



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

CAOS INVISIBLE

Trabajo fin de máster
Máster en Matemática Avanzada
Universidad de Murcia

Virginia Abellán Zapata

Julio 2016

Declaración de originalidad:

VIRGINIA ABELLÁN ZAPATA, autora del TFM “CAOS INVISIBLE”, bajo la tutela del profesor VÍCTOR JIMÉNEZ LOPEZ, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 6 de julio de 2016

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.)

Índice general

Resumen	VII
1. El teorema de densidad de Lebesgue	1
2. Atracción en sistemas dinámicos	7
2.1. Primeras nociones	7
2.2. Caracterización de atractores propios	12
2.3. Cuenca inmediata de atracción	19
2.4. Más sobre la periodicidad asintótica	24
3. Intervalos errantes	29
4. La derivada schwarziana negativa	39
4.1. La derivada schwarziana negativa y la atracción	39
4.2. El principio de Koebe	47
5. El teorema de Mañé	51
5.1. Prueba del teorema	51
5.2. Ejemplos	61
Bibliografía	71

Resumen

Una de las ramas de las matemáticas que más rápidamente se ha desarrollado en el último medio siglo ha sido la de los sistemas dinámicos. Informalmente, podríamos describirla como la teoría que se ocupa de explicar cómo evoluciona un sistema con respecto al tiempo e intenta averiguar el comportamiento asintótico del mismo. Y una de las principales razones de su auge ha sido descubrir que, incluso aunque las leyes que gobiernan un sistema se conozcan bien, y las condiciones iniciales de las que se parte estén perfectamente determinadas, su comportamiento puede ser esencialmente caótico, es decir, impredecible. Más aún, tal cosa ocurre en modelos de gran relevancia para las ciencias aplicadas, la predicción del tiempo atmosférico sin ir más lejos [13].

Aunque no fueron los primeros en ser conscientes de este hecho, sí cabe a Tien-Yien Li y James A. Yorke el honor de haber propuesto, antes que nadie, una definición matemática de “caos”. Así, de acuerdo con su célebre artículo de 1975 “Period three implies chaos” [12], una función $f : X \rightarrow X$ es caótica si existe un conjunto $S \subset X$ no numerable de manera que para cada $x, y \in S$ se verifica

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0 \quad \text{y} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Pero además de formalizar el concepto de caos, estos autores encontraron un sorprendente resultado: probaron que toda función continua del intervalo con un punto periódico de periodo 3 es automáticamente caótica. Fue precisamente esta circunstancia, junto con el descubrimiento del biomatemático Robert May de que uno de los modelos paradigmáticos de la dinámica de poblaciones (la familia logística) alberga dinámicas decididamente extrañas [16, 17], más la aparición (o más bien reaparición, pues se había probado una década antes pero había pasado desapercibido) del teorema de Sharkovsky [22], que reveló las fascinantes conexiones que existen entre los posibles periodos de una función, los que en buena medida desencadenaron el *boom* de los sistemas dinámicos discretos de los setenta; *boom* que, como decíamos antes, lejos de decrecer ha ido *in crescendo* estos años.

Sin embargo, el trabajo de Li y Yorke no tardó en ser cuestionado por algunos matemáticos. La causa fue la publicación en 1979 por Guckenheimer del artículo [8] donde se prueba, entre otras cosas, lo siguiente. Supongamos que f es una función sin puntos “semiatractores” (atractores por un lado y repulsores por otro), con derivada schwarziana negativa y un único punto crítico (es decir, con derivada nula). Supongamos también que

la órbita del punto crítico converge a una órbita periódica atractora. Entonces, *grosso modo*, se verifica que el conjunto K de los puntos que no son asintóticamente periódicos es hiperbólico. Esta última condición equivale a afirmar que para cada $x \in K$ existe un entero n de manera que $|Df^n(x)| > 1$. Más aún, Guckenheimer se da cuenta de que la propiedad de hiperbolicidad implica medida de Lebesgue cero (casi al mismo tiempo, van Strien obtuvo independientemente un resultado similar [25]). En definitiva, Guckenheimer demuestra que si una función f verifica las condiciones anteriores entonces la órbita de casi todo punto (en el sentido de la medida de Lebesgue) es atraída por la misma órbita periódica que atrae al punto crítico, esto es, para casi todo x existe algún p en dicha órbita periódica tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(p)| = 0.$$

La relevancia del resultado de Guckenheimer se explica por un doble motivo. Por un lado, sus hipótesis pueden aplicarse a la familia logística $f_\alpha(x) = \alpha x(1 - x)$; por otro, el comportamiento descrito es compatible con que la órbita periódica atractora tenga periodo 3 y por tanto, en vista del teorema de Li-Yorke, exista caos. Como no hay nada más opuesto al caos que la periodicidad asintótica, concluimos que, aunque tal caos exista, es “invisible”, pues solo afecta, a lo sumo, a un conjunto de medida nula; en particular, es irrelevante desde el punto de vista de las ciencias aplicadas. En una monografía de Collet y Eckmann de principios de los ochenta, que ejerció una gran influencia entre los especialistas de la época, esta contradicción se explicita muy claramente (las letras mayúsculas y el subrayado son suyos) [5, pp. 21–22]:

IMPORTANT REMARK: When we have discussed above the “typical” behavior of a map, we have always insisted on analyzing what happen to most initial points. This is motivated by the fact that we want to make general statements about the behavior of dynamical systems. It happens very often that while most of the initial orbits show a very regular behavior (i.e., they approach a stable periodic orbit), some other initial points —very few in the sense of Lebesgue measure— behave rather in the ergodic way described above. Such a situation has been described in the paper by Li and Yorke “Period three implies chaos”. They show, among other things, that if a map has a (stable or unstable) orbit of period three, then the map in question shows sensitive dependence to initial conditions for an uncountable set of pairs of initial points. But —and maybe the paper did not make this sufficiently clear— for most other points this need not be the case, and hence from a physical point of view the chaotic behavior may be essentially unobservable.

Exagerando un poco, podríamos decir que el resultado de Guckenheimer provoca un cisma entre los matemáticos del momento, apareciendo dos escuelas en la dinámica cuyos caminos han ido divergiendo progresivamente. Por un lado tenemos la escuela topológica, centrada en proponer respuestas globales a los problemas de la dinámica, que solo

demanda continuidad a las funciones con las que trabaja, y que tiene a los teoremas de Sharkovsky y Li-Yorke como grandes pilares. Por su parte, la escuela ergódica, inspirada por los trabajos de May y Guckenheimer, prefiere añadir hipótesis de derivabilidad a sus modelos y se conforma con comprender la dinámica en casi todo punto, lo que permite obtener resultados mucho más potentes y vistosos (y más relevantes de cara a las aplicaciones) que los que, en general, encuentra la escuela topológica. Por supuesto la escuela ergódica no niega la existencia del caos, todo lo contrario, pero solamente está interesada en él cuando es observable (tal es el caso, por ejemplo, cuando existen medidas invariantes absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue, siendo el ejemplo típico la función $f(x) = 4x(1-x)$); en particular, descarta la noción de Li-Yorke como herramienta útil para explicar la complejidad dinámica. Sólo recientemente se ha entendido que el caos Li-Yorke, no solo admite un tratamiento “casi todo punto” al gusto de la escuela ergódica, sino que en las circunstancias propicias (no, ciertamente, las fijadas por las hipótesis de Guckenheimer) puede ser observable, e incluso prevalente, desde el punto de vista de la medida [3].

El trabajo que presentamos se ubica, en lo fundamental, en esta segunda escuela, ya que pretendemos explorar las condiciones más generales posibles que garantizan la asintoticidad periódica, es decir, el más sencillo de todos los comportamientos dinámicos, en casi todo punto, independientemente de que dicho comportamiento pueda convivir con la existencia de un caos en el sentido de Li-Yorke que, por fuerza, habrá de ser irrelevante. Antes de entrar en detalles pasamos a describir cómo el resultado de Guckenheimer se fue extendiendo los años siguientes. Así, en 1981 Misiurewicz lo prueba para funciones multimodales, es decir, con un número finito de puntos críticos, y manteniendo las hipótesis de derivada schwarziana negativa y no existencia de semiatractores [19]. Más exactamente, lo que prueba es que si los puntos críticos son atraídos por órbitas periódicas entonces el conjunto K de puntos no asintóticamente periódicos es hiperbólico; no da el paso de la hiperbolicidad a la medida cero. En 1983 Nusse da una demostración alternativa del teorema de Misiurewicz y, esta vez sí, deduce la asintoticidad periódica en casi todo punto [20].

Pero será Mañé en 1985 quien realice el tratamiento más general del problema [14]. Valiéndose de técnicas diferentes a las empleadas por los investigadores anteriores, consigue prescindir de la derivada schwarziana y la semiatracción y prueba que si para una función de clase C^2 con un número finito de puntos críticos es posible encontrar entornos de puntos asintóticamente periódicos para dichos puntos críticos, entonces casi todo punto del intervalo es asintóticamente periódico. La condición de derivabilidad puede parecer exótica pero no es baladí: si sólo suponemos derivadas primeras continuas existen contraejemplos (basta modificar ligeramente la construcción de [6]).

Tres décadas después, el teorema de Mañé sigue siendo una de las “joyas de la corona” de la dinámica unidimensional. Por desgracia, la demostración de Mañé es muy complica-

da y extremadamente difícil de leer. Posteriormente, van Strien revisitó el teorema en [26] con nuevos y más sencillos métodos, pero vuelve a llegar al resultado a través de la hiperbolicidad, lo que exige la ausencia de semiatractores. De hecho, en el libro considerado actualmente la “biblia” de la dinámica diferenciable ([18]), esta hipótesis vuelve a añadirse cuando se enuncia y demuestra el teorema. Esto de la “semiatracción” parece haber traído un cierto mal fario al problema: Mañé hubo de publicar un *erratum* a su artículo dos años después, y el mismo Guckenheimer omite mencionarla en su demostración, sin percatarse de que en presencia de semiatractores su argumento no funciona.

El objetivo de este trabajo es realizar una demostración autocontenida y asequible del teorema de Mañé, en la línea de la prueba de [18], pero sin excluir el caso en el que la función tenga puntos semiatractores. Quitar esta hipótesis del teorema es un gran alivio desde el punto de vista práctico, ya que en los ejemplos concretos es virtualmente imposible de verificar, y por tanto le resta al teorema buena parte de su eficacia. En paralelo daremos otra prueba para el caso con derivada schwarziana negativa (pero admitiendo semiatractores, y por tanto distinta a las de Misiurewicz o Nusse), y el lector se preguntará por qué. Tenemos varias razones. La primera es que en tal caso el argumento se simplifica sustancialmente. Más aún, la derivada schwarziana negativa permite obtener un resultado más fuerte, porque implica la finitud de los atractores y permite localizar, en ejemplos concretos, qué orbitas son exactamente las que atraen al resto de puntos (salvo, como siempre, un conjunto de medida cero) del intervalo. Finalmente, dominar la dinámica de las funciones con derivada schwarziana negativa es fundamental si queremos abordar otros tipos de problemas en dinámica unidimensional (por ejemplo, la cuestión de la prevalencia del caos Li-Yorke que comentábamos antes), ya que bajo condiciones muy razonables de derivabilidad, por ejemplo cuando las funciones son polinomiales o incluso analíticas (esto se ha ido comprendiendo paulatinamente tras muchos años de investigaciones; el resultado clave al respecto fue [11]), la derivada schwarziana negativa aparece, casi por arte de magia, en las zonas del intervalo donde realmente se la necesita.

Para demostrar el teorema de Mañé (nuestro teorema 5.1) en el capítulo 5, necesitamos una serie de resultados que veremos a lo largo de los cuatro capítulos iniciales. Suponemos en el lector conocimientos básicos de teoría de la medida; aun así, dedicaremos el capítulo 1 a probar el teorema de densidad de Lebesgue 1.7, porque este clásico resultado sobre la medida de Lebesgue no suele explicarse en los grados de Matemáticas por falta de tiempo. Este resultado afirma que los conjuntos con medida positiva, a pequeña escala, son tan densos que se pueden ver prácticamente como intervalos que contienen a todos sus puntos.

Comenzamos el capítulo 2 introduciendo al lector en algunos conceptos fundamentales de la teoría de los sistemas dinámicos, en concreto los concernientes a la atracción, el *leitmotiv* de este trabajo. Por ejemplo, mediante las proposiciones 2.4 y 2.7 probaremos que es equivalente afirmar que un punto es asintóticamente periódico, atraído por una órbita periódica o que el conjunto ω -límite de dicho punto es finito: utilizaremos estas tres

caracterizaciones indistintamente a lo largo del trabajo. Por otro lado, en la sección 2.2 definiremos atractor por la derecha, atractor por la izquierda, atractor (cuando lo sea por la izquierda, por la derecha o en ambos casos) y atractor propio (atractor por izquierda y derecha). Además, en el teorema 2.15 daremos una caracterización de los atractores propios y en el corolario 2.16 proporcionaremos una condición fácilmente verificable para comprobar que un punto es atractor propio: si la función es derivable, el módulo de la derivada en el punto en cuestión debe ser menor que 1. A continuación, en la sección 2.3 introduciremos un concepto que será muy importante en nuestro argumento (sobre todo en el caso de derivada schwarziana negativa): el de cuenca inmediata de atracción. Así, la cuenca inmediata de atracción de un punto fijo atractor p será el intervalo más grande de puntos (entre los que se encuentra el propio punto p) que son atraídos hacia p . Definiremos también el concepto de órbita periódica atractora, que será una órbita periódica de periodo r en la que todos sus puntos son atractores para f^r . Aquí aparece una sutileza: en el teorema 2.22 mostraremos que si la función es estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 , entonces una órbita periódica es atractora si y sólo si alguno de los puntos de la órbita es atractor para la f^r . Asimismo, mediante las proposiciones 2.25 y 2.26, probaremos que si un punto x converge a una órbita periódica entonces, si dicha órbita es atractora, algún iterado de x caerá en la cuenca inmediata de atracción, mientras que, si la órbita no es atractora, algún iterado de x será un punto de dicha órbita. Terminaremos el capítulo definiendo un tipo de intervalos, los absorbentes maximales, que vendrían a ser los intervalos más grandes posibles donde se puede garantizar totalmente la periodicidad asintótica. Las propiedades de estos intervalos, que veremos en las proposiciones 2.29, 2.30 y 2.31, serán de gran ayuda en la demostración del teorema 5.1.

En el tercer capítulo introduciremos los llamados intervalos errantes, es decir, aquellos cuyos puntos no son atraídos por órbitas periódicas y que tienen iterados disjuntos. Si tales intervalos existen la atracción en casi todo punto es imposible, por lo que concluiremos el capítulo encontrando una condición suficiente (el teorema de Schwartz 3.10) que nos permita descartar su existencia. Antes, definiremos en 3.4 lo que se conoce como distorsión de una función en un intervalo y mostraremos en el corolario 3.7 un modo de controlarla.

La derivada schwarziana será estudiada en profundidad en el capítulo 4; necesitaremos estos resultados para nuestra demostración alternativa del teorema 5.1. En la sección 4.1 se demuestran propiedades elementales pero tan importantes como que la derivada schwarziana conserva signos por composición (proposición 4.3) o el principio del mínimo (teorema 4.4). Otro resultado relevante es la proposición 4.6: el conjunto de puntos asintóticamente periódicos que no cae en una cuenca inmediata de atracción es numerable. Por su parte, el teorema 4.7 mostrará que cada cuenca inmediata de atracción contiene un punto crítico o algún extremo del intervalo en el que esté definida la función. El teorema 4.9, que nosotros obtendremos con un corolario del resultado anterior, merece mención aparte. Es el famoso teorema de Allwright-Singer [1, 24], el primero que puso de manifiesto la

utilidad de esta herramienta en la dinámica del intervalo; a día de hoy, sigue siendo prácticamente el único resultado de atracción global no trivial del que disponemos. Finalmente, el objetivo de la sección 4.2 será probar el principio de Koebe 4.12, clave junto con el corolario 3.7 para controlar la distorsión de las iteradas de nuestra función en el capítulo final. Antes mencionábamos de pasada la dinámica de las funciones con buenas propiedades de derivabilidad, como las analíticas; para entenderla es fundamental encontrar análogos del principio de Koebe aunque la derivada schwarziana no sea negativa.

Por último, en el capítulo 5 obtendremos los réditos del trabajo anterior probando las dos versiones del teorema de Mañé, y añadiremos una batería de ejemplos para demostrar su aplicabilidad en casos concretos. Si el lector está versado en la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales en el plano, sabrá que su fin último es trazar el diagrama de fases del sistema, esto es, localizar unas pocas órbitas “clave” hacia las cuales converge toda la dinámica del mismo. Gracias al teorema de Poincaré-Bendixson y otros, esencialmente esto es siempre factible. En dinámica discreta no podemos esperar nada semejante en general, ni siquiera en dimensión 1, debido a la existencia del caos observable. La relevancia del teorema de Mañé, como enfatizarán nuestros ejemplos finales, es que permite, cuando las condiciones son propicias, hallar el equivalente al “diagrama de fases” de una función.

Capítulo 1

El teorema de densidad de Lebesgue

Como decíamos al principio, el teorema de densidad de Lebesgue es un resultado bien conocido sobre la medida de Lebesgue. En realidad, y con las modificaciones de notación obvias, no depende de la dimensión, por lo que en los textos de teoría de la medida (véase por ejemplo [4, p. 184]) suele demostrarse en \mathbb{R}^n . Como nosotros sólo usaremos la versión unidimensional del teorema, nuestra prueba se limitará a este caso, pues el argumento se simplifica bastante. De hecho, en el artículo [27] hemos encontrado una demostración muy legible, y a ella nos ceñiremos.

En lo que sigue, así como en los próximos capítulos, λ denotará la medida de Lebesgue en \mathbb{R} . No obstante, es costumbre usar la notación $|J|$ para denotar la longitud de un intervalo J , y así lo haremos nosotros en este trabajo.

Definición 1.1. Sean X, A subconjuntos medibles de \mathbb{R} y $0 < \lambda(A) < \infty$. Definimos la **densidad media** de X en A como

$$D_m(X, A) = \frac{\lambda(A \cap X)}{\lambda(A)}.$$

A partir de esta noción, podemos definir ahora:

Definición 1.2. Si $M \subset \mathbb{R}$ es un conjunto medible y $x \in \mathbb{R}$, se define la **densidad inferior por la derecha** de M en x como

$$D_+(M, x) = \liminf_{h \rightarrow 0_+} D_m(M, (x, x + h)).$$

Análogamente, se define la **densidad inferior por la izquierda** como

$$D_-(M, x) = \liminf_{h \rightarrow 0_+} D_m(M, (x - h, x)).$$

La prueba del teorema de densidad pasa por cuatro lemas previos.

Lema 1.3. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in C}$ donde $A_\alpha \subset \mathbb{R}$ es medible para todo $\alpha \in C$ (disjuntos dos a dos), C es un conjunto finito o infinito numerable, $X \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible y $0 < \lambda(\bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha) < \infty$. Dado $c \in \mathbb{R}$, si $D_m(X, A_\alpha) > c$ ($\geq c, < c, \leq c$) para todo α , entonces $D_m(X, \bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha) > c$ ($\geq c, < c, \leq c$).

Demostración. Suponemos por hipótesis que $D_m(X, A_\alpha) > c$, es decir, $\lambda(A_\alpha \cap X) > c\lambda(A_\alpha)$. Por ser $\{A_\alpha\}_{\alpha \in C}$ una colección de subconjuntos de \mathbb{R} medibles y disjuntos entre sí se tiene que $\lambda(\bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha) = \sum_{\alpha \in C} \lambda(A_\alpha)$ y análogamente, $\lambda(\bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha \cap X) = \sum_{\alpha \in C} \lambda(A_\alpha \cap X)$. Utilizando esto obtenemos las relaciones

$$c\lambda\left(\bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha\right) = c\sum_{\alpha \in C} \lambda(A_\alpha) < \sum_{\alpha \in C} \lambda(A_\alpha \cap X) = \lambda\left(\bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha \cap X\right),$$

es decir, $D_m(X, \bigcup_{\alpha \in C} A_\alpha) > c$ como buscábamos. El resto de casos se pueden demostrar análogamente. \square

Lema 1.4. Sean $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, $a \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Entonces, la función $p_h(x) = D_m(A, (x, x+h))$ es continua en \mathbb{R} y $q_a(x) = D_m(A, (a, x))$ es continua en (a, ∞) .

Demostración. Si $y > x$ se tiene que

$$\begin{aligned} p_h(y) - p_h(x) &= \frac{1}{h}[\lambda(A \cap (y, y+h)) - \lambda(A \cap (x, x+h))] \\ &= \frac{1}{h}[\lambda(A \cap (x+h, y+h)) - \lambda(A \cap (x, y))]. \end{aligned}$$

Luego, $|p_h(y) - p_h(x)| \leq \frac{1}{h}|y - x|$, es decir, $p_h(x)$ es lipschitziana y, en particular, continua en \mathbb{R} .

Por otro lado, $q_a(x) = \frac{l(x)}{x-a}$, donde $l(x) = \lambda(A \cap (a, x))$ es continua, ya que si $y > x$

$$l(y) - l(x) = \lambda(A \cap (a, y)) - \lambda(A \cap (a, x)) = \lambda(A \cap (x, y)),$$

luego $|l(y) - l(x)| \leq |y - x|$. Por tanto, $q_a(x)$ es continua por ser un cociente de funciones continuas. \square

Lema 1.5. Si $M \subset \mathbb{R}$ es medible y $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda((x-h, x+h) \cap M)}{2h} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad D_+(M, x) = D_-(M, x) = 1.$$

Demostración. Para probar la parte “si” de la equivalencia suponemos que $D_+(M, x) = D_-(M, x) = 1$, es decir,

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} = \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda((x-h, x) \cap M)}{h} = 1.$$

Pero como

$$\liminf_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} \leq \limsup_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} \leq 1$$

ya que $h \geq \lambda((x, x+h) \cap M)$ para cualquier h , se tiene que

$$\liminf_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} = \limsup_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} = 1$$

(y análogamente para $D_-(M, x)$). Entonces:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x-h, x+h) \cap M)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda(((x-h, x) \cap M) \cup ((x, x+h) \cap M))}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x-h, x) \cap M) + \lambda((x, x+h) \cap M)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x-h, x) \cap M)}{h} \right) + \frac{1}{2} \left(\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Utilizando la misma idea se puede probar la implicación contraria. \square

En particular, a partir de lo anterior se obtiene que si $M \subset \mathbb{R}$ es medible y $x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x-h, x+h) \cap M)}{2h} = 1$$

si y sólo si

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x-h, x) \cap M)}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{\lambda((x, x+h) \cap M)}{h} = 1.$$

Si esto ocurre diremos que x es un **punto de densidad** de M .

Lema 1.6. *Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible. Entonces las funciones $g_+(x) = D_+(M, x)$ y $g_-(x) = D_-(M, x)$ son medibles.*

Demostración. Lo probaremos para la función $g_+(x)$ (para $g_-(x)$ es análogo). Por la definición de $D_+(M, x)$ se tiene que:

$$g_+(x) = \liminf_{h \rightarrow 0_+} D_m(M, (x, x+h)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf \{ D_m(M, (x, x+h)) : 0 < h < \frac{1}{n} \} \right).$$

Ahora, ponemos

$$g_n(x) = \inf \{ D_m(M, (x, x+h)) : 0 < h < \frac{1}{n} \}.$$

En el lema 1.4 hemos visto que fijando M y x , $q_x(y) = D_m(M, (x, y))$ es continua y, por tanto, $Q(h) = q_x(x + h) = D_m(M, (x, x + h))$ será también una función continua. Luego,

$$g_n(x) = \inf\{Q(h) : 0 < h < \frac{1}{n}\} = \inf\{Q(h) : 0 < h < \frac{1}{n}, h \in \mathbb{Q}\}$$

ya que como $Q(h)$ es continua, cualquier número real se puede aproximar tanto como queramos por los racionales. Por tanto, $g_n(x)$ será medible por ser el ínfimo de una familia numerable de funciones continuas (nótese que $g_n(x) = \inf\{p_h(x) : 0 < h < \frac{1}{n}, h \in \mathbb{Q}\}$) y entonces, $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ es medible también. \square

Estamos en condiciones ahora de probar el teorema de la densidad de Lebesgue, enunciado como sigue:

Teorema 1.7 (Teorema de densidad de Lebesgue). *Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible con $\lambda(E) > 0$. Entonces casi todo punto $x \in E$ es de densidad, es decir,*

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\lambda((x - h, x + h) \cap E)}{2h} = 1$$

para casi todo $x \in E$.

Demostración. Suponemos que la tesis del teorema es falsa. Definimos los conjuntos

$$A^+ = \{x \in E : D_+(E, x) < 1\}, \quad A^- = \{x \in E : D_-(E, x) < 1\}.$$

Por el lema 1.6 A^+ y A^- son medibles, y por el lema 1.5 se tiene que $\lambda(A^+) > 0$ o $\lambda(A^-) > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\lambda(A^+) > 0$. Ponemos

$$A_n^+ = \{x \in E : D_+(E, x) < 1 - \frac{1}{n}\}$$

que son conjuntos medibles por el lema 1.6. Entonces,

$$A^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^+$$

y como $\lambda(A^+) > 0$, existe un entero positivo n tal que $\lambda(A_n^+) > 0$.

Sea $F \subset A_n^+$ un conjunto cerrado (en particular, compacto) tal que $0 < \lambda(F) < \infty$. (Tal conjunto existe por la regularidad de la medida de Lebesgue: dado un conjunto medible siempre podemos encontrar un conjunto de medida tan próxima como queramos abierto que lo contenga o cerrado que esté incluido en él. Esta es una de las propiedades básicas de la medida de Lebesgue, que el lector poco versado en ésta puede encontrar en [4, p. 26].) Elegimos un conjunto abierto $G \supset F$ tal que $D_m(F, G) > 1 - \frac{1}{n}$ (utilizando nuevamente la regularidad de la medida de Lebesgue). Entonces, existe un intervalo $(a, b) \subset G$ de manera que $D_m(F, (a, b)) > 1 - \frac{1}{n}$. En efecto, si $D_m(F, (a, b)) \leq 1 - \frac{1}{n}$, como G , por ser

abierto, se puede escribir como la unión numerable de intervalos abiertos disjuntos dos a dos, aplicando el lema 1.3 se tendría que $D_m(F, G) \leq 1 - \frac{1}{n}$. Ponemos

$$S = \{a\} \cup \{y \in (a, b] : D_m(F, (a, y)) \leq 1 - \frac{1}{n}\}.$$

Entonces, S es cerrado ya que dada una sucesión $y_n \rightarrow y$ con $D_m(F, (a, y_n)) \leq 1 - \frac{1}{n}$, por la continuidad de $q_a(x) = D_m(F, (a, x))$ en (a, ∞) vista en el lema 1.4 se tiene también que $D_m(F, (a, y)) \leq 1 - \frac{1}{n}$, y por tanto, $y \in S$. Ahora, dado $s = \sup S$ se tiene que $s \in S$ (por ser S cerrado). Además, $b \notin S$, ya que $D_m(F, (a, b)) > 1 - \frac{1}{n}$, luego $a \leq s < b$. Vamos a ver que existe $t \in (s, b)$ tal que $D_m(F, (s, t)) \leq 1 - \frac{1}{n}$.

