dado que F es un subespacio vectorial y cada $f_i(F) \in F$.

Por otro lado, es claro por la definición que j es lineal y aún más, una isometría pues

$$\left\|j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(F)\right\| = \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \tilde{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i + N_\mu\right).$$

Por último, observemos que como j es lineal

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_F\left(j(Y)\right) &= \mathrm{cl}_F\left(j\left(\mathrm{span}\{\overline{e_n} : n \in \mathbb{N}\}\right)\right) = \mathrm{cl}_F\left(\mathrm{span}\left\{j\left(\overline{e_n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = \\ &= \mathrm{cl}_F\left(\{f_n(F) : n \in \mathbb{N}\}\right) = \overline{\{f_n(F) : n \in \mathbb{N}\}} \cap F = F. \end{aligned}$$

Con todo j es la isometría lineal buscada y queda demostrado que $F \equiv X_{\phi(F)}$.

Resta pues ver que ϕ es continua.

Veamos para ello que dados $v \in V$ e I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ se tiene que $\phi^{-1}(U[v, I])$ es abierto en $SB(X)$.

Supongamos pues que $v = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ y definamos $f : SB(X) \longrightarrow X$ como $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ y, por comodidad, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = \|x\|$.

Entonces

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(U[v, I]) &= \{F \in SB(X) : \phi(F) \in U[v, I]\} = \{F \in SB(X) : \phi(F)(v) \in I\} = \\ &= \left\{F \in SB(X) : \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(F)\right\| \in I\right\} = \{F \in SB(X) : g(f(F)) \in I\} = \\ &= (g \circ f)^{-1}(I), \end{aligned}$$

y como $g \circ f$ es continua e I abierto en $\mathbb{R}$, concluimos que efectivamente $\phi^{-1}(U[v, I])$ es abierto en $SB(X)$ y finalizamos la demostración. ■

Observemos que si consideramos la restricción de la aplicación dada por el teorema anterior a $SB_\infty(X)$ tenemos entonces el resultado análogo para $SB_\infty(X)$ y $\mathcal{P}_\infty$.

Una cuestión que podía plantearse al introducir la codificación por pseudonormas es si trabajar con $\mathcal{B}$ tiene alguna ventaja sobre trabajar con $\mathcal{P}_\infty$.

Mostraremos a continuación que la diferencia entre trabajar con uno y otro es mínima, aunque en ocasiones es útil estudiar ciertos resultados sobre $\mathcal{B}$ por la propiedad de independencia lineal de los generadores que este espacio posee.

Proposición 3.3.2. *Existe una aplicación Σ_2^0-medible $\phi : \mathcal{P}_\infty \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que para cada $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ se cumple que $X_\mu \equiv X_{\phi(\mu)}$. Más aún, se puede tomar ϕ tal que*

$$\phi^{-1}(U[v, I] \cap \mathcal{B}) \in \Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)$$

para cada $v \in V$ y para cada intervalo abierto I de $\mathbb{R}$.

<u>Demostración:</u>

Definamos de forma recursiva para cada $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ las sucesiones[15]

$$\begin{aligned} n_1(\mu) &= \min\{n \in \mathbb{N} : \hat{\mu}(\overline{e_n}) \neq 0\}; \\ n_{k+1}(\mu) &= \min\{n \in \mathbb{N} : \overline{e_{n_1(\mu)}}, \cdots, \overline{e_{n_k(\mu)}}, \overline{e_n} \text{ son lin. indep. en } X_\mu\}. \end{aligned}$$

Con ello, dado $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ y $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i \in V$ definimos

$$\phi(\mu)\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_{n_i(\mu)}\right).$$

Entonces, es claro que $\phi(\mu)$ es una pseudonorma en V siendo además su extensión única a c_{00} dada por

$$\overline{\phi(\mu)}\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\right) = \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_{n_i(\mu)}\right).$$

Aún más, observemos que si es

$$\overline{\phi(\mu)}\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\right) = 0$$

entonces

$$\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_{n_i(\mu)}\right) = 0,$$

con lo que

$$\sum_{i=1}^\infty a_i e_{n_i(\mu)} \in N_\mu$$

y así

$$\sum_{i=1}^\infty a_i \overline{e_{n_i(\mu)}} = N_\mu.$$

[15] Observemos que el conjunto sobre el que se toma el mínimo para $n_{k+1}(\mu)$ nunca es vacío pues al ser $\mu \in \mathcal{P}_\infty$, el espacio c_{00}/N_μ tiene dimensión infinita y por tanto en $\{\overline{e_n}\}_{n=1}^\infty$ hay una cantidad infinita de vectores linealmente independientes.

Pero, como por definición $\{\overline{e_{n_1(\mu)}}, \cdots, \overline{e_{n_k(\mu)}}\}$ son linealmente independientes (siendo k el menor natural tal que $a_i = 0$ para cada $i > k$) tenemos que $a_i = 0$ para cada $i \geq 1$ y con ello, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = 0_{c_{00}}$.

Por tanto, $\overline{\phi(\mu)}$ es una norma y es pues $\phi(\mu) \in \mathcal{B}$.

Veamos ahora que además para cada $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ se cumple que $X_\mu \equiv X_{\phi(\mu)}$.

Como ya hemos hecho en otras demostraciones basta ver que la aplicación

$$j : \left(c_{00}, \overline{\phi(\mu)}\right) \longrightarrow X_\mu$$

dada por

$$j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{e_{n_i(\mu)}}$$

es una isometría lineal de modo que $j(c_{00})$ es denso en X_μ.

Es claro de la definición que j es lineal y además es isométrica pues

$$\hat{\mu}\left(j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right)\right) = \hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{e_{n_i(\mu)}}\right) = \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{n_i(\mu)}\right) = \overline{\phi(\mu)}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right).$$

Veamos ahora que $\{\overline{e_{n_i(\mu)}} : i \in \mathbb{N}\}$ es base de c_{00}/N_μ, para lo cual basta ver que es un conjunto generador pues por definición es linealmente independiente. Es decir, basta comprobar que cada $\overline{e_i}$ es combinación lineal de estos últimos.

Sin más, si es $i < n_1(\mu)$ entonces $\overline{e_i} = N_\mu$ y no hay nada que demostrar por lo que supongamos que $i > n_1(\mu)$.

En este caso, como $\{n_j(\mu)\}_{j=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, existe un $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_j(\mu) \leq i < n_{j+1}(\mu).$$

Por tanto, si $i = n_j(\mu)$ es claro y si es $n_j(\mu) < i < n_{j+1}(\mu)$ entonces tenemos que

$$\{\overline{e_{n_1(\mu)}}, \cdots, \overline{e_{n_j(\mu)}}, \overline{e_i}\}$$

no es linealmente independiente y como $\overline{e_{n_1(\mu)}}, \cdots, \overline{e_{n_j(\mu)}}$ si lo son, concluimos pues que $\overline{e_i}$ es combinación lineal de estos últimos tal como queríamos ver.

Con lo visto y teniendo en cuenta que j es lineal se tiene que

$$j(c_{00}) = j\left(\operatorname{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}\right) = \operatorname{span}\{j(e_i) : i \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}\{\overline{e_{n_i(\mu)}} : i \in \mathbb{N}\} = c_{00}/N_\mu,$$

y como c_{00}/N_μ es denso en X_μ concluimos esta parte de la prueba.

Demostraremos a continuación que dados naturales $N_1 < \cdots < N_k$, el conjunto

$$\mathcal{N}_{N_1,\cdots,N_k} = \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : n_1(\mu) = N_1, \cdots, n_k(\mu) = N_k\}$$

es un Δ_2^0 de $\mathcal{P}_\infty$.

Procederemos por inducción sobre k.

Así, si $k = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{N_1} &= \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : n_1(\mu) = N_1\} = \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \overline{e_1} = \cdots = \overline{e_{N_1-1}} = N_\mu\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^{N_1-1} \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \overline{e_i} \text{ es lin. dep. en } X_\mu\} = \\ &= \mathcal{P}_\infty \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1-1} \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \overline{e_i} \text{ es lin. indep. en } X_\mu\}\end{aligned}$$

Por tanto, como por el Corolario 3.2.7 el último conjunto es cerrado en $\mathcal{P}_\infty$, el Teorema 2.2.1 nos asegura que $\mathcal{N}_{N_1} \in \Pi_1^0(\mathcal{P}_\infty) \subset \Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)$.
Ahora, si suponemos el resultado cierto para k tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{N_1,\cdots,N_{k+1}} &= \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : n_i(\mu) = N_i, i = 1, \cdots, k+1\} = \\ &= \underbrace{\mathcal{N}_{N_1,\cdots,N_k}}_{\Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)\text{ (HI)}} \cap \underbrace{\bigcap_{i=N_k+1}^{N_{k+1}-1} \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \overline{e_{N_1}}, \cdots, \overline{e_{N_k}}, \overline{e_i} \text{ son lin. dep. en } X_\mu\}}_{\Pi_1^0(\mathcal{P}_\infty)\subset\Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)\text{ (Lema 3.2.7 y Teo. 2.2.1)}} \cap \\ &\cap \underbrace{\{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \overline{e_{N_1}}, \cdots, \overline{e_{N_k}}, \overline{e_{N_{k+1}}} \text{ son lin. indep. en } X_\mu\}}_{\Sigma_1^0(\mathcal{P}_\infty)\subset\Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)\text{ (Lema 3.2.7 y Teo. 2.2.1)}},\end{aligned}$$

y como por el Teorema 2.2.4 $\Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)$ es un álgebra, concluimos que $\mathcal{N}_{N_1,\cdots,N_{k+1}} \in \Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)$ como queríamos ver.
Ahora, dado $v = \sum_{i=1}^m a_i e_i \in V$ e I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ observemos que

$$\phi^{-1}(U[v, I] \cap \mathcal{B}) = \{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \phi(\mu) \in U[v, I]\} = \left\{\mu \in \mathcal{P}_\infty : \mu\left(\sum_{i=1}^m a_i e_{n_i(\mu)}\right) \in I\right\}.$$

Así, si denotamos por

$$N = \{(N_1, \cdots, N_m) \in \mathbb{N}^m : N_1 < \cdots < N_m\}$$

y para cada $x \in N$ es $x_i \in \mathbb{N}$ su coordenada i-ésima, entonces

$$\phi^{-1}(U[v, I] \cap \mathcal{B}) = \bigcup_{x\in N} \left(\mathcal{N}_x \cap \mathcal{P}_\infty \cap U\left[\sum_{i=1}^m a_i e_{x_i}, I\right]\right). \tag{3.22}$$

Por tanto, como

$$\mathcal{N}_x \in \Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty) \subset \Sigma_2^0(\mathcal{P}_\infty)$$

y

$$\mathcal{P}_\infty \cap U\left[\sum_{i=1}^m a_i e_{x_i}, I\right] \in \Sigma_1^0(\mathcal{P}_\infty) \subset \Sigma_2^0(\mathcal{P}_\infty),$$

concluimos que

$$\phi^{-1}(U[v, I] \cap \mathcal{B}) \in \Sigma_2^0(\mathcal{P}_\infty). \tag{3.23}$$

Por otra parte, si para cada $l \in \mathbb{N}$ denotamos

$$N_l = \{(N_1, \cdots, N_m) \in \mathbb{N}^m : N_1 < \cdots < N_m \leq l\},$$

entonces a partir de (3.22) podemos reescribir

$$\phi^{-1}(U[v,I]\cap\mathcal{B})=\bigcap_{l=1}^{\infty}\left[\left(\mathcal{P}_\infty\setminus\bigcup_{x\in N_l}\mathcal{N}_x\right)\cup\bigcup_{x\in N_l}\left(\mathcal{N}_x\cap\mathcal{P}_\infty\cap U\left[\sum_{i=1}^{m}a_ie_{x_i},I\right]\right)\right].$$

Como las uniones que aparecen en la expresión anterior son finitas tenemos que

$$\mathcal{P}_\infty\setminus\bigcup_{x\in N_l}\mathcal{N}_x\in\Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty)\subset\Pi_2^0(\mathcal{P}_\infty)$$

y

$$\bigcup_{x\in N_l}\left(\mathcal{N}_x\cap\mathcal{P}_\infty\cap U\left[\sum_{i=1}^{m}a_ie_{x_i},I\right]\right)\in\Pi_2^0(\mathcal{P}_\infty),$$

concluyendo pues que

$$\phi^{-1}(U[v,I]\cap\mathcal{B})\in\Pi_2^0(\mathcal{P}_\infty). \tag{3.24}$$

Por tanto, de (3.23) y (3.24) se tiene que

$$\phi^{-1}(U[v,I]\cap\mathcal{B})\in\Delta_2^0(\mathcal{P}_\infty) \tag{3.25}$$

tal como deseábamos ver.

Esto nos permite ya finalizar la demostración pues dado U abierto en $\mathcal{B}$ podemos expresarlo como

$$U=\mathcal{B}\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{k_n}U[v_{i,n},I_{i,n}]=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{k_n}(U[v_{i,n},I_{i,n}]\cap\mathcal{B})$$

para ciertos $v_{i,n}\in V$ e $I_{i,n}$ intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, con lo que

$$\phi^{-1}(U)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{i=1}^{k_n}\phi^{-1}\left(U[v_{i,n},I_{i,n}]\cap\mathcal{B}\right)$$

y por (3.25)

$$\phi^{-1}(U)\in\Sigma_2^0(\mathcal{P}_\infty),$$

concluyendo que efectivamente ϕ es Σ_2^0-medible. ■

El recíproco a esta última proposición puede establecerse considerando la composición de la aplicación continua $\varphi_\infty : SB_\infty(X)\longrightarrow\mathcal{P}_\infty$ garantizada por el Teorema 3.3.1 y la aplicación Σ_2^0-medible $\phi:\mathcal{B}\longrightarrow SB_\infty(X)$ dada por el Teorema 3.3.5 que veremos más adelante.

Efectivamente, $\varphi_\infty\circ\phi:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{P}_\infty$ cumplirá que dado $\mu\in\mathcal{B}$

$$X_\mu\equiv\phi(\mu)\equiv X_{(\varphi_\infty\circ\phi)(\mu)},$$

y será Σ_2^0-medible pues si es U abierto en $\mathcal{P}_\infty$ entonces $\varphi_\infty^{-1}(U)$ será abierto en $SB_\infty(X)$ y con ello

$$(\varphi_\infty\circ\phi)^{-1}(U)=\phi^{-1}\left(\varphi_\infty^{-1}(U)\right)\in\Sigma_2^0(\mathcal{B}).$$

Observación 3.3.1. Se puede ver que para cada $d \in \mathbb{N}$ existe también una aplicación Σ_2^0-medible $\phi : \mathcal{P}_d \longrightarrow \mathcal{B}_d$ tal que para cada $\mu \in \mathcal{P}_d$ se cumple que $X_\mu \equiv X_{\phi(\mu)}$.

La demostración sigue las lineas de la anterior definiendo para cada $\mu \in \mathcal{P}_d$ los naturales $n_1(\mu), \cdots, n_d(\mu)$ de igual modo y considerando ahora

$$\phi(\mu)\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{d} a_i e_{n_i(\mu)}\right).$$

Resta pues únicamente ver recíprocos para el Teorema 3.3.1 tanto al considerar $\mathcal{P}$ como $\mathcal{B}$ pues así, junto a los resultados anteriores, tendremos todas las relaciones entre las posibles codificaciones.

Al contrario que los teoremas previos las demostraciones son bastante más complejas, con lo que comenzaremos con un par de lemas que nos ayudarán a demostrar lo deseado.

Lema 3.3.3. *Si X es un espacio de Banach separable universalmente isométrico, τ una topología admisible en X, Y un espacio polaco y $f : Y \longrightarrow SB(X)$ una aplicación tal que existe un $n \in \mathbb{N}$ de modo que $f^{-1}(E^+_{SB}(U))$ pertenece a $\Delta^0_n(Y)$ para cada abierto U de X, entonces f es Σ^0_n-medible.*

Demostración:

Como τ es una topología admisible sabemos que existe una subbase de $SB(X)$ tal que todos sus elementos son uniones numerables de conjuntos de la forma $E^+_{SB}(U) \setminus E^+_{SB}(V)$ con U, V abiertos en X. Así, una base para la topología de $SB(X)$ vendrá formada por intersecciones finitas de uniones numerables de estos elementos. Como además dicha topología es polaca, sabemos que existe una base numerable y por el Teorema E.1 tenemos pues que de la base descrita anteriormente podemos extraer una base numerable.

En definitiva, tenemos que dado Λ abierto en $SB(X)$ podemos expresarlo como

$$\Lambda = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k_l} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[E^+_{SB}(U^{i,l}_m) \setminus E^+_{SB}(V^{i,l}_m)\right]$$

para $U^{i,l}_m, V^{i,l}_m$ ciertos abiertos de X y por tanto

$$f^{-1}(\Lambda) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{k_l} \bigcup_{m=1}^{\infty} \left[f^{-1}\left(E^+_{SB}(U^{i,l}_m)\right) \setminus f^{-1}\left(E^+_{SB}(V^{i,l}_m)\right)\right].$$

Como por hipótesis $f^{-1}\left(E^+_{SB}(U^{i,l}_m)\right), f^{-1}\left(E^+_{SB}(V^{i,l}_m)\right) \in \Delta^0_n(Y)$ tenemos que[16] la diferencia entre ambos también pertenece a $\Delta^0_n(Y)$.

Como $\Delta^0_n(Y) \subset \Sigma^0_n(Y)$ y por la Proposición 2.2.4 este último conjunto es cerrado para intersecciones finitas y uniones numerables, concluimos que $f^{-1}(\Lambda) \in \Sigma^0_n(Y)$ y efectivamente f es Σ^0_n-medible. ■

[16] Si $A, B \in \Delta^0_\alpha(Y)$ entonces $A \setminus B \in \Delta^0_\alpha(Y)$ pues

$$A \setminus B = A \cap (Y \setminus B)$$

y $A, Y \setminus B \in \Delta^0_\alpha(Y)$.

Lema 3.3.4. *Sea $n \in \mathbb{N}$, X un espacio de Banach separable universalmente isométrico y τ una topología admisible en X. Supongamos además que existen aplicaciones $\chi_k : \mathcal{B} \longrightarrow X$ Σ^0_n-medibles para cada $k \in \mathbb{N}$ y tales que*

$$X_\mu \equiv \overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}}$$

para cada $\mu \in \mathcal{B}$.
Entonces existe una aplicación Σ^0_{n+1}-medible $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow (SB_\infty(X), \tau)$ tal que para cada $\mu \in \mathcal{B}$ se cumple que $X_\mu \equiv \phi(\mu)$.

Demostración:
Sea $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow (SB_\infty(X), \tau)$ definida como

$$\phi(\mu) = \overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

Así, por hipótesis es claro que dado $\mu \in \mathcal{B}$ se tiene que

$$\phi(\mu) = \overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}} \equiv X_\mu.$$

Además, lo anterior muestra también que $\phi(\mu)$ tiene dimensión infinita y es por tanto un elemento de $SB_\infty(X)$, luego resta únicamente ver que es Σ^0_{n+1}-medible.
Basta probar que al considerar la aplicación ϕ con imagen en $SB(X)$ esta es Σ^0_{n+1}-medible, pues si esto es cierto entonces dado Λ abierto en $SB_\infty(X)$ tenemos que existe Λ' abierto en $SB(X)$ tal que $\Lambda = SB_\infty(X) \cap \Lambda'$ y así

$$\phi^{-1}(\Lambda) = \phi^{-1}(SB_\infty(X) \cap \Lambda') = \mathcal{B} \cap \phi^{-1}(\Lambda') = \phi^{-1}(\Lambda') \in \Sigma^0_{n+1}(\mathcal{B}).$$

Sea pues $U \subset X$ abierto y observemos que

$$\phi^{-1}(E^+_{SB}(U)) = \{\mu \in \mathcal{B} : \phi(\mu) \in E^+_{SB}(U)\} = \left\{\mu \in \mathcal{B} : \overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}} \cap U \neq \varnothing\right\}.$$

Entonces si $\mu \in \phi^{-1}(E^+_{SB}(U))$, por ser U abierto en X, será

$$\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\} \cap U \neq \varnothing,$$

y existen pues $m \in \mathbb{N}$ y ciertos $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_i(\mu) \in U.$$

Aún más, por ser U es abierto existe un $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset U$ y si definimos $C = \max\{\|\chi_i(\mu)\| : 1 \leq i \leq m\}$ y $\beta_i \in \mathbb{Q}$ tal que para cada $i = 1, \cdots, m$ es

$$|\alpha_i - \beta_i| < \frac{\varepsilon}{mC},$$

entonces considerando el punto

$$y' = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \chi_i(\mu)$$

se cumple que

$$\|y-y'\| = \left\|\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i-\beta_i)\chi_i(\mu)\right\| \leq \sum_{i=1}^{m}|\alpha_i-\beta_i|\,\|\chi_i(\mu)\| < C\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i-\beta_i| < \varepsilon$$

y así $y' \in B(y,\varepsilon) \subset U$.
Recíprocamente, es claro que dado $\mu \in \mathcal{B}$ si existe un $m \in \mathbb{N}$ y escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_i(\mu) \in U,$$

entonces

$$\overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}} \cap U \neq \varnothing$$

y $\mu \in \phi^{-1}(E^+_{SB}(U))$.
Por tanto, hemos visto que

$$\phi^{-1}(E^+_{SB}(U)) = \left\{\mu \in \mathcal{B} : \exists m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{Q} \text{ tales que } \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_i(\mu) \in U\right\} =$$
$$= \bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}^m}\left[\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_i\right)^{-1}(U)\right]. \tag{3.26}$$

Con todo, si vemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{Q}^m$ la función $f^m_\alpha : \mathcal{B} \longrightarrow X$ dada por

$$f^m_\alpha(\mu) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\chi_i(\mu)$$

es Σ^0_n-medible, de (3.26) tendremos que

$$\phi^{-1}(E^+_{SB}(U)) \in \Sigma^0_n(\mathcal{B}) \subset \Delta^0_{n+1}(\mathcal{B})$$

y por el Lema 3.3.3 concluiremos que efectivamente ϕ es Σ^0_{n+1}-medible.
Sin más, observemos que definiendo $f_m : \mathcal{B} \longrightarrow X^m$ tal que

$$f_m(\mu) = (\chi_1(\mu), \cdots, \chi_m(\mu))$$

se tiene que dado un abierto básico $U_1 \times \cdots \times U_m$, como cada χ_i es Σ^0_n-medible, será

$$f_m^{-1}(U_1 \times \cdots \times U_m) = \{\mu \in \mathcal{B} : f_m(\mu) \in U_1 \times \cdots \times U_m\} = \bigcap_{i=1}^{m}\chi_i^{-1}(U_i) \in \Sigma^0_n(\mathcal{B}).$$

Por tanto, como por el Teorema E.1 existe una base numerable del X^m formada por abiertos básicos, el Corolario 2.2.7 nos asegura que f_m es Σ^0_n-medible.
Como además, la aplicación $g^m_\alpha : X^m \longrightarrow X$ dada por

$$g^m_\alpha(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i x_i$$

es continua, finalmente tenemos que dado U abierto en X es

$$(f^m_\alpha)^{-1}(U) = (g^m_\alpha \circ f_m)^{-1}(U) = f_m^{-1}\left((g^m_\alpha)^{-1}(U)\right) \in \Sigma^0_n(\mathcal{B}).$$

Con todo, f^m_α es Σ^0_n-medible y podemos concluir la demostración. ■

Observación 3.3.2. Tal como ocurría con la Proposición 3.3.2, una demostración completamentemente análoga a la del lema anterior prueba el siguiente resultado.

Sean $d, n \in \mathbb{N}$, X un espacio de Banach separable universalmente isométrico y τ una topología admisible en X. Supongamos además que existen aplicaciones $\chi_k : \mathcal{B}_d \longrightarrow X$ Σ_n^0-medibles para cada $k \leq d$ y tales que

$$X_\mu \equiv \operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : 1 \leq k \leq d\}$$

para cada $\mu \in \mathcal{B}_d$.

Entonces existe una aplicación Σ_{n+1}^0-medible $\phi_d : \mathcal{B}_d \longrightarrow (SB(X), \tau)$ tal que para cada $\mu \in \mathcal{B}_d$ se cumple que $X_\mu \equiv \phi_d(\mu)$.

El prometido teorema sobre la relación entre $\mathcal{B}$ y $SB(X)$ será el siguiente.

Teorema 3.3.5. *Si X es un espacio de Banach separable universalmente isométrico y τ una topología admisible en X, entonces existe una aplicación Σ_2^0-medible*

$$\phi : \mathcal{B} \longrightarrow (SB_\infty(X), \tau)$$

tal que para cada $\mu \in \mathcal{B}$ se cumple que $X_\mu \equiv \phi(\mu)$.

El ingrediente principal en la demostración es la siguiente proposición, cuya demostración posponemos al final de la sección.

Proposición 3.3.6. *Para todo espacio de Banach separable universalmente isométrico X existen aplicaciones continuas $\chi_k : \mathcal{B} \longrightarrow X$ con $k \in \mathbb{N}$, tales que dados $\sum_{k=1}^\infty a_k e_k \in c_{00}$ y $\mu \in \mathcal{B}$ se cumple que*

$$\left\| \sum_{k=1}^\infty a_k \chi_k(\mu) \right\| = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^\infty a_k e_k \right).$$

Observación 3.3.3. A partir de la proposición anterior se puede obtener un resultado análogo para $\mathcal{B}_d$ con $d \in \mathbb{N}$.

Dado $\mu \in \mathcal{B}_d$ definamos para cada $\sum_{k=1}^\infty a_k e_k \in V$

$$\mu^*\left(\sum_{k=1}^\infty a_k e_k \right) = \mu\left(\sum_{k=1}^d a_k e_k \right) + \sum_{k=d+1}^\infty |a_k|.$$

Entonces μ^* es una pseudonorma en V pues si son $v = \sum_{k=1}^\infty a_k e_k$ y $w = \sum_{k=1}^\infty b_k e_k$ elementos de V y $\lambda \in \mathbb{Q}$ se cumplen

$$\begin{aligned}
\mu^*(\lambda v) &= \mu^*\left(\sum_{k=1}^\infty (\lambda a_k) e_k \right) = \mu\left(\sum_{k=1}^d (\lambda a_k) e_k \right) + \sum_{k=d+1}^\infty |\lambda a_k| = \\
&= |\lambda| \left[\mu\left(\sum_{k=1}^d a_k e_k \right) + \sum_{k=d+1}^\infty |a_k| \right] = |\lambda| \mu^*(v);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu^*(v+w) &= \mu^*\left(\sum_{k=1}^\infty (a_k + b_k) e_k \right) = \mu\left(\sum_{k=1}^d (a_k + b_k) e_k \right) + \sum_{k=d+1}^\infty |a_k + b_k| \leq \\
&\leq \left[\mu\left(\sum_{k=1}^d a_k e_k \right) + \sum_{k=d+1}^\infty |a_k| \right] + \left[\mu\left(\sum_{k=1}^d b_k e_k \right) + \sum_{k=d+1}^\infty |b_k| \right] = \mu^*(v) + \mu^*(w).
\end{aligned}$$

Además, si $\overline{\mu^*}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = 0$ entonces

$$\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right) + \sum_{k=d+1}^{\infty} |a_k| = 0$$

y dado que ambos sumandos son no negativos, se tiene que ambos deben ser nulos.
Del segundo obtenemos pues que $a_k = 0$ para cada $k \geq d+1$ y del primero, puesto que[17] $\mu \in \mathcal{B}_d$, se tiene también que $a_k = 0$ para cada $k \leq d$.
En definitiva obtenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k = 0_{c_{00}}$, probando que $\overline{\mu^*}$ es una norma en c_{00}.
Con todo, se tiene que $\mu^* \in \mathcal{B}$ y podemos definir $\chi_k^* : \mathcal{B}_d \longrightarrow X$ para $k \leq d$ como

$$\chi_k^*(\mu) = \chi_k(\mu^*), \ \forall \mu \in \mathcal{B}_d.$$

Así, en primer lugar es claro que para cualesquiera $\mu \in \mathcal{B}_d$ y $\sum_{k=1}^{d} a_k e_k \in c_{00}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{d} a_k \chi_k^*(\mu) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{d} a_k \chi_k(\mu^*) \right\| = \overline{\mu^*}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right) = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right).$$

Y por otra parte, si definimos $f : \mathcal{B}_d \longrightarrow \mathcal{B}$ dada por $f(\mu) = \mu^*$ se tiene que f es continua[18] y $\chi_k^* = \chi_k \circ f$, luego χ_k^* es continua por ser composición de aplicaciones continuas.

Suponiendo la veracidad de la Proposición 3.3.6 podemos ahora sí demostrar el Teorema 3.3.5 y un recíproco al Teorema 3.3.1 cerrando, tal como buscábamos, las relaciones entre las distintas codificaciones.

<u>Demostración del Teorema 3.3.5:</u>
Por la Proposición 3.3.6 sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $\chi_k : \mathcal{B} \longrightarrow X$ continuas y tales que dados $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in c_{00}$ y $\mu \in \mathcal{B}$ se cumple que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(\mu) \right\| = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right).$$

Así, fijado $\mu \in \mathcal{B}$ podemos definir

$$E_\mu = \overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}},$$

---

[17] Como $\mu \in \mathcal{B}_d$ tenemos que $\overline{e_1}, \cdots, \overline{e_d}$ es base de X_μ (siendo $X_\mu = c_{00}/N_\mu$ al ser de dimensión finita). Así, dado $x = \sum_{k=1}^{d} a_k e_k$ tenemos que $x \in N_\mu$ si, y solo si,

$$N_\mu = x + N_\mu = \sum_{k=1}^{d} a_k e_k + N_\mu = \sum_{k=1}^{d} a_k \overline{e_k}$$

pero como $\overline{e_1}, \cdots, \overline{e_d}$ son lin. indep., concluimos que $x \in N_\mu$ si, y solo si, $a_k = 0$ para $k \leq d$. Por tanto, $\bar{\mu}(x) = 0$ si, y solo si, $a_k = 0$ para cada $k \leq d$.

[18] Sean $v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in V$ e $I = (a, b)$ un intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y denotemos por $w = \sum_{k=1}^{d} a_k e_k$, $t = \sum_{k=d+1}^{\infty} |a_k|$ y $J = (a - t, b - t)$ entonces

$$f^{-1}(U[v, I] \cap B) = \{\mu \in \mathcal{B}_d : \mu^*(v) \in I\} = \{\mu \in \mathcal{B}_d : \mu(w) + t \in (a, b)\} = \{\mu \in \mathcal{B}_d : \mu(w) \in J\} = \\ = \mathcal{B}_d \cap U[w, J]$$

que es abierto en $\mathcal{B}_d$.

que por ser cerrado será un espacio de Banach con la norma de X, y $J : c_{00} \longrightarrow E_\mu$ dada por

$$J\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(\mu).$$

Entonces, es claro de la definición que J es lineal y además es una isometría por la propiedad que cumplen los χ_k.

Si vemos entonces que $J(c_{00})$ es denso en E_μ, por el Teorema 1.2.5 tendremos que

$$X_\mu \equiv \overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}}$$

y aplicando el Lema 3.3.4 se concluye la existencia de la aplicación ϕ buscada.

Sin más, observemos que por la linealidad de J

$$J(c_{00}) = J\left(\operatorname{span}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}\right) = \operatorname{span}\{J(e_k) : k \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\},$$

y con esto, claramente

$$\operatorname{cl}_{E_\mu}\left(J(c_{00})\right) = \operatorname{cl}_X\left(J(c_{00})\right) \cap E_\mu = \overline{\operatorname{span}\{\chi_k(\mu) : k \in \mathbb{N}\}} \cap E_\mu = E_\mu$$

lo que finaliza la demostración. ■

Observación 3.3.4. Siguiendo la demostración anterior empleando las Observaciones 3.3.3 y 3.3.2 en lugar de la Proposición 3.3.6 y el Lema 3.3.4 respectivamente, se prueba que el Teorema 3.3.5 también es cierto si sustituimos $\mathcal{B}$ por $\mathcal{B}_d$ y $SB_\infty(X)$ por $SB(X)$.

El único detalle a tener en cuenta en esta demostración sería observar que se debe definir ahora $J : c_{00}/N_\mu \longrightarrow E_\mu$ como

$$J\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k + N_\mu\right) = \sum_{k=1}^{d} a_k \chi_k(\mu),$$

y para probar lo deseado sobre la función observar que si es $\mu \in \mathcal{B}_d$ entonces

$$\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right)$$

pues

$$\begin{aligned}\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) &\geq \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right) - \bar{\mu}\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} (-a_k) e_k\right) \geq \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right) - \sum_{k=d+1}^{\infty} |a_k|\,\bar{\mu}(e_k) = \\ &= \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) &\leq \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right) + \bar{\mu}\left(\sum_{k=d+1}^{\infty} a_k e_k\right) \leq \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right) + \sum_{k=d+1}^{\infty} |a_k|\,\bar{\mu}(e_k) = \\ &= \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{d} a_k e_k\right).\end{aligned}$$

Teorema 3.3.7. *Si X es un espacio de Banach separable universalmente isométrico y τ una topología admisible en X, entonces existe una aplicación Σ_3^0-medible*

$$\phi : \mathcal{P} \longrightarrow (SB(X), \tau)$$

tal que para cada $\mu \in \mathcal{P}$ se cumple que $X_\mu \equiv \phi(\mu)$.

Demostración:

Observemos que para cada $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ por la Observación 3.3.4 y el Teorema 3.3.5 existen $\psi_d : \mathcal{B}_d \longrightarrow (SB(X), \tau)$ aplicaciones Σ_2^0-medibles (denotando $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{B}$) tales que $X_\mu \equiv \psi_d(\mu)$ para cada $\mu \in \mathcal{B}_d$.

También, por la Observación 3.3.1 y la Proposición 3.3.2 existen $\varphi_d : \mathcal{P}_d \longrightarrow \mathcal{B}_d$ aplicaciones Σ_2^0-medibles tales que $X_\mu \equiv X_{\varphi_d(\mu)}$ para cada $\mu \in \mathcal{P}_d$.

Definamos entonces $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow (SB(X), \tau)$ de forma que dado $\mu \in \mathcal{P}$ con $d = \dim(X_\mu)$ es

$$\phi(\mu) = (\psi_d \circ \varphi_d)(\mu).$$

Así, es claro que para cualquier $\mu \in \mathcal{P}$ con $d = \dim(X_\mu)$ será

$$X_\mu \equiv X_{\varphi_d(\mu)} \equiv \psi_d(\varphi_d(\mu)) = \phi(\mu),$$

y resta únicamente ver que ϕ es Σ_3^0-medible.

Sin más, dado U abierto en $SB(X)$ como ψ_d es Σ_2-medible tendremos que

$$\psi_d^{-1}(U) \in \Sigma_2^0(\mathcal{B}_d),$$

y como φ_d también es Σ_2-medible, por el Teorema 2.2.6 será

$$\varphi_d^{-1}\left(\psi_d^{-1}(U)\right) \in \Sigma_3^0(\mathcal{P}_d).$$

Aún más, como $\mathcal{P}_d$ es un subespacio polaco de $\mathcal{P}$ por el Teorema 2.2.5 concluimos que

$$\varphi_d^{-1}\left(\psi_d^{-1}(U)\right) \in \Sigma_3^0(\mathcal{P}).$$

Con todo, denotando $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(U) = \{\mu \in \mathcal{P} : \phi(\mu) \in U\} &= \bigcup_{d \in \overline{\mathbb{N}}} \{\mu \in \mathcal{P}_d : \phi(\mu) \in U\} = \\ = \bigcup_{d \in \overline{\mathbb{N}}} \{\mu \in \mathcal{P}_d : (\psi_d \circ \varphi_d)(\mu) \in U\} &= \bigcup_{d \in \overline{\mathbb{N}}} \varphi_d^{-1}\left(\psi_d^{-1}(U)\right), \end{aligned}$$

y por lo visto anteriormente

$$\phi^{-1}(U) \in \Sigma_3^0(\mathcal{P})$$

demostrando que efectivamente ϕ es Σ_3^0-medible. ■

Podemos resumir en la siguiente tabla las relaciones entre las distintas codificaciones, donde cada aplicación tiene dominio en la columna y rango en la fila.

	$\boldsymbol{SB(X)}$	$\boldsymbol{SB_\infty(X)}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	$\boldsymbol{\mathcal{P}_\infty}$	$\boldsymbol{\mathcal{B}}$
$\boldsymbol{SB(X)}$	-	$\iota\ (\Sigma_1^0)$	$\varrho\ (\Sigma_3^0)$	-	-
$\boldsymbol{SB_\infty(X)}$	-	-	-	$\phi\circ\psi\ (\Sigma_3^0)$	$\phi\ (\Sigma_2^0)$
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	$\varphi\ (\Sigma_1^0)$	-	-	$\iota\ (\Sigma_1^0)$	$\iota\ (\Sigma_1^0)$
$\boldsymbol{\mathcal{P}_\infty}$	-	$\varphi_\infty\ (\Sigma_1^0)$	-	-	$\varphi_\infty\circ\phi\ (\Sigma_2^0)$
$\boldsymbol{\mathcal{B}}$	-	$\psi\circ\varphi_\infty\ (\Sigma_2^0)$	-	$\psi\ (\Sigma_2^0)$	-

Siendo ι la inclusión correspondiente en cada caso (que claramente es continua) y

- $\varphi : SB(X) \longrightarrow \mathcal{P}$ la aplicación continua dada por el Teorema 3.3.1.
- $\varphi_\infty : SB_\infty(X) \longrightarrow \mathcal{P}_\infty$ la restricción de φ a $SB_\infty(X)$.
- $\psi : \mathcal{P}_\infty \longrightarrow \mathcal{B}$ la aplicación Σ_2^0-medible dada por la Proposición 3.3.2.
- $\phi : \mathcal{B} \longrightarrow SB_\infty(X)$ la aplicación Σ_2^0-medible dada por el Teorema 3.3.5.
- $\varrho : \mathcal{P} \longrightarrow SB(X)$ la aplicación Σ_3^0-medible dada por 3.3.7.

Dedicaremos el resto de la sección a demostrar una serie de equivalencias y un lema que nos permitan concluir con la demostración de la Proposición 3.3.6 dando validez al resto de demostraciones que dependían de ella.

Proposición 3.3.8. *Dado $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$ son equivalentes:*

(i) *Existe un espacio de Banach separable U y aplicaciones continuas $\chi_k : \mathcal{A} \longrightarrow U$ con $k \in \mathbb{N}$ tales que*
$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(\mu) \right\| = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right)$$
para cada $\mu \in \mathcal{A}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in c_{00}$.

(ii) *Existen aplicaciones continuas $\alpha_k : \mathcal{A}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ con $k \in \mathbb{N}$ tales que*
$$\alpha_k(\mu,\mu) = 0,\ \forall \mu \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N}$$
y que además satisfacen la siguiente propiedad.

