UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

FÓRMULA DE BOCHNER - LICHNEROWICZ Y APLICACIONES

Dña. EVA MARÍA ALARCÓN DÍAZ

Tutor: Dr. Luis José Alías Linares

Máster Universitario en Matemática Avanzada

Murcia, julio de dos mil dieciséis.

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Eva María Alarcón Díaz, autora del TFM titulado "*Fórmula de Bochner-Lichnerowicz y aplicaciones*", bajo la tutela del profesor **Luis José Alías Linares**,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 5 de Julio de 2016

Fdo.: Eva María Alarcón Díaz

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha depositado una copia firmada de esta declaración.

Índice general

Introducción

Los valores propios del operador laplaciano han ocupado siempre un lugar privilegiado en las investigaciones de Análisis Geométrico. Además, su desarrollo se produjo tan rápidamente que, en 1984, Chavel sintió la necesidad de escribir [Ch1] para facilitar el estudio de esta rama a los que quisieran iniciarse, ya que consideraba que en los últimos quince años se había producido un avance tan grande de temas y técnicas que era necesario actualizar el libro de referencia de dicha época [BGM], publicado en 1971 por Berger, Gauduchon y Mazet.

Hoy en día, el estudio de los valores propios sigue siendo una de las principales ramas de investigación, por lo que es natural preguntarnos a qué se debe el interés en este tema. Una de sus principales aplicaciones es el hecho de que nos permiten obtener información sobre las variedades con las que estamos trabajando. Como ejemplo puede tomarse el teorema de Lichnerowicz y Obata (véase [Li2] y [Ob]) en el que, bajo unas ciertas hipótesis, se obtiene que el primer valor propio no nulo satisface una desigualdad que se convierte en igualdad en caso de estar trabajando con una esfera. Resultados así no serían posibles sin la fórmula introducida por Bochner en [Bo]. Dicha fórmula, conocida comúnmente como fórmula de Bochner-Lichnerowicz, da lugar a otras muchas (conocidas bajo el mismo nombre) que a su vez dan lugar a diversas situaciones y aplicaciones.

El objetivo de esta memoria será estudiar la fórmula de Bochner-Lichnerowicz y ver algunas de sus aplicaciones más importantes. Tendrá especial importancia la fórmula de Reilly (véase [Re1]), puesto que nos permitirá descubrir aún más aplicaciones, entre las cuales tendremos varias estimaciones del primer valor propio no nulo del operador laplaciano.

En cuanto a la estructura de la memoria, encontraremos cinco capítulos que están al mismo tiempo diferenciados y relacionados entre sí mediante la fórmula de Bochner-Lichnerowicz. A continuación, veremos una descripción de cada uno de estos capítulos y sus secciones.

En el primer capítulo, dividido en cinco secciones, se han englobado todos aquellos conceptos y resultados que, aunque no forman parte estrictamente del objetivo propuesto, son fundamentales para poder llevarlo a cabo.

La primera sección comienza con el concepto de métrica y variedad riemanniana, acabando con la conexión de Levi-Civita. Después, en la segunda sección se definen los operadores asociados a la métrica que van a usarse durante el resto de la memoria y cuyas definiciones y propiedades conviene tener claras. En la tercera sección veremos conceptos básicos sobre los valores propios del operador laplaciano, de gran importancia si queremos hacer estimaciones de su primer valor propio no nulo. Por último, en las dos secciones restantes aparecerán definiciones y fórmulas relacionadas con la curvatura y las hipersuperficies, prestando especial atención al cálculo de algunos de los operadores estudiados en la segunda sección aplicados a funciones concretas.

En el segundo capítulo, compuesto por dos secciones, aparecerá la fórmula que da nombre a la memoria. Concretamente, en la primera sección veremos cuatro versiones de dicha fórmula y demostraremos cada una de ellas. En la segunda, veremos aplicaciones a los campos armónicos y los campos de Killing, llegando a demostrar que si se tiene una variedad compacta con curvatura de Ricci definida positiva (resp. definida negativa), no existen campos armónicos (resp. de Killing) distintos del campo $X = 0$.

El tercer capítulo, dividido en tres secciones, tiene como objetivo demostrar el teorema de Lichnerowicz y Obata mencionado anteriormente. Para ello, en la primera sección estudiaremos los valores propios del operador laplaciano en la esfera. Una vez demostrado el teorema que los caracteriza, en la segunda sección pasaremos a demostrar los teoremas de Myers y Cheng, necesarios para cumplir con el objetivo de este capítulo. Por último, en la tercera sección demostraremos el teorema que queríamos. Cabe destacar que para demostrar la caracterización tomaremos dos caminos, el que usa los teoremas de Myers y Cheng (véase [Li1]), y el original de Obata (véase [Ob]).

Durante el cuarto capítulo estudiaremos la fórmula de Reilly. Este capítulo estará dividido en cuatro secciones de entre las cuales la primera servirá como preliminares, pues introduce las variedades con borde que son fundamentales para la fórmula. Una vez demostrada ésta durante la segunda sección, pasaremos a ver dos de sus principales aplicaciones: el teorema de Aleksandrov (véase [Al1]) y el teorema de Ros (véase [Ro2]). Estos dos teoremas tienen gran importancia, puesto que el teorema de Aleksandrov demuestra que las únicas hipersuperficies compactas con curvatura media constante embebidas en el espacio euclídeo son las esferas y el teorema de Ros demuestra que sucede lo mismo para curvatura escalar constante. Una vez demostrados estos dos resultados, en la cuarta sección veremos dos generalizaciones del teorema de Lichnerowicz y Obata para el caso de variedades con borde. La primera de las generalizaciones, demostrada por Reilly en [Re1], es para cuando la función propia asociada al primer valor propio no nulo cumple las condiciones de frontera de Dirichlet. En cambio, la segunda es para cuando se satisfacen las condiciones de frontera de Neumann. El primero en demostrar esta segunda generalización fue Escobar en [Es].

Por último, en el quinto capítulo combinaremos los resultados anteriores (y demostraremos algunos nuevos) para obtener varias estimaciones del primer valor propio no nulo del laplaciano. De entre los resultados usados para llegar a dichas estimaciones destacan la primera y segunda fórmula de Minkowski y la llamada fórmula del volumen. El capítulo estará dividido en cuatro secciones cuyos nombres vienen dados por los artículos en los que se centran. En primer lugar, se estudiará un artículo de Reilly, [Re2], en el que el autor usa su fórmula para llegar a varias estimaciones del primer valor propio trabajando con hipersuperficies inmersas en el espacio euclídeo. En segundo lugar usaremos un artículo de Garay, [Ga], en el que de nuevo se obtienen estimaciones aunque en esta ocasión trabajando con ovaloides. La tercera sección, debida al artículo [CW] de Choi y Wang, está centrada en obtener estimaciones para hipersuperficies minimales. Para finalizar, estudiaremos el artículo [De] de Deshhmukh en el que se demuestra que si el primer valor propio satisface una determinada desigualdad entonces la variedad es isométrica a una esfera.

Capítulo 1

Preliminares

Vamos a comenzar recordando algunos conceptos y resultados que, aunque posiblemente sean conocidos por los lectores, conviene tenerlos en mente para que la lectura del resto de capítulos no se vea dificultada por contenidos que realmente no forman parte del objetivo central de esta memoria. Sin embargo, no me detendré mucho en ellos ni en sus demostraciones, puesto que han sido ampliamente tratados durante el Grado en Matemáticas y el Máster en Matemática Avanzada de la Universidad de Murcia.

A lo largo de la memoria usaremos la notación habitual para referirnos al espacio euclídeo de dimensión n, $\mathbb{R}^n$, y a la norma euclídea. Asimismo, dado un vector $x \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por x_i a sus coordenadas (respecto de la base canónica) y escribiremos $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Por otro lado, para las esferas de dimensión n usaremos la notación usual en la que $\mathbb{S}^n(c, r)$ es la esfera de centro c y radio r. Además, en el caso concreto de que el centro sea el origen de coordenadas denotaremos dicha esfera por $\mathbb{S}^n(r)$. También tendremos que tener en cuenta que, durante toda la memoria, vamos a considerar que las variedades con las que estamos trabajando son siempre conexas, incluso cuando estemos tratando con hipersuperficies o sus variedades ambiente.

1.1. Geometría riemanniana

Todos los resultados de la memoria van a girar en torno a variedades riemannianas, por lo que a continuación recordaremos su definición. En esta sección también veremos qué es una conexión y qué características cumple la conexión de Levi-Civita. Para encontrar explicaciones más detalladas puede consultarse [On].

Definición 1.1. Dada una variedad diferenciable M, decimos que g es una *métrica* (o un *tensor métrico*) en M si es un campo tensorial de tipo $(0, 2)$, no degenerado, simétrico y con índice constante.

Es decir, podemos ver g como una aplicación diferenciable que a cada punto $p \in M$ le asigna un producto escalar g_p en el espacio tangente T_pM de manera que el índice de cada g_p es el mismo para todo $p \in M$.

Definición 1.2. Decimos que (M^n, g) es una *variedad semi-riemanniana* de dimensión n si M es una variedad diferenciable de dimensión n equipada con una métrica g.

De esta manera, cuando estemos hablando de una variedad semi-riemanniana nos estaremos refiriendo a un par ordenado (M, g), aunque para simplificar la notación, cuando la métrica esté clara nos referiremos a ella simplemente como M.

Como hemos visto, dada una métrica g en una variedad M, sucede que todos los productos escalares g_p con $p \in M$ tienen un índice común. Llamaremos *índice de* M a dicho número.

El índice de una variedad M puede tomar valores entre 0 y la dimensión de la variedad. Durante la memoria trabajaremos con el caso particular en el que es igual a cero, es decir, cuando tenemos una *métrica riemanniana*.

Definición 1.3. Decimos que (M^n, g) es una *variedad riemanniana* de dimensión n si M es una variedad diferenciable de dimensión n y g es una métrica riemanniana, es decir, una forma bilineal, simétrica y definida positiva.

Durante toda la memoria consideraremos que estamos trabajando con la métrica riemanniana, por lo que, al estar clara la métrica g y con el objetivo de simplificar la notación, usaremos la notación $\langle \, , \, \rangle$ para hacer referencia a dicha métrica. Es decir,

$$\langle v, w\rangle = g(v, w) \quad \text{si} \quad v, w \in T_pM, \text{ y}$$

$$\langle X, Y\rangle = g(X, Y) \quad \text{si} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A continuación, dados dos campos de vectores X e Y en una variedad riemanniana M, nos gustaría definir un nuevo campo de vectores, $\nabla_X Y$, cuyo valor en cada punto $p \in M$ exprese cómo cambia Y en la dirección indicada por X_p.

Definición 1.4. Una *conexión* ∇ en una variedad riemanniana M es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ satisface

1) $\nabla_X Y := \nabla(X, Y)$ es $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal en la primera variable,

2) $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en la segunda variable, y

3) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ (regla de Leibniz).

Llamaremos a $\nabla_X Y$ *derivada covariante* de Y con respecto a X para la conexión ∇.

Si observamos detalladamente las condiciones de la Definición 1.4, podemos ver que la condición *1)* nos asegura que esta derivada covariante es tensorial en X, por lo que para un vector tangente $v \in T_pM$ tenemos un vector tangente bien definido $\nabla_v Y = (\nabla_X Y)_p$ con X un campo de vectores tal que $X_p = v$. Por otro lado, *3)* muestra que $\nabla_X Y$ no es tensorial en Y.

Una vez visto esto, podemos refinar un poco más nuestro objetivo. Se trata de ver que para cada variedad riemanniana existe una única conexión que satisface dos nuevas condiciones, *4)* y *5)*, además de las tres ya vistas. Sin embargo, antes tenemos que ver una definición.

Definición 1.5. Dados dos campos diferenciables X e Y sobre una variedad diferenciable M, definimos el *corchete de Lie* de X e Y, $[X, Y]$, como el único campo de vectores que cumple

$$[X, Y] = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Teorema 1.6. *Dada una variedad riemanniana M, existe una única conexión ∇ tal que para cualesquiera $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ satisface*

4) $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, *y*

5) $X(\langle Y, Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$.

La conexión ∇ dada por el Teorema 1.6 es la denominada *conexión de Levi-Civita* de M, y viene caracterizada por la *fórmula de Koszul*:

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = {} & X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle \\ & + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle, \end{aligned}$$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

1.2. Operadores diferenciables asociados a la métrica

A continuación, veamos algunos operadores que vamos a usar durante la memoria con mucha frecuencia. Para ello, vamos a situarnos en el ambiente de una variedad riemanniana (M^n, g) de dimensión n donde, recordemos, usaremos la notación $\langle\ ,\ \rangle$ para referirnos a g. Como referencias para esta sección pueden consultarse [Ch2], [Le2] y [On].

Definición 1.7. Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos la *diferencial* de f de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rccl} df: & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & X & \longmapsto & df(X) = X(f) \end{array}$$

Definición 1.8. Dada una uno-forma $\theta \in \mathfrak{X}^*(M) = \Lambda^1(M)$, definimos el *isomorfismo sostenido*, $\theta^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$, como el único campo tal que para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se verifica

$$\langle \theta^\sharp, X\rangle = \theta(X).$$

Definición 1.9. Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos el *isomorfismo bemol*, $X^\flat \in \mathfrak{X}^*(M)$, como el inverso del isomorfismo sostenido. Por tanto, es la única uno-forma tal que

$$X^\flat(Y) = \langle X, Y\rangle$$

para todo campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definición 1.10. Dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, definimos el *gradiente* de f, denotado por ∇f, como $\nabla f = (df)^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$. Es decir, el gradiente de f es el único campo que cumple

$$\langle \nabla f, X\rangle = df(X) = X(f)$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Es importante destacar que, aunque usamos la misma notación para la conexión de Levi-Civita y para el gradiente de una función, tenemos la seguridad de que esto no causará confusión alguna, ya que ∇ se referirá a un operador o a otro dependiendo de sobre quién actúe.

Nuestro siguiente objetivo es estudiar el operador divergencia. Sin embargo, antes conviene recordar qué es un sistema de referencia ortonormal y cómo se calcula la traza de un campo de endomorfismos.

Definición 1.11. Para todo $p \in M$ se cumple que existe un entorno $\mathcal{U}$ de p en M y campos $E_1, \ldots, E_n \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para todo $q \in \mathcal{U}$, $\{E_1(q), \ldots, E_n(q)\}$ es una base ortonormal de T_qM a la que llamaremos *sistema de referencia ortonormal local*.

Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y un sistema de referencia ortonormal local $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$ definido en un entorno $\mathcal{U}$ de M podemos, para cada $q \in \mathcal{U}$, expresar el campo en coordenadas. Por ser E una base, $X(q) = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i(q)$ con $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, multiplicando por $E_k(q)$ en ambos lados de la igualdad y usando que la base es ortonormal, obtenemos que $\lambda_k = \langle X(q), E_k(q)\rangle$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. Por tanto, nuestra *expresión (local) del campo en coordenadas* es

$$X = \sum_{i=1}^n \langle X, E_i\rangle E_i.$$

Ahora, para ver qué es la traza de un campo de endomorfismos, vamos a recordar brevemente algunas ideas. Supongamos que tenemos una aplicación $B : T_pM \longrightarrow T_pM$ y una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ del T_pM, entonces sabemos que

$$B(e_j) = \sum_{i=1}^n b_{ij} e_i \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^n b_{ii}. \tag{1.1}$$

Si además la base es ortonormal, entonces multiplicando por e_k en ambos lados de la primera igualdad de (1.1), obtenemos

$$B(e_j) = \sum_{i=1}^n \langle B(e_j), e_i\rangle e_i \quad \text{y} \quad \operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \langle B(e_i), e_i\rangle.$$

En el caso de que tengamos un campo de endomorfismos $B : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ con sistema de referencia ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ y que sea $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal, podemos obtener una expresión análoga para la traza:

$$\operatorname{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \langle B(E_i), E_i\rangle.$$

Una vez recordado esto, estamos en condiciones de ver la definición de divergencia de un campo.

Definición 1.12. Se define la *divergencia* de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ como

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{div} : & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & X & \longmapsto & \operatorname{div} X = \operatorname{tr}(\nabla X) \end{array}$$

donde ∇X es el siguiente endomorfismo $\mathcal{C}^\infty(M)$-lineal:

$$\begin{array}{rccc} \nabla X: & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & Y & \longmapsto & \nabla_Y X \end{array}$$

Teniendo en cuenta los comentarios hechos sobre la traza, la divergencia de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se puede expresar en coordenadas de la siguiente manera:

$$\mathrm{div}X = \mathrm{tr}(\nabla X) = \mathrm{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle. \tag{1.2}$$

Proposición 1.13. *La divergencia cumple las siguientes dos propiedades:*

1) $\mathrm{div}(X+Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y$ *para todo* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

2) $\mathrm{div}(fX) = X(f) + f\mathrm{div}X$ *para todo* $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Demostración. La primera propiedad es evidente, puesto que

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(X+Y) &= \mathrm{tr}(\nabla(X+Y)) = \mathrm{tr}(\nabla X + \nabla Y) \\ &= \mathrm{tr}(\nabla X) + \mathrm{tr}(\nabla Y) = \mathrm{div}X + \mathrm{div}Y. \end{aligned}$$

Para demostrar la segunda propiedad, basta con escribir la divergencia en coordenadas y usar la regla de Leibniz.

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(fX) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(fX), E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle E_i(f)X, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle f\nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} E_i(f) \langle X, E_i \rangle + f \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle X, E_i(f)E_i \rangle + f\mathrm{div}X = \langle X, \sum_{i=1}^{n} E_i(f)E_i \rangle + f\mathrm{div}X \\ &= \langle X, \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla f, E_i \rangle E_i \rangle + f\mathrm{div}X = \langle X, \nabla f \rangle + f\mathrm{div}X \\ &= X(f) + f\mathrm{div}X. \end{aligned}$$ □

A lo largo de esta memoria aparecerán otros dos operadores de gran importancia y que por tanto conviene que sepamos: el laplaciano y el hessiano.

Definición 1.14. Se define el operador *laplaciano* como

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & f & \longmapsto & \Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) \end{array}$$

El laplaciano de una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se puede expresar en coordenadas usando la expresión en coordenadas de la divergencia (1.2).

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{tr}(\nabla(\nabla f)) = \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle.$$

Para trabajar con el operador laplaciano nos será muy útil conocer algunas de sus propiedades. En particular, estudiaremos cómo se comporta con el producto y la composición de funciones.

Proposición 1.15. *Sean $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Entonces, el operador laplaciano cumple las siguientes propiedades:*

1) $\Delta(f \cdot g) = (\Delta f)g + f(\Delta g) + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle$, *y*

2) $\Delta \phi(f) = \phi'(f)\Delta f + \phi''(f)|\nabla f|^2$.

Demostración. Dadas $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ sabemos que, por definición,

$$\Delta(f \cdot g) = \operatorname{div}(\nabla(f \cdot g)),$$

así que necesitaremos calcular el gradiente del producto. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ un campo, entonces

$$\begin{aligned} \langle X, \nabla(f \cdot g) \rangle &= X(f \cdot g) = X(f)g + fX(g) = \langle X, \nabla f \rangle g + f \langle X, \nabla g \rangle \\ &= \langle X, g\nabla f \rangle + \langle X, f\nabla g \rangle = \langle X, g\nabla f + f\nabla g \rangle. \end{aligned}$$

Como esto es para cualquier $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces $\nabla(f \cdot g) = g\nabla f + f\nabla g$. Ahora, usando las propiedades de la divergencia de la Proposición 1.13, podemos obtener el resultado que queríamos, puesto que

$$\begin{aligned} \Delta(f \cdot g) &= \operatorname{div}(g\nabla f + f\nabla g) = \operatorname{div}(g\nabla f) + \operatorname{div}(f\nabla g) \\ &= (\nabla f)(g) + g\operatorname{div}(\nabla f) + (\nabla g)(f) + f\operatorname{div}(\nabla g) \\ &= 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta f + f\Delta g. \end{aligned}$$

Para la segunda propiedad, de nuevo tendremos que calcular primero un gradiente. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\langle X, \nabla\phi(f) \rangle = X(\phi(f)) = \phi'(f) \cdot X(f) = \phi'(f)\langle X, \nabla f \rangle = \langle X, \phi'(f)\nabla f \rangle.$$

Como esto último es para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces obtenemos que $\nabla\phi(f) = \phi'(f)\nabla f$. Así, usando la Proposición 1.13, ya podemos calcular el operador laplaciano de la composición de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(f) &= \operatorname{div}(\phi'(f)\nabla f) = \nabla f(\phi'(f)) + \phi'(f)\operatorname{div}(\nabla f) \\ &= \phi''(f)\nabla f(f) + \phi'(f)\Delta f = \phi''(f)\langle \nabla f, \nabla f \rangle + \phi'(f)\Delta f \\ &= \phi''(f)|\nabla f|^2 + \phi'(f)\Delta f. \end{aligned}$$

□

Definición 1.16. Se define el operador *hessiano* como

$$\begin{array}{rccl} \nabla^2 f: & \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ & (X,Y) & \longmapsto & \nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle \end{array}$$

Dada una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, el operador laplaciano puede expresarse en función del operador hessiano de la siguiente forma:

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f(E_i, E_i) = \operatorname{tr}(\nabla^2 f).$$

Proposición 1.17. *El operador hessiano es simétrico. Es decir,*

$$\nabla^2 f(X,Y) = \nabla^2 f(Y,X)$$

para cualquier par de campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Demostración. En primer lugar, usando la propiedad *5)* del Teorema 1.6 obtenemos que, para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se satisface

$$\begin{aligned} \nabla^2 f(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle = X(\langle \nabla f, Y\rangle) - \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle \\ &= X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f). \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\nabla^2 f(Y,X) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f).$$

Por tanto, tendremos que el hessiano será simétrico si se verifica

$$X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f) = Y(X(f)) - (\nabla_Y X)(f) \tag{1.3}$$

para cualesquiera $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Sin embargo, (1.3) es cierto por la propiedad *4)* del Teorema 1.6. □

1.3. Valores propios del operador laplaciano

Tal y como ya se comentó en la Sección 1.2, el operador laplaciano será importante en esta memoria. Sin embargo, lo que más nos importará de él será cómo se comportan sus valores propios, concretamente el primer valor propio no nulo. Para más detalles de lo expuesto aquí pueden consultarse las referencias [BGM], [Ch1] y [Ro1].