- Si $s \notin F$, como F es cerrado, es claro que existirá $t \in (s, b)$ tal que $D_m(F, (s, t)) \leq 1 - \frac{1}{n}$ (en particular, $D_m(F, (s, t)) = 0$ ya que $F \cap (s, t) = \emptyset$).
- Si $s \in F$, como $F \subset A_n^+$ entonces $s \in A_n^+$. Luego, por la definición de A_n^+ se verifica que

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} D_m(E, (s, s+h)) < 1 - \frac{1}{n}$$

y, por tanto, existirá $t \in (s, b)$ tal que $D_m(E, (s, t)) < 1 - \frac{1}{n}$. Ahora, como $F \subset E$, obtendremos las desigualdades

$$D_m(F, (s, t)) \leq D_m(E, (s, t)) < 1 - \frac{1}{n}.$$

Por tanto, como $D_m(F, (a, s)) \leq 1 - \frac{1}{n}$ y acabamos de probar que también $D_m(F, (s, t)) \leq 1 - \frac{1}{n}$, aplicando el lema 1.3 se obtiene que $D_m(F, (a, t)) \leq 1 - \frac{1}{n}$. Se concluye entonces que $t \in S$, pero esto es una contradicción, ya que $t > s$ y habíamos supuesto que s era el supremo de S , con lo que se finaliza la prueba. \square

Atracción en sistemas dinámicos

2.1. Primeras nociones

Comenzamos este capítulo dando a conocer al lector las nociones básicas de sistema dinámico y, en particular, de sistema dinámico discreto:

Definición 2.1. *Un sistema dinámico es una terna (X, T, Φ) formada por un espacio métrico X , llamado **espacio de fases**, un semigrupo aditivo T de \mathbb{R} ($0 \in T$, si $t, s \in T$ entonces $t + s \in T$), llamado **conjunto de tiempos** y una aplicación*

$$\Phi : T \times X \longrightarrow X$$

que satisface:

- 1) Φ es una aplicación continua.
- 2) $\Phi(0, x) = x$, para todo $x \in X$.
- 3) $\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t + s, x)$, para todo $t, s \in T$, y todo $x \in X$

A la aplicación Φ se le conoce como **evolución del sistema**.

De una manera menos formal, un sistema dinámico es una manera de describir la evolución en el tiempo de todos los puntos de un sistema X . Si el conjunto de tiempos T es \mathbb{R} , $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ o $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$ diremos que el sistema dinámico es **continuo**, mientras que si el conjunto de tiempos es \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ o $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ diremos que se trata de un sistema dinámico **discreto**. Los ejemplos típicos de sistemas dinámicos continuos son los flujos asociados

a sistemas autónomos de ecuaciones diferenciales; en este trabajo sólo nos interesan los discretos, y en concreto aquellos en que $T = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Un sistema dinámico de este tipo puede ser visto, equivalentemente, como generado por una función continua $f : X \rightarrow X$, ya que si tomamos $f(x) = \Phi(1, x)$, definimos

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$$

y consideramos f^0 como la identidad, entonces $\Phi(n, x) = f^n(x)$ para todo $x \in X$ y $n \geq 0$.

En este contexto, describir la dinámica del sistema significa aclarar el comportamiento asintótico de las sucesiones $(f^n(x))_{n=0}^\infty$, y en este trabajo estamos interesados en que dicha dinámica sea lo más sencilla posible. Si consideramos el conjunto $\text{Orb}_f(x) = \{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$ formado por los puntos de dicha sucesión, que denominamos la **órbita** de x (bajo f), lo ideal desde esta perspectiva es que dicho conjunto sea finito.

Definición 2.2. Sea $f : X \rightarrow X$ continua. Decimos que $x \in X$ es un **punto periódico** de f si existe $n \geq 1$ tal que $f^n(x) = x$. Al menor número n que cumple esta propiedad se le denomina **periodo** de x , y diremos que la órbita de x es **periódica** con ese periodo. A los puntos periódicos de periodo 1 los llamaremos simplemente **puntos fijos**.

Denotamos el conjunto de puntos periódicos de f como $\text{Per}(f)$.

Salvo en casos triviales, no podemos esperar que cada punto del sistema pertenezca a una órbita periódica o termine cayendo en alguna de ellas. Mucho más realista, como evidenciará este trabajo, será pedir que el conjunto de puntos de acumulación de la sucesión $(f^n(x))_{n=0}^\infty$ sea finito. Tal conjunto recibe un nombre especial en la literatura:

Definición 2.3. Sea $f : X \rightarrow X$ continua. Si $x \in X$, definimos su **conjunto ω -límite** como:

$$\omega_f(x) = \{y \in X : \text{existe } (n_k) \text{ sucesión estrictamente creciente, } f^{n_k}(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y\}.$$

Los siguientes conceptos y resultados se pueden encontrar en [2], aunque nuestro tratamiento es bastante personal. En el resto de la sección siempre supondremos que el espacio métrico X es compacto. Esto permite trabajar mucho más cómodamente y no compromete nuestros objetivos, pues al fin y al cabo donde trabajaremos realmente será en subintervalos compactos de la recta real. Empezamos demostrando que si un conjunto ω -límite es finito, entonces debe tener una cierta estructura dinámica: ha de ser una órbita periódica.

Proposición 2.4. Sea $f : X \rightarrow X$ continua. Entonces:

- 1) El conjunto $\omega_f(x)$ es no vacío, compacto y $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$.
- 2) Si el conjunto $\omega_f(x)$ es finito entonces es una órbita periódica.

Demostración. 1) Por la compacidad de X se tiene que $\omega_f(x) \neq \emptyset$. Veamos ahora que $\omega_f(x)$ es cerrado (ya que en este caso compacto equivale a cerrado). Sea $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset \omega_f(x)$, de manera que $y_k \rightarrow y$ cuando $k \rightarrow \infty$. Tenemos que ver que $y \in \omega_f(x)$. Como $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset \omega_f(x)$, existe n_k tal que

$$d(f^{n_k}(x), y_k) < \frac{1}{k} \quad \text{para todo } k. \quad (2.1)$$

No es restrictivo suponer que $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Entonces, si $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$, por (2.1), $f^{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$, luego $y \in \omega_f(x)$.

Por último, queda probar que $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$. La inclusión hacia la derecha se tiene fácilmente ya que si $y \in \omega_f(x)$, existe (n_k) sucesión estrictamente creciente tal que $f^{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y$, y como f es continua, $f^{n_k+1}(x) = f(f^{n_k}(x)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(y)$, luego $f(y) \in \omega_f(x)$. Ahora, para la otra inclusión, tomamos $z \in \omega_f(x)$ de manera que $f^{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z$ para alguna sucesión (n_k) estrictamente creciente. Consideremos la subsucesión $(f^{n_{k_l}-1}(x))_{k_l=1}^{\infty}$. Como X es compacto, existe una subsucesión convergente, es decir, $f^{n_{k_l}-1}(x) \rightarrow y \in \omega_f(x)$ si $l \rightarrow \infty$ y por la continuidad de f se tiene que $f^{n_{k_l}}(x) \rightarrow f(y)$ si $l \rightarrow \infty$. Ahora, juntando esto último con el hecho de que $f^{n_k}(x) \rightarrow z$ cuando $k \rightarrow \infty$ obtenemos que $f(y) = z$, es decir, $z \in f(\omega_f(x))$.

2) Como $\omega_f(x)$ es finito, sabemos que $f|_{\omega_f(x)} : \omega_f(x) \rightarrow \omega_f(x)$ es biyectiva (por ser una función sobreyectiva de un conjunto finito en sí mismo) y, en particular, será una permutación. Si esta permutación es un ciclo, entonces $\omega_f(x)$ es una órbita periódica y se concluye la prueba.

Suponemos que la permutación no es un ciclo. Entonces, se podrá descomponer como producto de ciclos, es decir, existen A y B con $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \omega_f(x)$ de manera que $f(A) = A$ y $f(B) = B$. Vamos a probar que $\omega_f(x)$ no se podrá descomponer de esta manera, y por tanto, será un único ciclo, es decir, una órbita periódica.

Comenzamos probando que $d(f^n(x), \omega_f(x)) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ (que se verificará independientemente de que $\omega_f(x)$ sea finito). Si esto no se cumple, existe $\varepsilon_0 > 0$ y una sucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $d(f^{n_k}(x), \omega_f(x)) \geq \varepsilon_0 > 0$. Ahora, como X es compacto, existe una subsucesión convergente que converge a un punto y de X , es decir, $f^{n_{k_l}}(x) \rightarrow y$ si $l \rightarrow \infty$ (en particular se tiene por definición que $y \in \omega_f(x)$) y, por continuidad, $d(y, \omega_f(x)) \geq \varepsilon_0 > 0$. Luego $y \notin \omega_f(x)$, lo que es una contradicción.

Sea $\delta = d(A, B) > 0$. Como X es compacto f es uniformemente continua, luego dados $u, v \in X$ existe $\varepsilon > 0$ (podemos suponer $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$) tal que:

$$\text{si } d(u, v) < \varepsilon \text{ entonces } d(f(u), f(v)) < \frac{\delta}{2}. \quad (2.2)$$

Por otro lado, por lo visto anteriormente existe n_0 de manera que para todo $n \geq n_0$ se

verifica que

$$d(f^n(x), \omega_f(x)) < \varepsilon < \frac{\delta}{2}. \quad (2.3)$$

En particular, $d(f^{n_0}(x), \omega_f(x)) < \varepsilon$. Luego, como $\omega_f(x) = A \cup B$ existe $y_0 \in A$ (o bien existirá un $y_1 \in B$ análogo) de manera que $d(f^{n_0}(x), y_0) < \varepsilon$. Entonces, aplicando (2.2) se tiene que $d(f(f^{n_0})(x), f(y_0)) < \frac{\delta}{2}$, es decir, $d(f^{n_0+1}(x), f(y_0)) < \frac{\delta}{2}$ (donde $f(y_0) \in A$ por ser $f(A) = A$). Por tanto,

$$d(f^{n_0+1}(x), B) > \frac{\delta}{2}. \quad (2.4)$$

Por otro lado, usando (2.3) se tiene que $d(f^{n_0+1}(x), A \cup B) < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$, y por (2.4), $d(f^{n_0+1}(x), A) < \varepsilon$. Por tanto, existe $y_1 \in A$ tal que $d(f^{n_0+1}(x), y_1) < \varepsilon$. Ahora, repitiendo el mismo argumento existirá $y_2 \in A$ de manera que $d(f^{n_0+2}(x), y_2) < \varepsilon$. En general, para todo $k \geq 0$ existe $y_k \in A$ tal que $d(f^{n_0+k}(x), y_k) < \varepsilon$. En otras palabras, $d(f^{n_0+k}(x), A) < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ para todo $k \geq 0$. Pero además, $d(f^{n_0+k}(x), B) > \frac{\delta}{2}$ para todo $k \geq 0$ y, por tanto, $B \cap \omega_f(x) = \emptyset$ lo que es una contradicción. Así pues, $\omega_f(x)$ no se puede descomponer en dos conjuntos disjuntos invariantes, lo que concluye la prueba. \square

Definición 2.5. Si $\omega_f(x)$ es una órbita periódica, diremos que (la órbita de) x es **atraído (atraída) por una órbita periódica**.

Pero, ¿qué significa exactamente ser atraído por una órbita periódica? Por definición, un punto es atraído por una órbita periódica cuando su ω -límite es una órbita periódica, y en la proposición 2.4 hemos visto que esto es equivalente a afirmar que el conjunto ω -límite es finito. Resulta que todavía podemos ser más precisos, y así llegamos a la noción fundamental de este trabajo.

Definición 2.6. Decimos que un punto x es **asintóticamente periódico** si existe un punto periódico p tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0.$$

Denotamos el conjunto de puntos asintóticamente periódicos de f como $\text{AP}(f)$.

Proposición 2.7. Sean $f : X \rightarrow X$ continua, $x \in X$. Entonces x es asintóticamente periódico si y sólo si es atraído por una órbita periódica.

Demostración. “ \Rightarrow ” Sea p un punto periódico de periodo r . Suponemos que x es asintóticamente periódico, es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0$. Vamos a ver que x es atraído por la órbita periódica $\{p, f(p), \dots, f^{r-1}(p)\}$, es decir, $\omega_f(x) = \{p, f(p), \dots, f^{r-1}(p)\}$.

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(p)) = 0$, en particular $\lim_{j \rightarrow \infty} d(f^{rj+i}(x), f^i(p)) = 0$, donde $0 \leq i < r$. Por tanto, $\text{Orb}_f(p) \subset \omega_f(x)$. De hecho, $d(f^n(x), \text{Orb}_f(p)) \rightarrow 0$. Por tanto,

si $q \notin \text{Orb}_f(p)$, es decir, $d(q, \text{Orb}_f(p)) = \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, $d(f^n(x), \text{Orb}_f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, $d(f^n(x), q) > \frac{\varepsilon}{2}$, es decir, $q \notin \omega_f(x)$. Por tanto, no pueden haber puntos fuera de la órbita de p en el ω -límite.

“ \Leftarrow ” Supongamos que el punto x es atraído por una órbita periódica de periodo r , es decir, $\omega_f(x) = \{p, f(p), \dots, f^{r-1}(p)\}$. Veamos primero que existe $q \in \{p, f(p), \dots, f^{r-1}(p)\}$ de manera que $f^{rj}(x) \rightarrow q$ cuando $j \rightarrow \infty$. Sea $\delta > 0$ la distancia mínima entre los puntos de $\text{Orb}_f(p)$. Por la continuidad uniforme, existe $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$ tal que si $d(u, v) < \varepsilon$, entonces $d(f(u), f(v)) < \frac{\delta}{2}$. Como $\omega_f(x) = \text{Orb}_f(p)$, existe $n_0 = j_0 r$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(f^n(x), \text{Orb}_f(p)) < \varepsilon$. Sea $q \in \text{Orb}_f(p)$ tal que $d(f^{n_0}(x), q) < \varepsilon$ y por la continuidad uniforme, $d(f^{n_0+1}(x), f(q)) < \frac{\delta}{2}$. Por tanto,

$$d(f^{n_0+1}(x), t) > \frac{\delta}{2} \text{ para todo } t \in \text{Orb}_f(p), t \neq f(q) \quad (2.5)$$

(ya que los puntos de la órbita están separados entre sí a una distancia como mínimo δ). Luego, dado que $d(f^{n_0+1}(x), \text{Orb}_f(p)) < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$, utilizando (2.5) se obtiene que $d(f^{n_0+1}(x), f(q)) < \varepsilon$. Reiterando el argumento, probamos que, para todo $j \geq j_0$,

$$d(f^{jr}(x), q) < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$$

y

$$d(f^{jr}(x), t) > \frac{\delta}{2} \text{ si } t \in \text{Orb}_f(p), t \neq q.$$

Ahora, como estamos en un compacto X , $(f^{jr}(x))_{j=0}^{\infty}$ debe tener algún punto de acumulación. De hecho, tiene a lo sumo un punto de acumulación q , ya que sus puntos posibles de acumulación están en $\omega_f(x) = \text{Orb}_f(p)$. Pero cuando una sucesión en un compacto tiene un único punto de acumulación, converge a ese punto, es decir, $f^{jr}(x) \rightarrow q$ cuando $j \rightarrow \infty$, con lo que se obtiene lo que buscábamos.

Ahora, como f es continua se verificará

$$f^{rj+1}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(q), f^{rj+2}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f^2(q), \dots, f^{rj+(r-1)}(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f^{r-1}(q).$$

Luego, en general, $d(f^n(x), f^n(q)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, con lo que se concluye la prueba. \square

Por tanto, a partir de las proposiciones 2.4 y 2.7 se tiene la equivalencia entre las siguientes afirmaciones:

- 1) x es asintóticamente periódico.
- 2) x es atraído por una órbita periódica.
- 3) $\omega_f(x)$ es finito.

Nótese que, en particular, si $f^n(x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces p es un punto fijo. Esto también se puede probar directamente: si $f^n(x) \rightarrow p$, por continuidad se tiene que $f^{n+1}(x) \rightarrow f(p)$, luego $f(p) = p$.

2.2. Caracterización de atractores propios

A partir de ahora, y hasta el final del trabajo, $I = [a, b]$ siempre denotará a un intervalo compacto de \mathbb{R} . En esta sección, si $x_0 \in I$, denotaremos a veces a la sucesión $(f^n(x_0))_{n=0}^{\infty}$, para abreviar, mediante $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

Definición 2.8. Sean $f : I \rightarrow I$ continua y p un punto fijo de f .

- Diremos que p es un **atractor por la derecha** si existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in [p, p + \varepsilon]$, resulta

$$\lim_n f^n(x) = p,$$

es decir, existe un intervalo a la derecha de p en el que todos los puntos convergen.

- Diremos que p es un **atractor por la izquierda** si existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in [p - \varepsilon, p]$, resulta

$$\lim_n f^n(x) = p,$$

es decir, existe un intervalo a la izquierda de p en el que todos los puntos convergen.

- Diremos que p es un punto **atractor** cuando al menos sea atractor por la izquierda o por la derecha. En otras palabras, p será un punto fijo atractor si existe $[c, d]$ de manera que $p \in [c, d]$ y para todo $x \in [c, d]$ se verifica que

$$\lim_n f^n(x) = p.$$

- Diremos que p es un **atractor propio** si existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $x \in I \cap [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$, resulta

$$\lim_n f^n(x) = p.$$

Ejemplo 2.9. Las gráficas de la figura 2.1 sirven para ilustrar las anteriores nociones. En la gráfica de la izquierda, el punto p es atractor por la izquierda pero no por la derecha, y por tanto es atractor pero no propio. En la gráfica de la derecha el punto p , que coincide con un extremo del intervalo I , es atractor por la izquierda y también atractor propio, porque atrae a todos los puntos de un entorno suyo, aunque no sea atractor por la derecha (ya que la función no está definida allí).

El principal objetivo de esta sección es proporcionar una caracterización topológica, sencilla, de la atracción propia, que puede encontrarse en [23, p. 57]; nuestra demostración sigue, con algunos retoques, la que se da allí. Los otros resultados son también conocidos por los especialistas, pero a falta de referencias cómodas donde acudir los hemos elaborado por nuestra cuenta.

La prueba del teorema 2.13 es algo larga, por lo que necesitaremos varios lemas.

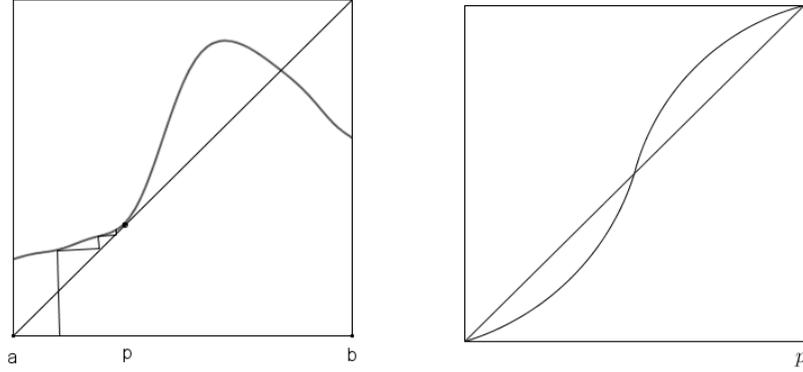


Figura 2.1: Diversos tipos de atractores.

Lema 2.10. *Dado p un punto fijo, p es atractor propio (respectivamente, atractor) para f si y sólo si p es atractor propio (respectivamente, atractor) para f^2 .*

Demostración. Las demostraciones de ambas afirmaciones son análogas así que nos centramos en la atracción propia.

“ \Rightarrow ” Supongamos que p es atractor propio para f , es decir, existe ε tal que si $|x_0 - p| \leq \varepsilon$ entonces $|f^n(x_0) - p| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, o lo que es lo mismo, $|x_n - p| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Pero entonces también se verifica $|x_{2m} - p| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, y como $(x_{2m})_{m=0}^\infty = ((f^2)^m(x_0))_{m=0}^\infty$, p es atractor propio para f^2 .

“ \Leftarrow ” Supongamos que p es atractor propio para f^2 , es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x_0 - p| \leq \varepsilon$ entonces $|x_{2m} - p| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$. Como f es continua, también se tendrá $|x_{2m+1} - f(p)| = |x_{2m+1} - p| \rightarrow 0$, luego toda la sucesión $(x_n)_n$ convergerá a p , que por tanto será atractor propio para f . \square

Lema 2.11. *Sea $J \subset I$ compacto. Si $f(J) \supset J$ o $f(J) \subset J$ entonces existe $p \in J$ tal que $f(p) = p$.*

Demostración. Sea $J = [u, v]$. Si $f(J) \subset J$ entonces $f(u), f(v) \in J$, luego $f(u) \geq u$ y $f(v) \leq v$. Poniendo $g(x) = f(x) - x$ queda $g(u) \geq 0$ y $g(v) \leq 0$. Entonces, por la propiedad de los valores intermedios, existe $p \in [u, v]$ tal que $g(p) = 0$, es decir, $f(p) = p$.

Por otro lado, si $f(J) \supset J$, existen $u', v' \in J$ tales que $f(u') = u \leq u'$ y $f(v') = v \geq v'$. Entonces, tomando $g(x) = f(x) - x$ se tiene que $g(u') \leq 0$ y $g(v') \geq 0$ luego, por la propiedad de los valores intermedios, existe p en el intervalo de extremos u' y v' tal que $g(p) = 0$, es decir, $f(p) = p$. \square

Lema 2.12. *Sea J compacto con $f(J) = J$. Entonces o f tiene al menos dos puntos fijos en J o f tiene alguna órbita de periodo 2 en J .*

Demostración. En primer lugar, como $f(J) = J$, por el lema 2.11 sabemos que J posee al menos un punto fijo. Sea $J = [u, v]$. Como $f(J) = J$, tenemos que $f(u) \geq u$ y $f(v) \leq v$. Suponemos que J posee un único punto fijo p . Veremos que J posee una órbita periódica de periodo 2.

Si p es el único punto fijo entonces $u < p < v$. En efecto, si $p = v$ (análogamente se puede ver el caso $p = u$) entonces $f(x) < x$ para todo $x < v$ o $f(x) > x$ para todo $x < v$ (ya que si no existiría otro punto fijo). El primer caso no puede darse, ya que entonces $f(u) < u$ y hemos visto que $f(u) \geq u$. Ahora, si $f(x) > x$ para todo $x < v$, no podría existir ningún x tal que $f(x) = u$ ya que entonces $u > x$, pero esto es una contradicción, ya que $f(J) = J$.

Ahora, razonando de la misma manera se tiene que necesariamente $f(x) > x$ para todo $x \in [u, p]$ y $f(x) < x$ para todo $x \in (p, v]$. Por tanto, usando de nuevo $f(J) = J$, existen $c \in [u, p]$ y $d \in (p, v]$ tales que $f(c) = v$ y $f(d) = u$. Luego, $f([c, p]) \supset [p, v] \supset [p, d]$, y entonces $f^2([c, p]) \supset f([p, d]) \supset [u, p] \supset [c, p]$. En particular, como $f^2([c, p]) \supset [c, p]$ existe $c' \in [c, p]$ de manera que $f^2(c') = c \leq c'$ (por el lema 2.11). Además, $f^2(u) \geq u$. Por tanto, por el teorema de los valores intermedios existe $q \in [u, c']$ tal que $f^2(q) = q$. Entonces, como q no puede ser un punto fijo porque el único punto fijo es p , q será el punto periódico de periodo 2 que buscábamos. \square

Estamos ya en disposición de abordar el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.13. *Sea p un punto fijo de f . Se verifican las siguientes afirmaciones:*

- 1) *Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ de manera que $f^2(x) < x$ para todo $x \in I \cap (p, p + \varepsilon]$ y $f^2(x) > x$ para todo $x \in I \cap [p - \varepsilon, p)$. Entonces p es atractor propio.*
- 2) *Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^2(x) > x$ para todo $x \in (p, p + \varepsilon]$. Entonces p no puede ser atractor por la derecha.*
- 3) *Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^2(x) < x$ para todo $x \in [p - \varepsilon, p)$. Entonces p no puede ser atractor por la izquierda.*

Demostración. 1) Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ de manera que $g(x) = f^2(x) < x$ si $x \in (p, p + \varepsilon]$ y $g(x) = f^2(x) > x$ si $x \in [p - \varepsilon, p)$. Veamos que entonces

$$f(x) < x \text{ si } x \in (p, p + \varepsilon] \text{ y } f(x) > x \text{ si } x \in [p - \varepsilon, p). \quad (2.6)$$

Sabemos que $f(x) \neq x$ para todo $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon] \setminus \{p\}$ (ya que si no fuese así entonces $f^2(x) = x$ para $x \neq p$ en contradicción con la hipótesis). Por ejemplo, suponemos $f(x) > x$ para todo $x \in (p, p + \varepsilon]$. Sea $p < x_0 < p + \varepsilon$ (con x_0 suficiente próximo a p) y supongamos que $x_0 < f(x_0)$. Entonces $x_0 < f(x_0) < f^2(x_0) < p + \varepsilon$ (aplicando nuevamente la hipótesis,

ya que $f(x_0) > p$) y en particular, $g(x_0) > x_0$, en contradicción con la hipótesis. El otro caso se prueba análogamente.

Sea $0 < \delta < \varepsilon$ suficientemente pequeño tal que $f([p - \delta, p + \delta]) \subset [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$. Definimos

$$U := [p - \delta, p + \delta] \cup f([p - \delta, p + \delta]) \subset [p - \varepsilon, p + \varepsilon],$$

que es un intervalo compacto entorno de p . Vamos a probar que si $x_0 \in U$ entonces $x_n \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$, con lo que habremos demostrado que p es un atractor propio.