Si $\nu \in \mathcal{A}$ y $z^* \in c_{00}^{\#}$ cumplen que
$$|z^*(x)| \le \bar{\nu}(x),\ \forall x \in c_{00},$$
entonces existe una aplicación $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ tal que $\Gamma(\nu) = z^*$,
$$|\Gamma(\mu)(x)| \le \bar{\mu}(x),\ \forall x \in c_{00}, \mu \in \mathcal{A},$$
y
$$|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| \le \alpha_k(\mu,\lambda),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mu,\lambda \in \mathcal{A}.$$

Además, si $\mathcal{A}$ está formado únicamente por pseudonormas μ cumpliendo que $\mu(e_k) \leq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, las condiciones anteriores también son equivalentes a la siguiente:

(ii*) *Para cada $\eta \in [0,1)$ existen aplicaciones continuas $\beta_k : \mathcal{A}^2 \longrightarrow [0,+\infty)$ con $k \in \mathbb{N}$ tales que*
$$\beta_k(\mu,\mu) = 0,\ \forall \mu \in \mathcal{A},\ k \in \mathbb{N}$$
y que además satisfacen la siguiente propiedad.
Si $\nu \in \mathcal{A}$ y $z^* \in c_{00}^{\#}$ cumplen que
$$|z^*(x)| \leq \bar{\nu}(x),\ \forall x \in c_{00},$$
entonces existe una aplicación $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ tal que $\Gamma(\nu) = \eta z^*$,
$$|\Gamma(\mu)(x)| \leq \bar{\mu}(x),\ \forall x \in c_{00}, \mu \in \mathcal{A},$$
y
$$|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| \leq \beta_k(\mu,\lambda),\ \forall k \in \mathbb{N},\ \mu,\lambda \in \mathcal{A}.$$

Demostración:
(i) ⇒ (ii)
Definamos para cada $k \in \mathbb{N}$ las aplicaciones $\alpha_k : \mathcal{A}^2 \longrightarrow [0,+\infty)$ como
$$\alpha_k(\nu,\mu) = \|\chi_k(\nu) - \chi_k(\mu)\|$$
para cada $\nu, \mu \in \mathcal{A}$.
Entonces, es claro que cada α_k es continua, pues es composición de funciones continuas, y obviamente cumplen que
$$\alpha(\mu,\mu) = \|\chi_k(\mu) - \chi_k(\mu)\| = 0,$$
con lo que únicamente falta por ver que satisfacen la última condición de (ii).
Dado $\mu \in \mathcal{A}$ denotaremos por $I_\mu : (c_{00}, \bar{\mu}) \longrightarrow U$ la aplicación lineal dada por
$$I_\mu(e_k) = \chi_k(\mu).$$
Por (i) se tiene entonces que I_μ es una isometría pues dado $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in c_{00}$ se tiene que
$$\left\| I_\mu \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(\mu) \right\| = \bar{\mu} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right).$$
Sean pues $\nu \in \mathcal{A}$ y $z^* \in c_{00}^{\#}$ tales que $|z^*(x)| \leq \bar{\nu}(x)$ para cada $x \in c_{00}$.
Observemos en primer lugar que dados $x, y \in c_{00}$ tales que $I_\nu(x) = I_\nu(y)$ se cumple que
$$|z^*(x) - z^*(y)| = |z^*(x-y)| \leq \bar{\nu}(x-y) = \|I_\nu(x-y)\| = \|I_\nu(x) - I_\nu(y)\| = 0,$$
con lo que $z^*(x) = z^*(y)$ y podemos por tanto definir $u^* : I_\nu(c_{00}) \longrightarrow \mathbb{R}$ como
$$u^*(I_\nu(x)) = z^*(x).$$

Por la linealidad de I_ν y z^* es claro que u^* es lineal y además cumple que

$$|u^*(I_\nu(x))| = |z^*(x)| \leq \bar{\nu}(x) = \|I_\nu(x)\|.$$

Es decir, $u^* : I_\nu(c_{00}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal sobre un subespacio vectorial de U y dominado por una norma, con lo que por el teorema de Hanh-Banach existe $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que

$$u(I_\nu(x)) = u^*(I_\nu(x)),\ \forall x \in c_{00}$$

y

$$|u(t)| \leq \|t\|,\ \forall t \in U.$$

Definamos con todo $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ tal que dado $\mu \in \mathcal{A}$ sea

$$\Gamma(\mu)(x) = u(I_\mu(x)),\ \forall x \in c_{00}.$$

Resta únicamente ver que Γ cumple lo deseado:

- Γ está bien definida, es decir, para cada $\mu \in \mathcal{A}$ se tiene que $\Gamma(\mu)$ es lineal ya que dados $x, y \in c_{00}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ son

$$\begin{aligned}\Gamma(\mu)(\lambda x) &= u(I_\mu(\lambda x)) = u(\lambda I_\mu(x)) = \lambda u(I_\mu(x)) = \lambda\Gamma(\mu)(x);\\ \Gamma(\mu)(x+y) &= u(I_\mu(x+y)) = u(I_\mu(x) + I_\mu(y)) = u(I_\mu(x)) + u(I_\mu(y)) =\\ &= \Gamma(\mu)(x) + \Gamma(\mu)(y).\end{aligned}$$

- $\Gamma(\nu) = z^*$ pues dado $x \in c_{00}$ se tiene que

$$\Gamma(\nu)(x) = u(I_\nu(x)) = u^*(I_\nu(x)) = z^*(x).$$

- Dados $\mu \in \mathcal{A}$ y $x \in c_{00}$ se cumple que

$$|\Gamma(\mu)(x)| = |u(I_\mu(x))| \leq \|I_\mu(x)\| = \bar{\mu}(x).$$

- Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\begin{aligned}|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| &= |u(I_\mu(e_k)) - u(I_\lambda(e_k))| = |u(\chi_k(\mu)) - u(\chi_k(\lambda))| =\\ &= |u(\chi_k(\mu) - \chi_k(\lambda))| \leq \|\chi_k(\mu) - \chi_k(\lambda)\| = \alpha_k(\mu, \lambda).\end{aligned}$$

(ii) ⇒ (i)

Sea $\alpha_k : \mathcal{A}^2 \longrightarrow [0, +\infty)$ la familia de funciones continuas dada por (ii) y definamos para

$$c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N}) = \left\{x \in \mathbb{R}^{\mathcal{A}\times\mathbb{N}} : x(\mu, k) = 0 \text{ salvo en una cantidad finita de } (\mu, k) \in \mathcal{A} \times \mathbb{N}\right\}$$

el subconjunto

$$\Omega = \operatorname{conv}\left(\bigcup_{\mu\in\mathcal{A}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{\mu,k} \in c_{00}(\mathcal{A}\times\mathbb{N}) : \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) \leq 1\right\} \cup \bigcup_{(\mu,\lambda,k)\in\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathbb{N}}\left\{c(e_{\mu,k} - e_{\lambda,k}) : |c|\, \alpha_k(\mu,\lambda) \leq 1\right\}\right).$$

Denotaremos por Λ el conjunto sobre el que se toma la envoltura convexa, es decir,

$$\Omega = \mathrm{conv}(\Lambda).$$

Afirmación 1: El conjunto Ω contiene al origen, es convexo, absorbente y simétrico.[19]

<u>Demostración de la Afirmación 1:</u>

Es claro que por definición Ω es convexo y además contiene el origen pues dado $\mu \in \mathcal{A}$ y $a > 0$ se tiene que

$$|a|\,\alpha_1(\mu,\mu) = 0 \leq 1$$

y así

$$0_{c_{00}(\mathcal{A}\times\mathbb{N})} = a(e_{\mu,1} - e_{\mu,1}) \in \Big\{c(e_{\mu,1} - e_{\mu,1}) : |c|\,\alpha_1(\mu,\mu) \leq 1\Big\} \subset \Omega.$$

Observemos ahora que dado $x \in \Omega$ existen $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_n \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ y $x_1, \cdots, x_n \in \Lambda$ de modo que

$$x = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i.$$

Por tanto, para ver que $-x \in \Omega$ basta ver que $-x_i \in \Lambda$ para cada $i = 1, \cdots, n$.

Así, en primer lugar si es

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{\mu,k}$$

para algún $\mu \in \mathcal{A}$ de modo que $\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) \leq 1$, entonces

$$-x_i = \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)e_{\mu,k}$$

y como

$$\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)e_k\right) = \bar{\mu}\left(-\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) \leq 1,$$

se concluye que efectivamente $-x_i \in \Lambda$.

Por otra parte, si

$$x_i = c(e_{\mu,k} - e_{\lambda,k})$$

para ciertos $k \in \mathbb{N}$ y $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ de modo que $|c|\,\alpha_k(\mu,\lambda) \leq 1$, entonces como

$$-x_i = (-c)(e_{\mu,k} - e_{\lambda,k})$$

y

$$|-c|\,\alpha_k(\mu,\lambda) = |c|\,\alpha_k(\mu,\lambda) \leq 1,$$

nuevamente obtenemos que $-x_i \in \Lambda$ y con ello, que Ω es simétrico.

---

19 *Si X es un espacio vectorial y $A \subset X$, se dice que:*

(i) *A es equilibrado si $\alpha A \subset A$ para cada $|\alpha| \leq 1$.*

(ii) *A es absorbente si para cada $x \in X$ existe un $\delta_x > 0$ tal que $\delta x \in A$ para todo $\delta \in [-\delta_x, \delta_x] \setminus \{0\}$.*

(iii) *A es simétrico si $A = -A$, es decir, si $x \in A$ si, y solo si $-x \in A$.*

(iv) *A es absolutamente convexo si A es convexo y equilibrado.*

A partir de las definiciones anteriores es sencillo ver que si A contiene al origen, es convexo y simétrico, entonces es absolutamente convexo.

Para ver que es absorbente observemos que dado $x \in c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N})$ existen ciertos $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{N}$ y $\mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathcal{A}$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_{\mu_i, k_i}.$$

Así, si tomamos

$$t > \max\left\{\max_{1 \le i \le n} \overline{\mu_i}(a_i e_{k_i}), 0\right\}$$

se tiene que para cada $i = 1, \cdots, n$

$$\overline{\mu_i}\left(\frac{a_i}{t} e_{k_i}\right) = \frac{1}{t}\overline{\mu_i}(a_i e_{k_i}) < 1,$$

con lo que $\frac{a_i}{t} e_{\mu_i, k_i} \in \Lambda$ y por ser Ω convexo

$$\frac{1}{nt} x = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{a_i}{t} e_{\mu_i, k_i}\right) \in \Omega.$$

Tomando pues $\delta_x = 1/nt$ se tiene que si es $\delta \in [0, 1/nt]$ entonces $0 \le \delta nt \le 1$ y como Ω contiene el origen y es convexo

$$\delta x = \delta nt \left(\frac{1}{nt} x\right) = \delta nt \left(\frac{1}{nt} x\right) + (1 - \delta nt) 0_{c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N})} \in \Omega.$$

Si fuera $\delta \in [-1/nt, 0]$ entonces por ser Ω simétrico y $-\delta x \in \Omega$, tenemos que $\delta x \in \Omega$ y con todo que Ω es absorbente. ■

Definiendo ahora el funcional de Minkowski asociado a Ω, $\rho : c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\rho(x) = \inf\{t > 0 : x \in t\Omega\},$$

se tiene por [11, Prop. 3.5.9] que es una pseudonorma.

Por el Teorema 1.2.3 tenemos entonces que el cociente $(X/N, \tilde{\rho})$ con $X = c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N})$ y

$$N = \{x \in c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N}) : \rho(x) = 0\}$$

es un espacio normado cuya compleción denotaremos por $(U, \hat{\rho})$.

Definamos pues $\chi_k : \mathcal{A} \longrightarrow U$ como

$$\chi_k(\mu) = \overline{e_{\mu,k}},$$

siendo como hemos estado utilizando de forma habitual $\overline{e_{\mu,k}} = e_{\mu,k} + N$.

Afirmación 2: Las aplicaciones $\chi_k : \mathcal{A} \longrightarrow U$ son continuas para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración de la Afirmación 2:

Puesto que $\mathcal{A}$ es metrizable, basta ver que son secuencialmente continuas.

Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo y consideremos $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{A}$ convergente a cierto $\mu \in \mathcal{A}$.

Como $c(e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k}) \in \Omega$ si $|c|\, \alpha_k(\mu_n, \mu) \le 1$ tenemos que si $\alpha_k(\mu_n, \mu) \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{\alpha_k(\mu_n, \mu)}(e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k}) \in \Omega$$

y así

$$\rho(e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k}) = \inf\{t > 0 : e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k} \in t\Omega\} \leq \alpha_k(\mu_n, \mu).$$

Si fuera $\alpha_k(\mu_n, \mu) = 0$ entonces $c(e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k}) \in \Omega$ para cada $c \in \mathbb{R}$ por lo que

$$e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k} \in t\Omega, \ \ \forall t \neq 0,$$

y con ello

$$\rho(e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k}) = 0 = \alpha_k(\mu_n, \mu).$$

En cualquier caso, tenemos que

$$0 \leq \hat{\rho}\left(\chi_k(\mu_n) - \chi_k(\mu)\right) = \hat{\rho}((e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k}) + N) = \rho(e_{\mu_n,k} - e_{\mu,k}) \leq \alpha_k(\mu_n, \mu).$$

Como por la continuidad de α_k se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_k(\mu_n, \mu) = \alpha_k(\mu, \mu) = 0,$$

concluimos que

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\rho}(\chi_k(\mu_n) - \chi_k(\mu)) = 0$$

y en definitiva que

$$\lim_{n\to\infty} \chi_k(\mu_n) = \chi_k(\mu)$$

tal como queríamos ver. ■

Afirmación 3: El espacio $(U, \hat{\rho})$ es separable.

Demostración de la Afirmación 3:

Como $\mathcal{P}$ es separable y metrizable, por el Teorema 1.1.11 tenemos que $\mathcal{A}$ con la topología inducida también lo es, con lo que por la continuidad de los χ_k se tiene que $\chi_k(\mathcal{A}) \subset U$ es separable para cada $k \geq 1$.

Definamos pues

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} \chi_k(\mathcal{A}) = \{\overline{e_{\mu,k}} : \mu \in \mathcal{A}, k \in \mathbb{N}\}$$

que será separable[20] como subespacio de U y observemos que por el Lema B.7 el subespacio $\operatorname{span}(S)$ es también separable.

Como además este último es denso en U pues

$$\operatorname{cl}\left(\operatorname{span}(S)\right) = \operatorname{cl}\left(c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N})/N\right) = U$$

siendo la última igualdad consecuencia de que U sea una compleción de $c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N})/N$, concluimos por la Proposición 1.1.10 que efectivamente U es separable. ■

[20] Basta observar que si $D_k \subset \chi_k(\mathcal{A})$ son numerables y densos, entonces $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \subset S$ es numerable y

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} \chi_k(\mathcal{A}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{cl}_{\chi_k(\mathcal{A})}(D_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\chi_k(\mathcal{A}) \cap \operatorname{cl}_U(D_k)\right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(S \cap \operatorname{cl}_U(D_k)\right) =$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \operatorname{cl}_S(D_k) \subset \operatorname{cl}_S\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k\right).$$

Para finalizar esta parte de la demostración resta ver que fijados $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in c_{00}$ y $\nu \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\hat{\rho}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(\nu)\right) = \bar{\nu}(x).$$

Es decir, que

$$\bar{\nu}(x) = \hat{\rho}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(\nu)\right) = \hat{\rho}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{e_{\nu,k}}\right) = \rho\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{\nu,k}\right) = \rho(\tilde{x})$$

habiendo representado por $\tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{\nu,k}$.

Observemos en primer lugar que dado $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\bar{\nu}\left(\frac{1}{\bar{\nu}(x)+\varepsilon} x\right) \leq 1$$

con lo que

$$\frac{1}{\bar{\nu}(x)+\varepsilon}\tilde{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\bar{\nu}(x)+\varepsilon} e_{\nu,k} \in \Omega.$$

Por tanto,

$$\rho\left(\frac{1}{\bar{\nu}(x)+\varepsilon}\tilde{x}\right) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{\bar{\nu}(x)+\varepsilon}\tilde{x} \in t\Omega\right\} \leq 1$$

y al ser una pseudonorma obtenemos que $\rho(\tilde{x}) \leq \bar{\nu}(x) + \varepsilon$.

Por la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$ concluimos entonces que $\rho(\tilde{x}) \leq \bar{\nu}(x)$ y resta únicamente ver que $\bar{\nu}(x) \leq \rho(\tilde{x})$.

Como $\bar{\nu}$ una pseudonorma en c_{00}, por el Corolario 1.2.7 existe $z^* \in c_{00}^{\#}$ tal que $z^*(x) = \bar{\nu}(x)$ y $|z^*(y)| \leq \bar{\nu}(y)$ para cada $y \in c_{00}$.

Sea pues $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ la aplicación dada por (ii) para z^* y ν, y definamos $u^* \in c_{00}(\mathcal{A}\times\mathbb{N})^{\#}$ como

$$u^*(e_{\mu,k}) = \Gamma(\mu)(e_k), \;\; \forall \mu \in \mathcal{A}, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} u^*(\tilde{x}) = u^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_{\nu,k}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k u^*\left(e_{\nu,k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Gamma(\nu)(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^*(e_k) = \\ &= z^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = z^*(x) = \bar{\nu}(x), \end{aligned}$$

y si vemos que

$$|u^*(y)| \leq \rho(y), \;\; \forall y \in c_{00}(\mathcal{A}\times\mathbb{N}) \tag{3.27}$$

concluimos en particular que

$$\bar{\nu}(x) = |\bar{\nu}(x)| = |u^*(\tilde{x})| \leq \rho(\tilde{x})$$

finalizando pues la prueba de esta implicación.

Afirmación 4: Si para cualesquiera $\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k \in c_{00}$ y $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ se cumplen

$$\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\right) \leq 1 \Rightarrow \left|u^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_{\mu,k}\right)\right| \leq 1 \tag{3.28}$$

y

$$|c|\,\alpha_k(\mu,\lambda) \leq 1 \Rightarrow |u^*\left(c(e_{\mu,k} - e_{\lambda,k})\right)| \leq 1 \tag{3.29}$$

entonces (3.27) es cierto.

Por la afirmación anterior basta demostrar la veracidad de (3.28) y (3.29), pero esto es directo ya que si $\bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\right) \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned}\left|u^*\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_{\mu,k}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k u^*(e_{\mu,k})\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} b_k \Gamma(\mu)(e_k)\right| = \left|\Gamma(\mu)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\right)\right| \leq \\ \underset{\text{(ii)}}{\leq} \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\right) \leq 1,\end{aligned}$$

y si es $|c|\,\alpha_k(\mu,\lambda) \leq 1$ entonces

$$|u^*\left(c(e_{\mu,k} - e_{\lambda,k})\right)| = |c|\,|u^*\left(e_{\mu,k} - e_{\lambda,k}\right)| = |c|\,|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| \underset{\text{(ii)}}{\leq} |c|\,\alpha_k(\mu,\lambda) \leq 1.$$

Con todo, la implicación queda demostrada sin más que probar la Afirmación 4.

<u>Demostración de la Afirmación 4:</u>

Observemos que dado $y \in c_{00}(\mathcal{A} \times \mathbb{N})$ se tiene que

$$\begin{aligned}|u^*(y)| \leq \rho(y) \Leftrightarrow |u^*(y)| \leq t, \;\; \forall t > 0 \text{ tal que } y \in t\Omega \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left|u^*\left(\frac{1}{t}y\right)\right| \leq 1, \;\; \forall t > 0 \text{ tal que } y \in t\Omega,\end{aligned}$$

con lo que (3.27) es equivalente a

$$|u^*(y)| \leq 1, \; \forall y \in \Omega. \tag{3.30}$$

Ahora, dado $y \in \Omega$ este será de la forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$$

para ciertos $y_1, \cdots, y_n \in \Lambda$ y $\beta_1, \cdots, \beta_n \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$.

Como cada y_i es de la forma dada para (3.28) o (3.29), tenemos que

$$|u^*(y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i u^*(y_i)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i\,|u^*(y_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1$$

lo que prueba (3.30) y con ello (3.27). ■

(ii) ⇒ (ii⋆)

Dado $\eta \in [0,1)$ tomar $\beta_k = \alpha_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y dados $\nu \in \mathcal{A}$ y $z^* \in c_{00}^{\#}$ tales que

$$|z^*(x)| \leq \bar{\nu}(x),\ \forall x \in c_{00},$$

definir $\tilde{\Gamma} : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ como $\tilde{\Gamma}(\mu) = \eta\Gamma(\mu)$ siendo $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ la aplicación dada por (ii) para ν y z^*.

Efectivamente, $\tilde{\Gamma}(\nu) = \eta\Gamma(\nu) = \eta z^*$ y dados $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$, $x \in c_{00}$ y $k \in \mathbb{N}$ se cumplen

$$\left|\tilde{\Gamma}(\mu)(x)\right| = |(\eta\Gamma(\mu))\,(x)| = \eta\,|\Gamma(\mu)(x)| \leq \eta\bar{\mu}(x) \leq \bar{\mu}(x)$$

y

$$\left|\tilde{\Gamma}(\mu)(e_k) - \tilde{\Gamma}(\lambda)(e_k)\right| = \eta\,|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| \leq \eta\alpha_k(\mu,\lambda) \leq \alpha_k(\mu,\lambda) = \beta_k(\mu,\lambda).$$

(ii⋆) ⇒ (ii)

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $\beta_k^n : \mathcal{A}^2 \longrightarrow [0,+\infty)$ con $k \geq 1$ las aplicaciones dadas por (ii⋆) al considerar $\eta = 1 - 1/2^n$.

Ahora, para $n \in \mathbb{N}$ fijo y $k \geq 1$ consideremos $\tilde{\beta_k^n}$ la pseudométrica dada por el Lema F.1. Más aún, si es ρ una métrica compatible en $\mathcal{P}$ definamos $\zeta_k^n = \tilde{\beta_k^n} + \rho|_{\mathcal{A}^2}$.

Es directo comprobar entonces que cada ζ_k^n es una métrica en $\mathcal{A}$ y veamos que además estas aplicaciones cumplen todas las condiciones de (ii⋆).

Efectivamente, fijada ζ_k^n tenemos que es continua al ser suma de aplicaciones continuas y es claro que

$$\zeta_k^n(\mu,\mu) = 0, \forall \mu \in \mathcal{A}$$

por ser una métrica.

Aun más, dados $\nu \in \mathcal{A}$ y $z^* \in c_{00}^{\#}$ tales que $|z^*| \leq \bar{\nu}$, tomemos $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ la aplicación dada por (ii⋆) para β_k^n y veamos que también satisface las condiciones necesarias para ζ_k^n.

Las condiciones que no involucran a β_k^n son claras y como para cada $k \geq 1$

$$(\mu,\lambda) \to |\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)|$$

es una pseudométrica en $\mathcal{A}$ menor que β_k^n, por el Lema F.1 se cumple que

$$|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| \leq \tilde{\beta_k^n}(\mu,\lambda) \leq \tilde{\beta_k^n}(\mu,\lambda) + \rho(\mu,\lambda) = \zeta_k^n(\mu,\lambda),\ \forall \mu,\lambda \in \mathcal{A}.$$

Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada una de las aplicaciones β_k^n es una métrica continua sobre $\mathcal{A}$.

Definamos ahora para cada $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ la aplicación

$$\alpha(\mu,\lambda) = \max_{n,k\in\mathbb{N}} \min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\}. \tag{3.31}$$

Por el Lema F.2 tenemos que $\alpha(\mu,\lambda)$ es finita para cada $\mu,\lambda \in \mathcal{A}$ y que además es una métrica continua.

El resto de la prueba consistirá pues en demostrar la existencia de una sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números reales no negativos tales que definiendo $\alpha_k = c_k\alpha$ se cumpla (ii).

Por ser α una métrica continua es claro que para cualquier sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ se cumple que las aplicaciones α_k son continuas y tales que $\alpha_k(\mu,\mu)=0$ para cualquier $\mu \in \mathcal{A}$, con lo que basta encontrar una sucesión que además garantice la existencia de las aplicaciones Γ descritas en el enunciado de la proposición.

Sea pues $\nu \in \mathcal{A}$ y $z^* \in c_{00}^{\#}$ satisfaciendo que $|z^*| \leq \bar{\nu}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que existe una aplicación $\Gamma^n : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ tal que dados $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$, $x \in c_{00}$ y $k \in \mathbb{N}$ cumplen

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^n(\nu) &= (1-2^{-n})z^* \\ |\Gamma^n(\mu)(x)| &\leq \bar{\mu}(x) \\ |\Gamma^n(\mu)(e_k) - \Gamma^n(\lambda)(e_k)| &\leq \beta_k^n(\mu,\lambda) \end{aligned}\right\}$$

Denotemos ahora $\gamma_k^n(\mu) = \Gamma^n(\mu)(e_k)$ y observemos que para todo $\mu \in \mathcal{A}$ será

$$|\gamma_k^n(\mu)| = |\Gamma^n(\mu)(e_k)| \leq \bar{\mu}(e_k) \leq 1. \tag{3.32}$$

Con todo, tenemos los ingredientes necesarios para definir un candidato a la aplicación Γ buscada que nos permitirá hallar una sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ válida.

Por razones prácticas comencemos definiendo para cada $\mu \in \mathcal{A}$

$$\gamma_k^n(\mu) = 0, \ \ \forall n \leq 0.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{Z}$ definamos la función tienda para el intervalo $[2^{-n-3}, 2^{-n-1}]$, es decir,

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \notin [2^{-n-3}, 2^{-n-1}] \\ 2^{n+3}t - 1 & \text{si} \quad t \in [2^{-n-3}, 2^{-n-2}] \\ -2^{n+2}t + 2 & \text{si} \quad t \in [2^{-n-2}, 2^{-n-1}] \end{cases}$$

Observemos entonces que para cada $t \in (0, +\infty)$ se cumple que[21]

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(t) = 1$$

pues:

- Si $t = 2^{-m-2}$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ entonces $f_m(t) = 1$ y $f_n(t) = 0$ para cada $n \neq m$.
- Si $t \neq 2^{-m-2}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$ entonces existe un único $m \in \mathbb{Z}$ tal que

  $$t \in (2^{-m-2}, 2^{-m-1}).$$

  Por tanto, tenemos que si $n \neq m$ o $n \neq m-1$ entonces $t \notin [2^{-n-3}, 2^{-n-1}]$ y será $f_n(t) = 0$, si $n = m$ entonces es $f_m(t) = -2^{m+2}t + 2$ y si $n = m-1$ será $f_{m-1}(t) = 2^{(m-1)+3}t - 1 = 2^{m+2}t - 1$.

[21] Como veremos, para cada $t \in (0, +\infty)$ únicamente un número finito de las funciones $f_n(t)$ toma valores no nulos. Por tanto, podemos considerar la serie infinita sin entrar a discutir ninguna cuestión sobre el tipo de convergencia, pues en la práctica no es más que una suma finita.

Definamos también para cada $k \geq 1$ funciones $\gamma_k : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\gamma_k(\nu) = z^*(e_k)$$

y si $\mu \neq \nu$ entonces[22]

$$\gamma_k(\mu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu))\gamma_k^n(\mu).$$

Con todo, pasamos ya a definir $\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ tal que dado $\mu \in \mathcal{A}$ es $\Gamma(\mu)$ la aplicación lineal definida por

$$\Gamma(\mu)(e_k) = \gamma_k(\mu), \ \forall k \geq 1.$$

Con esto, tenemos que

$$\Gamma(\nu)(e_k) = \gamma_k(\nu) = z^*(e_k), \ \forall k \geq 1$$

y así $\Gamma(\nu) = z^*$.

Además, observemos que si $\mu \neq \nu$ entonces

$$\Gamma(\mu)(e_k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu))\gamma_k^n(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha(\mu, \nu))\Gamma^n(\mu)(e_k), \ \forall k \geq 1$$

con lo que

$$\Gamma(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha(\mu, \nu))\Gamma^n(\mu).$$

Así, dados $x \in c_{00}$ y $\mu \neq \nu$ se cumple que

$$\begin{aligned} |\Gamma(\nu)(x)| &= |z^*(x)| \leq \bar{\nu}(x), \\ |\Gamma(\mu)(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha(\mu, \nu))\Gamma^n(\mu)(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha(\mu, \nu)) \left| \Gamma^n(\mu)(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\alpha(\mu, \nu))\bar{\mu}(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu))\bar{\mu}(x) = \bar{\mu}(x). \end{aligned}$$

Por tanto, falta demostrar que existe una sucesión $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números reales no negativos, independiente de ν y z^* y tal que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| \leq c_k \alpha(\mu, \lambda).$$

Para demostrar la existencia de dicha sucesión precisamos de las siguientes afirmaciones.

Afirmación 5: Para cualesquiera $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ se cumple

$$2\alpha(\mu, \nu) \leq \alpha(\lambda, \nu) \Rightarrow |\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| \leq 3(2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \lambda), \ \ \forall k \geq 1. \tag{3.33}$$

Afirmación 6: Para cada $k \geq 1$ y $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\alpha(\mu, \nu) \leq \alpha(\lambda, \nu) < 2\alpha(\mu, \nu) \Rightarrow |\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| \leq \left[12(2^{k+1} + 16) + 2^{k+1}\right] \alpha(\mu, \lambda). \tag{3.34}$$

[22] Observemos que por lo visto anteriormente γ_k está bien definida pues como α es una métrica, si $\mu \neq \nu$ entonces $\alpha(\mu, \nu) > 0$ y únicamente una cantidad finita de términos $f_n(\alpha(\mu, \nu))$ son no nulos.

Considerando ciertas estas afirmaciones podemos concluir la demostración tomando

$$c_k = 12(2^{k+1} + 16) + 2^{k+1}.$$

Efectivamente esta sucesión es de términos positivos, no depende de ν ni de z^* y observamos que dados $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ y $k \in \mathbb{N}$, suponiendo sin pérdida de generalidad[23] que $\alpha(\mu, \nu) \leq \alpha(\lambda, \nu)$, se tiene que:

- Si $2\alpha(\mu, \nu) \leq \alpha(\lambda, \nu)$ por (3.33)

$$|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| = |\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| \leq 3(2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \lambda) \leq c_k\alpha(\mu, \lambda).$$

- Si $\alpha(\lambda, \nu) < 2\alpha(\mu, \nu)$ por (3.34)

$$|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| = |\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| \leq c_k\alpha(\mu, \lambda).$$

En cualquier caso queda demostrado lo que buscábamos.

La demostración de la implicación estará completa sin más que demostrar la veracidad de las Afirmaciones 5 y 6, para lo cual precisamos previamente de tres afirmaciones adicionales.

Afirmación 7: Para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$\alpha(\mu, \lambda) < 2^{-n} \Rightarrow |\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda)| \leq 2^{k+1}\alpha(\mu, \lambda), \ \forall k \geq 1. \tag{3.35}$$

Demostración de la Afirmación 7:

Si $n \leq 0$, entonces $\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda) = 0$ y es claro, luego supongamos que $n \geq 1$.

Supongamos pues que $\alpha(\mu, \lambda) < 2^{-n}$ y sea $k \in \mathbb{N}$ fijo pero arbitrario.

Entonces, si $\alpha(\mu, \lambda) \geq 2^{-k}$ se tiene que

$$|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda)| \leq |\gamma_k^n(\mu)| + |\gamma_k^n(\lambda)| \underset{(3.32)}{\leq} 2 \leq 2^{k+1}\alpha(\mu, \lambda).$$

Por otra parte, si $\alpha(\mu, \lambda) < 2^{-k}$ se cumple que

$$\min\left\{\beta_k^n(\mu, \lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} \leq \alpha(\mu, \lambda) < 2^{-\max\{k,n\}},$$

por lo que

$$\beta_k^n(\mu, \lambda) = \min\left\{\beta_k^n(\mu, \lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\}$$

y así

$$|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda)| = |\Gamma^n(\mu)(e_k) - \Gamma^n(\lambda)(e_k)| \leq \beta_k^n(\mu, \lambda) \leq \alpha(\mu, \lambda) \leq 2^{k+1}\alpha(\mu, \lambda).$$

En cualquier caso obtenemos el resultado buscado y la afirmación queda demostrada. ■

[23] Si fuera $\alpha(\lambda, \nu) < \alpha(\mu, \nu)$ denotando $\bar{\lambda} = \mu$ y $\bar{\mu} = \lambda$ se tiene que $\alpha(\bar{\mu}, \nu) < \alpha(\bar{\lambda}, \nu)$. Entonces, todo lo que sigue es cierto cambiando λ y μ por $\bar{\lambda}$ y $\bar{\mu}$ respectivamente y, por la simetría de α y del valor absoluto, obtenemos igualmente el resultado deseado.

Afirmación 8: Para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $\mu \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$2^{-n-4} \leq \alpha(\mu, \nu) < 2^{-n} \Rightarrow |\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)| \leq (2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \nu), \ \forall k \geq 1. \tag{3.36}$$

Demostración de la Afirmación 8:
Si $n \geq 1$ entonces

$$|\gamma_k(\nu) - \gamma_k^n(\nu)| = \left| z^*(e_k) - (1 - 2^{-n}) z^*(e_k) \right| = 2^{-n} |z^*(e_k)|$$

y si $n \leq 0$ es

$$|\gamma_k(\nu) - \gamma_k^n(\nu)| = |\gamma_k(\nu)| = |z^*(e_k)| \leq 2^{-n} |z^*(e_k)|,$$

luego en cualquier caso como $2^{-n-4} \geq \alpha(\mu, \nu)$ tenemos que

$$|\gamma_k(\nu) - \gamma_k^n(\nu)| \leq 2^{-n} |z^*(e_k)| \leq 2^{-n} \bar{\nu}(e_k) \leq 2^{-n} \leq 2^4 \alpha(\mu, \nu).$$

Con todo, como $\alpha(\mu, \nu) < 2^{-n}$

$$\begin{aligned} |\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)| &\leq |\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\nu)| + |\gamma_k^n(\nu) - \gamma_k(\nu)| \underset{(3.35)}{\leq} 2^{k+1}\alpha(\mu, \nu) + 16\alpha(\mu, \nu) = \\ &= (2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \nu) \end{aligned}$$

concluyendo la demostración. ■

Afirmación 9: Para cada $\mu \in \mathcal{A}$ se cumple que

$$|\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\nu)| \leq (2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \nu), \ \forall k \geq 1. \tag{3.37}$$

Demostración de la Afirmación 9:
Observemos en primer lugar que para cada $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$f_n(\alpha(\mu, \nu)) |\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\nu)| \leq f_n(\alpha(\mu, \nu))(2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \nu). \tag{3.38}$$

Efectivamente, si $2^{-n-4} \leq \alpha(\mu, \nu) < 2^{-n}$ es claro a partir de (3.36).
Por el contrario, si $\alpha(\mu, \nu) \geq 2^{-n}$ o $\alpha(\mu, \nu) < 2^{-n-4}$ entonces $f_n(\alpha(\mu, \nu)) = 0$ y la desigualdad es trivialmente cierta.
Así, como $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu)) = 1$

$$\begin{aligned} |\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\nu)| &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu)) \gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu)) \right| = \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu))(\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)) \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu)) |\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)| \leq \\ &\underset{(3.38)}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\alpha(\mu, \nu))(2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \nu) = (2^{k+1} + 16)\alpha(\mu, \nu) \end{aligned}$$

como buscábamos demostrar. ■

Demostración de la Afirmación 5:

Observemos que como $2\alpha(\mu,\nu) \leq \alpha(\lambda,\nu)$ se tiene que

$$\alpha(\mu,\nu) = 2\alpha(\mu,\nu) - \alpha(\mu,\nu) \leq \alpha(\lambda,\nu) - \alpha(\mu,\nu) \leq \alpha(\mu,\lambda)$$

y

$$2\alpha(\lambda,\nu) \leq 2\alpha(\lambda,\mu) + 2\alpha(\mu,\nu) \leq 2\alpha(\lambda,\mu) + \alpha(\lambda,\nu),$$

con lo que

$$\alpha(\mu,\nu) + \alpha(\nu,\lambda) \leq 3\alpha(\lambda,\mu).$$

Con esto,

$$\begin{aligned}|\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| &\leq |\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\nu)| + |\gamma_k(\nu) - \gamma_k(\lambda)| \underset{(3.37)}{\leq} (2^{k+1} + 16)(\alpha(\mu,\nu) + \alpha(\nu,\lambda)) \leq \\ &\leq 3(2^{k+1} + 16)\alpha(\lambda,\mu)\end{aligned}$$

como habíamos afirmado. ■

Demostración de la Afirmación 6:

En primer lugar, observemos que si $\alpha(\mu,\nu) \leq \alpha(\lambda,\nu) < 2\alpha(\mu,\nu)$ y $\mu = \nu$ o $\lambda = \nu$ entonces, por ser α un métrica, obtenemos que $\mu = \lambda = \nu$ y la desigualdad a demostrar es trivial. Así, supongamos que $\mu, \lambda \neq \nu$ observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned}\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(f_n(\alpha(\mu,\nu))\gamma_k^n(\mu) - f_n(\alpha(\lambda,\nu))\gamma_k^n(\lambda)\Big) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(f_n(\alpha(\mu,\nu)) - f_n(\alpha(\lambda,\nu))\Big)\gamma_k^n(\mu) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\alpha(\lambda,\nu))\Big(\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda)\Big) = \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big(f_n(\alpha(\mu,\nu)) - f_n(\alpha(\lambda,\nu))\Big)\left(\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)\right) + \\ &+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\alpha(\lambda,\nu))\Big(\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda)\Big),\end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}|\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| \leq &\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n(\alpha(\mu,\nu)) - f_n(\alpha(\lambda,\nu))|\,|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)| + \\ &+ \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\alpha(\lambda,\nu))\,|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda)|\,. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Ahora, observemos que:

- $f_n(\alpha(\mu,\nu)) \neq 0$ si, y solo si, $2^{-n-3} < \alpha(\mu,\nu) < 2^{-n-1}$.
- $f_n(\alpha(\lambda,\nu)) \neq 0$ si, y solo si, $2^{-n-3} < \alpha(\lambda,\nu) < 2^{-n-1}$.
- f_n es Lipschitz de constante 2^{n+3} pues es derivable a trozos y

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[2^{n+3}t - 1\right]\right| = 2^{n+3},$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[-2^{n+2}t + 2\right]\right| = 2^{n+2} < 2^{n+3}.$$

Por tanto, si $\alpha(\mu,\nu) \geq 2^{-n-1}$ entonces $\alpha(\lambda,\nu) \geq \alpha(\mu,\nu) \geq 2^{-n-1}$ y con ello

$$f_n(\alpha(\mu,\nu)) = f_n(\alpha(\lambda,\nu)) = 0;$$

y si $\alpha(\mu,\nu) < 2^{-n-4}$ entonces $\alpha(\lambda,\nu) < 2\alpha(\mu,\nu) < 2^{-n-3}$ y también

$$f_n(\alpha(\mu,\nu)) = f_n(\alpha(\lambda,\nu)) = 0.$$

Con esto si denotamos por

$$T = \{n \in \mathbb{Z} : 2^{-n-4} \leq \alpha(\mu,\nu) < 2^{-n-1}\}$$

y el primer sumatorio de (3.39) por S, se cumple que

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n\in T} |f_n(\alpha(\mu,\nu)) - f_n(\alpha(\lambda,\nu))|\,|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)| \leq \\
&\underset{\text{Lips.}}{\leq} \sum_{n\in T} 2^{n+3}\,|\alpha(\mu,\nu) - \alpha(\lambda,\nu)|\,|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)| \leq \sum_{n\in T} 2^{n+3}\alpha(\lambda,\mu)\,|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k(\nu)| \leq \\
&\underset{(3.36)}{\leq} \sum_{n\in T} 2^{n+3}\alpha(\lambda,\mu)(2^{k+1}+16)\alpha(\mu,\nu) \leq \sum_{n\in T} 2^{n+3}\alpha(\lambda,\mu)(2^{k+1}+16)2^{-n-1} = \\
&= \sum_{n\in T} 2^2\alpha(\lambda,\mu)(2^{k+1}+16) \underset{|T|\leq 3}{\leq} 12(2^{k+1}+16)\alpha(\lambda,\mu).
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Para la segunda suma, observamos que si $f_n(\alpha(\lambda,\nu)) \neq 0$ entonces

$$\alpha(\lambda,\mu) \leq \alpha(\lambda,\nu) + \alpha(\nu,\mu) \leq 2\alpha(\lambda,\nu) < 2^{-n}$$

con lo que podemos aplicar (3.35) y obtenemos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\alpha(\lambda,\nu))\,|\gamma_k^n(\mu) - \gamma_k^n(\lambda)| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(\alpha(\lambda,\nu))2^{k+1}\alpha(\mu,\lambda) = 2^{k+1}\alpha(\mu,\lambda). \tag{3.41}$$

Por (3.39), (3.40) y (3.41) concluimos finalmente que

$$|\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| \leq 12(2^{k+1}+16)\alpha(\lambda,\mu) + 2^{k+1}\alpha(\mu,\lambda) = \left[12(2^{k+1}+16) + 2^{k+1}\right]\alpha(\mu,\lambda)$$

lo que prueba (3.34) y concluye la demostración. ■

Lema 3.3.9. *La condición* (ii*) *en la Proposición* 3.3.8 *se cumple si* $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{(1)}$*, donde*

$$\mathcal{B}_{(1)} = \{\mu \in \mathcal{B} : \mu(e_k) = 1,\ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

<u>Demostración:</u>
Sea $\eta \in [0,1)$ y fijemos una sucesión estrictamente creciente $\{\kappa_k\}_{k=1}^{\infty}$ de números reales tales que $\kappa_1 \geq \eta$ y $\kappa_k < 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$.
Definamos ahora de forma recursiva para cada $\mu, \lambda \in \mathcal{B}_{(1)}$

$$\begin{aligned}
&\beta_1(\mu,\lambda) = 0;\\
&\beta_{k+1}(\mu,\lambda) = \sup\left\{\left|\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \bar{\lambda}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)\right| + \sum_{i=1}^{k} |a_k|\,\beta_i(\mu,\lambda) :\right.\\
&\qquad\qquad \left. a_1,\cdots,a_k \in \mathbb{R} \wedge \min\left\{\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right), \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)\right\} < \frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1} - \kappa_k}\right\}.
\end{aligned}$$

Es muy sencillo ver por inducción sobre k que $\beta_k(\mu,\mu)=0$ para todo $k\in\mathbb{N}$ y $\mu\in\mathcal{B}_{(1)}$. Además, por el Lema F.3 tenemos que cada β_k es una aplicación con valores en $[0,+\infty)$ y continua.