En toda esta sección consideraremos que, además de lo ya supuesto, nuestra variedad riemanniana M^n es compacta. Además, recordemos que $L^2(M)$ es el espacio de las funciones medibles en M para las cuales

$$\int_M |f|^2 \, \mathrm{d}M < +\infty.$$

Recordemos también que en $L^2(M)$ tenemos el producto interno usual y la norma que éste induce dados por

$$(f, h) = \int_M f \cdot h \, \mathrm{d}M \quad \text{y} \quad |f|^2 = (f, f).$$

Definición 1.18. Decimos que un número real λ es un *valor propio* del operador laplaciano si existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, $f \neq 0$, tal que

$$\Delta f + \lambda f = 0,$$

en tal caso diremos que f es la *función propia* asociada al valor propio λ. Además, llamaremos *espectro* de la variedad, $\mathrm{Spec}(M)$, al conjunto de todos los valores propios del operador laplaciano.

Definición 1.19. El conjunto de las funciones propias asociadas a un mismo valor propio λ forma un espacio vectorial real, $\mathrm{V}_\lambda(M)$, al que llamaremos *subespacio propio* de $\mathcal{C}^\infty(M)$ asociado a λ. Asimismo, llamaremos *multiplicidad* de λ a la dimensión de este subespacio $\mathrm{V}_\lambda(M)$.

Teorema 1.20 (Teorema de la divergencia)**.** *Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, se verifica lo siguiente:*

$$\int_M \mathrm{div} X \, \mathrm{d}M = 0.$$

Proposición 1.21. *El operador laplaciano Δ es autoadjunto con la norma definida en $L^2(M)$.*

Demostración. Usando el teorema de la divergencia (Teorema 1.20) junto con la Proposición 1.13, sabemos que

$$0 = \int_M \mathrm{div}(f \nabla g) \, \mathrm{d}M = \int_M \left(\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g \right) \, \mathrm{d}M.$$

Entonces,

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, \mathrm{d}M = - \int_M f \Delta g \, \mathrm{d}M.$$

Si trabajamos de forma análoga con $\mathrm{div}(g\nabla f)$ obtenemos

$$\int_M \langle \nabla f, \nabla g\rangle \, \mathrm{d}M = -\int_M g\Delta f \, \mathrm{d}M.$$

Entonces,

$$(f, \Delta g) = \int_M f\Delta g \quad \mathrm{d}M = -\int_M \langle \nabla f, \nabla g\rangle \quad \mathrm{d}M = \int_M g\Delta f \quad \mathrm{d}M = (\Delta f, g),$$

por lo que Δ es un operador autoadjunto. □

Proposición 1.22. *Los subespacios propios asociados a cada valor propio son ortogonales entre sí. Es decir, si tenemos $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (con $\lambda \neq \mu$) tales que $\Delta f + \lambda f = 0$ y $\Delta g + \mu g = 0$, entonces f y g son ortogonales.*

Demostración. Sean f, g, λ y μ los del enunciado. Entonces, usando la Proposición 1.21,

$$(\Delta f, g) = (f, \Delta g) \;\Rightarrow\; -\lambda(f, g) = -\mu(f, g)$$

$$\Rightarrow\; (\lambda - \mu)(f, g) = 0 \;\Rightarrow\; (f, g) = 0.$$ □

A continuación, vamos a ver que todos los valores propios del operador laplaciano son no negativos y están ordenados.

Proposición 1.23. *Todos los valores propios del operador laplaciano son no negativos.*

Demostración. Sean $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta f + \lambda f = 0$, es decir, con $\Delta f = -\lambda f$. Entonces, si usamos la Proposición 1.15,

$$\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2 = -2\lambda f^2 + 2|\nabla f|^2.$$

Ahora, aplicando el teorema de la divergencia (Teorema 1.20), obtenemos

$$0 = \int_M \Delta f^2 \, \mathrm{d}M = 2\int_M \left(|\nabla f|^2 - \lambda f^2\right) \, \mathrm{d}M,$$

de donde

$$\lambda = \frac{\int_M |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}M}{\int_M f^2 \, \mathrm{d}M} \geq 0.$$ □

Teorema 1.24. *El conjunto de todos los valores propios del operador laplaciano se puede ordenar de la siguiente forma:*

$$Spec(M) = \{\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m < \ldots\},$$

donde los λ_i tienden a infinito pero sus multiplicidades son finitas. Además, los subespacios propios asociados a los valores propios son ortogonales entre sí en $L^2(M)$, y $L^2(M)$ es la suma directa de todos esos subespacios.

Del Teorema 1.24 vamos a demostrar que las multiplicidades son finitas. Además, probaremos que el espectro es un subconjunto discreto. Para poder demostrar ambos resultados necesitaremos usar un resultado de [Wa].

Teorema 1.25. *Sea $\{\alpha_n\}$ una sucesión de funciones con $\alpha_n \in \mathcal{C}^\infty(M)$ de manera que existe una constante $c > 0$ tal que $|\alpha_n| \leq c$ y $|\Delta\alpha_n| \leq c$ para todo n. Entonces, toda subsucesión de $\{\alpha_n\}$ es de Cauchy.*

Proposición 1.26. *Se verifican las siguientes dos propiedades:*

1) $\mathrm{V}_\lambda(M)$ *tiene tiene dimensión finita para todo* $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$, *es decir, las multiplicidades son finitas.*

2) $\mathrm{Spec}(M)$ *es un subconjunto discreto de* $\mathbb{R}$.

Demostración. Para probar *1)*, supongamos que $\mathrm{V}_\lambda(M)$ no es de dimensión finita para un cierto $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$, en cuyo caso es posible elegir una sucesión infinita ortonormal $\{f_n\}$ de funciones propias asociadas al valor propio λ. Entonces, por un lado tenemos que $|f_n| = 1$ para todo n, y por otro lado

$$|\Delta f_n| = |-\lambda f_n| = \lambda |f_n| = \lambda \geq 0,$$

donde para la última desigualdad hemos usado la Proposición 1.23. Ahora, si tomamos c el máximo entre 1 y λ, podemos aplicar el Teorema 1.25 para obtener que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ que es de Cauchy. Sin embargo, usando que nuestra sucesión era ortonormal llegamos a contradicción con el hecho de que sea de Cauchy, puesto que

$$|f_{n_{k_1}} - f_{n_{k_2}}|^2 = |f_{n_{k_1}}|^2 + |f_{n_{k_2}}|^2 = 2.$$

Por tanto, $\mathrm{V}_\lambda(M)$ tiene dimensión finita para todo $\lambda \in \mathrm{Spec}(M)$.

La demostración de *2)* es análoga. Supongamos que $\mathrm{Spec}(M)$ tiene un punto de acumulación λ. Entonces existirá una sucesión de valores propios $\{\lambda_n\}$ en $\mathrm{Spec}(M)$ con $\lambda_n \neq \lambda$ para todo n y con límite λ. Además, cada uno de estos valores propios tiene asociada una función propia f_n (es decir, con $\Delta f_n + \lambda_n f_n = 0$) que podemos suponer con norma uno. Entonces,

$$|\Delta f_n| = |-\lambda_n f_n| = \lambda_n |f_n| = \lambda_n.$$

Como la sucesión $\{\lambda_n\}$ es convergente (a λ), entonces es acotada. Sea K dicha cota y tomemos c el máximo entre 1 y K. Aplicando el Teorema 1.25 obtenemos que existe una subsucesión $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ que es de Cauchy. Sin embargo, usando la Proposición 1.22 que demostraba la ortogonalidad de los subespacios propios, de nuevo llegamos a una contradicción, ya que

$$|f_{n_{k_1}} - f_{n_{k_2}}|^2 = |f_{n_{k_1}}|^2 + |f_{n_{k_2}}|^2 = 2. \qquad \square$$

Veamos ahora que si f es una función asociada al valor propio cero, entonces f es constante.

Proposición 1.27. *Si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es una función armónica, entonces f es constante.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una función armónica, es decir, con $\Delta f = 0$. Entonces, usando la Proposición 1.15 tenemos que

$$\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2 = 2|\nabla f|^2.$$

Ahora, podemos aplicar el teorema de la divergencia (Teorema 1.20) para obtener

$$0 = \int_M \Delta f^2 \,\mathrm{d}M = \int_M 2|\nabla f|^2 \,\mathrm{d}M.$$

Pero como $|\nabla f|^2 \geq 0$, entonces $|\nabla f| = 0$ y por tanto f es constante. $\square$

A continuación, vamos a ver el llamado principio del máximo para el laplaciano. Este principio será muy útil para demostraciones posteriores.

Teorema 1.28 (Principio del máximo)**.** *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ una función acotada en M que satisface $\Delta f \geq 0$. Si existe x_0 en M tal que*

$$f(x_0) = \sup_M f,$$

entonces $f(x) = f(x_0)$ para todo $x \in M$, es decir, f es constante en M.

Terminamos esta sección con la caracterización mín-máx del primer valor propio no nulo del laplaciano.

Teorema 1.29 (Caracterización mín-máx)**.** *Supongamos que λ_1 es el primer valor propio no nulo del operador laplaciano y que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ es una función tal que $\int_M f \,\mathrm{d}M = 0$. Entonces,*

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_M |\nabla f|^2 \,\mathrm{d}M}{\int_M f^2 \,\mathrm{d}M},$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, $\Delta f + \lambda_1 f = 0$.

1.4. Curvatura

Durante esta memoria usaremos con frecuencia términos relativos a la curvatura, por lo que conviene refrescarlos y fijar notaciones. Para más información puede consultarse [On].

Definición 1.30. Se define el tensor *curvatura de Riemann* como la aplicación $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z \\ &= \nabla_{\nabla_X Y}Z - \nabla_{\nabla_Y X}Z - \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_Y(\nabla_X Z). \end{aligned}$$

Este tensor cumple múltiples propiedades de entre las que destacan las siguientes.

Proposición 1.31. *Dados $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, el tensor curvatura R cumple las siguientes propiedades:*

1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

2) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$,

3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(identidad de Bianchi), y*

4) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$.

Obsérvese que, por la primera propiedad de la Proposición 1.31,

$$R(X,X) = 0$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Esto es debido a que, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$, sucede que

$$R(X,X)Y = -R(X,X)Y \;\Rightarrow\; 2R(X,X)Y = 0 \;\Rightarrow\; R(X,X)Y = 0.$$

Gracias al tensor de Riemann se pueden definir la curvatura escalar y el tensor de Ricci.

Definición 1.32. Dados dos campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, se define el tensor de *Ricci* como

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{tr}\left(\langle R(X,\,\cdot\,)Y,\,\cdot\,\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle,$$

donde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es un sistema de referencia ortonormal local.

Definición 1.33. Se define la *curvatura escalar* como la traza del tensor de Ricci, es decir,

$$S = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ric}(E_i, E_i),$$

donde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es un sistema de referencia ortonormal local.

Debido a que el operador curvatura de Riemann suele ser complicado de manejar, es usual definir una curvatura un poco más sencilla y que lo determina completamente, la curvatura seccional.

Para ello, y antes de pasar a definir dicha curvatura, dados dos vectores $v, w \in T_pM$, definimos

$$Q(v, w) = \langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2.$$

Puede probarse que dos vectores $v, w \in T_pM$ generan un plano Π si, y sólo si, $Q(v, w) \neq 0$.

Definición 1.34. Dado un punto $p \in M$ y un plano vectorial $\Pi \subset T_pM$, se define la *curvatura seccional* $K(\Pi)$ como el número real

$$K(\Pi) = K(v, w) = \frac{\langle R_p(v, w)v, w\rangle}{Q(v, w)},$$

donde $\{v, w\}$ es una base de Π.

Se puede probar que el valor de $K(v, w)$ no depende de la base escogida, de manera que la curvatura seccional $K(\Pi)$ está bien definida para todo plano vectorial $\Pi \subset T_pM$.

Merece la pena resaltar el caso en el que M es una superficie riemanniana de dimensión 2, puesto que en ese caso el plano tangente T_pM es el único plano vectorial de T_pM. De esta manera, la función curvatura seccional es una función $K : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bien definida sobre M a la que llamaremos *función curvatura de Gauss* de M.

Definición 1.35. Se dice que una variedad riemanniana tiene *curvatura constante* si su curvatura seccional es constante en todo punto de la variedad.

En el caso en el que nuestra variedad M tenga curvatura constante podremos calcular el tensor de Riemann fácilmente gracias a la siguiente proposición.

Proposición 1.36. *Si M^n tiene curvatura constante c, entonces*

$$R(X, Y)Z = c\left(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X\right).$$

Corolario 1.37. *Si M^n tiene curvatura constante c, entonces*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = c(n-1)\langle X,Y\rangle.$$

1.5. Hipersuperficies

En muchos momentos de esta memoria tendremos que trabajar con hipersuperficies, con lo que conviene recordar algunos conceptos y teoremas básicos sobre ellas, sobre todo las definiciones de inmersión y embebimiento junto con las fórmulas de Gauss y Weingarten. Además, durante la sección calcularemos algunos operadores de funciones concretas que nos serán muy útiles más adelante. Para más detalles de esta sección pueden consultarse [Al2], [Fe], [Le1] y [On].

Definición 1.38. Decimos que una variedad Σ^n es una *hipersuperficie inmersa* en $\overline{M}^{n+1}$ cuando existe una *inmersión* de Σ^n en $\overline{M}^{n+1}$, es decir, cuando existe una aplicación diferenciable

$$\psi : \Sigma^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}$$

tal que su diferencial, $d\psi_p$, es inyectiva para todo punto $p \in \Sigma$.

Cuando, además de una inmersión, ψ es inyectiva y es un homeomorfismo sobre la imagen (tomando $\psi(\Sigma^n)$ la topología inducida por $\overline{M}^{n+1}$), decimos que ψ es un *embebimiento* y que Σ^n es una *hipersuperficie embebida*.

Como toda inmersión ψ es localmente un embebimiento, para cada punto p en Σ podemos encontrar un entorno $U(p)$ tal que la inmersión restringida a él, $\psi|_U$, sea un embebimiento y $\psi(U)$ sea una subvariedad regular en $\overline{M}$.

Teniendo en cuenta esto último y para simplificar la notación, usualmente identificaremos a Σ con $\psi(\Sigma)$, a $p \in \Sigma$ con $\psi(p)$ y a cada vector $v \in T_p\Sigma$ con $d\psi_p(v) \in T_{\psi(p)}\overline{M}$.

Observemos también que en las hipersuperficies podemos, al menos localmente, considerar un campo de vectores diferenciable N normal y unitario. De esta manera se define el *operador forma* A de la hipersuperficie como el endomorfismo de Weingarten asociado a N (incluso aunque Σ no admita un normal unitario global, A estará globalmente definido salvo el signo). Así, dados dos campos tangentes $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, la *fórmula de Gauss* queda de la siguiente forma:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle AX, Y\rangle N. \tag{1.4}$$

Además, como N es unitario, entonces $\nabla^{\perp}_X N = 0$ y la *fórmula de Weingarten* queda como

$$\overline{\nabla}_X N = -AX. \tag{1.5}$$

Otra fórmula destacable es la *ecuación de Codazzi* en el caso concreto en el que el espacio ambiente tiene curvatura constante. La ecuación queda de la siguiente forma:

$$(\nabla_X A)Y = (\nabla_Y A)X. \tag{1.6}$$

Por otro lado, la *función curvatura media* se define como

$$H = \frac{\mathrm{tr}(A)}{n},$$

por lo que el *campo curvatura media* queda como $\boldsymbol{H} = HN$.

Con respecto al tensor de Riemann, dados cuatro campos $X, Y, V, W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, la relación es la siguiente:

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)V, W\rangle = \langle \overline{R}(X,Y)V, W\rangle &+ \langle AX, V\rangle\langle AY, W\rangle \\ &- \langle AX, W\rangle\langle AY, V\rangle.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Por último, si tenemos una inmersión $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, se verifica la *fórmula de Laplace-Beltrami*:

$$\Delta\psi = nHN = n\boldsymbol{H}. \tag{1.8}$$

A continuación, vamos a hacer algunos cálculos con los operadores asociados a la métrica en hipersuperficies. En estos cálculos y con el objetivo de simplificar las fórmulas, usaremos una notación física para referirnos a la derivada de una función con respecto al campo normal. Concretamente,

$$\frac{\partial F}{\partial N} = N(F) = \langle \overline{\nabla} F, N\rangle.$$

Además, a las condiciones impuestas sobre nuestras variedades de trabajo añadiremos a partir de ahora que tanto la hipersuperficie Σ como el espacio ambiente $\overline{M}$ sean orientables.

La primera proposición que veremos nos relaciona los operadores de la variedad ambiente con los de la hipersuperficie. Como es habitual, usaremos la notación $\overline{\nabla}$, $\overline{\Delta}$ para referirnos a los cálculos en el espacio ambiente y ∇, Δ para los cálculos en la hipersuperficie.

Proposición 1.39. *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa en una variedad $\overline{M}^{n+1}$. Además, sean $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$ y $f = F \circ \psi = F\big|_\Sigma$, donde $\psi : \Sigma \longrightarrow \overline{M}$ es la inmersión. Entonces, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y N el campo normal unitario, se tienen las siguientes relaciones:*

1) $\overline{\nabla} F = \nabla f + \frac{\partial F}{\partial N} N$,

2) $\overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F = \nabla_X \nabla f + \langle A(\nabla f), X\rangle N + X\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right) N - \frac{\partial F}{\partial N} AX$,

3) $\overline{\nabla}^2 F(X,Y) = \nabla^2 f(X,Y) - \frac{\partial F}{\partial N}\langle AX, Y\rangle$,

4) $\overline{\nabla}^2 F(X,N) = \langle AX, \nabla f\rangle + \langle X, \nabla \frac{\partial F}{\partial N}\rangle$, *y*

5) $\overline{\Delta} F = \Delta f - nH\frac{\partial F}{\partial N} + \overline{\nabla}^2 F(N,N)$.

Demostración. Para demostrar *1)* comenzaremos observando que, dado un punto p en Σ, se verifica

$$\overline{\nabla} F(p) = (\overline{\nabla} F(p))^\top + \langle \overline{\nabla} F(p), N(p)\rangle N(p), \tag{1.9}$$

puesto que al ser Σ una hipersuperficie, sabemos que

$$(\overline{\nabla} F(p))^\perp = \lambda N(p),$$

y multiplicando por $N(p)$ obtenemos $\lambda = \langle \overline{\nabla} F(p), N(p)\rangle$.

Ahora, vamos a calcular el primer término de la suma (1.9). Para ello, sea $v \in T_p\Sigma$ un vector fijo pero arbitrario, entonces

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = v(f(p)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\alpha(t)),$$

donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \Sigma$ es una curva con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Sin embargo, si nos fijamos, $f(\alpha(t))$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$f(\alpha(t)) = (F \circ \psi)(\alpha(t)) = F(\beta(t)),$$

con $\beta : (-\varepsilon', \varepsilon') \longrightarrow \overline{M}$ una curva que cumple las condiciones $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = v$. De esta forma,

$$\langle \nabla f(p), v\rangle = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(\beta(t)) = \langle \overline{\nabla} F(p), v\rangle,$$

donde $\nabla f(p), v \in T_p\Sigma$ y $\overline{\nabla} F(p) \in T_p\overline{M}$. Por tanto, $\nabla f(p) = (\overline{\nabla} F(p))^\top$ como queríamos demostrar.

Para la segunda relación vamos a tomar $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Entonces, usando *1)* y las fórmulas de Gauss (1.4) y Weingarten (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F &= \overline{\nabla}_X \nabla f + \overline{\nabla}_X (\langle \overline{\nabla} F, N\rangle N) = \overline{\nabla}_X \nabla f + \overline{\nabla}_X \left(\frac{\partial F}{\partial N} N\right) \\ &= \nabla_X \nabla f + \langle A(\nabla f), X\rangle N + X\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right) N + \frac{\partial F}{\partial N} \overline{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X \nabla f + \langle A(\nabla f), X\rangle N + X\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right) N - \frac{\partial F}{\partial N} AX.\end{aligned}$$

Para demostrar *3)*, como tenemos que multiplicar lo obtenido en la fórmula de *2)* por un campo tangente, de dicha fórmula sólo nos interesará la parte tangente porque la otra se anulará. Es decir,

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}^2 F(X, Y) &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F, Y\rangle = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle - \frac{\partial F}{\partial N}\langle AX, Y\rangle \\ &= \nabla^2 f(X, Y) - \frac{\partial F}{\partial N}\langle AX, Y\rangle.\end{aligned}$$

De forma análoga, para demostrar *4)* tenemos que multiplicar la fórmula de *2)* por un campo normal, por lo que la parte tangente de la fórmula se anulará al multiplicar.