Comenzamos viendo que $f(U) \subset U$. Bastará probar

$$f(U_d) \subset U_d, \text{ donde } U_d = [p, p + \delta] \cup f([p, p + \delta]), \quad (2.7)$$

$$f(U_i) \subset U_i, \text{ donde } U_i = [p - \delta, p] \cup f([p - \delta, p]), \quad (2.8)$$

ya que $U = U_d \cup U_i$. Por ejemplo demostraremos (2.7) (análogamente se prueba (2.8)). Para ello veamos que si $x \in U_d$ entonces $f(x) \in U_d$. Por un lado, si $x \in [p, p + \delta]$ entonces claramente $f(x) \in U_d$. Sea ahora $f([p, p + \delta]) = [c, d]$, donde $d < p + \delta$ (ya que por (2.6) $f(x) < x$ si $x \in (p, p + \varepsilon]$). Si $x \in [c, d]$, entonces existe $y \in (p, p + \delta]$ tal que $x = f(y)$ y, por hipótesis, $f^2(y) < y$. Ahora hay dos posibilidades:

- $x > p$, es decir, $x \in (p, p + \delta)$, con lo que evidentemente se tiene que $f(x) \in U_d$.
- $x \in [c, p)$, con lo que, aplicando (2.6), obtenemos $f(x) > x$. Por tanto, juntando esto con lo de antes se tiene que $x < f(x) = f^2(y) < y$. Además, como $x \in [c, d] \subset U_d$ e $y \in (p, p + \delta] \subset U_d$, se tiene que $f(x) \in U_d$, como buscábamos.

Así pues, hemos probado $f(U) \subset U$. Entonces, $f^2(U) = f(f(U)) \subset f(U)$ y, procediendo por inducción, se tiene que $f^{n+1}(U) \subset f^n(U)$. Luego, llamando $U_n = f^n(U)$ se obtiene $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots$, $p \in U_n$ para todo n y $x_n \in U_n$. Si probamos que $|U_n| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces se probará que $x_n \rightarrow p$ y concluiremos la prueba. Por reducción al absurdo, supongamos que $|U_n| \rightarrow L > 0$ y pongamos $U_n = [u_n, v_n]$. Sea

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = [u, v], \quad v - u = L > 0.$$

Afirmamos que $f([u, v]) = [u, v]$. Esto nos conduce a la contradicción deseada, pues por el lema 2.12 tendríamos en $[u, v]$ otro punto fijo $q \neq p$ o una órbita periódica de periodo 2, es decir, la gráfica de $g = f^2$ cortaría a la diagonal en dos puntos distintos, en contra de lo establecido en la hipótesis.

La demostración de $f([u, v]) = [u, v]$ se hará por doble inclusión.

Probamos $f([u, v]) \subset [u, v]$. Como $[u, v] \subset U_n$, $f([u, v]) \subset f(U_n) = U_{n+1}$, es decir,

$$f([u, v]) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} U_{n+1} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} U_n = [u, v],$$

donde la penúltima desigualdad se obtiene por ser U_n una sucesión decreciente. Por tanto, $f([u, v]) \subset [u, v]$.

Probamos $f([u, v]) \supset [u, v]$. Sea $x \in [u, v]$. Queremos demostrar que existe $y \in [u, v]$ tal que $f(y) = x$. Sabemos que, como $x \in U_1$, existe $y_0 \in U_0$ tal que $f(y_0) = x$. Además, como $x \in U_2$, existe $y_1 \in U_1$ tal que $f(y_1) = x$. En general, como $x \in U_{n+1}$, existe $y_n \in U_n$ tal que $f(y_n) = x$. En resumen, para todo n existe $y_n \in U_n$ tal que $f(y_n) = x$. Entonces, como $\{y_n\}_{n=0}^{\infty} \subset U_0$ compacto, existe $y_{n_k} \rightarrow y \in U_0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Además, $\{y_n\}_{n=m}^{\infty} \subset U_m$ compacto, luego $y \in U_m$ para todo $m \geq 0$, es decir, $y \in [u, v]$. Luego, como $y_{n_k} \rightarrow y$, se tiene que $x = f(y_{n_k}) \rightarrow f(y)$, es decir, $f(y) = x$, como queríamos probar.

De este modo, la demostración de 1) queda completa.

2) Por comodidad, denotemos $g = f^2$. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $g(x) > x$ para todo $x \in (p, p + \varepsilon]$. Entonces se pueden distinguir dos casos:

Supongamos primero $g(x) > x$ para todo $x > p$. Sea $x_0 > p$. Entonces la sucesión $(x_{2n})_{n=0}^{\infty}$ es creciente, y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} \neq p$, es decir, ningún punto a la derecha de p tiene órbita que pueda ser atraída por p para $g = f^2$ (y por el lema 2.10 tampoco podrá ser atraída por f), luego p no puede ser atractor por la derecha (ni para f^2 ni para f).

Supongamos ahora que existe $q > p$ (mínimo) tal que $g(q) = q$. Podemos distinguir entonces:

- $g(x) < q$ para todo $x \in (p, q)$. Entonces $g([p, q]) = [p, q]$ y dado $x_0 \in (p, q]$, se tiene que $(x_{2n})_{n=0}^{\infty} \subset [p, q]$. Como $g(x) \geq x$ para todo $x \in [p, q]$, en particular, $p < x_0 \leq x_{2n}$ para todo n , luego $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} \neq p$ y, por tanto, p no puede ser atractor por la derecha para g ni para f .
- Existe $r \in (p, q)$ tal que $g(r) = q$. Como $g(x) > x$ para todo $x \in (p, r]$, si $p < x_0 \leq r$, entonces $x_{2k} > r$ para algún k , ya que en caso contrario $x_{2n} \rightarrow u \leq r$, con lo que se tendría $g(u) = u$, en contradicción con la minimalidad de q . Ahora, por la propiedad de los valores intermedios, $g^k([p, x_0]) \supset [p, r]$, luego existe $y \in [p, x_0]$ tal que $g^k(y) = r$. Por tanto, $g^{k+1}(y) = g(r) = q$, $g^{k+2}(y) = g(q) = q$ y, procediendo de la misma manera, se tiene que $g^{k+m}(y) = q$ para todo $m \geq 1$. Por tanto, la órbita de y no converge a p , luego p no es atractor por la derecha para g y tampoco lo será para f .

3) Análogo a 2). □

Cuando para un punto fijo p se dan simultáneamente los casos 2) y 3) del teorema anterior se le denomina **repulsor**.

Observación 2.14. Con el mismo argumento del apartado 1) del teorema 2.13 se puede deducir que si J es un intervalo (no necesariamente compacto), $f : J \rightarrow J$ es continua, p es un punto fijo de f , $f^2(x) < x$ para todo $x > p$ y $f^2(x) > x$ para todo $x < p$, entonces p es **atractor global**, es decir, $(f^n(x))_n$ converge a p para todo $x \in J$.

Corolario 2.15 (Caracterización de atractores propios). *Un punto fijo p es atractor propio para f si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que $f^2(x) < x$ para todo $x \in I \cap (p, p + \varepsilon]$ y $f^2(x) > x$ para todo $x \in I \cap [p - \varepsilon, p)$.*

Demostración. “ \Rightarrow ” Por comodidad, denotemos $g = f^2$. Si p es atractor propio para f entonces, por el lema 2.10, p es atractor propio para g . Por reducción al absurdo, supongamos que existe $x > p$ tan cercano a p como deseemos tal que $g(x) \geq x$. Como no hay puntos fijos de g cerca de p (por ser atractor propio), deducimos que existe $\varepsilon' > 0$ tal que $g(x) > x$ para todo $x \in (p, p + \varepsilon]$. Pero entonces, aplicando el apartado 2) del teorema 2.13 se obtiene el resultado buscado.

“ \Leftarrow ” Este es el apartado 1) del teorema 2.13. □

Todo lo que hemos hecho hasta ahora en el capítulo correspondería a lo que en la introducción del trabajo llamábamos “escuela topológica”. A partir de aquí empezaremos a encaminarnos a resultados de otra naturaleza, exigiendo, para empezar, ciertas condiciones de regularidad a las funciones con las que tratamos. De momento notemos que si f es derivable en p hay un modo muy simple de asegurar que se cumple alguno de los casos del teorema 2.13.

Corolario 2.16. *Sea p un punto fijo de f y suponemos que f es derivable en p . Entonces:*

- 1) *Si $|Df(p)| < 1$, entonces p es atractor propio.*
- 2) *Si $|Df(p)| > 1$, entonces p no es atractor por la derecha ni por la izquierda.*

Demostración. 1) Denotemos $g = f^2$. Aplicando la hipótesis del teorema y la regla de la cadena se tiene que

$$Dg(p) = Df(f(p))Df(p) = (Df(p))^2 < 1,$$

es decir,

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} < 1,$$

donde $g(p) = p$. En otras palabras, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|x - p| \leq \varepsilon$, $x \neq p$, entonces

$$\frac{g(x) - p}{x - p} \leq \delta < 1.$$

Ahora, si $x > p$ entonces $g(x) - p \leq \delta(x - p) < x - p$, luego $g(x) < x$. Por otro lado, si $x < p$ entonces $g(x) - p \geq \delta(x - p) > x - p$, luego $g(x) > x$. Por tanto, nos encontramos en las condiciones del caso 1) del teorema 2.13, luego p es atractor propio.

2) Denotando $g = f^2$ y razonando como en el caso anterior se obtiene que si $x > p$ entonces $g(x) > x$ y, por tanto, aplicando el teorema 2.13, caso 2), se deduce que p no puede ser atractor por la derecha. Por otro lado, si $x < p$ se obtiene que $g(x) < x$ luego, aplicando el caso 3) del teorema 2.13 se tiene que p tampoco puede ser atractor por la izquierda, con lo que se concluye la prueba. \square

Cuando un punto fijo p satisface $|Df(p)| \neq 1$ se le suele denominar **hiperbólico**. El corolario 2.16 deja clara la dinámica local en estos puntos: o son atractores propios o repulsores. En los puntos no hiperbólicos (en la introducción nos referíamos a ellos, de un modo algo engañoso, como “semia atractores”), por el contrario, todo tipo de dinámicas locales son posibles, y esto es lo que hace que sea más fácil demostrar el principal teorema de este trabajo cuando no están presentes. No obstante, las técnicas que usaremos consiguen poner el énfasis en otras cuestiones, de modo que la no hiperbolicidad no será un problema para nosotros.

Si suponemos crecimiento local también podemos ser más precisos en lo concerniente a la atracción. Omitimos el resultado, de enunciado simétrico, a la izquierda de p .

Proposición 2.17. *Sea p un punto fijo de f y supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f|_{(p, p+\varepsilon]}$ es estrictamente creciente. Entonces existe $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ tal que se da exactamente una de las situaciones siguientes:*

- 1) $f(x) > x$ para todo $x \in (p, p + \varepsilon']$ y p no es atractor por la derecha.
- 2) Existe una sucesión de puntos fijos en $(p, p + \varepsilon']$ convergiendo a p y p no es atractor por la derecha.
- 3) $p < f(x) < x$ para todo $x \in (p, p + \varepsilon']$ y p es atractor por la derecha.

Demostración. Si existe una sucesión de puntos fijos a la derecha de p , convergiendo hacia p , es claro que p no puede ser atractor por la derecha. Por tanto, si no es posible encontrar ε' para que se cumpla 2) entonces sí se podrá encontrar de manera que al menos f no tenga puntos fijos en $(p, p + \varepsilon']$. Si $f(x) > x$ en este intervalo, entonces se tendrá $f^2(x) > x$ al menos cerca de p , y p no es atractor por la derecha por el caso 2) del teorema 2.13. Por contra, si $p < f(x) < x$ en el intervalo, entonces, para cada $x \in (p, p + \varepsilon']$, la sucesión $(f^n(x))_n$ permanecerá siempre en el intervalo y será decreciente, por lo que convergerá a un punto fijo. Como en $(p, p + \varepsilon']$ no hay puntos fijos, convergerá hacia p . Por tanto p será atractor por la derecha. \square

Las gráficas de la figura 2.2 ilustran los casos 1) (izquierda) y 2) (derecha) de la proposición 2.17. Para ambas funciones p es atractor por la izquierda pero no por la derecha.

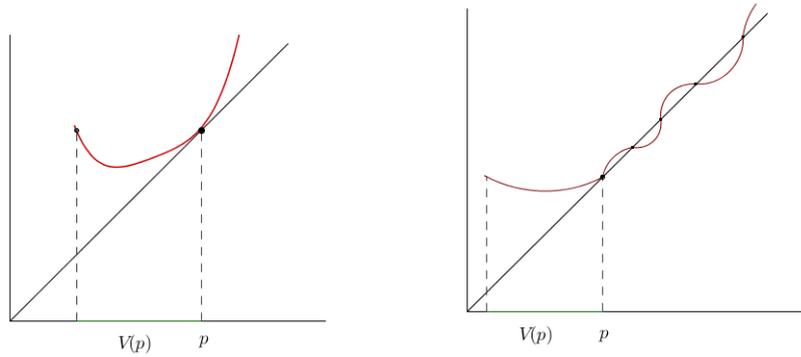


Figura 2.2: Atractores por la izquierda no propios.

2.3. Cuenca inmediata de atracción

En la sección anterior hemos estudiado qué debe ocurrir para que un punto fijo sea atractor. Ahora extenderemos la noción a órbitas periódicas de cualquier periodo, y averiguaremos, dada una cierta órbita periódica, cómo puede ser el conjunto de puntos que la tiene como su conjunto ω -límite. La siguiente noción es bien conocida en la literatura; por lo demás, no nos hemos apoyado en texto alguno para redactar la sección.

Definición 2.18. Sean $f : I \rightarrow I$ continua y p un punto fijo atractor de f . Definimos la **cuenca inmediata de atracción** $V_f(p)$ como el intervalo más grande posible que contiene a p y tal que todos sus puntos son atraídos por p .

En otras palabras, $V_f(p)$ será la unión de todos los intervalos con la propiedad de que sus puntos son atraídos por p (sabemos que existe al menos un intervalo por la definición de punto fijo atractor). La cuenca inmediata de atracción tiene las siguientes propiedades:

- 1) $f(V_f(p)) \subset V_f(p)$, ya que si los puntos de $V_f(p)$ son atraídos por p , sus imágenes también serán atraídas por p . Además, $f(V_f(p))$ es un intervalo que contiene al punto fijo p luego, como $V_f(p)$ es el intervalo más grande posible, necesariamente se tiene que $f(V_f(p)) \subset V_f(p)$.
- 2) $f(\partial V_f(p)) \subset \partial V_f(p)$. En efecto, sabemos que $f(\partial V_f(p)) \subset \text{Cl}(V_f(p))$. Ahora, si algún punto c de la frontera viajara al interior del intervalo $V_f(p)$, entonces existiría $\varepsilon > 0$ de manera que todos los puntos del intervalo $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ viajarían también al interior. Por tanto, $V_f(p)$ no sería el intervalo maximal cumpliendo que todos sus puntos son atraídos por p . Luego, como $f(\partial V_f(p)) \subset \text{Cl}(V_f(p))$ y $f(\partial V_f(p)) \cap \text{Int}(V_f(p)) = \emptyset$, se tiene que $f(\partial V_f(p)) \subset \partial V_f(p)$.

En resumen, la clausura de la cuenca inmediata de atracción (que es un intervalo compacto) se caracteriza porque los puntos de la frontera viajan a la frontera (uno de

cuyos puntos puede ser el propio punto p) y los puntos del interior son atraídos por el punto fijo atractor p .

Definición 2.19. *Dada una órbita periódica de periodo r , diremos que es una **órbita periódica atractora** cuando cada uno de sus puntos sea atractor para f^r . Su **cuenca inmediata de atracción** será, por definición, la unión de las respectivas cuencas inmediatas de atracción y se denotará como $V_f(\text{Orb}_f(p))$.*

Así, cada uno de los puntos de dicha órbita tendrá su correspondiente cuenca inmediata de atracción, es decir, tendremos los intervalos $V_{f^r}(p), V_{f^r}(f(p)), \dots, V_{f^r}(f^{r-1}(p))$. Se verificará entonces:

- 1) $V_{f^r}(f^i(p)) \cap V_{f^r}(f^j(p)) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. En efecto, para todo $x \in V_{f^r}(f^i(p))$ se verifica que x es atraído por $f^i(p)$, y por tanto, no puede ser atraído por $f^j(p)$, es decir, $x \notin V_{f^r}(f^j(p))$.
- 2) $f(V_{f^r}(f^i(p))) \subset V_{f^r}(f^{i+1}(p))$, ya que si $x \in f(V_{f^r}(f^i(p)))$, $x = f(y)$ con $y \in V_{f^r}(f^i(p))$, es decir, y es atraído por $f^i(p)$, por la continuidad de f , $x = f(y)$ es atraído por $f^{i+1}(p)$, luego $x \in V_{f^r}(f^{i+1}(p))$.
- 3) $f(\partial V_{f^r}(f^i(p))) \subset \partial V_{f^r}(f^{i+1}(p))$. En efecto, aplicando el mismo razonamiento que el utilizado en la propiedad 2) de la cuenca inmediata de atracción se tiene que $f(\partial V_{f^r}(f^i(p))) \subset \text{Cl}(\partial V_{f^r}(f^{i+1}(p)))$ y $f(\partial V_{f^r}(f^i(p))) \cap \text{Int}(V_{f^r}(f^{i+1}(p))) = \emptyset$, luego se obtiene $f(\partial V_{f^r}(f^i(p))) \subset \partial V_{f^r}(f^{i+1}(p))$.

Observación 2.20. Notemos que $V_f(\text{Orb}_f(p))$ tiene tantas componentes conexas como el periodo de $\text{Orb}_f(p)$. En efecto, si dos de los intervalos $V_{f^r}(f^i(p))$ y $V_{f^r}(f^j(p))$, con $0 \leq i < j < r$ (que recordemos son disjuntos), formaran un intervalo, tendrían un extremo común q que verificaría $f^r(q) = q$ y pertenecería a uno de los dos intervalos. Este punto q debe estar en la órbita de p , pues de otro modo no podría pertenecer a ninguno de los dos intervalos. Digamos $q \in V_{f^r}(f^i(p))$, lo que implica $q = f^i(p)$. Como f^{j-i} lleva la frontera de $V_{f^r}(f^i(p))$ a la frontera de $V_{f^r}(f^j(p))$, resulta que este segundo intervalo tiene a dos puntos de la órbita de p en su frontera, y por tanto eso mismo ocurrirá para todos los intervalos $V_{f^r}(f^s(p))$, $0 \leq s < r$. Esto es imposible porque el total de puntos que necesitaríamos para rellenar todos los extremos es como mínimo $r + 1$ y solo tenemos r puntos en la órbita.

Es muy razonable esperar que una órbita periódica de periodo r sea atractora si y sólo si alguno de los puntos de su órbita es atractor para f^r , pero si sólo suponemos continuidad existen contraejemplos, como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.21. En la función afín a trozos de la figura 2.3 observamos que $\{c, d\}$ es una órbita periódica de periodo 2. Además, el punto d es atractor para la f^2 ya que para todo

Supongamos ahora que f es de clase C^1 . Entonces la regla de la cadena implica que las derivadas de f^r en todos los puntos de la órbita coinciden, es decir,

$$Df^r(p) = Df^r(f(p)) = \dots = Df^r(f^{r-1}(p)).$$

En concreto, para cada $k = 0, \dots, r-1$, se tiene

$$Df^r(f^k(p)) = \prod_{i=0}^{r-1} Df(f^i(f^k(p))) = \prod_{i=0}^{r-1} Df(f^{k+i}(p)) = \prod_{i=0}^{r-1} Df(f^i(p)).$$

Se pueden diferenciar ahora dos casos:

- Si $Df^r(f^j(p)) \neq 0$, es decir, si $Df^r(f^k(p)) \neq 0$ para cada $k = 0, 1, \dots, r-1$, entonces la función es estrictamente monótona a trozos cerca de la órbita periódica, y el teorema se prueba razonando como en el párrafo anterior.
- Si $Df^r(f^j(p)) = 0$, entonces $Df^r(f^k(p)) = 0$ para cada $k = 0, 1, \dots, r-1$. Ahora, aplicando el teorema 2.16, como $|Df^r(f^k(p))| < 1$ para cada $k = 0, 1, \dots, r-1$, todos los puntos de la órbita son atractores (propios) para f^r , con lo que se concluye la prueba del teorema.

□

Bajo las anteriores condiciones de regularidad, la atracción implica algo más: las órbitas terminan cayendo en las cuencas inmediatas de atracción. Por contra, si no hay atracción la única manera de llegar al órbita es aterrizando justo sobre ella.

Lema 2.23. *Sea $f : I \rightarrow I$ estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 y supongamos que p es punto fijo atractor. Sea x tal que $\omega_f(x) = \{p\}$. Entonces existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) \in V_f(p)$.*

Demostración. Si p es atractor propio entonces la proposición es trivial. Supongamos que p es atractor por la izquierda pero no por la derecha (se podría ver análogamente el caso en el que p es atractor por la derecha pero no por la izquierda). Por reducción al absurdo, supongamos que $\lim_n f^n(x) = p$ y $f^n(x) \notin V_f(p)$ para todo n . Entonces la sucesión se aproxima a p por la derecha.

Podemos suponer que f es estrictamente monótona en un pequeño intervalo $(p, p + \varepsilon]$ a la derecha de p (si f es de clase C^1 por el corolario 2.16, que implica $|Df(p)| = 1$). Si f es decreciente en dicho intervalo e $y > p$ es suficientemente próximo a p , entonces $f(y) < f(p) = p$ y además $f(y) \in V_f(p)$. Podemos suponer ε tan pequeño que de hecho $f((p, p + \varepsilon]) \subset V_f(p)$, pero entonces $(p, p + \varepsilon] \subset V_f(p)$ y p sería atractor propio, una contradicción.

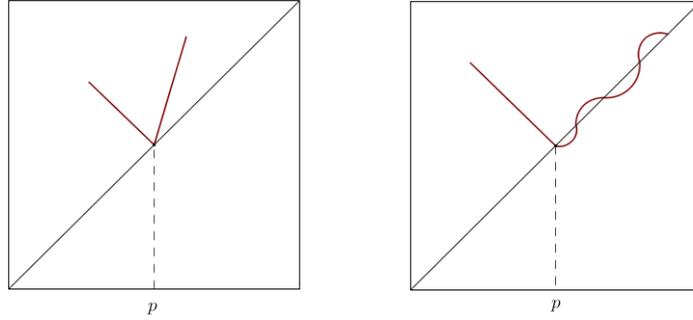


Figura 2.4: Ilustración de la prueba del lema 2.24 cuando p es un mínimo estricto.

Por tanto, se tendrá que f es creciente y estaremos o bien en el caso 1) o bien en el caso 2) de la proposición 2.17. Pero el caso 1) es claramente incompatible con que $f^n(x)$ converja a p por la derecha, por lo que deberá tenerse 2). Sin embargo, existirán entonces puntos fijos $p < c < d < p + \varepsilon$ y k tales que $f^k(x) \in [c, d]$, y como $f([c, d]) \subset [c, d]$ de nuevo llegamos a una contradicción. \square

Lema 2.24. *Sea $f : I \rightarrow I$ estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 y supongamos que p es punto fijo no atractor. Sea x tal que $\omega_f(x) = \{p\}$. Entonces existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) = p$.*

Demostración. Pueden darse varias situaciones cerca de p : o bien p es un extremo relativo estricto (esto sólo si la función es estrictamente monótona a trozos, porque si es de clase C^1 deberá ocurrir $|Df(p)| \geq 1$ por el corolario 2.16), o bien f es estrictamente creciente, o bien f es estrictamente decreciente. Reemplazando si es necesario f por f^2 (lema 2.10), este último caso también puede omitirse.

No es restrictivo suponer, entonces, que f es creciente (localmente) a la derecha de p . Si $f^n(x) \neq p$ para todo n entonces, tanto si p es un mínimo relativo (véase la figura 2.4) como si no, queda claro que la sucesión acabará situada a la derecha de p , y convergiendo a p . Como en el lema anterior, esto entra en contradicción con la proposición 2.17. \square

Proposición 2.25. *Sea $f : I \rightarrow I$ estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 . Sea $\text{Orb}_f(p)$ una órbita atractor. Sea x tal que $\omega_f(x) = \text{Orb}_f(p)$, es decir, x es atraído por una órbita periódica atractor. Entonces existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) \in V_f(\text{Orb}_f(p))$.*

Demostración. Sea x tal que $\omega_f(x) = \text{Orb}_f(p)$, donde $\text{Orb}_f(p)$ es una órbita periódica atractor de periodo r . Entonces existe $q \in \text{Orb}_f(p)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(x) - f^n(q)| = 0$. Por tanto, se verifica $\lim_{m \rightarrow \infty} |f^{rm}(x) - f^{rm}(q)| = 0$, luego llamando $g = f^r$ y utilizando $f^r(q) = q$ se tiene que $\lim_{m \rightarrow \infty} |g^m(x) - g^m(q)| = 0$, es decir, $\omega_g(x) = \{q\}$.

Ahora, como $\text{Orb}_f(p)$ es atractora (suponemos que de periodo r), por definición cada uno de sus puntos es atractor para f^r y, por tanto, q es atractor para g . Como $\omega_g(x) = \{q\}$, aplicando el lema 2.23 se tiene que $f^{rm} = g^m(x) \in V_g(q)$ para algún m . Ahora, como $V_f(\text{Orb}_f(p)) = \bigcup_{i=0}^{n-1} V_{f^r}(f^i(p))$, se tiene que $V_g(q) \subset V_f(\text{Orb}_f(p))$ y, juntando todo y llamando $n = rm$, se obtiene $f^n(x) \in V_f(\text{Orb}_f(p))$, como queríamos probar. \square

Proposición 2.26. *Sea $f : I \rightarrow I$ estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 . Supongamos que la órbita $\text{Orb}_f(p)$ no es atractora. Sea x tal que $\omega_f(x) = \text{Orb}_f(p)$. Entonces existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) \in \text{Orb}_f(p)$.*

Demostración. Sea x tal que $\omega_f(x) = \text{Orb}_f(p)$, donde $\text{Orb}_f(p)$ es una órbita periódica de periodo r . Aplicando el mismo razonamiento que en la demostración de la proposición 2.25 se obtiene que existe $q \in \text{Orb}_f(p)$ tal que $\omega_g(x) = \{q\}$, donde $g = f^r$.