Resta pues ver que estas aplicaciones efectivamente satisfacen la segunda condición en la Proposición 3.3.8 (ii*).

Sean pues $\nu\in\mathcal{B}_{(1)}$ y $z^*\in c_{00}^{\#}$ tales que $|z^*|\leq\bar{\nu}$.

Fijados $\mu\in\mathcal{B}_{(1)}$ y $p=\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en el intervalo $[0,1]$ definimos $g_p^\mu:\mathrm{Seq}(\mathbb{R}^3)\longrightarrow\mathbb{R}^3$ como

$$g_p^\mu(\varnothing)=(p_1\eta z^*(e_1),0,0)\,;$$

$$g_p^\mu\left(\{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=1}^k\right)=\begin{cases}\left(C_{\{x_i\}_{i=1}^k},S_{\{x_i\}_{i=1}^k},I_{\{x_i\}_{i=1}^k}\right) & \text{si } S_{\{x_i\}_{i=1}^k},I_{\{x_i\}_{i=1}^k} \text{ existen}\\ (0,0,0) & \text{en otro caso}\end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned}C_{\{x_i\}_{i=1}^k}&=p_kS_{\{x_i\}_{i=1}^k}+(1-p_k)I_{\{x_i\}_{i=1}^k},\\ S_{\{x_i\}_{i=1}^k}&=\sup_{a\in\mathbb{R}^k}\left[-\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(-e_{k+1}+\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)+\sum_{i=1}^k a_ix_i\right],\\ I_{\{x_i\}_{i=1}^k}&=\inf_{a\in\mathbb{R}^k}\left[\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)-\sum_{i=1}^k a_ix_i\right].\end{aligned}$$

Por el teorema de recursión existe pues una única sucesión $f_p^\mu:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ tal que

$$f_p^\mu(1)=g_p^\mu(\varnothing)$$

y

$$f_p^\mu(k)=g_p^\mu\left(\{f_p^\mu(i)\}_{i=1}^{k-1}\right)$$

para cada $k>1$.

Fijada entonces $p=\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ contenida en $[0,1]$ definimos para cada $k\geq1$ y $\mu\in\mathcal{B}_{(1)}$

$$\big(\gamma_k(\mu),u_k(\mu),v_k(\mu)\big)=f_p^\mu(k).$$

Afirmación 1: Fijada $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}\subset[0,1]$, para todo $\mu\in\mathcal{B}_{(1)}$, $k\in\mathbb{N}$ y $a_1,\cdots,a_k\in\mathbb{R}$ se cumple que

$$\sum_{i=1}^k a_i\gamma_i(\mu)\leq\kappa_k\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right). \tag{3.42}$$

Además, para todo $k\geq1$ se tiene que $u_{k+1}(\mu)$, $v_{k+1}(\mu)$ y $\gamma_{k+1}(\mu)$ estarán definidas por $S_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$, $I_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$ y $C_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$ respectivamente.

Demostración de la Afirmación 1:

Demostraremos el resultado por inducción sobre k.

En primer lugar, (3.42) es cierto para $k=1$ pues dado $a_1 \in \mathbb{R}$ como $\mu, \nu \in \mathcal{B}_{(1)}$ será

$$a_1\gamma_1(\mu) = a_1 p_1 \eta z^*(e_1) \leq |a_1|\,\kappa_1 z^*(e_1) \leq |a_1|\,\kappa_1 \nu(e_1) = |a_1|\,\kappa_1\mu(e_1) = \kappa_1\bar{\mu}(a_1e_1).$$

Además, observamos que dado $a_1 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned} -\kappa_2\bar{\mu}(-e_2+a_1e_1) + a_1\gamma_1(\mu) &\leq -\kappa_2\bar{\mu}(-e_2+a_1e_1) + \kappa_1\bar{\mu}(a_1e_1) \leq \\ &\leq \kappa_2\left[\bar{\mu}(a_1e_1) - \bar{\mu}(-e_2+a_1e_1)\right] \leq \kappa_2\bar{\mu}(e_2) = \kappa_2, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$S_{\{\gamma_1(\mu)\}} \leq \kappa_2.$$

Y también,

$$\begin{aligned} \kappa_2\bar{\mu}(e_2+a_1e_1) - a_1\gamma_1(\mu) &\geq \kappa_2\bar{\mu}(e_2+a_1e_1) - \kappa_1\bar{\mu}(a_1e_1) \geq \\ &\geq \kappa_2\left[\bar{\mu}(a_1e_1-(-e_2)) - \bar{\mu}(a_1e_1)\right] \geq -\kappa_2\bar{\mu}(-e_2) = -\kappa_2, \end{aligned}$$

demostrando que

$$I_{\{\gamma_1(\mu)\}} \geq -\kappa_2.$$

Con esto, demostramos que efectivamente los valores de $u_2(\mu)$, $v_2(\mu)$ y $\gamma_2(\mu)$ estarán definidos por $S_{\{\gamma_1(\mu)\}}$, $I_{\{\gamma_1(\mu)\}}$ y $C_{\{\gamma_1(\mu)\}}$ respectivamente.

Supongamos pues la afirmación es cierta para k y veamos que entonces lo es para $k+1$.

Veamos pues que bajo esta hipótesis se tiene que $S_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$ e $I_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$ existen.

Efectivamente, tenemos que para cualesquiera $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned} &-\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(-e_{k+1}+\sum_{i=1}^k a_ie_i\right) + \sum_{i=1}^k a_i\gamma_i(\mu) \underset{\text{(HI)}}{\leq} -\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(-e_{k+1}+\sum_{i=1}^k a_ie_i\right) + \\ &+\kappa_k\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right) \leq \kappa_{k+1}\left[\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right) - \bar{\mu}\left(-e_{k+1}+\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)\right] \leq \kappa_{k+1}\bar{\mu}(e_{k+1}) = \kappa_{k+1}, \end{aligned}$$

lo que prueba que

$$S_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k} \leq \kappa_{k+1}.$$

Por otra parte, también se cumple que

$$\begin{aligned} &\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^k a_ie_i\right) - \sum_{i=1}^k a_i\gamma_i(\mu) \underset{\text{(HI)}}{\geq} \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^k a_ie_i\right) - \kappa_k\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right) \geq \\ \geq &\kappa_{k+1}\left[\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i - (-e_{k+1})\right) - \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_ie_i\right)\right] \geq -\kappa_{k+1}\bar{\mu}(-e_{k+1}) = -\kappa_{k+1}, \end{aligned}$$

demostrando que

$$I_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k} \geq -\kappa_{k+1}.$$

Con esto, tenemos que los valores de $u_{k+1}(\mu)$, $v_{k+1}(\mu)$ y $\gamma_{k+1}(\mu)$ estarán definidos por $S_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$, $I_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$ y $C_{\{\gamma_k(\mu)\}_{i=1}^k}$ respectivamente.

Finalizaremos pues la demostración si vemos que (3.42) se satisface también para $k+1$. Veamos primero que

$$u_{k+1}(\mu) \leq \gamma_{k+1}(\mu) \leq v_{k+1}(\mu),$$

para lo cual basta ver que

$$u_{k+1}(\mu) \leq v_{k+1}(\mu)$$

pues $\gamma_{k+1}(\mu)$ es combinación convexa de estos dos.
Sin más, dados $b_1, \cdots, b_k, c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ basta ver que

$$-\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(-e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} b_i e_i\right) + \sum_{i=1}^{k} b_i \gamma_i(\mu) \leq \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} c_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} c_i \gamma_i(\mu)$$

y esto es cierto pues

$$\sum_{i=1}^{k} b_i\gamma_i(\mu) + \sum_{i=1}^{k} c_i\gamma_i(\mu) = \sum_{i=1}^{k}(b_i + c_i)\gamma_i(\mu) \underset{\text{(HI)}}{\leq} \kappa_k\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k}(b_i+c_i)e_i\right) <$$
$$< \kappa_{k+1}\left[\bar{\mu}\left(-e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} b_i e_i\right) + \bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} c_i e_i\right)\right].$$

Así, tenemos que para cualesquiera $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\gamma_{k+1}(\mu) \leq v_{k+1}(\mu) \leq \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i\gamma_i(\mu),$$
$$\gamma_{k+1}(\mu) \geq u_{k+1}(\mu) \geq -\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(-e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) + \sum_{i=1}^{k} a_i\gamma_i(\mu)$$

y por tanto:

- Si $a_{k+1} > 0$ entonces
$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i\gamma_i(\mu) = a_{k+1}\left[\gamma_{k+1}(\mu) + \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{a_{k+1}}\gamma_i(\mu)\right] \leq a_{k+1}\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{a_{k+1}}e_i\right) =$$
$$= \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(a_{k+1}e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) = \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i e_i\right).$$
- Si $a_{k+1} = 0$ es claro por hipótesis de inducción y teniendo en cuenta que $\kappa_k < \kappa_{k+1}$.
- Si $a_{k+1} < 0$ entonces
$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i\gamma_i(\mu) = |a_{k+1}|\left[-\gamma_{k+1}(\mu) + \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{|a_{k+1}|}\gamma_i(\mu)\right] \leq$$
$$\leq |a_{k+1}|\,\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(-e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k}\frac{a_i}{|a_{k+1}|}e_i\right) = \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(a_{k+1}e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) =$$
$$= \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i e_i\right).$$

En cualquier caso tenemos que (3.42) es cierto para $k+1$ y por inducción queda probada la afirmación. ■

Nuestro objetivo ahora es demostrar que existe una sucesión $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$ tal que $\gamma_k(\nu) = \eta z^*(e_k)$ para cada $k \geq 1$.

Afirmación 2: Dado $k \in \mathbb{N}$, si existen $p_1, \cdots, p_k \in [0,1]$ tales que $\gamma_i(\nu) = \eta z^*(e_i)$ para $i \leq k$, entonces existe $p_{k+1} \in [0,1]$ de modo que $\gamma_{k+1}(\nu) = \eta z^*(e_{k+1})$.

Demostración de la Afirmación 2:

Dados $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\pm\eta z^*(e_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} a_i\gamma_i(\nu) = \pm\eta z^*(e_{k+1}) + \sum_{i=1}^{k} a_i\eta z^*(e_i) = \eta z^*\left(\pm e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \leq$$
$$\leq \eta\bar{\nu}\left(\pm e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) < \kappa_{k+1}\bar{\nu}\left(\pm e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right),$$

luego

$$-\kappa_{k+1}\bar{\nu}\left(-e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) + \sum_{i=1}^{k} a_i\gamma_i(\nu) < \eta z^*(e_{k+1}) < \kappa_{k+1}\bar{\nu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i\gamma_i(\nu).$$

Por la arbitrariedad de los $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ obtenemos que

$$u_{k+1}(\nu) \leq \eta z^*(e_{k+1}) \leq v_{k+1}(\nu).$$

Así, si $u_{k+1}(\nu) < v_{k+1}(\nu)$ tenemos que

$$0 \leq \frac{v_{k+1}(\nu) - \eta z^*(e_{k+1})}{v_{k+1}(\nu) - u_{k+1}(\nu)} \leq 1,$$

y definiendo

$$p_{k+1} = \frac{v_{k+1}(\nu) - \eta z^*(e_{k+1})}{v_{k+1}(\nu) - u_{k+1}(\nu)}$$

es claro que

$$\gamma_{k+1}(\nu) = \eta z^*(e_{k+1}).$$

Por otra parte, si $v_{k+1}(\nu) = u_{k+1}(\nu) = \eta z^*(e_{k+1})$ basta tomar entonces $p_{k+1} = 0$ para obtener el resultado deseado. ■

Observemos que si $k = 1$ basta tomar $p_1 = 1$ para obtener que $\gamma_1(\nu) = \eta z^*(e_1)$, luego la Afirmación 2 nos permite construir[24] la sucesión $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$ buscada.

A partir de los γ_k asociados a la sucesión $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ construida definamos $\Gamma : \mathcal{B}_{(1)} \longrightarrow c_{00}^{\#}$ tal que

$$\Gamma(\mu)(e_k) = \gamma_k(\mu), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para dicho Γ se cumplen:

- $\Gamma(\nu) = \eta z^*$ pues para cada $k \geq 1$

$$\Gamma(\nu)(e_k) = \gamma_k(\nu) = \eta z^*(e_k).$$

[24] La sucesión se puede construir, por ejemplo, empleando el axioma de elecciones dependientes de forma similar a lo visto en la demostración del Lema B.10.

- Dado $\mu \in \mathcal{B}_{(1)}$ y $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in c_{00}$ se tiene que

$$|\Gamma(\mu)(x)| \leq \bar{\mu}(x)$$

pues

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mu)(x) &= \Gamma(\mu)\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Gamma(\mu)(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \gamma_k(\mu) \leq \\
&\underset{(3.42)}{\leq} \kappa_k \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right) \leq \bar{\mu}(x), \\
-\Gamma(\mu)(x) &= \Gamma(\mu)\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-a_k) e_k\right) \underset{b_k=-a_k}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \Gamma(\mu)(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \gamma_k(\mu) \leq \\
&\underset{(3.42)}{\leq} \kappa_k \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k\right) \leq \bar{\mu}(x).
\end{aligned}$$

Por tanto, para concluir la demostración basta ver que dados $\mu, \lambda \in \mathcal{B}_{(1)}$ y $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$|\gamma_k(\mu) - \gamma_k(\lambda)| \leq \beta_k(\mu, \lambda), \tag{3.43}$$

pues entonces por definición

$$|\Gamma(\mu)(e_k) - \Gamma(\lambda)(e_k)| \leq \beta_k(\mu, \lambda)$$

y efectivamente la sucesión β_k satisface 3.3.8 (ii*).
Como hemos hecho a lo largo de la prueba, demostraremos (3.43) por inducción sobre k. Si $k = 1$ tenemos que

$$|\gamma_1(\mu) - \gamma_1(\lambda)| = 0 = \beta_1(\mu, \lambda),$$

luego supongamos que (3.43) es cierto para $i \leq k$ y veamos que entonces lo es para $k+1$. Observemos que si vemos que

$$|u_{k+1}(\mu) - u_{k+1}(\lambda)| \leq \beta_{k+1}(\mu, \lambda)$$

y

$$|v_{k+1}(\mu) - v_{k+1}(\lambda)| \leq \beta_{k+1}(\mu, \lambda)$$

entonces

$$\begin{aligned}
|\gamma_{k+1}(\mu) - \gamma_{k+1}(\lambda)| &= |p_{k+1}(u_{k+1}(\mu) - u_{k+1}(\lambda)) + (1 - p_{k+1})(v_{k+1}(\mu) - v_{k+1}(\lambda))| \leq \\
&\leq p_{k+1}\,|u_{k+1}(\mu) - u_{k+1}(\lambda)| + (1 - p_{k+1})\,|v_{k+1}(\mu) - v_{k+1}(\lambda)| \leq \\
&\leq p_{k+1}\beta_{k+1}(\mu, \lambda) + (1 - p_{k+1})\beta_{k+1}(\mu, \lambda) = \beta_{k+1}(\mu, \lambda)
\end{aligned}$$

tal como queríamos ver.
Demostremos lo anunciado anteriormente únicamente para v_{k+1} pues observese que la demostración para u_{k+1} es completamente análoga.

En primer lugar, observemos que por la definición de $v_{k+1}(\mu)$ es posible tomar el ínfimo únicamente sobre

$$A = \left\{ (a_1, \cdots, a_k) \in \mathbb{R}^k : \min \left\{ \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right), \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \right\} < \frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1}-\kappa_k} \right\}.$$

Efectivamente, si $(a_1, \cdots, a_k) \notin A$ entonces

$$\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \geq \frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1}-\kappa_k}$$

y así

$$\begin{aligned}
\kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i \gamma_i(\mu) &\underset{(3.42)}{\geq} \kappa_{k+1}\left[\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \bar{\mu}(e_{k+1})\right] - \kappa_k \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) = \\
&= (\kappa_{k+1}-\kappa_k)\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \kappa_{k+1} \geq \\
&\geq (\kappa_{k+1}-\kappa_k)\frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1}-\kappa_k} - \kappa_{k+1} = \kappa_{k+1} = \\
&= \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} 0 \cdot \gamma_i(\mu)
\end{aligned}$$

donde la k-tupla nula sí está en A.

Claramente lo anterior es también cierto para λ y así

$$\begin{aligned}
|v_{k+1}(\mu) - v_{k+1}(\lambda)| = &\left| \inf_{a\in A} \left\{ \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i \gamma_i(\mu) \right\} - \right. \\
&\left. - \inf_{a\in A} \left\{ \kappa_{k+1}\bar{\lambda}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i \gamma_i(\lambda) \right\} \right| = \\
= &\left| \inf_{a\in A} \left\{ \kappa_{k+1}\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{k} a_i \gamma_i(\mu) \right\} + \right. \\
&\left. + \sup_{a\in A} \left\{ -\kappa_{k+1}\bar{\lambda}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) + \sum_{i=1}^{k} a_i \gamma_i(\lambda) \right\} \right| \leq \\
\underset{25}{\leq} &\sup_{a\in A} \left| \kappa_{k+1}\left[\bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \bar{\lambda}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right)\right] + \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^{k} a_i \Big(\gamma_i(\lambda) - \gamma_i(\mu)\Big) \right| \leq \\
\underset{\kappa_{k+1}<1}{\leq} &\sup_{a\in A} \left\{ \left| \bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \bar{\lambda}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \right| + \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^{k} |a_i| \, |\gamma_i(\lambda) - \gamma_i(\mu)| \right\} \leq \\
\underset{(\mathrm{HI})}{\leq} &\sup_{a\in A} \left\{ \left| \bar{\mu}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) - \bar{\lambda}\left(e_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} a_i e_i\right) \right| + \sum_{i=1}^{k} |a_i| \, \beta_i(\mu,\lambda) \right\} = \\
= &\beta_{k+1}(\mu,\lambda). \blacksquare
\end{aligned}$$

Estamos ahora sí en disposición de demostrar por fin la Proposición 3.3.6.

Demostración de la Proposición 3.3.6:

Por el Lema 3.3.9 y la Proposición 3.3.8 sabemos que existe U un espacio de Banach separable y aplicaciones continuas $\tilde{\chi}_k : \mathcal{B}_{(1)} \longrightarrow U$ tales que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{\chi}_k(\mu) \right\|_U = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right)$$

para cada $\mu \in \mathcal{B}_{(1)}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in c_{00}$.

Como X es universalmente isométrico existe $J : U \longrightarrow X$ una isometría lineal, con lo que definiendo para cada $k \in \mathbb{N}$ las aplicaciones $J_k : \mathcal{B}_{(1)} \longrightarrow X$ como $J_k = J \circ \tilde{\chi}_k$ tenemos que serán continuas y además cumplen que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_k(\mu) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k J\left(\tilde{\chi}_k(\mu)\right) \right\| = \left\| J\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{\chi}_k(\mu) \right) \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{\chi}_k(\mu) \right\|_U = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right).$$

Consideremos ahora $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_{(1)}$ tal que para cada $\mu \in \mathcal{B}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in V$ es

$$\psi(\mu)\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k \right).$$

En primer lugar como $\mu \in \mathcal{B}$ se tiene que $\bar{\mu}$ es una norma sobre c_{00} y por tanto $\mu(e_k) \neq 0$, con lo que está bien definida.

Además, es sencillo de la definición comprobar que es una pseudonorma sobre V y su extensión a c_{00} es una norma pues si

$$\overline{\psi(\mu)}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k \right) = 0$$

---

[25] *Sea $A \subset \mathbb{R}^k$ y $f, g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ entonces*

$$\left| \inf_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x) \right| \leq \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)|.$$

Basta observar que dado $n \in \mathbb{N}$ existen $x_n, y_n \in A$ tales que

$$-\inf_{x \in A} f(x) + \frac{1}{n} < -f(x_n)$$

y

$$\sup_{yx \in A} g(y) - \frac{1}{n} < g(y_n),$$

con lo que

$$\inf_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x) - \frac{1}{n} < \inf_{x \in A} f(x) + g(y_n) \leq f(y_n) + g(y_n) \leq \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)|,$$

$$-\inf_{x \in A} f(x) - \sup_{x \in A} g(x) + \frac{1}{n} < -f(x_n) - \sup_{x \in A} g(x) \leq -f(x_n) - g(x_n) \leq \sup_{x \in A} |f(x) + g(x)|.$$

entonces, de nuevo por ser $\bar{\mu}$ una norma, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k = 0_{c_{00}}$$

y por tanto $a_k = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, es decir, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k = 0_{c_{00}}$.

Más aún, observemos que

$$\psi(\mu)(e_k) = \bar{\mu}\left(\frac{1}{\mu(e_k)} e_k\right) = \frac{\mu(e_k)}{\mu(e_k)} = 1$$

con lo cual $\psi(\mu) \in \mathcal{B}_{(1)}$.

Veamos además que ψ es continua, para lo cual basta ver que es secuencialmente continua al ser ambos espacios metrizables.

Sea pues $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{B}$ convergente a cierto $\mu \in \mathcal{B}$ y observemos que dado $v = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in V$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\psi(\mu_n)(v) - \psi(\mu)(v)| &= \left|\overline{\mu_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_n(e_k)} e_k\right) - \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k\right)\right| \leq \\ &\leq \left|\overline{\mu_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_n(e_k)} e_k\right) - \overline{\mu_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k\right)\right| + \\ &+ \left|\overline{\mu_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k\right) - \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k\right)\right|. \end{aligned}$$

Ahora, como por el Lema B.3 dado $w \in c_{00}$ se cumple que $\overline{\mu_n}(w) \longrightarrow \bar{\mu}(w)$, el segundo sumando en la expresión anterior converge a cero.

También, para el primer sumando tenemos que

$$\begin{aligned} &\left|\overline{\mu_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu_n(e_k)} e_k\right) - \overline{\mu_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\mu(e_k)} e_k\right)\right| \leq \overline{\mu_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\mu(e_k) - \mu_n(e_k)}{\mu_n(e_k)\mu(e_k)} e_k\right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \frac{|\mu(e_k) - \mu_n(e_k)|}{\mu_n(e_k)\mu(e_k)} \mu_n(e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{\mu(e_k)} |\mu(e_k) - \mu_n(e_k)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Con todo, tenemos que $\psi(\mu_n)(v) \longrightarrow \psi(\mu)(v)$ y por la propiedad universal de la topología producto que $\psi(\mu_n) \longrightarrow \psi(\mu)$ en $\mathcal{B}_{(1)}$ tal como queríamos ver.

Definiendo ahora $\chi_k : \mathcal{B} \longrightarrow X$ como

$$\chi_k(\mu) = \mu(e_k) J_k(\psi(\mu)),$$

se cumple que dados $\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \in c_{00}$ y $\mu \in \mathcal{B}$ es

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(\mu)\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(e_k) J_k(\psi(\mu))\right\| = \overline{\psi(\mu)}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu(e_k) e_k\right) = \bar{\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right).$$

Por tanto, si demostramos que son continuas estas serán las aplicaciones buscadas.

Nuevamente basta ver que son secuencialmente continuas, luego sea $k \in \mathbb{N}$ fijo y $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{B}$ convergente a cierto $\mu \in \mathcal{B}$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\chi_k(\mu_n) - \chi_k(\mu)\| &= \|\mu_n(e_k)J_k(\psi(\mu_n)) - \mu(e_k)J_k(\psi(\mu))\| \leq \\
&\leq \left\|\Big(\mu_n(e_k) - \mu(e_k)\Big)J_k(\psi(\mu_n))\right\| + \left\|\mu(e_k)\Big(J_k(\psi(\mu_n)) - J_k(\psi(\mu))\Big)\right\| = \\
&= |\mu_n(e_k) - \mu(e_k)| \, \|J_k(\psi(\mu_n))\| + \mu(e_k) \, \|J_k(\psi(\mu_n)) - J_k(\psi(\mu))\| = \\
&= |\mu_n(e_k) - \mu(e_k)| \, \overline{\psi(\mu_n)}(e_k) + \mu(e_k) \, \|J_k(\psi(\mu_n)) - J_k(\psi(\mu))\| = \\
&= |\mu_n(e_k) - \mu(e_k)| + \mu(e_k) \, \|J_k(\psi(\mu_n)) - J_k(\psi(\mu))\| \, .
\end{aligned}$$

Por la convergencia de μ_n a μ en $\mathcal{B}$ y la continuidad de J_k y ψ tenemos que la última suma tiende a cero, con lo que efectivamente concluimos que $\chi_k(\mu_n)$ converge a $\chi_k(\mu)$ en X y con ello finalizamos la demostración. ■

Capítulo 4

Ejemplos: El espacio ℓ_2

Como ya hemos comentado en el capítulo anterior, las codificaciones que hemos dado nos permiten establecer la complejidad de las clases de isometría o isomorfía de cualquier espacio de Banach separable estudiando, dentro de la codificación, la clasificación en la jerarquía de Borel de dichas clases.

Debido a la complejidad y el nivel de conocimiento necesario tan solo para entender algunos de estos ejemplos, nos centraremos principalmente en estudiar los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita dentro de la codificación de Cúth, Doležal, Doucha y Kurka. A pesar de ello, concluiremos el texto exponiendo, sin demostración, algunos otros ejemplos cuyos enunciados son asequibles al nivel de este texto.

El lector experto que quiera profundizar más en el tema y encontrar una mayor cantidad de ejemplos relevantes puede consultar, entre muchos otros, [9], [12] y [15].

4.1. Espacios de Hilbert separables de dimensión infinita

Recordemos brevemente el concepto de producto escalar y espacio de Hilbert.

Definición 4.1.1. *Sea X un espacio vectorial*[1] *sobre $\mathbb{R}$, una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice que es un* ***producto escalar*** *en X si verifica:*

(i) $\langle x, x \rangle > 0$ *para todo $x \in X$ no nulo;*

(ii) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in X, \lambda \in \mathbb{R}$;

(iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in X$;

(iv) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in X$.

El par $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se denominará ***espacio prehilbertiano****.*

---

[1] La definición puede darse también para espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$, pero entonces es necesario cambiar la condición (iv) por

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \ \forall x, y \in X,$$

donde $\overline{z}$ denota el conjugado de $z \in \mathbb{C}$.

Observemos que si $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio prehilbertiano y definimos la aplicación $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \langle x, x\rangle$, por las condiciones (i) y (ii) en la definición podemos asegurar que h es una función no negativa y que se anula únicamente si x es el vector nulo en X.

Esto nos permite definir una norma asociada a un espacio prehilbertiano $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \;\; \forall x \in X.$$

Un **espacio de Hilbert** es entonces un espacio prehilbertiano tal que al considerarlo con su norma asociada es un espacio de Banach.

La teoría sobre espacios de Hilbert es muy extensa y tiene numerosas aplicaciones, por lo que instamos al lector interesado a consultar los libros [11] o [34] para obtener más información. Por nuestra parte no entraremos en más detalle, pues suponemos que el lector de este texto tiene un conocimiento previo de estos conceptos, aunque sí se pone esfuerzo en el resto de la sección en dar enunciados y referencias para los resultados clásicos sobre espacios de Hilbert, con el fin de que pueda seguirse el texto aunque los conocimientos sobre el tema son mínimos.

El teorema de Riesz-Fischer[2] nos dice que cualquier espacio de Hilbert separable y de dimensión infinita es isométricamente isomorfo al espacio de Hilbert

$$\ell_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

dotado del producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Así pues, estudiar la complejidad de la clase de los espacios de Hilbert separables de dimensión infinita equivale a estudiar la complejidad de las clases de isometría e isomorfía de ℓ_2.

Comencemos pues por la clase de isometría, donde la pregunta a priori más sencilla de responder será, ¿es la clase de isometría de ℓ_2 abierta para $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_\infty$ o $\mathcal{B}$?

Desafortunadamente la respuesta es negativa, de hecho vamos a probar algo más fuerte y es que ninguna clase de isometría, ni de isomorfía puede ser abierta en ninguno de estos espacios.

Proposición 4.1.1. *Si X es un espacio de Banach separable e $\mathcal{I} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}\}$, se cumple que $\langle X\rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}, \langle X\rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ tienen interior vacío.*

En particular, si cualquiera de estos conjuntos es no vacío entonces no puede ser abierto.

<u>Demostración:</u>

En primer lugar, observemos que si Y un espacio de Banach separable universalmente isométrico, por la Proposición 3.2.12 se cumple que

$$\mathcal{I} = \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es finitamente representable en } Y\} = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle Y\rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\right) \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle Y\rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}\right).$$

[2] Se puede consultar en [11, Prop. 1.12.27], donde podemos observar que en virtud del Corolario 1.12.24 y la Proposición 1.12.25, se puede sustituir en la Proposición 1.12.27 la palabra “isomorfo” por “isométricamente isomorfo”.

Así, obtenemos que $\langle Y\rangle^{\mathcal{I}}_{\equiv}, \langle Y\rangle^{\mathcal{I}}_{\simeq}$ son densos en $\mathcal{I}$.

Denotemos ahora por $\asymp$ cualquiera de los símbolos $\equiv$ o $\simeq$ y supongamos por reducción al absurdo que existe $\mu \in \langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\asymp}$ un punto interior.

En este caso, tenemos entonces que existe U un abierto de $\mathcal{I}$ tal que $\mu \in U \subset \langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\asymp}$.

Ahora, si son Y, Z dos espacios de Banach separables universalmente isométricos[3], no isomorfos entre sí, puesto que hemos visto que $\langle Y\rangle^{\mathcal{I}}_{\asymp}, \langle Z\rangle^{\mathcal{I}}_{\asymp}$ son densos en $\mathcal{I}$, tenemos que existen

$$\nu_1 \in \langle Y\rangle^{\mathcal{I}}_{\asymp} \cap U$$

y

$$\nu_2 \in \langle Z\rangle^{\mathcal{I}}_{\asymp} \cap U.$$

Así, por una parte tenemos que $X_{\nu_1} \asymp Y$ y $X_{\nu_2} \asymp Z$, pero por otra, como

$$\nu_1, \nu_2 \in U \subset \langle X\rangle^{\mathcal{I}}_{\asymp},$$

tenemos que $X_{\nu_1} \asymp X \asymp X_{\nu_2}$, con lo que $Y \asymp Z$.

En cualquier caso tenemos pues que $Y \simeq Z$ y obtenemos la contradicción buscada. ■

El siguiente paso lógico es preguntarse si la clase de isometría de ℓ_2 es cerrada y en este caso, la respuesta depende del espacio sobre el que trabajemos. Si consideramos la clase de isometría en los espacios $\mathcal{P}_\infty$ o $\mathcal{B}$ entonces la respuesta es afirmativa, pero si trabajamos sobre $\mathcal{P}$ se tiene que $\langle \ell_2\rangle^{\mathcal{P}}_{\equiv}$ no es cerrada. Aún más, en el espacio $\mathcal{P}$ no existen clases de isometría cerradas salvo la clase del espacio trivial tal y como se ve en la siguiente proposición.

Proposición 4.1.2. *En $\mathcal{P}$ la única clase de isometría cerrada es la del espacio trivial.*

<u>Demostración:</u>

Observemos en primer lugar que si es $X = \{0\}$ el espacio trivial, entonces

$$\mu \in \langle X\rangle_{\equiv} \Leftrightarrow X_\mu \equiv \{0\} \Leftrightarrow c_{00}/N_\mu = \{N_\mu\} \Leftrightarrow \mu(v) = 0, \ \ \forall v \in V.$$

Por tanto, si denotamos por μ_0 la norma nula en $\mathcal{P}$, se tiene que $\langle X\rangle_{\equiv} = \{\mu_0\}$ que es cerrado en $\mathcal{P}$ por ser éste último un espacio de Hausdorff.

Supongamos ahora que existe X un espacio de Banach no trivial tal que $\langle X\rangle_{\equiv}$ es cerrado.

Como X no es el espacio trivial tenemos que $X \not\equiv X_{\mu_0}$ y por tanto $\mu_0 \in \mathcal{P} \setminus \langle X\rangle_{\equiv}$.

---

[3] Tras la Definición 1.2.5 vimos que $Y = \mathcal{C}([0,1])$ es un espacio de Banach separable universalmente isométrico, luego definiendo $Z = \mathcal{C}([0,1]) \times \ell_1$, es claro que también tendrá esta propiedad universal y resta únicamente ver que no son isomorfos.

Si suponemos pues que ambos espacios son isomorfos, por la definición de Z tenemos entonces que existe W un subespacio complementado (ver nota al píe 5) de $\mathcal{C}([0,1])$ tal que $W \simeq \ell_1$.
Con esto, $W^* \simeq \ell_1^* \simeq \ell_\infty$ y obtenemos pues que el dual de W no es separable.

En [33], Rosenthal demuestra que cualquier subespacio complementado de $C([0,1])$ con dual no separable, es isomorfo a $\mathcal{C}([0,1])$.

Por tanto, obtenemos que $\ell_1 \simeq W \simeq \mathcal{C}([0,1])$ lo cual es la contradicción buscada (ver [1, Prop. 2.2.2]).

Ahora, como $\mathcal{P} \setminus \langle X \rangle_{\equiv}$ es abierto existe un abierto básico

$$W = \bigcap_{i=1}^{n} U[v_i, (a_i, b_i)]$$

tal que $\mu_0 \in W \subset \mathcal{P} \setminus \langle X \rangle_{\equiv}$.

Además, como $\mu_0 \in W$ tenemos que $0 = \mu_0(v_i) \in (a_i, b_i)$ y así

$$a_i < 0 < b_i, \ \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Denotando entonces $b = \min\{b_i : i = 1, \cdots, n\}$ y

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U[v_i, (-1, b)],$$

se cumple que $\mu_0 \in U \subset W \subset \mathcal{P} \setminus \langle X \rangle_{\equiv}$.

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión densa en X y definamos la aplicación $\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in V$ es

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_{m+i} x_i\right\|$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $v_1, \cdots, v_n \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}\{e_i : 1 \leq i \leq m\}$.

De forma análoga a lo visto en muchas demostraciones del Capítulo 3 se obtiene que $\mu \in \mathcal{P}$ y $X_\mu \equiv X$, luego $\mu \in \langle X \rangle_{\equiv}$.

Sin embargo, observemos que por la forma de elegir m se tiene que $\mu(v_i) = 0$ para cada $i = 1, \cdots, n$, luego $\mu \in U \subset \mathcal{P} \setminus \langle X \rangle_{\equiv}$ y obtenemos la contradicción buscada. ■

Proposición 4.1.3. *La clase de isometría de ℓ_2 es cerrada en $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$.*

Demostración:

Los espacios de Hilbert se caracterizan entre los espacios de Banach por cumplir la ley del paralelogramo (ver [11, Teo. 1.4.6]).

Es decir, dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ existe un producto escalar en X que induce la norma si, y solo si, para cada par de puntos $x, y \in X$ se satisface

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right]. \tag{4.1}$$

La relación dada en (4.1) se conoce como la ley del paralelogramo y veamos en primer lugar que una norma en X satisface dicha ley si, y solo si, la satisface en un conjunto denso.

Efectivamente, sea $Y \subset X$ denso y tal que se satisface (4.1) para cada par de puntos de Y. Entonces, dados $x, y \in X$, por la densidad de Y, existen sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenidas en Y que convergen a x e y respectivamente y por la continuidad de la norma

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\|x_n+y_n\|^2 + \|x_n-y_n\|^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\left[\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2\right]\right) = \\ &= 2\left[\|x\|^2 + \|y\|^2\right].\end{aligned}$$

Supongamos ahora que es $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ o $\mu \in \mathcal{B}$ tal que

$$\mu(v+w)^2 + \mu(v-w)^2 = 2\left[\mu(v)^2 + \mu(w)^2\right], \ \forall v, w \in V.$$

Como $\overline{V}$ es denso en X_μ y dado $\bar{v} \in \overline{V}$ es $\hat{\mu}(\bar{v}) = \mu(v)$, tenemos por lo anterior que $\hat{\mu}$ satisface la ley del paralelogramo y con ello que X_μ es un espacio de Hilbert.