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}^2 F(X, N) &= \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F, N\rangle = \langle AX, \nabla f\rangle + X\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right) \\ &= \langle AX, \nabla f\rangle + \langle X, \nabla \frac{\partial F}{\partial N}\rangle.\end{aligned}$$

Por último, para demostrar *5)*, sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ una base ortonormal local de $T\Sigma$. Entonces $\{E_1, \ldots, E_n, N\}$ es una base ortonormal local de $T\overline{M}$. Ahora, basta con usar la relación *3)* y que el operador laplaciano se puede ver como la traza del hessiano.

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}^2 F(E_i, E_i) + \frac{\partial F}{\partial N}\mathrm{tr}(A) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \overline{\nabla}^2 F(E_i, E_i) - \overline{\nabla}^2 F(N, N) + \frac{\partial F}{\partial N} nH \\ &= \overline{\Delta} F - \overline{\nabla}^2 F(N, N) + \frac{\partial F}{\partial N} nH. \qquad \square\end{aligned}$$

La siguiente proposición nos dice cómo son los operadores para una función muy característica, el cuadrado de la función distancia euclídea.

Proposición 1.40. *Supongamos que tenemos una hipersuperficie Σ inmersa mediante $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Dado un vector $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijo, sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \langle x - a, x - a\rangle.$$

Además, consideremos $f = F \circ \psi$, es decir,

$$f(p) = \langle \psi(p) - a, \psi(p) - a\rangle.$$

Entonces,

1) $\overline{\nabla} F(x) = 2(x - a)$,
2) $\overline{\Delta} F(x) = 2(n + 1)$,
3) $|\overline{\nabla}^2 F(x)|^2 = 4(n + 1)$,
4) $\nabla f(p) = 2(\psi(p) - a)^\top$, *donde* $(\psi(p) - a)^\top$ *denota la parte tangente de* $\psi(p) - a$ *a lo largo de* Σ, *y*
5) $\Delta f(p) = 2n(1 + H\langle N, \psi(p) - a\rangle)$.

Demostración. Comencemos por el cálculo del gradiente, dado $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$ se verifica lo siguiente:

$$\langle \overline{\nabla} F, Z\rangle = Z(F) = Z(|x - a|^2) = 2\langle \overline{\nabla}_Z (x - a), x - a\rangle = \langle Z, 2(x - a)\rangle.$$

Como esto es para cualquier $Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{n+1})$, obtenemos lo que queríamos.

Para calcular el operador laplaciano, sea $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$ una base ortonormal local de $\mathbb{R}^{n+1}$ y sea $x \in \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\overline{\Delta} F(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{E_i} \overline{\nabla} F, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle \overline{\nabla}_{E_i} (2(x - a)), E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \langle 2\overline{\nabla}_{E_i} (x - a), E_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle 2E_i, E_i\rangle = 2(n + 1).\end{aligned}$$

A continuación, para *3)*, vamos a considerar el operador hessiano como $B(v) = \overline{\nabla}_v \overline{\nabla} F$. Entonces, para cada $v \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$B(v) = \overline{\nabla}_v \overline{\nabla} F = \overline{\nabla}_v \left(2(x - a)\right) = 2v.$$

Esto último nos dice que $B = 2I_{n+1}$. Por tanto,

$$|\overline{\nabla}^2 F|^2 = \mathrm{tr}(B^2) = 4(n + 1).$$

Vamos a demostrar *4)*, es decir, vamos a calcular el gradiente de f. Para ello, sea $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, entonces

$$\langle X, \nabla f\rangle = X(f) = 2\langle \overline{\nabla}_X(\psi - a), \psi - a\rangle = \langle X, 2(\psi - a)\rangle.$$

Ahora, si tenemos en cuenta que X es tangente, obtenemos

$$\nabla f(p) = 2(\psi(p) - a)^\top.$$

Por último, vamos a demostrar *5)*. Por estar trabajando en una hipersuperficie, sabemos que la parte normal de $\psi - a$ a lo largo de Σ viene dada por

$$(\psi - a)^\perp = \langle \psi - a, N\rangle N.$$

De esta manera, si tomamos $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y usamos las fórmulas de Gauss (1.4) y Weingarten (1.5) obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} X &= \overline{\nabla}_X(\psi - a) = \overline{\nabla}_X(\psi - a)^\top + \overline{\nabla}_X(\psi - a)^\perp \\ &= \nabla_X(\psi - a)^\top + \langle AX, (\psi - a)^\top\rangle N + \langle \psi - a, N\rangle \overline{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X(\psi - a)^\top + \langle AX, (\psi - a)^\top\rangle N - \langle \psi - a, N\rangle AX. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Entonces, si igualamos las partes tangentes de la expresión (1.10) llegamos a

$$\nabla_X(\psi - a)^\top = X + \langle \psi - a, N\rangle AX \tag{1.11}$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$.

Por tanto, usando lo demostrado en *4)*,

$$\nabla_X \nabla f = \nabla_X(2(\psi - a)^\top) = 2X + 2\langle \psi - a, N\rangle AX. \tag{1.12}$$

Ahora, si usamos (1.12) para calcular el operador laplaciano tomando una base ortonormal local de $T\Sigma$, $\{E_1, \ldots, E_n\}$, obtenemos lo que queríamos demostrar:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle 2E_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle 2\langle \psi - a, N\rangle AE_i, E_i\rangle \\ &= 2\sum_{i=1}^n \langle E_i, E_i\rangle + 2\langle \psi - a, N\rangle \sum_{i=1}^n \langle AE_i, E_i\rangle \\ &= 2n + 2\langle \psi - a, N\rangle \mathrm{tr} A = 2n + 2\langle \psi - a, N\rangle nH \\ &= 2n(1 + \langle \psi - a, N\rangle H). \end{aligned}$$

□

Proposición 1.41. *Supongamos que tenemos una hipersuperficie Σ inmersa mediante $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Dado un vector $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijo, sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \langle x - a, N \rangle$$

con N el campo normal unitario. Consideremos además $f = F \circ \psi$, es decir,

$$f(p) = \langle \psi(p) - a, N(p) \rangle.$$

Entonces,

1) $\nabla f = -A\left((\psi - a)^\top\right)$, *y*

2) $\Delta f = -n\langle \nabla H, (\psi - a)^\top \rangle - nH - f|A|^2$.

Demostración. Sea $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla f, X \rangle &= X(f) = X(\langle \psi - a, N \rangle) \\
&= \langle \nabla_X(\psi - a), N \rangle + \langle \psi - a, \nabla_X N \rangle \\
&= \langle X, N \rangle + \langle \psi - a, -AX \rangle \\
&= -\langle A(\psi - a), X \rangle.
\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que el campo X es tangente, obtenemos lo que queríamos para el gradiente.

Para calcular el operador laplaciano vamos a expresarlo como la traza del hessiano, es decir,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle,$$

donde $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es un sistema de referencia ortonormal local.

Por tanto, antes de poder calcular el laplaciano necesitaremos saber, dado un campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, cómo es $\nabla_X \nabla f$. Para esto será necesario usar (1.11) y la ecuación de Codazzi (1.6).

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla f &= \nabla_X \left(-A\,(\psi - a)^\top\right) \\
&= -\left[(\nabla_X A)\left((\psi - a)^\top\right) + A\left(\nabla_X\,(\psi - a)^\top\right)\right] \\
&= -\left[\left(\nabla_{(\psi - a)^\top} A\right)(X) + A\,(X + \langle \psi - a, N \rangle AX)\right] \\
&= -\left(\nabla_{(\psi - a)^\top} A\right)(X) - AX - \langle \psi - a, N \rangle A^2 X.
\end{aligned}$$

Una vez visto lo que queríamos, podemos calcular el operador laplaciano de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 f(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle \\
&= -\left[\sum_{i=1}^{n} \langle \left(\nabla_{(\psi - a)^\top} A\right)(E_i) + AE_i + fA^2 E_i, E_i \rangle\right] \\
&= -\left[\mathrm{tr}\left(\nabla_{(\psi - a)^\top} A\right) + \mathrm{tr}(A) + f\mathrm{tr}(A^2)\right] \\
&= -\left[\nabla_{(\psi - a)^\top}(\mathrm{tr}(A)) + nH + f|A|^2\right] \\
&= -\left[\nabla_{(\psi - a)^\top}(nH) + nH + f|A|^2\right] \\
&= -\left[(\psi - a)^\top (nH) + nH + f|A|^2\right] \\
&= -n\langle \nabla H, (\psi - a)^\top \rangle - nH - f|A|^2.
\end{aligned}$$

□

Proposición 1.42. *Supongamos que tenemos una hipersuperficie Σ inmersa mediante $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Dados dos vectores $c, a \in \mathbb{R}^{n+1}$ fijos y tales que a tiene norma uno, sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \langle x - c, a \rangle.$$

Consideremos además $f = F \circ \psi$, es decir,

$$f(p) = \langle \psi(p) - c, a \rangle.$$

En ese caso tenemos lo siguiente:

1) $\nabla f = a^\top$,

2) $|\nabla f|^2 = 1 - \langle a, N \rangle^2$, y

3) $\Delta f = nH\langle a, N \rangle$.

Demostración. Comencemos por el cálculo del operador gradiente. Para ello, sea $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ un campo tangente, entonces

$$\langle \nabla f, X \rangle = X(f) = \overline{\nabla}_X (\langle \psi - c, a \rangle) = \langle \overline{\nabla}_X \psi, a \rangle + \langle \psi - c, \overline{\nabla}_X a \rangle = \langle X, a \rangle,$$

por lo que $\nabla f = a^\top$.

Para calcular *2)* y *3)*, fijémonos primero en que $a = a^\top + \langle a, N \rangle N$, es decir, el vector a puede expresarse como

$$a = \nabla f + \langle a, N \rangle N. \tag{1.13}$$

A continuación, simplemente tomando normas y usando que $|a| = 1$,

$$|\nabla f|^2 = 1 - \langle a, N\rangle^2.$$

Para el cálculo del laplaciano, si usamos la expresión (1.13) junto con las fórmulas de Gauss (1.4) y Weingarten (1.5) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 = \overline{\nabla}_X a &= \overline{\nabla}_X \left(\nabla f + \langle a, N\rangle N\right) = \overline{\nabla}_X \nabla f + \overline{\nabla}_X \left(\langle a, N\rangle N\right) \\ &= \nabla_X \nabla f + \langle AX, \nabla f\rangle N + X\left(\langle a, N\rangle\right) N - \langle a, N\rangle AX. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Si ahora igualamos partes tangentes en la expresión (1.14) tenemos que

$$\nabla_X \nabla f = \langle a, N\rangle AX$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Así,

$$\Delta f = nH\langle a, N\rangle. \qquad \square$$

Capítulo 2

Fórmula de Bochner-Lichnerowicz

En este capítulo vamos a ver la fórmula de Bochner-Lichnerowicz. Es interesante destacar que no existe una única fórmula con tal nombre, sino que dependiendo del texto que consultemos tendrá una forma u otra. Sin embargo, todos los autores coinciden en que su origen está en el artículo *Vector fields and Ricci curvature* publicado por Bochner en 1946 (véase [Bo]). Esta fórmula nos permitirá, en capítulos posteriores, obtener una gran cantidad de resultados muy importantes como el teorema de Lichnerowicz y Obata (Teorema 3.1) o la fórmula de Reilly (4.1). Una vez hayamos visto cuatro versiones distintas de la fórmula, en la segunda sección pasaremos a ver unas primeras aplicaciones.

Antes de comenzar recordemos que, tal y como dijimos en el Capítulo 1, salvo que se diga lo contrario consideraremos en todo momento que estamos trabajando con una variedad M^n diferenciable, orientable y conexa y g la métrica riemanniana (cuando estemos trabajando con $\overline{M}$ o con Σ también pediremos estas condiciones). Además, recordemos que $g = \langle\ ,\ \rangle$.

2.1. La fórmula de Bochner-Lichnerowicz

Como ya se ha comentado, en esta sección vamos a ver cuatro versiones de la llamada fórmula de Bochner-Lichnerowicz. El motivo de ver cuatro fórmulas y no simplemente una es porque, al no existir unificación entre los distintos autores, es interesante ver sus demostraciones y qué pueden aportar las distintas versiones. Las principales referencias son [BGM], [Fe] y [Po].

Antes de comenzar con las fórmulas vamos a ver una pocas definiciones que nos permitirán entender todos los elementos presentes en ellas.

Definición 2.1. Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, denotamos por $\nabla^2 X$ al endomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \nabla^2 X: & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & Y, Z & \longmapsto & \nabla^2 X(Y, Z) \end{array}$$

dado por

$$\begin{aligned} \nabla^2 X(Y, Z) &= (\nabla_Z \nabla X)(Y) \\ &= \nabla_Z (\nabla_Y X) - \nabla X(\nabla_Z Y) \\ &= \nabla_Z (\nabla_Y X) - \nabla_{\nabla_Z Y} X. \end{aligned}$$

Definición 2.2. Dado un campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$ y dado un sistema de referencia ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$, denotamos por $\Delta X \in \mathfrak{X}(M)$ a

$$\Delta X = \operatorname{tr}(\nabla^2 X) = \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 X(E_i, E_i).$$

Teorema 2.3. *Dado un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, se verifican las siguientes fórmulas:*

$$\operatorname{div}(\nabla_X X) = |\nabla X|^2 + X(\operatorname{div} X) + \operatorname{Ric}(X, X), \tag{BL1}$$

$$\operatorname{div}(\nabla_X X - (\operatorname{div} X) X) = \operatorname{Ric}(X, X) + |\nabla X|^2 - (\operatorname{div} X)^2, \tag{BL2}$$

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |\nabla^2 f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f), \ y \tag{BL3}$$

$$\frac{1}{2}\Delta\left(|X|^2\right) = |\nabla X|^2 + \langle \Delta X, X\rangle. \tag{BL4}$$

Demostración. En vez de demostrar las cuatro fórmulas una por una, vamos a demostrar sólo (BL1) y (BL4). Después, veremos que las otras dos se pueden deducir a partir de la primera.

Comencemos por (BL1). Para ello, vamos a calcular los términos de la igualdad uno a uno. Sea $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un sistema de referencia ortonormal local. Entonces,

$$\operatorname{div}(\nabla_X X) = \operatorname{tr}(\nabla(\nabla_X X)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle.$$

Para el segundo término, vamos a usar el endomorfismo ∇X que ya apareció en la Definición 1.12. Sin embargo, para mayor facilidad de notación, vamos a denotarlo como B_X.

Además de simplificar la notación, B_X nos ayudará a darnos cuenta de que se verifican dos propiedades muy útiles.

1) $|B_X|^2 = \mathrm{tr}(B_X^2)$.

2) Si $X = \nabla f$, entonces B_X es autoadjunto, ya que

$$\begin{aligned}\langle B_{\nabla f}(Y), Z\rangle &= \langle \nabla_Y \nabla f, Z\rangle = \nabla^2 f(Y,Z)\\ &= \nabla^2 f(Z,Y) = \langle \nabla_Z \nabla f, Y\rangle\\ &= \langle B_{\nabla f}(Z), Y\rangle,\end{aligned}$$

puesto que el operador hessiano es simétrico por la Proposición 1.17.

Continuando con nuestra demostración y usando la nueva notación,

$$\begin{aligned}|\nabla X|^2 = |B_X|^2 &= \mathrm{tr}(B_X^2)\\ &= \sum_{i=1}^n \langle B_X^2(E_i), E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle B_X(B_X(E_i)), E_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{B_X(E_i)} X, E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\rangle.\end{aligned}$$

Para el tercer término ya no es necesario usar la notación anterior, por lo que retomamos la notación usual ∇X.

$$\begin{aligned}X(\mathrm{div} X) &= X(\mathrm{tr}(\nabla X)) = X\left(\sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle\right)\\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X\left(\nabla_{E_i} X\right), E_i\rangle + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i\rangle.\end{aligned}$$

Por último, usando la definición del tensor curvatura de Riemann, podemos calcular el cuarto término, $\mathrm{Ric}(X,X)$, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(X,X) &= \sum_{i=1}^n \langle R(X,E_i)X, E_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{[X,E_i]} X - [\nabla_X, \nabla_{E_i}]X, E_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X - \nabla_{\nabla_{E_i} X} X - \nabla_X(\nabla_{E_i} X) + \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^n \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle\\ &\quad + \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle.\end{aligned}$$

A continuación, vamos a sumar lo obtenido para cada uno de los términos de la fórmula convenientemente para ver si se satisface lo que queremos demostrar.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}(\nabla_X X) - X(\operatorname{div} X)\\
&\quad= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X \left(\nabla_{E_i} X\right), E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i\rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Ric}(X,X) + |\nabla X|^2\\
&\quad= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle\\
&\qquad+ \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_{E_i} X} X, E_i\rangle\\
&\quad= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_X(\nabla_{E_i} X), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_X X), E_i\rangle.
\end{aligned}$$

Entonces, si nos fijamos, para acabar sólo nos falta demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_X E_i\rangle.$$

Para ello, vamos a necesitar que se verifique $\langle \nabla_X E_i, E_k\rangle = -\langle E_i, \nabla_X E_k\rangle$, pero esto es sencillo de demostrar, ya que por ser ortonormal nuestra base sabemos que $\langle E_i, E_k\rangle = \delta_i^k$, así que entonces $X(\langle E_i, E_k\rangle) = 0$ y a partir de ahí se obtiene el resultado buscado.

De esta forma, podemos completar la demostración de la fórmula (BL1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\nabla_X E_i} X, E_i\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{\sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_X E_i, E_k\rangle E_K} X, E_i\rangle\\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_X E_i, E_k\rangle \langle \nabla_{E_k} X, E_i\rangle\\
&= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle E_i, \nabla_X E_k\rangle \langle \nabla_{E_k} X, E_i\rangle\\
&= -\sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{E_k} X, \sum_{i=1}^{n} \langle E_i, \nabla_X E_k\rangle E_i\rangle\\
&= -\sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{E_k} X, \nabla_X E_k\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a pasar a demostrar (BL4) tomando, de nuevo, un sistema de referencia ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$. Así, dada $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$E_i(E_i(f)) = E_i(\langle \nabla f, E_i \rangle) = \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \langle \nabla f, \nabla_{E_i} E_i \rangle.$$

Entonces,

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(E_i(f)) - \nabla_{E_i} E_i(f) \right).$$

Por tanto,

$$\Delta(|X|^2) = \sum_{i=1}^{n} \left(E_i(E_i(|X|^2)) - \nabla_{E_i} E_i(|X|^2) \right).$$

A continuación, vamos a calcular cada uno de los términos que necesitamos.

$$\begin{aligned} E_i(E_i(|X|^2)) &= E_i(E_i(\langle X, X \rangle)) = E_i(2\langle \nabla_{E_i} X, X \rangle) \\ &= 2\langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i} X), X \rangle + 2\langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X \rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\nabla_{E_i} E_i(|X|^2) = \nabla_{E_i} E_i(\langle X, X \rangle) = 2\langle \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} X, X \rangle. \tag{2.2}$$

De esta manera, combinando (2.1) y (2.2),

$$\begin{aligned} \Delta(|X|^2) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(2\langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i} X), X \rangle + 2\langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X \rangle - 2\langle \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} X, X \rangle \Big) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, \nabla_{E_i} X \rangle + 2\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i} X) - \nabla_{\nabla_{E_i} E_i} X, X \rangle \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} |\nabla_{E_i} X|^2 + 2\langle \sum_{i=1}^{n} \nabla^2 X(E_i, E_i), X \rangle \\ &= 2|\nabla X|^2 + 2\langle \Delta X, X \rangle. \end{aligned}$$

Una vez vistas las demostraciones de (BL1) y (BL4) vamos a demostrar que la fórmula (BL1) implica (BL2). Para ello, si recordamos la Proposición 1.13, dados un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y una función $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se cumple la siguiente igualdad:

$$\operatorname{div}(fX) = X(f) + f \operatorname{div} X. \tag{2.3}$$

Tomando $f = \mathrm{div}X$ en (2.3) obtenemos

$$\mathrm{div}((\mathrm{div}X)X) = X(\mathrm{div}X) + (\mathrm{div}X)^2. \tag{2.4}$$

Por último, usando (2.4) y la fórmula (BL1),

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\nabla_X X - (\mathrm{div}X)X) &= \mathrm{div}(\nabla_X X) - \mathrm{div}((\mathrm{div}X)X) \\
&= |\nabla X|^2 + X(\mathrm{div}X) + \mathrm{Ric}(X,X) \\
&\quad - X(\mathrm{div}X) - (\mathrm{div}X)^2 \\
&= \mathrm{Ric}(X,X) + |\nabla X|^2 - (\mathrm{div}X)^2.
\end{aligned}$$

Para acabar la demostración de este teorema veamos que la fórmula (BL1) implica (BL3). Para ver dicha implicación tomemos $X = \nabla f$ y sustituyamos en (BL1) para después comprobar que, término a término, las dos fórmulas van a ser iguales. Sustituyendo obtenemos

$$\mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f) = |\nabla(\nabla f)|^2 + \nabla f(\mathrm{div}\nabla f) + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Ahora, vamos a comparar término a término. En primer lugar, está claro que $\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) = \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f)$. En segundo lugar,

$$\langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle = \nabla f(\Delta f) = \nabla f(\mathrm{div}\nabla f).$$