Ahora, como $\text{Orb}_f(p)$ no es atractora, aplicando el teorema 2.22 se tiene que q no es atractor para g , y como hemos demostrado $\omega_g(x) = \{q\}$ podemos usar el lema 2.24, concluyendo que $g^m(x) = q$ para algún m . Por tanto, si $n = rm$ se tiene que $f^n(x) \in \text{Orb}_f(p)$, con lo que se concluye la prueba. \square

2.4. Más sobre la periodicidad asintótica

Recordemos que $\text{AP}(f)$ es el conjunto de puntos asintóticamente periódicos de f , es decir, el conjunto de puntos que tienen ω -límite finito.

La siguiente proposición da una condición suficiente para que el conjunto $\text{AP}(f)$ tenga interior no vacío.

Proposición 2.27. *Sea $f : I \rightarrow I$ estrictamente monótona a trozos. Sea J un subintervalo de I tal que $f^n|_J$ es monótona para todo n y existen $i < j$ tales que $f^i(J) \cap f^j(J) \neq \emptyset$. Entonces $J \subset \text{AP}(f)$. En particular, si f es inyectiva, entonces $\text{AP}(f) = I$.*

Demostración. Probamos primero la última afirmación. Podemos suponer que f es creciente, ya que si f es decreciente podemos trabajar con f^2 , que será creciente (además x es un punto asintóticamente periódico de f si y sólo si lo es de f^2). Dado $x \in I$, suponemos que $f(x) \leq x$ (el caso $f(x) \geq x$ es análogo). Entonces se tiene que $f^2(x) \leq f(x)$, $f^3(x) \leq f^2(x)$, es decir, continuando con el proceso tendremos una sucesión decreciente $(f^n(x))_{n=0}^{\infty}$. Pero como estamos en un compacto I , la sucesión converge, luego si $n \rightarrow \infty$, $f^n(x) \rightarrow p$ fijo. En particular, se tiene que x es un punto asintóticamente periódico, con lo que se concluye la prueba.

Probamos ahora la primera afirmación. No es restrictivo suponer que J es compacto (ya que si J verifica las hipótesis del enunciado entonces su clausura también). Llamando $J' = f^i(J)$, se tiene que $f^{j-i}(J') \cap J' \neq \emptyset$ y si ponemos $r = j - i$ queda $f^r(J') \cap J' \neq \emptyset$ y

en general $f^{(m+1)r}(J') \cap f^{mr}(J') \neq \emptyset$, es decir, todos estos intervalos se van pegando entre sí. En particular, podría darse alguna de las siguientes situaciones:

- $f^{sr}(J') \subset f^{mr}(J')$ con $m < s$. Entonces, llamando $K = f^{mr}(J')$ y $l = (s - m)r$ se tiene que

$$f^l(K) \subset K,$$

y como por hipótesis $f^n|_J$ es monótona para todo n entonces, en particular, f^l es inyectiva en K . Luego, aplicando el resultado del párrafo anterior, $K \subset \text{AP}(f^l) = \text{AP}(f)$, y por tanto, $J \subset \text{AP}(f)$.

- $f^{sr}(J') \supset f^{mr}(J')$ con $m < s$. Entonces, tomando otra vez $K = f^{mr}(J')$ y $l = (s - m)r$ se tiene que

$$K \subset f^l(K) \subset f^{2l}(K) \subset \dots$$

Pero entonces f^l es monótona sobre

$$L = \bigcup_{t=0}^{\infty} f^{tl}(K)$$

y sobre $\text{Cl } L$. Además $f^l(L) \subset L$, luego $f^l(\text{Cl } L) \subset \text{Cl } L$. Por tanto, podemos aplicar el resultado del párrafo anterior, obteniendo $\text{Cl } L \subset \text{AP}(f^l) = \text{AP}(f)$, luego $J \subset \text{AP}(f)$.

Ahora, si no ocurre ninguno de dos casos anteriores podemos garantizar que, tomando m_0 lo suficientemente grande, el conjunto $M = \bigcup_{m=m_0}^{\infty} f^{mr}(J')$ no contendrá ningún punto crítico. Razonando como antes, f^r será inyectiva en $\text{Cl } M$ y $f^r(\text{Cl } M) \subset \text{Cl } M$, y de nuevo conseguimos $J \subset \text{AP}(f)$. \square

Rematamos esta sección introduciendo y explorando una noción que, hasta donde nosotros sabemos, es nueva en la literatura. Su sentido es el siguiente: cuando encaremos la demostración del teorema 5.1, necesitaremos una familia de intervalos que absorban casi toda la dinámica, y será importante que dicha familia sea finita. Con la hipótesis adicional de derivada schwarziana negativa las cuencas inmediatas de atracción podrían hacer ese papel, según demuestra la proposición 4.6, pero necesitamos una alternativa para el caso general, y los intervalos absorbentes maximales nos la proporcionarán.

Definición 2.28. Sean $f : I \rightarrow I$ continua y J un subintervalo de I . Diremos que J es un intervalo **absorbente** si $J \subset \text{AP}(I)$ y $f^r(J) \cap J \neq \emptyset$ para algún $r \geq 1$. Si J es absorbente y no está estrictamente contenido en ningún otro intervalo absorbente, entonces diremos que J es un intervalo **absorbente maximal**, y llamaremos al menor entero positivo r que cumple $f^r(J) \cap J \neq \emptyset$ el **periodo** de J ,

Ejemplos de intervalos absorbentes serían las componentes de la cuenca inmediata de atracción de una órbita periódica atractora y los intervalos de puntos fijos de f .

Observemos que si J es absorbente maximal de periodo r , entonces $J \cup f^r(J)$ es absorbente, por lo que, por la maximalidad de J , $f^r(J) \subset J$. Asimismo, los intervalos $f^i(J)$, $0 \leq i < r$, son disjuntos dos a dos, ya que si $f^i(J) \cap f^j(J) \neq \emptyset$ con $0 \leq i < j < r$ entonces tomando imágenes se tendría $f^m(J) \cap f^r(J) \neq \emptyset$ para algún $m < r$, y como $f^r(J) \subset J$, $f^m(J) \cap J \neq \emptyset$, en contradicción con el periodo de J . Notemos también que todo intervalo absorbente J está trivialmente contenido en un único intervalo absorbente maximal (la unión de todos los subintervalos de $\text{AP}(I)$ que contienen a J), y que si f no es constante sobre J entonces $f(J)$ también es absorbente (ya que si f fuese constante, la imagen de J se reduciría a un único punto). Por otro lado se tiene:

Proposición 2.29. *Los intervalos absorbentes maximales de una función f son compactos y disjuntos dos a dos. Más aún, si f es estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 y J es un intervalo absorbente maximal, entonces existe otro intervalo K absorbente maximal tal que $f(J) \subset K$ y $f(\partial J) \subset \partial K$.*

Demostración. Que dos intervalos absorbentes maximales distintos son disjuntos es obvio, pues de lo contrario su unión también sería absorbente y existiría un intervalo absorbente mayor que los anteriores.

Sea J absorbente maximal de periodo r . Como $f^r(J) \subset J$, también se tiene $f^r(\text{Cl } J) \subset \text{Cl } J$. Notemos que $f^r(\partial J) \subset \partial J$ porque si un extremo fuera llevado por f^r al interior de J , a un entorno suyo le ocurriría lo mismo y se contradiría la maximalidad, ya que todos los puntos de dicho entorno serían asintóticamente periódicos. Pero si los puntos de la frontera van a la frontera esto significa que están en $\text{AP}(I)$, es decir, $\text{Cl } J$ es absorbente. Por la maximalidad, $\text{Cl } J = J$, es decir, J es compacto.

Por último, supongamos adicionalmente que f es estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 . Es obvio que f^r no puede ser constante sobre J , por lo que f tampoco puede serlo. Por tanto $f(J)$ es absorbente y está contenido en un intervalo absorbente maximal K . Más aún, $f(\partial J) \subset \partial K$ por análogas razones a las que usamos para probar $f^r(\partial J) \subset \partial J$. \square

Proposición 2.30. *Sean $f : I \rightarrow I$ estrictamente monótona a trozos y J un subintervalo de $\text{AP}(f)$. Entonces existen $k \geq 0$ y un intervalo absorbente maximal M tales que $f^k(J) \subset M$. Si además $|f^n(J)| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, puede incluso conseguirse $f^k(J) \subset M'$, siendo M' una componente de la cuenca inmediata de atracción de una órbita periódica atractora.*

Demostración. Empezamos demostrando la segunda afirmación. Si $|f^n(J)| \rightarrow 0$ entonces todos los puntos de J serán atraídos por la misma órbita periódica O , que deberá ser atractora. En efecto, si no fuese atractora, por la proposición 2.26 para todo $x \in J$ existiría

$n \geq 0$ tal que $f^n(x) \in O$, es decir, alguna iterada de cada punto de J estaría en la órbita no atractora, lo que no puede ocurrir por ser J no numerable. Pero entonces existe k tal que $f^k(J)$ corta a una de las componentes M' de su cuenca inmediata de atracción (proposición 2.25), lo que, por la definición de cuenca inmediata de atracción, implica de hecho $f^k(J) \subset M'$.

Demostremos ahora la primera afirmación. Si los iterados de J son disjuntos dos a dos, entonces $|f^n(J)| \rightarrow 0$ y se aplica el resultado anterior. Si $f^k(J) \cap f^n(J) \neq \emptyset$ para ciertos $k < n$, entonces $f^k(J)$ es absorbente por definición y, por tanto, $f^k(J)$ estará contenido en un intervalo maximal. \square

En general, una función puede tener infinitos intervalos absorbentes maximales (incluso todos con periodo 1). No obstante:

Proposición 2.31. *Si f es estrictamente monótona a trozos o de clase C^1 , entonces su familia de intervalos absorbentes maximales de un periodo fijo r es finita.*

Demostración. Entre dos intervalos absorbentes maximales cualesquiera la función f^r no puede ser monótona (de lo contrario, la unión de ambos intervalos y el intervalo que los separa también sería absorbente, porque todos los puntos intermedios serían asintóticamente periódicos por la proposición 2.27). Esto garantiza de inmediato la finitud cuando f es estrictamente monótona a trozos y también, con un poco de trabajo adicional, cuando f es de clase C^1 . En efecto, en este último caso habría entre dichos intervalos un punto con derivada 0 y otro con derivada al menos 1 (ya que si J es el intervalo intermedio entre dos intervalos absorbentes maximales, podemos encontrar $J^* \subset J$ tal que $J^* \subset f(J^*)$ y, por el teorema del valor medio de Lagrange*, existe $x \in J^*$ tal que $|Df(x)| = \frac{|f(J^*)|}{|J^*|} \geq 1$). Si existieran infinitos intervalos absorbentes maximales esto contradiría la continuidad uniforme de la derivada, pues podríamos tomar un par de ellos tan cercanos como quisiéramos. \square

*Recordemos que este teorema afirma que dada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, si f es derivable en (a, b) entonces existe $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = Df(\theta)(b - a)$.

Capítulo 3

Intervalos errantes

En nuestro camino hacia la prueba del teorema 5.1, el primer paso que tenemos que dar es garantizar que, como mínimo, el conjunto de los puntos asintóticamente periódicos es denso en el intervalo. En particular, será importante descartar la presencia de un tipo especial de intervalos que introducimos a continuación:

Definición 3.1. Decimos que J es un *intervalo errante* para la función continua $f : I \rightarrow I$ si se verifica:

- 1) Los intervalos $J, f(J), \dots$ son disjuntos dos a dos.
- 2) Los puntos de J no son atraídos por órbitas periódicas.

Observación 3.2. Si J es un intervalo errante, la segunda condición de la definición equivale a afirmar que alguno de los puntos de J no es atraído por una órbita periódica. Esto es claro ya que como las imágenes de J son disjuntas dos a dos, la suma de las longitudes de las imágenes es finita, es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} |f^n(J)| \leq |I|$ o lo que es lo mismo, la serie es convergente. Luego, se tiene que $|f^n(J)| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$. Por tanto, como estos intervalos son cada vez más pequeños, a efectos del comportamiento asintótico actúan como si fueran un único punto, es decir, $\omega_f(x) = \omega_f(y)$ para todo $x, y \in J$. Hablaremos entonces del conjunto ω -límite del intervalo J , $\omega_f(J)$, ya que dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo tendrán siempre el mismo ω -límite.

La cuestión de la existencia o no de intervalos errantes viene de antiguo y se suscitó, en primera instancia, en el ámbito de los difeomorfismos del círculo. Estaba motivada por un problema de dinámica continua: el de descartar recurrencias no triviales en flujos del toro.

En 1932, Denjoy probó que la existencia de intervalos errantes es posible en difeomorfismos de clase C^1 [6]; sin embargo, A. J. Schwartz demostró en 1963 que si exigimos un poco de regularidad extra al difeomorfismo estos intervalos no pueden existir [21]. En general, la no existencia de intervalos errantes es capital en muchos ámbitos de la dinámica diferenciable, y a este respecto cabe destacar el monumental artículo [15], culminación del trabajo de muchos matemáticos (el primero precisamente Guckenheimer en [8]), donde se prueba que las funciones analíticas reales (entre otras muchas) carecen de intervalos errantes. Nosotros necesitaremos descartar su existencia en unas circunstancias relativamente favorables, por lo que nos serán suficientes el teorema 3.10 y su corolario 3.12, que resultan de adaptar directamente los argumentos de [21] al intervalo.

La referencia por la que nos hemos guiado ha sido [18, pp. 36–41 y 305–306]. Como mencionamos en la introducción, el libro de de Melo y van Strien es, con diferencia, la referencia más completa disponible en cuanto a la dinámica diferenciable unidimensional, pero adolece de un defecto: no siempre está redactado con el necesario cuidado. Es por ello que hemos debido retocar bastantes de sus argumentos (su demostración del principio de contracción, por ejemplo, es ilegible).

Definimos a continuación el tipo de funciones con el que trabajaremos a partir de ahora. Necesitaremos para ello la noción de **punto singular**, es decir, un punto en el que las derivadas laterales de la función no coinciden.

Definición 3.3. *Se dice que una función $f : I = [a, b] \rightarrow I$ es un **difeomorfismo de clase C^1 a trozos** si existen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_r = b$ tales que $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es de clase C^1 y las derivadas no se anulan en ninguna partición $[a_i, a_{i+1}]$. Además, decimos que la función es **regular** si las derivadas laterales en los puntos singulares son iguales y de signo opuesto.*

La siguiente es una de las nociones estrella de este trabajo y, de hecho, de toda la dinámica no lineal. En efecto, cuando calculamos las sucesivas iteraciones de una función, si la distorsión aumenta sin freno la evolución relativa de puntos muy cercanos entre sí puede diverger rápidamente, y realizar predicciones a largo plazo se vuelve imposible. Por ello será importante disponer de herramientas que nos permitan controlarla.

Definición 3.4. *Sea $f : I \rightarrow I$ un difeomorfismo de clase C^1 a trozos. Si $T \subset I$, definimos la **distorsión de f en T** como:*

$$\text{Dist}(f, T) = \sup_{x, y \in T} \log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|}.$$

Además, escribiremos

$$\text{eDist}(f, T) = \sup_{x, y \in T} \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|},$$

es decir, $\text{eDist}(f, T)$ será la exponencial de la distorsión de f en T .

Hay que tener en cuenta que el intervalo T puede contener puntos singulares (con dos posibles derivadas laterales). Por tanto, cuando escribimos la derivada en un punto $Df(x)$, nos referimos a la derivada lateral en ese punto. Así, en los puntos en los que las derivadas no coinciden tomaremos las dos derivadas laterales posibles.

La siguiente proposición no se necesitará hasta el último capítulo pero este es el sitio para enunciarla, pues muestra con sencillez una de las ventajas de controlar la distorsión: si la densidad media de un conjunto en un intervalo es pequeña, otro tanto ocurrirá con las imágenes.

Proposición 3.5. *Sea $f : J \rightarrow K$ un difeomorfismo. Supongamos que existe $A \subset J$ y $\rho \geq 0$ tal que $D_m(A, J) \leq \rho$ y además $e\text{Dist}(f, J) \leq \sigma$ para algún $\sigma \geq 0$. Entonces se verifica*

$$D_m(f(A), K) \leq \rho\sigma.$$

Demostración. Por el teorema de Lagrange existe $z \in J$ tal que $|Df(z)| = \frac{|K|}{|J|}$. Ahora, como $e\text{Dist}(f, J) \leq \sigma$ se tiene que $\frac{|Df(x)|}{|Df(z)|} \leq \sigma$ para todo $x \in J$. Por tanto,

$$|Df(x)| \leq \sigma |Df(z)| \leq \sigma \frac{|K|}{|J|}.$$

Se cumple

$$\lambda(f(A)) \leq \sigma \frac{|K|}{|J|} \lambda(A).$$

En efecto, utilizando la definición de medida de Lebesgue se tiene que

$$\lambda(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n} \sum_n |I_n|,$$

donde $I_n \subset J$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por el teorema de Lagrange, existe $x^* \in I_n$ tal que $|Df(x^*)| = \frac{|f(I_n)|}{|I_n|}$, y como $|Df(x)| \leq \sigma \frac{|K|}{|J|}$ para todo $x \in J$, se tiene que

$$\frac{|f(I_n)|}{|I_n|} \leq \sigma \frac{|K|}{|J|}.$$

Entonces, utilizando que f es difeomorfismo y aplicando la definición de $\lambda(A)$ resulta

$$\lambda(f(A)) = \inf_{f(A) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(I_n)} \sum_n |f(I_n)| \leq \inf_{A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n} \sum_n \sigma \frac{|K|}{|J|} |I_n| = \sigma \frac{|K|}{|J|} \lambda(A).$$

Por tanto,

$$\frac{\lambda(f(A))}{|K|} \leq \sigma \frac{\lambda(A)}{|J|} \leq \sigma\rho,$$

como queríamos probar. \square

El siguiente lema y su corolario constituyen la clave del teorema de Schwartz: si los iterados de un intervalo son disjuntos (lo que ocurre cuando el intervalo es errante) la distorsión está acotada.

Lema 3.6. Sean $f : I \rightarrow I$ un difeomorfismo de clase C^1 a trozos y $T \subset I$. Entonces:

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f, f^i(T)).$$

Demostración. Por la regla de la cadena sabemos que

$$\begin{aligned} Df^n(x) &= D(f^{n-1} \circ f)(x) = Df^{n-1}(f(x)) \cdot Df(x) = D(f^{n-2} \circ f)(f(x)) \cdot Df(x) \\ &= Df^{n-2}(f^2(x)) \cdot Df(f(x)) \cdot Df(x) = \dots \\ &= Df(f^{n-1}(x)) \cdot Df(f^{n-2}(x)) \cdots Df(f(x)) \cdot Df(x), \end{aligned}$$

es decir, $Df^n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} Df(f^i(x))$. Luego,

$$\log \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} = \log \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{|Df(f^i(x))|}{|Df(f^i(y))|} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{|Df(f^i(x))|}{|Df(f^i(y))|}.$$

Sean $x, y \in T$. Como $f^i(x), f^i(y) \in f^i(T)$, se tiene que

$$\log \frac{|Df^n(x)|}{|Df^n(y)|} = \sum_{i=0}^{n-1} \log \frac{|Df(f^i(x))|}{|Df(f^i(y))|} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x', y' \in f^i(T)} \log \frac{|Df(x')|}{|Df(y')|} = \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f, f^i(T)),$$

lo que prueba el lema. \square

Corolario 3.7. Sea $f : I \rightarrow I$ un difeomorfismo de clase C^1 a trozos regular de manera que $x \mapsto \log |Df(x)|$ es lipschitziana con constante de Lipschitz C . Entonces para cualquier intervalo $T \subset I$,

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|.$$

En particular, si los interiores de los intervalos $T, f(T), \dots, f^{n-1}(T)$ son disjuntos dos a dos, entonces:

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C|I|.$$

Demostración. Como $f(x) = \log |Df(x)|$ es lipschitziana, se tiene que

$$|\log |Df(x)| - \log |Df(y)|| = \left| \log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \right| \leq C|x - y|.$$

Luego,

$$\text{Dist}(f, J) = \sup_{x, y \in J} \left| \log \frac{|Df(x)|}{|Df(y)|} \right| \leq C \sup_{x, y \in J} |x - y| = C|J|,$$

es decir, la distorsión de f en un intervalo J está acotada por $C|J|$. Por tanto,

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{Dist}(f, f^i(T)) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|$$

con lo que se concluye la prueba. \square

Si $f : I \rightarrow I$ es derivable, diremos que c es un **punto crítico** de f si $Df(c) = 0$. El conjunto de puntos críticos de f se denotará por $C(f)$.

Observación 3.8. Notemos que en el corolario la propiedad de Lipschitz solo se ha usado en los intervalos $f^i(T)$. En particular, si $f : I \rightarrow I$ es de clase C^2 , el conjunto $C(f)$ es finito, y $\delta > 0$ es dado, entonces $\log |Df(x)|$ será lipschitziana con constante C_δ en el conjunto $I_\delta \subset I$ de los puntos cuya distancia a $C(f)$ es al menos δ . Por tanto, si $T \subset I$ es un intervalo tal que $f^i(T) \subset I_\delta$ para todo $0 \leq i < n$, se tiene

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C_\delta \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|,$$

y si los interiores de los intervalos $T, f(T), \dots, f^{n-1}(T)$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C_\delta |I|.$$

Para acometer la prueba no nos falta más que un lema técnico. Curiosamente, para probarlo es suficiente la mera continuidad.

Lema 3.9 (Principio de contracción). *Sean $f : I \rightarrow I$ continua y J un subintervalo de I . Supongamos que $\inf_{n \geq 0} |f^n(J)| = 0$. Entonces o bien J es un intervalo errante o bien todos los puntos de J son atraídos por una órbita periódica.*

Demostración. En el caso de que los intervalos $f^n(J)$ sean disjuntos dos a dos la afirmación es trivial: si el conjunto ω -límite de J no es igual a una única órbita periódica, entonces por definición J es un intervalo errante, mientras que si el conjunto ω -límite es una órbita periódica, entonces los puntos de J son atraídos por dicha órbita periódica por definición.

Supondremos entonces que existen $0 \leq l < m$ tales que $f^l(J) \cap f^m(J) \neq \emptyset$ y probaremos que todos los puntos de J son atraídos por una órbita periódica. Sean $K = f^l(J)$ y $g = f^{m-l}$. Basta demostrar que todos los puntos de K son atraídos (con respecto a g) por algún punto fijo de g , es decir, que $(g^i(x))_{i=0}^\infty$ converge para cada $x \in K$ (ya que como I es compacto, si la sucesión converge, lo hace a un punto fijo de g).

Notemos que $g^i(K) \cap g^{i+1}(K) \neq \emptyset$ para cada i , por lo que $U = \bigcup_{i=0}^\infty g^i(K)$ es un intervalo (ya que suponemos que K , y por tanto U , es un intervalo no degenerado: si K fuera un punto entonces sería un punto fijo de g y habríamos terminado). Además, $g(U) \subset U$. No es restrictivo suponer que g tiene algún punto fijo p en U : de lo contrario o bien $g(x) > x$ para todo $x \in U$ (y entonces la sucesión $(g^i(x))_{i=0}^\infty$ sería estrictamente creciente y, por ser I compacto, convergería) o bien $g(x) < x$ para todo $x \in U$ (y entonces la sucesión $(g^i(x))_{i=0}^\infty$ sería estrictamente decreciente y de nuevo convergente). Sustituyendo si es preciso K por alguna de sus iteradas $K' = g^j(K)$ y U por $U' = \bigcup_{i=0}^\infty g^i(K')$ podemos además suponer que $p \in K$. Probamos a continuación que p es atractor global para la aplicación $g : U \rightarrow U$.

Supongamos que p no lo fuera. Entonces, aplicando la observación 2.14, existe un punto $q \in U$ tal que o bien $p < q \leq g^2(q)$ o bien $p > q \geq g^2(q)$. Supondremos que estamos en el primer caso porque el otro es similar. Por la definición de U , existe algún $k \geq 0$ tal que $q \in g^k(K)$ y notemos que, por tenerse $p \in K$, también se cumple $p \in g^k(K)$. En resumen, $[p, q] \subset g^k(K)$. Entonces $[p, q] \subset g^2([p, q]) \subset g^{k+2}(K)$ y en general, un rápido argumento de inducción muestra que $[p, q] \subset g^{k+2r}(K)$ para todo $r \geq 0$. En particular,

$$|g^{k+2r}(K)| = |f^{l+k(m-l)+2r(m-l)}(J)| \geq q - p =: \delta > 0 \quad \text{para todo } r \geq 0.$$

Lo que esto significa es que, a partir de un cierto momento y cada $2(m-l)$ iteraciones, los intervalos $f^n(J)$ tienen longitud al menos δ . La continuidad uniforme de f (por ser I compacto) hace que esto entre en contradicción con la hipótesis $\inf_{n \geq 0} |f^n(J)| = 0$. \square

Teorema 3.10 (Schwartz). *Sea $f : I \rightarrow I$ un difeomorfismo de clase C^1 a trozos regular de manera que la aplicación $x \mapsto \log |Df(x)|$ es una función lipschitziana en I . Entonces f no tiene intervalos errantes.*

Demostración. Utilizando el corolario 3.7 se tiene que para cada intervalo $T \subset I$ y $n \geq 0$ se satisface:

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)|. \quad (3.1)$$

Todos los intervalos con los que trabajaremos a lo largo de la demostración serán abiertos en la topología de I . Suponemos, por reducción al absurdo, que f tiene un intervalo errante J . Sea $J_0 \supset J$ un intervalo errante maximal conteniendo a J , de manera que no existe otro intervalo errante más grande que contenga a J (esto es una aplicación estándar del lema de Zorn). Inductivamente, definimos J_n como el intervalo errante maximal que contiene el interior de $f(J_{n-1})$. Un sencillo argumento de inducción permite verificar que, en general, $\text{Int}(f^k(J_l)) \subset J_{k+l}$.

Además, los intervalos que hemos definido son disjuntos dos a dos. En efecto, si existen enteros $0 \leq n < m$ tales que $J_n \cap J_m \neq \emptyset$ (notemos que como los intervalos son abiertos, la intersección no estará constituida únicamente por un punto), como $\text{Int}(f^{m-n}(J_n)) \subset J_m$ se sigue que

$$\emptyset \neq \text{Int}(f^{m-n}(J_m \cap J_n)) \subset f^{m-n}(J_m) \cap J_m$$

lo que es una contradicción, ya que J_m es un intervalo errante.