En definitiva, dado $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ o $\mu \in \mathcal{B}$ tenemos que X_μ es de Hilbert si, y solo si, μ satisface la ley del paralelogramo en V.

Por otra parte, como X_μ es de dimensión infinita y separable, tenemos de nuevo por el teorema de Riesz-Fischer que X_μ es un espacio de Hilbert si, y solo si, es isométricamente isomorfo a ℓ_2.

Con todo, si denotamos por $\langle \ell_2 \rangle_\equiv^{\mathcal{I}}$ la clase de isometría de ℓ_2 en $\mathcal{I}$ con $\mathcal{I} \in \{\mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}\}$, tenemos que

$$\langle \ell_2 \rangle_\equiv^{\mathcal{I}} = \bigcap_{(v,w) \in V^2} F_{v,w}$$

siendo

$$F_{v,w} = \left\{\mu \in \mathcal{I} : \mu(v+w)^2 + \mu(v-w)^2 = 2\left[\mu(v)^2 + \mu(w)^2\right]\right\}.$$

Para finalizar la demostración bastará ver que $F_{v,w}$ es cerrado en $\mathcal{I}$ para cada $(v, w) \in V^2$.

Sin más, como $\mathcal{I}$ es un espacio metrizable basta demostrar que si es $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión en $F_{v,w}$ convergente a cierto $\mu \in \mathcal{I}$, entonces $\mu \in F_{v,w}$.

Por las propiedades de la topología producto, sabemos que $\mu_n(x) \longrightarrow \mu(x)$ para cada $x \in V$ y como

$$\mu_n(v+w)^2 + \mu_n(v-w)^2 = 2\left[\mu_n(v)^2 + \mu_n(w)^2\right], \ \forall n \in \mathbb{N},$$

tomando límites se tiene que

$$\mu(v+w)^2 + \mu(v-w)^2 = 2\left[\mu(v)^2 + \mu(w)^2\right]$$

y efectivamente $\mu \in F_{v,w}$ lo que concluye la demostración. ■

Continuando con el estudio de la clase de isometría de ℓ_2, podemos preguntarnos ahora si la propiedad de ser cerrada en $\mathcal{P}_\infty$ o en $\mathcal{B}$ la caracteriza. Es decir, buscamos ver si dado un espacio de Banach separable X tal que su clase de isomorfía es cerrada, se cumple que X es isométricamente isomorfo a ℓ_2.

Como veremos en el Teorema 4.1.7 la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa, pero para demostrarlo precisamos previamente de los siguientes resultados.

Teorema 4.1.4. (Teorema de Dvoretzky) *Existe una constante $c > 0$ que satisface la siguiente propiedad.*

Sea X un espacio normado de dimensión finita n, $0 < \varepsilon < 1/3$ y $k \in \mathbb{N}$ cumpliendo

$$k \leq c \log(n) \frac{\varepsilon^2}{|\log(\varepsilon)|}.$$

Entonces, existe X_0 un subespacio de X de dimensión k y un isomorfismo $T : X_0 \longrightarrow \ell_2^k$ tal que $\|T\| < 1 + \varepsilon$ y $\|T^{-1}\| = 1$.

La demostración a este teorema es altamente no trivial pero una demostración del mismo puede hallarse en [1, Thm. 13.3.7].

Corolario 4.1.5. *El espacio de Hilbert ℓ_2 es finitamente representable en cualquier espacio de Banach X de dimensión infinita.*

Demostración:

Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita cualquiera, F un subespacio de dimensión k de ℓ_2 y $\varepsilon > 0$.

Debemos ver que existe X_0 un subespacio de X que es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a F.

Como F es un subespacio de dimensión finita de ℓ_2 tenemos que es un espacio de Hilbert, y por tanto existe un isomorfismo isométrico $S : \ell_2^k \longrightarrow F$ (ver [11, Cor. 1.12.24]).

Ahora, tomemos $0 < \delta < \min\{\varepsilon, 1/3\}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \leq c\log(n)\frac{\delta^2}{|\log(\delta)|}$$

siendo $c > 0$ la constante dada por el teorema de Dvoretzky.

Entonces, por dicho teorema[4] existe X_0 un subespacio de X de dimensión k y $T : X_0 \longrightarrow \ell_2^k$ un isomorfismo tal que $\|T\| < 1+\delta$ y $\|T^{-1}\| = 1$.

Con todo, definiendo $L = S \circ T : X_0 \longrightarrow F$ tenemos que es un isomorfismo entre ambos espacios y además, dado $x \in X_0$

$$\|L(x)\|_F \leq \|S \circ T\| \, \|x\|_X \leq \|S\| \, \|T\| \, \|x\|_X \leq (1+\delta) \, \|x\|_X \leq (1+\varepsilon) \, \|x\|_X \, ,$$

$$\|L(x)\|_F \geq \frac{\|x\|_X}{\|(S\circ T)^{-1}\|} \geq \frac{\|x\|_X}{\|T^{-1}\| \, \|S^{-1}\|} = \|x\|_X \geq (1+\delta)^{-1} \, \|x\|_X \geq (1+\varepsilon)^{-1} \, \|x\|_X \, .$$

Con todo, queda demostrado que X_0 y F son $(1+\varepsilon)$-isomorfos y concluimos la demostración. ■

Lema 4.1.6. *Si X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita e $\mathcal{I}$ cualquiera de los espacios $\mathcal{P}_\infty$ o $\mathcal{B}$, entonces se cumple que*

$$\langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \right).$$

Demostración:

Por el Corolario 4.1.5 sabemos que cualquier espacio isométricamente isomorfo a ℓ_2 es finitamente representable en X y por la Proposición 3.2.12

$$\langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es finitamente representable en } X\} = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \right)$$

tal como queríamos demostrar. ■

Podemos ahora si demostrar la caracterización del espacio ℓ_2 deseada.

[4] Basta aplicarlo a Y un subespacio cualquiera de X de dimensión n.

Teorema 4.1.7. *El espacio de Hilbert ℓ_2 se caracteriza como el único espacio de Banach separable de dimensión infinita cuya clase de isometría es cerrada en $\mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I}$ cualquiera de los espacios $\mathcal{P}_\infty$ o $\mathcal{B}$.*

Demostración:

Por la Proposición 4.1.3 sabemos que $\langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$ es cerrado en $\mathcal{I}$, con lo que resta ver que si es X un espacio de Banach separable de dimensión infinita tal que $\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$ es cerrado, entonces X es isométricamente isomorfo a ℓ_2.

Sin más, si $\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}\right)$ por el Lema 4.1.6 tenemos que $\langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$, luego tomando $\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$ se cumple que $\mu \in \langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$ y con ello, $\ell_2 \equiv X_\mu \equiv X$. ■

Pasemos ahora a estudiar la clase de isomorfía de ℓ_2 para lo cual, tal como hemos hecho con las clases de isometría, veamos primero un resultado general en cierto modo análogo a la Proposición 4.1.1.

Proposición 4.1.8. *Si X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita e $\mathcal{I} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}\}$, entonces $\langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ no es cerrada en $\mathcal{I}$.*

Demostración:

Observemos que basta demostrar que $\langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ es denso en $\mathcal{I}$.

Efectivamente, si esto es cierto y fuera la clase de isomorfía cerrada entonces se cumple que

$$\langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} = \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}\right) = \mathcal{I}.$$

Por tanto, tomando Y un espacio de Banach separable de dimensión infinita cualquiera no isomorfo a X tenemos que $\langle Y \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} \subset \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$, pero esto implica que $Y \simeq X$ y tenemos pues una contradicción.

Por otra parte, para probar la densidad de la clase de isomorfía basta ver que todo espacio de Banach separable es finitamente representable en $\langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$, pues en este caso por la Proposición 3.2.12 tendríamos que

$$\mathrm{cl}_{\mathcal{I}}\left(\langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}\right) = \left\{\mu \in \mathcal{I} : X_\mu \text{ es finitamente representable en } \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}\right\} = \mathcal{I}$$

lo que prueba la densidad.

Realmente vamos a demostrar algo más fuerte que implica la representabilidad finita, pues veremos que dado W un espacio de Banach separable y F un subespacio de dimensión finita de W, existe $\mu \in \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ y E un subespacio de X_μ tal que F y E son isométricamente isomorfos.

Sin más, como X tiene dimensión infinita y F tiene dimensión finita, el Corolario B.12 nos asegura la existencia de dos subespacios cerrados E, Y de X tales que E es isomorfo a F y X es suma directa topológica[5] de E e Y.

[5] *Recordemos que si X es un espacio vectorial e Y, Z son dos subespacios de X, se dice que X es **suma directa algebraica** de Y y Z, lo cual se representa por $X = Y \oplus Z$ si se cumplen:*

(i) *Cada elemento $x \in X$ se puede expresar como $x = y + z$ para ciertos $y \in Y, z \in Z$;*

(ii) $Y \cap Z = \{0_X\}$.

Las condiciones anteriores garantizan además que la expresión de un elemento de X como suma de

Así, si definimos el espacio de Banach $Z = F \times Y$ con la norma usual, tenemos que

$$Z = F \times Y \simeq E \times Y \simeq X.$$

Además, si definimos $\overline{F} = F \times \{0_Y\}$, es claro que este subespacio cerrado de Z es isométricamente isomorfo a F.

Con todo, se cumple que

$$\langle Z \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \langle Z \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} = \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$$

con lo que tomando $\mu \in \langle Z \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}}$ cualquiera se tiene que $\mu \in \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$.

Ahora, si es $T : Z \longrightarrow X_\mu$ un isomorfismo isométrico entre ambos, basta definir $E = T\left(\overline{F}\right)$ y observamos que $\mu \in \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ y E es un subespacio de X_μ tal que $E \equiv \overline{F} \equiv F$, justo como queríamos demostrar. ■

La proposición anterior puede generalizarse (ver [12, Prop. 4.6]) mostrando que, salvo quizá para la clase de isomorfía $\langle \mathbb{G} \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ donde $\mathbb{G}$ es un espacio de Banach conocido como espacio de Gurariĭ, ninguna clase de isomorfía puede ser tampoco G_δ en $\mathcal{I}$.

En particular tenemos pues que la clase de isomorfía de ℓ_2 no puede ser G_δ, con lo que el siguiente paso lógico es preguntarse si será entonces un conjunto F_σ, lo cual es precisamente lo que demostraremos a continuación.

Para abordar la prometida demostración debemos introducir antes la noción de tipo y cotipo de un espacio de Banach, y un famoso resultado al respecto conocido como teorema de Kwapién.

Definición 4.1.2. *Dado X un espacio de Banach decimos que tiene **tipo p** para algún $1 \leq p \leq 2$, si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier conjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^n$ de elementos de X se cumple que*

$$\left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

elementos de Y y Z es única.

*Si además X es un espacio normado, se dice que X es **suma directa topológica** de Y y Z si es suma directa algebraica de dichos subespacios y la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & (Y \times Z, |||\cdot|||) & \longrightarrow & (X, \|\cdot\|_X) \\ & (y,z) & \longmapsto & y+z \end{array}$$

es un isomorfismo.
*Diremos que un subespacio cerrado $Y \subset X$ está **complementado** si existe otro subespacio cerrado Z de X tal que X es suma directa topológica de Y y Z.*

La norma $|||\cdot|||$ es la norma estándar para el producto cartesiano de dos espacios normados.
Es decir, si X e Y son dos espacios normados, se define la norma en $X \times Y$

$$|||(x,y)||| = \|x\|_X + \|y\|_Y, \ \forall x \in X, y \in Y.$$

Con dicha norma $X \times Y$ es un espacio normado (el cual además es de Banach si ambos espacios lo son) cuya topología asociada es la topología producto.

De igual modo, decimos que X tiene ***cotipo q*** *para algún $2 \leq q < \infty$, si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier conjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^n$ de elementos de X se cumple que*

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq C\left(\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q}.$$

Teorema 4.1.9. (Kwapién) *Un espacio de Banach X tiene tipo y cotipo 2 si, y solo si, X es isomorfo a algún espacio de Hilbert.*

Como ocurría con el teorema de Dvoretzky, la demostración del teorema de Kwapién es demasiado compleja para incluirla en el texto pero su demostración puede consultarse en [1, Thm. 7.4.1].

Con esta poderosa herramienta, podemos ya demostrar que la clase de isomorfía de ℓ_2 es un conjunto F_σ.

Proposición 4.1.10. *La clase de isomorfía de ℓ_2 es un conjunto F_σ en $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$.*

Demostración:

Como hasta ahora, denotemos por $\mathcal{I}$ cualquiera de los espacios $\mathcal{P}_\infty$ o $\mathcal{B}$.

Observemos que $\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ si, y solo si, X_μ es isomorfo a ℓ_2 y veamos que esto es equivalente a que X_μ tenga tipo y cotipo 2.

Efectivamente, si X_μ tiene tipo y cotipo 2 por el teorema de Kwapién será isomorfo a un espacio de Hilbert, y puesto que es separable concluimos que será isomorfo a ℓ_2.

Recíprocamente si X_μ es isomorfo a ℓ_2, dado que el tipo y cotipo son invariantes por isomorfismos (ver [1, Remark 6.2.11]) y nuevamente por el teorema de Kwapién ℓ_2 tiene tipo y cotipo 2, concluimos que X_μ también tiene tipo y cotipo 2.

Así, tenemos que $\mu \in \langle \ell_2 \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ si, y solo si, X_μ tiene tipo y cotipo 2, luego si, y solo si, existen constantes $C, D > 0$ tales que para cualquier conjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X_\mu$ se cumple que

$$\frac{1}{D^2}\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right)^2 \leq C^2\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2. \tag{4.2}$$

Veamos ahora como simplificar (4.2).

En primer lugar, es claro que (4.2) es equivalente a la existencia de cierto $M \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X_\mu$ se cumple que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2. \tag{4.3}$$

Por otra parte, gracias a la densidad de $\overline{V}$ en X_μ, veamos que (4.3) es equivalente a la existencia de cierto $M \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier conjunto finito $\{v_i\}_{i=1}^n \subset V$ se cumple que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \mu(v_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n}\mu\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^n \mu(v_i)^2. \tag{4.4}$$

Efectivamente, como $\overline{V} \subset X_\mu$ y para cada $v \in V$ se tiene que $\mu(v) = \hat{\mu}\left(v + N_\mu\right)$ la implicación de (4.3) en (4.4) es clara.

Recíprocamente, si es $\{x_i\}_{i=1}^n$ un subconjunto finito cualquiera de X_μ, como $\overline{V}$ es denso en X_μ, existen sucesiones $\{v_i^j\}_{j=1}^\infty \subset V$ tales que $v_i^j + N_\mu \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$.

Por tanto, si (4.4) es cierta, considerando nuevamente que $\mu(v) = \hat{\mu}\left(v + N_\mu\right)$ para cada $v \in V$, tenemos entonces que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(v_i^j + N_\mu)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \hat{\mu}\left(\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i^j\right) + N_\mu\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(v_i^j + N_\mu)^2, \ \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Por la continuidad de $\hat{\mu}$ en X_μ, tomando límites cuando j tiende a infinito obtenemos finalmente que

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \hat{\mu}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^n \hat{\mu}(x_i)^2$$

con lo que (4.3) es cierto.

En definitiva, si denotamos por W la familia de subconjuntos finitos no vacíos de V y definimos para cada $M \in \mathbb{N}$ y $v = \{v_i\}_{i=1}^n \in W$ los conjuntos

$$F_v^M = \left\{\mu \in \mathcal{I} : \frac{1}{M}\sum_{i=1}^n \mu(v_i)^2 \leq \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in\{-1,1\}^n} \mu\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i v_i\right)^2 \leq M\sum_{i=1}^n \mu(v_i)^2\right\},$$

hemos obtenido que

$$\langle \ell_2\rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} = \bigcup_{M\in\mathbb{N}}\bigcap_{v\in W} F_v^M.$$

Ahora, de forma completamente análoga a la demostración de que los conjuntos $F_{v,w}$ eran cerrados en la Proposición 4.1.3, se ve que para cada $M \in \mathbb{N}$ y $v \in W$ los conjuntos F_v^M son cerrados en $\mathcal{I}$, con lo que efectivamente podemos concluir que $\langle \ell_2\rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$ es un conjunto F_σ en $\mathcal{I}$. ■

Para finalizar la sección veremos que, de forma análoga a lo visto para las clases de isometría, ℓ_2 se caracteriza por ser el único espacio de Banach separable de dimensión infinita cuya clase de isomorfía es F_σ en $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$.

Para demostrarlo precisamos de un nuevo concepto como es el de bases de Markushevich y de ciertos resultados de existencia asociados a ellos que exponemos brevemente a continuación.

Definición 4.1.3. *Sea X un espacio de Banach e I un conjunto no vacío.*

Una familia $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ de pares de $X \times X^*$ se dice que es un ***sistema biortogonal*** *en $X \times X^*$ si para cada par de índices $i, j \in I$ se cumple que $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$ siendo $\delta_{i,j}$ la delta de Kronecker.*

Una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de X se denomina ***sistema fundamental*** *en X si*

$$X = \overline{\operatorname{span}}\{x_i : i \in I\}.$$

Un sistema biortogonal $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ en $X \times X^*$ se dice ***fundamental*** *si $\{x_i\}_{i\in I}$ es un sistema fundamental en X.*

Un sistema biortogonal $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ en $X \times X^*$ se dice que es ***total*** *si al considerar en X^* la topología débil-* se cumple que*

$$X^* = \overline{\operatorname{span}}\{x_i^* : i \in I\}.$$

Por último, una ***base de Markushevich*** *o* ***M-base*** *de X es un sistema biortogonal, fundamental y total en $X \times X^*$.*

Aunque en la demostración sobre la caracterización de la clase de isomorfía de ℓ_2 emplearemos el concepto de M-base, la propiedad de ser total no será necesaria en ningún momento. Por tanto, no entraremos en detalles sobre recordar qué es la topología débil-* y simplemente relegamos al lector interesado a la Sección 3.2 y al Capítulo 4 de [34].

Para la demostración mencionada necesitaremos los siguientes resultados, cuyas demostraciones pueden consultarse en [18, Fact 1.5, Thm. 1.22, Thm. 1.45] respectivamente.

Proposición 4.1.11. *Sea X un espacio de Banach, I un conjunto no vacío y $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ un sistema biortogonal fundamental de $X \times X^*$. Entonces, dado $A \subset I$ finito y $B = I \setminus A$, se cumple que*

$$X = \operatorname{span}\{x_i : i \in A\} \oplus \overline{\operatorname{span}}\{x_i : i \in B\}$$

donde la suma es directa topológica.

Teorema 4.1.12. (Markushevich) *Todo espacio de Banach separable tiene una M-base numerable.*

Teorema 4.1.13. (Gurariĭ, Kadets) *Sea X un espacio de Banach separable, Y un subespacio cerrado de X y $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^\infty$ una M-base de Y. Entonces, existen sucesiones $\{z_j\}_{j=1}^\infty \subset X$, $\{g_j\}_{j=1}^\infty \subset X^*$ y extensiones de cada f_i (que por abuso de notación denotamos nuevamente por f_i) a funcionales continuos en X, de modo que*

$$\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^\infty \cup \{(z_j, g_j)\}_{j=1}^\infty$$

es una M-base de X.

Una última observación importante es que si $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in I}$ es una M-base de un espacio de Banach X, entonces el conjunto $\{x_i\}_{i\in I}$ es linealmente independiente en X.

Efectivamente, sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ cualquier subconjunto finito de $\{x_i\}_{i\in I}$ y supongamos que existen ciertos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tales que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_X.$$

Aplicando entonces a la igualdad anterior cada x_i^* asociado obtenemos que

$$\alpha_i = x_i^*(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) = 0,\ \forall i = 1, \cdots, n$$

lo que prueba la independencia lineal.

Con todo, podemos ya demostrar el otro teorema de caracterización de ℓ_2 prometido.

Teorema 4.1.14. *El espacio de Hilbert ℓ_2 se caracteriza como el único espacio de Banach separable de dimensión infinita cuya clase de isomorfía es un conjunto F_σ en $\mathcal{I}$, siendo $\mathcal{I} \in \{\mathcal{P}_\infty, \mathcal{B}\}$.*

Demostración:

Ya vimos en la Proposición 4.1.10 que la clase de isomorfía de ℓ_2 es un conjunto F_σ en $\mathcal{I}$, con lo que resta ver que si es X un espacio de Banach separable de dimensión infinita no isomorfo a ℓ_2, entonces su clase de isomorfía no es un conjunto F_σ en $\mathcal{I}$.

Antes de comenzar con la demostración, introduzcamos cierta notación.

Denotaremos por $\mathcal{T}_n$ el subconjunto de $\mathbb{N}^n$ formado por todas las n-tuplas cuyas coordenadas son todas distintas y por $\mathcal{T}$ la unión de todos estos conjuntos, es decir,

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{T}_n$$

donde $\mathcal{T}_0 = \{\varnothing\}$.

Dado ahora $\gamma \in \mathcal{T}$ denotaremos la longitud de la tupla por $|\gamma|$ y su rango por $\operatorname{rng}(\gamma)$.

Además, si γ' es otro elemento de $\mathcal{T}$ diremos que $\gamma \subset \gamma'$ si $|\gamma| \leq |\gamma'|$ y $\gamma'(i) = \gamma(i)$ para cada $1 \leq i \leq |\gamma|$.

Por último, definiremos para cada $\gamma \in \mathcal{T}$ y $\mu \in \mathcal{I}$ el conjunto

$$M_\mu^\gamma = \left\{ \nu \in \mathcal{I} : \nu\left(\sum_{i=1}^{|\gamma|} a_i e_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{|\gamma|} a_i e_{\gamma(i)}\right),\ \forall (a_i)_{i=1}^{|\gamma|} \in \mathbb{Q}^{|\gamma|} \right\}.$$

Supongamos pues, por reducción al absurdo, que existe X un espacio de Banach separable de dimensión infinita tal que $X \not\simeq \ell_2$ pero existe una sucesión de cerrados $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{I}$ tales que

$$\langle X \rangle_\simeq^{\mathcal{I}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Comencemos viendo la siguiente afirmación.

Afirmación 1: Para cada $\mu \in \mathcal{I}$ tal que

$$\langle X_\mu \rangle_\equiv^{\mathcal{I}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

existe un $\gamma \in \mathcal{T}$ y cierto $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_\mu^{\gamma'} \cap F_m \neq \varnothing$$

para todo $\gamma' \in \mathcal{T}$ tal que $\gamma \subset \gamma'$.

Demostración de la Afirmación 1:

Supongamos por reducción que la afirmación no es cierta, es decir, que existe cierto $\mu \in \mathcal{I}$ tal que

$$\langle X_\mu \rangle_\equiv^{\mathcal{I}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n,$$

pero dados $\gamma \in \mathcal{T}$ y $m \in \mathbb{N}$ existe cierto $\gamma' \in \mathcal{T}$ tal que $\gamma \subset \gamma'$ y $M_\mu^{\gamma'} \cap F_m = \varnothing$.
En particular, si $\gamma = \varnothing$ y $m = 1$, se tiene que existe cierto $\gamma' \in \mathcal{T}$ tal que $M_\mu^{\gamma'} \cap F_1 = \varnothing$.
Ahora, si $1 \in \operatorname{rng}(\gamma')$ definimos $\gamma_1 = \gamma'$ y si no es así definimos[6] $\gamma_1 = \gamma'^\frown 1$.
Observamos entonces que $M_\mu^{\gamma_1} \subset M_\mu^{\gamma'}$ luego $M_\mu^{\gamma_1} \cap F_1 = \varnothing$ y que $|\gamma_1| \geq 1$.
Si ahora es $\gamma = \gamma_1$ y $m = 2$, de nuevo existe cierto $\gamma' \in \mathcal{T}$ tal que $\gamma \subset \gamma'$ y $M_\mu^{\gamma'} \cap F_2 = \varnothing$.
Nuevamente, si $2 \in \operatorname{rng}(\gamma')$ definimos $\gamma_2 = \gamma'$ y si no es así definimos $\gamma_2 = \gamma'^\frown 2$.
Observamos ahora que $M_\mu^{\gamma_2} \subset M_\mu^{\gamma'}$ luego $M_\mu^{\gamma_2} \cap F_2 = \varnothing$, que $\gamma_1 \subset \gamma_2$ y que $|\gamma_2| \geq 2$.
Continuando este proceso (rigurosamente, usando el axioma de elección dependiente) podemos construir una sucesión $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{T}$ cumpliendo:

- $|\gamma_n| \geq n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $\gamma_n \subset \gamma_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $n \in \operatorname{rng}(\gamma_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $M_\mu^{\gamma_n} \cap F_n = \varnothing$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definamos ahora la biyección[7] $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $\pi(j) = \gamma_j(j)$, la cual cumple que $\gamma_n \subset \pi$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Definamos también la aplicación $\mu_0 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $\sum_{i=1}^\infty a_i e_i \in V$ es

$$\mu_0\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_{\pi(i)}\right).$$

Es claro por la definición que μ_0 es una pseudonorma en V y además, si consideramos la aplicación $J : c_{00}/N_{\mu_0} \longrightarrow X_\mu$ dada por

$$J\left(\left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\right) + N_{\mu_0}\right) = \left(\sum_{i=1}^\infty a_i e_{\pi(i)}\right) + N_\mu,$$

[6] Recordemos que con el símbolo $\frown$ denotamos la concatenación de sucesiones finitas definida al comienzo de la Subsección 2.1.2.

[7] Veamos que π es efectivamente una biyección que cumple lo deseado.

En primer lugar, observemos que está bien definida pues sabemos que $|\gamma_j| \geq j$.
Además, dado $n \in \mathbb{N}$ si tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $m > |\gamma_n| \geq n$, como $\gamma_i \subset \gamma_m$ para cada $i \leq m$, se tiene que

$$\gamma_n(j) = \gamma_m(j) = \gamma_j(j) = \pi(j), \quad \forall j \leq |\gamma_n|$$

lo que prueba que $\gamma_n \subset \pi$.
Por otra parte, si $i < j$ entonces sabemos que $\gamma_i \subset \gamma_j$ y como $\gamma_j(i) \neq \gamma_j(j)$ pues $\gamma_j \in \mathcal{T}$, se tiene que

$$\pi(i) = \gamma_i(i) = \gamma_j(i) \neq \gamma_j(j) = \pi(j)$$

obteniendo que π es inyectiva.
Por último dado $j \in \mathbb{N}$, como $j \in \operatorname{rng}(\gamma_j)$ y $\gamma_j \subset \pi$, tenemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$j = \gamma_j(i) = \pi(i)$$

lo que prueba la sobreyectividad de π.

se ve de forma análoga a lo visto en varias demostraciones del Capítulo 3 que está bien definida, que es una isometría lineal y que $J(c_{00}/N_{\mu_0})$ es denso en X_μ, con lo que $X_{\mu_0} \equiv X_\mu$.

En particular, esto muestra que $\mu_0 \in \mathcal{P}_\infty$.

Además, si $\mathcal{I} = \mathcal{B}$ tendríamos que $\mu \in \mathcal{B}$ luego

$$0 = \overline{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \overline{\mu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\pi(i)}\right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\pi(i)} = 0_{c_{00}} \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i \in \mathbb{N},$$

demostrando que $\mu_0 \in \mathcal{B}$.

En cualquier caso tenemos pues que $\mu_0 \in \mathcal{I}$.

Aún más, $\mu_0 \in M_\mu^{\gamma_n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ pues dado $(a_i)_{i=1}^{|\gamma_n|} \in \mathbb{Q}^{|\gamma_n|}$ se cumple que

$$\mu_0\left(\sum_{i=1}^{|\gamma_n|} a_i e_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{|\gamma_n|} a_i e_{\pi(i)}\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{|\gamma_n|} a_i e_{\gamma_n(i)}\right).$$

Con todo, como $M_\mu^{\gamma_n} \cap F_n = \varnothing$ para cada $n \in \mathbb{N}$, lo anterior prueba que

$$\mu_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Por otra parte, como $X_{\mu_0} \equiv X_\mu$ tenemos que

$$\mu_0 \in \langle X_\mu \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

y obtenemos finalmente la contradicción buscada. ■

Como estamos suponiendo que $X \not\simeq \ell_2$, por el *problema del espacio homogéneo*[8] tenemos que debe existir Y, un subespacio cerrado de dimensión infinita de X, tal que Y no es isomorfo a X.

Ahora, como por la Proposición 1.1.11 Y es un espacio de Banach separable, el Teorema 4.1.12 asegura la existencia de una M-base numerable de Y y por el Teorema 4.1.13 sabemos que esta puede extenderse a una M-base numerable de X.

Es decir, podemos suponer que existe una M-base numerable $\{(x_i, x_i^*)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de X y un subconjunto infinito $I \subset \mathbb{N}$ tal que $\{(x_i, x_i^*|_Y)\}_{i\in I}$ es una M-base de Y.

Definamos ahora $\mu : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que dado $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in V$ es

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X.$$

[8] *Un espacio de Banach de dimensión infinita se dice que es* ***homogéneo*** *si es isomorfo a todos sus subespacios cerrados de dimensión infinita.*

Es un resultado básico de análisis funcional que cualquier espacio isomorfo a ℓ_2 es homogéneo (ver [11, Cor. 1.12.28]) y Banach se preguntó en su obra [4] de 1932 si el recíproco también era cierto, es decir, si cualquier espacio homogéneo es isomorfo a ℓ_2. Este enunciado se conoce como el *problema del espacio homogéneo* y aunque su respuesta resultó ser afirmativa, tuvieron que pasar casi 70 años hasta que Gowers lo demostró en sus artículos de 1996 y 2002, [16] y [17].

De la propia definición se obtiene fácilmente que μ es una pseudonorma en V y, teniendo en cuenta que el conjunto $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ es linealmente independiente, se comprueba como ya hemos visto en varias demostraciones del Capítulo 3 que $\bar{\mu}$ es una norma en c_{00}, es decir, que $\mu \in \mathcal{B}$.

Además, utilizando de nuevo las técnicas vistas en el Capítulo 3 se obtiene que $X_\mu \equiv X$.

Por tanto, en cualquier caso tenemos que $\mu \in \mathcal{I}$ y

$$\langle X_\mu \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} = \langle X \rangle_{\equiv}^{\mathcal{I}} \subset \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Por la Afirmación 1 tenemos entonces que existen $\gamma \in \mathcal{T}$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que $M_\mu^{\gamma'} \cap F_m \neq \varnothing$ para cada $\gamma' \in \mathcal{T}$ con $\gamma \subset \gamma'$.

Puesto que I es infinito y $\operatorname{rng}(\gamma)$ es finito, podemos tomar un subconjunto infinito[9] $\tilde{I}$ de I tal que $\left|I \setminus \tilde{I}\right| = |\operatorname{rng}(\gamma) \setminus I|$ e $(I \setminus \tilde{I}) \cap \operatorname{rng}(\gamma) = \varnothing$.

Observemos además que con esta elección se tiene que $\operatorname{rng}(\gamma) \setminus I = \operatorname{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}$ y así

$$\left|\operatorname{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}\right| = \left|I \setminus \tilde{I}\right|. \tag{4.5}$$

Definamos ahora los espacios

$$Z = \operatorname{span}\left\{e_i : i \in \tilde{I} \cup \left(\operatorname{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}\right)\right\} \subset X_\mu,$$
$$W = \operatorname{span}\left\{x_i : i \in \tilde{I} \cup \left(\operatorname{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}\right)\right\} \subset X.$$

Afirmación 2: Si denotamos por $\overline{Z} = \operatorname{cl}_{X_\mu}(Z)$ y $\overline{W} = \operatorname{cl}_X(W)$ se cumple que

$$\left(\overline{Z}, \hat{\mu}\right) \equiv \left(\overline{W}, \|\cdot\|_X\right).$$

<u>Demostración de la Afirmación 2:</u>

Denotemos por $J = \tilde{I} \cup \left(\operatorname{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}\right)$ y sea $f : Z \longrightarrow \overline{W}$ la aplicación lineal dada por $f(e_i) = x_i$ para cada $i \in J$.

Observemos en primer lugar que f es una isometría pues dado $\sum_{i\in J} a_i e_i \in Z$, siendo únicamente una cantidad finita de a_i no nulos, se tiene que

$$\left\| f\left(\sum_{i\in J} a_i e_i\right)\right\|_X = \left\|\sum_{i\in J} a_i x_i\right\|_X = \bar{\mu}\left(\sum_{i\in J} a_i e_i\right).$$

Por el Teorema B.6 tenemos entonces que existe una única extensión $F : \overline{Z} \longrightarrow \overline{W}$ de f tal que sigue siendo una isometría lineal y por tanto, basta ver que F es sobreyectiva para concluir que $\overline{Z} \equiv \overline{W}$.

En primer lugar, observemos que por la linealidad de f tenemos que $f(Z) = W$.

Por tanto, si es $x \in \overline{W}$ y $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subset W$ tal que $x^n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$, existe $\{z^n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ una sucesión tal que $f(z^n) = x^n$.

[9] Si es $l = |\operatorname{rng}(\gamma) \setminus I|$, basta tomar $i_1, \cdots, i_l \in I \setminus \operatorname{rng}(\gamma)$ y definir $\tilde{I} = I \setminus \{i_1, \cdots, i_l\}$.

Ahora, para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\bar{\mu}(z^n - z^m) = \|f(z^n - z^m)\|_X = \|x^n - x^m\|_X ,$$

y como $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy (por ser convergente) en X, tendremos que $\{z^n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\overline{Z}$.

Como este último espacio es completo, concluimos que existe cierto $z \in \overline{Z}$ tal que $z^n \xrightarrow{\hat{\mu}} z$. Con todo, se cumple por la continuidad de F que

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F(z^n) = \lim_{n\to\infty} f(z^n) = \lim_{n\to\infty} x^n = x$$

y con ello, que efectivamente F es sobreyectiva tal como queríamos ver. ■

Observemos ahora que si denotamos por $J = \tilde{I} \cup \left(\mathrm{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}\right)$ se tiene que $\{(x_i, x_i^*|_{\overline{W}})\}_{i\in J}$ es un sistema biortogonal fundamental en $\overline{W} \times \overline{W}^*$ pues:

- $x_i^*|_{\overline{W}}(x_j) = \delta_{i,j}, \ \ \forall i, j \in J;$
- $\overline{\mathrm{span}}\{x_i : i \in J\} = \mathrm{cl}_{\overline{W}}\left(\mathrm{span}\{x_i : i \in J\}\right) = \mathrm{cl}_X\left(\mathrm{span}\{x_i : i \in J\}\right) \cap \overline{W} = \overline{W}.$

Por tanto, aplicando a este espacio la Proposición 4.1.11 con $A = \mathrm{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}$ obtenemos que

$$\overline{W} = \mathrm{span}\left\{x_i : i \in \mathrm{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}\right\} \oplus \overline{\mathrm{span}}\left\{x_i : i \in \tilde{I}\right\}. \tag{4.6}$$

De igual modo, puesto que $\{(x_i, x_i^*|_Y)\}_{i\in I}$ es un sistema biortogonal fundamental de Y, aplicando la Proposición 4.1.11 con $A = I \setminus \tilde{I}$ obtenemos que

$$Y = \mathrm{span}\left\{x_i : i \in I \setminus \tilde{I}\right\} \oplus \overline{\mathrm{span}}\left\{x_i : i \in \tilde{I}\right\}. \tag{4.7}$$

Con todo, tenemos pues que

$$\overline{Z} \equiv \overline{W} \underset{(4.6)}{\simeq} \mathrm{span}\left\{x_i : i \in \mathrm{rng}(\gamma) \setminus \tilde{I}\right\} \times \overline{\mathrm{span}}\left\{x_i : i \in \tilde{I}\right\} \simeq \mathbb{R}^{\left|\mathrm{rng}(\gamma)\setminus\tilde{I}\right|} \times \overline{\mathrm{span}}\left\{x_i : i \in \tilde{I}\right\} =$$
$$\underset{(4.5)}{=} \mathbb{R}^{\left|I\setminus\tilde{I}\right|} \times \overline{\mathrm{span}}\left\{x_i : i \in \tilde{I}\right\} \simeq \mathrm{span}\left\{x_i : i \in I \setminus \tilde{I}\right\} \times \overline{\mathrm{span}}\left\{x_i : i \in \tilde{I}\right\} \underset{(4.7)}{\simeq} Y.$$

Es decir, hemos probado que $\overline{Z} \simeq Y$ con lo que, en particular, $\overline{Z} \not\simeq X$.

Sea ahora $h : \mathbb{N} \setminus |\gamma| \longrightarrow \tilde{I} \setminus \mathrm{rng}(\gamma)$ una biyección cualquiera y definamos la biyección $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \tilde{I} \cup \mathrm{rng}(\gamma)$ dada por

$$\phi(i) = \begin{cases} \gamma(i) & \text{si} \quad i \leq |\gamma| \\ \\ h(i) & \text{si} \quad i > |\gamma| \end{cases}$$

Definiendo ahora la aplicación $\nu : V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i \in V$

$$\nu\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_{\phi(i)}\right),$$

se observa fácilmente que $\nu \in \mathcal{B}$, luego en cualquier caso, $\nu \in \mathcal{I}$.

Además, tal como ya se ha visto en otras demostraciones se prueba que $X_\nu \equiv \overline{Z}$, con lo que en particular obtenemos que $X_\nu \not\simeq X$.

Afirmación 3: $\nu \in F_m$.

Observemos que tras demostrar la Afirmación 3 el teorema quedará demostrado pues, como $F_m \subset \langle X \rangle_{\simeq}^{\mathcal{I}}$, si $\nu \in F_m$ entonces $X_\nu \simeq X$ obteniendo la contradicción buscada.

Demostración de la Afirmación 3:

Como F_m es cerrado en $\mathcal{I}$ basta ver que $\nu \in \mathrm{cl}_{\mathcal{I}}(F_m)$, es decir, que dado cualquier abierto básico que contiene a ν su intersección con F_m es no vacía.

Sin más, supongamos que

$$\nu \in \bigcap_{i=1}^{n} \left(U[v_i, (a_i, b_i)] \cap \mathcal{I}\right)$$

para ciertos $v_i \in V$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$.

Denotando por $\varepsilon = \min\{\nu(v_i) - a_i, b_i - \nu(v_i) : i = 1, \cdots, n\}$ y

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \left(U[v_i, (\nu(v_i) - \varepsilon, \nu(v_i) + \varepsilon)] \cap \mathcal{I}\right)$$

se tiene que

$$\nu \in U \subset \bigcap_{i=1}^{n} \left(U[v_i, (a_i, b_i)] \cap \mathcal{I}\right),$$

con lo que basta ver que $U \cap F_m \neq \varnothing$.

Es decir, basta ver que existe cierto $\mu' \in F_m$ tal que

$$|\mu'(v_i) - \nu(v_i)| < \varepsilon, \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Sea pues $L \in \mathbb{N}$ tal que $L \geq |\gamma|$ y de modo que $v_1, \cdots, v_n \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{e_i : i \leq L\}$.