Para el tercer término, es decir, para ver si $|\nabla^2 f|^2 = |\nabla(\nabla f)|^2$, vamos a retomar la notación B_X que ya usamos en la demostración de (BL1), es decir, denotaremos $B_X = \nabla X$. Usando esto obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
|\nabla(\nabla f)|^2 = |B_{\nabla f}|^2 = \mathrm{tr}(B^2_{\nabla f}) &= \sum_{i=1}^n \langle B^2_{\nabla f}(E_i), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle B_{\nabla f}(E_i), B_{\nabla f}(E_i)\rangle = \sum_{i=1}^n |B_{\nabla f}(E_i)|^2 = \sum_{i=1}^n |\nabla_{E_i}\nabla f|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \langle \nabla_{E_i}\nabla f, E_j\rangle E_j\right|^2 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n \nabla^2 f(E_i,E_j)E_j\right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \big(\nabla^2 f(E_i,E_j)\big)^2 = |\nabla^2 f|^2.
\end{aligned}$$

Por último, vamos a ver si $\Delta|\nabla f|^2/2 = \mathrm{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f)$. Para ello,

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{div}\left(\nabla|\nabla f|^2\right) = \mathrm{div}\left(\frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2\right). \tag{2.5}$$

Por tanto, necesitamos calcular $\nabla|\nabla f|^2$. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\begin{aligned}\langle \nabla|\nabla f|^2, X\rangle &= X\left(|\nabla f|^2\right) = X\left(\langle \nabla f, \nabla f\rangle\right) = 2\langle \nabla_X \nabla f, \nabla f\rangle \\ &= 2\nabla^2 u(X, \nabla f) = 2\nabla^2 u(\nabla f, X) = 2\langle \nabla_{\nabla f}\nabla f, X\rangle.\end{aligned}$$

Así que $\nabla|\nabla f|^2 = 2\nabla_{\nabla f}\nabla f$ y, volviendo a (2.5), tenemos

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\nabla|\nabla f|^2\right) = \operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\nabla_{\nabla f}\nabla f\right) = \operatorname{div}(\nabla_{\nabla f}\nabla f).$$

Por tanto, hemos obtenido la fórmula (BL3) a partir de (BL1). □

Corolario 2.4. *Sea M compacta. Si $\nabla^2 X = 0$ para un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces X es paralelo, es decir, $\nabla X = 0$.*

Demostración. Si $\nabla^2 X = 0$, entonces $\Delta X = 0$. Por tanto, si usamos la fórmula de Bochner-Lichnerowicz (BL4),

$$\frac{1}{2}\Delta(|X|^2) = |\nabla X|^2,$$

por lo que si aplicamos el teorema de la divergencia (Teorema 1.20) obtenemos lo siguiente:

$$0 = \frac{1}{2}\int_M \Delta(|X|^2)\, \mathrm{d}M = \int_M |\nabla X|^2\, \mathrm{d}M.$$

Así, como $|\nabla X|^2 \geq 0$, deducimos que $|\nabla X|^2 = 0$ y por tanto $\nabla X = 0$. □

2.2. Primeras aplicaciones

A pesar de que una de las aplicaciones más importantes de la fórmula de Bochner-Lichnerowicz es el llamado teorema de Lichnerowicz y Obata (que estudiaremos en el próximo capítulo), no es la única posible. De hecho, la intención de Bochner cuando publicó [Bo] no era demostrar una fórmula, sino ver unos resultados que dependen de si la curvatura de Ricci de la variedad con la que se está trabajando es positiva o negativa. Nuestro objetivo ahora será estudiar esos resultados, los cuales se pueden ver como aplicaciones para los campos armónicos y los campos de Killing de las fórmulas vistas en la Sección 2.1. Sin embargo, antes serán necesarias algunas definiciones. Las principales referencias para esta sección son [On], [Po] y [Ya].

Definición 2.5. Dada una uno-forma $\omega \in \Lambda^1(M)$, su *divergencia*, denotada por $\operatorname{div}\omega \in \Lambda^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$, está dada por

$$\operatorname{div}\omega = \sum_{i=1}^{n} i_{E_i}(\nabla_{E_i}\omega),$$

donde i es el producto interior y $\{E_1, \ldots, E_n\}$ es un sistema de referencia ortonormal local.

Definición 2.6. Sea $\omega \in \Lambda^1(M)$ una uno-forma. Se dice que ω es *cerrada* si cumple $d\omega = 0$ con $d : \Lambda^1(M) \longrightarrow \Lambda^2(M)$ la diferencial exterior. Por otro lado, se dice que ω es *cocerrada* si $\delta\omega = 0$ con $\delta : \Delta^1(M) \longrightarrow \Lambda^0(M)$ la codiferencial exterior.

Definición 2.7. Se define $\Delta : \Lambda^1(M) \longrightarrow \Lambda^1(M)$, el *operador laplaciano de una uno-forma*, como $\Delta = d \circ \delta + \delta \circ d$.

Definición 2.8. Se dice que $\omega \in \Lambda^1(M)$ es *armónica* si $\Delta\omega = 0$. Es decir, si $d(\delta\omega) + \delta(d\omega) = 0$.

Evidentemente, si una uno-forma ω es cerrada y cocerrada entonces es armónica. Sin embargo, el recíproco no siempre es cierto y hace falta la condición de que M sea compacta (para más detalles sobre esto último véase [Po]).

Definición 2.9. Sea $X \in \mathfrak{X}(M)$ y sea $X^\flat \in \Lambda^1(M)$ su uno-forma métricamente equivalente. Se dice que X es *armónico* si $X^\flat$ es armónica.

Proposición 2.10. *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene lo siguiente:*

1) $dX^\flat(Y, Z) = \langle \nabla_Y X, Z\rangle - \langle Y, \nabla_Z X\rangle$ para todo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, y

2) $\delta X^\flat = -\operatorname{div} X$.

Demostración. Para demostrar *1)* vamos a usar que

$$dw(Y, Z) = Y(\omega(Z)) - Z(\omega(Y)) - \omega([Y, Z])$$

para toda uno-forma $\omega \in \Lambda^1(M)$ y todo campo $Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces,

$$\begin{aligned} dX^\flat(Y, Z) &= Y(X^\flat(Z)) - Z(X^\flat(Y)) - X^\flat([Y, Z]) \\ &= Y(\langle X, Z\rangle) - Z(\langle X, Y\rangle) - \langle X, [Y, Z]\rangle \\ &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle \\ &\quad - \langle X, \nabla_Z Y\rangle - \langle X, \nabla_Y Z\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle - \langle Y, \nabla_Z X\rangle. \end{aligned}$$

A continuación vamos a demostrar *2)*. En primer lugar sabemos que, por definición, $\delta X^\flat = -\mathrm{div} X^\flat$. Por tanto, nuestro objetivo será verificar la igualdad $\mathrm{div} X = \mathrm{div} X^\flat$. Para demostrar esto vamos a hacer uso de lo siguiente:

$$i_X(\nabla_Y \omega) = (\nabla_Y \omega)(X) = \nabla_Y(\omega X) - \omega(\nabla_Y X) = Y(\omega X) - \omega(\nabla_Y X),$$

donde $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $\omega \in \Lambda^1(M)$.

Entonces, dado $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un sistema de referencia ortonormal local,

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} X^\flat &= \sum_{i=1}^n i_{E_i}(\nabla_{E_i} X^\flat) = \sum_{i=1}^n \big[E_i(X^\flat(E_i)) - X^\flat(\nabla_{E_i} E_i)\big] \\
&= \sum_{i=1}^n [E_i(\langle X, E_i\rangle) - \langle X, \nabla_{E_i} E_i\rangle] = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle \\
&= \mathrm{div} X.
\end{aligned}$$

□

Corolario 2.11. *Si M es una variedad riemanniana compacta, entonces un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es armónico si, y sólo si,* $\mathrm{div} X = 0$ *y ∇X es autoadjunto con respecto a la métrica.*

Teorema 2.12. *Sea M una variedad riemanniana compacta con curvatura de Ricci no negativa. Entonces, todo campo armónico $X \in \mathfrak{X}(M)$ es paralelo y cumple* $\mathrm{Ric}(X, X) = 0$*. En particular, si la curvatura de Ricci de M es definida positiva, el único campo armónico en M es $X = 0$.*

Demostración. Como M es compacta y X es un campo armónico, entonces $\mathrm{div} X = 0$ por el Corolario 2.11. Así que, aplicando la fórmula (BL1),

$$\mathrm{div}(\nabla_X X) = |\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X, X).$$

Por tanto, aplicando el teorema de la divergencia (Teorema 1.20) obtenemos

$$\int_M (|\nabla X|^2 + \mathrm{Ric}(X, X))\, \mathrm{d}M = 0.$$

Ahora, como sabemos que $|\nabla X|^2 \geq 0$ y $\mathrm{Ric}(X, X) \geq 0$, entonces $\nabla X = 0$ y $\mathrm{Ric}(X, X) = 0$. En el caso de que la curvatura de Ricci sea definida positiva, como $\mathrm{Ric}(X, X) = 0$ tendremos que $X = 0$. □

Corolario 2.13. *Si M es una variedad riemanniana compacta y la curvatura de Ricci es definida positiva, entonces el primer número de Betti es cero, es decir, $\beta_1(M) = 0$.*

Demostración. Por el teorema de Hodge (véase [Wa]), si M es compacta entonces $H^1(M,\mathbb{R})$ es isomorfo al espacio de vectores de campos armónicos sobre M. Es decir, $\beta_1(M) = \dim_{\mathbb{R}} H^1(M,\mathbb{R})$ es igual al número de campos armónicos linealmente independientes. De esta manera, y aplicando el Teorema 2.12 a nuestras hipótesis, como el único campo armónico en M es $X = 0$, entonces $\beta_1(M) = 0$. □

Definición 2.14. Dada una variedad riemanniana M y un campo tangente $X \in \mathfrak{X}(M)$, diremos que X es un *campo de Killing* si la derivada de Lie de la métrica es igual a cero, es decir, si $L_X g = 0$.

Proposición 2.15. *Un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ es de Killing si, y sólo si, ∇X es anti-adjunto.*

Demostración. Observemos en primer lugar que, dados tres campos tangentes $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, se satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned}(L_X g)(Y,Z) &= X(g(Y,Z)) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z)\\ &= X(\langle Y,Z\rangle) - \langle [X,Y],Z\rangle - \langle Y,[X,Z]\rangle\\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\\ &\quad - \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X, Z\rangle - \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X\rangle\\ &= \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle.\end{aligned}$$

Entonces, que X sea de Killing es equivalente a que

$$\langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_Z X\rangle = 0,$$

es decir, es equivalente a que ∇X sea anti-adjunto. □

Corolario 2.16. *Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es de Killing, entonces* $\mathrm{div}X = 0$

Demostración. Por ser X de Killing sabemos que ∇X es anti-adjunto, así que, dado $Y \in \mathfrak{X}(M)$ tenemos

$$\langle \nabla_Y X, Y\rangle + \langle Y, \nabla_Y X\rangle = 0,$$

por lo que $\langle \nabla_Y X, Y\rangle = 0$. Entonces, tomando $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un sistema de referencia ortonormal local,

$$\mathrm{div}X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i} X, E_i\rangle = 0. \qquad \square$$

Desde el punto de vista geométrico, y gracias a la interpretación geométrica de la derivada de Lie en términos de la variación de un tensor bajo el flujo del campo, decir que un campo X es de Killing es equivalente a decir que el tensor métrico no varía bajo el flujo de X. Esto conduce a la interpretación de los campos de Killing como isometrías infinitesimales, en el sentido de que un campo X es de Killing si, y sólo si, su flujo local (o grupo 1-paramétrico local) está formado por isometrías locales.

Lema 2.17. *Dado un campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(M)$, se verifica*

$$\langle \Delta X, \cdot \rangle + \mathrm{Ric}(X, \cdot) = 0.$$

Demostración. Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y tomemos $\{E_1, \ldots, E_n\}$ un sistema de referencia ortonormal local. Ahora, si fijamos un punto $p \in M$ y usamos las notaciones $Y(p) = y$, $X(p) = x$ y $E_i(p) = e_i$, obtenemos

$$\langle \Delta X, Y \rangle + \mathrm{Ric}(X, Y)\Big|_p = \langle \mathrm{tr}(\nabla^2 X)(p), y \rangle + \mathrm{Ric}(x, y).$$

Ahora, como fijado p es posible tomar $Y \in \mathfrak{X}(M)$ de manera que se satisfaga $(\nabla Y)(p) = 0$, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\langle \Delta X, Y \rangle + \mathrm{Ric}(X, Y)\Big|_p \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n} \left[e_i(\langle \nabla_{E_i} X, Y \rangle) + \langle \nabla_{e_i} \nabla_Y X - \nabla_y \nabla_{E_i} X, e_i \rangle \right] \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{n} \left[-e_i(\langle E_i, \nabla_Y X \rangle) + e_i(\langle \nabla_Y X, E_i \rangle) \right] - y(\mathrm{div} X) = 0. \qquad \square \end{aligned}$$

Teorema 2.18. *Sea M una variedad riemanniana compacta con curvatura de Ricci negativa. Entonces, todo campo de Killing $X \in \mathfrak{X}(M)$ es paralelo y cumple* $\mathrm{Ric}(X, X) = 0$. *En particular, si la curvatura de Ricci es definida negativa, el único campo de Killing en M es $X = 0$.*

Demostración. En primer lugar, apliquemos la fórmula (BL4) a nuestra situación. De esta forma obtenemos

$$\frac{1}{2}\Delta(|X|^2) = |\nabla X|^2 + \langle \Delta X, X \rangle$$

Si ahora tenemos en cuenta tanto el Lema 2.17 como el teorema de la divergencia (Teorema 1.20),

$$0 = \int_M (|\nabla X|^2 + \langle \Delta X, X \rangle)\, \mathrm{d}M = \int_M (|\nabla X|^2 - \mathrm{Ric}(X, X))\, \mathrm{d}M.$$

Entonces, como $|\nabla X|^2 \geq 0$ y $-\mathrm{Ric}(X,X) \geq 0$, obtenemos que el campo X es paralelo y que $\mathrm{Ric}(X,X) = 0$. Además, si la curvatura de Ricci es definida negativa también obtenemos que $X = 0$. □

Corolario 2.19. *Si M es una variedad riemanniana compacta y tiene curvatura de Ricci negativa entonces tiene un grupo de isometrías finito.*

Demostración. Como M es compacta, por el teorema de Myers-Steenrod (véase [MS]), el grupo de isometrías de M es compacto. Si dicho grupo fuera infinito, entonces contendría un grupo no trivial de isometrías 1-paramétricas de M que necesariamente vendrían generadas por un campo de Killing distinto de cero, lo cual contradeciría el Teorema 2.18. □

Capítulo 3

Teorema de Lichnerowicz y Obata

Una de las principales aplicaciones de la fórmula de Bochner-Lichnerowicz es el teorema de Lichnerowicz y Obata (Teorema 3.1). En este resultado se da una cota inferior para el primer valor propio no nulo del operador laplaciano y también se ve que la igualdad se da en el caso de estar trabajando con una esfera. Es interesante destacar que las dos partes del teorema no se demostraron el mismo año, sino que Lichnerowicz dio la cota en 1958 (véase [Li2]) y Obata demostró la caracterización en 1962 (véase [Ob]). El enunciado es el siguiente:

Teorema 3.1 (Lichnerowicz y Obata)**.** *Sea* (M^n, g) *una variedad riemanniana compacta. Supongamos que existe una constante* $c > 0$ *que satisface la desigualdad* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)c$. *Entonces, el primer valor propio no nulo del operador laplaciano cumple* $\lambda_1 \geq nc$. *Además, la igualdad se da si, y sólo si,* M *es isométrica a una esfera* $\mathbb{S}^n(r)$ *de radio* $r = 1/\sqrt{c}$.

Para demostrar este teorema van a ser necesarios unos resultados previos entre los que se incluyen tanto el cálculo de los valores propios del laplaciano en la esfera como el llamado teorema de Cheng (Teorema 3.8).

3.1. Los valores propios del laplaciano en la esfera

En esta sección vamos a ver cómo es el primer valor propio no nulo del laplaciano en la esfera $\mathbb{S}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = r^2\}$. Para ello, sean

$$F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1}) \quad \text{y} \quad f = F\big|_{\mathbb{S}^n(r)}.$$

Nuestro objetivo es relacionar el cálculo intrínseco de f con el extrínseco de F. Más concretamente, queremos relacionar Δf con $\overline{\Delta} F$ en la esfera. Las referencias para esta sección son [BGM] y [Ro1].

Proposición 3.2. *Sea Σ^n una hipersuperficie en una variedad $\overline{M}^{n+1}$ y sea $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{M})$. Además, sea $\alpha(t)$ una curva en Σ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$. Entonces,*

$$\frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} (F(\alpha(t))) = \overline{\nabla} F_p(v,v) + \langle \overline{\nabla} F(p), \alpha''(0) \rangle.$$

Demostración. Sean F y α las del enunciado, entonces sabemos que se verifica lo siguiente:

$$\frac{d}{dt}(F(\alpha(t))) = \langle \overline{\nabla} F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle. \tag{3.1}$$

Ahora, derivando en (3.1) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(F(\alpha(t))) &= \frac{d}{dt} \langle \overline{\nabla} F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_{\alpha'(t)} \overline{\nabla} F(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle + \langle \overline{\nabla} F(\alpha(t)), \alpha''(t) \rangle \\ &= \overline{\nabla}^2 F_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t)) + \langle \overline{\nabla} F(\alpha(t)), \alpha''(t) \rangle. \end{aligned}$$

Por último, si evaluamos en $t = 0$ y usamos las condiciones iniciales de la curva α, obtenemos lo que queríamos. □

Teorema 3.3. *Sean $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ y $f = F\big|_{\mathbb{S}^n(r)}$, entonces, para todo punto $p \in \mathbb{S}^n(r)$, se cumple*

$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(p+tp) - \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dt^2}\bigg|_{t=0} F(p+tp).$$

Demostración. Sabemos que en la esfera $\mathbb{S}^n(r)$ se cumple que $N(p) = p/r$ para todo $p \in \mathbb{S}^n(r)$ (entendiendo p como el vector $(p_1, \ldots, p_{n+1})$). Entonces,

$$AX = -\overline{\nabla}_X N = -\overline{\nabla}_X (\frac{1}{r} p) = -\frac{1}{r} X,$$

por lo que $A = -I_n/r$ y por tanto $H = \mathrm{tr}(A)/n = -1/r$.

Si usamos la Proposición 1.39 con estos valores, llegamos a

$$\begin{aligned}\Delta f(p) &= \overline{\Delta} F(p) + nH\langle \overline{\nabla} F(p), N(p)\rangle - \overline{\nabla}^2 F(N(p), N(p)) \\ &= \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2}\langle \overline{\nabla} F(p), p\rangle - \frac{1}{r^2}\overline{\nabla}^2 F(p,p).\end{aligned}$$

Lo siguiente que tenemos que hacer es calcular $\langle \overline{\nabla} F(p), p\rangle$ y $\overline{\nabla}^2 F(p,p)$. En primer lugar,

$$\langle \overline{\nabla} F(p), p\rangle = p(F(p)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(\alpha(t)),$$

siendo $\alpha(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = p$. Tomando la curva $\alpha(t) = p + tp$ obtenemos

$$\langle \overline{\nabla} F(p), p\rangle = p(F(p)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p + tp).$$

Para calcular $\overline{\nabla}^2 F(p,p)$ basta con usar la Proposición 3.2 tomando de nuevo la curva $\alpha(t) = p + tp$.

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} (F(p+tp)) = \overline{\nabla}^2 F_p(p,p) + \langle \overline{\nabla} F(p), \alpha''(0)\rangle = \overline{\nabla}^2 F_p(p,p).$$

De esta manera, dado $p \in \mathbb{S}^n(r)$ tenemos

$$\begin{aligned}\Delta f(p) &= \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2}\langle \overline{\nabla} F(p), p\rangle - \frac{1}{r^2}\overline{\nabla}^2 F(p,p) \\ &= \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p+tp) - \frac{1}{r^2}\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} F(p+tp). \qquad \square\end{aligned}$$

Ahora vamos a imponer condiciones para F. Supongamos que $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ es una función homogénea de grado $k \geq 0$ con $k \in \mathbb{N}$ (es decir, tal que $F(\lambda x) = \lambda^k F(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$). Entonces, si calculamos los términos de la fórmula dada por el Teorema 3.3, obtenemos

$$F(p+tp) = F((1+t)p) = (1+t)^k F(p),$$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(p+tp) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (1+t)^k F(p) = \left.k(1+t)^{k-1} F(p)\right|_{t=0} = kF(p) = kf(p), \text{ y}$$

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} F(p+tp) = \left.k(k-1)(1+t)^{k-2} F(p)\right|_{t=0} = k(k-1)F(p) = k(k-1)f(p).$$

Por tanto, el operador laplaciano quedaría de la siguiente forma:

$$\Delta f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{n}{r^2} k f(p) - \frac{1}{r^2} k(k-1) f(p) = \overline{\Delta} F(p) - \frac{k(n+k-1)}{r^2} f(p).$$

De esta manera tenemos que

$$\Delta f + \frac{k(n+k-1)}{r^2} f = \overline{\Delta} F.$$

Si ahora pedimos que F sea armónica además de homogénea tenemos que para todo $k \geq 0$, $f = F\big|_{\mathbb{S}^n(r)}$ cumple

$$\Delta f + \lambda_k f = 0 \quad \text{con} \quad \lambda_k = \frac{k(n+k-1)}{r^2}.$$

Con esto, y gracias a la existencia de polinomios armónicos homogéneos de grado $k \geq 0$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, ya sabemos cómo calcular los valores propios del operador laplaciano en la esfera y podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *Los valores propios λ_k con $k \geq 0$ del operador laplaciano en la esfera $\mathbb{S}^n(r)$ se pueden escribir como*

$$\lambda_k = \frac{k(n+k-1)}{r^2},$$

y sus funciones propias asociadas son la restricción a $\mathbb{S}^n(r)$ de los polinomios armónicos homogéneos de grado k.