Ahora, por definición, f tiene como mucho un número finito de puntos singulares, digamos n_0 . Por tanto, existe n_1 tal que si $n \geq n_1$ entonces $\text{Cl}(J_n)$ no contiene ningún punto singular de f . En particular, f^k es un difeomorfismo en J_{n_1} para todo $k > 0$. Esto es claro ya que como los intervalos $\{J_n\}_{n \geq 0}$ son disjuntos e $\text{Int}(f^k(J_{n_1})) \subset J_{k+n_1}$,

se tendrá que $f^k(J_{n_1}) \subset \text{Cl}(J_{k+n_1})$ y, por tanto, como las clausuras de los intervalos no contienen a los puntos singulares, los intervalos $f^k(J_{n_1})$ tampoco los contendrán.

Por otro lado, por ser los $\{J_n\}_{n \geq 0}$ disjuntos dos a dos, no es restrictivo suponer

$$\sum_{j \geq 0} |f^j(J_{n_1})| \leq 1. \quad (3.2)$$

Sea $0 < \delta < e^{-2C}$ y $S = J_{n_1}$. Elegimos un intervalo T que contenga estrictamente a S de manera que

$$|T| \leq (1 + \delta)|S|. \quad (3.3)$$

Probaremos por inducción que si $n \geq 1$ es arbitrario, entonces $|f^i(T)| \leq 2|f^i(S)|$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$. Para $n = 1$ la afirmación es obvia (por la manera en la que hemos definido T). Asumimos que se verifica para algún $n-1$ y veremos que se verifica para $n > 1$. Aplicando (3.1), la hipótesis de inducción y (3.2) se tiene que

$$\text{Dist}(f^n, T) \leq C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(T)| \leq 2C \sum_{i=0}^{n-1} |f^i(S)| \leq 2C. \quad (3.4)$$

Además, como la restricción de f^n a S es un difeomorfismo, por el teorema de Lagrange, existe un punto $x_n \in S$ tal que $Df^n(x_n) = \frac{|f^n(S)|}{|S|}$. Ahora bien, (3.4) equivale a $e\text{Dist}(f^n, T) \leq e^{2C}$, es decir, $\frac{|Df^n(y)|}{|Df^n(x)|} \leq e^{2C}$ para cada $x, y \in T$, y como $x_n \in S \subset T$, tomando $x = x_n$ obtenemos:

$$|Df^n(y)| \leq e^{2C} |Df^n(x_n)| = e^{2C} \frac{|f^n(S)|}{|S|}. \quad (3.5)$$

Ahora, ponemos $T = (T_{11} \cup T_{12} \cup \dots \cup T_{1k_1}) \cup S \cup (T_{21} \cup T_{22} \cup \dots \cup T_{2k_2})$ de manera que la restricción de f^n a cada T_{ij} para cada $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k_i$ es un difeomorfismo. Vamos a ver que para cada $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, k_i$ se tiene que

$$|f^n(T_{ij})| \leq e^{2C} \frac{|f^n(S)|}{|S|} |T_{ij}|, \text{ es decir, } \frac{|f^n(T_{ij})|}{|T_{ij}|} \leq e^{2C} \frac{|f^n(S)|}{|S|}. \quad (3.6)$$

En efecto, usando nuevamente el teorema de Lagrange obtenemos que $\frac{|f^n(T_{ij})|}{|T_{ij}|} = |Df^n(y)|$ para algún $y \in T_{ij}$ (en particular $y \in T$), y aplicando (3.5) se obtiene la desigualdad (3.6). Por tanto,

$$\begin{aligned} & |f^n(T_{11})| + \dots + |f^n(T_{1k_1})| + |f^n(T_{21})| + \dots + |f^n(T_{2k_2})| \leq \\ & \leq e^{2C} \frac{|f^n(S)|}{|S|} (|T_{11}| + \dots + |T_{1k_1}| + |T_{21}| + \dots + |T_{2k_2}|). \end{aligned}$$

Luego, utilizando esto último junto con (3.3) se obtiene que:

$$\begin{aligned} |f^n(T)| & \leq |f^n(S)| + e^{2C} \frac{|f^n(S)|}{|S|} (|T_{11}| + \dots + |T_{1k_1}| + |T_{21}| + \dots + |T_{2k_2}|) \\ & = |f^n(S)| + e^{2C} \frac{|f^n(S)|}{|S|} |T \setminus S| \leq (1 + \delta e^{2C}) |f^n(S)| \leq 2|f^n(S)|, \end{aligned}$$

con lo que la inducción queda probada. Se sigue entonces que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f^n(T)| = 0.$$

En particular, se tiene que $\inf_{n \rightarrow \infty} |f^n(T)| = 0$ y aplicando el lema 3.9 se verifica una de las dos condiciones siguientes: T es un intervalo errante o $\omega_f(T)$ es una órbita periódica. Sin embargo, T no puede ser un intervalo errante ya que esto contradice la maximalidad de S , luego $\omega_f(T)$ tiene que ser una órbita periódica. Pero entonces, como $S \subset T$ también se tendría que $\omega_f(S)$ es una órbita periódica, lo que contradice la definición de intervalo errante para S . Esto completa la prueba del teorema. \square

Lema 3.11. *Dados $d > 0$, $u > 0$, $v > 0$, existe $p = p_{c,u,v} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ polinomial de manera que $p(0) = 0$, $p(1) = d$, $Dp(0) = u$, $Dp(1) = v$ y $Dp(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$.*

Demostración. Sea $q(x) = u(1-x)^n + vx^n + hx(1-x)$. Si definimos

$$p(x) = \int_0^x q(t) dt$$

se verifican casi todas las condiciones del enunciado: $q(0) = u$, $q(1) = v$ y $p(0) = 0$. Por otra parte,

$$p(1) = \int_0^1 (u(1-t)^n + vt^n + ht(1-t)) dt = \frac{u+v}{n+1} + \frac{h}{6},$$

por lo que basta elegir n y $h > 0$ de manera que se cumpla $\frac{u+v}{n+1} + \frac{h}{6} = d$ para tener $p(1) = d$. Además, $Dp(x) > 0$ para todo $x \in [0, 1]$, con lo que se concluye la prueba. \square

Corolario 3.12. *Sea $f : I \rightarrow I$ de clase C^2 con un número finito de puntos críticos, es decir, $C(f) = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$. Suponemos que $J \subset I$ es un intervalo errante. Entonces:*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(f^n(J), C(f)) = 0$$

o lo que es lo mismo, $\omega_f(J) \cap C(f) \neq \emptyset$, es decir, el conjunto ω -límite contiene algún punto crítico.

Demostración. Si $\omega_f(J) \cap C(f) = \emptyset$, sustituyendo si es preciso J por alguno de sus iterados $f^m(J)$ para algún m (notemos que si J es un intervalo errante entonces todos sus iterados también serán intervalos errantes) se tiene que existe $\varepsilon > 0$ tal que $d(f^n(J), C(f)) > \varepsilon > 0$ para todo $n \geq 0$. No es restrictivo suponer que $|c_i - c_j| > 2\varepsilon$ si $i \neq j$. Modificamos f de la siguiente manera: tomamos los subintervalos $[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$ para $i = 1, \dots, k$. Ahora, aplicando el lema 3.11 y adecuadas transformaciones afines, reemplazamos f en cada uno de los intervalos $[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$ por dos (si las derivadas en $c_i - \varepsilon$, $c_i + \varepsilon$ tienen signos distintos, como se muestra a la izquierda de la figura 3.1) o tres (si las derivadas tienen el mismo signo, como se muestra a la derecha de la figura 3.1) trozos polinomiales de

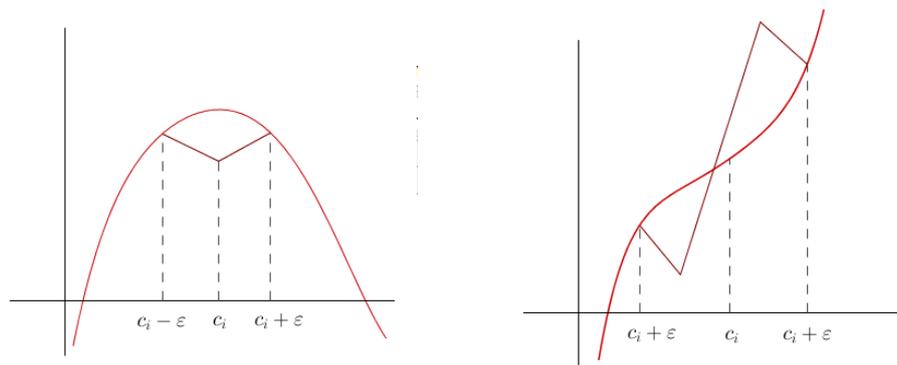


Figura 3.1: El punto c_i es un máximo (izquierda) o un punto de inflexión (derecha).

manera que la función resultante g verifica las condiciones del teorema 3.10, luego g no tiene intervalos errantes.

Sin embargo, como las iteradas de J (intervalo errante de f) nunca entran en $[c_i - \varepsilon, c_i + \varepsilon]$ para $i = 1, \dots, k$, J también es un intervalo errante para g , con lo que se llega a una contradicción. \square

La derivada schwarziana negativa

Citando a [10], de donde hemos extraído las presentes notas históricas, “la derivada schwarziana negativa es uno de los sucesos más afortunados de la historia de los sistemas dinámicos discretos”. La razón es que, a priori, es un concepto que nada tiene que ver con la dinámica; su ámbito natural es el de la geometría compleja. Recibe su nombre de Hermann Schwarz (¡no confundir con A. J. Schwartz, mencionado por otras razones en el capítulo anterior!), que la usó en 1869 para caracterizar los isomorfismos en la esfera de Riemann, aunque en realidad fue introducida por Lagrange en su libro *Sur la construction des cartes géographiques* y ya había sido usada por Kummer en un trabajo de 1836. Fueron Allwright y Singer los que se dieron cuenta, en 1978, de lo útil que resulta en dinámica del intervalo, y precisamente en cuestiones relacionadas con la atracción [1, 24].

4.1. La derivada schwarziana negativa y la atracción

Esta sección es una elaboración de los contenidos de [7, sección 1.13]. En ella se recogen las propiedades esenciales de la derivada schwarziana, que nos permitirán demostrar un importante teorema sobre atracción y, como corolario, el teorema de Allwright-Singer. Recordemos que $C(f)$ es el conjunto de puntos donde la derivada de f se anula.

Definición 4.1. Sea f de clase C^3 . Se define la **derivada schwarziana de f en x** (cuando $x \notin C(f)$) como

$$Sf(x) = \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2.$$

Nuestro primer resultado, que usaremos en los ejemplos del último capítulo, permite asegurar en muchas ocasiones que la derivada schwarziana es negativa sin necesidad de calcularla explícitamente.

Proposición 4.2. *Sea $P(x)$ un polinomio. Si todas las raíces de $DP(x)$ son reales y distintas, entonces $SP < 0$.*

Demostración. Suponemos que

$$DP(x) = \prod_{i=1}^N (x - a_i),$$

con a_i reales y distintas. Entonces se tiene que

$$D^2P(x) = \sum_{j=1}^N \frac{DP(x)}{x - a_j} = \sum_{j=1}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - a_i)}{x - a_j},$$

$$D^3P(x) = \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - a_i)}{(x - a_j)(x - a_k)}.$$

Luego,

$$SP(x) = \sum_{j \neq k} \frac{1}{(x - a_j)(x - a_k)} - \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{x - a_j} \right)^2$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{x - a_j} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{x - a_j} \right)^2 < 0,$$

con lo que queda demostrada la proposición. \square

A pesar de su sencillez, la siguiente proposición es especialmente útil, pues garantiza que la derivada schwarziana negativa es cerrada para composiciones.

Proposición 4.3. *Se verifica:*

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x)) \cdot (Dg(x))^2 + Sg(x)$$

si $Df(g(x)) \neq 0$ y $Dg(x) \neq 0$. En particular, si $Sf(x) < 0$ y $Sg(x) < 0$, entonces $S(f \circ g)(x) < 0$.

Demostración. Usando la regla de la cadena, se obtiene que

$$D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x),$$

$$D^2(f \circ g)(x) = D(Df(g(x)) \cdot Dg(x)) = D^2f(g(x)) \cdot (Dg(x))^2 + Df(g(x)) \cdot D^2g(x),$$

$$D^3(f \circ g)(x) = D^3f(g(x)) \cdot (Dg(x))^3$$

$$+ 3D^2f(g(x)) \cdot D^2g(x) \cdot Dg(x) + Df(g(x)) \cdot D^3g(x).$$

Juntándolo todo, obtenemos

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x)) \cdot (Dg(x))^2 + Sg(x),$$

luego si $Sf(x) < 0$ y $Sg(x) < 0$ entonces $S(f \circ g)(x) < 0$. \square

Otra propiedad de la derivada schwarziana que da muchísimo juego es el principio del mínimo. En esencia, establece que en las zonas de monotonía la derivada no puede experimentar muchos vaivenes.

Teorema 4.4 (Principio del mínimo). *Sea $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^3 tal que $Df(x) \neq 0$ y $Sf(x) < 0$ para todo $x \in I$. Entonces $|Df(x)| > \min\{|Df(a)|, |Df(b)|\}$ para todo $x \in (a, b)$.*

Demostración. Supongamos que $Df(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Por reducción al absurdo, supongamos que $|Df(x)| \leq \min\{|Df(a)|, |Df(b)|\}$ para algún $x \in (a, b)$. Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que $Df(x_0) = \min\{Df(x), x \in [a, b]\}$. Entonces, por ser mínimo relativo se tiene que $D^2f(x_0) = 0$ y $D^3f(x_0) \geq 0$. Por tanto,

$$Sf(x_0) = \frac{D^3f(x_0)}{Df(x_0)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x_0)}{Df(x_0)} \right)^2 = \frac{D^3f(x_0)}{Df(x_0)} \geq 0,$$

con lo que se llega a una contradicción. La demostración si $Df(x) < 0$ para todo $x \in [a, b]$ es análoga. \square

Una primera consecuencia de las dos anteriores propiedades es que el conjunto $\text{Per}(f)$ de los puntos periódicos de f es relativamente reducido.

Proposición 4.5. *Sea $f : I \rightarrow I$ de clase C^3 , con $C(f)$ finito y $Sf(x) < 0$ para todo $x \notin C(f)$. Entonces $\text{Per}(f)$ es numerable.*

Demostración. Comencemos demostrando que el conjunto de puntos fijos de f es finito luego, en particular, numerable. Como la función es estrictamente monótona a trozos (no puede tener trozos constantes ya que $C(f)$ es finito) tenemos las siguientes posibilidades:

- En los trozos en los que la función es decreciente solo puede existir un punto fijo.
- En los trozos en los que la función es creciente podrán existir, como mucho, tres puntos fijos. En efecto, si existiesen cuatro puntos fijos p_1, p_2, p_3 y p_4 como en la figura 4.1, entonces por el teorema de Lagrange existirían $x \in (p_1, p_2)$, $y \in (p_2, p_3)$ y $z \in (p_3, p_4)$ tales que $Df(x) = 1$, $Df(y) = 1$ y $Df(z) = 1$. Pero entonces aplicando el principio del mínimo 4.4 se tendría que $|Df(y)| > \min\{|Df(x)|, |Df(z)|\} = 1$, lo que es una contradicción.

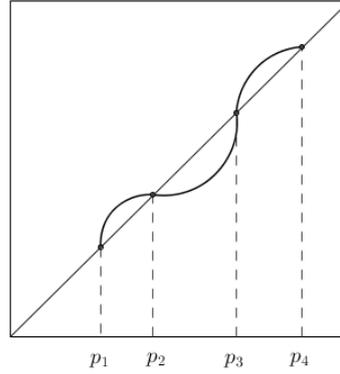


Figura 4.1: Tramo creciente con 4 puntos fijos.

Por tanto, se tiene que en los tramos decrecientes la función tendrá a lo sumo un punto fijo y en los tramos crecientes tres. Luego, bajo las condiciones del teorema el conjunto de puntos fijos de f es finito. Ahora, componiendo f consigo misma r veces se siguen manteniendo las hipótesis del teorema (derivada schwarziana negativa por la proposición 4.3 y $C(f)$ finito). Por tanto, se obtiene que para cada r el conjunto de puntos fijos de f^r es finito, luego $\text{Per}(f)$ es numerable, con lo que se concluye la prueba. \square

Notemos que la proposición anterior no es cierta si no se cumplen las condiciones del enunciado. Un sencillo contraejemplo es la función identidad, en la que todos sus puntos son fijos.

Consideremos

$$\text{AP}^*(f) = \{x \in I : \text{existen } n \geq 0 \text{ y una órbita atractora } O \text{ tales que } f^n(x) \in V_f(O)\},$$

es decir, el conjunto de los puntos que en algún momento caen dentro de una cuenca inmediata de atracción. Claramente tales puntos son asintóticamente periódicos, esto es, $\text{AP}^*(f) \subset \text{AP}(f)$. Si f tiene derivada schwarziana negativa la diferencia es, no obstante, muy pequeña.

Proposición 4.6. *Sea $f : I \rightarrow I$ de clase C^3 , con $C(f)$ finito y $Sf(x) < 0$ para todo $x \notin C(f)$. Entonces $\text{AP}(f) \setminus \text{AP}^*(f)$ es numerable.*

Demostración. Si $x \in \text{AP}(f) \setminus \text{AP}^*(f)$ entonces su ω -límite es una órbita no atractora, es decir, $\omega_f(x) = \text{Orb}_f(p)$ no atractora. Entonces, por la proposición 2.26, existe $n \geq 0$ tal que $f^n(x) = q$, con q periódico. Luego, $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\text{Per}(f))$. Pero por la proposición 4.5 el conjunto de puntos periódicos es numerable, por lo que $f^{-n}(\text{Per}(f))$ será igualmente numerable para cada n y $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^{-n}(\text{Per}(f))$, como unión numerable de conjuntos numerables, será numerable también. \square

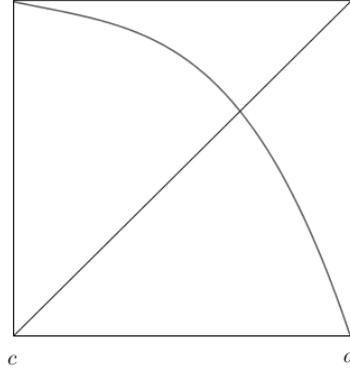


Figura 4.2: Caso 1.

Nótese que la proposición anterior no es cierta si no se cumplen las condiciones del enunciado. Un sencillo contraejemplo es la función identidad, en la que se verifica $AP(f) = I$ y $AP^*(f) = \emptyset$.

Mediante el siguiente teorema probaremos que cuando trabajamos con derivada schwarziana negativa, dentro de la cuenca inmediata de atracción tiene que vivir algún punto crítico o algún extremo del intervalo. En particular, la familia de las órbitas periódicas atractoras es finita.

Teorema 4.7. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función de clase C^3 , con $C(f)$ finito y $Sf(x) < 0$ para todo $x \notin C(f)$. Sea $\{p, f(p), \dots, f^{r-1}(p)\}$ órbita periódica atractora y sea $V_f(\text{Orb}_f(p)) = J_0 \cup J_1 \cup \dots \cup J_{r-1}$ su cuenca inmediata de atracción (donde $p \in J_0, f(p) \in J_1, \dots, f^{r-1}(p) \in J_{r-1}$). Entonces $V_f(\text{Orb}_f(p))$ contiene algún extremo de I o algún punto de $C(f)$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $V_f(\text{Orb}_f(p))$ no contiene a ningún extremo de I ni a ningún punto de $C(f)$. Como por las propiedades de la cuenca inmediata de atracción $f^r(\partial J_0) \subset \partial J_0$, si $\text{Cl}(J_0) = [c, d]$, la gráfica de f^r en J_0 podrá ser únicamente de dos maneras (recordemos la proposición 2.17):

- 1) $f^r(c) = d, f^r(d) = c$, con lo que estaremos en el caso de la figura 4.2.
- 2) $f^r(c) = c, f^r(d) = d$, con lo que la gráfica podría quedar de dos maneras, según se muestra en la figura 4.3 (en el caso 2.2 el punto fijo p también podría quedar en el extremo derecho y la función por encima de la diagonal).

Podemos suponer que estamos en el caso 2 (en el caso 1 bastaría trabajar en f^{2r} en vez de f^r y pasar al caso 2.1).

Comencemos estudiando el caso 2.1. Como p es atractor, por el teorema 2.16, $Df^r(p) \leq 1$. Ahora, aplicando el teorema de Lagrange en el intervalo $[c, p]$ existe $y \in (c, p)$ tal que

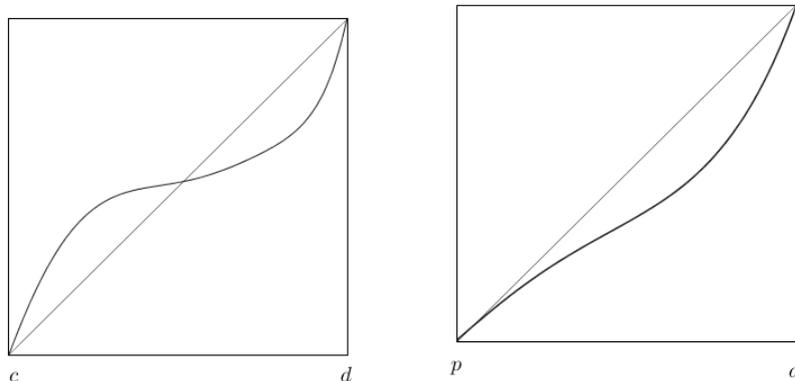


Figura 4.3: Caso 2.1 (izquierda) y caso 2.2 (derecha).

$Df^r(y) = 1$. Análogamente, existe $z \in (p, d)$ de manera que $Df^r(z) = 1$. Por tanto, aplicando el principio del mínimo 4.4 (notemos que podemos hacerlo ya que $S(f^r) < 0$ por la proposición 4.3 y además estamos excluyendo que existan puntos críticos en la cuenca inmediata de atracción, luego la derivada es no nula en $V_{f^r}(p)$) se tiene que $Df^r(p) > 1$, con lo que llegamos a contradicción.

Analícemos ahora el caso 2.2. Por el teorema de Lagrange, existe $y \in (p, d)$ de manera que $Df^r(y) = 1$. Además, $Df^r(p) = 1$ ya que si $Df^r(p) > 1$, entonces p no sería atractor por ninguno de los dos lados (aplicando el corolario 2.16) y si $Df^r(p) < 1$ entonces p sería atractor propio, lo que tampoco puede ocurrir por la definición de cuenca inmediata de atracción. Por otro lado, a la izquierda de p todos los puntos tendrán derivada menor que 1 ya que si existe $s < p$ tal que $Df^r(s) \geq 1$, entonces por el principio del mínimo se tendría que $|Df^r(p)| > \min\{|Df^r(s)|, |Df^r(y)|\} = 1$. Por tanto, denotando $g = f^r$ existe $\varepsilon > 0$ de manera que $x < g(x) < p$ para todo $x \in [p - \varepsilon, p)$ (útese el teorema de Lagrange), y p será atractor por la izquierda para g por la versión simétrica de la proposición 2.17. Como también es atractor por la derecha será propio, con lo que se llega a una contradicción. \square

A partir de la proposición 4.8, en la que establecemos una condición de atracción propia para puntos no hiperbólicos, el teorema 4.7 que acabamos de probar y las propiedades de la cuenca inmediata de atracción, obtendremos como corolario el teorema de Allwright-Singer 4.9, posiblemente el resultado más importante (pues establece una condición de atracción global) y desde luego el más conocido de todos los que atañen a la derivada schwarziana.*

*En realidad casi todo el mundo se refiere a él como “teorema de Singer”, muy posiblemente porque Guckenheimer olvidó mencionar a Allwright en su trascendental trabajo [8]. Esto es bastante injusto, porque Allwright y Singer probaron el resultado de manera independiente, y de hecho Allwright se anticipó unas semanas a Singer.

Proposición 4.8. *Sea p un punto fijo de f de clase C^3 verificando $Df(p) = -1$ y $Sf(p) < 0$. Entonces p es atractor propio.*

Demostración. Si $Df(p) = -1$, la condición de derivada schwarziana negativa en p se traduce en

$$-D^3f(p) - \frac{3}{2}(D^2f(p))^2 < 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$-2D^3f(p) - 3(D^2f(p))^2 < 0.$$

Consideremos la función $g(x) = f^2(x)$. Veamos que

$$Dg(p) = 1, \quad D^2g(p) = 0, \quad D^3g(p) = -2D^3f(p) - 3(D^2f(p))^2 < 0. \quad (4.1)$$

Las tres igualdades anteriores se obtienen como aplicación de la regla de la cadena. En efecto,

$$Dg(x) = D(f(f(x))) = Df(f(x))Df(x)$$

luego $Dg(p) = Df(f(p))Df(p) = Df(p)Df(p) = (-1)(-1) = 1$. Para la segunda igualdad se tiene

$$D^2g(x) = D(Df(f(x))Df(x)) = D^2f(f(x))(Df(x))^2 + Df(f(x))D^2f(x)$$

luego $D^2g(p) = D^2f(f(p))(Df(p))^2 + Df(f(p))D^2f(p) = 0$. Y para la tercera igualdad

$$\begin{aligned} D^3g(x) &= D(D^2f(f(x))(Df(x))^2 + Df(f(x))D^2f(x)) \\ &= D^3f(f(x))(Df(x))^3 + 3D^2f(f(x))D^2f(x)Df(x) + Df(f(x))D^3f(x) \end{aligned}$$

luego $D^3g(p) = -2D^3f(p) - 3(D^2f(p))^2 < 0$. Entonces, a partir de (4.1) se obtiene que p es un punto de inflexión de g . En concreto, g pasa de ser convexa a cóncava. Entonces, utilizando el desarrollo de Taylor se tiene que

$$\begin{aligned} g(x) &= g(p) + Dg(p)(x-p) + \frac{D^2g(p)}{2!}(x-p)^2 + \frac{D^3g(p)}{3!}(x-p)^3 + o[(x-p)^3] \\ &= p + x - p + \frac{D^3g(p)}{6}(x-p)^3 + o[(x-p)^3] = x + \frac{D^3g(p)}{6}(x-p)^3 + o[(x-p)^3] \end{aligned}$$

Ahora, si $x \in I \cap (p, p + \varepsilon]$ entonces $\frac{D^3g(p)}{6}(x-p)^3 < 0$, luego $g(x) < x$. Por otro lado, si $x \in I \cap [p - \varepsilon, p)$ entonces $\frac{D^3g(p)}{6}(x-p)^3 > 0$ y, por tanto, $g(x) > x$. Luego, aplicando el corolario 2.15 se obtiene que p es atractor propio. \square

Teorema 4.9 (Allwright-Singer). *Sea p un punto fijo de $f : I = [a, b] \rightarrow I$. Supongamos que se satisface*

- 1) $f(x) < x$ si $p < x < b$ y $f(x) > x$ si $a < x < p$.
- 2) f tiene a lo sumo un punto crítico c (que ha de ser extremo relativo).