Si denotamos por $\varphi = (\phi(1), \cdots, \phi(L))$, como $\gamma \subset \varphi$ y $\varphi \in \mathcal{T}$ (por ser ϕ inyectiva), se tiene que

$$M_\mu^\varphi \cap F_m \neq \varnothing.$$

Sea pues μ' un elemento de dicha intersección.

Entonces, por un lado es claro que $\mu' \in F_m$ y por otro, como $\mu' \in M_\mu^\varphi$, tenemos que para cualquier elemento $\sum_{i=1}^{L} a_i e_i \in \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{e_i : i \leq L\}$ se cumple que

$$\mu'\left(\sum_{i=1}^{L} a_i e_i\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{L} a_i e_{\varphi(i)}\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{L} a_i e_{\phi(i)}\right) = \nu\left(\sum_{i=1}^{L} a_i e_i\right).$$

En particular tenemos que $\mu'(v_i) = \nu(v_i)$ para cada $i = 1, \cdots, n$, con lo que μ' es efectivamente la pseudonorma buscada y podemos concluir la demostración. ■

4.2. Otros ejemplos relevantes

Comencemos la sección con un resultado que nos garantiza que, por muy complicada que sea la descripción de un espacio de Banach separable, su clase de isomorfía e isometría siempre podremos clasificarlas dentro de la jerarquía que hemos establecido.

Proposición 4.2.1. *Si Z un espacio de Banach separable entonces su clase de isomorfía e isometría es analítica para cualquiera de las codificaciones estudiadas.*

Demostración:

Sea X un espacio de Banach separable universalmente isométrico y τ cualquier topología admisible sobre X.

Observemos en primer lugar que basta ver que el conjunto

$$\langle Z\rangle_{\simeq}^{SB(X)} = \{F \in SB(X) : F \simeq Z\}$$

es analítico en $SB(X)$.

Efectivamente, teniendo en cuenta el Teorema 2.3.4 y las Proposiciones 3.1.1 y 3.1.6, la topología admisible y el espacio universal X son irrelevantes. Además, si dicho conjunto es analítico en $SB(X)$, por la Proposición 2.3.1 también será analítico

$$\langle Z\rangle_{\simeq}^{SB_\infty(X)} = \{F \in SB_\infty(X) : F \simeq Z\}$$

en $SB_\infty(X)$.

Por otra parte, si es $\phi : \mathcal{P} \longrightarrow SB(X)$ la aplicación dada en el Teorema 3.3.7 observemos que

$$\langle Z\rangle_{\simeq}^{\mathcal{P}} = \{\mu \in \mathcal{P} : X_\mu \simeq Z\} = \left\{\mu \in \mathcal{P} : \phi(\mu) \in \langle Z\rangle_{\simeq}^{SB(X)}\right\} = \phi^{-1}\left(\langle Z\rangle_{\simeq}^{SB(X)}\right).$$

El Teorema 2.3.4 nos garantiza entonces que si $\langle Z\rangle_{\simeq}^{SB(X)}$ es analítico, entonces $\langle Z\rangle_{\simeq}^{\mathcal{P}}$ también lo es.

Por último, la Proposición 2.3.1 nos permite concluir, tal como en el caso para $SB_\infty(X)$, que el resultado es también cierto sustituyendo $\mathcal{P}$ por $\mathcal{P}_\infty$ o $\mathcal{B}$.

Para probar lo deseado, consideremos $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ una sucesión de vectores linealmente independientes en Z tales que

$$Z = \overline{\text{span}}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$$

y definamos el conjunto[10]

$$B = \left\{\left(\{x_n\}_{n=1}^\infty, F\right) \in X^{\mathbb{N}} \times SB(X) : x_n \in F, \forall n \in \mathbb{N} \wedge \{x_n\} \sim \{z_n\} \wedge \overline{\text{span}}\{x_n\} = F\right\}.$$

[10] *Dadas dos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{z_n\}_{n=1}^\infty$ en X y Z respectivamente, diremos que son* ***equivalentes****, lo que representamos por $\{x_n\} \sim \{z_n\}$, si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:*

(i) *Existe un isomorfismo $f : \overline{\text{span}}\{x_n\} \longrightarrow \overline{\text{span}}\{z_n\}$ tal que $f(x_n) = z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *Existe $C > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{Q}^k$ se cumple que*

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^k r_i x_i\right\|_X \leq \left\|\sum_{i=1}^k r_i z_i\right\|_Z \leq C\left\|\sum_{i=1}^k r_i x_i\right\|_X.$$

Afirmación 1: El conjunto B pertenece a la clase Π_3^0 en $X^{\mathbb{N}} \times SB(X)$, luego es un conjunto de Borel.

Demostración de la Afirmación 1:

Observemos que B es la intersección de los conjuntos

$$B_1 = \left\{ \left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, F \right) \in X^{\mathbb{N}} \times SB(X) : x_n \in F, \forall n \in \mathbb{N} \right\},$$
$$B_2 = \left\{ \left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, F \right) \in X^{\mathbb{N}} \times SB(X) : \{x_n\} \sim \{z_n\} \right\},$$
$$B_3 = \left\{ \left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, F \right) \in X^{\mathbb{N}} \times SB(X) : F \subset \overline{\operatorname{span}}\{x_n\} \right\}.$$

Por tanto, basta ver que cada uno de ellos pertenece a una clase igual o inferior a Π_3^0.

Comencemos viendo que $\boldsymbol{B_1}$ pertenece a la clase $\boldsymbol{\Pi_2^0}$.

Si denotamos por

$$C = \{(x, F) \in X \times SB(X) : x \in F\},$$

sabemos por el Teorema 2.2.5 y lo dicho tras la Proposición 3.1.1 que es un conjunto Π_2^0 en $X \times SB(X)$.

Observemos además que

$$(\{x_n\}, F) \in B_1 \Leftrightarrow x_n \in F,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_n, F) \in C,\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \{(x_n, F)\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} C.$$

Por tanto, definiendo

$$f : X^{\mathbb{N}} \times SB(X) \longrightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} (X \times SB(X))$$

dada por

$$f(\{x_n\}, F) = \{(x_n, F)\}_{n=1}^{\infty},$$

tenemos que

$$B_1 = f^{-1} \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} C \right).$$

Si vemos entonces que f es continua, puesto que $\prod C$ es un conjunto[11] Π_2^0 en $\prod (X \times SB(X))$, podemos concluir que efectivamente B_1 es un conjunto Π_2^0 en $X^{\mathbb{N}} \times SB(X)$.

---

[11] Como $C \in \Pi_2^0(X \times SB(X))$ tenemos que será la intersección de una sucesión $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ de abiertos en $X \times SB(X)$, y así

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} C = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \right) = \bigcap_{m=1}^{\infty} \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} A_m \right).$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, el producto $\prod A_m$ es un conjunto Π_2^0 en $\prod (X \times SB(X))$ pues

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} A_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{n \in \mathbb{N}} D_{k,n} \right),$$

donde $D_{k,n}$ es A_m si $n = k$ y $X \times SB(X)$ en otro caso.

Así, $\prod C$ es intersección numerable de conjuntos Π_2^0 y por tanto, un conjunto Π_2^0.

Para ver pues que f es continua, por las propiedades de la topología producto, basta ver que $\pi_m \circ f$ es continua para cada proyección π_m de $\prod(X \times SB(X))$.

Observemos que dado $(\{x_n\}, F) \in X^{\mathbb{N}} \times SB(X)$, si denotamos por δ_i las proyecciones para $X^{\mathbb{N}} \times SB(X)$, por ρ_k la proyecciones en $X^{\mathbb{N}}$ y por I la identidad en $SB(X)$, se cumple que

$$(\pi_m \circ f)(\{x_n\}, F) = \pi_m\left(\{(x_n, F)\}_{n=1}^{\infty}\right) = (x_m, F) = ((\rho_m \circ \delta_1)(\{x_n\}, F), (I \circ \delta_2)(\{x_n\}, F)).$$

Por tanto, como $\rho_m \circ \delta_1$ e $I \circ \delta_2$ son continuas, obtenemos que efectivamente $\pi_m \circ f$ es continua y con ello lo es f como queríamos ver.

A continuación, veamos que $\boldsymbol{B_2}$ pertenece a la clase $\boldsymbol{\Sigma_2^0}$.

Continuando con la notación de δ_i para las proyecciones de $X^{\mathbb{N}} \times SB(X)$ comencemos observando que

$$B_2 = \delta_1^{-1}\left(\left\{\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} : \{x_n\} \sim \{z_n\}\right\}\right).$$

Entonces, como δ_1 es continua, basta ver que el conjunto

$$B_2' = \left\{\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} : \{x_n\} \sim \{z_n\}\right\}$$

pertenece a la clase Σ_2^0 de $X^{\mathbb{N}}$.

Observemos que, por la definición de equivalencia de sucesiones, $\{x_n\} \in B_2'$ si, y solo si, existe un $C \in \mathbb{Q}^+$ tal que para cualquier natural k y cualquier vector $r = (r_1, \cdots, r_k) \in \mathbb{Q}^k$ se cumple que

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\right\|_X \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} r_i z_i\right\|_Z \leq C\left\|\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\right\|_X.$$

Por tanto, definiendo para cada $C \in \mathbb{Q}^+$, $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{Q}^k$ los conjuntos cerrados

$$E_{C,k,r} = \left\{\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} : \frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\right\|_X \leq \left\|\sum_{i=1}^{k} r_i z_i\right\|_Z \leq C\left\|\sum_{i=1}^{k} r_i x_i\right\|_X\right\},$$

tenemos que

$$B_2' = \bigcup_{C \in \mathbb{Q}^+} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{r \in \mathbb{Q}^k} E_{C,k,r}$$

y efectivamente pertenece a la clase Σ_2^0 de $X^{\mathbb{N}}$.

Para terminar, veremos que $\boldsymbol{B_3}$ pertenece a la clase $\boldsymbol{\Pi_3^0}$.

Sea $\{f_p\}_{p=1}^{\infty}$ la sucesión de funciones continuas del Teorema 3.1.4 y observemos que

$$\begin{aligned}(\{x_n\}, F) \in B_3 \Leftrightarrow F \subset \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow \text{cl}_X\left(\{f_p(F) : p \in \mathbb{N}\}\right) \subset \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f_p(F) \in \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\},\ \forall p \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Además, por la definición de clausura, la última expresión es equivalente a que para cada $p \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existan ciertos $m \in \mathbb{N}$ y $q = (q_1, \cdots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tales que

$$\left\|f_p(F) - \sum_{i=1}^{m} q_i x_i\right\|_X \leq \varepsilon.$$

Denotemos pues para cada $p \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, $m \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{Q}^m$ los conjuntos

$$E_{p,\varepsilon,m,q} = \left\{ \left(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, F \right) \in X^{\mathbb{N}} \times SB(X) : \left\| f_p(F) - \sum_{i=1}^{m} q_i x_i \right\|_X \leq \varepsilon \right\}.$$

Entonces, por la continuidad de las funciones f_p y de la norma en X, se ve fácilmente que los conjuntos $E_{p,\varepsilon,m,q}$ son cerrados y con ello, para cada $p \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ los conjuntos

$$E_{p,\varepsilon} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^m} E_{p,\varepsilon,m,q}$$

son Σ_2^0 en $X^{\mathbb{N}} \times SB(X)$.
Por las equivalencias vistas al comienzo tenemos finalmente que

$$B_3 = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} E_{p,\varepsilon},$$

con lo que efectivamente

$$B_3 \in \Pi_3^0(X^{\mathbb{N}} \times SB(X))$$

y podemos concluir la demostración. ■
Si denotamos entonces la proyección sobre $SB(X)$ por π y vemos que

$$\pi(B) = \langle Z \rangle_{\simeq}^{SB(X)},$$

por el Teorema 2.3.2 concluimos que efectivamente $\langle Z \rangle_{\simeq}^{SB(X)}$ es analítico en $SB(X)$.
Comencemos viendo que

$$\langle Z \rangle_{\simeq}^{SB(X)} \subset \pi(B).$$

Si $F \in \langle Z \rangle_{\simeq}^{SB(X)}$, entonces existe $f : Z \longrightarrow F$ un isomorfismo y podemos definir la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ como

$$x_n = f(z_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esta sucesión cumple:

- $x_n \in F$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
- Como f es lineal se tiene que

  $$\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{span}\{f(z_n) : n \in \mathbb{N}\} = f\left(\operatorname{span}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}\right),$$

  y como también es un homeomorfismo entre los espacios Z y F,

  $$\overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{cl}_F\left(f\left(\operatorname{span}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}\right)\right) = f\left(\overline{\operatorname{span}}\{z_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = f(Z) = F.$$

- Las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ son equivalentes pues la restricción de f a la envoltura lineal cerrada de los z_n es un isomorfismo en su imagen, y por el punto anterior dicha imagen es precisamente la envoltura lineal cerrada de los x_n.

Lo anterior prueba pues que
$$\Big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, F\Big) \in B$$
y con ello que
$$F = \pi\Big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, F\Big) \in \pi(B).$$
Esto prueba la inclusión y para finalizar resta únicamente ver la inclusión contraria.

Sin más, si $F \in \pi(B)$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X tal que $(\{x_n\}, F) \in B$, y por tanto cumpliendo que
$$F = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$
Además, por ser $\{x_n\} \sim \{z_n\}$ también se cumple que
$$\overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \simeq \overline{\text{span}}\{z_n : n \in \mathbb{N}\},$$
con lo que en definitiva
$$F \simeq \overline{\text{span}}\{z_n : n \in \mathbb{N}\} = Z$$
y concluimos que efectivamente $F \in \langle Z \rangle_{\simeq}^{SB(X)}$.

Esto finaliza la demostración para las clases de isomorfía.

Consideremos la siguiente definición:

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X y Z respectivamente, diremos que son isométricamente equivalentes, lo que representamos por $\{x_n\} \equiv \{z_n\}$, si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

(i) *Existe un isomorfismo isométrico $f : \overline{\text{span}}\{x_n\} \longrightarrow \overline{\text{span}}\{z_n\}$ tal que $f(x_n) = z_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$;*

(ii) *Para cada $k \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{Q}^k$ se cumple que*
$$\left\| \sum_{i=1}^{k} r_i x_i \right\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{k} r_i z_i \right\|_Z .$$

Cambiando entonces la condición $\{x_n\} \sim \{z_n\}$ de B por $\{x_n\} \equiv \{z_n\}$, se demuestra de forma completamente análoga que las clases de isometría también son analíticas. ■

Con el resultado anterior en mente, pasamos ahora a enunciar los resultados de clasificación conocidos para los espacios de Banach separables más importantes:

1. Espacios de sucesiones ℓ_p

En la sección anterior hemos estudiado en detalle el espacio de sucesiones ℓ_2, mostrando no tan solo sus clases de isomorfía e isometría, si no caracterizándolo a través de ellas.

La siguiente pregunta lógica sería pues:

¿Qué ocurre con el resto de espacios de sucesiones ℓ_p para $p \in [1,2) \cup (2,\infty)$?

Una primera respuesta a esta pregunta la hallamos en [12, Thm. 6.1] donde los autores prueban que, para $1 \leq p < \infty$ con $p \neq 2$, se tiene que la clase de isometría de los espacios

ℓ_p es un conjunto Π_3^0 tanto en $\mathcal{P}_\infty$ como en $\mathcal{B}$, y que además no pertenece a ninguna clase de Borel inferior.

Si nos fijamos ahora en lo visto en la sección anterior para el caso de ℓ_2, podríamos pensar que la la clase de isomorfía de estos espacios de sucesiones estará un escalón por encima de la de la clase de isometría, es decir, será un conjunto Σ_4^0, Π_4^0 o cercano a este orden.

Sin embargo, en [15, Thm. 4.11] se demuestra que la clase de isomorfía de los espacios ℓ_p para para $1 < p < \infty$ con $p \neq 2$ es un conjunto[12] $\Pi_{\omega+1}^0(SB(X))$.

Se tiene entonces por los Teoremas 2.2.5, 2.2.6 y los resultados vistos en la Sección 3.3, que la clase de isomorfía de ℓ_p para $1 < p < \infty$ con $p \neq 2$ es también un conjunto $\Pi_{\omega+1}^0$ tanto para $\mathcal{P}_\infty$ como para $\mathcal{B}$.

Ahora bien, a diferencia de los resultados para las clases de isometría, este resultado en [15] no se sabe si es óptimo. Es decir, podría ocurrir que $\langle \ell_p \rangle_\simeq$ tenga clase de Borel de ordinal finito, aunque los autores conjeturan que este no es el caso.

Más misterioso aún es el caso para ℓ_1, donde se desconoce tan si quiera si su clase de isomorfía es un conjunto de Borel.

2. El espacio c_0

Otra espacio de Banach separable muy conocido es el espacio c_0 de las sucesiones de números reales convergentes a cero con la norma infinito.

A pesar de sus claras diferencias con los espacios ℓ_p, resulta que en [12, Thm. 6.1] se demuestra también que la clase de isometría de c_0 es un conjunto Π_3^0 en $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$, y que no pertenece a una clase de Borel inferior.

Este resultado nos muestra pues que si bien las normas que definen estos espacios de sucesiones son muy distintas, la complejidad para describirlas resulta ser la misma.

Ahora bien, para el caso de su clase de isomorfía tenemos un escenario muy distinto al de los espacios ℓ_p, pues en [28] se demuestra que la clase de isomorfía de c_0 es un conjunto analítico, no Borel, con respecto a la estructura de Effros-Borel.

Como los conjuntos de Borel para cualquier topología admisible son precisamente los que resultan de considerar la estructura de Effros-Borel en X, tenemos pues que $\langle c_0 \rangle_\simeq$ es un conjunto analítico, no Borel, en $SB_\infty(X)$. También, por lo visto en la Sección 3.3 y el Teorema 2.3.4, concluimos que $\langle c_0 \rangle_\simeq$ es un conjunto analítico, no Borel, en $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$.

3. Los espacios $L_p[0,1]$

Como último ejemplo, consideraremos los espacios de funciones integrables

$$L_p[0,1] = \left\{ f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} : \int_{[0,1]} |f|^p < \infty \right\}$$

donde dos funciones medibles en $[0,1]$, iguales en casi todo punto, se identifican como un mismo elemento.

Observemos que puesto que $L_2[0,1]$ es un espacio de Hilbert separable, será isométricamente isomorfo a ℓ_2 por lo que consideraremos que $p \neq 2$.

Respecto a la clase de isometría de estos espacios, se prueba en [12, Thm. 5.4] que es un conjunto G_δ en $\mathcal{P}_\infty$ y $\mathcal{B}$, y no pertenece a ninguna clase de Borel inferior.

[12] Recordemos que por el Teorema 2.2.6 y las Proposiciones 3.1.1 y 3.1.6, se obtiene esta clase de Borel independientemente de la topología admisible y el espacio universalmente isométrico X considerado.

Paradójicamente, aunque a simple vista la descripción de estos espacios parece más complicada que la de los espacios ℓ_p, resulta que al medir su complejidad de forma precisa bajo las codificaciones que hemos visto a lo largo del texto obtenemos que, bajo estas, los espacios L_p son realmente más simples de describir.

Por otra parte, esto no ocurre si nos fijamos en su clase de isomorfía pues en [9, p. 130] se demuestra que dicha clase no es Borel respecto de la estructura de Effros-Borel, y tal como hemos discutido para el espacio c_0, obtenemos pues que no es un conjunto de Borel para ninguna de las codificaciones tratadas en el texto.

Anexos

A. Axiomas de separación en espacios topológicos

A lo largo del texto se usan diversos resultados que precisan considerar ciertos axiomas de separación sobre los espacios topológicos con los que se trabaja. Por tanto dedicaremos esta sección a recopilar los axiomas de separación más comunes, las relaciones entre estos y los resultados más importantes relativos a ellos.

Puesto que no es el objetivo del texto se omitirán las demostraciones. Para un tratamiento en detalle puede consultarse [23, Cáp. 5] donde se hallan todas los resultados de la sección salvo que se indique una referencia específica.

Definición A.1. *Se dice que un espacio topológico X es:*

(i) ***T_0*** *(o espacio de **Kolmogorov**) si dados dos puntos distintos $x, y \in X$ existe un abierto U en X tal que $x \in U$ e $y \notin U$, o viceversa.*

(ii) ***T_1*** *(o espacio de **Fréchet**) si dados dos puntos $x, y \in X$ existe un abierto U en X tal que $x \in U$ e $y \notin U$.*

(iii) ***T_2*** *(o espacio de **Hausdorff**) si dados dos puntos $x, y \in X$ existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $x \in U$ e $y \in V$.*

(iv) ***T_3*** *(o espacio **regular**) si es T_1 y dados un cerrado $C \subset X$ y un punto $x \in X \setminus C$ existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $x \in U$ y $C \subset V$.*

(v) ***$T_{3\frac{1}{2}}$*** *(o espacio de**Tychonoff** o **completamente regular**) si es T_1 y dados un cerrado $C \subset X$ y un punto $x \in X \setminus C$ existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f|_C \equiv 0$ y $f(x) = 1$.*

(vi) ***T_4*** *(o espacio **normal**) si es T_1 y dados dos cerrados disjuntos $C, D \subset X$ existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $C \subset U$ y $D \subset V$.*

(vii) ***T_5*** *(o espacio **completamente normal**) si es T_1 y dados dos subconjuntos A, B de X cumpliendo que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$ existen abiertos disjuntos U, V en X tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.*

(viii) ***T_6*** *(o espacio **perfectamente normal**) si es normal y todos sus cerrados son conjuntos G_δ.*

La notación T_i proviene de la palabra alemana *Trennung*, que significa separación, y los subíndices indican que todo espacio T_i es un espacio T_{i-1} para $i = 1, \cdots, 6$.

El espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ se introdujo posteriormente pero su notación también es coherente con la vista pues todo espacio T_4 es también $T_{3\frac{1}{2}}$, y todo espacio $T_{3\frac{1}{2}}$ es un espacio T_3.

De hecho, salvo las implicaciones de T_4 a $T_{3\frac{1}{2}}$ y de T_6 a T_5 el resto son inmediatas.

Daremos a continuación algunas caracterizaciones útiles de todos estos tipos de espacios.

Teorema A.1. *Si X es un espacio topológico, se cumplen*[1]*:*

(i) *X es T_0 si, y solo si, para cualquier par de puntos $x, y \in X$ tales que sus conjuntos de entornos son iguales se cumple que $x = y$.*

(ii) *X es T_1 si, y solo si, todo conjunto unipuntual $\{x\}$ con $x \in X$ es cerrado.*

(iii) *X es T_2 si, y solo si, toda red convergente en X tiene límite único si, y solo si, la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ es cerrada en $X \times X$.*

(iv) *X es T_3 si, y solo si, X es T_1 y todo punto tiene una base de entornos cerrados.*

Para los espacios normales existe una caracterización muy útil y empleada en análisis matemático conocida como el lema de Uryshon.

Teorema A.2. *Si X es un espacio topológico T_1 son equivalentes:*

(i) *X es normal;*

(ii) *Si C, U son un cerrado y un abierto, respectivamente, en X tales que $C \subset U$ existe otro abierto V tal que $C \subset V \subset \overline{V} \subset U$;*

(iii) (**Lema de Uryshon**) *Dados C, D cerrados disjuntos en X existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f|C \equiv 0$ y $f|D \equiv 1$.*

La caracterización anterior nos permite, entre otras cosas, demostrar que efectivamente los espacios normales son espacios de Tychonoff.

Teorema A.3. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces, X es completamente normal si, y solo si, todo subespacio de X es normal.*

Muy relacionado también con los espacios normales y el lema de Uryshon se tiene el siguiente teorema de extensión debido a Tietze.

Teorema A.4. (Teorema de extensión de Tietze) *Si X es un espacio normal, C un cerrado de X y $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, entonces existe $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $g|_C = f$.*

Además, si f está acotada entonces se puede tomar g de forma que también esté acotada.

Para introducir las caracterizaciones restantes se precisa de un par de definiciones extra.

[1] La demostración de (iii) puede encontrarse en [37, Thm. 13.7].

Definición A.2. *Si X es un espacio topológico y $A, B \subset X$, se dice que A y B están **perfectamente separados** si existe una función continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = A$ y $f^{-1}(\{1\}) = B$.*

Definición A.3. *Si X es un espacio topológico y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, se define el **cero** de f como el conjunto*

$$Z(f) = \{x \in X : f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\}).$$

*Un subconjunto $A \subset X$ es un **cero** de X si es el cero de alguna función continua.*

*Los complementarios de los ceros se denominan **coceros**.*

Se puede demostrar que si A es un cero de un espacio topológico X entonces existe una función $f : X \longrightarrow [0,1]$ continua tal que $A = Z(f)$, luego en la definición anterior se puede considerar siempre que el rango de las funciones está contenido en $[0,1]$.

Con estas definiciones podemos caracterizar ya a los espacios completamente regulares y perfectamente normales.

Teorema A.5. *Si X es un espacio topológico T_1, entonces son equivalentes:*

(i) *X es perfectamente normal;*

(ii) *Todo cerrado de X es un cero;*

(iii) *Todo abierto de X es un cocero;*

(iv) *Todo par de cerrados disjuntos en X están perfectamente separados.*

Esta última caracterización permite ya demostrar que efectivamente los espacios T_6 son espacios T_5, completando la jerarquía.

Como se ve en el Teorema 2.2.1 todo cerrado de un espacio metrizable es un G_δ y además, es fácil ver que todo espacio metrizable es normal[2].

Por tanto, los espacios metrizables son perfectamente normales y con ello, cumplen cualquiera de los axiomas de separación.

Para finalizar, veamos una caracterización de los espacios completamente regulares que será útil en la demostración de algunos teoremas subsiguientes.

Teorema A.6. *Sea X un espacio topológico T_1. Entonces, X es completamente regular si, y solo si, la familia de sus coceros es una base de X.*

B. Resultados en espacios métricos y normados

Dedicaremos esta sección a enunciar y demostrar resultados específicos sobre espacios metrizables y normados que se utilizan a lo largo del texto, pero son demasiado específicos para incluirlos en el capítulo principal dedicado a estos espacios.

Comencemos viendo la construcción de una compleción de un espacio normado que contenga al propio espacio como subespacio denso.

[2] Una demostración sencilla aparece en [27, Chp. 4, Thm. 10].

Lema B.1. *Si* (X, μ) *es un espacio normado, entonces existe un par* $[(Y, \nu), \iota : X \longrightarrow Y]$ *que es una compleción de* X *de modo que* X *es un subespacio denso de* Y*,* ι *es la inclusión y* $\nu|_X = \mu$*.*

Demostración:
Sea $\left[(\hat{X}, \hat{\mu}), j : X \longrightarrow \hat{X}\right]$ una compleción cualquiera, que sea disjunta[3] con X, y definamos

$$Y = X \cup (\hat{X} \setminus j(X))$$

y $f : Y \longrightarrow \hat{X}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} j(x) & \text{si} \quad x \in X \\ \\ x & \text{si} \quad x \in \hat{X} \setminus j(X) \end{cases}$$

Puesto que $X \cap \hat{X} = \varnothing$ tenemos que f está bien definida y además, es fácil ver que es una biyección.
Ahora, definamos en Y las operaciones:

- $x + y = f^{-1}(f(x) + f(y)), \ \forall x, y \in Y;$
- $\lambda x = f^{-1}(\lambda f(x)), \ \forall x \in Y, \lambda \in \mathbb{R}.$

Es un ejercicio rutinario demostrar que Y junto a estas operaciones es un espacio vectorial donde el elemento neutro es el de X y los elementos opuestos son simplemente los opuestos en X o $\hat{X} \setminus j(X)$ según sea el caso.
Aún más, con estas operaciones se tiene que al restringirlas a X obtenemos las operaciones originales en X y así X es un subespacio vectorial de Y.
Efectivamente, si son $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$f^{-1}(f(x) + f(y)) = f^{-1}(j(x) + j(y)) = f^{-1}(j(x + y)) = j^{-1}(j(x + y)) = x + y$$

y

$$f^{-1}(\lambda f(x)) = f^{-1}(\lambda j(x)) = f^{-1}(j(\lambda x)) = j^{-1}(j(\lambda x)) = \lambda x.$$

Observemos también que bajo estas operaciones f es una aplicación lineal y podemos definir entonces $\nu : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que dado $x \in Y$

$$\nu(x) = \hat{\mu}(f(x)).$$

[3] Sea $\left[(\hat{X}, \hat{\mu}), j : X \longrightarrow \hat{X}\right]$ una compleción cualquiera de X y consideremos $Z = \hat{X} \times \{X\}$ dotado de las operaciones siguientes:

- $(x, X) + (y, X) = (x + y, X), \ \forall x, y \in \hat{X};$
- $\lambda(x, X) = (\lambda x, X), \ \forall x \in \hat{X}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Es sencillo comprobar que Z dotado de estas operaciones es un espacio vectorial y que (Z, ν) con $\nu : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\nu(x, X) = \hat{\mu}(x)$, es un espacio de Banach isométricamente isomorfo a $\hat{X}$ donde la isometría viene dada por $f : \hat{X} \longrightarrow Z$ con $f(x) = (x, X)$.

Con esto, tenemos que el par $[(Z, \nu), f \circ j : X \longrightarrow Z]$ es una compleción de X siendo $Z \cap X = \varnothing$ y en definitiva, hemos demostrado que existe una compleción disjunta con X.

Es muy sencillo comprobar que ν es una norma sobre Y y observemos que si $x \in X$ entonces

$$\nu(x) = \hat{\mu}(f(x)) = \hat{\mu}(j(x)) = \mu(x).$$

Con todo, se tiene que (Y, ν) es isométricamente isomorfo a $(\hat{X}, \hat{\mu})$ pues ya hemos visto que $f : Y \longrightarrow \hat{X}$ es lineal, biyectiva y por la definición de ν es claramente una isometría.

Concluimos entonces que (Y, ν) es un espacio de Banach.

Ahora, tomando la inclusión $\iota : X \longrightarrow Y$ es claro que es lineal y además es isométrica pues dado $x \in X$

$$\nu(\iota(x)) = \nu(x) = \mu(x).$$

Para finalizar observemos que como $f^{-1} : \hat{X} \longrightarrow Y$ es un homomorfismo y $[\hat{X}, j]$ una compleción se tiene que

$$\operatorname{cl}_Y(X) = \operatorname{cl}_Y\left(f^{-1}(j(X))\right) = f^{-1}\Big(\operatorname{cl}_{\hat{X}}(j(X))\Big) = f^{-1}\left(\hat{X}\right) = Y,$$

con lo que X es denso en Y y concluimos la demostración. ■

Continuemos viendo la extensión única de una pseudonorma en V, el espacio de sucesiones de soporte finito en $\mathbb{Q}$, al espacio c_{00}.

Lema B.2. *Si $\mu \in \mathcal{P}$ entonces existe una única pseudonorma $\bar{\mu}$ sobre c_{00} que extiende a μ, es decir, tal que $\bar{\mu}|_V = \mu$.*

Demostración:

Sea $x \in c_{00}$ dado por

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i,$$

donde sabemos que únicamente una cantidad finita de los x_i es no nula.

Tomemos ahora una familia de sucesiones $\{q_i^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ tales que $q_i^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_i$ y de modo que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $q_i^k = 0$ si $i > n$.

Con todo, definamos para cada $k \geq 1$

$$x^k = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^k e_i$$

y

$$\bar{\mu}(x) = \lim_{k\to\infty} \mu(x^k).$$

En primer lugar, debemos comprobar que $\bar{\mu}$ está bien definida, es decir, que siempre existe el límite y que es independiente de las sucesiones $\{q_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ consideradas.

Observemos en primer lugar que

$$\begin{aligned} \left|\mu(x^k) - \mu(x^m)\right| &\leq \mu(x^k - x^m) = \mu\left(\sum_{i=1}^{n}(q_i^k - q_i^m)e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\left|q_i^k - q_i^m\right|\mu(e_i) \leq \\ &\leq K\sum_{i=1}^{n}\left|q_i^k - q_i^m\right|, \end{aligned} \tag{B.1}$$

siendo $K = \max\{\mu(e_i) : 1 \leq i \leq n\}$.

Por tanto, como cada $\{q_i^k\}_{k=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ para $i = 1, \cdots, n$, dado $\varepsilon > 0$ tenemos que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, k \geq k_0$ entonces

$$\left|q_i^k - q_i^m\right| < \frac{\varepsilon}{nK}, \ \forall i = 1, \cdots, n,$$

y por (B.1) concluimos que si $m, k \geq k_0$ entonces

$$\left|\mu(x^k) - \mu(x^m)\right| \leq K \sum_{i=1}^n \left|q_i^k - q_i^m\right| < \varepsilon.$$

Esto demuestra que $\{\mu(x^k)\}_{k=1}^\infty$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$ y por tanto que existe su límite.

Además, si son $\{p_i^k\}_{k=1}^\infty$ otras sucesiones de racionales convergentes a x_i tales que $p_i^k = 0$ para cada i mayor que cierto natural m, denotando entonces $N = \max\{n, m\}$ e

$$y^k = \sum_{i=1}^\infty p_i^k e_i$$

se cumple que

$$\left|\mu(x^k) - \mu(y^k)\right| \leq \mu(x^k - y^k) = \mu\left(\sum_{i=1}^N (q_i^k - p_i^k)e_i\right) \leq \sum_{i=1}^N \left|q_i^k - p_i^k\right| \mu(e_i) \leq$$
$$\leq \max\{\mu(e_i) : 1 \leq i \leq N\} \sum_{i=1}^N \left|q_i^k - p_i^k\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

con lo que efectivamente

$$\lim_{k\to\infty} \mu(x^k) = \lim_{k\to\infty} \mu(y^k).$$

Lo anterior prueba que $\bar{\mu}$ está bien definida, luego veamos que es una pseudonorma.

En primer lugar, dados $x, y \in c_{00}$ con $x = \sum_{i=1}^\infty x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^\infty y_i e_i$ definamos

$$n = \max\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0 \vee y_i \neq 0\}.$$

Así, para cada $i \geq 1$ consideremos las sucesiones de racionales $\{q_i^k\}_{k=1}^\infty$ y $\{p_i^k\}_{k=1}^\infty$ tales que convergen a x_i e y_i respectivamente, y de modo que son la sucesión nula si $i > n$.

Definamos también para cada $k \geq 1$

$$x^k = \sum_{i=1}^\infty q_i^k e_i \text{ e } y^k = \sum_{i=1}^\infty p_i^k e_i.$$

Observemos entonces que las sucesiones de racionales $\{q_i^k + p_i^k\}_{k=1}^\infty$ convergen a $x_i + y_i$, siendo nulas si $i > n$.

Por tanto, como

$$x + y = \sum_{i=1}^\infty (x_i + y_i)e_i$$

y

$$(x+y)^k = \sum_{i=1}^\infty (q_i^k + p_i^k)e_i = x^k + y^k$$

tenemos que

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(x+y) &= \lim_{k\to\infty} \mu((x+y)^k) = \lim_{k\to\infty} \mu(x^k+y^k) \leq \lim_{k\to\infty} (\mu(x^k)+\mu(y^k)) = \\ &= \lim_{k\to\infty} \mu(x^k) + \lim_{k\to\infty} \mu(y^k) = \bar{\mu}(x)+\bar{\mu}(y).\end{aligned}$$

Ahora, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ consideremos $\{\lambda^k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ tal que $\lambda^k \to \lambda$ y observemos que $\{\lambda^k q_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de racionales convergente a λx_i, la cual es nula si $i > n$.

Entonces, como

$$\lambda x = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda x_i) e_i$$

y

$$(\lambda x)^k = \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^k q_i^k) e_i = \lambda^k x^k$$

concluimos que

$$\bar{\mu}(\lambda x) = \lim_{k\to\infty} \mu((\lambda x)^k) = \lim_{k\to\infty} \mu(\lambda^k x^k) = \lim_{k\to\infty} \left|\lambda^k\right| \mu(x^k) = \lim_{k\to\infty} \left|\lambda^k\right| \lim_{k\to\infty} \mu(x^k) = |\lambda|\, \bar{\mu}(x).$$

Por lo anterior, queda demostrado que $\bar{\mu}$ es una pseudonorma sobre c_{00}.

Además, $\bar{\mu}$ extiende a μ pues si es

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in V$$

podemos definir para cada $x_i \in \mathbb{Q}$ las sucesiones $\{q_i^k\}_{k=1}^{\infty}$ tales que $q_i^k = x_i$, obteniendo pues que

$$x^k = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^k e_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = x$$

y efectivamente

$$\bar{\mu}(x) = \lim_{k\to\infty} \mu(x^k) = \lim_{k\to\infty} \mu(x) = \mu(x).$$

Por último, resta comprobar la unicidad de $\bar{\mu}$.

Supongamos pues que es ν una pseudonorma en c_{00} tal que $\nu|_V = \mu$.

Dado

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in c_{00}$$

definamos $n = \max\{i \in \mathbb{N} : x_i \neq 0\}$ y para cada $k \geq 1$

$$x^k = \sum_{i=1}^{\infty} q_i^k e_i$$

como hasta ahora.

Entonces

$$\begin{aligned}\left|\nu(x^k) - \nu(x)\right| &\leq \nu(x^k - x) = \nu\left(\sum_{i=1}^{n} (q_i^k - x_i) e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \left|q_i^k - x_i\right| \nu(e_i) \leq \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} \nu(e_i) \sum_{i=1}^{n} \left|q_i^k - x_i\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

y así

$$\nu(x) = \lim_{k\to\infty} \nu(x^k) \underset{x^k\in V}{=} \lim_{k\to\infty} \mu(x^k) = \bar{\mu}(x).$$

Es decir, hemos visto que para un $x \in c_{00}$ arbitrario se cumple que que $\nu(x) = \bar{\mu}(x)$, con lo que efectivamente $\nu = \bar{\mu}$ y concluimos la prueba. ■

Lema B.3. *Si* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión en* $\mathcal{P}$ *convergente a cierta* $\mu \in \mathcal{P}$*, entonces para cada* $w \in c_{00}$ *se cumple que* $\overline{\mu_n}(w) \longrightarrow \overline{\mu}(w)$*.*

Demostración:

Como $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a μ en $\mathcal{P}$, en particular converge en $\mathbb{R}^V$.

Por tanto, de la convergencia puntual en la topología producto y el hecho de que $\bar{\mu}$ es una extensión de μ obtenemos que $\overline{\mu_n}(v) \longrightarrow \overline{\mu}(v)$ para todo $v \in V$.

Sea ahora $w = \sum_{i=1}^{k} w_i e_i \in c_{00}$ y definamos $C = \max\{\mu(e_i) : 1 \le i \le k\}$.