3.2. El teorema de Cheng

El objetivo principal de esta sección es demostrar el teorema de Cheng (Teorema 3.8). Sin embargo, antes de empezar con la demostración de este resultado creo conveniente destacar el hecho de que no surgió de la nada, sino que se llegó a él poco a poco gracias a las aportaciones que fueron haciendo varios matemáticos. Por tanto, es interesante desde el punto de vista histórico ver cómo se llegó al teorema.

3.2.1. Histórico del teorema

Podemos considerar que el primer matemático en comenzar con el teorema fue Bonnet en 1855, el teorema que demostró dice lo siguiente.

Teorema 3.5 (Bonnet)**.** *Sea (M^n, g) una variedad riemanniana completa y supongamos que existe una constante $c > 0$ de manera que la curvatura seccional cumple $K \geq c$. Entonces M es compacta y* $\text{diám}(M) \leq \pi/\sqrt{c}$.

Más tarde, en 1941, Myers probó un teorema muy parecido.

Teorema 3.6 (Myers)**.** *Sea (M^n, g) una variedad riemanniana completa y supongamos que existe una constante $c > 0$ de manera que* $\text{Ric} \geq (n-1)c$. *Entonces M es compacta y* $\text{diám}(M) \leq \pi/\sqrt{c}$.

Si nos fijamos, la hipótesis sobre la curvatura seccional del teorema de Bonnet implica que $\text{Ric} \geq (n-1)c$ en el sentido de las formas cuadráticas, es decir, implica que para todo $p \in M$ y para todo $v \in T_pM$ se cumple

$$\text{Ric}_p(v, v) \geq (n-1)c|v|^2.$$

De esta manera, el teorema de Myers era más fuerte que el de Bonnet, puesto que la hipótesis pedida era más débil. Lo vemos.

Sea $v \neq 0$ y sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal local tal que $e_1 = v/|v|$. Entonces, si nos fijamos en la definición del tensor de Ricci y usamos que $R(w, w) = 0$ para todo $w \in T_pM$ y que $v = |v|e_1$, podemos ver que hay un sumando (cuando $i = 1$) que vale 0. Así,

$$\begin{aligned}\text{Ric}_p(v, v) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(v, e_i)v, e_i \rangle = |v|^2 \sum_{i=1}^{n} \langle R(e_1, e_i)e_1, e_i \rangle \\ &= |v|^2 \sum_{i=2}^{n} \langle R(e_1, e_i)e_1, e_i \rangle = |v|^2 \sum_{i=2}^{n} K(e_1 \wedge e_i) \geq |v|^2(n-1)c,\end{aligned}$$

tal y como queríamos demostrar.

Años más tarde, en 1959, Toponogov cambió la hipótesis de completitud por la compacidad de M y demostró el siguiente teorema.

Teorema 3.7 (Toponogov)**.** *Sea (M^n, g) una variedad riemanniana compacta y supongamos que existe una constante $c > 0$ de manera que la curvatura seccional cumple $K \geq c$ y* $\text{diám}(M) = \pi/\sqrt{c}$. *Entonces M es isométrica a una esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de radio $r = 1/\sqrt{c}$.*

Por último, en 1975, Cheng demostró su teorema.

Teorema 3.8 (Cheng)**.** *Sea (M^n, g) una variedad riemanniana compacta y supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que* $\text{Ric} \geq (n-1)c$. *Si* $\text{diám}(M) = \pi/\sqrt{c}$ *entonces M es isométrica a una esfera $\mathbb{S}^n(r)$ de radio $r = 1/\sqrt{c}$.*

De los cuatro teoremas vistos, para cumplir con nuestros objetivos necesitaremos tanto el teorema de Myers como el teorema de Cheng .

3.2.2. Teorema de Myers

Vamos a comenzar demostrando el teorema de Myers (Teorema 3.6). Sin embargo, antes de comenzar su demostración necesitaremos algunas definiciones y resultados previos. Para más detalles se puede consultar [Ch2] o [Le1].

Definición 3.9. Dada $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ una curva en M, definimos una *variación de* α como $x : [a, b] \times (-\xi, \xi) \longrightarrow M$ tal que $x(u, 0) = \alpha(u)$ para todo $u \in [a, b]$. Decimos además que x *fija los extremos* si $x(a, v) = \alpha(a)$ y $x(b, v) = \alpha(b)$ para todo $v \in (-\xi, \xi)$.

Definición 3.10. Dada una variación $x(u, v)$ y dados u_0, v_0 constantes, se definen las *curvas longitudinales* como las dadas por $x(u, v_0)$ y las *curvas transversales* como las dadas por $x(u_0, v)$.

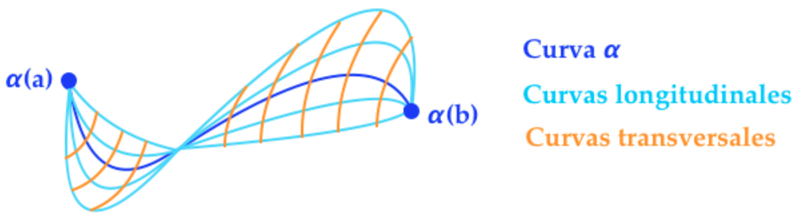

Figura 3.1: Variación de una curva fijando los extremos.

Definición 3.11. Se define el *campo variacional* de una variación x como

$$V(u) := \frac{\partial x}{\partial v}(u, 0).$$

Sea $\beta_u(v) = x(u, v)$, entonces

$$V(u) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, 0) = \beta_u'(0) \in T_{\beta_u(0)}M = T_{\alpha(u)}M.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial x}{\partial u}(u, 0) = \alpha'(u) \in T_{\alpha(u)}M.$$

De esta manera, si x es una variación que fija los extremos, entonces su campo variacional cumple $V(a) = V(b) = 0$, puesto que

$$V(a) = \frac{\partial x}{\partial v}(a,0) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}(x(a,v)) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\alpha(a) = 0, \quad \text{y}$$

$$V(b) = \frac{\partial x}{\partial v}(b,0) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}(x(b,v)) = \frac{d}{dv}\Big|_{v=0}\alpha(b) = 0.$$

Dada una variación x de una curva α, podemos definir la aplicación que determina la longitud de las curvas del tipo $u \longmapsto x(u, v_0)$ para v_0 fijo (curvas longitudinales). A esta aplicación la denotamos $L(v_0)$, la cual claramente satisface $L(0) = L(\alpha)$.

Nos interesa conocer cómo cambia la longitud de α para pequeñas variaciones, es decir, para v muy pequeño. Por lo tanto, estudiaremos la primera y la segunda fórmula de variación, las cuáles nos dan fórmulas para $L'(0)$ y $L''(0)$. Con respecto a ambos resultados es necesario resaltar que, aunque se pueden demostrar para curvas regulares a trozos, en esta memoria sólo incluiré el enunciado para curvas regulares, puesto que en la demostración del teorema de Myers las curvas que se usan son regulares a lo largo de toda la variedad.

Proposición 3.12 (Primera fórmula de variación)**.** *Sea α una curva regular en M y parametrizada por arco (es decir, con $|\alpha'| = 1$). Si x es una variación de α, entonces*

$$L'(0) = -\int_a^b \langle \alpha'', V\rangle \, \mathrm{d}u + \langle \alpha', V\rangle\Big|_a^b,$$

donde V es el campo variacional de la variación x.

Teorema 3.13. *Una curva α en M regular y parametrizada por arco es una geodésica si, y sólo si, $L'(0) = 0$ para toda variación x de α que fija los extremos.*

Como nos va a interesar estudiar el caso en el que $L'(0) = 0$, a partir de ahora trabajaremos con variaciones que fijan los extremos y así podremos tomar nuestra curva una geodésica.

Proposición 3.14 (Segunda fórmula de variación)**.** *Sea σ una geodésica parametrizada por arco. Si x es una variación de σ que fija los extremos, entonces*

$$L''(0) = \int_a^b \big(\langle (V')^\perp, (V')^\perp\rangle - \langle R(V,\sigma')V, \sigma'\rangle\big) \, \mathrm{d}u, \tag{3.2}$$

donde V es el campo variacional de σ.

Dado V, un campo de vectores sobre σ, éste se puede descomponer como $V = V^{\top} + V^{\perp}$, donde $V^{\top}$ es tangente a σ y $V^{\perp}$ es ortogonal a σ. Además, como sabemos que el espacio tangente está generado por σ', tenemos que $V^{\top} = \lambda\sigma'$. Pero como $\langle V, \sigma' \rangle = \lambda$, obtenemos $V^{\top} = \langle V, \sigma' \rangle \sigma'$. Por otro lado, como σ es una geodésica sabemos que $\sigma'' = 0$, por lo que

$$(V^{\top})' = (\langle V', \sigma' \rangle + \langle V, \sigma'' \rangle)\, \sigma' + \langle V, \sigma' \rangle \sigma'' = \langle V', \sigma' \rangle \sigma'.$$

De nuevo, como sabemos que el espacio tangente está generado por σ', haciendo cálculos obtenemos que $(V')^{\top} = \langle V', \sigma' \rangle \sigma'$, lo cual nos dice que

$$(V')^{\top} = (V^{\top})'.$$

Además, el hecho de que $V^{\top}$ sea colineal con σ' y las propiedades del tensor de Riemann (Proposición 1.31) hacen que

$$\begin{aligned}
\langle R(V, \sigma')V, \sigma' \rangle &= \langle R(V^{\top} + V^{\perp}, \sigma')(V^{\top} + V^{\perp}), \sigma' \rangle \\
&= \langle R(V^{\top}, \sigma')V^{\top}, \sigma' \rangle + \langle R(V^{\top}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle \\
&\quad + \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\top}, \sigma' \rangle + \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle \\
&= \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\top}, \sigma' \rangle + \langle R(V^{\top}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle \\
&\quad + \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle \\
&= \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\top}, \sigma' \rangle + \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle \\
&= \langle R(V^{\top}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle + \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle \\
&= \langle R(V^{\perp}, \sigma')V^{\perp}, \sigma' \rangle.
\end{aligned}$$

Por todo esto, la segunda fórmula de variación (3.2) se define realmente sólo para campos variacionales normales y queda entonces de la siguiente manera:

$$L''(0) = \int_a^b \left(\langle V', V' \rangle - \langle R(V, \sigma')V, \sigma' \rangle \right) \, \mathrm{d}u.$$

Definición 3.15. Denotamos por $\Omega(p, q)$ el conjunto de las curvas regulares $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ tales que $\alpha(a) = p$, $\alpha(b) = q$. Asimismo definimos $T_{\alpha}\Omega$, con $\alpha \in \Omega(p, q)$, como el espacio formado por los campos de vectores V normales a α y que cumplen $V(a) = 0$, $V(b) = 0$.

Definición 3.16. Dada una geodésica σ con $\sigma(a) = p$ y $\sigma(b) = q$, definimos la *forma índice* como la siguiente forma bilineal simétrica:

$$\begin{array}{rccl}
I: & T_{\sigma}\Omega \times T_{\sigma}\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& (V, W) & \longmapsto & \int_a^b \left(\langle V', W' \rangle - \langle R(V, \sigma')W, \sigma' \rangle \right) \, \mathrm{d}u
\end{array}$$

Nótese que $I(V, V) = L''(0)$.

Proposición 3.17. *Dados V, $W \in T_\sigma\Omega$, la forma índice puede escribirse como*
$$I(V,W) = -\int_a^b \langle V'' - R(V,\sigma')\sigma', W\rangle \,\mathrm{d}u.$$

Demostración. En general tenemos lo siguiente:
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle V', W\rangle = \langle V'', W\rangle + \langle V', W'\rangle.$$
Integrando y haciendo uso del teorema fundamental del cálculo queda
$$\langle V', W\rangle\Big|_a^b = \int_a^b \langle V'', W\rangle \,\mathrm{d}u + \int_a^b \langle V', W'\rangle \,\mathrm{d}u.$$
Como $W(a) = 0$ y $W(b) = 0$ debido a que $W \in T_\sigma\Omega$, entonces $\langle V', W\rangle\big|_a^b = 0$. Así,
$$\int_a^b \langle V', W'\rangle \,\mathrm{d}u = -\int_a^b \langle V'', W\rangle \,\mathrm{d}u. \tag{3.3}$$
Por otro lado, por las simetrías del tensor de Riemann de la Proposición 1.31, sabemos que
$$\langle R(V,\sigma')W, \sigma'\rangle = -\langle R(V,\sigma')\sigma', W\rangle. \tag{3.4}$$
Ahora, si sustituimos (3.3) y (3.4) en la definición de la forma índice obtenemos lo que buscábamos. □

Ya estamos en disposición de poder comprender la demostración el teorema de Myers (Teorema 3.6).

Demostración del Teorema 3.6.

Sea $\sigma : [0,b] \longrightarrow M$ una geodésica parametrizada por el arco y supongamos que $b = L(\sigma) > \pi/\sqrt{c}$. Construimos $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base ortonormal local de campos paralelos a lo largo de σ de manera que $E_n = \sigma'$. Después, para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ definimos
$$V_i(t) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{b}\right) E_i(t).$$

Estos campos son normales y satisfacen $V_i(0) = 0$, $V_i(b) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Ahora, para cada i, calculemos sus derivadas primera y segunda:
$$V_i'(t) = \frac{\pi}{b}\cos\left(\frac{\pi t}{b}\right) E_i(t), \quad V_i''(t) = -\frac{\pi^2}{b^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{b}\right) E_i(t).$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
I(V_i, V_i) = -&\int_0^b \langle -\frac{\pi^2}{b^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{b}\right) E_i \\
&- R\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{b}\right) E_i, E_n\right) E_n, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{b}\right) E_i\rangle \, \mathrm{d}t \\
&= -\int_0^b \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{b}\right) \langle -\frac{\pi^2}{b^2} E_i - R\left(E_i, E_n\right) E_n, E_i\rangle \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^b \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{b}\right) \left(\frac{\pi^2}{b^2} + \langle R\left(E_i, E_n\right) E_n, E_i\rangle\right) \, \mathrm{d}t.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Por otro lado, por las propiedades del tensor de Riemann que vimos en la Proposición 1.31, tenemos

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(\sigma', \sigma') = \operatorname{Ric}(E_n, E_n) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(E_n, E_i)E_n, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(E_n, E_i)E_n, E_i\rangle = -\sum_{i=1}^{n-1} \langle R(E_i, E_n)E_n, E_i\rangle.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Si hacemos la suma de los $I(V_i, V_i)$ usando (3.5) y (3.6), entonces

$$
\sum_{i=1}^{n-1} I(V_i, V_i) = \int_0^b \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi t}{b}\right) \left((n-1)\frac{\pi^2}{b^2} - \operatorname{Ric}(\sigma', \sigma')\right) \, \mathrm{d}t.
$$

Ahora, usando la hipótesis sobre la curvatura de Ricci tenemos

$$
(n-1)\frac{\pi^2}{b^2} - \operatorname{Ric}(\sigma', \sigma') \leq (n-1)\frac{\pi^2}{b^2} - c(n-1) = (n-1)\left(\frac{\pi^2}{b^2} - c\right) < 0,
$$

donde la última desigualdad se debe a que estamos suponiendo $b > \pi/\sqrt{c}$.

Entonces hemos obtenido que $\sum_{i=1}^{n-1} I(V_i, V_i) < 0$, por lo que al menos uno de los sumandos tiene que ser estrictamente negativo, lo que implicaría que σ no es una geodésica minimizante. Si nos fijamos en la suposición que hicimos, esto quiere decir que no existen geodésicas minimizantes con longitud mayor que $\pi/\sqrt{c}$ en M, luego $\operatorname{diám}(M) \leq \pi/\sqrt{c}$ como queríamos demostrar.

Por otro lado, como $\operatorname{diám}(M) \leq \pi/\sqrt{c}$, tenemos que M es acotada. Además, como de forma obvia, M es cerrada en M y estamos suponiendo que es completa, el teorema de Hopf-Rinow nos asegura que M es compacta. $\square$

3.2.3. Teorema de Cheng

Al igual que nos pasó con la demostración del teorema de Myers (Teorema 3.6), para el teorema de Cheng (Teorema 3.8) también vamos a necesitar algunos resultados previos. Concretamente, necesitaremos el teorema de comparación del volumen (Teorema 3.18). Para más detalles, consúltese la referencia [Li1].

Teorema 3.18 (Comparación del volumen)**.** *Sea M^n una variedad riemanniana completa y sea $\overline{M}^n = \mathbb{S}^n(1/\sqrt{c})$. Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)c$. *Si para cada $p \in M$ denotamos por $V_p(r)$ y $\overline{V}(r)$ los volúmenes de las bolas geodésicas $B_p(r)$ y $\overline{B}(r)$, respectivamente, entonces tenemos que*

$$V_p(r_1)\overline{V}(r_2) \geq V_p(r_2)\overline{V}(r_1),$$

donde $0 \leq r_1$ y $r_2 \leq \infty$. Además, la igualdad se da si, y sólo si, M es isométrica a $\overline{M}$.

Demostración del Teorema 3.8*.*

Sean $p, q \in M$ tales que $\mathrm{d}(p,q) = \mathrm{diám}(M) = \ell$. Entonces, si aplicamos el teorema de comparación del volumen (Teorema 3.18) a $r_1 = \ell/2$ y $r_2 = \ell$ obtenemos lo siguiente:

$$V_p(\ell) \leq V_p\left(\frac{\ell}{2}\right) \cdot \frac{\overline{V}(\ell)}{\overline{V}\left(\frac{\ell}{2}\right)}.$$

Si observamos,

$$\mathrm{diám}(\overline{M}) = \mathrm{diám}\left(\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{c}},$$

por lo que la hipótesis de que $\ell = \pi/\sqrt{c}$ implica que $\overline{V}(\ell)$ es el volumen de la esfera $\mathbb{S}^n(1/\sqrt{c})$ y $\overline{V}(\ell/2)$ es el volumen de su semiesfera. De esta manera,

$$\frac{\overline{V}(\ell)}{\overline{V}\left(\frac{\ell}{2}\right)} = \frac{\overline{V}(\ell)}{\frac{1}{2}\overline{V}(\ell)} = 2.$$

Por tanto,

$$V_p(\ell) \leq 2V_p\left(\frac{\ell}{2}\right),$$

y análogamente
$$V_q(\ell) \leq 2V_q\left(\frac{\ell}{2}\right).$$

Por otro lado, $B_p(\ell/2) \cap B_q(\ell/2) = \emptyset$, puesto que si suponemos que existe un punto x en la intersección tenemos una contradicción, ya que
$$\ell = \mathrm{d}(p,q) \leq \mathrm{d}(p,x) + \mathrm{d}(x,q) < \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} = \ell.$$

Entonces, usando el hecho de que
$$B_p(\ell) = \{x \in M : \mathrm{d}(p,x) \leq \ell\} = M = \{x \in M : \mathrm{d}(q,x) \leq \ell\} = B_q(\ell),$$

obtenemos
$$2V(M) = V_p(\ell) + V_q(\ell) \leq 2\left(V_p\left(\frac{\ell}{2}\right) + V_q\left(\frac{\ell}{2}\right)\right) \leq 2V(M),$$

lo que implica que las desigualdades del teorema de comparación son en realidad igualdades y por tanto M es isométrica a una esfera como queríamos demostrar. □

3.3. El teorema de Lichnerowicz y Obata

Con las secciones anteriores y unos pocos preliminares más, ya estaremos en disposición de poder demostrar el teorema de Lichnerowicz y Obata (Teorema 3.1). Las referencias en esta ocasión son [Li1] y [Ob].

Proposición 3.19. *Si $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces*
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2,$$
donde la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Demostración. La desigualdad se demuestra simplemente tomando los vectores $\vec{v} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{w} = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ para usar con ellos la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es decir, que $\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle^2 \leq |\vec{v}|^2|\vec{w}|^2$. Además, la igualdad se da cuando $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son colineales. □

Esta proposición tiene una importante consecuencia si se aplica a las matrices.

Proposición 3.20. *Sea B una matriz autoadjunta en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$\operatorname{tr}(B^2) \geq \frac{1}{n} (\operatorname{tr}B)^2 ,$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, $B = \lambda I_n$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Demostración. Si tenemos la matriz B del enunciado, sabemos que ésta es diagonalizable por resultados de álgebra, por lo que podemos considerar que es de la forma $B = \operatorname{diag}\{b_1, \ldots, b_n\}$. De esta manera, si aplicamos la Proposición 3.19 a los b_i de la diagonal tenemos el resultado deseado. □

Lema 3.21. *Para todo $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ se tiene*

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta f)^2 ,$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, $\nabla^2 f = \phi\langle\ ,\ \rangle$ con $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Además, tomando trazas cuando se da la igualdad puede observarse que, en ese caso, necesariamente $\phi = \Delta f/n$.