3) $-1 \leq Df(p) < 0$.

4) $Sf < 0$ (salvo en el punto crítico, donde no se puede definir).

Entonces si $V_f(p)$ es la cuenca inmediata de atracción de p se tiene que $\text{Cl}(V_f(p)) = I$ (y, por tanto, p atrae a todos los puntos de I salvo, a lo sumo, sus extremos).

Demostración. Observemos que a partir de las dos últimas hipótesis del enunciado, utilizando el corolario 2.16 y la proposición 4.8 se obtiene que p es atractor propio.

Supondremos que c es un máximo relativo (si c es un mínimo relativo la demostración es similar, y si no hay puntos críticos es más sencilla). Si existe un punto $q \neq p$ verificando $f(q) = q$ entonces por la primera condición del enunciado q debe ser igual a alguno de los extremos a o b . Pero si $q = b$ entonces debe existir otro punto crítico d que sea mínimo relativo, con lo que entraríamos en contradicción con la segunda hipótesis del enunciado. Por tanto, el único punto fijo que puede existir distinto de p es el extremo a .

Analicemos ahora como puede ser la cuenca inmediata de atracción $V_f(p)$ de p . Por ser p atractor propio, dicha cuenca no podrá tener a p en ninguno de sus extremos. Distinguiamos los siguientes casos:

- La cuenca inmediata de atracción podría ser de la forma $V_f(p) = [a, b]$, con lo que tendríamos el resultado buscado.
- Supongamos que en la cuenca inmediata de atracción hay un único punto frontera, por ejemplo $V_f(p) = (u, b]$ (nótese que al trabajar con el espacio topológico I , los extremos de I no se consideran puntos frontera). Como los puntos de la frontera de las cuencas inmediatas de atracción viajan a la frontera, u tiene que ser un punto fijo. Pero entonces $u = a$, por lo que la cuenca inmediata de atracción sería el intervalo $(a, b]$, luego $\text{Cl}(V_f(p)) = I$. Utilizando el mismo razonamiento se observa que la cuenca inmediata de atracción no podría ser de la forma $[a, v)$, ya que v debería ser otro punto fijo distinto de a y p , lo nos lleva a una contradicción.
- Supongamos que en la cuenca inmediata de atracción hay dos puntos frontera, es decir, es de la forma $(u, v) \subset [a, b]$. Entonces $c \in (u, v)$ ya que por el teorema 4.7 la cuenca inmediata de atracción debe contener algún extremo de I o algún punto crítico (y en este caso no contiene a ninguno de los extremos). Ahora, como los puntos de la frontera de las cuencas inmediatas de atracción viajan a la frontera, y v no puede ser un punto fijo, existen dos posibilidades para los extremos de la cuenca:
 - $\{u, v\}$ es una órbita periódica de periodo 2, es decir $f(u) = v$, $f(v) = u$. Como c es máximo, $f(c) > f(x)$ para todo $x \in I \setminus \{c\}$. Pero entonces $f(c) > f(u) = v$, luego $f(c) \notin (u, v)$, con lo que se llega a una contradicción, ya que las sucesivas imágenes de c deberían pertenecer a la cuenca inmediata de atracción.

- u es un punto fijo y $f(v) = u$. Pero entonces $u = a$ y (por ser c el único punto crítico) y $v = b$, de donde $V_f(p) = (a, b)$.

Por tanto, del análisis anterior se deduce $\text{Cl}(V_f(p)) = I$ con lo que se concluye la prueba. \square

4.2. El principio de Koebe

El principio de Koebe es el último resultado sobre derivada schwarziana negativa que necesitaremos en este trabajo. Su relevancia es tal que bien merece que se le dedique una sección. Fue descubierto por van Strien en 1981 [25] y redescubierto por Guckenheimer en 1987 [9]; es este último artículo el que hemos seguido para la prueba del lema de abajo, del que el principio de Koebe se deduce como simple corolario. Del interés de controlar la distorsión de las iteradas de una función ya hemos tenido cumplida prueba en el capítulo 3; sin embargo, para garantizarla necesitábamos que las sucesivas imágenes del intervalo de partida fueran disjuntas, una hipótesis bastante fuerte. *Grosso modo*, lo que el principio de Koebe implica (teniendo en cuenta que la propiedad de derivada schwarziana negativa es cerrada para composiciones por la proposición 4.3) es que esta hipótesis se puede a menudo soslayar cuando $Sf < 0$.

Lema 4.10. *Sea h un difeomorfismo de clase C^3 en $[0, 1]$ con $Sh < 0$, $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$. Sea $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Entonces en el intervalo $h^{-1}([\delta, 1 - \delta])$ se tiene que*

$$\left| \frac{D^2h(x)}{(Dh(x))^2} \right| \leq \frac{2}{\delta}.$$

Además

$$\text{eDist}(h, h^{-1}([\delta, 1 - \delta])) \leq e^{\frac{2}{\delta}}.$$

Demostración. Por reducción al absurdo, suponemos que x satisface $\delta \leq h(x) \leq 1 - \delta$ y supongamos

$$\left| \frac{D^2h(x)}{(Dh(x))^2} \right| > \frac{2}{\delta}. \quad (4.2)$$

Como $D^2h(x) \neq 0$, podemos definir la hipérbola $\xi(y)$ (al menos cerca de x), como sigue:

$$\xi(y) = h(x) + \frac{(y-x)Dh(x)}{1 - \frac{(y-x)D^2h(x)}{2Dh(x)}}.$$

Notemos que $Sh < 0$ es equivalente a afirmar que $(Dh)^{-\frac{1}{2}}$ es convexa. En efecto,

$$\begin{aligned} D((Dh)^{-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{2}(Dh)^{-\frac{3}{2}}D^2h, \\ D^2((Dh)^{-\frac{1}{2}}) &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}(Dh)^{-\frac{5}{2}}(D^2h)^2 + D^3h(Dh)^{-\frac{3}{2}}\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{2}(Dh)^{-\frac{5}{2}}(D^2h)^2 + D^3h(Dh)^{-\frac{3}{2}} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{D^3h}{(Dh)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{2}\frac{(D^2h)^2}{(Dh)^{\frac{5}{2}}} < 0 \Leftrightarrow \frac{D^3h}{Dh} - \frac{3}{2}\left(\frac{D^2h}{Dh}\right)^2 < 0 \Leftrightarrow S(h) < 0. \end{aligned}$$

Realizando los cálculos correspondientes se tiene que

$$D\xi(y) = \frac{Dh(x)\left(1 - \frac{(y-x)D^2h(x)}{2Dh(x)}\right) + \frac{(y-x)Dh(x)D^2h(x)}{2Dh(x)}}{\left(1 - \frac{(y-x)D^2h(x)}{2Dh(x)}\right)^2} = Dh(x)\left(1 - \frac{(y-x)D^2h(x)}{2Dh(x)}\right)^{-2},$$

es decir, $(D\xi)^{-\frac{1}{2}}$ es una función afín. Esta función toma el valor $(Dh(x))^{-\frac{1}{2}}$ en x , por lo que en ese punto coincide con $(Dh)^{-\frac{1}{2}}$, coincidencia que también se da, en dicho punto, para la primera derivada, que en el caso de $(D\xi)^{-\frac{1}{2}}$ es constante y vale

$$D((D\xi)^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{2}(Dh(x))^{-\frac{3}{2}}D^2h(x).$$

Finalmente, por ser $(D\xi)^{-\frac{1}{2}}$ afín, su segunda derivada es cero, en tanto que probamos antes que $(Dh)^{-\frac{1}{2}}$ es convexa. En resumen, si introducimos

$$g = (Dh)^{-\frac{1}{2}} - (D\xi)^{-\frac{1}{2}},$$

se tendrá $g(x) = 0$, $Dg(x) = 0$ y $D^2g > 0$, de modo que $g(y) > 0$ para todo $y \neq x$ (donde ξ esté definida) y, por tanto, $Dh(y) < D\xi(y)$ para todo $y \neq x$. Como $h(x) = \xi(x)$, esto implica $h(y) < \xi(y)$ si $x < y$ y $\xi(y) < h(y)$ si $y < x$.

Estamos suponiendo (4.2). Si además $D^2h(x) < 0$, ξ estará bien definida a la derecha de x y se tendrá

$$\begin{aligned} h(1) < \xi(1) &= h(x) + \frac{(1-x)Dh(x)}{1 - \frac{(1-x)D^2h(x)}{2Dh(x)}} = h(x) + \frac{2(Dh(x))^2(1-x)}{2Dh(x) - (1-x)D^2h(x)} \\ &< h(x) + \frac{2(Dh(x))^2(1-x)}{-(1-x)D^2h(x)} = h(x) - \frac{2(Dh(x))^2}{D^2h(x)} \leq h(x) + \delta \leq 1, \end{aligned}$$

lo que contradice $h(1) = 1$. Análogamente, si $D^2h(x) > 0$, ξ estará bien definida a la izquierda de x y se tendrá

$$\begin{aligned} h(0) > \xi(0) &= h(x) - \frac{xDh(x)}{1 + \frac{x D^2h(x)}{2Dh(x)}} = h(x) - \frac{2x(Dh(x))^2}{2Dh(x) + x D^2h(x)} \\ &> h(x) - \frac{2x(Dh(x))^2}{x D^2h(x)} = h(x) - \frac{2(Dh(x))^2}{D^2h(x)} \geq h(x) - \delta \geq 0, \end{aligned}$$

en contradicción con $h(0) = 0$.

Probamos ahora la segunda parte del lema. Realizando en la segunda igualdad el cambio de variable $\rho = h(\eta)$, se tiene que si $y < x$ pertenecen a $h^{-1}([\delta, 1 - \delta])$, entonces

$$\begin{aligned} \log \left| \frac{Dh(x)}{Dh(y)} \right| &= \int_y^x \left| \frac{D^2h(\eta)}{Dh(\eta)} \right| d\eta = \int_{h(y)}^{h(x)} \left| \frac{D^2h(h^{-1}(\rho))}{(Dh(h^{-1}(\rho)))^2} \right| d\rho \\ &\leq \int_{h(y)}^{h(x)} \frac{2}{\delta} d\rho = \frac{2}{\delta}(h(x) - h(y)) < \frac{2}{\delta}, \end{aligned}$$

y, por tanto $e\text{Dist}(h, h^{-1}([\delta, 1 - \delta])) \leq e^{\frac{2}{\delta}}$ como queríamos demostrar. \square

Definición 4.11. Sean $U \subset V$ dos intervalos. Diremos que V es un **entorno δ -escalado** de U si ambas componentes de $V \setminus U$ tienen longitud $\delta \cdot |V|$.

Corolario 4.12 (Principio de Koebe). Sean f una función con derivada schwarziana negativa y $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Si $J \subset K$ son intervalos compactos, $f|_K$ es un difeomorfismo y $f(K)$ es un entorno δ -escalado de $f(J)$, se tiene que

$$e\text{Dist}(f, J) \leq e^{\frac{2}{\delta}}.$$

Demostración. Denotamos como L y R las dos componentes de $f(K) \setminus f(J)$. Por ser $f(K)$ δ -escalado se tiene que

$$|L| = \delta|f(K)|, \quad |R| = \delta|f(K)|. \quad (4.3)$$

Definimos φ y ψ difeomorfismos afines de manera que

$$[0, 1] \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\psi} [0, 1]$$

donde $V = f(K)$. Sea $h := \psi \circ f \circ \varphi$ creciente (ya que definiremos si f es creciente ψ y φ crecientes y si f es decreciente φ decreciente y ψ creciente).

Ahora, por ser φ y ψ aplicaciones afines, se tiene que $S\varphi = 0$ y $S\psi = 0$. Por tanto, como consecuencia de la proposición 4.3 se obtiene $S(f \circ \varphi) < 0$ y, aplicando nuevamente dicha proposición, $S(\psi \circ f \circ \varphi) = S(h) < 0$.

Sean $u, v \in [0, 1]$. Ponemos $x = \varphi(u)$, $y = \varphi(v)$, de manera que $\psi(f(x)) = h(u)$ y $\psi(f(y)) = h(v)$. Si $x, y \in J$, utilizando (4.3) se tiene que $h(u), h(v) \in [\delta, 1 - \delta]$, con $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Aplicando ahora el lema 4.10 se obtiene que $\left| \frac{Dh(u)}{Dh(v)} \right| \leq e^{\frac{2}{\delta}}$, es decir,

$$\left| \frac{D\psi(f(x))Df(x)D\varphi(u)}{D\psi(f(y))Df(y)D\varphi(v)} \right| \leq e^{\frac{2}{\delta}}.$$

Pero como $D\psi(f(x)) = D\psi(f(y))$ y $D\varphi(u) = D\varphi(v)$ por ser ψ y φ aplicaciones afines, queda $\left| \frac{Df(x)}{Df(y)} \right| \leq e^{\frac{2}{\delta}}$, como queríamos probar. \square

Capítulo 5

El teorema de Mañé

5.1. Prueba del teorema

En este capítulo probaremos el resultado principal de este trabajo, donde recordamos que $\text{AP}(f)$ es el conjunto de puntos asintóticamente periódicos de f y $C(f)$ el de sus puntos críticos.

Teorema 5.1 (Mañé). *Sea $f : I \rightarrow I$ de clase C^2 con $C(f)$ finito y supongamos que existe un entorno U de $C(f)$ tal que $U \subset \text{AP}(f)$. Entonces $\lambda(\text{AP}(f)) = |I|$.*

Para la demostración nos hemos inspirado en algunas ideas de [18], en concreto de los lemas 5.3 (p. 251), 5.7 y 5.8 (p. 254). Recordemos que en dicho libro este resultado se demuestra (teorema 2.6, p. 229 y corolario 1, p. 248) con la hipótesis adicional de que f no tiene ningún punto r -periódico p tal que $|Df^r(p)| = 1$.

A grandes rasgos, las principales ideas de la demostración pueden resumirse así. Una vez probado que el conjunto de intervalos absorbentes maximales es finito, podremos encontrar, usando la hipótesis, una familia finita de intervalos, todos en $\text{AP}(f)$, y conteniendo al entorno U , que absorbe toda la dinámica “simple” de la función. El conjunto de puntos no asintóticamente periódicos (esencialmente el conjunto al que luego llamaremos K) vivirá entonces en el complementario T de dicha unión. La ausencia de intervalos errantes para f en T nos permitirá deducir que K tiene interior vacío e incluso que su densidad media en las componentes de T no es muy grande, pero esto no es suficiente: necesitamos probar que $\lambda(K) = 0$. Para ello razonaremos por reducción al absurdo, usando el teorema de densidad de Lebesgue para encontrar un punto de densidad x de K . Ahora bien, T

tiene la interesante propiedad de que existen entornos L de x tan pequeños como queramos tales que, tras el adecuado número de iteraciones, terminan cubriendo alguna de las componentes de T . Llegados a este punto, la clave está en conseguir una cota universal para la distorsión de estas iteradas, porque si el entorno L es suficientemente pequeño, la densidad media de K en él será prácticamente 1, y lo mismo ocurrirá cuando cubramos la correspondiente componente de T . Pero, recordemos, ya habíamos probado que la densidad media de K en estas componentes no puede ser muy grande, y eso nos dará la deseada contradicción. La parte más delicada del argumento, entonces, es conseguir controlar la distorsión. Desafortunadamente, a diferencia de lo que ocurría en el teorema de Schwartz, no podemos garantizar que los iterados de L sean siempre disjuntos, pero hay dos detalles que podemos explotar. Por un lado, si $p \in T$ es periódico de periodo r , entonces, con pocas excepciones, las derivadas $|Df^r(p)|$ son muy grandes. Por otro lado, cuando dos iterados de L se cortan, uno contiene al otro (para garantizar esto es por lo que introducimos abajo la noción de cadena bonita, ya usada por Mañé en su artículo) y, lo que es mejor, a algún punto periódico; como la derivada en este punto es muy grande, conseguiremos que el intervalo de dentro sea muy pequeño en comparación con el de fuera. Ello nos permitirá encontrar una cota universal para la suma de las longitudes de los iterados de L , que a la postre es lo único que necesitamos para acotar la distorsión, al estilo del teorema de Schwartz.

Definición 5.2. Sea $f : I \rightarrow I$ continua. Se dice que un subintervalo J es **bonito** si los iterados de sus extremos nunca visitan el interior de J .

Definición 5.3. Sea $f : I \rightarrow I$ continua. Llamaremos a una secuencia J_0, J_1, \dots, J_r de intervalos una **cadena** si $f(J_i) = J_{i+1}$ y $f|_{J_i}$ es un homeomorfismo para cada $0 \leq i < r$. Si J_r es un intervalo bonito, diremos que la cadena es **bonita**.

El siguiente resultado explica, en parte, por qué nos parecen “bonitos” estos intervalos y cadenas.

Lema 5.4. Si J_0, J_1, \dots, J_r es una cadena bonita y los interiores de dos intervalos J_j, J_k se intersecan, con $j < k$, entonces $J_j \subset J_k$.

Demostración. Supongamos $\text{Int } J_j \cap \text{Int } J_k \neq \emptyset$. Si no fuese cierto $J_j \subset J_k$, entonces al menos uno de los extremos de J_k , llamémoslo c , estaría en el interior de J_j . Esto es imposible porque $f^{r-k}(c)$ es un extremo de J_r y $f^{r-j}(c) = f^{k-j}(f^{r-k}(c))$ estaría en el interior de J_r , lo que se contradice con que J_r es bonito. \square

Notemos que el lema anterior implica que todos los intervalos de una cadena bonita son bonitos, y por tanto que cualquier subcadena de una cadena bonita es también bonita.

Sea $\mu > 1$. Diremos que una cadena bonita J_0, J_1, \dots, J_r es **μ -expansiva** cuando para cada $j < k \leq m$ tales que $J_j, J_k \subset J_m$ se cumple $|J_k| \geq \mu|J_j|$.

Proposición 5.5. Si J_0, J_1, \dots, J_r es una cadena bonita μ -expansiva, entonces se cumple

$$\sum_{i=0}^r |J_i| < \frac{\mu}{\mu-1} |I|.$$

Demostración. Observemos que, por el lema 5.4, existen intervalos $J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_s}$ con interiores disjuntos que contienen al resto de intervalos de la cadena. Ahora bien, la propiedad de μ -expansividad implica que la suma de las longitudes de los intervalos contenidos en cada intervalo J_{i_j} es menor que $\frac{\mu}{\mu-1} |J_{i_j}|$. En efecto, si $J_1^{i_j}, J_2^{i_j}, \dots, J_t^{i_j} = J_{i_j}$ (respetando la ordenación de la cadena inicial) están contenidos en un J_{i_j} para algún j , entonces se tendrá que $|J_t^{i_j}| \leq |J_t^{i_j}|$, $|J_{t-1}^{i_j}| \leq \frac{1}{\mu} |J_t^{i_j}|$, $|J_{t-2}^{i_j}| \leq \frac{1}{\mu^2} |J_t^{i_j}|, \dots, |J_1^{i_j}| \leq \frac{1}{\mu^{t-1}} |J_t^{i_j}|$. Por tanto,

$$\sum_{k=1}^t |J_k^{i_j}| \leq |J_{i_j}| \sum_{i=0}^{t-1} \frac{1}{\mu^i} < |J_{i_j}| \frac{1}{1 - \frac{1}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu-1} |J_{i_j}|.$$

Como los intervalos $J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_s}$ tienen interiores disjuntos, $\sum_{j=1}^s |J_{i_j}| \leq |I|$. Por tanto,

$$\sum_{i=0}^r |J_i| < \frac{\mu}{\mu-1} \sum_{j=1}^s |J_{i_j}| \leq \frac{\mu}{\mu-1} |I|,$$

como queríamos demostrar. \square

Demostraremos en la siguiente proposición que lejos de los puntos críticos las derivadas de f^r de los puntos periódicos de periodo r tienden hacia infinito cuando el periodo lo hace.

Proposición 5.6. Sean $f : I \rightarrow I$ de clase C^2 con $C(f)$ finito y $\delta > 0$. Entonces existe una sucesión $d_r = d_r(\delta) \rightarrow \infty$ tal que si p es r -periódico y $d(\text{Orb}_f(p), C(f)) \geq \delta$, entonces $|Df^r(p)| \geq d_r$.

Demostración. Es claro que basta demostrar la afirmación suponiendo que f es un difeomorfismo de clase C^1 a trozos regular tal que $\log |Df|$ es lipschitziana, como en el teorema 3.10 (entendiendo que $C(f)$ denota ahora al conjunto $a = a_0 < a_1 \cdots < a_s = b$ de puntos singulares y extremos de I), y que además cumple $f([a_i, a_{i+1}]) = I$ para cada i , pues a partir de la función del enunciado podemos llegar a una de este tipo modificándola cerca del conjunto de puntos críticos como en la demostración del corolario 3.12 y extendiéndola adecuadamente a un intervalo un poco mayor que I de manera que los extremos del intervalo sean puntos fijos (un ejemplo se muestra en la figura 5.1; aunque no nos hemos esmerado en el dibujo, ¡se entiende que en los puntos de contacto entre la nueva y antigua función se conserva la diferenciabilidad!).

Supongamos que la afirmación no es cierta para encontrar una constante $\kappa > 0$ y puntos periódicos p_n de periodos $r_n \rightarrow \infty$ tales que $d(\text{Orb}_f(p_n), C(f)) \geq \delta$ y $|Df^{r_n}(p_n)| \leq \kappa$ para todo n . No hay problema en suponer que existe $c_n \in C(f)$ tal que $[c_n, p_n] \cap \text{Orb}_f(p_n) = \{p_n\}$

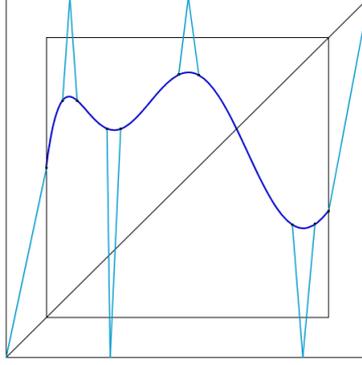


Figura 5.1: Ejemplo para la demostración de la proposición 5.6.

y por tanto $p_n - c_n \geq \delta$, y observemos que $[c_n, p_n]$ es bonito. Claramente existe un intervalo $J_n = [d_n, p_n]$ tal que f^{r_n} es un difeomorfismo sobre J_n y $f^{r_n}(J_n) = [c_n, p_n]$. Más aún, los interiores de los intervalos $f^j(J_n)$, $0 \leq j < r_n$, son disjuntos dos a dos, porque de no ser así, y formar estos intervalos una cadena bonita, tendríamos por el lema 5.4 que $f^i(J_n) \subset [c_n, p_n]$ para algún $1 \leq i < r_n$, y en particular $f^i(p_n) \in [c_n, p_n]$ en contradicción con la elección de p_n .

Ahora (tomando una subsucesión adecuada de (p_n) si es preciso) caben dos posibilidades, y ambas, como veremos, conducen a contradicción: o bien $|J_n| \rightarrow 0$, o bien existe un intervalo J tal que $J \subset J_n$ para todo n . En efecto, esta última afirmación se puede realizar ya que si existe $\delta > 0$ de manera que $|J_n| > \delta$ para todo n entonces, si consideramos la sucesión (e_n) de los centros de J_n , por ser I compacto, se puede extraer una subsucesión convergente a x . Podemos suponer entonces que $|e_n - x| < \frac{\delta}{4}$. Luego, llamando $J = [x - \frac{\delta}{4}, x + \frac{\delta}{4}]$ se tiene que $J \subset [e_n - \frac{\delta}{2}, e_n + \frac{\delta}{2}] \subset J_n$.

Supongamos primero $|J_n| \rightarrow 0$ y sea C una constante de Lipschitz para $\log |Df|$. Por el corolario 3.7, $e\text{Dist}(f^{r_n}, J_n) \leq e^{C|I|}$, y como $\frac{p_n - c_n}{|J_n|} \rightarrow \infty$ (pues $p_n - c_n \geq \delta$), y existe $x_n \in [c_n, p_n]$ tal que $|Df^{r_n}(x_n)| = \frac{|p_n - c_n|}{|J_n|}$ (teorema de Lagrange), se tendría igualmente $|Df^{r_n}(p_n)| \rightarrow \infty$, en contradicción con $|Df^{r_n}(p_n)| \leq \kappa$ para todo n .

Supongamos ahora que existe un intervalo abierto J contenido en todos los intervalos J_n . Como $r_n \rightarrow \infty$, $f^i(J) \cap f^j(J) = \emptyset$ para todo $i \neq j$. Como f no tiene intervalos errantes (teorema 3.10), existirán, por la proposición 2.30, k y una órbita r -periódica atractora tales que $f^k(J)$ está contenida en una de las componentes M' de su cuenca inmediata de atracción, así que $f^k(J_n) \cap M' \neq \emptyset$ para todo n . Pero si n es suficientemente grande para que $r_n > 2r + k$ nos encontramos con que o bien $f^k(J_n)$ (y por tanto p_n) está contenido en $\text{Cl } M'$, lo que es imposible porque este intervalo no contiene puntos periódicos de periodo mayor que $2r$, o bien $\text{Int } f^k(J_n)$ contiene a uno de los puntos frontera de $\text{Cl } M'$, que o bien es periódico de periodo r , o bien es periódico de periodo $2r$, o bien es llevado por f^r

a un punto periódico de periodo r . Esto implica que al menos dos de los tres intervalos $\text{Int } f^k(J_n), \text{Int } f^{k+r}(J_n), \text{Int } f^{k+2r}(J_n)$ se cortan, lo que es imposible porque probamos al principio que eran disjuntos. \square

Recordemos (proposición 2.31) que para las funciones que estamos considerando aquí la familia de intervalos absorbentes maximales de un mismo periodo es finita. La siguiente proposición garantiza la finitud global cuando todos los puntos próximos a $C(f)$ son asintóticamente periódicos.