Comencemos observando que por lo dicho al principio existe cierto $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \ge n_1$ entonces

$$|\mu_n(e_i) - \mu(e_i)| < 1, \ \forall i = 1, \cdots, k.$$

Así, para cualquier $v = \sum_{i=1}^{k} v_i e_i \in V$ tenemos que si $n \ge n_1$ se cumple que

$$\begin{aligned}
|\overline{\mu_n}(w) - \overline{\mu}(w)| &\le |\overline{\mu_n}(w) - \overline{\mu_n}(v)| + |\overline{\mu_n}(v) - \overline{\mu}(v)| + |\overline{\mu}(v) - \overline{\mu}(w)| \le \overline{\mu_n}(w - v) + \\
&+ |\overline{\mu_n}(v) - \overline{\mu}(v)| + \overline{\mu}(w - v) \le \sum_{i=1}^{k} |w_i - v_i| \, \overline{\mu_n}(e_i) + |\overline{\mu_n}(v) - \overline{\mu}(v)| + \\
&+ \sum_{i=1}^{k} |w_i - v_i| \, \overline{\mu}(e_i) \le \sum_{i=1}^{k} |w_i - v_i| \, (1 + \mu(e_i)) + |\mu_n(v) - \mu(v)| + \\
&+ \sum_{i=1}^{k} |w_i - v_i| \, \mu(e_i) \le 2(1 + C) \sum_{i=1}^{k} |w_i - v_i| + |\mu_n(v) - \mu(v)| .
\end{aligned}$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0$ si tomamos cada $v_i \in \mathbb{Q}$ de modo que

$$|v_i - w_i| < \frac{\varepsilon}{4k(1 + C)},$$

de lo anterior obtenemos que si $n \ge n_1$

$$|\overline{\mu_n}(w) - \overline{\mu}(w)| < \frac{\varepsilon}{2} + |\mu_n(v) - \mu(v)| .$$

Por otra parte, como $v \in V$ sabemos que $\mu_n(v) \longrightarrow \mu(v)$ y existe pues cierto $n_0 > n_1$ tal que si $n \ge n_0$ entonces

$$|\mu_n(v) - \mu(v)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con todo, si $n \ge n_0$ tenemos que

$$|\overline{\mu_n}(w) - \overline{\mu}(w)| < \varepsilon$$

y queda probada la convergencia de $\overline{\mu_n}(w)$ a $\overline{\mu}(w)$. ■

A continuación daremos algunos resultados sobre densidad y universalidad de espacios compactos y metrizables.

Lema B.4. *Si X es un espacio compacto y metrizable, $K \subset X$ compacto y $S \subset \mathcal{C}(X)$ denso, entonces*

$$S^* = \{f|_K \in \mathcal{C}(K) : f \in S\}$$

es denso en $\mathcal{C}(K)$.

Demostración:

Sabemos por el Teorema 2.1.7 que $\mathcal{C}(X)$ y $\mathcal{C}(K)$ serán espacios completamente metrizables por la métrica del supremo que denotaremos por ρ_X, ρ_K en cada caso.

Para probar entonces la densidad de S^* basta ver que dados $g \in \mathcal{C}(K)$ y $\varepsilon > 0$ fijos, se cumple que existe cierta función $j \in S^*$ tal que $\rho_K(g, j) < \varepsilon$.

Ahora, como X es metrizable será Hausdorff y al ser K compacto será cerrado en X.

Entonces, por el teorema de extensión de Tietze, existe $f \in \mathcal{C}(X)$ tal que $f|_K = g$.

Además, como S es denso en $\mathcal{C}(X)$, existirá cierto $h \in S$ tal que $\rho_X(f, h) < \varepsilon$.

Con todo, podemos finalmente tomar $j = h|_K \in S^*$ y obtenemos que

$$\rho_K(g, j) = \sup_{x \in K} |g(x) - j(x)| = \sup_{x \in K} |f(x) - h(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| = \rho_X(f, h) < \varepsilon$$

tal como buscábamos. ■

Proposición B.5. *Si X es un espacio metrizable y separable, entonces existe Y un espacio metrizable y compacto tal que $X \subset Y$ como subespacio denso.*

Demostración:

Puesto que X es metrizable y separable tenemos que es completamente regular y que tiene una base numerable, con lo que el Teorema E.2 garantiza la existencia de un homeomorfismo $f : X \longrightarrow C$, siendo C un subespacio de $\mathbb{H}$ el cubo de Hilbert.

Observemos que como $\overline{C} = \mathrm{cl}_{\mathbb{H}}(C)$ es cerrado en $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}$ es compacto, se tiene que $\overline{C}$ es compacto y claramente metrizable.

Sea ahora Z un espacio topológico homeomorfo a $\mathrm{cl}_{\mathbb{H}}(C)$ y disjunto[4] con X, siendo $g : \overline{C} \longrightarrow Z$ un homeomorfismo. Entonces Z también es compacto y metrizable.

Consideremos ahora

$$Y = \Big(Z \setminus (g \circ f)(X)\Big) \cup X$$

y definamos $h : Y \longrightarrow Z$ tal que

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in Z \setminus (g \circ f)(X) \\ \\ (g \circ f)(x) & \text{si} \quad x \in X \end{cases}$$

Entonces, como Z y X son disjuntos h está bien definida y además es claramente biyectiva.

Así, dotando a Y de la topología inicial inducida por h obtenemos h será un homeomorfismo entre Y y Z, de donde concluimos que Y es compacto y metrizable.

Para ver pues que Y es el espacio buscado resta únicamente ver que la topología relativa a X en Y es precisamente su topología original y que X es denso en Y.

[4] Basta considerar $Z = \overline{C} \times \{X\}$ con la topología producto.

Dado pues U abierto en X tenemos que $f(U)$ es abierto en C, con lo que existe $A \subset \mathbb{H}$ abierto tal que $f(U) = A \cap C$ y así

$$h^{-1}\left(g\left(A \cap \overline{C}\right)\right)$$

es abierto en Y.

Ahora observemos que

$$g\left(A \cap \overline{C}\right) = g(A \cap C) \cup g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right)\right)$$

siendo

$$g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right)\right) \cap (g \circ f)(X) = g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right) \cap f(X)\right) = g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right) \cap C\right) = \varnothing.$$

Por tanto

$$X \cap h^{-1}\left(g\left(A \cap \overline{C}\right)\right) \underset{5}{=} X \cap h^{-1}\Big(g(A \cap C)\Big) = X \cap h^{-1}\Big((g \circ f)(U)\Big) = X \cap U = U$$

y así, U es abierto en X con la topología relativa a Y.

Recíprocamente, si es U abierto en X con la topología relativa a Y entonces existe A abierto en Y tal que $U = A \cap X$.

Ahora bien, como los abiertos de Y son de la forma $A = h^{-1}(B)$ con B abierto en Z, tenemos que

$$\begin{aligned} U = A \cap X &= h^{-1}(B) \cap h^{-1}((g \circ f)(X)) = h^{-1}(B \cap (g \circ f)(X)) = \\ &= (g \circ f)^{-1}(B \cap (g \circ f)(X)) = (g \circ f)^{-1}(B) \cap X = f^{-1}(g^{-1}(B)) \cap f^{-1}(C) = \\ &= f^{-1}(g^{-1}(B) \cap C). \end{aligned}$$

Como $g^{-1}(B) \cap C$ es abierto en C, concluimos que efectivamente U es abierto en X y por tanto que las topologías de X y la relativa a X por Y coinciden.

Por último, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_Y(X) &= \mathrm{cl}_Y\left(h^{-1}\Big((g \circ f)(X)\Big)\right) = \mathrm{cl}_Y\left(h^{-1}\Big(g(C)\Big)\right) = h^{-1}\Big(\mathrm{cl}_Z(g(C))\Big) = \\ &= h^{-1}\Big(g\Big(\mathrm{cl}_{\overline{C}}(C)\Big)\Big) = h^{-1}\left(g\left(\overline{C}\right)\right) = h^{-1}(Z) = Y \end{aligned}$$

por lo que X es denso en Y y concluimos la demostración. ■

[5] Observemos que como

$$g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right)\right) \cap (g \circ f)(X) = \varnothing,$$

entonces

$$g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right)\right) \subset Z \setminus (g \circ f)(X)$$

y así

$$h^{-1}\left(g\left(A \cap \overline{C}\right)\right) = h^{-1}(g(A \cap C)) \cup h^{-1}\left(g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right)\right)\right) = h^{-1}(g(A \cap C)) \cup g\left(A \cap \left(\overline{C} \setminus C\right)\right).$$

Por tanto, como $X \cap Z = \varnothing$ obtenemos que

$$X \cap h^{-1}\left(g\left(A \cap \overline{C}\right)\right) = X \cap h^{-1}(g(A \cap C)).$$

Teorema B.6. *Sean $(X,\rho),(Y,\rho')$ dos espacios métricos siendo Y completo, Z un subespacio de X y $f : Z \longrightarrow Y$ una aplicación uniformemente continua. Entonces, si denotamos por $\overline{Z}$ la clausura de Z en X, existe una única aplicación $F : \overline{Z} \longrightarrow Y$ continua que extiende a f. Además, F es también uniformemente continua.*

En particular, si X e Y son espacios normados siendo Y un espacio de Banach, Z un subespacio de X y $f : Z \longrightarrow Y$ es lineal y continua (y una isometría), entonces existe una única aplicación $F : \overline{Z} \longrightarrow Y$ lineal y continua (y una isometría) que extiende a f.

Demostración:

Como dado $z \in \overline{Z}$ existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ tal que $z_n \xrightarrow{\rho} z$, la idea principal es definir $F : \overline{Z} \longrightarrow Y$ tal que

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n).$$

Debemos demostrar en primer lugar que la sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge en Y, para lo cual basta ver que la sucesión es de Cauchy al ser Y completo.

Sea pues $\varepsilon > 0$ y observemos en primer lugar que, como f es uniformemente continua, existe cierto $\delta > 0$ para el cual es cierta la implicación

$$x, y \in Z \wedge \rho(x,y) < \delta \Longrightarrow \rho'(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{B.2}$$

Ahora, como $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente en X será de Cauchy, y tenemos pues que existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces

$$\rho(z_n, z_m) < \delta. \tag{B.3}$$

Con todo, tenemos que si $n, m \geq n_0$ por (B.2) y (B.3)

$$\rho'(f(z_n), f(z_m)) < \varepsilon,$$

lo que prueba que efectivamente la sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en Y.

Debemos ver ahora que la definición de $F(z)$ no depende de la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ escogida, es decir, que si son son $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}, \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones distintas en Z convergentes a z, entonces las sucesiones $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}, \{f(w_n)\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al mismo punto.

Sea de nuevo $\varepsilon > 0$ cualquiera y tomemos $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in Z \wedge \rho(x,y) < \delta \Longrightarrow \rho'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{B.4}$$

Observemos también que como las sucesiones $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen al mismo punto, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\rho(z_n, w_n) < \delta. \tag{B.5}$$

Además, si es $L \in Y$ el límite de $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$, tenemos que existe cierto $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ entonces

$$\rho'(f(z_n), L) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{B.6}$$

Con todo, por (B.4), (B.5) y (B.6) se tiene que si $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ entonces

$$\rho'(f(w_n), L) \leq \rho'(f(w_n), f(z_n)) + \rho'(f(z_n), L) < \varepsilon.$$

Por tanto, hemos demostrado que $\{f(w_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a L y con ello que efectivamente $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f(w_n)\}_{n=1}^{\infty}$ tienen el mismo límite.

Con todo lo anterior es claro también que F es una extensión de f, pues dado $z \in Z$ basta tomar la sucesión constante $z_n = z$ y tendremos que

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z) = f(z).$$

Pasemos a ver la continuidad uniforme de F.

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos nuevamente $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in Z \wedge \rho(x,y) < \delta \Longrightarrow \rho'(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{B.7}$$

Basta entonces ver que dados $z, w \in \overline{Z}$ tales que $\rho(z,w) < \delta/3$ se cumple que

$$\rho'(F(z), F(w)) < \varepsilon.$$

Sean pues $z, w \in \overline{Z}$ de esta forma y consideremos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en Z convergentes a z y w respectivamente.

Tenemos entonces que existe cierto $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ será

$$\rho(z_n, z) < \frac{\delta}{3}$$

y

$$\rho(w_n, w) < \frac{\delta}{3},$$

con lo que

$$\rho(z_n, w_n) \leq \rho(z_n, z) + \rho(z, w) + \rho(w, w_n) < \delta. \tag{B.8}$$

Por otra parte, como $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{f(w_n)\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a $F(z)$ y $F(w)$ respectivamente, existirá cierto $m > n_0$ tal que

$$\rho'(f(z_m), F(z)) < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{B.9}$$

$$\rho'(f(w_m), F(w)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{B.10}$$

Con todo, por (B.7), (B.8), (B.9) y (B.10) tenemos que

$$\rho'(F(z), F(w)) \leq \rho'(F(z), f(z_m)) + \rho'(f(z_m), f(w_m)) + \rho'(f(w_m), F(w)) < \varepsilon.$$

Supongamos por último que $H : \overline{Z} \longrightarrow Y$ es otra función continua que extiende a f.

Entonces, dado $z \in \overline{Z}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z$ una sucesión cualquiera convergente a z, tenemos de la continuidad de F y H que

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} H(z_n) = H(z).$$

Por tanto, concluimos que efectivamente F es la única extensión continua de f a la clausura de Z.

Si suponemos ahora que X e Y son espacios normados y f es lineal y continua, entonces sabemos que f es uniformemente continua y por lo anterior existe una única función uniformemente continua $F : \overline{Z} \longrightarrow Y$ que extiende a f.

Resta pues únicamente ver que F es también lineal.

Sean pues $z, w \in \overline{Z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en Z convergentes a z y w respectivamente.

Entonces, como

$$\alpha z_n + \beta w_n \longrightarrow \alpha z + \beta w,$$

por la continuidad de F tenemos que efectivamente

$$\begin{aligned} F(\alpha z + \beta w) &= \lim_{n\to\infty} F(\alpha z_n + \beta w_n) = \lim_{n\to\infty} f(\alpha z_n + \beta w_n) = \lim_{n\to\infty} [\alpha f(z_n) + \beta f(w_n)] = \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} f(z_n) + \beta \lim_{n\to\infty} f(w_n) = \alpha F(z) + \beta F(w). \end{aligned}$$

Por último, si fuera f una isometría entonces dado $z \in \overline{Z}$ y $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Z convergente a z, se tiene que de la continuidad de F y de las normas en X e Y

$$\|F(z)\|_Y = \left\| \lim_{n\to\infty} F(z_n) \right\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|f(z_n)\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|z_n\|_X = \|z\|_X .$$

Por tanto, F es también una isometría y esto concluye la demostración. ■

Veamos ahora algunos resultados sobre independencia lineal en espacios normados.

Lema B.7. *Si* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado y* $S \subset X$ *un subespacio separable de* X*, entonces* $\operatorname{span}(S)$ *es también separable.*

Demostración:

Sea $D \subset S$ un subconjunto numerable y denso en S, entonces $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(D)$ es también numerable[6] y basta ver que es denso en $\operatorname{span}(S)$, es decir, basta ver que dado $v \in \operatorname{span}(S)$ y $\varepsilon > 0$ existe cierto $w \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(D)$ tal que $\|v - w\| < \varepsilon$.

Como $v \in \operatorname{span}(S)$ existen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ y $s_1, \cdots, s_n \in S$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i s_i$.

Además, como D es denso en S existirán también $d_1, \cdots, d_n \in D$ tales que

$$|a_i| \, \|s_i - d_i\| < \frac{\varepsilon}{2n}, \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Tomando entonces $b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\|d_i\| \, |a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2n},$$

se cumple que denotando $w = \sum_{i=1}^{n} b_i d_i \in \operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(D)$ será

$$\|v - w\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i s_i - b_i d_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|a_i s_i - b_i d_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \Big[\, |a_i| \, \|s_i - d_i\| + |a_i - b_i| \, \|d_i\| \, \Big] < \varepsilon.$$

Concluimos pues que efectivamente $\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(D)$ es denso en $\operatorname{span}(S)$ y con ello, que este último es separable tal como queríamos demostrar. ■

[6] Basta observar que

$$\operatorname{span}_{\mathbb{Q}}(D) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i d_i \in X : a_i \in \mathbb{Q}, d_i \in D \right\}.$$

Lema B.8. *Si X es un espacio normado y $n \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto*

$$U = \{(x_1, \cdots, x_n) \in X^n : \{x_1, \cdots, x_n\} \text{ es lin. indep. en } X\}$$

es abierto en X^n al considerar la topología producto.

Demostración:
Consideremos en X^n la norma

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

que induce la topología producto y en $\mathbb{R}^{n\times n}$ la norma

$$\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Ahora, dado $(u_1, \cdots, u_n) \in U$ definimos las aplicaciones lineales

$$f_1, \cdots, f_n : \text{span}\{u_1, \cdots, u_n\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que $f_i(u_j) = \delta_{ij}$ para cada $i, j = 1, \cdots, n$.
Como $\text{span}\{u_1, \cdots, u_n\}$ tiene dimensión finita cada f_i es lineal y continua, por lo que por el Corolario 1.2.8 garantiza la existencia de aplicaciones lineales y continuas

$$F_1, \cdots, F_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que $F_i(u_j) = \delta_{ij}$ para cada $i, j = 1, \cdots, n$.
Definamos ahora $T : X^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (F_i(x_j))_{ij} .$$

Entonces, por la linealidad de cada F_i se ve fácilmente que T es también lineal y además será continua pues

$$\|T(x_1, \cdots, x_n)\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |F_i(x_j)| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \|F_i\| \|x_j\| = \left[\max_{1\leq i\leq n} \|F_i\|\right] \|(x_1, \cdots, x_n)\| .$$

Ahora, como $GL_n(\mathbb{R})$ es abierto[7] en $\mathbb{R}^{n\times n}$ y $T(u_1, \cdots, u_n) = I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ tenemos que

$$(u_1, \cdots, u_n) \in V = T^{-1}\left(GL_n(\mathbb{R})\right)$$

siendo V abierto.

[7] $GL_n(\mathbb{R})$ es el conjunto de las matrices invertibles en $\mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, el conjunto de matrices con determinante no nulo. Entonces, como la función determinante es continua, obtenemos que $GL_n(\mathbb{R})$ es abierto pues

$$GL_n(\mathbb{R}) = \det{}^{-1}\left(\mathbb{R} \setminus \{0\}\right)$$

siendo $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ claramente abierto en $\mathbb{R}$.

Con todo, si vemos que $V \subset U$ entonces concluimos por la arbitrariedad del vector $(u_1, \cdots, u_n) \in U$ que efectivamente U es abierto.
Sin más, si es $(x_1, \cdots, x_n) \in V$ entonces $T(x_1, \cdots, x_n) \in GL_n(\mathbb{R})$, con lo que $(F_i(x_j))_{ij}$ es invertible y por tanto

$$\Big\{\Big(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_1)\Big), \cdots, \Big(F_1(x_n), \cdots, F_n(x_n)\Big)\Big\} \tag{B.11}$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$.
Con esto, si existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0_X$$

entonces para cada $i = 1, \cdots, n$ serán

$$F_i(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n) = 0,$$

y por la linealidad de las F_i

$$\begin{aligned} &\alpha_1\Big(F_1(x_1), \cdots, F_n(x_1)\Big) + \cdots + \alpha_n\Big(F_1(x_n), \cdots, F_n(x_n)\Big) = \\ &= \Big(F_1(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n), \cdots, F_n(\alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_n x_n)\Big) = (0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

Por (B.11) obtenemos entonces que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$ y es pues $\{x_1, \cdots, x_n\}$ linealmente independiente en X, es decir, concluimos que $(x_1, \cdots, x_n) \in U$ demostrando la inclusión buscada y con ello el lema. ■

Lema B.9. *Si $\mu \in \mathcal{P}$ y $x_1, \cdots, x_n$ son elementos de X_μ, entonces existe una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^\infty \subset X_\mu$ que extiende a la anterior y tal que*

$$\mathrm{cl}_{X_\mu}(\mathrm{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}) = X_\mu.$$

Si además $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ y $\{x_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ se puede obtener también de forma que sea linealmente independiente en X_μ.

Demostración:
Como X_μ es separable existe A un conjunto numerable y denso contenido en X_μ y definamos

$$B = A \cup \{x_1, \cdots, x_n\}$$

y

$$D = \mathrm{span}(B).$$

Como $A \subset D$ tenemos que D es denso en X_μ y como B es numerable basta tomar cualquier enumeración de modo que $B = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ y obtenemos que

$$\mathrm{cl}_{X_\mu}(\mathrm{span}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}) = \mathrm{cl}_{X_\mu}(D) = X_\mu.$$

Ahora, si $\mu \in \mathcal{P}_\infty$ y $\{x_i\}_{i=1}^n$ es linealmente independiente, entonces sabemos que existe una base L de D tal que

$$\{x_1, \cdots, x_n\} \subset L \subset B.$$

Como D es denso en X_μ y este tiene dimensión infinita obtenemos que L debe ser infinito, pues si fuera finito entonces

$$X_\mu = \mathrm{cl}_{X_\mu}(D) = \mathrm{cl}_{X_\mu}(\mathrm{span}(L)) = \mathrm{span}(L)$$

y tendríamos que X_μ tiene dimensión finita, luego una contradicción.

Como además $L \subset B$ tenemos que es numerable y basta en este caso tomar cualquier enumeración tal que $L = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. ■

El último lema que introduciremos sobre independencia lineal tiene importancia en sí mismo, pero por la sencillez de su demostración y dado el carácter conjuntista de este texto aprovecharemos también para realizar una demostración detallada en la que se especifique el uso de una variante muy común y más débil del axioma de elección, el axioma de elecciones dependientes. Dicho axioma se emplea en numerosas demostraciones de análisis matemático[8] pero raramente se ve una alusión alguna a él en ningún texto, hasta el punto que es desconocido incluso para matemáticos profesionales.

Lema B.10. *Si X es un espacio normado separable y de dimensión infinita, entonces existe un subconjunto denso, numerable y linealmente independiente en X.*

Demostración:

Como X es separable y metrizable por el Teorema 1.1.8 tenemos que existe $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de X.

Diremos que una sucesión finita, no vacía, $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subset X$ cumple (*) si es linealmente independiente y cada $x_i \in U_i$.

Observemos ahora que dada una sucesión finita $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ que cumple (*) tendremos que

$$E_n = \mathrm{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$$

será un subespacio de dimensión finita de X, luego es un subespacio propio y con ello tiene interior vacío.

En particular, $U_{n+1} \not\subset E_n$ y existe pues $x_{n+1} \in U_{n+1} \setminus E_n$, con lo que la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ también cumple (*).

Sea pues T el conjunto de todas las sucesiones finitas, no vacías, en X que cumplen (*) y definamos en T la relación $\mathcal{R}$ dada por

$$s\mathcal{R}t \Leftrightarrow \mathrm{lon}(t) = \mathrm{lon}(s) + 1 \wedge s \subset t.$$

Entonces, por lo visto en el párrafo anterior $\mathcal{R}$ es una relación entera en T y por el axioma de elección dependiente existe una sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ en T tal que $s_n\mathcal{R}s_{n+1}$ para cada $n \geq 1$.

Definiendo ahora[9] $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ como $f(n) = s_n(n)$ veamos que $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión buscada.

---

[8] Un ejemplo claro de su importancia es el hecho de que este axioma es equivalente al conocido teorema de categorías de Baire tal como demostró Blair en [6].

[9] Observemos que f está bien definida pues $\mathrm{lon}(s_n) \geq n$.

Efectivamente como $s_1 \neq \varnothing$ será $\mathrm{lon}(s_1) \geq 1$ y si lo suponemos cierto para n, entonces como $s_n\mathcal{R}s_{n+1}$ obtenemos que $\mathrm{lon}(s_{n+1}) = \mathrm{lon}(s_n) + 1 \geq n + 1$.

En primer lugar, observemos que tomando cualquier conjunto finito $\{f(n_1), \cdots, f(n_k)\}$ de la sucesión, si es $N = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$ y $m = \text{lon}(s_N)$ tenemos que

$$\{f(n_1), \cdots, f(n_k)\} \subset \{f(1), \cdots, f(N)\} \underset{10}{\subseteq} \{s_N(1), \cdots, s_N(m)\}.$$

Por tanto, como $s_N \in T$ el conjunto $\{s_N(1), \cdots, s_N(m)\}$ es linealmente independiente y de lo anterior concluimos que $\{f(n_1), \cdots, f(n_k)\}$ también lo es.

Esto prueba que $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente.

Por último, observemos que

$$\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \cap U_k \neq \varnothing, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

pues $f(k) = s_k(k) \in U_k$, y como $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de X, efectivamente se tiene que $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso. ■

Demostraremos a continuación que todo espacio normado de dimensión finita está complementado en cualquier espacio normado de dimensión infinita.

Proposición B.11. *Si X es un espacio normado y $F \subset X$ un espacio de dimensión finita, entonces existe Y un subespacio cerrado de X tal que X es suma directa topológica de F e Y.*

Demostración:

Sea $\mathcal{B}_F = \{x_1, \cdots, x_n\}$ una base de F y consideremos para cada $i = 1, \cdots, n$ las aplicaciones $\alpha_i : F \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que dado $x \in F$, $\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)$ son los coeficientes de x en la base $\mathcal{B}_F$, es decir,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) x_i.$$

La unicidad de los coeficientes en una base nos permite garantizar que las aplicaciones α_i están bien definidas y que además son lineales. Más aún, como cualquier aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en cualquier otro espacio normado es continua, tenemos entonces que cada aplicación α_i es lineal y continua.

Con todo, por el Corolario 1.2.8 existen $\alpha_i^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ aplicaciones lineales y continuas extendiendo a cada α_i.

Definamos ahora $P : X \longrightarrow F$ como

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^*(x) x_i.$$

Observemos que P es una proyección de X en F pues claramente $P(x) \in F$ para cada $x \in X$, y además dado $x \in F$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^*(x) x_i = P(x).$$

[10] Observemos que $\{f(i)\}_{i=1}^{n} \subset \{s_n(i)\}_{i=1}^{k_n}$ donde $k_n = \text{lon}(s_n)$.

Para $n = 1$ es claro pues $\{f(1)\} = \{s_1(1)\} \subset \{s_1(i)\}_{i=1}^{k_1}$, y si es cierto para n entonces como $s_n \mathcal{R} s_{n+1}$

$$\{f(i)\}_{i=1}^{n} \subset \{s_n(i)\}_{i=1}^{k_n} \subset \{s_{n+1}(i)\}_{i=1}^{k_{n+1}},$$

y al ser $f(n+1) = s_{n+1}(n+1)$ efectivamente tenemos que $\{f(i)\}_{i=1}^{n+1} \subset \{s_{n+1}(i)\}_{i=1}^{k_{n+1}}$.

Es claro entonces que P es sobreyectiva, y por la linealidad de los α_i^*, que es lineal.
Además, se tiene también que es continua pues

$$\|P(x)\| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^*(x)| \, \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i^*\| \, \|x\| \, \|x_i\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\alpha_i^*\| \, \|x_i\| \right) \|x\| \, .$$

Definamos ahora $Y = \mathrm{Ker}(P)$ y veamos que es el subespacio buscado.

Por un lado, es un subespacio de X al ser el núcleo de una aplicación lineal, y por otro es cerrado ya que $Y = P^{-1}(\{0_X\})$ siendo P continua.

Observemos también que $Y \cap F = \{0_X\}$.

Efectivamente, si $x \in Y \cap F$ entonces, por ser un elemento de Y, se cumple que $P(x) = 0_X$; pero por ser un elemento de F, tenemos que $P(x) = x$, luego efectivamente $x = 0_X$.

Por otra parte, observemos que dado $x \in X$ se tiene que $x - P(x) \in Y$ pues como $P(x) \in F$ es

$$P(x - P(x)) = P(x) - P(P(x)) = P(x) - P(x) = 0_X.$$

Con esto, tenemos que dado $x \in X$ se puede expresar como

$$x = P(x) + (x - P(x))$$

siendo $P(x) \in F$ y $x - P(x) \in Y$, con lo que X es suma directa algebraica de F e Y.

Resta ver únicamente que la aplicación $\varphi : F \times Y \longrightarrow X$ tal que $\varphi(x, y) = x + y$ es un isomorfismo, donde consideramos en $F \times Y$ la norma

$$|||(x, y)||| = \|x\| + \|y\| \, , \; \forall (x, y) \in F \times Y.$$

En primer lugar, por la propia definición es claro que φ es lineal, y además por ser X suma directa algebraica de F e Y se ve claramente que es una biyección.

Respecto a la continuidad, observemos que dados $(x, y) \in F \times Y$ se tiene que

$$\|\varphi(x, y)\| = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| = |||(x, y)|||,$$

con lo que φ es continua y resta únicamente ver que su inversa también lo es.

Sin más, como dado $z \in X$ es

$$z = P(z) + (z - P(z)) \in F + Y,$$

tenemos que

$$\varphi^{-1}(z) = (P(z), z - P(z))$$

y con ello

$$|||\varphi^{-1}(z)||| = \|P(z)\| + \|z - P(z)\| \leq \|P\| \, \|z\| + \|z\| + \|P\| \, \|z\| = (2 \, \|P\| + 1) \, \|z\|$$

lo que prueba la continuidad de φ^{-1} y concluye la demostración. ■

Corolario B.12. *Si X es un espacio normado de dimensión infinita y F un espacio normado de dimensión finita, entonces existen E, Y subespacios cerrados de X tales que E es isomorfo a F y X es suma directa topológica de E e Y.*

Demostración:

Supongamos que F tiene dimensión n y sea $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ un conjunto linealmente independiente.

Definiendo entonces $E = \text{span}\{x_1, \cdots, x_n\}$ se tiene que es un subespacio de X el cual es isomorfo a F pues ambos son espacios normados de dimensión finita n.

Basta pues aplicar la proposición anterior con X y E, y el corolario queda demostrado. ■

Para finalizar, demostraremos un sencillo lema sobre representabilidad finita.

Lema B.13. *Sea $\mathcal{F}$ una clase de espacios de Banach de modo que existe un espacio de Banach Z tal que para cada $Y \in \mathcal{F}$ se cumple que $Y \equiv Z$. Entonces, un espacio de Banach X es finitamente representable en $\mathcal{F}$ si, y solo si, es finitamente representable en Z.*

Demostración:

En primer lugar, supongamos que X es finitamente representable en $\mathcal{F}$ y sean $E \subset X$ un subespacio de dimensión finita y $\varepsilon > 0$.

Por hipótesis tenemos que existe $Y \in \mathcal{F}$ y $F \subset Y$ un subespacio de dimensión finita tal que es $(1+\varepsilon)$-isomorfo a E.

Sea pues $T : E \longrightarrow F$ dicho $(1+\varepsilon)$-isomorfismo sobreyectivo y $S : Y \longrightarrow Z$ un isomorfismo isométrico, entonces $S(F) \subset Z$ es un subespacio de dimensión finita y

$$S|_F \circ T : E \longrightarrow S(F)$$

es un $(1+\varepsilon)$-isomorfismo pues dado $e \in E$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} \|e\| \leq \|T(e)\| = \|(S|_F \circ T)(e)\| = \|T(e)\| \leq (1+\varepsilon) \|e\| .$$

Por tanto, de la arbitrariedad de $E \subset X$ y $\varepsilon > 0$ concluimos que efectivamente X es representable en Z.

El recíproco se ve de forma análoga, con lo que el lema queda demostrado. ■

C. La topología de Vietoris

A principios del siglo XX había un interés creciente en dotar a familias de subconjuntos de espacios topológicos de una topología, en particular a la familia formada por los subconjuntos compactos.

Fue Hausdorff en su libro de 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, quien introdujo por primera vez una noción de distancia entre dos conjuntos de un espacio métrico. Su idea fue considerar que dos conjuntos están "cerca" si tomado cualquier punto de uno de los conjuntos existe un punto en el otro conjunto cercano a este.

De forma más precisa, si es (X, ρ) un espacio métrico se define la **métrica de Hausdorff** entre dos subconjuntos $A, B \subset X$ como

$$\rho_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} \rho(x, B), \sup_{y\in B} \rho(y, A)\right\}.$$

Es un ejercicio relativamente sencillo demostrar que si (X, ρ) es un espacio métrico y $\mathcal{K}(X)$ denota la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, entonces $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ será un espacio métrico.

Así la cuestión quedaba en cierto modo resuelta por la métrica de Hausdorff para el caso de espacios métricos, y algunos años más tarde Vietoris introdujo una noción más profunda válida para cualquier espacio topológico cerrando completamente la cuestión inicial.

Dado un espacio topológico X, la idea de Vietoris fue considerar en $\mathcal{K}(X)$ la topología generada por la subbase[11]

$$\mathcal{S} = \{C_U : U \text{ es abierto en } X\} \cup \{I_U : U \text{ es abierto en } X\}$$

donde

$$\begin{aligned} C_U &= \{K \in \mathcal{K}(X) : K \subset U\}, \\ I_U &= \{K \in \mathcal{K}(X) : K \cap U \neq \varnothing\}. \end{aligned}$$

La topología generada por $\mathcal{S}$ en $\mathcal{K}(X)$ se conoce como **topología de Vietoris** en X y la razón por la que hemos mencionado en el párrafo anterior que es más profunda que la métrica de Hausdorff es porque, como veremos en la Proposición C.4, si X es un espacio métrico entonces la topología inducida en $\mathcal{K}(X)$ por la métrica de Hausdorff es precisamente la topología de Vietoris.

El resto de la sección la dedicaremos pues a estudiar algunas propiedades de la topología de Vietoris, principalmente a demostrar que si X es un espacio polaco entonces la topología de Vietoris es también polaca.

Comencemos pues dando una base para esta topología.

Lema C.1. *Si X es un espacio topológico y $U_0, U_1, \cdots, U_n$ abiertos en X definimos*

$$[U_0; U_1, \cdots, U_n] = \{K \in \mathcal{K}(X) : K \subset U_0 \wedge K \cap U_i \neq \varnothing, \ \forall i = 1, \cdots, n\}.$$

Entonces

$$\mathcal{B} = \{[U_0; U_1, \cdots, U_n] : n \in \mathbb{N} \wedge U_i \text{ es abierto en } X \text{ para cada } i = 0, 1, \cdots, n\}$$

es una base de $\mathcal{K}(X)$ dotado de la topología de Vietoris.

Demostración:

En primer lugar observemos que dados $U_0, U_1, \cdots, U_n$ abiertos en X se tiene que $[U_0; U_1, \cdots, U_n]$ es abierto en $\mathcal{K}(X)$ pues

$$[U_0; U_1, \cdots, U_n] = C_{U_0} \cap \bigcap_{i=1}^{n} I_{U_i}.$$

11 Observemos que efectivamente $\mathcal{S}$ es subbase de una topología en $\mathcal{K}(X)$ pues como $C_X = \mathcal{K}(X)$ es claro que $\bigcup \mathcal{S} = \mathcal{K}(X)$.

Así, para ver que $\mathcal{B}$ es base basta demostrar que dado V abierto en $\mathcal{K}(X)$ y $K \in V$ existen $U_0, U_1, \cdots, U_n$ abiertos en X tales que

$$K \in [U_0; U_1, \cdots, U_n] \subset V.$$

Sin más, como $\mathcal{S}$ es subbase de $\mathcal{K}(X)$ tendremos que existen $\tilde{U}_1, \cdots, \tilde{U}_m, U_1, \cdots, U_n$ abiertos en X tales que[12]

$$K \in \bigcap_{i=1}^{m} C_{\tilde{U}_i} \cap \bigcap_{i=1}^{n} I_{U_i} \subset V.$$

Con esto, denotando

$$U_0 = \bigcap_{i=1}^{m} \tilde{U}_i,$$

que será abierto en X, se tiene que

$$C_{U_0} \underset{13}{=} \bigcap_{i=1}^{m} C_{\tilde{U}_i}$$

y con todo

$$K \in C_{U_0} \cap \bigcap_{i=1}^{n} I_{U_i} = [U_0; U_1, \cdots, U_n] \subset V$$

lo que concluye la demostración. ■

El primer paso para demostrar que si X es polaco entonces también lo es $\mathcal{K}(X)$ será ver que esto es cierto para la separabilidad.

Proposición C.2. *Si X es un espacio separable, entonces $\mathcal{K}(X)$ con la topología de Vietoris es separable.*

<u>Demostración:</u>

Sea D un subconjunto numerable y denso de X y definamos F como el conjunto de todos los subconjuntos finitos, no vacíos, de D.

Entonces es claro que F está contenido en $\mathcal{K}(X)$ (pues todo conjunto finito es compacto) y puesto que D es numerable F también lo será, con lo que si vemos que es denso efectivamente tendremos que $\mathcal{K}(X)$ es separable.

Por el lema anterior basta ver que dados $U_0, U_1, \cdots, U_n$ abiertos en X se cumple que

$$[U_0; U_1, \cdots, U_n] \cap F \neq \varnothing$$

siempre que $[U_0; U_1, \cdots, U_n] \neq \varnothing$.

Observemos que dado $K \in [U_0; U_1, \cdots, U_n]$ se tiene que $K \subset U_0$ y $K \cap U_i \neq \varnothing$ para cada $i = 1, \cdots, n$, con lo que $U_0 \cap U_i \neq \varnothing$.

---

[12] Observemos que como $C_X = I_X = \mathcal{K}(X)$ siempre podemos asegurar que $m, n \geq 1$ sin más que tomar $\tilde{U}_1 = U_1 = X$.

[13] Efectivamente, si $K \in C_{U_0}$ entonces $K \subset U_0 \subset \tilde{U}_i$ para cada $i = 1, \cdots, m$ con lo que $K \in \bigcap_{i=1}^{m} C_{\tilde{U}_i}$. Recíprocamente, si $K \in \bigcap_{i=1}^{m} C_{\tilde{U}_i}$ entonces $K \subset \tilde{U}_i$ para cada $i = 1, \cdots, m$ con lo que $K \subset U_0$ y así $K \in C_{U_0}$.

Entonces, como para cada $i = 1, \cdots, n$ es $U_0 \cap U_i$ un conjunto abierto no vacío y D es denso en X tenemos que

$$D \cap (U_0 \cap U_i) \neq \varnothing, \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Si tomamos entonces $x_i \in D \cap (U_0 \cap U_i)$ para cada $i = 1, \cdots, n$ observamos que

$$\{x_1, \cdots, x_n\} \in [U_0, U_1, \cdots, U_n] \cap F$$

y concluimos la demostración. ■

Nuestro siguiente objetivo será ver la relación dicha al comienzo entre la métrica de Hausdorff y la topología de Vietoris, lo cual probará trivialmente que si X es metrizable entonces $\mathcal{K}(X)$ también lo es.

Lema C.3. *Si (X, ρ) es un espacio métrico, K, L subconjuntos compactos de X y $\varepsilon > 0$,, entonces*

$$\rho_H(K, L) < \varepsilon \Leftrightarrow K \subset B(L, \varepsilon) \wedge L \subset B(K, \varepsilon)$$

siendo para cada $A \subset X$

$$B(A, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, A) < \varepsilon\}.$$

Demostración:

En primer lugar, si $\rho_H(K, L) < \varepsilon$ entonces dado $x \in K$ tenemos que

$$\rho(x, L) \leq \sup_{x \in K} \rho(x, L) \leq \rho_H(K, L) < \varepsilon,$$

luego $x \in B(L, \varepsilon)$ y efectivamente

$$K \subset B(L, \varepsilon).$$

Análogamente se ve que $L \subset B(K, \varepsilon)$.