Demostración. Vamos a usar la Proposición 3.20 tomando $B = \nabla^2 f$ y viendo el operador hessiano como

$$\begin{array}{rccc} \nabla^2 f: & \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & X & \longmapsto & \nabla_X \nabla f \end{array}$$

Entonces, como el hessiano visto de esta forma es autoadjunto, podemos aplicar la Proposición 3.20. Para ello, necesitamos calcular $\operatorname{tr}(B^2)$ y $(\operatorname{tr}B)^2$.

$$\operatorname{tr}(B^2) = |B|^2 = |\nabla^2 f|^2,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}B = \operatorname{tr}(\nabla^2 f) &= \sum_{i=1}^n \nabla^2 f(E_i, E_i) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle = \operatorname{tr}(X \mapsto \nabla_X \nabla f) \\ &= \operatorname{tr}(\nabla(\nabla f)) = \operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f. \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos lo que queríamos demostrar, es decir,

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta f)^2 .$$

Ahora, para la igualdad vamos a usar que A es diagonalizable y que por tanto no hay ningún problema en suponer directamente que B es diagonal. Así,

$$B = \lambda I \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 f = \lambda I \quad \Rightarrow \quad \Delta f = \operatorname{tr}(\nabla^2 f) = \lambda n \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\Delta f}{n}.$$

Entonces, la igualdad se dará si, y sólo si,

$$\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} \langle \ , \ \rangle. \qquad \square$$

A continuación vamos a ver la demostración de la desigualdad del teorema de Lichnerowicz y Obata (Teorema 3.1).

Demostración de la desigualdad del Teorema 3.1.

Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que $\Delta f + \lambda_1 f = 0$ con λ_1 el primer valor propio no nulo del laplaciano, es decir, f es una primera función propia no constante. Vamos a usar la fórmula de Bochner-Lichnerowicz (BL3), la Proposición 1.15 y el Lema 3.21 para calcular el laplaciano de la función

$$g = |\nabla f|^2 + \frac{\lambda_1}{n} f^2,$$

obteniendo lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\Delta g &= \Delta |\nabla f|^2 + \frac{\lambda_1}{n} \Delta f^2 \\
&= 2|\nabla^2 f|^2 + 2\langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{\lambda_1}{n} \Delta f^2 \\
&= 2|\nabla^2 f|^2 + 2\langle \nabla f, \nabla(\Delta f)\rangle + 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{\lambda_1}{n} \left(2f\Delta f + 2|\nabla f|^2\right) \\
&= 2|\nabla^2 f|^2 - 2\lambda_1 |\nabla f|^2 + 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \frac{\lambda_1}{n} \left(-2\lambda_1 f^2 + 2|\nabla f|^2\right) \\
&= 2|\nabla^2 f|^2 + 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + 2\left(-\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla f|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n} f^2 \\
&= 2|\nabla^2 f|^2 + 2\mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) + 2\left(\frac{-\lambda_1 n + \lambda_1}{n}\right)|\nabla f|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n} f^2 \\
&\geq 2|\nabla^2 f|^2 + 2(n-1)c|\nabla f|^2 + 2\left(-\frac{\lambda_1(n-1)}{n}\right)|\nabla f|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n} f^2 \\
&= 2|\nabla^2 f|^2 + 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla f|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n} f^2 \\
&\geq \frac{2(\Delta f)^2}{n} + 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla f|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n} f^2 \\
&= \frac{2\lambda_1^2}{n} f^2 + 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla f|^2 - \frac{2\lambda_1^2}{n} f^2 \\
&= 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla f|^2.
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos que $c-(\lambda_1/n) > 0$. Entonces, como M es compacta, por el teorema de la divergencia (Teorema 1.20), tenemos

$$0 = \int_M \Delta g \, \mathrm{d}M \geq 2(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)\int_M |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}M > 0,$$

donde para la última desigualdad se ha usado que como f no es constante entonces la integral de $|\nabla f|^2$ es estrictamente mayor que cero. Por tanto, como con nuestra suposición hemos llegado a contradicción, sabemos que se cumple $c - (\lambda_1/n) \leq 0$, y esto es equivalente a que $\lambda_1 \geq nc$. □

A continuación, para la caracterización de la igualdad ya tenemos una de las implicaciones, puesto que si aplicamos el Teorema 3.4 al caso particular en el que $k = 1$ y $r = 1/\sqrt{c}$, obtenemos que en la esfera $\mathbb{S}^n(r)$, el primer valor propio no nulo es $\lambda_1 = nc$. Para la otra implicación tenemos dos pruebas distintas, la proporcionada en el libro [Li1] y la original de Obata que se puede encontrar en [Ob].

Comenzaremos por la demostración proporcionada por Li, para la cual necesitaremos tanto el teorema de Cheng (Teorema 3.8) como el principio del máximo del laplaciano (Teorema 1.28).

Caracterización de la igualdad del Teorema 3.1(de [Li1]).

En primer lugar, como M es completa por ser (M, g) un espacio métrico compacto y por el teorema de Hopf-Rinow, podemos aplicar el teorema de Myers (Teorema 3.6). Éste nos dice que, bajo nuestras hipótesis,

$$\text{diám}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

Nuestro objetivo en esta demostración será ver que se satisface la desigualdad contraria para así aplicar el teorema de Cheng (Teorema 3.8).

Si nos fijamos en la cadena de desigualdades que hicimos para la demostración de la desigualdad, habíamos llegado a que

$$\Delta g \geq 2\,(n-1)\left(c - \frac{\lambda_1}{n}\right)|\nabla f|^2 \quad \text{con} \quad g = |\nabla f|^2 + \frac{\lambda_1}{n} f^2.$$

Entonces, si $\lambda_1 = nc$ tenemos que $c = \lambda_1/n$ y por tanto $\Delta g \geq 0$. Ahora, gracias a que M es compacta podemos aplicar el principio del máximo para el laplaciano (Teorema 1.28) y obtener que g es constante. De esta manera,

$$g = |\nabla f|^2 + \frac{\lambda_1}{n} f^2 = |\nabla f|^2 + c f^2 = K, \quad \text{con } K \text{ constante}.$$

Por otro lado, y de nuevo usando que M es compacta, sabemos que existen p_1 y p_2 en M tales que $f(p_1) = \text{mín} f = f_*$ y $f(p_2) = \text{máx} f = f^*$. Ahora, si evaluamos g en p_1 y p_2, obtenemos

$$cf_*^2 = K = c(f^*)^2,$$

por lo que $f_* = -f^*$ (pues f no es constante). Además, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f^* > 0$. Entonces,

$$|\nabla f|^2 + cf^2 = K = c(f^*)^2.$$

Es decir,

$$c\left((f^*)^2 - f^2\right) = |\nabla f|^2.$$

Por tanto,

$$\sqrt{c} = \frac{|\nabla f|}{\sqrt{(f^*)^2 - f^2}}.$$

Si ahora tomamos los p_1 y p_2 que dan, respectivamente, el mínimo y el máximo de la función f, sabemos que existe $\gamma : [0, l] \longrightarrow M$ geodésica minimizante parametrizada por el arco (es decir, con $|\nabla\gamma| \equiv 1$) tal que $\gamma(0) = p_1$, $\gamma(l) = p_2$ y $l = \mathrm{d}(p_1, p_2)$. Entonces,

$$\sqrt{c} = \frac{|\nabla f(\gamma(s))|}{\sqrt{(f^*)^2 - f(\gamma(s))^2}}.$$

Así que, si integramos,

$$l\sqrt{c} = \int_0^l \sqrt{c}\,\mathrm{d}s = \int_0^l \frac{|\nabla f(\gamma(s))|}{\sqrt{(f^*)^2 - f(\gamma(s))^2}}\,\mathrm{d}s.$$

Ahora, denotemos $h(s) = f(\gamma(s))$, $h : [0, l] \longrightarrow \mathbb{R}$ para simplificar la notación. Vamos a ver una desigualdad que nos permitirá continuar.

$$h'(s) = \frac{d}{ds} f(\gamma(s)) = \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \leq |\nabla f(\gamma(s))||\gamma'| = |\nabla h(s)|.$$

Entonces, denotando $a = f^*$ para simplificar la notación y haciendo cambios de variables, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} l\sqrt{c} &= \int_0^l \frac{|\nabla h(s)|}{\sqrt{a^2 - (h(s))^2}}\,\mathrm{d}s \geq \int_0^l \frac{h'(s)}{\sqrt{a^2 - (h(s))^2}}\,\mathrm{d}s = \int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{a^2 - w^2}} \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = [\operatorname{arc\,sen} x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi \quad \Rightarrow \quad l\sqrt{c} \geq \pi. \end{aligned}$$

Sin embargo, esto implica

$$\pi \leq l\sqrt{c} = \mathrm{d}(p_1, p_2)\sqrt{c} \leq \max_{p,q\in M} \mathrm{d}(p,q)\sqrt{c} = \mathrm{diám}(M)\sqrt{c}.$$

Por tanto,

$$\mathrm{diám}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

Uniendo este último resultado con el teorema de Myers (Teorema 3.6), hemos demostrado que se verifica

$$\mathrm{diám}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{c}}.$$

Para finalizar la demostración basta con aplicar el teorema de Cheng (Teorema 3.8). □

Ahora, vamos a ver la demostración propuesta por Obata en [Ob]. Para ello necesitaremos enunciar un teorema que aparece también en dicho artículo. En él hay que tener en cuenta de nuevo que nuestra variedad compacta M también es completa como ya vimos. No incluimos aquí la demostración del teorema porque es bastante técnica y sobrepasaría los objetivos de esta memoria.

Teorema 3.22 (Obata). *Para que una variedad riemanniana completa M de dimensión $n \geq 2$ admita una función no constante f con $\nabla^2 f = -k^2 f$ (k constante) es necesario y suficiente que la variedad sea isométrica a una esfera de radio $1/k$ y dimensión n.*

Caracterización de la igualdad del Teorema 3.1(de [Ob]).

Esta demostración explota más propiedades de las desigualdades obtenidas para Δg. Si nos fijamos, en la cadena de desigualdades hemos usado que

$$|\nabla^2 f|^2 \geq \frac{1}{n}(\Delta f)^2,$$

y por el Lema 3.21 sabemos que la igualdad se da si, y sólo si,

$$\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n}\langle\ ,\ \rangle.$$

Por tanto, usando que f era la primera función propia, si $\lambda_1 = nc$ sabemos que se tiene lo siguiente:

$$\nabla^2 f = \frac{\Delta f}{n} = -\frac{\lambda_1 f}{n} = -cf.$$

De esta manera hemos obtenido una función f no constante tal que

$$\nabla^2 f = -(\sqrt{c})^2 f,$$

y aplicando el teorema de Obata (Teorema 3.22) obtenemos que M es isométrica a $\mathbb{S}^n(r)$ con $r = 1/\sqrt{c}$. $\square$

Capítulo 4

Fórmula de Reilly y aplicaciones

En 1977, Reilly publicó un artículo, titulado *Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold* (véase [Re1]), en el que demostraba una fórmula integral para variedades con borde y gracias a la cual han podido demostrarse una gran cantidad de resultados. El objetivo de este capítulo será demostrar dicha fórmula y ver algunas de sus principales aplicaciones. Sin embargo, antes necesitaremos algunas nociones sobre las variedades con borde, fundamentales para entender la fórmula.

4.1. Variedades con borde

El objetivo de esta sección es hacer una pequeña introducción a las variedades diferenciables con borde. Debido a que el estudio de estas variedades no es el motivo principal de la memoria, tan sólo enunciaré los resultados y conceptos más relevantes sin demostrarlos. Para más detalles sobre lo expuesto en esta sección pueden consultarse [Le2] y [SF].

Antes de estudiar las variedades diferenciables con borde necesitamos conocer $\mathbb{R}^n_+$ y las variedades topológicas con borde.

Definición 4.1. Sea $\mathbb{R}^n_+$ el *semi-espacio superior de* $\mathbb{R}^n$, es decir, el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por todos los puntos que tienen la última coordenada no negativa:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

Por otro lado, llamaremos *borde de* $\mathbb{R}^n_+$ a

$$\partial\mathbb{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n_+ : x^n = 0\}.$$

Además, consideraremos sobre los dos la topología inducida por la topología usual de $\mathbb{R}^n$, de manera que $\partial\mathbb{R}^n_+$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^{n-1}$. El *interior de* $\mathbb{R}^n_+$ es de la siguiente forma:

$$\mathrm{int}\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^n_+ \setminus \partial\mathbb{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n_+ : x^n > 0\}.$$

Como vamos a ver, las variedades topológicas con borde van a ser objetos análogos a las variedades topológicas, pero modeladas sobre $\mathbb{R}^n_+$ en vez de sobre $\mathbb{R}^n$.

Definición 4.2. Dado un espacio topológico X, una *carta n-dimensional en sentido generalizado* sobre X es un par (U, ϕ) con U un abierto en X y $\phi : U \longrightarrow \phi(U)$ un homeomorfismo con $\phi(U)$ abierto en $\mathbb{R}^n_+$.

Definición 4.3. Una *variedad topológica con borde* de dimensión n es un espacio topológico que es Hausdorff y satisface el segundo axioma de numerabilidad, y tal que para todo punto $p \in X$ existe una carta n-dimensional en sentido generalizado (U, ϕ) con $p \in U$.

Definición 4.4. Sea X una variedad topológica con borde. Diremos que $p \in X$ es un *punto del borde* si existe una carta generalizada (U, ϕ) con $p \in U$ tal que $\phi(p) \in \partial\mathbb{R}^n_+$. Asimismo, diremos que p es un *punto interior* si existe una carta generalizada (U, ϕ) con $p \in U$ tal que $\phi(p) \in \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$.

A continuación, vamos a ver unos conceptos que nos permitirán definir las variedades diferenciables con borde.

Definición 4.5. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Diremos que F es *diferenciable en sentido generalizado* si existen un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $A \subset U$ y una aplicación diferenciable $\overline{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que F es la restricción de $\overline{F}$ a A.

La Definición 4.5 nos permite generalizar la definición de difeomorfismo.

Definición 4.6. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ y sea $F : A \longrightarrow B$ una aplicación biyectica. Diremos que F es un *difeomorfismo generalizado* si F y F^{-1} son diferenciables en sentido generalizado.

Al igual que con las variedades sin borde considerábamos atlas y estructuras diferenciables, con las variedades diferenciables con borde podremos usar sus análogos generalizados llegando a la siguiente definición.

Definición 4.7. Una *variedad diferenciable de dimensión n con borde* es un par $(M, \mathcal{A})$ formado por una variedad topológica con borde de dimensión n, M, y una estructura diferenciable en sentido generalizado $\mathcal{A}$ sobre M.

Proposición 4.8. *Sea M una variedad diferenciable con borde de dimensión n. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

1) $\mathrm{int}M$ *es una variedad diferenciable (sin borde) de dimensión n.*

2) Si no es vacía, ∂M es una variedad diferenciable (sin borde) de dimensión $n-1$ que admite como atlas las cartas formadas por la restricción a ∂M de las $n-1$ primeras coordenadas de cada carta de M.

Gracias a la Proposición 4.8, los conceptos de funciones y aplicaciones diferenciables se pueden extender al caso de variedades con borde sin ninguna modificación. Por tanto, el espacio tangente de un punto $p \in M$ es análogo al caso sin borde. Además, si tenemos $p \in \mathrm{int}M$ podemos identificar de manera natural T_pM con $T_p(\mathrm{int}M)$. Por otro lado, si $p \in \partial M$ entonces $T_p(\partial M)$ tiene sólo dimensión $n-1$. Sin embargo, es posible definir un espacio tangente T_pM de dimensión n que contenga a $T_p(\partial M)$ como un hiperplano. En ese caso, $T_p(\partial M)$ divide al T_pM en dos semi-espacios.

Definición 4.9. Sea (U, ϕ) un sistema de coordenadas generalizado alrededor de $p \in \partial M$ y sea $v \in T_pM \setminus T_p(\partial M)$, entonces

$$v = v^1\partial_1|_p + \ldots + v^{n-1}\partial_{n-1}|_p + v^n\partial_n|_p$$

con $v^n \neq 0$. Decimos que v *apunta hacia el interior* si $v^n > 0$ y decimos que *apunta hacia el exterior* si $v^n < 0$.

La orientabilidad en una variedad (diferenciable) con borde se define de forma análoga al caso sin borde. Con respecto a la orientación en el borde, si tenemos M una variedad diferenciable n-dimensional con borde y orientada, ésta induce una orientación natural sobre su borde ∂M.

Definición 4.10. La *orientación inducida sobre ∂M* se define de manera que una base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ del $T_p(\partial M)$ es positivamente orientada si, y sólo si, $\{v, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ es una base positivamente orientada del T_pM para cualquier $v \in T_pM \setminus T_p(\partial M)$ que apunte hacia el exterior.

La Definición 4.10 nos da una orientación bien definida del $T_p(\partial M)$ para los puntos de ∂M. De esta manera, podemos considerar el borde de una variedad diferenciable con borde y orientada como una variedad orientable.

Para demostrar ciertos resultados necesitaremos la siguiente generalización del teorema de la divergencia (Teorema 1.20).

Teorema 4.11 (Teorema de la divergencia para variedades con borde)**.** *Sea (M, g) una variedad riemanniana con borde y sea N_{ext} el normal unitario exterior sobre el borde ∂M. Si X es un campo de vectores diferenciable sobre M con soporte compacto, entonces*

$$\int_M \mathrm{div} X \, \mathrm{d}M = \int_{\partial M} \langle X, N_{ext} \rangle \, \mathrm{d}\partial M.$$

Nótese que en el caso de usar el normal interior, N_{int}, el teorema cambia ligeramente. En ese caso sería

$$\int_M \mathrm{div} X \, \mathrm{d}M = -\int_{\partial M} \langle X, N_{int} \rangle \, \mathrm{d}\partial M.$$

4.2. La fórmula de Reilly

En esta sección vamos a demostrar la llamada *fórmula de Reilly*. Para ello, a pesar de que la demostración original puede encontrarse en [Re1], he preferido basarme en la propuesta en [AM]. Sin embargo, hay que tener en cuenta que la demostración de este segundo artículo está hecha para hipersuperficies en el espacio euclídeo, mientras que la de esta memoria será para hipersuperficies en general.

Teorema 4.12 (Fórmula de Reilly)**.** *Sea Σ^n una hipersuperficie compacta embebida en una variedad riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ de modo que Σ es la frontera de un dominio Ω con clausura compacta $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega = \Sigma$. Sea N el normal unitario interior a lo largo de Σ. Entonces, para toda $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ se tiene*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(\left(\overline{\Delta} F\right)^2 - |\overline{\nabla}^2 F|^2 - \overline{\mathrm{Ric}}\left(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F\right) \right) \mathrm{d}\Omega \\ &\quad = \int_\Sigma \left(\langle A(\nabla f), \nabla f \rangle + nH \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)^2 - 2 \frac{\partial F}{\partial N} \Delta f \right) \mathrm{d}\Sigma, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $f = F|_\Sigma$ y $\frac{\partial F}{\partial N} = N(F) = \langle \overline{\nabla} F, N \rangle$.

Demostración. Consideremos $\overline{\Omega}$ como variedad con borde Σ y $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Además, como es habitual, usaremos las notaciones ∇, Δ cuando estemos refiriéndonos a Σ y $\overline{\nabla}$, $\overline{\Delta}$ cuando estemos en $\overline{\Omega}$. Para la demostración vamos a tomar $X = \overline{\nabla} F$ en la fórmula de Bochner-Lichnerowicz (BL2). De esta manera,

$$\overline{\mathrm{div}}\left(\overline{\nabla}_{\overline{\nabla} F} \overline{\nabla} F - \left(\overline{\mathrm{div}}\, \overline{\nabla} F\right) \overline{\nabla} F \right) = \overline{\mathrm{Ric}}\left(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F\right) + |\overline{\nabla}\, \overline{\nabla} F|^2 - \left(\overline{\mathrm{div}}\left(\overline{\nabla} F\right)\right)^2.$$

Esto último es equivalente a

$$\overline{\operatorname{div}}\left(\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}F}\overline{\nabla}F - \overline{\Delta}F\overline{\nabla}F\right) = \overline{\operatorname{Ric}}\left(\overline{\nabla}F, \overline{\nabla}F\right) + |\overline{\nabla}^2 F|^2 - \left(\overline{\Delta}F\right)^2.$$

Por otro lado, si aplicamos el teorema de la divergencia para variedades con borde (Teorema 4.11) al campo $\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}F}\overline{\nabla}F - \overline{\Delta}F\overline{\nabla}F$, obtenemos

$$\int_\Omega \overline{\operatorname{div}}(\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}F}\overline{\nabla}F - \overline{\Delta}F\overline{\nabla}F)\, \mathrm{d}\Omega = -\int_\Sigma \langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}F}\overline{\nabla}F - \overline{\Delta}F\overline{\nabla}F, N\rangle\, \mathrm{d}\Sigma,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\left(\overline{\Delta}F\right)^2 - |\overline{\nabla}^2 F|^2 - \overline{\operatorname{Ric}}\left(\overline{\nabla}F, \overline{\nabla}F\right)\right)\, \mathrm{d}\Omega \\
&\quad = -\int_\Omega \overline{\operatorname{div}}\left(\overline{\nabla}_{\overline{\nabla}F}\overline{\nabla}F - \overline{\Delta}F\overline{\nabla}F\right)\, \mathrm{d}\Omega \\
&\quad = \int_\Sigma \left(\langle \overline{\nabla}_{\overline{\nabla}F}\overline{\nabla}F, N\rangle - \overline{\Delta}F\langle \overline{\nabla}F, N\rangle\right)\, \mathrm{d}\Sigma \\
&\quad = \int_\Sigma \left(\overline{\nabla}^2 F\left(\overline{\nabla}F, N\right) - \overline{\Delta}F\frac{\partial F}{\partial N}\right)\, \mathrm{d}\Sigma.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Ahora vamos a centrarnos en calcular $\overline{\nabla}^2 F\left(\overline{\nabla}F, N\right)$. Usando las fórmulas *1)* y *4)* de la Proposición 1.39 llegamos a

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}^2 F(\overline{\nabla}F, N) &= \overline{\nabla}^2 F(\nabla f + \frac{\partial F}{\partial N}N, N) = \overline{\nabla}^2 F(\nabla f, N) + \frac{\partial F}{\partial N}\overline{\nabla}^2 F(N, N) \\
&= \langle A(\nabla f), \nabla f\rangle + \langle \nabla f, \nabla\frac{\partial F}{\partial N}\rangle + \frac{\partial F}{\partial N}\overline{\nabla}^2 F(N, N).
\end{aligned}$$

Ahora, usando el teorema de la divergencia para variedades sin borde (Teorema 1.20) y la Proposición 1.13, tenemos lo siguiente:

$$0 = \int_\Sigma \operatorname{div}\left(\frac{\partial F}{\partial N}\nabla f\right)\, \mathrm{d}\Sigma = \int_\Sigma \left(\langle \nabla f, \nabla\frac{\partial F}{\partial N}\rangle + \frac{\partial F}{\partial N}\Delta f\right)\, \mathrm{d}\Sigma.$$

Usando estos resultados junto con la fórmula *5)* de la Proposición 1.39 y volviendo a (4.2) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\left(\overline{\Delta} F\right)^2 - |\overline{\nabla}^2 F|^2 - \overline{\mathrm{Ric}}\left(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F\right) \right) \, \mathrm{d}\Omega \\
&\quad = \int_\Sigma \left(\overline{\nabla}^2 F\left(\overline{\nabla} F, N\right) - \overline{\Delta} F \frac{\partial F}{\partial N} \right) \, \mathrm{d}\Sigma \\
&\quad = \int_\Sigma \left(\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle + \langle \nabla f, \nabla \frac{\partial F}{\partial N}\rangle - \frac{\partial F}{\partial N}\Delta f + nH \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \right) \, \mathrm{d}\Sigma \\
&\quad = \int_\Sigma \left(\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle - 2\frac{\partial F}{\partial N}\Delta f + nH \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \right) \, \mathrm{d}\Sigma. \qquad \square
\end{aligned}$$

4.3. Los teoremas de Alexandrov y Ros

Una de las principales aplicaciones de la fórmula de Reilly (4.1) es demostrar el llamado teorema de Alexandrov (Teorema 4.19), el cual dice que las únicas hipersuperficies compactas sin borde con curvatura media constante embebidas en el espacio euclídeo son las esferas. Este teorema fue demostrado por Alexandrov en 1958, en un artículo titulado *Uniqueness theorems for surfaces in the large* (véase [Al1]), usando el principio del máximo de Hopf y un método de reflexión. Sin embargo, en 1977 Reilly hizo una demostración del mismo teorema usando fórmulas integrales, entre ellas, su fórmula (véase [Re1]). Varios años más tarde, en 1988, Ros usó las ideas de la prueba de Reilly para demostrar que las únicas hipersuperficies compactas sin borde con curvatura escalar constante embebidas en el espacio euclídeo son las esferas (véase [Ro2]). El objetivo de esta sección será ver las demostraciones que hicieron Reilly y Ros. Para ello, me basaré en [Fe], [AM] y [Ro2].