Proposición 5.7. *Sea $f : I \rightarrow I$ de clase C^2 con $C(f)$ finito y supongamos que existe un entorno U de $C(f)$ tal $U \subset \text{AP}(f)$. Entonces la familia de intervalos absorbentes maximales de f es finita.*

Demostración. Basta demostrar que existe $r_0 \geq 1$ tal que todo intervalo absorbente maximal tiene periodo menor que r_0 . De hecho, este número r_0 se puede determinar explícitamente a partir de la constante de Lipschitz C de $\log |Df|$ en $I \setminus U$ y de un $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que $d(\text{Orb}_f(p), C(f)) \geq \delta$. En concreto, basta con que $d_r(\delta) > e^{C|I|}$ para todo $r \geq r_0$ (lo cual es posible por la proposición 5.6). En efecto, si un intervalo absorbente maximal J tuviera periodo $r \geq r_0$ entonces, por la observación 3.8 (los intervalos $f^i(J)$, $0 \leq i < r$, son disjuntos) se tendría $e\text{Dist}(f^r, J) \leq e^{C|I|}$, y en particular,

$$\frac{|Df^r(x)|}{|Df^r(y)|} \leq e^{C|I|} \quad (5.1)$$

para todo $x, y \in J$. Además, $f^r(J) \subset J$ implicaría, por un lado, la existencia de un punto periódico p^* de periodo r en J , y, por otro, la de un punto $x \in J$ tal que $|Df^r(x)| = \frac{|f^r(J)|}{|J|} \leq 1$ (por el teorema de Lagrange). Por tanto,

$$\frac{|Df^r(p^*)|}{|Df^r(x)|} \geq |Df^r(p^*)| > e^{C|I|}$$

por la proposición 5.6, en contradicción con (5.1). \square

Observación 5.8. Notemos que, aunque toda componente de una cuenca inmediata de atracción está contenida en un intervalo absorbente maximal, un intervalo absorbente maximal no tiene por qué contener a ninguna componente de una cuenca inmediata de atracción (basta tomar como f la identidad). No obstante, si f tiene derivada schwarziana negativa esto sí es cierto, porque si J es absorbente maximal entonces sus puntos (salvo a lo sumo un conjunto numerable de ellos, estamos usando las proposiciones 4.5, 2.25 y 2.26) terminan cayendo en una cuenca inmediata de atracción, por lo que alguna de sus componentes se intersecará con J y por tanto estará incluida en J . En particular, gracias al teorema 4.7, la familia de intervalos absorbentes maximales de una función con derivada schwarziana negativa es finita aun cuando $C(f)$ no tenga un entorno en $\text{AP}(f)$.

Estamos ya en condiciones de acometer la prueba del teorema 5.1. Sea $A_0(f)$ la unión de todos los intervalos absorbentes maximales de f . Por ser una unión finita (proposición 5.7) de intervalos compactos (proposición 2.29), $A_0(f)$ es compacto. Recordemos también que $f(\partial A_0(f)) \subset \partial A_0(f)$, de nuevo por la proposición 2.29. Sea $A_1(f) = f^{-1}(A_0(f)) \setminus A_0(f)$. Como cada componente del compacto $f^{-1}(A_0(f)) \subset AP(f)$ está o bien contenida en $A_0(f)$ o es disjunta de $A_0(f)$, $A_1(f)$ es compacto y tiene un número finito de componentes (alguna puede ser degenerada a un punto). Más aún, $f(\partial A_1(f)) \subset \partial A_0(f)$. En general, para cada $n \geq 1$, definimos $A_{n+1}(f) = f^{-1}(A_n(f))$, que también será un compacto con un número finito de componentes, teniéndose $f(\partial A_{n+1}(f)) \subset \partial A_n(f)$. Como los conjuntos $A_n(f)$ son disjuntos dos a dos, las uniones $B_n(f) = \bigcup_{i=0}^n A_i(f)$ cumplen $f(\partial B_n(f)) \subset \partial B_n(f)$ (en particular, $f(\partial B_n(f)) \subset \partial B_{n-1}(f)$). En consecuencia, cada una de las componentes de $I \setminus B_n(f)$ (también hay un número finito de ellas) es un intervalo abierto (en la topología de I , alguno de ellos puede contener a un extremo de I) y bonito.

Observemos que, por la proposición 2.30, existe n_0 tal que $B_{n_0}(f)$ contiene a un entorno de $C(f)$. En lo sucesivo este número n_0 permanecerá fijo, y denotaremos por C a la constante de Lipschitz para $\log |Df|$ en $T = I \setminus B_{n_0}(f)$. Asimismo, denotaremos por Q a la unión de las órbitas periódicas de f contenidas en T . Por la proposición 5.6, existe una sucesión $d_r \rightarrow \infty$ tal que si $p \in Q$ tiene periodo r , entonces $|Df^r(p)| \geq d_r$. Finalmente definimos $K = I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n(f) = I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(f)$. Observemos que $I \setminus AP(f) \subset K$. Nuestro objetivo es demostrar que $\lambda(K) = 0$. Para ello argumentaremos por contradicción, suponiendo $\lambda(K) > 0$ y fijando un punto de densidad $x_0 \in K$ que no sea ninguno de los extremos de I (tal cosa es posible por el teorema de densidad de Lebesgue 1.7).

Paso 1: *Q solo puede tener un número finito de puntos del mismo periodo (en particular, Q es numerable). Más aún, para cada órbita periódica O en Q se cumple una de las dos siguientes posibilidades:*

- a) *Existe una sucesión de intervalos compactos $(I_O^m)_{m=-\infty}^0$ en T , con interiores disjuntos dos a dos, tales que $f(I_O^m) = I_O^{m+1}$ para cada $m < 0$ y $O \cup \bigcup_{m=-\infty}^0 I_O^m$ es un entorno de O en T .*
- b) *Existen dos sucesiones de intervalos compactos $(I_O^m)_{m=-\infty}^0$ e $(J_O^m)_{m=-\infty}^0$ en T , con interiores disjuntos dos a dos, tales que $f(I_O^m) = I_O^{m+1}$, $f(J_O^m) = J_O^{m+1}$ para cada $m < 0$ y $O \cup \bigcup_{m=-\infty}^0 I_O^m \cup \bigcup_{m=-\infty}^0 J_O^m$ es un entorno de O en T .*

Demostración del paso 1. Notemos que T no puede contener a ningún intervalo en $AP(I)$ que se interseque con Q , pues dicho intervalo sería absorbente. Esto implica que si $p \in Q$ es de periodo r , entonces existe un pequeño entorno U de p en T tal que f^{2r} es estrictamente creciente en U y, para cada $x \in U \setminus \{p\}$, $f^{2r}(x) < x$ si $x < p$ y $f^{2r}(x) > x$ si $x > p$. De aquí se concluye que Q solo puede tener un número finito de puntos periódicos del mismo periodo. Ahora, si f es decreciente, para construir los intervalos $(I_O^m)_{m=-\infty}^0$ asociados a la

órbita O de p , bastaría partir de un intervalo cualquiera I_O^0 suficientemente cercano a p , de modo que f^{2r} lleve uno de sus extremos al otro, e ir tomando sucesivas antiimágenes cerca de O . Si f es creciente partimos de intervalos I_O^0 e J_O^0 suficientemente cercanos a p (a izquierda y derecha), de manera que f^r lleve uno de sus extremos al otro, y tomamos sucesivas antiimágenes cerca de O , para construir finalmente los intervalos $(I_O^n)_{n=-\infty}^0$ y $(J_O^n)_{n=-\infty}^0$ (en realidad, si f es creciente pero p es un punto frontera de $A_0(f)$ tan solo necesitamos una sucesión $(I_O^n)_{n=-\infty}^0$, ya que solo hay que cubrir un lado). \square

La proposición 5.6 implica la existencia de un número r_0 tal que si $r \geq r_0$ y $p \in Q$ es un punto r -periódico, entonces $|Df^r(p)| \geq 2e^{C|I|}$. De acuerdo con el paso 1, el conjunto Q' de puntos de Q con periodo menor que r_0 es finito, por lo que existe $\sigma_0 > 0$ suficientemente pequeño, que dejaremos fijo en adelante, tal que si O es una órbita r -periódica cualquiera en Q' entonces $|I_O^m| > \sigma_0$ cuando $0 \leq |m| < 4r$ (además, también se tendrá $|J_O^m| > \sigma_0$ para $0 \leq |m| < 4r$ en el caso de que exista esta sucesión de compactos). También supondremos que $|L| > \sigma_0$ para cada componente L de T .

Paso 2: $\text{Int}(\text{Cl } K) = \emptyset$.

Demostración del paso 2. Sea $K' = \text{Cl } K$ y suponemos por reducción al absurdo que $\text{Int } K' \neq \emptyset$, es decir, existe un intervalo $J \subset K'$. Entonces $f^n(J) \subset K' \subset \text{Cl } T$ para todo $n \geq 0$. No puede ocurrir $J \subset \text{AP}(f)$, pues la proposición 2.30 implicaría la existencia de k y un intervalo absorbente maximal M tales que $f^k(J) \subset M$. Como por el corolario 3.12 J no puede ser errante, dos de los iterados del intervalo J se intersecan (ya que sus puntos no son atraídos por órbitas periódicas), pero entonces la proposición 2.27 implica $J \subset \text{AP}(f)$, posibilidad ya descartada. \square

Una consecuencia inmediata del paso 2 es que existe $0 < \mu_0 < 1$ tal que $D_m(K, J) \leq \mu_0$ para todo subintervalo J de I con $|J| > \sigma_0$. De hecho, si N es un entero positivo tal que $\frac{b-a}{N} \leq \frac{\sigma_0}{2}$, y elegimos $\mu_1 < 1$ de manera que $D_m(K, J) \leq \mu_1$ se cumple cuando J es uno de los intervalos $H_i = [a + \frac{(b-a)i}{N}, a + \frac{(b-a)(i+1)}{N}]$, $0 \leq i < N$ (y tal μ_1 existe por el paso 2, ya que $\text{Cl } K$ tiene interior vacío, luego su complementario es un abierto denso y por tanto tiene medida positiva en cualquier intervalo), entonces puede tomarse $\mu_0 = \frac{\mu_1 + N}{1 + N}$, pues si $|J| > \sigma_0$ entonces existe $H_{i_0} \subset J$, por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda(K \cap J)}{|J|} &= \frac{\lambda(K \cap H_{i_0}) + \lambda((J \setminus H_{i_0}) \cap K)}{|H_{i_0}| + \lambda(J \setminus H_{i_0})} \leq \frac{\lambda(K \cap H_{i_0}) + \lambda(J \setminus H_{i_0})}{|H_{i_0}| + \lambda(J \setminus H_{i_0})} \\ &\leq \frac{\lambda(K \cap H_{i_0}) + |I|}{|H_{i_0}| + |I|} = \frac{\frac{\lambda(K \cap H_{i_0})}{|H_{i_0}|} + \frac{|I|}{|H_{i_0}|}}{1 + \frac{|I|}{|H_{i_0}|}} \leq \frac{\mu_1 + N}{1 + N} = \mu_0; \end{aligned}$$

hemos utilizado en la segunda desigualdad que si $a < b$, la función $\frac{a+x}{b+x}$ es creciente, y en la última desigualdad $\frac{|I|}{|H_{i_0}|} = \frac{|b-a|}{|\frac{b-a}{N}|} = N$, $\frac{\lambda(K \cap H_{i_0})}{|H_{i_0}|} \leq \mu_1$.

Paso 3. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen $x_0 \in J_\varepsilon \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ y $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tales que $f^{n_\varepsilon}|_{J_\varepsilon}$ es un difeomorfismo, $e\text{Dist}(f^{n_\varepsilon}, J_\varepsilon) \leq e^{4C|I|}$ y $|f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon)| > \sigma_0$.

Demostración del paso 3. Por el paso 2, existe $n \geq n_0$ suficientemente grande de manera que si L es la componente de $I \setminus B_n(f)$ que contiene a x_0 , entonces se satisface $L \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Como x_0 no es un extremo de I , podemos suponer también que ambos extremos de L están en $B_n(f)$. Entonces cada uno de los intervalos $f^i(L)$, $0 \leq i \leq n - n_0$, es una de las componentes de $I \setminus B_{n-i}(f)$ (en particular están en T). Como $f(\partial B_{n_0}(f)) \subset \partial B_{n_0}(f)$, la cadena $\{L_i\}_{i=0}^{n-n_0} = \{f^i(L)\}_{i=0}^{n-n_0}$ es bonita.

Nuestra intención es controlar la distorsión de f^{n-n_0} en L , para lo que necesitamos, en virtud de la observación 3.8, que la suma de las longitudes de los intervalos de la cadena no sea muy grande, lo que a su vez se tiene cuando existe expansividad (proposición 5.5). Pues bien, afirmamos que si ninguna de las clausuras de los intervalos L_0, L_1, \dots, L_s se interseca con Q' , entonces esta subcadena es 2-expansiva.

En efecto, sean $j < k \leq m \leq s$ tales que $L_j, L_k \subset L_m$. Demostraremos $|L_k| \geq 2|L_j|$. Claramente, no es restrictivo suponer que no hay ningún subíndice l entre j y k para el que también se cumpla $L_l \subset L_m$. Recordemos que L_m es una de las componentes de $I \setminus B_{n-m}(f)$, y si R es la componente de $I \setminus B_{n-m+k-j}(f)$ que contiene a L_j , entonces se tendrá que $f^{k-j}(R) \cap L_m \supset L_k$, por lo que $f^{k-j}(R)$, que es una de las componentes de $I \setminus B_{n-m}(f)$, coincidirá con L_m . Más aún, como la cadena $\{f^i(R)\}_{i=0}^{k-j}$ es bonita (recordemos que $f^{k-j}(R) = L_m$ es bonito) y $R \cap f^{k-j}(R) \supset L_j$, entonces $R \subset f^{k-j}(R)$ (lema 5.4). Notemos además que los intervalos $f^i(R)$, $0 \leq i < k - j$, son disjuntos; de lo contrario, $f^i(R) \cap f^{k-j}(R) \neq \emptyset$ (y entonces $f^i(R) \subset f^{k-j}(R)$) para algún $0 < i < k - j$, lo que significa que L_{j+i} está contenido en L_m . Esto es imposible, porque habíamos supuesto que ninguno de los intervalos L_l , con $j < l < k$, está contenido en L_m . Ahora bien, que los intervalos $f^i(R)$ sean disjuntos implica en particular que

$$e\text{Dist}(f^{k-j}, R) \leq e^{C|I|}. \quad (5.2)$$

Por otro lado, $f^{k-j}(R) = L_m \supset R$ implica la existencia de un punto $(k - j)$ -periódico p en $\text{Cl}(L_m)$ (y por tanto en $Q \setminus Q'$). Como $|Df^{k-j}(p)| \geq 2e^{C|I|}$ por la definición de Q , a partir de (5.2) se obtiene

$$|Df^{r-k}(x)| \geq e^{-C|I|} |Df^{r-k}(p)| \geq e^{-C|I|} 2e^{C|I|} = 2.$$

para todo $x \in R$, y en particular para todo $x \in L_j$. De aquí, utilizando el teorema de Lagrange, existe $x^* \in L_j$ tal que $|Df^{k-j}(x^*)| = \frac{|L_k|}{|L_j|}$, y como $|Df^{k-j}(x^*)| \geq 2$ se obtiene $|L_k| \geq 2|L_j|$, como queríamos demostrar.

A partir del resultado anterior, la afirmación del paso 3 se deduce de inmediato (tomando $J_\varepsilon := L$ y $n_\varepsilon := n - n_0$) cuando ninguna de las clausuras de los intervalos L_i ,

$0 \leq i < n - n_0$, se interseca con Q' , porque $|f^{n-n_0}(L)| > \sigma_0$ y la combinación de la observación 3.8 y la proposición 5.5 produce $\text{eDist}(f^{n-n_0}, L) \leq e^{2C|I|}$. Si existe un número $s_0 < n - n_0$ (mínimo) tal que $\text{Cl}(f^{s_0}(L))$ contiene a algún punto r -periódico p de Q' , tan solo podemos asegurar $\text{eDist}(f^{s_0}, L) \leq e^{2C|I|}$, lo que también sería suficiente si $|f^{s_0}(L)| > \sigma_0$. Si, por último, $|f^{s_0}(L)| \leq \sigma_0$ y, por ejemplo, f^r es decreciente en p (los otros casos son análogos) hacemos uso del paso 1, pues es claro que existen $L' \subset L$ conteniendo a x_0 y $m_0 \leq 0$ tales que $R' = f^{s_0}(L')$ es la unión de un trozo de intervalo $I_O^{m_0}$ (que es donde está contenido $f^{s_0}(x_0)$) y todo el intervalo $I_O^{m_0-2r}$, con $O = \text{Orb}_f(p)$. Como los intervalos I_O^m tienen interiores disjuntos, la familia $\{f^i(R')\}_{i=0}^{|m_0|}$ puede descomponerse en dos subfamilias de manera que los intervalos de cada una de ellas tienen interiores disjuntos. Por tanto, $\sum_{i=0}^{|m_0|} |f^i(R')| \leq 2|I|$ y $\text{eDist}(f^{|m_0|}, R') \leq e^{2C|I|}$. En resumen,

$$\text{eDist}(f^{s_0+|m_0|}, L') = \text{eDist}(f^{s_0}, L') \text{eDist}(f^{|m_0|}, R') \leq e^{2C|I|} e^{2C|I|} = e^{4C|I|},$$

y la afirmación del paso 3 se sigue para $J_\varepsilon := L'$ y $n_\varepsilon := s_0 + |m_0|$, ya que $|f^{s_0+|m_0|}(L')|$ contiene a I_O^{-2r} y por tanto tiene longitud mayor que σ_0 . \square

Paso 4. Sea $0 < \rho < 1$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de manera que

$$D_m(K, f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon)) \geq 1 - \rho.$$

Demostración del paso 4. Sea $\rho' = \rho e^{-4C|I|}$. Como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(K \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))}{2\varepsilon} = 1,$$

o equivalentemente, como vimos en el capítulo 1,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(K \cap (x_0, x_0 + \varepsilon))}{\varepsilon} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda(K \cap (x_0 - \varepsilon, x_0))}{\varepsilon} = 1,$$

existe ε_ρ tal que si $\varepsilon \leq \varepsilon_\rho$ entonces se verifica

$$\frac{\lambda(K \cap (x_0, x_0 + \varepsilon))}{\varepsilon} \geq 1 - \rho' \quad \text{y} \quad \frac{\lambda(K \cap (x_0 - \varepsilon, x_0))}{\varepsilon} \geq 1 - \rho'.$$

Escribamos $J_\varepsilon = [x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2] \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon_\rho$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \lambda(K \cap (x_0, x_0 + \varepsilon_2)) &\geq (1 - \rho')\varepsilon_2 \\ \lambda(K \cap (x_0 - \varepsilon_1, x_0)) &\geq (1 - \rho')\varepsilon_1 \end{aligned}$$

con lo que, sumando ambas desigualdades, se obtiene

$$\lambda(K \cap J_\varepsilon) \geq (1 - \rho')(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = (1 - \rho')|J_\varepsilon|.$$

Como $\frac{\lambda(K \cap J_\varepsilon)}{|J_\varepsilon|} \geq 1 - \rho'$, o lo que es lo mismo,

$$\frac{\lambda(J_\varepsilon \setminus (K \cap J_\varepsilon))}{|J_\varepsilon|} \leq \rho',$$

aplicando la proposición 3.5 y el paso 3,

$$\frac{\lambda(f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon \setminus (K \cap J_\varepsilon)))}{|f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon)|} \leq e^{4C|I|}\rho' = \rho,$$

o equivalentemente,

$$\frac{\lambda(f^{n_\varepsilon}(K \cap J_\varepsilon))}{|f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon)|} \geq 1 - \rho.$$

Pero como $f(K) \subset K$, lo anterior implica que

$$\frac{\lambda(K \cap f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon))}{|f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon)|} \geq 1 - \rho,$$

como queríamos demostrar. \square

El paso 4 conduce a la contradicción, proveniente de suponer $\lambda(K) > 0$, que necesitamos para probar el teorema 5.1, pues bastaría tomar ρ tal que $1 - \rho > \mu_0$, usar $|f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon)| \geq \sigma_0$, y recordar que si $|J| > \sigma_0$ entonces $D_m(K, J) \leq \mu_0$.

Observación 5.9. La demostración del teorema 5.1 se puede simplificar sustancialmente si añadimos la hipótesis de que f es de clase C^3 y tiene derivada schwarziana negativa fuera de $C(f)$. Esencialmente, el concepto de cadena bonita y los subsiguientes lema 5.4 y proposiciones 5.5 y 5.6 son innecesarios (la finitud de componentes de $A_0(f)$ puede demostrarse como en la observación 5.8, y el paso 1 tampoco hace falta). El paso 3 se puede demostrar de manera diferente, utilizando el principio de Koebe, exigiéndole adicionalmente a x_0 (no es restrictivo) que no esté en $AP(I)$, con lo que $\omega_f(x_0)$ será infinito, fijando $y_0 \in \omega_f(x_0)$ en $I \setminus B_{n_0}(f)$, y tomando σ_0 tan pequeño que y_0 esté a distancia mayor que $\frac{3}{2}\sigma_0$ de la frontera de $I \setminus B_{n_0}(f)$. Ahora procedemos como sigue: primero se elige $\{f^i(L)\}_{i=0}^{n-n_0}$ como en la anterior demostración del paso 3. Aunque no podemos garantizar $f^{n-n_0+1}(L) \subset T$, sí existe $R_1 \subset L$ conteniendo a x_0 tal que $f^{n-n_0+1}(R_1)$ es una de las componentes de $I \setminus B_{n_0}(f)$. Reiterando esta idea, vamos encontrando entornos R_k de x_0 , progresivamente más pequeños, de manera que $f^{n-n_0+k}(R_k)$ sea siempre una componente de $I \setminus B_{n_0}(f)$. Finalmente llegaremos a un k_0 adecuado de manera que $f^{n-n_0+k_0}(x_0)$ sea tan próximo a y_0 que $[f^{n-n_0+k_0}(x_0) - \frac{3}{2}\sigma_0, f^{n-n_0+k_0}(x_0) + \frac{3}{2}\sigma_0]$ esté en la correspondiente componente de $I \setminus B_{n_0}(f)$. Ahora basta tomar $n_\varepsilon := n - n_0 + k_0$ y $J_\varepsilon \subset R_{k_0}$ tal que $f^{n_\varepsilon}(J_\varepsilon) = [f^{n-n_0+k_0}(x_0) - \frac{1}{2}\sigma_0, f^{n-n_0+k_0}(x_0) + \frac{1}{2}\sigma_0]$, pues el principio de Koebe 4.12 garantiza que $e\text{Dist}(f^{n_\varepsilon}, J_\varepsilon) \leq e^2$.

Observemos por último que, debido a la proposición 4.6, en el caso con derivada schwarziana negativa obtenemos un resultado algo más fuerte que el del teorema 5.1: la órbita de casi todo punto acaba cayendo en alguna cuenca inmediata de atracción.

Observación 5.10. Aunque para simplificar la notación hemos optado por enunciar el teorema 5.1 para funciones de clase C^2 , la clase de diferenciabilidad de la función en los puntos críticos es en realidad irrelevante, pues siempre trabajamos lejos de ellos. En

particular, el teorema 5.1 también es válido para difeomorfismos de clase C^2 a trozos (por ejemplo para funciones afines a trozos), entendiendo que los puntos “críticos” son ahora los puntos en los que la función tiene derivadas laterales distintas. Por cierto: el caso afín a trozos es más simple incluso que el de la derivada schwarziana negativa, ya que la linealidad garantiza sin más que no tendremos distorsión en las iteradas.

5.2. Ejemplos

Mostramos a continuación algunos ejemplos (con la ayuda del software *Mathematica*, <https://www.wolfram.com/mathematica/>) que hacen patente la especial utilidad del teorema anterior cuando las funciones presentan derivada schwarziana negativa. De hecho, bajo las hipótesis del teorema 5.1, lo único que necesitamos es localizar las cuencas inmediatas de atracción, porque casi todo punto acabará cayendo en alguna de ellas. Más aún, para encontrarlas bastará, por el teorema 4.7, estudiar los iterados de los puntos críticos y los extremos del intervalo, y luego podremos determinarlas con exactitud usando el teorema 4.9.

Así pues, si definimos $W_0(f)$ como la unión de las cuencas inmediatas de atracción de todas las órbitas atractoras de f , nuestro reto será describir explícitamente $W_0(f)$. Además, consideramos $W_1(f) = f^{-1}(W_0(f)) \setminus W_0(f)$, es decir, $W_1(f)$ será el conjunto formado por los puntos que no están en $W_0(f)$ pero que caen en $W_0(f)$ en la primera iteración. En general, para $n > 1$ definimos $W_n(f) = f^{-n}(W_{n-1}(f))$. Todos estos conjuntos podrán ser localizados explícitamente en los ejemplos que veremos a continuación. Aprovechamos para recordar, al hilo de lo comentado en la introducción de este trabajo, que el teorema 5.1 es compatible con la existencia de caos (invisible) en el sentido de Li-Yorke; de hecho, todos los ejemplos que mostraremos poseen órbitas periódicas de periodo 3.

Notemos que en el segundo ejemplo trataremos con una función que presenta un punto atractor únicamente por la izquierda. Este ejemplo es especialmente digno de mención porque ninguna de las demostraciones del teorema 5.1 que existen en la literatura (salvo la del propio Mañé), al excluir la existencia de “semiatractores”, lo contemplan.

Ejemplo 5.11. Consideremos la función logística

$$f(x) = 3,84x(1 - x)$$

definida en el intervalo $[0, 1]$, cuya gráfica se muestra en la figura 5.2.

El único punto crítico que tiene la función es $c = \frac{1}{2}$, luego aplicando la proposición 4.2 se obtiene que $Sf < 0$ (ya que Df tiene una única raíz real). Ahora, por el teorema 4.7, si existe una órbita periódica atractora $\text{Orb}_f(p)$, su cuenca inmediata de atracción $V_f(\text{Orb}_f(p))$ contendrá al punto crítico o a algún extremo del intervalo. Esto último no es posible, porque 0 es un punto fijo repulsor y $f(1) = 0$. Estudiando el comportamiento del punto crítico

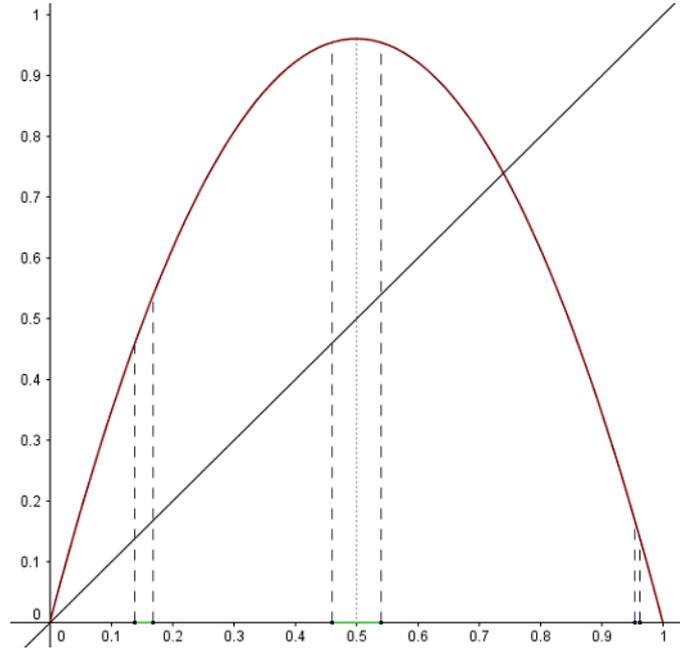


Figura 5.2: Gráfica de f en la que se encuentran delimitadas las componentes de $W_0(f)$.

c con el ordenador, vemos que en efecto este punto tiende hacia una órbita periódica de periodo 3. Por tanto, dibujamos y estudiamos la gráfica de f^3 (véase 5.3).