Recíprocamente si es $K \subset B(L, \varepsilon)$ y $L \subset B(K, \varepsilon)$, entonces tenemos que dados $x \in K$ e $y \in L$ se tiene que $\rho(x, L) < \varepsilon$ y $\rho(y, K) < \varepsilon$.

Por tanto, como K y L son compactos y las funciones distancia de un punto a un conjunto son continuas,

$$\sup_{x \in K} \rho(x, L) = \max_{x \in K} \rho(x, L) < \varepsilon$$

y

$$\sup_{y \in L} \rho(y, K) = \max_{y \in L} \rho(y, K) < \varepsilon,$$

con lo que

$$\rho_H(K, L) = \max \left\{ \sup_{x \in K} \rho(x, L), \sup_{y \in L} \rho(y, K) \right\} < \varepsilon$$

tal como queríamos demostrar. ■

Proposición C.4. *Si (X, ρ) es un espacio métrico, entonces la topología inducida en $\mathcal{K}(X)$ por la métrica de Hausdorff es la topología de Vietoris en X.*

Demostración:

Veamos en primer lugar que dado cualquier abierto V en $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ es también un abierto para la topología de Vietoris.

Dado $K_0 \in V$ existe cierto $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_{\rho_H}(K_0, \varepsilon) \subset V$$

y si vemos que existen $U_0, U_1, \cdots, U_n$ abiertos en X tales

$$K_0 \in [U_0; U_1, \cdots, U_n] \subset B_{\rho_H}(K_0, \varepsilon),$$

entonces concluimos que K_0 es un punto interior de V en la topología de Vietoris, y por su arbitrariedad, que V es abierto para dicha topología.

Sin más, como K_0 es compacto en X sabemos que existen $x_1, \cdots, x_n \in X$ tales que

$$K_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{C.1}$$

siendo $K_0 \cap B(x_i, \varepsilon/2) \neq \varnothing$, y definiendo

$$U_0 = B(K_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, K_0) < \varepsilon\},$$
$$U_i = B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right), \ \forall i = 1, \cdots, n$$

es claro entonces que son abiertos en X y $K_0 \in [U_0; U_1, \cdots, U_n]$.

Además, dado $K \in [U_0; U_1, \cdots, U_n]$ tenemos que $K \subset B(K_0, \varepsilon)$ y si vemos que además $K_0 \subset B(K, \varepsilon)$, por el Lema C.3 tendremos que $\rho_H(K, K_0) < \varepsilon$ y así que

$$K \in B_{\rho_H}(K_0, \varepsilon)$$

que es justo lo que queremos demostrar.

Sin más, dado $x \in K_0$ por (C.1) existe un x_i tal que $\rho(x, x_i) < \varepsilon/2$ y como $K \cap U_i \neq \varnothing$, existe cierto $y \in K$ tal que $\rho(y, x_i) < \varepsilon/2$, con lo que

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, y) < \varepsilon.$$

Así

$$\rho(x, K) \leq \rho(x, y) < \varepsilon,$$

obteniendo pues que $x \in B(K, \varepsilon)$, y por la arbitrariedad de $x \in K_0$, que $K_0 \subset B(K, \varepsilon)$ tal como queríamos demostrar.

Debemos ahora ver que cualquier abierto para la topología de Vietoris es también abierto en $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$, para lo cual basta ver que cada elemento de la subbase $\mathcal{S}$ es abierto en dicho espacio métrico.

Sea pues U abierto en X y $K_0 \in C_U$, entonces como $K_0 \subset U$, es compacto y $X \setminus U$ cerrado tenemos que[14]

$$\varepsilon = \inf\{\rho(x, K_0) : x \in X \setminus U\} > 0.$$

Por la definición de ε es entonces claro que $B(K_0, \varepsilon) \subset U$.

Ahora, si $K \in B_{\rho_H}(K_0, \varepsilon)$ entonces $\rho_H(K, K_0) < \varepsilon$ y por el Lema C.3

$$K \subset B(K_0, \varepsilon) \subset U,$$

con lo que $K \in C_U$.

Hemos probado pues que

$$B_{\rho_H}(K_0, \varepsilon) \subset C_U$$

y así, por la arbitrariedad de K_0, que C_U es abierto en $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$.

Para ver ahora que I_U también es abierto con la métrica de Hausdorff, observemos que si es $K_0 \in I_U$ entonces existe $x \in K_0 \cap U$ y como U es abierto en X, existirá cierto $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U$.

Como en el caso anterior, finalizaremos la demostración si demostramos que

$$B_{\rho_H}(K_0, \varepsilon) \subset I_U.$$

Si es $K \in B_{\rho_H}(K_0, \varepsilon)$ tenemos que $\rho_H(K, K_0) < \varepsilon$ y por el Lema C.3 que $K_0 \subset B(K, \varepsilon)$, con lo que $\rho(x, K) < \varepsilon$.

Como K es compacto existe cierto $y \in K$ tal que $\rho(x, y) = \rho(x, K)$ y así

$$y \in B(x, \varepsilon) \subset U,$$

con lo que $y \in K \cap U$ y con ello, $K \in I_U$ tal como buscábamos demostrar. ∎

Sabemos ya que si X es metrizable y separable entonces $\mathcal{K}(X)$ también lo será, por lo que resta ver la completitud de dicha métrica.

Lema C.5. *Si (X, ρ) es un espacio métrico completo y $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$, entonces*

$$K = \mathrm{cl}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right)$$

es compacto.

---

[14] Si fuera $\varepsilon = 0$ entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ contenida en $X \setminus U$ tal que $\rho(x_n, K_0) \longrightarrow 0$. Además, como K_0 es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K_0$ tal que $\rho(x_n, K_0) = \rho(x_n, y_n)$, y al estar $\{y_n\} \subset K_0$ existirá una subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a cierto $y \in K_0$.
Con todo

$$\rho(x_{n_k}, y) \leq \rho(x_{n_k}, y_{n_k}) + \rho(y_{n_k}, y) = \rho(x_{n_k}, K_0) + \rho(y_{n_k}, y) \longrightarrow 0$$

por lo que $x_{n_k} \longrightarrow y$.
Ahora, como $\{x_{n_k}\} \subset X \setminus U$ que es cerrado, concluimos que $y \in K_0 \cap (X \setminus U)$ teniendo una contradicción pues $K_0 \subset U$.

Demostración:

Como K es cerrado en X, por la Proposición 1.1.3 tenemos que $(K, \rho|_K)$ será un espacio métrico completo y si vemos que está totalmente acotado, entonces efectivamente será compacto.

Además, basta ver que $L = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ está totalmente acotado, pues de ser así entonces[15] también lo estará su clausura, es decir, K.

Sea pues $\varepsilon > 0$ fijo y $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $\rho_H(K_m, K_n) < \varepsilon/2$.

Entonces, como $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ es compacto, estará totalmente acotado y existen pues

$$\{x_1, \cdots, x_k\} \subset \bigcup_{i=1}^{N} K_i$$

tales que para cualquier $x \in K_i$ con $i \leq N$ existe un $j = 1, \cdots, k$ tal que $\rho(x, x_j) < \varepsilon/2$.

Veamos sin más que el conjunto $\{x_1, \cdots, x_k\} \subset L$ nos sirve para probar que L está totalmente acotado, es decir, basta ver que para cualquier $x \in K_i$ con $i > N$ se cumple que existe un $j = 1, \cdots, k$ tal que $\rho(x, x_j) < \varepsilon$.

Como

$$\rho(x, K_N) \leq \sup_{y \in K_i} \rho(y, K_N) \leq \rho_H(K_i, K_N) < \varepsilon/2,$$

tenemos que existe cierto $y \in K_N$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon/2$.

Por tanto, si es x_j tal que $\rho(y, x_j) < \varepsilon/2$ entonces

$$\rho(x, x_j) \leq \rho(x, y) + \rho(y, x_j) < \varepsilon$$

lo que finaliza la demostración. ∎

Proposición C.6. *Si (X, ρ) es un espacio métrico completo entonces $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ también es completo.*

Demostración:

Sea $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ y definamos

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i\right).$$

Por el lema anterior $F_1 = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)$ es compacto y la familia de cerrados en F_1, $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dados por

$$F_n = \operatorname{cl}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} K_i\right),$$

tiene claramente la propiedad de intersección finita, con lo que su intersección es no vacía, es decir, $K \neq \varnothing$.

[15] Si L está totalmente acotado, entonces dado $\varepsilon > 0$ existen $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset L$ tales que para cualquier $x \in L$ existe un $i_x \in \{1, \cdots, n\}$ de modo que $\rho(x, x_{i_x}) < \varepsilon/2$.
Ahora, si es $y \in \operatorname{cl}(L)$ tenemos que existe cierto $x \in L$ tal que $\rho(x, y) < \varepsilon/2$ y con ello

$$\rho(y, x_{i_x}) \leq \rho(y, x) + \rho(x, x_{i_x}) < \varepsilon,$$

lo que prueba que $\operatorname{cl}(L)$ está totalmente acotado.

Además, es claro que K es cerrado en F_1 y nuevamente por ser este último compacto, tenemos que K es compacto.

Con todo tenemos que $K \in \mathcal{K}(X)$ y si vemos que $\rho_H(K_n, K) \longrightarrow 0$, entonces efectivamente concluimos que $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ es completo.

Sea pues $\varepsilon > 0$ fijo y consideremos $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $m, n \geq N$ se cumple que

$$\rho_H(K_m, K_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea ahora $n \geq N$ fijo.

En primer lugar, observemos que si $x \in K$ entonces $x \in F_n$ y por tanto

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap \bigcup_{i=n}^{\infty} K_i \neq \varnothing.$$

Así, existe cierto $i \geq n$ y $x_i \in K_i$ tal que $\rho(x, x_i) < \varepsilon/2$.

Por otra parte, como

$$\rho(x_i, K_n) \leq \sup_{z \in K_i} \rho(z, K_n) \leq \rho_H(K_n, K_i) < \varepsilon/2,$$

tenemos que existe cierto $y \in K_n$ tal que $\rho(x_i, y) < \varepsilon/2$ y así

$$\rho(x, K_n) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, y) < \varepsilon.$$

Puesto que $x \in K$ era arbitrario hemos demostrado que

$$K \subset B(K_n, \varepsilon). \tag{C.2}$$

Sea ahora $x \in K_n$ y observemos que, como para cada $i \geq n$ se tiene que

$$\rho(x, K_i) \leq \sup_{z \in K_n} \rho(z, K_i) \leq \rho_H(K_n, K_i) < \varepsilon/2,$$

obtenemos para cada $i \geq n$ existe $x_i \in K_i$ tal que $\rho(x, x_i) < \varepsilon/2$.

Como F_n es compacto (pues es cerrado en F_1) tenemos que $\{x_i\}_{i=n}^{\infty} \subset F_n$ tendrá una subsucesión convergente $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ a cierto $y \in F_n$.

Aún más, veamos que $y \in K$.

Si $i \leq n$ entonces es claro que $y \in F_n \subset F_i$, con lo que basta comprobarlo para $i > n$.

En este caso, basta observar que tomando $t \geq 1$ tal que $i_t \geq i$, la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k=t}^{\infty}$ está contenida en F_i, y como F_i es cerrado su límite, que es y, también pertenece a F_i.

Con todo, de la convergencia de la sucesión $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ existe cierto $k_0 \geq 1$ tal que

$$\rho(x_{i_{k_0}}, y) < \varepsilon/2,$$

y así

$$\rho(x, K) \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_{i_{k_0}}) + \rho(x_{i_{k_0}}, y) < \varepsilon.$$

Por la arbitrariedad del punto $x \in K_n$ concluimos que

$$K_n \subset B(K, \varepsilon). \tag{C.3}$$

Así, por (C.2) y (C.3) podemos aplicar el Lema C.3 y concluir que

$$\rho_H(K, K_n) < \varepsilon.$$

Es decir, hemos visto que si $n \geq N$ entonces $\rho_H(K, K_n) < \varepsilon$, lo que prueba que

$$\rho_H(K, K_n) \longrightarrow 0$$

y finaliza la demostración. ■

Teorema C.7. *Si X es un espacio polaco, entonces $\mathcal{K}(X)$ con la topología de Vietoris es un espacio polaco.*

Demostración:

Sea τ la topología de Vietoris en $\mathcal{K}(X)$ y ρ una métrica completamente compatible en X.

Por la Proposición C.6 sabemos que $(\mathcal{K}(X), \rho_H)$ será un espacio métrico completo y por la Proposición C.4 tenemos entonces que ρ_H será una métrica completamente compatible en $(\mathcal{K}(X), \tau)$.

Como además X es separable, por la Proposición C.2 tenemos que $(\mathcal{K}(X), \tau)$ es también separable y con todo, es polaco. ■

Finalizamos la sección dando un conjunto de generadores para la σ-álgebra de Borel de $\mathcal{K}(X)$ cuando X es un espacio metrizable y compacto.

Teorema C.8. *Si X es un espacio metrizable y compacto entonces $\mathcal{B}(\mathcal{K}(X))$ está generada por el conjunto*

$$\Lambda = \{I_U : U \text{ es abierto en } X\}.$$

Demostración:

En primer lugar, como dado U abierto en X se tiene que I_U es abierto en $\mathcal{K}(X)$, es claro que $I_U \in \mathcal{B}(\mathcal{K}(X))$ y así

$$\sigma(\Lambda) \subset \mathcal{B}(\mathcal{K}(X)).$$

Para ver la inclusión recíproca observemos que basta ver que dado U un abierto en X se cumple que $C_U \in \sigma(\Lambda)$.

Efectivamente, como todo abierto de $\mathcal{K}(X)$ es unión numerable[16] de intersecciones finitas de conjuntos de la forma C_V o I_V para V abierto en X, tendríamos que al ser $\sigma(\Lambda)$ una σ-álgebra cualquier abierto de $\mathcal{K}(X)$ está en $\sigma(\Lambda)$ y con ello

$$\mathcal{B}(\mathcal{K}(X)) \subset \sigma(\Lambda).$$

Así pues consideremos $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base numerable de X cerrada por uniones finitas[17] y observemos que

$$K \in C_U \Leftrightarrow K \cap (X \setminus U) = \varnothing \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : [(X \setminus U) \subset U_n \wedge K \cap U_n = \varnothing]. \tag{C.4}$$

[16] Al ser X compacto y metrizable, de la Proposición 1.1.9 tenemos que X es separable y metrizable, y por las Proposiciones C.2 y C.4 también lo es $\mathcal{K}(X)$. Por el Teorema 1.1.8, $\mathcal{K}(X)$ tiene entonces una base numerable y por el Teorema E.1 podemos extraer una base numerable de la base dada por la subbase $\mathcal{S}$ de $\mathcal{K}(X)$.

[17] Dada cualquier base numerable $\mathcal{B}$ de X, basta tomar el álgebra generada por $\mathcal{B}$ como la base buscada.

La primera equivalencia es clara por la definición de C_U y la implicación de derecha a izquierda de la segunda es también directa, con lo que basta únicamente ver la implicación de izquierda a derecha en la segunda equivalencia.

Como X es metrizable será normal, en particular Hausdorff, y al ser K compacto tenemos que es cerrado. Así $K, X \setminus U$ son cerrados disjuntos y existen pues abiertos disjuntos V, W tales que $K \subset V$ y $X \setminus U \subset W$.

Ahora, como W es abierto podemos expresarlo como

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{n_k}$$

para alguna subsucesión $\{U_{n_k}\}$ de $\{U_n\}$.

Por tanto, $\{U_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ será un cubrimiento abierto de $X \setminus U$ y como este es compacto (pues es cerrado en X que es compacto) tenemos que existe un subcubrimiento finito $\{U_{n_{k_1}}, \cdots, U_{n_{k_m}}\}$, es decir,

$$X \setminus U \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_{n_{k_i}}.$$

Como la base $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ es cerrada por uniones finitas existe cierto $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{i=1}^{m} U_{n_{k_i}} = U_n,$$

y así $X \setminus U \subset U_n$ y claramente $K \cap U_n = \varnothing$ pues $U_n \subset W$, $K \subset V$ y $V \cap W = \varnothing$.

Con esto, queda demostrado (C.4) y tenemos que si es

$$M = \{n \in \mathbb{N} : X \setminus U \subset U_n\},$$

entonces

$$C_U = \bigcup_{n \in M} (\mathcal{K}(X) \setminus I_{U_n}) \in \sigma(\Lambda)$$

y concluimos la demostración. ■

D. Teoremas de inducción y recursión transfinita

En el capítulo sobre teoría descriptiva de conjuntos se trata de forma habitual con ordinales y con los teoremas de inducción y recursión transfinita, resultados que no son de uso común en la mayoría de ramas de las matemáticas.

Por la intención autocontenida del texto daremos una muy breve introducción intuitiva a los números ordinales y enunciaremos dichos importantes teoremas. Además, daremos un breve ejemplo del teorema de recursión de modo que, aunque generalmente es omitido en las demostraciones, pueda entenderse su uso subyacente en las mismas.

Para obtener más información sobre el tema se recomienda consultar los excelentes libros [20], [24], o en castellano [21], aunque una fantástica introducción también puede consultarse en el primer capítulo de [35].

La idea de los números ordinales es poder contar más allá de los números naturales, es decir "imaginamos" un número infinito ω que viene después de todos los naturales y continuamos el proceso de conteo como $\omega, \omega + 1, (\omega + 1) + 1, \ldots$

Recordemos que en la definición conjuntista de los números naturales identificamos el cero con el conjunto vacío y cada $n \in \mathbb{N}$ como

$$n = \{m \in \mathbb{N} : m < n\},$$

siendo

$$n + 1 = n \cup \{n\}$$

y la relación de orden usual dada por

$$n < m \Leftrightarrow n \in m.$$

Definimos entonces el menor ordinal infinito ω como los números naturales y el sucesor de este de forma análoga como

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}.$$

En general, decimos que un **número ordinal** α es un conjunto transitivo[18] y bien ordenado por la relación de pertenencia.

Bajo esta definición todo número natural así como ω son números ordinales y además, si es α un número ordinal entonces su sucesor

$$\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$$

también es un número ordinal.

Se tiene además que los números ordinales finitos son precisamente los números naturales y aunque la clase de todos los números ordinales no es un conjunto, si se tiene que cualquier conjunto de números ordinales está bien ordenado por la relación de pertenencia, lo que formaliza la idea intuitiva de la construcción por conteo más allá de los naturales.

Otro concepto importante es el de **ordinal límite** que se define como cualquier ordinal α tal que no existe ningún otro ordinal β de modo que $\alpha = \beta + 1$.

Los ordinales límite más importantes que tratamos en el texto son ω, el primer ordinal infinito; y ω_1, el primer ordinal de cardinal no numerable.

Destaquemos también que cualquier conjunto de números ordinales tiene un **supremo** pues se puede demostrar que si X es un conjunto de ordinales, entonces $\bigcup X$ es un ordinal que cumple ser el menor ordinal mayor o igual a cualquier elemento de X.

Para finalizar esta breve introducción y antes de pasar ya a tratar con los dos teoremas más importantes de los números ordinales, destacamos que estos juegan un papel fundamental en el estudio de los conjuntos bien ordenados, pues todo conjunto bien ordenado será isomorfo a un único ordinal; y también son importantes en la definición de los cardinales, que no serán más que ciertos ordinales con propiedades concretas.

[18] *Un conjunto T se dice que es **transitivo** si cualquier elemento de T es también un subconjunto de T.*

Teorema D.1. (Teorema de inducción transfinita) *Sea $P(x)$ una propiedad (posiblemente con más parámetros) y supongamos que para cualquier ordinal α se cumple:*

$$\textit{Si } P(\beta) \textit{ es cierta para todo } \beta < \alpha, \textit{ entonces } P(\alpha) \textit{ es cierto.}$$

Entonces, $P(\alpha)$ es cierta para todo ordinal α.

Una segunda versión útil cuando debemos distinguir ordinales límite es la siguiente.

Teorema D.2. (Teorema de inducción transfinita, segunda versión) *Sea $P(x)$ una propiedad (posiblemente con más parámetros), α_0 un ordinal y supongamos que se cumplen:*

(i) *$P(\alpha_0)$ es cierto;*

(ii) *$P(\alpha)$ implica $P(\alpha+1)$ para todo ordinal $\alpha \geq \alpha_0$;*

(iii) *Para todo ordinal límite no nulo $\alpha \geq \alpha_0$, si $P(\beta)$ es cierto para todo $\alpha_0 \leq \beta < \alpha$ entonces $P(\alpha)$ es cierto.*

Entonces $P(\alpha)$ es cierto para todo ordinal $\alpha \geq \alpha_0$.

Como vemos en forma es muy similar al teorema de inducción sobre los números naturales y su uso en las demostraciones del segundo capítulo es realmente muy similar.

El teorema de recursión transfinita presenta por otra parte una mayor dificultad y aunque se usa en muchas definiciones y demostraciones, simplemente se menciona su uso pero no se dan en detalle las características y elementos que permiten utilizarlo. Esto suele deberse a que dichos detalles pueden llegar a ser muy engorrosos y en la mayoría de ocasiones se ve clara su aplicación. Cabe también mencionar que en muchos textos se enuncian construcciones y definiciones “inductivas” donde realmente se está haciendo uso de este teorema y puesto que no se dan más detalles se debe estar atento para discernir cual de los dos conceptos se está utilizando.

Teorema D.3. (Teorema de recursión transfinita) *Si G es una aplicación sobre V la clase de todos los conjuntos, entonces existe una única aplicación sobre Ω la clase de todos los números ordinales tal que*

$$F(\alpha) = G(F|_\alpha),$$

siendo $F|_\alpha$ la restricción de F al ordinal α, es decir, la sucesión transfinita

$$\langle F(\beta) : \beta < \alpha \rangle.$$

En esencia, el teorema de recursión transfinita nos garantiza que teniendo una operación G que a cada conjunto le asigna otro de forma única, podemos construir también de forma única una sucesión transfinita F, tal que el valor de F sobre cualquier ordinal depende únicamente de G y de todos los valores anteriores.

La **suma de ordinales** se define de forma recursiva tal que para cada ordinal β es:

(i) $\beta + 0 = \beta$;

(ii) $\beta + (\alpha + 1) = (\beta + \alpha) + 1$ para cada ordinal α;

(iii) $\beta + \alpha = \sup\{\beta + \gamma : \gamma < \alpha\}$ para cada ordinal límite $\alpha > 0$.

Así el primer uso que se da en la mayoría de textos de teoría de conjuntos al teorema de recursión transfinita, es demostrar que efectivamente existe una única aplicación sobre la clase de todos los ordinales que satisface dichas propiedades (véase [21, Defn. 3.33]).

Observemos que la definición para la suma justifica la notación $\alpha + 1$ para el sucesor de α, pues si denotamos por $\bar{1}$ el sucesor del 0 (para distinguirlo de la notación de sucesor) tenemos que

$$\alpha + \bar{1} = \alpha + (0 + 1) = (\alpha + 0) + 1 = \alpha + 1.$$

Como ejemplo para demostrar su uso y por la gran relación con el texto, nosotros veremos que las clases de Borel están correctamente definidas y de forma única.

Sea pues X un espacio metrizable y definamos G una función sobre V la clase de todos los conjuntos como:

- Si f es una aplicación con dominio $1 = \{0\}$, entonces

$$G(f) = \{A \subset X : A \text{ es abierto en } X\}.$$

- Si f es una aplicación con dominio un ordinal $\alpha > 1$, entonces

$$G(f) = \left\{ \bigcup_{n \in \omega} A_n : \forall n \in \omega \left(A_n \subset X \wedge X \setminus A_n \in \bigcup_{0 < \beta < \alpha} f(\beta) \right) \right\}.$$

- $G(x) = \varnothing$ si x es cualquier conjunto distinto a los descritos anteriormente.

Por el teorema de recursión transfinita tenemos entonces que existe una única aplicación $F : \Omega \longrightarrow V$ tal que para cada $\alpha \in \Omega$ es

$$F(\alpha) = G(F|_\alpha).$$

Definamos pues para $\alpha \geq 1$

$$\Sigma^0_\alpha(X) = F(\alpha),$$
$$\Pi^0_\alpha(X) = \left\{ A \subset X : X \setminus A \in \Sigma^0_\alpha(X) \right\}$$

y veamos que efectivamente se corresponden con las definiciones de la jerarquía de Borel.

Sin más, si es $\alpha = 1$ entonces $F|_\alpha$ es una aplicación con dominio 1 luego

$$\Sigma^0_1(X) = F(1) = G(F|_1) = \{A \subset X : A \text{ es abierto en } X\}.$$

Por otra parte, si $\alpha > 1$ tenemos que $F|_\alpha$ es una aplicación con dominio un ordinal mayor que uno y así

$$\begin{aligned}\Sigma^0_\alpha(X) = F(\alpha) = G(F|_\alpha) &= \left\{\bigcup_{n\in\omega} A_n : \forall n \in \omega \left(A_n \subset X \wedge X \setminus A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} F(\beta)\right)\right\} \\ &= \left\{\bigcup_{n\in\omega} A_n : \forall n \in \omega \left(A_n \subset X \wedge X \setminus A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \Sigma^0_\beta(X)\right)\right\} = \\ &= \left\{\bigcup_{n\in\omega} A_n : \forall n \in \omega, A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \Pi^0_\beta(X)\right\}.\end{aligned}$$

Con esto, tenemos además que

$$\Pi^0_\alpha(X) = \left\{A \subset X : X \setminus A \in \Sigma^0_\alpha(X)\right\} = \left\{X \setminus A : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\right\}$$

luego efectivamente las definiciones coinciden y tenemos que la jerarquía está bien definida para cada ordinal $\alpha \geq 1$.

Para finalizar la sección daremos dos pequeños lemas sobre ordinales que se utilizan brevemente en los Capítulos 2 y 3.

Lema D.4. *Si α es un ordinal mayor o igual a ω, entonces para cualquier natural m se tiene que $m + \alpha = \alpha$.*

Demostración:

Observemos en primer lugar que el resultado es cierto para ω.

Efectivamente, como ω es un ordinal límite y dado $\gamma < \omega$ se tiene que $m + \gamma \in \omega$, obtenemos que

$$m + \omega = \sup\{m + \gamma : \gamma < \omega\} = \sup\{\gamma : m \leq \gamma < \omega\} = \sup\{\gamma : \gamma < \omega\} = \omega.$$

Supongamos ahora que el lema es cierto para $\alpha \geq \omega$ y veamos que entonces también lo es para $\alpha + 1$.

Sin más, como la suma de ordinales es asociativa dado $m \in \omega$

$$m + (\alpha + 1) = (m + \alpha) + 1 \underset{\text{(HI)}}{=} \alpha + 1.$$

Por último, si es $\alpha > \omega$ un ordinal límite tal que para cada $\omega \leq \beta < \alpha$ se cumple el lema, entonces tenemos que por definición de la suma de ordinales dado $m \in \omega$

$$m + \alpha = \sup\{m + \gamma : \gamma < \alpha\} = \sup\{m + \gamma : \omega \leq \gamma < \alpha\} \underset{\text{(HI)}}{=} \sup\{\gamma : \omega \leq \gamma < \alpha\} = \alpha.$$

Los tres casos vistos prueban pues el resultado por inducción transfinita. ■

Lema D.5. *Dados β, γ ordinales no nulos, se cumple que $\gamma < 1+\beta$ si, y solo si, $\gamma = 1+\alpha$ para cierto $\alpha < \beta$.*

Demostración:

La implicación recíproca es clara por las propiedades de los ordinales, se puede consultar [20, Chp. 6, Lemma 5.4 (a)].

Para la implicación directa, observemos que si $\beta < \omega$ y $\gamma < 1+\beta$, como en este caso β y γ son números naturales no nulos, basta expresar $\gamma = 1 + (\gamma - 1)$ siendo $\gamma - 1 < \beta$.

Si es $\beta \geq \omega$ y $\gamma < 1+\beta$, como por el lema anterior $\beta = 1+\beta$, tenemos que $\gamma < \beta$.

Así, si $\gamma \in \omega$ basta como antes considerar $\gamma = 1 + (\gamma - 1)$ pues $\gamma - 1 < \omega \leq \beta$; y si $\gamma \geq \omega$ entonces por el lema anterior es también $\gamma = 1 + \gamma$ siendo como hemos visto $\gamma < \beta$, lo que concluye la demostración. ■

E. Resultados sobre bases en espacios topológicos

Daremos en esta sección un resultado muy útil sobre la cardinalidad de las bases de espacios topológicos, que se utiliza a lo largo del texto para justificar que en un espacio con base numerable los abiertos siempre pueden expresarse como unión numerable de elementos de cualquier base. Veremos también un teorema de universalidad del cubo de Hilbert que permite demostrar fácilmente algunos resultados en el texto principal.

Teorema E.1. *Si X es un espacio topológico que tiene una base infinita con cardinal κ, entonces toda base infinita de X contiene una base de cardinal menor o igual a κ.*

Demostración:

Sea $\mathcal{B}$ una base de X de cardinal κ y $\mathcal{B}'$ otra base infinita cualquiera.

Como $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de X, para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B$ podemos tomar $B'_x \in \mathcal{B}'$ y $B_x \in \mathcal{B}$ de modo que

$$x \in B_x \subset B'_x \subset B. \tag{E.1}$$

Definamos pues para cada $B \in \mathcal{B}$ el conjunto

$$\mathcal{B}_B = \{B_x : x \in B\},$$

el cual es un subconjunto de $\mathcal{B}$ y por tanto tiene cardinal menor o igual a κ.

Ahora, por (E.1) dado $U \in \mathcal{B}_B$ existe $B'_U \in \mathcal{B}'$ tal que $U \subset B'_U \subset B$ y podemos definir

$$\mathcal{B}'_B = \{B'_U : U \in \mathcal{B}_B\},$$

que será un subconjunto de $\mathcal{B}'$ de cardinal menor o igual a κ.

Definamos ahora

$$\Lambda = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{B}'_B$$

y veamos que es la base buscada.

En primer lugar, es claro que está contenida en $\mathcal{B}'$ pues cada $\mathcal{B}'_B$ lo está.

Además, como tanto el cardinal de $\mathcal{B}$ como el de $\mathcal{B}'_B$ son menores o iguales a κ, tenemos que el cardinal[19] de Λ es menor o igual a κ.

Por tanto resta únicamente ver que es base de X, para lo cual veamos que dado A abierto en X y $x \in A$ existe cierto $U \in \Lambda$ tal que $x \in U \subset A$.

Sin más, por ser $\mathcal{B}$ una base existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset A$ y por definición, tenemos que $B'_{B_x} \in \mathcal{B}'_B \subset \Lambda$ y

$$x \in B_x \subset B'_{B_x} \subset B \subset A$$

con lo que efectivamente Λ es base de X. ■

Teorema E.2. *Si X es un espacio topológico completamente regular con una base infinita de cardinal κ, entonces X es homeomorfo a un subespacio del espacio producto $[0,1]^\kappa$.*

Demostración:

Como X es completamente regular, por el Teorema A.6 tenemos que tiene una base formada por coceros y del teorema anterior obtenemos que tiene una base formada por coceros de cardinal menor o igual a κ.

Supongamos pues que dicha base es de la forma[20]

$$\mathcal{B} = \{X \setminus Z(f_\alpha)\}_{\alpha<\kappa},$$

donde cada $f_\alpha : X \longrightarrow [0,1]$ es continua.

Consideremos pues $f : X \longrightarrow [0,1]^\kappa$ dada por $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x)$ para cada ordinal $\alpha < \kappa$.

Entonces f es continua pues si es $\pi_\alpha : [0,1]^\kappa \longrightarrow [0,1]$ una proyección, observamos que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$ que es continua.

Además, veamos que es también inyectiva.

Si $x, y \in X$ son dos puntos distintos, entonces como X es en particular Hausdorff existen abiertos disjuntos U, V tales que $x \in U$ e $y \in V$. Además, como $\mathcal{B}$ es base de X, existe $\alpha < \kappa$ tal que $x \in X \setminus Z(f_\alpha) \subset U$ y como V es disjunto a U, $y \in Z(f_\alpha)$.

Con esto, $f_\alpha(y) = 0 \neq f_\alpha(x)$ y efectivamente $f(x) \neq f(y)$.

Veamos aún más que $f : X \longrightarrow f(X)$ es un homeomorfismo para lo cual, como sabemos que f es biyectiva (en su imagen) y continua, basta ver que es cerrada.

Basta probar pues que dado $C \subset X$ cerrado es $f(C) = \overline{f(C)} \cap f(X)$.

Es claro que $f(C) \subset \overline{f(C)} \cap f(X)$ y supongamos por reducción al absurdo que no se da la otra inclusión, es decir, que existe cierto $x \in X$ tal que $f(x) \in \overline{f(C)} \setminus f(C)$.

[19] Es un resultado conocido en teoría de conjuntos que, suponiendo cierto el axioma de elección, dada una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ tal que $|I| \leq \kappa$ y $|A_i| \leq \kappa$ para cada $i \in I$, entonces

$$\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq \kappa$$

La demostración no es complicada pero precisa resultados y definiciones de teoría de conjuntos que alargarían demasiado el texto, por lo que se remite al lector a los capítulos 6, 7 y 8 de [20].

[20] Consideramos que habrán repeticiones en los conjuntos si el cardinal de la base es menor a κ.

Entonces $x \in X \setminus C$, que es abierto, y existe pues un $\alpha < \kappa$ tal que

$$x \in X \setminus Z(f_\alpha) \subset X \setminus C$$

y con ello tal que $C \subset Z(f_\alpha)$.
Así pues tenemos que

$$U = \{y \in [0,1]^\kappa : y_\alpha > 0\}$$

es un entorno abierto de $f(x)$.
Efectivamente $f(x) \in U$ pues $f(x)(\alpha) = f_\alpha(x) > 0$ al ser $x \in X \setminus Z(f_\alpha)$, y para ver que es abierto basta observar que

$$U = \prod_{\beta<\kappa} Y_\beta$$

donde $Y_\beta = [0,1]$ si $\beta \neq \alpha$ e $Y_\alpha = (0,1]$.
Además, tenemos que

$$U \cap f(C) = \varnothing$$

pues si es $y = f(x)$ con $x \in C$ entonces $y_\alpha = f(x)(\alpha) = f_\alpha(x) = 0$ por estar $C \subset Z(f_\alpha)$.

Por tanto, tenemos que U es un entorno abierto de $f(x)$ cuya intersección con $f(C)$ es vacía y esto supone una contradicción con que $f(x) \in \overline{f(C)}$.

Así, queda demostrado que $f : X \longrightarrow f(X)$ es un homeomorfismo y con ello que efectivamente X es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^\kappa$. ■

F. Detalles de algunas demostraciones

Dedicamos esta última sección a las pruebas de ciertos detalles en algunas demostraciones del texto principal, que por su carácter técnico desviarían la atención de las ideas principales de dichas demostraciones.

Lema F.1. *Si X es un conjunto no vacío y $a : X \times X \longrightarrow [0,+\infty)$ una aplicación tal que para todo $x \in X$ es $a(x,x) = 0$, entonces existe una pseudométrica $\tilde{a}$ sobre X que cumple:*

(i) $\tilde{a}(x,y) \leq a(x,y),\ \forall x,y \in X$;

(ii) *Si ρ es cualquier otra pseudométrica sobre X que cumple la condición anterior, entonces $\rho(x,y) \leq \tilde{a}(x,y)$ para cada $x,y \in X$.*

Si además X es un espacio topológico y a es una aplicación continua en $X \times X$, entonces $\tilde{a}$ es también continua.

Demostración:

Definamos en primer lugar para cada $x,y \in X$

$$\bar{a}(x,y) = \min\{a(x,y), a(y,x)\},$$

y a partir de esta sea

$$\tilde{a}(x,y) = \inf\{\bar{a}(x,y), \bar{a}(x,x_1) + \bar{a}(x_1,x_2) + \cdots + \bar{a}(x_n,y) : n \in \mathbb{N}, x_1, \cdots, x_n \in X\}.$$

Comprobemos que efectivamente esta es la aplicación buscada.

En primer lugar, es claro que está bien definida pues al ser a una aplicación con valores en $[0,+\infty)$ el conjunto sobre el que se toma el ínfimo está acotado inferiormente por cero.

Además, por la propia definición, se ve que dados $x, y \in X$

$$\tilde{a}(x,y) \leq \bar{a}(x,y) \leq a(x,y).$$

Observemos también que si es β una pseudométrica por debajo de a, entonces dados dos puntos $x, y \in X$ se tiene que

$$\beta(x,y) \leq a(x,y)$$

y

$$\beta(x,y) = \beta(y,x) \leq a(y,x),$$

con lo que

$$\beta(x,y) \leq \bar{a}(x,y).$$

Con esto, dados $x_1, \cdots, x_n \in X$ cualesquiera, por ser β una pseudométrica se cumple que

$$\beta(x,y) \leq \beta(x,x_1) + \beta(x_1,x_2) + \cdots + \beta(x_n,y) \leq \bar{a}(x,x_1) + \bar{a}(x_1,x_2) + \cdots + \bar{a}(x_n,y)$$

y por la definición de ínfimo concluimos que $\beta(x,y) \leq \tilde{a}(x,y)$.

Resta pues ver que $\tilde{a}$ es una pseudométrica.

En primer lugar dado $x \in X$ tenemos que

$$0 \leq \tilde{a}(x,x) \leq a(x,x) = 0,$$

con lo que $\tilde{a}(x,x) = 0$.

Respecto a la simetría, observemos que dados $x, y \in X$ y $x_1, \cdots, x_n \in X$ cualesquiera se tiene que

$$\bar{a}(y,x_1) + \bar{a}(x_1,x_2) + \cdots + \bar{a}(x_n,x) = \bar{a}(x,x_n) + \bar{a}(x_n,x_{n-1}) + \cdots + \bar{a}(x_1,y).$$

Por tanto, el conjunto sobre el que se toma el ínfimo para $\tilde{a}(x,y)$ y $\tilde{a}(y,x)$ es el mismo y efectivamente es

$$\tilde{a}(x,y) = \tilde{a}(y,x).$$

Por último, veamos que se cumple la desigualdad triangular.