Antes de enunciar los teoremas de Alexandrov y Ros vamos a ver algunos resultados previos que necesitaremos para llevar a cabo sus demostraciones.

4.3.1. Resultados previos

Proposición 4.13 (Primera fórmula de Minkowski)**.** *Sea Σ una hipersuperficie inmersa, compacta y sin borde. Supongamos que la inmersión es $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, entonces*

$$\int_\Sigma (1 + H\langle \psi - a, N\rangle) \, \mathrm{d}\Sigma = 0, \tag{4.3}$$

donde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es fijo y N es el campo normal unitario.

Demostración. El resultado se demuestra simplemente aplicando el teorema de la divergencia (Teorema 1.20) al laplaciano de $f = \langle \psi - a, \psi - a\rangle$, cuyo valor ya se calculó en la Proposición 1.40. $\square$

Proposición 4.14 (Segunda fórmula de Minkowski)**.** *Sea Σ una hipersuperficie inmersa, compacta y sin borde. Supongamos que la inmersión es $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, entonces*

$$n(n-1)\int_\Sigma H \, \mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \left(n^2H^2 - |A|^2\right)\langle \psi - a, N\rangle \, \mathrm{d}\Sigma, \tag{4.4}$$

donde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es un vector fijo y N es el campo normal unitario.

Demostración. Para demostrar el resultado vamos a partir de la fórmula *2)* de la Proposición 1.41 y vamos a usar la Proposición 1.40. Además, con el objetivo de simplificar la notación, sean f_1 y f_2 las siguientes funciones:

$$f_1 = \langle \psi - a, \psi - a\rangle, \quad f_2 = \langle \psi - a, N\rangle.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta f_2 &= -n\langle \nabla H, (\psi - a)^\top\rangle - nH - f_2|A|^2 \\ &= -\frac{n}{2}\langle \nabla H, \nabla f_1\rangle - nH - f_2|A|^2. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora, usando la Proposición 1.13 y la Proposición 1.40,

$$\mathrm{div}(H\nabla f_1) = \langle \nabla H, \nabla f_1\rangle + H\Delta f_1 = \langle \nabla H, \nabla f_1\rangle + H2n(1 + f_2H). \tag{4.6}$$

Si usamos las expresiones (4.5) y (4.6) obtenemos lo siguiente:

$$\Delta f_2 = \frac{n}{2}\left[H2n(1 + f_2H) - \mathrm{div}(H\nabla f_1)\right] - nH - f_2|A|^2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \Delta f_2 + \frac{n}{2}\mathrm{div}(H\nabla f_1) &= n^2H(1 + f_2H) - nH - f_2|A|^2 \\ &= n^2H + n^2H^2f_2 - nH - f_2|A|^2 \\ &= n(n-1)H + f_2\left(n^2H^2 - |A|^2\right). \end{aligned}$$

El resultado queda probado simplemente aplicando el teorema de la divergencia para variedades sin borde (Teorema 1.20). $\square$

Proposición 4.15 (Fórmula del volumen)**.** *Sea Σ una hipersuperficie compacta y embebida en $\mathbb{R}^{n+1}$ de modo que Σ es la frontera de un dominio Ω con clausura compacta $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega = \Sigma$. Sea N el normal unitario interior a lo largo de Σ. Entonces,*

$$V(\Omega) = \frac{-1}{n+1} \int_\Sigma \langle \psi - a, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma, \tag{4.7}$$

donde $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ es fijo y $V(\Omega)$ es el volumen $(n+1)$-dimensional de Ω.

Demostración. Para demostrar este resultado vamos a aplicar el teorema de la divergencia (Teorema 4.11) a la función $F(x) = \langle x - a, x - a \rangle$ con $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, obteniendo

$$\int_\Omega \overline{\Delta} F \, \mathrm{d}\Omega = - \int_\Sigma \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma.$$

Ahora, usando la Proposición 1.40,

$$2(n+1)V(\Omega) = -2 \int_\Sigma \langle \psi - a, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma,$$

de donde despejando el volumen obtenemos lo que queríamos. □

Proposición 4.16. *Sea Σ una hipersuperficie compacta e inmersa en el espacio euclídeo mediante $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces Σ tiene al menos un punto elíptico.*

Demostración. Sea $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(p) = \langle \psi(p), \psi(p) \rangle.$$

Como Σ es compacta, sabemos que existe un punto $p_0 \in \Sigma$ en el que la función f alcanza su máximo absoluto. Entonces sabemos que $\nabla f(p_0) = 0$ y $\nabla^2 f_{p_0}(v, v) \leq 0$ para todo $v \in T_{p_0}\Sigma$. Además, como la función es positiva en todo punto, vamos a denotar por R^2 al valor máximo, es decir, $f(p_0) = R^2$.

Ahora, sean $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y sea Z un campo diferenciable sobre $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, usando las fórmulas de Gauss (1.4) y Weingarten (1.5) y teniendo en cuenta que $Z = Z^\top + \langle Z, N \rangle N$ con N el normal unitario,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \left(Z^\top\right), Y \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \left(Z^\top\right), Y \rangle - \langle \langle AX, Y \rangle N, Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \left(Z^\top\right), Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X \left(Z - \langle Z, N \rangle N\right), Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Z, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_X \left(\langle Z, N \rangle N\right), Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Z, Y \rangle - X\left(\langle Z, N \rangle\right) \langle N, Y \rangle - \langle Z, N \rangle \langle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_X Z, Y \rangle + \langle Z, N \rangle \langle AX, Y \rangle.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A continuación, dados $v, w \in T_{p_0}\Sigma$, si usamos la la Proposición 1.40 y la expresión (4.8) obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla^2 f_{p_0}(v,w) &= \langle \nabla_v(\nabla f), w\rangle = \langle \nabla_v(2\psi^\top), w\rangle \\ &= 2\langle \overline{\nabla}_v \psi, w\rangle + 2\langle \psi, N\rangle(p_0)\langle A_{p_0}v, w\rangle \\ &= 2\langle v, w\rangle + 2\langle \psi, N\rangle(p_0)\langle A_{p_0}v, w\rangle.\end{aligned}$$

Entonces, si tomamos una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormal en $T_{p_0}\Sigma$ que diagonalice el endomorfismo de Weingarten A_{p_0},

$$\nabla^2 f_{p_0}(e_i, e_i) = 2 + 2\langle \psi, N\rangle(p_0)\langle k_i(p_0)e_i, e_i\rangle = 2 + 2\langle \psi, N\rangle(p_0)k_i(p_0),$$

donde k_i es la i-ésima curvatura principal.

Así, como $\nabla^2 f_{p_0}(v,v) \leq 0$ para todo vector $v \in T_{p_0}\Sigma$, obtenemos

$$2 + 2\langle \psi, N\rangle(p_0)k_i(p_0) \leq 0,$$

es decir,

$$\langle \psi, N\rangle(p_0)k_i(p_0) \leq -1. \tag{4.9}$$

Si nos fijamos, el hecho de que $\nabla f(p_0) = 0$ nos indica que $\psi^\top(p_0) = 0$, y esto nos dice que $\psi(p_0)$ está en la dirección normal a Σ en p_0, es decir, nos indica que $\psi(p_0) = \lambda N(p_0)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Más aún, como $f(p_0) = R^2$ y $f(p_0) = |\psi(p_0)|^2 = \lambda^2$, sabemos que $\psi(p_0) = \pm R N(p_0)$ con $R > 0$. Por tanto,

$$\langle \psi(p_0), N(p_0)\rangle = \pm R.$$

Entonces, si $\langle \psi, N\rangle(p_0) = R$, la desigualdad (4.9) se transforma en

$$k_i(p_0) \leq -1/R.$$

Por el contrario, si $\langle \psi, N\rangle(p_0) = -R$, la desigualdad (4.9) se transformará en

$$k_i(p_0) \geq 1/R.$$

De esta manera, en ambos casos sucede que todas las curvaturas principales tienen el mismo signo, por lo que p_0 es un punto elíptico. $\square$

Corolario 4.17. *Sea Σ una hipersuperficie compacta y embebida en el espacio euclídeo mediante $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Además, sea p_0 un punto elíptico. Entonces, si tomamos N el normal interior (resp. exterior) todas las curvaturas principales serán positivas (resp. negativas) en ese punto.*

Demostración. Para demostrar este resultado simplemente tenemos que darnos cuenta de que, en la Proposición 4.16, las condiciones $\langle \psi, N\rangle(p_0) = R$ y $\langle \psi, N\rangle(p_0) = -R$ son equivalentes, respectivamente, a $N(p_0) = \psi(p_0)/R$ y $N(p_0) = -\psi(p_0)/R$. $\square$

Proposición 4.18. *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$. Entonces,*

$$S = n^2H^2 - |A|^2.$$

Demostración. En primer lugar, observemos que si tomamos una base ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_n\}$ de $T\Sigma$, por la expresión (1.7) se tiene:

$$\langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle = \langle \overline{R}(X, E_i)Y, E_i\rangle + \langle AX, Y\rangle\langle AE_i, E_i\rangle - \langle AX, E_i\rangle\langle AE_i, Y\rangle.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X, Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X, E_i)Y, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \overline{R}(X, E_i)Y, E_i\rangle + \langle AX, Y\rangle nH - \langle AX, AY\rangle \\
&= \overline{\mathrm{Ric}}(X, Y) - \langle \overline{R}(X, N)N, N\rangle + \langle AX, Y\rangle nH - \langle AX, AY\rangle.
\end{aligned}$$

Como nuestro espacio ambiente es $\mathbb{R}^{n+1}$ y tiene curvatura seccional constantemente nula, si usamos la Proposición 1.36 y el Corolario 1.37, obtenemos que el tensor de Riemann y la curvatura de Ricci son constantes iguales a cero. Entonces,

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \langle AX, Y\rangle nH - \langle AX, AY\rangle. \tag{4.10}$$

Por tanto,

$$S = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}) = nH\mathrm{tr}(A) - |A|^2 = n^2H^2 - |A|^2.$$ $\square$

Vistos estos resultados, ya estamos en las condiciones necesarias como para poder comprender las dos demostraciones.

4.3.2. Teoremas

Teorema 4.19 (Teorema de Alexandrov)**.** *Las únicas hipersuperficies compactas y sin borde con curvatura media constante embebidas en el espacio euclídeo son las esferas.*

Demostración. Sea Σ^n una hipersuperficie compacta con curvatura media constante y embebida en $\mathbb{R}^{n+1}$ de modo que Σ es la frontera de un dominio Ω con clausura compacta $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega = \Sigma$. Sea N el normal unitario interior a lo largo de Σ.

Sea $F \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ la solución al siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \overline{\Delta} F &= 1 \text{ en } \Omega \\ F &= 0 \text{ en } \Sigma \end{cases} \tag{4.11}$$

Bajo estas condiciones, la fórmula de Reilly (4.1) queda de la siguiente forma:

$$\int_\Omega \left(1 - |\overline{\nabla}^2 F|^2\right) \, \mathrm{d}\Omega = \int_\Sigma nH \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \, \mathrm{d}\Sigma.$$

Por otro lado, por el Lema 3.21 sabemos que $|\overline{\nabla}^2 F|^2 \geq 1/(n+1)$ con igualdad si, y sólo si, $\overline{\nabla}^2 F = \langle \, , \, \rangle/(n+1)$.

Vamos a centrarnos primero en la desigualdad.

$$\int_\Omega \left(1 - |\overline{\nabla}^2 F|^2\right) \, \mathrm{d}\Omega \leq \int_\Omega \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \, \mathrm{d}\Omega = \frac{n}{n+1} V(\Omega).$$

Entonces,

$$\int_\Sigma H \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \, \mathrm{d}\Sigma \leq \frac{1}{n+1} V(\Omega). \tag{4.12}$$

Ahora, si aplicamos el teorema de la divergencia (Teorema 4.11), obtenemos

$$V(\Omega) = \int_\Omega \overline{\Delta} F \, \mathrm{d}\Omega = -\int_\Sigma \langle \overline{\Delta} F, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma = -\int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N} \, \mathrm{d}\Sigma,$$

y si a esto último le aplicamos la desigualdad de Schwarz se llega a

$$\begin{aligned} V(\Omega)^2 = \left(\int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N} \, \mathrm{d}\Sigma\right)^2 &\leq \left(\int_\Sigma 1 \, \mathrm{d}\Sigma\right) \int_\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \, \mathrm{d}\Sigma \\ &= A(\Sigma) \int_\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \, \mathrm{d}\Sigma, \end{aligned} \tag{4.13}$$

donde $A(\Sigma)$ es el volumen n-dimensional de Σ.

Tengamos en cuenta a partir de ahora que H es constante. Además, como Σ es compacta, tiene un punto elíptico por la Proposición 4.16, es decir, un punto en el que todas las curvaturas principales son positivas con respecto al normal unitario interior. Debido a esto, tenemos que H es una constante positiva. Ahora, si juntamos las fórmulas obtenidas en (4.12) y (4.13),

$$\frac{V(\Omega)}{n+1} \geq \int_\Sigma H \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \, \mathrm{d}\Sigma \geq H \frac{V(\Omega)^2}{A(\Sigma)},$$

es decir,

$$H \leq \frac{A(\Sigma)}{(n+1)V(\Omega)}. \tag{4.14}$$

A continuación, fijémonos en la primera fórmula de Minkowski (4.3) y usemos que H es una constante positiva. La fórmula se queda, tomando $a = 0$, de la siguiente forma:

$$A(\Sigma) + H \int_\Sigma \langle \psi, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma = 0 \iff \int_\Sigma \langle \psi, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma = -\frac{A(\Sigma)}{H}. \tag{4.15}$$

Si hacemos lo mismo con la fórmula del volumen (4.7), entonces

$$(n+1)V(\Omega) + \int_\Sigma \langle \psi, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma = 0 \iff \int_\Sigma \langle \psi, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma = -(n+1)V(\Omega). \tag{4.16}$$

Uniendo los resultados de (4.15) y (4.16), obtenemos

$$\frac{A(\Sigma)}{H} = (n+1)V(\Omega) \iff H = \frac{A(\Sigma)}{(n+1)V(\Omega)}.$$

Si nos fijamos, hemos llegado a la igualdad de (4.14), lo que significa que todas las desigualdades que hemos ido usando en realidad eran igualdades. Esto implica que tenemos la igualdad en el Lema 3.21, es decir,

$$\overline{\nabla}^2 F = \frac{1}{n+1} \langle \, , \, \rangle.$$

Como nuestro ambiente es el espacio euclídeo, esto se traduce en

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \frac{1}{n+1}.$$

Vamos a resolver la ecuación diferencial para obtener la función F que cumple esta condición.

Si $i \neq j$,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial x_i} = h(x_i),$$

con h una cierta función definida sobre $\mathbb{R}$. Ahora, como

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = h'(x_i),$$

entonces la función h es de la forma

$$h(x_i) = \frac{1}{n+1} x_i + a_i, \quad \text{con} \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Para continuar, fijemos $i = 1$ e integremos la igualdad

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{1}{n+1} x_1 + a_1.$$

De esta forma se llega a

$$F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\frac{x_1^2}{2} + a_1 x_1 + C_1(x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

donde C_1 es una función que depende de las variables $x_2, \ldots, x_{n+1}$. Ahora, como

$$\frac{1}{n+1} x_2 + a_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{\partial C_1}{\partial x_2},$$

el valor de C_1 dependerá de una función C_2.

$$C_1(x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\frac{x_2^2}{2} + a_2 x_2 + C_2(x_3, \ldots, x_{n+1}).$$

Si continuamos de esta manera, acabaremos llegando a la siguiente expresión para F:

$$\begin{aligned} F(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \frac{1}{n+1}\frac{x_1^2}{2} + a_1 x_1 + \ldots + \frac{1}{n+1}\frac{x_{n+1}^2}{2} + a_{n+1} x_{n+1} + C \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left(|\vec{x}|^2 + 2(n+1)\langle \vec{a}, \vec{x} \rangle + 2(n+1)C\right) \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left(|\vec{x} + (n+1)\vec{a}|^2 - (n+1)^2 |\vec{a}|^2 + 2(n+1)C\right), \end{aligned}$$

donde $C \in \mathbb{R}$, $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_{n+1})$ y $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1})$.

Ahora, vamos a usar la condición de la frontera de nuestro problema de Dirichlet (4.11). Esta condición nos lleva a

$$F(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{x} + (n+1)\vec{a}|^2 = (n+1)\left((n+1)|\vec{a}|^2 - 2C\right),$$

es decir, $\Sigma \subset \mathbb{S}^n(-(n+1)\vec{a}, r)$, donde $r^2 = (n+1)\left((n+1)|\vec{a}|^2 - 2C\right)$. Por tanto, como Σ es compacta y conexa, entonces es igual a dicha esfera tal y como queríamos demostrar. □

Teorema 4.20 (Teorema de Ros)**.** *Las únicas hipersuperficies compactas y sin borde con curvatura escalar constante embebidas en el espacio euclídeo son las esferas.*

Demostración. Sea Σ^n una hipersuperficie compacta con S constante embebida en $\mathbb{R}^{n+1}$ de modo que Σ es la frontera de un dominio Ω con clausura compacta $\overline{\Omega}$, $\partial\Omega = \Sigma$. Sea N el normal unitario interior a lo largo de Σ.

En primer lugar, observemos que si aplicamos la Proposición 3.20 al operador forma A, obtenemos que

$$|A|^2 \geq nH^2, \tag{4.17}$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, Σ es umbilical en todo punto.

Ahora, usando (4.17) junto con la Proposición 4.18, llegamos a

$$\begin{aligned} n(n-1)H^2 - S &= n(n-1)H^2 - n^2H^2 + |A|^2 \\ &= -nH^2 + |A|^2 = -nH^2 + |A|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

con igualdad si, y sólo si, Σ es umbilical en todo punto. Si nos fijamos, la condición de igualdad es equivalente a que Σ sea una esfera. Es decir, hemos obtenido que

$$n(n-1)H^2 \geq S, \tag{4.18}$$

con igualdad si, y sólo si, Σ es una esfera.