Calculamos los puntos fijos de f^3 , que son 8: dos puntos fijos de f , y 6 puntos periódicos de periodo 3. Por tanto se obtienen dos órbitas de periodo 3,

$$\begin{aligned} \{d_1, d_2, d_3\} &= \{0,1494069, 0,4880044, 0,9594474\}, \\ \{v_1, v_2, v_3\} &= \{0,1694338, 0,5403878, 0,9537363\}. \end{aligned}$$

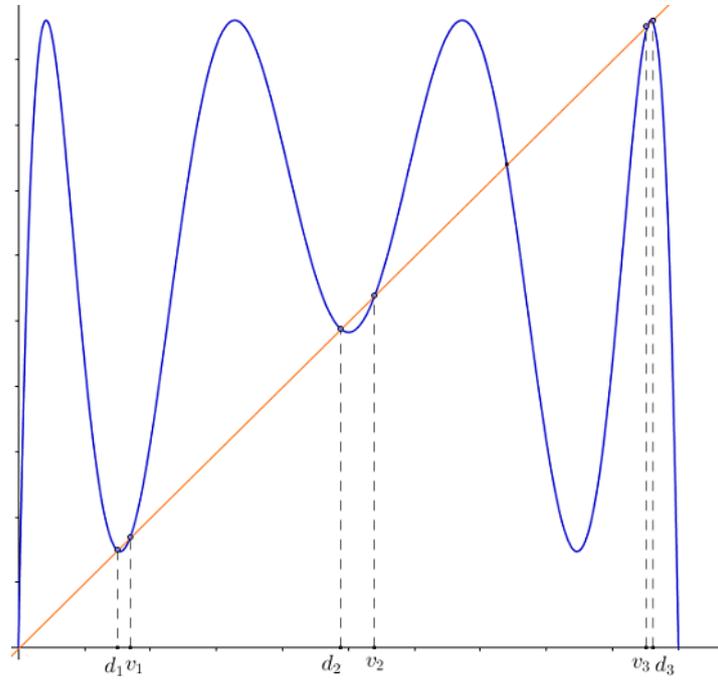
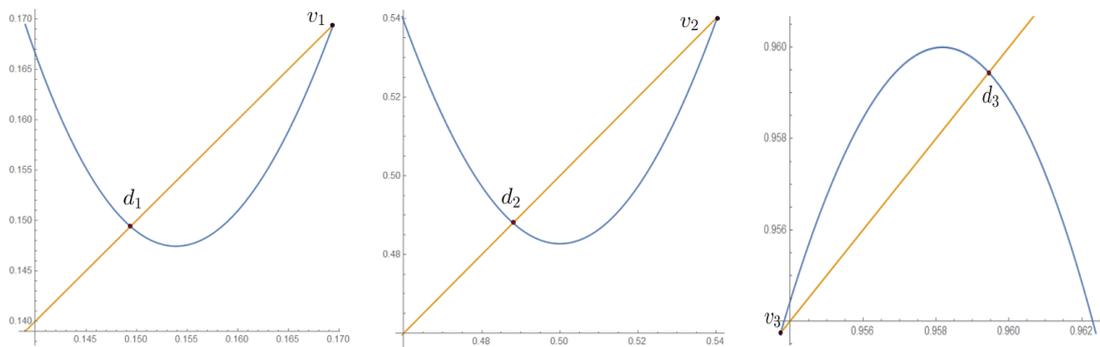
Ahora, utilizando

$$Df^r(p) = \prod_{q \in \text{Orb}_f(p)} Df(q)$$

se obtiene que $|Df(d_1)Df(d_2)Df(d_3)| < 1$, luego esta órbita es atractora (aunque esto ya lo habíamos intuido al iterar c ya que era atraído hacia esta órbita de periodo 3). Por otro lado, $|Df(v_1)Df(v_2)Df(v_3)| > 1$ y, por tanto, la órbita es repulsora.

Ahora, para calcular la cuenca inmediata de atracción de la órbita atractora $\{d_1, d_2, d_3\}$ estudiamos qué ocurre alrededor de cada d_i por separado (figura 5.4).

En primer lugar, para d_1 observamos que por la derecha la cuenca inmediata de atracción de dicho punto se puede agrandar como mucho hasta v_1 , que ya es un punto repulsor. Ahora, para saber cuál es el extremo izquierdo de dicha cuenca inmediata de atracción

Figura 5.3: Gráfica de f^3 .Figura 5.4: Gráfica de f^3 ampliada alrededor de cada d_i .

calculamos la antiimagen de v_1 en f^3 . De los 5 puntos que se obtienen, nos quedamos con la antiimagen más próxima a v_1 por la izquierda, que es el punto $u_1 = 0,139016$. Por tanto, nuestro candidato a $V_{f^3}(d_1)$ es (u_1, v_1) y tal es, de hecho, el caso. En efecto, por encontrarnos en las condiciones del teorema 4.9 (recordemos, proposición 4.3, que f^3 tiene derivada schwarziana negativa), $\text{Cl}(V_{f^3}(d_1))$ contendrá a $[u_1, v_1]$, pero v_1 no puede ser atraído por ser un punto repulsor y u_1 tampoco, ya que de lo contrario $f^3(u_1) = v_1$ también sería atraído.

Para d_2 se obtiene una situación análoga a la anterior. Calculamos el punto u_2 de manera que verifique $f^3(u_2) = v_2$ y además, de todas las antiimágenes de v_2 , sea la más próxima a este punto por la izquierda. Se obtiene entonces $u_2 = 0,459612$ y por el teorema 4.9 $V_{f^3}(d_2) = (u_2, v_2)$.

Por último, en el caso del punto d_3 observamos que por la izquierda la cuenca inmediata de atracción de dicho punto se puede agrandar como mucho hasta v_3 , que ya es un punto repulsor. Ahora, para saber cuál es el extremo derecho de dicha cuenca inmediata de atracción calculamos la antiimagen de v_3 en f^3 , y de todos los puntos que obtenemos nos quedamos con el que esté más próximo a v_3 por la derecha, que es $u_3 = 0,962383$. Finalmente $V_{f^3}(d_3) = (v_3, u_3)$.

Juntando todo lo anterior se obtiene que $V_f(\text{Orb}_f(d_1)) = (u_1, v_1) \cup (u_2, v_2) \cup (v_3, u_3)$ y claramente $W_0(f) = V_f(\text{Orb}_f(d_1))$. Además, $c \in (u_2, v_2)$. En suma:

- $Sf < 0$.
- Existe un entorno $U = (u_2, v_2)$ del punto crítico c tal que $U \subset \text{AP}(f)$.

Por tanto, aplicando el teorema 5.1, se obtiene que $\lambda(\text{AP}(f)) = |I|$, es decir, casi todo punto es asintóticamente periódico. Por contra, f es caótica en el sentido de Li-Yorke ya que, como hemos visto, tiene 6 puntos periódicos de periodo 3. Si el lector hace pruebas con el ordenador, eligiendo puntos al azar del intervalo $[0, 1]$ e iterándolos un número suficiente de veces, observará que tarde o temprano caen en $W_0(f)$ y a continuación son atraídos hacia $\{d_1, d_2, d_3\}$: ¡no hay forma de ver el caos!

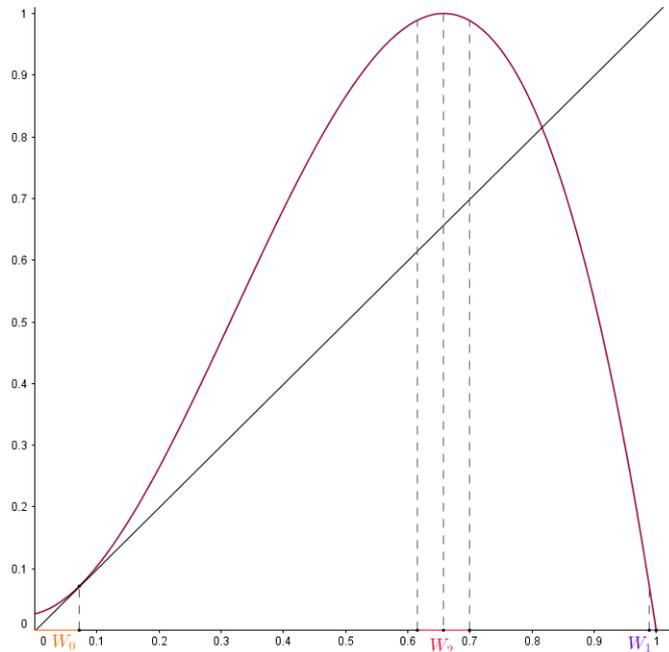
Ejemplo 5.12. Consideremos la función

$$g(x) = -\frac{4067709373}{644972544}x^3 + \frac{1301432797}{214990848}x^2 + \frac{48740867}{214990848}x + \frac{17188381}{644972644},$$

definida en el intervalo $[0, 1]$, cuya gráfica se muestra en la figura 5.5. Los coeficientes son bastante impresionantes, pero están elegidos para los puntos notables de la función sean racionales.

Comenzamos calculando los puntos críticos de la función, que son

$$c_1 = \frac{1663}{2527} \approx 0,658093 \quad \text{y} \quad c_2 = -\frac{4187}{229957}.$$

Figura 5.5: Gráfica de g .

Aplicando la proposición 4.2 se obtiene que $Sg < 0$. Consideraremos únicamente c_1 ya que estamos trabajando en el intervalo $[0, 1]$. Calculamos además los puntos fijos de la función, que son

$$p_1 = \frac{67}{931} \approx 0,07197 \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{3829}{4693} \approx 0,81589.$$

El punto fijo p_1 , que verifica $Dg(p_1) = 1$, es atractor únicamente por la izquierda, teniéndose claramente $V_g(p_1) = [0, p_1]$. Más aún, $g(c_1) = 1$ y $g(1) = 0$, por lo que el teorema 4.7 excluye la existencia de más órbitas atractoras. En resumen,

$$W_0(g) = [0, p_1].$$

Ahora, calculando la antiimagen de p_1 (ya sabemos que $g(1) = 0$) se obtiene $g(0,98883) = p_1$, luego $W_1(g) = [0,98883, 1]$. Volviendo a calcular las antiimágenes de los extremos de dicho intervalo se obtiene que $g(0,61541) = 0,9883 = g(0,69905)$ y $g(c_1) = 1$. Por tanto, $W_2(g) = [0,61541, 0,69905]$ y $c_1 \in W_2(g)$.

Entonces se verifica:

- $Sg < 0$.
- Existe un entorno $U = W_2(g)$ del punto crítico c_1 tal que $U \subset AP(g)$.

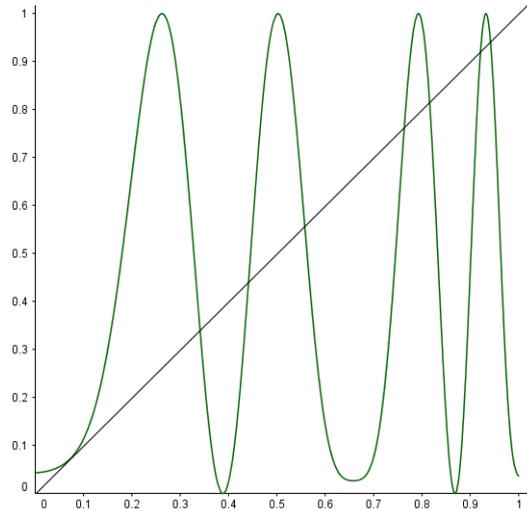


Figura 5.6: Gráfica de g^3 .

Luego, aplicando el teorema 5.1 se obtiene que $\lambda(\text{AP}(g)) = |I|$, es decir, casi todo punto es asintóticamente periódico. Como testimonia la gráfica 5.6 de la función g^3 , de nuevo hay puntos periódicos de periodo 3, y por tanto caos invisible.

Ejemplo 5.13. Por último consideramos la función

$$h(x) = \frac{57}{4}x^3 - \frac{108}{5}x^2 + \frac{167}{20}x$$

también definida en el intervalo $[0, 1]$, cuya gráfica se muestra a la izquierda de la figura 5.7.

Calculamos los dos puntos críticos de la función, que son

$$c_1 = \frac{1}{285}(144 - \sqrt{4871}) \approx 0,260377,$$

$$c_2 = \frac{1}{285}(144 + \sqrt{4871}) \approx 0,750149.$$

Aplicando la proposición 4.2 se obtiene que $Sh < 0$. Ahora, por el teorema 4.7, la cuenca inmediata de atracción de cada órbita atractora debe contener algún punto crítico o algún extremo del intervalo. Como los extremos del intervalo 0 y 1 son puntos fijos los podemos descartar. Veamos el comportamiento de los puntos críticos. Tras una serie de iteraciones con el ordenador, comprobamos que ambos puntos críticos son atraídos por una órbita de periodo 2. Por tanto, dibujamos y estudiamos la gráfica de h^2 (figura 5.7, derecha).

Calculamos los puntos fijos de h^2 , que son 9: tres puntos fijos de h y 6 puntos periódicos de periodo 2. Por tanto, existen 3 órbitas periódicas de periodo 2,

$$\{p_1, p_2\} = \{0,125905, 0,737344\},$$

$$\{q_1, q_2\} = \{0,141657, 0,789901\},$$

$$\{v_1, v_2\} = \{0,351287, 0,885485\}.$$

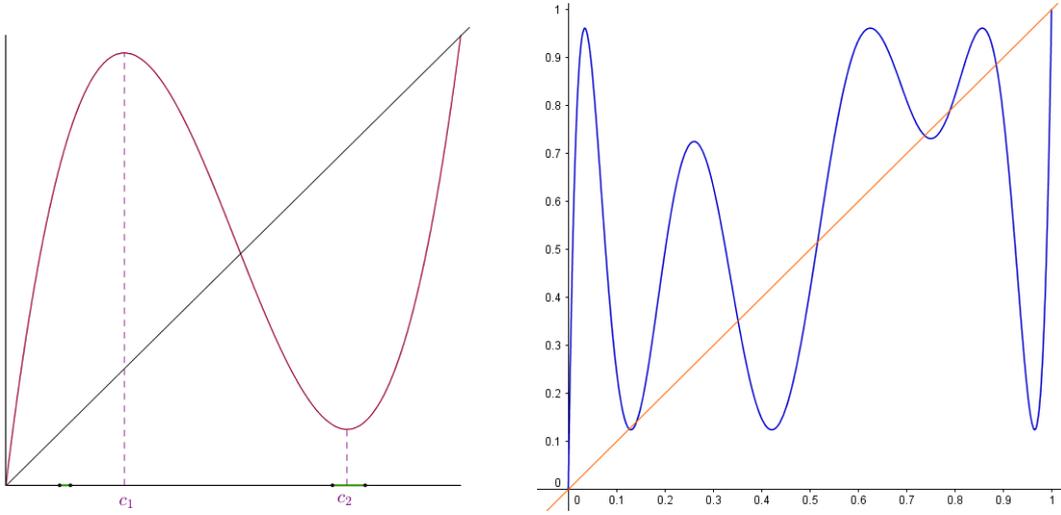


Figura 5.7: Gráficas de h (izquierda) y h^2 (derecha).

Ahora, $|Dh(p_1)Dh(p_2)| < 1$, luego esta órbita es atractora (además con el ordenador ya habíamos visto que era la que atraía a los puntos críticos) mientras que $|Dh(q_1)Dh(q_2)| > 1$ y $|Dh(v_1)Dh(v_2)| > 1$, es decir, las otras dos órbitas son repulsoras.

Para calcular la cuenca inmediata de atracción de la órbita atractora $\{p_1, p_2\}$ estudiamos qué ocurre alrededor de cada p_i por separado (figura 5.8).

Observamos que tanto en el caso de p_1 como en p_2 la cuenca inmediata de atracción se puede agrandar por la derecha como mucho hasta q_1 y q_2 respectivamente, ya que ambos son puntos repulsores. Ahora, para saber cuáles son los extremos izquierdos de las cuencas, calculamos las antiimágenes de q_1 y q_2 en h^2 , quedándonos con las más próximas a estos puntos por la izquierda. Así obtenemos $a_1 = 0,118042$ y $a_2 = 0,708116$ verificando $h^2(a_1) = q_1$ y $h^2(a_2) = q_2$. Por tanto, por el teorema 4.9, se obtiene que $V_{h^2}(p_1) = (a_1, q_1)$ y $V_{h^2}(p_2) = (a_2, q_2)$, luego

$$V_h(\{p_1, p_2\}) = (a_1, q_1) \cup (a_2, q_2) = W_0(h).$$

Además, se verifica que $c_2 \in (a_2, q_2) \subset W_0(h)$, $h((a_1, q_1)) = (a_2, q_2)$ (ya que $h(a_1) = a_2$) y $h((a_2, q_2)) \subset (a_1, q_1)$ (ya que $h(a_2) = q_1$).

Ahora, para calcular $W_1(h)$ averiguamos las antiimágenes de los extremos de las componentes de $W_0(h)$. La antiimagen de (a_1, q_1) es el intervalo $(b_1, t_1) = (0,0146895, 0,0177724)$, ya que $h(b_1) = a_1$ y $h(t_1) = q_1$ (las otras dos antiimágenes de q_1 eran a_2 y q_2). Por otro lado se obtiene que $h((b_2, t_2)) = h((b_3, t_3)) = (a_2, q_2)$, donde $(b_2, t_2) = (0,4029, 0,439158)$ y $(b_3, t_3) = (0,95859, 0,971233)$, ya que $h(t_2) = h(b_3) = a_2$ (la otra antiimagen de a_2 era

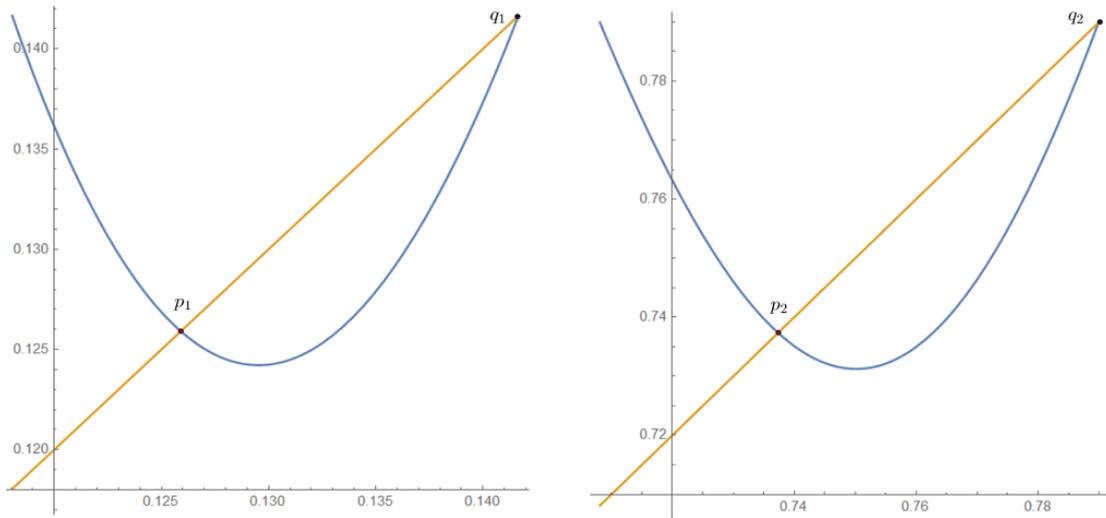


Figura 5.8: Gráfica de h^2 ampliada alrededor de cada p_i .

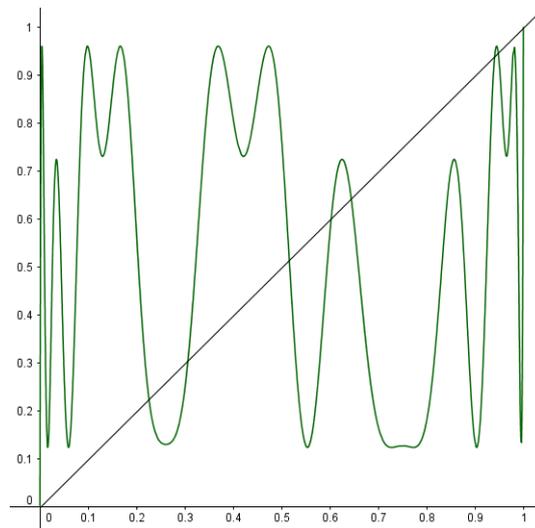


Figura 5.9: Gráfica de h^3 .

a_1) y $h(b_2) = h(t_3) = q_2$ (la otra antiimagen de q_2 era q_1). Por tanto,

$$W_1(h) = (b_1, t_1) \cup (b_2, t_2) \cup (b_3, t_3).$$

Por último, calculando las antiimágenes de los extremos de las componentes de $W_1(h)$ para obtener $W_2(f)$ se encuentra

$$\begin{aligned} W_2(h) = & (0,001767, 0,00214) \cup (0,05608, 0,62187) \cup (0,24446, 0,276646) \\ & \cup (0,54605, 0,56076) \cup (0,898934, 0,907551) \cup (0,994683, 0,996322), \end{aligned}$$

verificándose que $c_1 \in W_2(h)$. Así pues:

- $Sh < 0$.
- Existen entornos $U \subset W_2(h)$ de c_1 y $V \subset W_0(h)$ de c_2 tales que $U, V \subset AP(h)$.

Luego, aplicando el teorema 5.1, se obtiene que $\lambda(AP(h)) = |I|$. Una vez más hay puntos periódicos de periodo 3 y por tanto caos invisible, véase la figura 5.9.

Bibliografía

- [1] D. J. Allwright. *Hypergraphic functions and bifurcations in recurrence relations*. SIAM J. Appl. Math., Vol. 34 (1978), pp. 687–691.
- [2] L. S. Block y W. A. Coppel. *Dynamics in one dimension*. Springer-Verlag. Berlín, 1992.
- [3] H. Bruin y V. Jiménez López. *On the Lebesgue measure of Li-Yorke pairs for interval maps*. Comm. Math. Phys., Vol. 299 (2010), pp. 523–560.
- [4] D. L. Cohn. *Measure theory*. Birkhäuser, Boston, 1980.
- [5] P. Collet y J.-P. Eckmann. *Iterated maps on the interval as dynamical Systems*. Birkhäuser. Boston, 1980.
- [6] A. Denjoy. *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*. J. Math. Pures Appl., Vol 11 (1932), pp. 333–375.
- [7] R. L. Devaney. *An Introduction to chaotic dynamical systems*, segunda edición. Addison-Wesley. Redwood City, 1989.
- [8] J. Guckenheimer. *Sensitive dependence to initial conditions for one-dimensional maps*. Comm. Math. Phys., Vol. 70 (1979), pp. 133–160.
- [9] J. Guckenheimer. *Limit sets of S -unimodal maps with zero entropy*. Comm. Math. Phys., Vol. 110 (1987), pp. 655–659.
- [10] V. Jiménez López y E. Parreño. *$L.A.S.$ and negative Schwarzian derivative do not imply $G.A.S.$ in Clark's equation*. J. Dynam. Differential Equations, Vol. 28 (2016), pp. 339–374.
- [11] O. S. Kozlovski. *Getting rid of the negative Schwarzian derivative condition*. Ann. of Math. (2), Vol. 152 (2000), pp. 743–762.
- [12] T.-Y. Li y J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. Amer. Math. Monthly, Vol. 82 (1975), pp. 985–992.
- [13] E. N. Lorenz. *The predictability of hydrodynamic flow*. Trans. New York Acad. Sci., Ser. 2, Vol. 25 (1963), pp. 409–432.

- [14] R. Mañé. *Hiperbolicity, sinks and measure in one dimensional dynamics*. Commun. Math. Phys., Vol. 100 (1985), pp. 495–524. *Erratum*: Comm. Math. Phys., Vol. 112 (1987), pp. 721–724.
- [15] M. Martens, W. de Melo y S. van Strien. *Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics*. Acta Math., Vol. 168 (1992), pp. 273–318.
- [16] R. M. May. *Biological populations with nonoverlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos*. Science, Vol 186 (1974), pp. 645–647.
- [17] R. M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, Vol. 261 (1976), pp. 459–467.
- [18] W. de Melo y S. van Strien. *One-dimensional dynamics*. Springer-Verlag. Berlín, 1993.
- [19] M. Misiurewicz. *Absolutely continuous measures*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., Vol. 53 (1981), pp. 17–52.
- [20] L. Nusse. *Chaos, yet no chance to get lost*. Tesis doctoral, Universiteit Utrecht, 1983.
- [21] A. J. Schwartz. *A generalization of a Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds*. Amer. J. Math., Vol. 85 (1963), pp. 453–458. *Erratum*: Amer. J. Math., Vol. 85 (1963), p. 753.
- [22] A. N. Sharkovsky. *Coexistencia de ciclos de una aplicación continua de la recta en sí misma*. Ukrain. Mat. Ž., Vol. 16 (1964), pp. 61–71. (En ruso; traducido al inglés en Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., Vol. 5 (1995), pp. 1263–1273.)
- [23] A. N. Sharkovsky, Yu. L. Maštrenko y E. Yu Romanenko. *Difference equations and their applications*. Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [24] D. Singer. *Stable orbits and bifurcations of maps on the interval*. SIAM J. Appl. Math., Vol. 35 (1978), pp. 260–267.
- [25] S. van Strien. *On the bifurcations creating horseshoes*. En *Dynamical Systems and Turbulence*, D. A. Rand y L.-S. Young (eds.). Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol. 898 (1979), pp. 316–351.
- [26] S. van Strien. *Hiperbolicity and invariant measures for general C^2 interval maps satisfying the Misiurewicz Condition*. Comm. Math. Phys., Vol. 128 (1990), pp. 437–495.
- [27] L. Zajicek. *An elementary proof of the one-dimensional density theorem*. Amer. Math. Monthly, Vol. 86 (1979), pp. 297–298.