Dados $x, y, z \in X$, por la definición de ínfimo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $n_k, m_k \in \mathbb{N}$ y $x_1^k, \cdots, x_{n_k}^k, y_1^k, \cdots, y_{m_k}^k \in X$ tales que

$$\tilde{a}(x,z) + \frac{1}{2k} > \bar{a}(x,x_1^k) + \bar{a}(x_1^k,x_2^k) + \cdots + \bar{a}(x_{n_k}^k,z)$$

y

$$\tilde{a}(z,y) + \frac{1}{2k} > \bar{a}(x,y_1^k) + \bar{a}(y_1^k,y_2^k) + \cdots + \bar{a}(y_{n_k}^k,y).$$

Por tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x,z) + \tilde{a}(z,y) + \frac{1}{k} > \bar{a}(x,x_1^k) + \bar{a}(x_1^k,x_2^k) + \cdots + \bar{a}(x_{n_k}^k,z) + \\ + \bar{a}(x,y_1^k) + \bar{a}(y_1^k,y_2^k) + \cdots + \bar{a}(y_{n_k}^k,y)\end{aligned}$$

y con ello

$$\begin{aligned}\tilde{a}(x,z)+\tilde{a}(z,y) &= \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\tilde{a}(x,z)+\tilde{a}(z,y)+\frac{1}{k}\right\} \geq \\ &\geq \inf_{k\in\mathbb{N}}\left\{\bar{a}(x,x_1^k)+\cdots+\bar{a}(x_{n_k}^k,z)+\bar{a}(x,y_1^k)+\cdots+\bar{a}(y_{n_k}^k,y)\right\} \geq \tilde{a}(x,y).\end{aligned}$$

Para finalizar, veamos que si X un espacio topológico y a es continua entonces $\tilde{a}$ también es continua.

Dada una red $\{(x_d,y_d)\}_{d\in D}$ en $X\times X$ convergente a (x,y), por la propiedad universal de la topología producto, tenemos que $x_d \xrightarrow{d\in D} x$ e $y_d \xrightarrow{d\in D} y$, luego por la continuidad de a

$$a(x_d,x) \xrightarrow{d\in D} a(x,x)=0$$

y

$$a(y_d,y) \xrightarrow{d\in D} a(y,y)=0.$$

Con esto

$$\begin{aligned}|\tilde{a}(x_d,y_d)-\tilde{a}(x,y)| &\leq |\tilde{a}(x_d,y_d)-\tilde{a}(x_d,y)|+|\tilde{a}(x_d,y)-\tilde{a}(x,y)| \leq \tilde{a}(y_d,y)+\tilde{a}(x_d,x) \leq \\ &\leq a(y_d,y)+a(x_d,x),\end{aligned}$$

y como el último término en la desigualdad hemos visto que converge a cero, concluimos que

$$\tilde{a}(x_d,y_d) \xrightarrow{d\in D} \tilde{a}(x,y).$$

Por la arbitrariedad de la red y del punto (x,y), queda probada la continuidad de $\tilde{a}$. ■

Lema F.2. *La aplicación α definida* (3.31) *está bien definida y además es una métrica continua.*

Demostración:

Sean $\mu,\lambda\in\mathcal{A}$ fijos y definamos $f:\mathbb{N}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ dada por

$$f(n,k)=\min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda),2^{-\max\{n,k\}}\right\}.$$

Observemos en primer lugar que

$$f(n,k)\leq 2^{-\max\{n,k\}}\leq 2^{-1},$$

con lo que

$$K=\sup_{n,k\in\mathbb{N}} f(n,k)\leq\frac{1}{2}$$

y si vemos que dicho supremo se alcanza en algún punto $(n,k)\in\mathbb{N}^2$, entonces tenemos que efectivamente α está bien definida.

Sin más, si $K=0$, puesto que f es no negativa, tendríamos que $f(n,k)=0$ para cada $n,k\in\mathbb{N}$ y efectivamente el supremo se alcanza en cualquier punto de $\mathbb{N}^2$.

Ahora, si es $K>0$ y tomamos $m\in\mathbb{N}$ tal que $2^{-m}<K/2$ entonces

$$F=\left\{(n,k)\in\mathbb{N}^2 : f(n,k)\geq\frac{K}{2}\right\}\subset\left\{(n,k)\in\mathbb{N}^2 : \max\{n,k\}<m\right\} \tag{F.1}$$

pues si fuera $f(n,k) \geq K/2$ y $\max\{n,k\} \geq m$ se obtiene que

$$K/2 \leq f(n,k) \leq 2^{-\max\{n,k\}} \leq 2^{-m}$$

teniendo una contradicción.

Por tanto,

$$f(n,k) < K/2, \ \forall (n,k) \notin F$$

lo que implica que

$$K = \sup_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} f(n,k) = \sup_{(n,k)\in F} f(n,k),$$

y como por (F.1) tenemos que F es finito, dicho supremo se alcanza en F tal como queríamos ver.

Veamos ahora que α es continua en $(\mu_0,\lambda_0) \in \mathcal{A}^2$.

Observemos en primer lugar que como dados $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}\Big[(a+b) - |b-a|\Big]$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\left|\min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} - \min\left\{\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0), 2^{-\max\{n,k\}}\right\}\right| = \\
&= \frac{1}{2}\left|\beta_k^n(\mu,\lambda) - \beta_k^n(\mu_0,\lambda_0) + \left|\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0) - 2^{-\max\{n,k\}}\right| - \left|\beta_k^n(\mu,\lambda) - 2^{-\max\{n,k\}}\right|\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\Big[\left|\beta_k^n(\mu,\lambda) - \beta_k^n(\mu_0,\lambda_0)\right| + \left|\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0) - \beta_k^n(\mu,\lambda)\right|\Big] = \left|\beta_k^n(\mu,\lambda) - \beta_k^n(\mu_0,\lambda_0)\right|. \quad \text{(F.2)}
\end{aligned}$$

Sea pues $\varepsilon > 0$ fijo y distingamos dos casos en función de si $\alpha(\mu_0,\lambda_0)$ es o no nula.

En primer lugar, si $\alpha(\mu_0,\lambda_0) = 0$ tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-m} < \varepsilon$ y $F = \{1,\cdots,m\}^2$.

Así, si $(n,k) \notin F$ se cumple que $2^{-\max\{n,k\}} < \varepsilon$ y por tanto dados $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$ cualesquiera es

$$\max_{(n,k)\notin F} \min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} \leq \max_{(n,k)\notin F} 2^{-\max\{n,k\}} < \varepsilon. \quad \text{(F.3)}$$

Por otra parte, si $(n,k) \in F$ entonces de la continuidad de β_k^n existe U_k^n un entorno abierto de (μ_0,λ_0) en $\mathcal{A}^2$ tal que[21] dado $(\mu,\lambda) \in U_k^n$ es $\beta_k^n(\mu,\lambda) < \varepsilon$.

Por tanto, si definimos

$$U = \bigcap_{(n,k)\in F} U_k^n$$

tenemos que, al ser F finito, es un entorno abierto de (μ_0,λ_0) en $\mathcal{A}^2$ y si $(\mu,\lambda) \in U$ entonces

$$\max_{(n,k)\in F} \min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} \leq \max_{(n,k)\in F} \beta_n^k(\mu,\lambda) < \varepsilon. \quad \text{(F.4)}$$

[21] Observemos que puesto que $\alpha(\mu_0,\lambda_0) = 0$ entonces $\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0) = 0$ para cada $n, k \in \mathbb{N}$.

Con todo si es $(\mu,\lambda)\in U$, por (F.3) y (F.4) tenemos que

$$\alpha(\mu,\lambda)=\max\left\{\max_{(n,k)\in F}\min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda),2^{-\max\{n,k\}}\right\},\max_{(n,k)\notin F}\min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda),2^{-\max\{n,k\}}\right\}\right\}<\varepsilon.$$

Es decir, hemos demostrado que existe U un entorno de (μ_0,λ_0) en $\mathcal{A}^2$ tal que si $(\mu,\lambda)\in U$ entonces

$$|\alpha(\mu,\lambda)-\alpha(\mu_0,\lambda_0)|=\alpha(\mu,\lambda)<\varepsilon,$$

con lo que queda probada la continuidad de α en (μ_0,λ_0).
Por otra parte, si es $\alpha(\mu_0,\lambda_0)=\delta_0>0$ consideremos ahora $m\in\mathbb{N}$ tal que $2^{-m}<\delta_0/4$ y de nuevo denotemos por $F=\{1,\cdots,m\}^2$.
Entonces

$$\delta_0=\alpha(\mu_0,\lambda_0)=\max_{(n,k)\in F}\min\left\{\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0),2^{-\max\{n,k\}}\right\},$$

pues si $(n,k)\notin F$ se tiene que

$$\min\left\{\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0),2^{-\max\{n,k\}}\right\}\le 2^{-\max\{n,k\}}<2^{-m}<\frac{\delta_0}{4}.$$

Definamos también para cada par $(n,k)\in\mathbb{N}^2$ las aplicaciones

$$f_k^n(\mu,\lambda)=\min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda),2^{-\max\{n,k\}}\right\}$$

y

$$F'=\left\{(n,k)\in F: f_n^k(\mu_0,\lambda_0)=\delta_0\right\}.$$

Tomemos también $0<\gamma<\delta_0-M$ siendo[22]

$$M=\max\left\{f_n^k(\mu_0,\lambda_0):(n,k)\in F\setminus F'\right\}$$

y

$$0<\delta<\min\left\{\varepsilon,\frac{\gamma}{16}\right\}.$$

Como antes, si $(n,k)\in F$ entonces de la continuidad de β_k^n existe U_k^n un entorno abierto de (μ_0,λ_0) en $\mathcal{A}^2$ tal que dado $(\mu,\lambda)\in U_k^n$ se cumple que

$$|\beta_k^n(\mu,\lambda)-\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0)|<\delta. \tag{F.5}$$

Definiendo pues

$$U=\bigcap_{(n,k)\in F}U_k^n$$

tenemos que si $(\mu,\lambda)\in U$ entonces para cualquier $(n,k)\in F$

$$|f_k^n(\mu,\lambda)-f_k^n(\mu_0,\lambda_0)|\underset{(F.2)}{\le}|\beta_k^n(\mu,\lambda)-\beta_k^n(\mu_0,\lambda_0)|\underset{(F.5)}{<}\delta. \tag{F.6}$$

[22] Consideramos que $\max\varnothing=0$.

Con todo, si vemos que dado $(\mu, \lambda) \in U$ existe $(n, k) \in F'$ tal que $\alpha(\mu, \lambda) = f_k^n(\mu, \lambda)$ entonces

$$|\alpha(\mu, \lambda) - \alpha(\mu_0, \lambda_0)| = |f_k^n(\mu, \lambda) - f_k^n(\mu_0, \lambda_0)| \underset{(F.6)}{<} \delta < \varepsilon$$

y concluimos que efectivamente α es continua en (μ_0, λ_0).

Sean pues $(\mu, \lambda) \in U$ y $(n, k) \in F'$, entonces

$$f_k^n(\mu, \lambda) \underset{(F.6)}{>} f_k^n(\mu_0, \lambda_0) - \delta = \delta_0 - \delta > \delta_0 - \frac{\gamma}{16} > \delta_0 - \left(\frac{\delta_0}{16} - \frac{1}{16}M\right) = \frac{15}{16}\delta_0 + \frac{1}{16}M. \tag{F.7}$$

Por tanto, si $(n, k) \notin F$ entonces para cualquier $(n', k') \in F'$ se tiene que

$$f_k^n(\mu, \lambda) \leq 2^{-\max\{n,k\}} \underset{(n,k)\notin F}{<} 2^{-m} < \frac{\delta_0}{4} < \frac{15}{16}\delta_0 \underset{(F.7)}{<} f_{k'}^{n'}(\mu, \lambda) \leq \alpha(\mu, \lambda).$$

Aun más, si $(n, k) \in F \setminus F'$ entonces dado $(n', k') \in F'$

$$\begin{aligned} f_k^n(\mu, \lambda) &\underset{(F.6)}{<} f_k^n(\mu_0, \lambda_0) + \delta < f_k^n(\mu_0, \lambda_0) + \frac{\gamma}{16} = (f_k^n(\mu_0, \lambda_0) + \gamma) - \frac{15}{16}\gamma \leq \\ &\leq (M + \gamma) - \frac{15}{16}\gamma < \delta_0 - \frac{15}{16}\gamma < \delta_0 - \frac{\gamma}{16} \underset{(F.7)}{<} f_{k'}^{n'}(\mu, \lambda) \leq \alpha(\mu, \lambda). \end{aligned}$$

Con todo, tenemos que

$$\alpha(\mu, \lambda) > \max_{(n,k)\notin F'} f_k^n(\mu, \lambda)$$

y concluimos pues que

$$\alpha(\mu, \lambda) = \max_{(n,k)\in F'} f_k^n(\mu, \lambda)$$

obteniendo justamente lo deseado.

Para finalizar, veamos que α es también una métrica en $\mathcal{A}$.

La simetría es directa por la simetría de los β_k^n y observemos que como $2^{-m} > 0$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$ y $\beta_k^n(\mu, \lambda) \geq 0$ para todo $\mu, \lambda \in \mathcal{A}$, entonces

$$\alpha(\mu, \lambda) = 0 \Leftrightarrow \beta_k^n(\mu, \lambda) = 0, \ \ \forall n, k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \mu = \lambda$$

donde en la última equivalencia usamos el hecho de que cada β_k^n es una métrica.

Falta únicamente ver que α satisface la desigualdad triangular para lo cual veamos primero que dados $\mu, \lambda, \nu \in \mathcal{A}$ se cumple que para cualesquiera $n, k \in \mathbb{N}$

$$\min\left\{\beta_k^n(\mu, \lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} \leq \min\left\{\beta_k^n(\mu, \nu), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} + \min\left\{\beta_k^n(\nu, \lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\}. \tag{F.8}$$

Efectivamente, si es $\beta_k^n(\mu, \lambda) \leq 2^{-\max\{n,k\}}$ entonces si cualquiera de los otros dos mínimos es $2^{-\max\{n,k\}}$ la desigualdad es clara y si no es así, sigue siendo cierta por la desigualdad triangular de β_k^n.

Por otro lado, si $2^{-\max\{n,k\}} < \beta_k^n(\mu, \lambda)$ nuevamente la desigualdad es clara si cualquiera de los otros dos mínimos es $2^{-\max\{n,k\}}$ y si no es así, como estamos considerando que $2^{-\max\{n,k\}} < \beta_k^n(\mu, \lambda)$ basta nuevamente aplicar la desigualdad triangular de β_k^n.

Por tanto, queda demostrado (F.8) y con ello si es $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tal que

$$\alpha(\mu,\lambda) = \min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\},$$

entonces

$$\alpha(\mu,\lambda) = \min\left\{\beta_k^n(\mu,\lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} \underset{(F.8)}{\leq} \min\left\{\beta_k^n(\mu,\nu), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} + \\ + \min\left\{\beta_k^n(\nu,\lambda), 2^{-\max\{n,k\}}\right\} \leq \alpha(\mu,\nu) + \alpha(\nu,\lambda)$$

y el lema queda probado. ■

Lema F.3. *Cada aplicación $\beta_k : \mathcal{B}_{(1)} \longrightarrow [0,+\infty]$ definida en el Lema 3.3.9 es finita para todo $\mu \in \mathcal{B}_{(1)}$ y además es continua.*

Demostración:
Veamos en primer lugar que fijado $(\mu,\lambda) \in \mathcal{B}_{(1)}$ se tiene que $\beta_k(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}$.
Lo haremos por inducción sobre k.
Para $k=1$ es trivialmente cierto con lo que supongamos que es cierto para $i \leq k$ y veamos entonces que $\beta_{k+1}(\mu,\lambda) \in \mathbb{R}$.
Como $\mu,\lambda \in \mathcal{B}_{(1)} \subset \mathcal{B}$ tenemos que $\bar{\mu},\bar{\lambda}$ son normas en c_{00} y con ello los espacios

$$X_1 = (\text{span}\{e_i : 1 \leq i \leq k\}, \bar{\mu})$$

y

$$X_2 = \left(\text{span}\{e_i : 1 \leq i \leq k\}, \bar{\lambda}\right)$$

son espacios de Banach de dimensión finita.
Además, por la equivalencia entre normas para los espacios de dimensión finita tenemos que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que para cualesquiera $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ son

$$C_2 \max_{1\leq i\leq k} |a_i| \leq \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right) \leq C_1 \max_{1\leq i\leq k} |a_i|$$

y

$$C_2 \max_{1\leq i\leq k} |a_i| \leq \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right) \leq C_1 \max_{1\leq i\leq k} |a_i|.$$

Por tanto, si son $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\min\left\{\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right), \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right)\right\} < \frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1} - \kappa_k}$$

tenemos que

$$\max_{1\leq i\leq k} |a_i| < \frac{2}{C_2}\frac{\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1} - \kappa_k},$$

y teniendo en cuenta que $\mu(e_{k+1}) = \lambda(e_{k+1}) = 1$ por ser $\mu,\lambda \in \mathcal{B}_{(1)}$ se cumple que

$$\left[\pm\bar{\mu}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_ie_i\right)\mp\bar{\lambda}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_ie_i\right)\right]+\sum_{i=1}^{k}|a_i|\,\beta_i(\mu,\lambda)\leq\pm\mu(e_{k+1})\mp\lambda(e_{k+1})+$$
$$+\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ie_i\right)+\bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ie_i\right)+\sum_{i=1}^{k}|a_i|\,\beta_i(\mu,\lambda)=\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ie_i\right)+\bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{k}a_ie_i\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}|a_i|\,\beta_i(\mu,\lambda)\leq 2C_1\max_{1\leq i\leq k}|a_i|+\max_{1\leq i\leq k}|a_i|\sum_{i=1}^{k}\beta_i(\mu,\lambda)<$$
$$<\frac{2}{C_2}\frac{\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1}-\kappa_k}\left[2C_1+\sum_{i=1}^{k}\beta_i(\mu,\lambda)\right].$$

Ahora, por hipótesis de inducción

$$K=\frac{2}{C_2}\frac{\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1}-\kappa_k}\left[2C_1+\sum_{i=1}^{k}\beta_i(\mu,\lambda)\right]\in\mathbb{R}$$

y como por definición es

$$0\leq\beta_{k+1}(\mu,\lambda)\leq K,$$

concluimos que efectivamente $\beta_{k+1}(\mu,\lambda)\in\mathbb{R}$.
Por inducción y la arbitrariedad de $\mu,\lambda\in\mathcal{B}_{(1)}$ queda demostrado que para cada $k\geq 1$

$$\beta_k(\mu,\lambda)\in\mathbb{R},\ \forall\mu,\lambda\in\mathcal{B}_{(1)}.$$

Para ver la continuidad, definamos en primer lugar para cada $\delta>0$, $\mu\in\mathcal{B}_{(1)}$ y $k\geq 1$

$$U_\delta^{k+1}(\mu)=\left\{\nu\in\mathcal{B}_{(1)}:\forall x\in\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}\}\setminus\{0_{c_{00}}\},(1+\delta)^{-1}<\frac{\bar{\nu}(x)}{\bar{\mu}(x)}<1+\delta\right\}.$$

Observemos entonces que se cumple la siguiente afirmación.
Afirmación 1: Dados $\delta>0$, $\mu\in\mathcal{B}_{(1)}$ y $k\geq 1$, se tiene que

$$U_\delta^{k+1}(\mu)=\mathcal{N}_{X_\mu}\left(\{e_i\}_{i=1}^{k+1},1+\delta,\{e_i\}_{i=1}^{k+1}\right)\cap\mathcal{B}_{(1)}$$

con lo que por la Proposición 3.2.6 es abierto en $\mathcal{B}_{(1)}$.
Demostración de la Afirmación 1:
Si denotamos por $E=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_k,e_{k+1}\}$, entonces dado $\nu\in U_\delta^{k+1}(\mu)$ y

$$T:(E,\bar{\nu})\longrightarrow(E,\bar{\mu})$$

la aplicación lineal dada por $T(e_i)=e_i$ se cumple que para cada $x\in E$

$$\bar{\mu}(T(x))=\bar{\mu}(x)\leq(1+\delta)\bar{\nu}(x),$$
$$\bar{\nu}\left(T^{-1}(x)\right)=\bar{\nu}(x)\geq(1+\delta)\bar{\mu}(x).$$

Ahora, como $(E,\bar{\nu})$ es un espacio de dimensión finita tenemos que $\mathbb{S}_E$ es compacto y con ello, existe un $x_0\in\mathbb{S}_E$ tal que

$$\|T\|=\sup_{x\in\mathbb{S}_E}\bar{\mu}(T(x))=\bar{\mu}(T(x_0))<(1+\delta)\bar{\nu}(x_0)=1+\delta.$$

De forma completamente análoga se obtiene que

$$\left\|T^{-1}\right\| < 1+\delta,$$

y así

$$(X_\nu, e_1, \cdots, e_{k+1}) \overset{\delta+1}{\sim} (X_\mu, e_1, \cdots, e_{k+1})$$

concluyendo que efectivamente

$$\nu \in \mathcal{N}_{X_\mu}\left(\{e_i\}_{i=1}^{k+1}, 1+\delta, \{e_i\}_{i=1}^{k+1}\right) \cap \mathcal{B}_{(1)}.$$

La otra inclusión se obtiene directamente de la definición de los dos espacios que estamos considerando con lo que damos por probada la igualdad. ■

Ahora sí, veamos que β_k es continua en $(\mu_0, \lambda_0) \in \mathcal{B}_{(1)}$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Observemos en primer lugar que si $\mu \in U_\delta^{k+1}(\mu_0)$ entonces dado $x \in \operatorname{span}\{e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}\}$ será

$$(1+\delta)^{-1}\overline{\mu_0}(x) \leq \bar{\mu}(x) \leq (1+\delta)\overline{\mu_0}(x),$$

con lo que

$$-\delta\overline{\mu_0}(x) \leq -\frac{\delta}{1+\delta}\overline{\mu_0}(x) \leq \bar{\mu}(x) - \overline{\mu_0}(x) \leq \delta\overline{\mu_0}(x)$$

y así

$$|\bar{\mu}(x) - \overline{\mu_0}(x)| \leq \delta\overline{\mu_0}(x). \tag{F.9}$$

Además, si son $(\mu, \lambda) \in U_\delta^{k+1}(\mu_0) \times U_\delta^{k+1}(\lambda_0)$ y $a_1, \cdots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\min\left\{\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right), \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right)\right\} < \frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1} - \kappa_k},$$

entonces como

$$\overline{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{1+\delta} e_i\right) \leq \bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right)$$

y

$$\overline{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{1+\delta} e_i\right) \leq \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^k a_i e_i\right)$$

se cumple que

$$\min\left\{\overline{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{1+\delta} e_i\right), \overline{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^k \frac{a_i}{1+\delta} e_i\right)\right\} < \frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1} - \kappa_k}. \tag{F.10}$$

Por tanto, si son $(\mu, \lambda) \in U_\delta^{k+1}(\mu_0) \times U_\delta^{k+1}(\lambda_0)$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $a_1^n, \cdots, a_k^n \in \mathbb{R}$ con

$$\min\left\{\bar{\mu}\left(\sum_{i=1}^k a_i^n e_i\right), \bar{\lambda}\left(\sum_{i=1}^k a_i^n e_i\right)\right\} < \frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1} - \kappa_k}$$

tales que

$$\left[\beta_{k+1}(\mu,\lambda)-\frac{1}{n}\right]-\beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0) \underset{(F.10)}{<} \left|\bar{\mu}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)-\bar{\lambda}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)\right|+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}|a_i^n|\,\beta_i(\mu,\lambda)-\left|\overline{\mu_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^n}{1+\delta}e_i\right)-\overline{\lambda_0}\left(e_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^n}{1+\delta}e_i\right)\right|-$$
$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_i^n|}{1+\delta}\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\le\left|\bar{\mu}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)-\overline{\mu_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^n}{1+\delta}e_i\right)\right|+$$
$$+\left|\bar{\lambda}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)-\overline{\lambda_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^n}{1+\delta}e_i\right)\right|+\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\left(|a_i^n|\,\beta_i(\mu,\lambda)-\frac{|a_i^n|}{1+\delta}\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\right)}_{A_n}\le$$
$$\le\left|\bar{\mu}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)-\overline{\mu_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)\right|+$$
$$+\left|\overline{\mu_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)-\overline{\mu_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^n}{1+\delta}e_i\right)\right|+$$
$$+\left|\bar{\lambda}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)-\overline{\lambda_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)\right|+$$
$$+\left|\overline{\lambda_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)-\overline{\lambda_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}\frac{a_i^n}{1+\delta}e_i\right)\right|+A_n\le$$
$$\underset{(F.9)}{\le}\delta\left[\overline{\mu_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)+\overline{\lambda_0}\left(e_{k+1}+\sum_{i=1}^{k}a_i^n e_i\right)\right]+\overline{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_i^n-\frac{a_i^n}{1+\delta}\right)e_i\right)+$$
$$+\overline{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(a_i^n-\frac{a_i^n}{1+\delta}\right)e_i\right)+A_n\underset{\mathcal{B}_{(1)}}{\le}2\delta\left[1+\sum_{i=1}^{k}|a_i^n|\right]+2\frac{\delta}{1+\delta}\sum_{i=1}^{k}|a_i^n|+A_n. \tag{F.11}$$

De forma análoga se tiene que existen $b_1^n,\cdots,b_k^n\in\mathbb{R}$ con

$$\min\left\{\overline{\mu_0}\left(\sum_{i=1}^{k}b_i^n e_i\right),\overline{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{k}b_i^n e_i\right)\right\}<\frac{2\kappa_{k+1}}{\kappa_{k+1}-\kappa_k}$$

tales que

$$\left[\beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0)-\frac{1}{n}\right]-\beta_{k+1}(\mu,\lambda)<2\delta\left[1+\sum_{i=1}^{k}|b_i^n|\right]+2\frac{\delta}{1+\delta}\sum_{i=1}^{k}|b_i^n|+B_n \tag{F.12}$$

siendo

$$B_n=\sum_{i=1}^{k}\left(|b_i^n|\,\beta_i(\mu_0,\lambda_0)-\frac{|b_i^n|}{1+\delta}\beta_i(\mu,\lambda)\right).$$

Ahora, si denotamos por $X=\operatorname{span}\{e_1,\cdots,e_k\}$, por la equivalencia de normas en espacios de dimensión finita existen $D_1,D_2>0$ tales que para todo $a_1,\cdots,a_k\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$D_2\sum_{i=1}^{k}|a_i|\le\eta_0\left(\sum_{i=1}^{k}a_i e_i\right)\le D_1\sum_{i=1}^{k}|a_i|$$

siendo η_0 cualquiera de las normas μ_0 o λ_0.

Así, si denotamos por γ aquella de las dos normas μ o λ tal que al evaluarla en $\sum_{i=1}^{k} a_i^n e_i$ es mínima, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i^n| \leq \frac{1}{D_2}\gamma_0\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^n e_i\right) \leq \frac{1+\delta}{D_2}\gamma\left(\sum_{i=1}^{k} a_i^n e_i\right) < (1+\delta)\underbrace{\frac{2\kappa_{k+1}}{D_2(\kappa_{k+1}-\kappa_k)}}_{K}.$$

Y de igual modo, denotando ahora por γ_0 aquella de las dos normas μ_0 o λ_0 tal que al evaluarla en $\sum_{i=1}^{k} b_i^n e_i$ es mínima, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} |b_i^n| \leq \frac{1}{D_2}\gamma_0\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^n e_i\right) < K.$$

Con esto, considerando $\delta < 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}[\beta_{k+1}(\mu,\lambda) - \beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0)] - \frac{1}{n} \underset{(F.11)}{<} 2\delta + 2K\delta(1+\delta) + 2K\delta + A_n = \\ = 2\delta(1 + K(2+\delta)) + A_n < 2\delta(1+3K) + A_n; \end{aligned} \tag{F.13}$$

$$\begin{aligned}[\beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0) - \beta_{k+1}(\mu,\lambda)] - \frac{1}{n} \underset{(F.12)}{<} 2\delta(1+K) + 2\frac{\delta}{1+\delta}K + B_n = \\ = 2\delta\left(1 + K\frac{2+\delta}{1+\delta}\right) + B_n < 2\delta(1+3K) + B_n. \end{aligned} \tag{F.14}$$

Con todo lo visto, tenemos ya las herramientas necesarias para probar por inducción sobre k la continuidad de β_k en (μ_0,λ_0).

Es claro que β_1 es continua en (μ_0,λ_0), luego supongamos que β_i es continua en (μ_0,λ_0) para cada $i \leq k$ y si vemos entonces que β_{k+1} también lo es, por inducción concluimos la prueba.

Sea pues $\varepsilon > 0$ fijo y observemos que como por hipótesis de inducción cada β_i es continua en (μ_0,λ_0), tenemos que para cada $i = 1, \cdots, k$ existen U_i entornos abiertos de (μ_0,λ_0) tales que si $(\mu,\lambda) \in U_i$ entonces

$$|\beta_i(\mu,\lambda) - \beta_i(\mu_0,\lambda_0)| < K_\varepsilon$$

para cierta constante K_ε por determinar.

Definamos pues

$$U_\delta = \left(U_\delta^{k+1}(\mu_0) \times U_\delta^{k+1}(\lambda_0)\right) \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i,$$

y observemos que si $(\mu,\lambda) \in U_\delta$ entonces

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{i=1}^{k}\left(|a_i^n|\,\beta_i(\mu,\lambda) - \frac{|a_i^n|}{1+\delta}\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\right) < \\
&< \sum_{i=1}^{k}\left(|a_i^n|\,\beta_i(\mu_0,\lambda_0) + |a_i^n|\,K_\varepsilon - \frac{|a_i^n|}{1+\delta}\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\right) = \\
&= K_\varepsilon \sum_{i=1}^{k}|a_i^n| + \frac{\delta}{1+\delta}\sum_{i=1}^{k}|a_i^n|\,\beta_i(\mu_0,\lambda_0) \le KK_\varepsilon(1+\delta) + \delta K \max_{1\le i\le k}\{\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\} < \\
&< 2KK_\varepsilon + \delta K \max_{1\le i\le k}\{\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\}; \qquad \text{(F.15)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \sum_{i=1}^{k}\left(|b_i^n|\,\beta_i(\mu_0,\lambda_0) - \frac{|b_i^n|}{1+\delta}\beta_i(\mu,\lambda)\right) < \\
&< \sum_{i=1}^{k}\left(|b_i^n|\,\beta_i(\mu_0,\lambda_0) - \frac{|b_i^n|}{1+\delta}\beta_i(\mu_0,\lambda_0) + \frac{|b_i^n|}{1+\delta}K_\varepsilon\right) = \\
&= \frac{K_\varepsilon}{1+\delta}\sum_{i=1}^{k}|b_i^n| + \frac{\delta}{1+\delta}\sum_{i=1}^{k}|b_i^n|\,\beta_i(\mu_0,\lambda_0) \le K_\varepsilon K + \delta K \max_{1\le i\le k}\{\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\} < \\
&< 2KK_\varepsilon + \delta K \max_{1\le i\le k}\{\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\}. \qquad \text{(F.16)}
\end{aligned}$$

Con todo, definiendo $0 < K_\varepsilon < \varepsilon/8K$ y $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{4(1+3K)}\right\}$$

y

$$\delta \max_{1\le i\le k}\{\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\} < \frac{\varepsilon}{4K},$$

concluimos que si $(\mu,\lambda) \in U_\delta$ entonces

$$\begin{aligned}
[\beta_{k+1}(\mu,\lambda) - \beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0)] - \frac{1}{n} &\underset{\text{(F.13)}}{<} 2\delta(1+3K) + A_n < \\
&\underset{\text{(F.15)}}{<} 2\delta(1+3K) + \delta K \max_{1\le i\le k}\{\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\} + 2KK_\varepsilon < \varepsilon;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0) - \beta_{k+1}(\mu,\lambda)] - \frac{1}{n} &\underset{\text{(F.14)}}{<} 2\delta(1+3K) + B_n < \\
&\underset{\text{(F.16)}}{<} 2\delta(1+3K) + \delta K \max_{1\le i\le k}\{\beta_i(\mu_0,\lambda_0)\} + 2KK_\varepsilon < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto, si $(\mu,\lambda) \in U_\delta$ entonces

$$|\beta_{k+1}(\mu,\lambda) - \beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0)| < \varepsilon + \frac{1}{n},$$

y por la arbitrariedad de $n \in \mathbb{N}$ concluimos finalmente que

$$|\beta_{k+1}(\mu,\lambda) - \beta_{k+1}(\mu_0,\lambda_0)| \le \varepsilon$$

lo que prueba la continuidad de β_{k+1} en (μ_0,λ_0) y finaliza la demostración. ■

Índice alfabético

Símbolos

V 97
$\mathcal{B}_d$ 110
$\mathcal{B}$ 101
$\mathcal{P}_\infty$ 101
$\mathcal{P}_d$ 110
$\mathcal{P}$ 98
$\overset{K}{\sim}$ 18

A

Aplicación
- inferiormente hemicontinua 83
- medible 47
- medible Borel 49

B

Base de Markushevich 167

C

Compactificación de Alexandroff 24
Compleción
- de un espacio métrico 3
- de un espacio normado 13

Condición de los diámetros 31
Conjunto
- analítico 55
- de Borel 38
- F_σ 5
- G_δ 5

Cubo
- de Cantor 22
- de Hilbert 22

E

Espacio
- ℓ_2 158
- ℓ_p 178
- c_0 179
- L_p 179
- bidual 12
- completamente metrizable 2
- completamente regular 23, 181
- completo 2
- de Baire 22, 30
- de Banach 10
- de Banach homogéneo 170
- de Borel estándar 70
- de Hilbert 158
- dual 12
- localmente compacto 23
- metrizable 2
- métrico 1
- normado 9
- paracompacto 83
- polaco 20
- prehilbertiano 157
- pseudométrico 1
- pseudonormado 9
- reflexivo 12
- separable 7
- universalmente isométrico 15

Esquema de Suslin 31
Estructura de Effros-Borel 71

I

Inyección canónica 12
Isomorfismo 11
Isomorfismo isométrico 11

J

Jerarquía
- de Borel 39
- proyectiva 56

K

K-isomorfismo 16

L

Lema de Uryshon 84, 182
Ley del paralelogramo 160

M

Métrica de Hausdorff 200
Métricas equivalentes 2

N

Normas equivalentes 11

O

Operación de Suslin 31
Ordinal 209

R

Representabilidad finita 18, 111

S

Suma directa 163, 164

T

Teorema
- de Dvoretzky 161
- de extensión de Tietze 182, 189
- de Hahn-Banach 15
- de Kwapién 165
- de Lavrentieff 6
- de Markushevich 167
- de Riesz-Fischer 158
- de selección de Michael 84
- de separación de Lusin 69
- de Stone 83
- de Suslin 70

Tipo de un espacio de Banach 164
Topología
- admisible 77
- de Vietoris 71, 116, 199
- de Wijsman 89
- del supremo 27

Bibliografía

[1] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton: *Topics in Banach space theory*, Second Edition, Springer, 2016.

[2] Charalambos D. Aliprantis, Kim C. Border: *Infinite dimensional analysis: A hitchhiker's guide*, Third Edition, Springer, 2006.

[3] Stefan Banach, Stanisław Mazur: *Zur theorie der linearen dimension*, Studia Mathematica, 4 (1), 100-112, 1933.

[4] Stefan Banach: *Théorie des Opérations Linéaires*, Warszawa, 1932.

[5] Yoav Benyamini: *Applications of the universal surjectivity of the Cantor set*, The American Mathematical Monthly, 105 (9), 832-839, 1998.

[6] C. E. Blair: *The Baire category theorem implies the principle of dependent choices*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 25 (10) 933-934, 1977.

[7] Benoît Bossard: *Codages des espaces de Banach séparables. Familles analytiques ou coanalytiques d'espaces de Banach*, C. R. Acad. Sci. Paris, 316 (Série I), 1005-1010, 1993.

[8] Benoît Bossard *Théorie descriptive des ensembles en géométrie des espaces de Banach*, Thèse, Unic. Paris VI, 1994.

[9] Benoît Bossard: *A coding of separable Banach spaces. Analytic and coanalytic families of Banach spaces*, Fundamenta Mathematicae, 172, 117-152, 2002.

[10] Gerard Buskes: *The Hahn–Banach theorem surveyed*, Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademi Nauk, 1993.

[11] Bernardo Cascales, José Manuel Mira, José Orihuela, Matías Raja: *Análisis funcional*, Electolibris, 2012.

[12] Marek Cúth, Martin Doležal, Michal Doucha, Ondřej Kurka: *Polish spaces of Banach spaces. Complexity of isometry classes and generic properties*, arXiv:1912.03994v2, 2021.

[13] Pandelis Dodos: *Banach spaces and descriptive set theory: Selected topics*, Springer, 2010.

[14] Gerald B. Folland: *Real analysis: Modern techniques and their applications*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1999.

[15] Gilles Godefroy, Jean Saint-Raymond: *Descriptive complexity of some isomorphism classes of Banach spaces*, Journal of Functional Analysis, 275 (4), 1008-1022, 2018.

[16] W. T. Gowers: *A new dichotomy for Banach spaces*, Geometric and Functional Analysis, 6 (6), 1083-1093, 1996.

[17] W. T. Gowers: *An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies*, Annals of Mathematics, Second Series, 156 (3), 797-833, 2002.

[18] Petr Hájek, Vicente Montesinos Santalucía, Jon Vanderwerff, Václav Zizler: *Biorthogonal systems in Banach spaces*, Springer, 2008.

[19] Horst Herrlich: *Axiom of choice*, Springer, 2006.

[20] Karel Hrbacek, Thomas Jech: *Introduction to set theory*, Third Edition, Revised and expanded, CRC Press, 1999.

[21] Carlos Ivorra: *Teoría de conjuntos*, https://www.uv.es/ivorra/Libros/TC.pdf

[22] Carlos Ivorra: *Teoría descriptiva de conjuntos*, https://www.uv.es/ivorra/Libros/TD.pdf

[23] Carlos Ivorra: *Topología*, https://www.uv.es/ivorra/Libros/T.pdf

[24] Thomas Jech: *Set theory*, The Third Millennium Edition, Revised and expanded, Corrected 4th printing, Springer, 2006.

[25] Thomas Jech: *The axiom of choice*, North-Holland Publishing Company, 1973.

[26] Alexander S. Kechris: *Classical descriptive set theory*, Springer, 1995.

[27] John L. Kelley: *General topology*, Springer, 1955.

[28] Ondřej Kurka: *The isomorphism class of c_0 is not Borel*, Israel Journal of Mathematics, 231 (1), 243-268, 2019.

[29] Serge Lang: *Algebra*, Revised Third Edition Springer, 2002.

[30] Nikolai Lusin: *Sur la classification de M. Baire*, C. R. Acad. Sci. Paris, 164 (Série I), 91-94, 1917.

[31] Julien Melleray: *Computing the complexity of the relation of isometry between separable Banach spaces*, Math. Log. Quart., 53 (2), 128-131, 2007.

[32] Lawrence Narici, Edward Beckenstein: *The Hahn-Banach theorem: the life and times*, Topology and its Applications, 77 (2), 193-211, 1997.

[33] Haskell P. Rosenthal: *On factors of $\mathcal{C}([0,1])$ with non-separable dual*, Israel Journal of Mathematics, 13 (3-4), 361-378, 1972.
Correction: Israel Journal of Mathematics, 21 (1), 93-94, 1975.

[34] Walter Rudin: *Functional analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, 1991.

[35] S. M. Srivastava: *A course on Borel sets*, Springer, 1998.

[36] Mikhail Suslin: *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis*, C. R. Acad. Sci. Paris, 164 (Série I), 88-91, 1917.

[37] Stephen Willard: *General topology*, Addison-Wesley Publishing Company, 1970.