Fijémonos ahora en que, como Σ es compacta y estamos tomando el normal interior, la Proposición 4.16 y el Corolario 4.17 nos indican que existe un punto elíptico en el que todas las curvaturas principales son positivas. Este hecho y la Proposición 4.18 nos indican, por un lado, que H es positiva en todo punto, y por otro lado, que S debe ser una constante positiva, ya que

$$S = n^2H^2 - |A|^2 = (tr(A))^2 - \mathrm{tr}(A^2) = \left(\sum_{i=1}^n k_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n k_i^2 = 2\sum_{i<j} k_i k_j.$$

Debido a lo anterior, podemos escribir (4.18) como

$$\sqrt{S} \leq \sqrt{n(n-1)}H. \tag{4.19}$$

Ahora, integrando,

$$\sqrt{S}A(\Sigma) \leq \sqrt{n(n-1)} \int_\Sigma H \, \mathrm{d}\Sigma.$$

Por último, tomando cuadrados,

$$SA(\Sigma)^2 \leq n(n-1) \left(\int_\Sigma H \, \mathrm{d}\Sigma \right)^2. \tag{4.20}$$

A continuación, vamos usar la segunda fórmula de Minkowski (4.4) junto con la fórmula del volumen (4.7) para obtener lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= n(n-1) \int_\Sigma H \, \mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma S\langle \psi, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma \\ &= n(n-1) \int_\Sigma H \, \mathrm{d}\Sigma + S \int_\Sigma \langle \psi, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma \\ &= n(n-1) \int_\Sigma H \, \mathrm{d}\Sigma - S(n+1)V(\Omega). \end{aligned}$$

Es decir,

$$\int_\Sigma H \, \mathrm{d}\Sigma = \frac{n+1}{n(n-1)} SV(\Omega). \tag{4.21}$$

Si ahora juntamos (4.20) y (4.21), obtenemos

$$SA(\Sigma)^2 \leq n(n-1) \left[\frac{n+1}{n(n-1)} SV(\Omega) \right]^2.$$

De esta manera, hemos llegado a

$$\frac{n(n-1)A(\Sigma)^2}{(n+1)^2 V(\Omega)^2} \leq S, \tag{4.22}$$

donde recordemos que la igualdad se daba si, y sólo si, Σ es una esfera. Por tanto, nuestro objetivo será ver que se satisface la desigualdad contraria para así tener la igualdad. Para ello, sea F la solución al siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \overline{\Delta} F & = & 1 \text{ en } \Omega \\ F & = & 0 \text{ en } \Sigma. \end{cases}$$

Observemos ahora que si aplicamos el teorema de la divergencia para variedades con borde (Teorema 4.11), tenemos lo siguiente:

$$V(\Omega) = \int_\Omega \overline{\Delta} F \, \mathrm{d}\Omega = -\int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N} \, \mathrm{d}\Sigma. \tag{4.23}$$

Entonces, combinando (4.19) y (4.23) junto con la desigualdad de Schwarz,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma H \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \mathrm{d}\Sigma &\geq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n(n-1)}} \int_\Sigma \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \mathrm{d}\Sigma \\ &\geq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n(n-1)}A(\Sigma)} \left(\int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N} \, \mathrm{d}\Sigma\right)^2 \\ &= \frac{\sqrt{S} V(\Omega)^2}{\sqrt{n(n-1)}A(\Sigma)}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

A continuación, al igual que hicimos en la demostración del teorema de Alexandrov (Teorema 4.19), podemos aplicar la fórmula de Reilly (4.1) junto con el Lema 3.21 para llegar a

$$\int_\Sigma H \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \mathrm{d}\Sigma \leq \frac{V(\Omega)}{n+1}. \tag{4.25}$$

Si ahora juntamos (4.24) y (4.25), obtenemos

$$\frac{V(\Omega)}{n+1} \geq \frac{\sqrt{S} V(\Omega)^2}{\sqrt{n(n-1)}A(\Sigma)},$$

de donde, tomando cuadrados y despejando S,

$$\frac{n(n-1)}{(n+1)^2} \frac{A(\Sigma)^2}{V(\Omega)^2} \geq S.$$

Por tanto, como se da la igualdad en (4.22), tenemos que Σ es una esfera tal y como queríamos demostrar. $\square$

4.4. El teorema de Lichnerowicz y Obata para variedades con borde

Otra de las principales aplicaciones de la fórmula de Reilly (4.1) es una versión generalizada del teorema de Lichnerowicz y Obata (Teorema 3.1) para el caso de variedades con borde. De este teorema generalizado podemos encontrar dos versiones muy similares. La primera, debida a Reilly y disponible en [Re1], es un resultado para el caso en el que la función F asociada al primer valor propio no nulo cumple las condiciones de frontera de Dirichlet, es decir, $F = 0$ en ∂M. La segunda versión, disponible en [Es] (y también en [PRS]), es para cuando F cumple las condiciones de frontera de Neumann, es decir, cuando satisface $\partial F/\partial N = 0$ en ∂M. Las referencias usadas van a ser los tres artículos mencionados.

Comenzaremos por la versión del teorema dada por Reilly. Para ello necesitaremos hacer uso del siguiente teorema, el cual es una generalización del teorema de Obata (Teorema 3.22).

Teorema 4.21. *Sea M^n una variedad riemanniana compacta con frontera y supongamos que existe una función F no constante satisfaciendo*

$$\begin{cases} \overline{\nabla}^2 F + cFg = 0 & \text{en } M \\ F \geq 0 & \text{en } M \\ F = 0 & \text{en } \partial M \end{cases}$$

con $c > 0$. Entonces M es isométrica a $\mathbb{S}^n_+(1/\sqrt{c})$, es decir, es isométrica al hemisferio de radio $1/\sqrt{c}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$.

A continuación, vamos a ver el teorema y su demostración.

Teorema 4.22. *Sea M^n una variedad riemanniana compacta con frontera ∂M y sea λ_1 el primer valor propio no nulo del operador laplaciano. Supongamos que la función propia F asociada a λ_1 cumple $F = 0$ en ∂M y que existe una constante $c > 0$ tal que $\overline{\mathrm{Ric}} \geq (n-1)c$. Supongamos además que $H \geq 0$ con respecto al campo normal interior. Entonces $\lambda_1 \geq nc$. Más aún, la igualdad se da si, y sólo si, M es isométrica al hemisferio $\mathbb{S}^n_+(r)$ de radio $r = 1/\sqrt{c}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Comenzaremos esta demostración haciendo uso de la fórmula de Reilly (4.1) y aplicándola a nuestro caso particular dado por las hipótesis del enunciado.

$$\begin{aligned}&\int_M \left(\left(\overline{\Delta}F\right)^2 - |\overline{\nabla}^2 F|^2 - \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla}F, \overline{\nabla}F)\right) \,\mathrm{d}M \\ &\quad= \int_{\partial M} nH \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \,\mathrm{d}\partial M.\end{aligned} \tag{4.26}$$

Ahora, fijémonos en que, usando el Lema 3.21, tenemos que

$$\frac{n}{n-1}\left[\left(\overline{\Delta}F\right)^2 - |\overline{\nabla}F|^2\right] \leq \frac{n}{n-1}\left[\left(\overline{\Delta}F\right)^2 - \frac{1}{n}\left(\overline{\Delta}F\right)^2\right] = \left(\overline{\Delta}F\right)^2. \tag{4.27}$$

Entonces, combinando las expresiones (4.26) y (4.27) y usando las hipótesis de que $\overline{\Delta}F + \lambda_1 F = 0$ y $\overline{\mathrm{Ric}} \geq (n-1)c$, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 \int_M F^2 \,\mathrm{d}M &= \int_M \left(\overline{\Delta}F\right)^2 \,\mathrm{d}M \geq \frac{n}{n-1}\int_M \left(\left(\overline{\Delta}F\right)^2 - |\overline{\nabla}F|^2\right) \,\mathrm{d}M \\ &= \frac{n}{n-1}\left(\int_{\partial M} nH\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \,\mathrm{d}\partial M + \int_M \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla}F, \overline{\nabla}F)\,\mathrm{d}M\right) \\ &\geq \frac{n}{n-1}\left(\int_{\partial M} nH\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 \,\mathrm{d}\partial M + (n-1)c\int_M |\overline{\nabla}F|^2 \,\mathrm{d}M\right) \\ &\geq nc\int_M |\overline{\nabla}F|^2 \,\mathrm{d}M = nc\lambda_1 \int_M F^2 \,\mathrm{d}M,\end{aligned}$$

donde para la última igualdad se ha usado la caracterización mín-máx de λ_1 dada por Teorema 1.29.

De esta manera, hemos obtenido $\lambda_1 \geq nc$ tal y como queríamos.

Supongamos ahora que se da la igualdad $\lambda_1 = nc$. Esto quiere decir que en el Lema 3.21 también se da la igualdad, por lo que

$$\overline{\nabla}^2 F = \frac{\overline{\Delta}F}{n} = \frac{-\lambda_1 F}{n} = -cF.$$

Por otro lado, por hipótesis sabemos que F se anula en la frontera. Además, por ser la función propia del primer valor propio no nulo y estar tomando el normal interior, sabemos que $F \geq 0$ en M. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 4.21 para finalizar nuestra demostración. □

A continuación vamos a ver la segunda versión de la generalización. La demostración va a ser análoga a la anterior y, de hecho, también necesitaremos un resultado previo muy similar al Teorema 4.21.

Teorema 4.23. *Sea M^n una variedad riemanniana compacta con frontera y supongamos que existe una función F no constante satisfaciendo*

$$\begin{cases} \overline{\nabla}^2 F + cFg = 0 & \text{en } M \\ \frac{\partial F}{\partial N} = 0 & \text{en } \partial M \end{cases}$$

con $c > 0$. Entonces M es isométrica a $\mathbb{S}^n_+(1/\sqrt{c})$, el hemisferio de radio $1/\sqrt{c}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$.

Teorema 4.24. *Sea M^n una variedad riemanniana compacta con frontera ∂M convexa y sea λ_1 el primer valor propio no nulo del operador laplaciano. Supongamos que la función propia F asociada a λ_1 cumple $\partial F/\partial N = 0$ en ∂M y que existe una constante $c > 0$ tal que $\overline{\mathrm{Ric}} \geq (n-1)c$. Entonces $\lambda_1 \geq nc$. Más aún, la igualdad se da si, y sólo si, M es isométrica a un hemisferio de radio $1/\sqrt{c}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. De nuevo, comencemos aplicando la fórmula de Reilly (4.1) a nuestra situación. De esta manera obtenemos

$$\int_M \left(\left(\overline{\Delta} F\right)^2 - |\overline{\nabla}^2 F|^2 - \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F) \right) \mathrm{d}M$$
$$= \int_{\partial M} \langle A(\nabla f), \nabla f \rangle \, \mathrm{d}\partial M,$$

donde $f = F|_{\partial M}$.

Ahora, usando el Lema 3.21 tal y como hicimos en (4.27),

$$\int_M \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F) \, \mathrm{d}M + \int_{\partial M} \langle A(\nabla f), \nabla f \rangle \, \mathrm{d}\partial M$$
$$= \int_M \left(\left(\overline{\Delta} F\right)^2 - |\overline{\nabla} F|^2 \right) \mathrm{d}M \leq \frac{n-1}{n} \int_M \left(\overline{\Delta} F\right)^2 \, \mathrm{d}M.$$

Si a continuación usamos la hipótesis de que ∂M es convexa, es decir que $\langle AX, X \rangle \geq 0$ con respecto al normal interior para todo campo $X \in \mathfrak{X}(\partial M)$, junto con la hipótesis sobre la curvatura de Ricci, llegamos a

$$\frac{1}{n} \int_M \left(\overline{\Delta} F\right)^2 \, \mathrm{d}M \geq \frac{1}{n-1} \left(\int_M \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F) \, \mathrm{d}M + \int_{\partial M} \langle A(\nabla f), \nabla f \rangle \, \mathrm{d}\partial M \right)$$
$$\geq \frac{1}{n-1} \int_M \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F) \, \mathrm{d}M \geq c \int_M |\overline{\nabla} F|^2 \, \mathrm{d}M.$$

Ahora, si nos fijamos,

$$\int_M \left(\overline{\Delta} F\right)^2 \, \mathrm{d}M = \int_M (-\lambda_1 F)^2 \, \mathrm{d}M = \lambda_1^2 \int_M F^2 \, \mathrm{d}M,$$

por lo que

$$\frac{1}{n}\lambda_1^2 \int_M F^2 \,\mathrm{d}M = \frac{1}{n}\int_M \left(\overline{\Delta} F\right)^2 \,\mathrm{d}M \geq c \int_M |\overline{\nabla} F|^2 \,\mathrm{d}M.$$

Es decir,

$$\frac{\lambda_1^2}{nc} \geq \frac{\int_M |\overline{\nabla} F|^2 \,\mathrm{d}M}{\int_M F^2 \,\mathrm{d}M} = \lambda_1,$$

donde para la última igualdad se ha usado la caracterización mín-máx de λ_1 dada por el Teorema 1.29.

Así, $\lambda_1 \geq nc$ como queríamos demostrar.

Supongamos que tenemos la igualdad $\lambda_1 = nc$. Esto quiere decir que se da la igualdad en el Lema 3.21 y que por tanto $\overline{\nabla}^2 F + cF = 0$. Además, como por hipótesis tenemos que $\partial F/\partial N = 0$ en ∂M, podemos aplicar el Teorema 4.23 para obtener que entonces M es isométrica a un hemisferio de radio $1/\sqrt{c}$ con la métrica inducida por $\mathbb{R}^{n+1}$. $\square$

Capítulo 5

Estimaciones del primer valor propio del operador laplaciano

A lo largo de esta memoria hemos demostrado varios resultados y hemos podido estudiar algunas de sus aplicaciones más importantes. En este capítulo podremos ver cómo muchos de esos resultados se pueden combinar para dar lugar a estimaciones del primer valor propio no nulo del operador laplaciano. Esto no es nuevo en la memoria, puesto que ya en el Capítulo 3 pudimos ver una primera estimación para variedades dada por una desigualdad (el teorema de Lichnerowicz y Obata, Teorema 3.1), incluso demostramos que la igualdad se daba en el caso de las esferas. También en el Capítulo 4 pudimos ver resultados de este tipo extendidos al caso de variedades con borde.

El objetivo del actual capítulo será estudiar más estimaciones trabajando con hipersuperficies, tanto inmersas como embebidas. De estas estimaciones, cabe destacar el hecho de que en casi todas ellas la igualdad se va a dar en el caso de que la hipersuperficie sea una esfera.

5.1. Resultados de Reilly

Vamos a comenzar por unos resultados demostrados por Reilly, en 1977, en un artículo titulado *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space* (véase [Re2]). Tal y como dice el propio Reilly en su artículo, su idea no es completamente nueva y está inspirada en el artículo *Extrinsic bounds on* λ_1 *of* Δ *on a compact manifold*, publicado en 1976 por Bleecker y Weiner (véase [BW]). La diferencia entre estos dos artículos está en la codimensión con la que se trabaja; mientras que Bleecker y Weiner trabajan con codimensión arbitraria, Reilly se centra en las hipersuperficies.

A continuación, vamos a ver algunos resultados del artículo [Re2] junto con unas pocas definiciones y proposiciones previas.

Definición 5.1. Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa en el espacio euclídeo con $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ la inmersión. Se define el *centro de masas* de Σ como

$$c = \frac{1}{A(\Sigma)} \int_\Sigma \psi \, \mathrm{d}\Sigma,$$

donde recordemos que $A(\Sigma)$ es el volumen n-dimensional de Σ.

Proposición 5.2. *Sea Σ^n una hipersuperficie inmersa en el espacio euclídeo mediante $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, si suponemos que Σ tiene centro de masas c, se cumple*

$$\int_\Sigma (\psi - c) \, \mathrm{d}\Sigma = 0.$$

Demostración. Por ser c el centro de masas,

$$\int_\Sigma (\psi - c) \, \mathrm{d}\Sigma = cA(\Sigma) - \int_\Sigma c \, \mathrm{d}\Sigma = cA(\Sigma) - cA(\Sigma) = 0. \qquad \square$$

Lema 5.3. *Sea Σ^n una hipersuperficie compacta inmersa en el espacio euclídeo mediante $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y con centro de masas c. Entonces,*

$$\lambda_1 \leq \frac{nA(\Sigma)}{\int_\Sigma |\psi - c|^2 \, \mathrm{d}\Sigma},$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, la hipersuperficie es igual a una esfera $\mathbb{S}^n(c, r)$ con $r > 0$.

Demostración. Sea $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \langle x - c, a \rangle$ con $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ un vector fijo de norma uno. Consideremos además $f = F \circ \psi$, es decir, $f(p) = \langle \psi(p) - c, a \rangle$. Ahora, usando la Proposición 5.2 tenemos

$$\int_\Sigma f \, \mathrm{d}\Sigma = \int_\Sigma \langle \psi - c, a \rangle \, \mathrm{d}\Sigma = \langle \int_\Sigma (\psi - c) \, \mathrm{d}\Sigma, a \rangle = 0.$$

Entonces, si consideramos $f_i = \langle \psi - c, e_i \rangle = (\psi - c)_i$ con $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ la base canónica en $\mathbb{R}^{n+1}$, estas funciones también cumplen $\int_\Sigma f_i = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n+1\}$, así que podemos aplicarles el Teorema 1.29 para obtener

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Sigma |\nabla f_i|^2 \, \mathrm{d}\Sigma}{\int_\Sigma f_i^2 \, \mathrm{d}\Sigma}.$$

Ahora, usando la Proposición 1.42,

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_\Sigma (1 - \langle e_i, N\rangle^2)\ \mathrm{d}\Sigma}{\int_\Sigma f_i^2\ \mathrm{d}\Sigma} = \frac{A(\Sigma) - \int_\Sigma N_i^2\ \mathrm{d}\Sigma}{\int_\Sigma f_i^2\ \mathrm{d}\Sigma}.$$

Así,

$$\lambda_1 \int_\Sigma f_i^2\ \mathrm{d}\Sigma \leq A(\Sigma) - \int_\Sigma N_i^2\ \mathrm{d}\Sigma.$$

Si sumamos todas las coordenadas tenemos

$$\sum_{i=1}^{n+1} \left(\lambda_1 \int_\Sigma f_i^2\ \mathrm{d}\Sigma \right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \left(A(\Sigma) - \int_\Sigma N_i^2\ \mathrm{d}\Sigma \right).$$

Entonces,

$$\lambda_1 \int_\Sigma \sum_{i=1}^{n+1} f_i^2\ \mathrm{d}\Sigma \leq \sum_{i=1}^{n+1} A(\Sigma) - \int_\Sigma \sum_{i=1}^{n+1} N_i^2\ \mathrm{d}\Sigma,$$

por lo que

$$\lambda_1 \int_\Sigma |\psi - c|^2\ \mathrm{d}\Sigma \leq (n+1)A(\Sigma) - A(\Sigma) = nA(\Sigma).$$

A continuación vamos a caracterizar cuándo se da la igualdad. Para ello, por la caracterización mín-máx (Teorema 1.29), sabemos que ésta se dará si f_i es función propia del primer valor propio no nulo. Es decir, si $\Delta f_i + \lambda_1 f_i = 0$. Esto es equivalente a

$$\Delta(\psi - c) + \lambda_1(\psi - c) = 0,$$

de donde, usando la fórmula de Laplace-Beltrami (1.8),

$$nHN + \lambda_1(\psi - c) = 0. \tag{5.1}$$

Ahora, tomemos $X \in \mathfrak{X}(M)$. Entonces, derivando y usando la fórmula de Weingarten (1.5) obtenemos lo siguiente:

$$0 = \overline{\nabla}_X(nHN + \lambda_1(\psi - c)) = nX(H)N - nHAX + \lambda_1 X. \tag{5.2}$$

Igualando partes tangentes en (5.2) obtenemos

$$X(H) = 0$$

para todo campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, de donde podemos deducir que H es constante.

Por otro lado, si en vez de las partes tangentes igualamos las partes normales en (5.2), tenemos que

$$-nHAX + \lambda_1 X = 0$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, por lo que $H \neq 0$ (puesto que si H fuera constantemente cero entonces el campo X también lo sería y no tendría sentido).

Entonces, tomando normas en (5.1) y usando que H es constante y distinta de cero, llegamos a lo siguiente:

$$\lambda_1(\psi - c) = -nHN \quad \Rightarrow \quad \lambda_1|\psi - c|^2 = n^2H^2 \quad \Rightarrow \quad |\psi - c|^2 = \frac{n^2H^2}{\lambda_1^2}.$$

Por tanto, Σ es una esfera $\mathbb{S}^n(c, r)$ con $r = n^2H^2/\lambda_1^2$ tal y como queríamos demostrar. $\square$

Teorema 5.4. *Sea Σ^n una hipersuperficie compacta e inmersa en el espacio euclídeo mediante $\psi : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces, el primer valor propio no nulo del laplaciano, λ_1, cumple*

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{A(\Sigma)} \int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\Sigma, \tag{5.3}$$

$$\lambda_1 \leq \frac{nA(\Sigma)}{n^2(n-1)^2 \left(\int_\Sigma H^2 \, \mathrm{d}\Sigma\right)^2} \int_\Sigma S^2 \, \mathrm{d}\Sigma, \quad y \tag{5.4}$$

$$\lambda_1 \leq \frac{nA(\Sigma)^2}{\left(\int_\Sigma \langle \psi - c, N\rangle \, \mathrm{d}\Sigma\right)^2}, \tag{5.5}$$

donde c es el centro de masas de la hipersuperficie. Además, en cualquiera de las desigualdades la igualdad se da si, y sólo si, Σ es una esfera $\mathbb{S}^n(c, r)$ con $r > 0$.

Demostración. Para demostrar (5.3) comenzaremos multiplicando cada uno de los miembros de la desigualdad del Lema 5.3 por la integral de la curvatura media al cuadrado. De esta manera, usando la desigualdad de Schwarz junto con la primera fórmula de Minkowski (4.3) y el hecho de que

$$H\langle \psi - c, N\rangle \leq |H\langle \psi - c, N\rangle| \leq |H||\psi - c|,$$

obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
nA(\Sigma)\int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\Sigma &\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma |\psi-c|^2\,\mathrm{d}\Sigma\right)\left(\int_\Sigma H^2\,\mathrm{d}\Sigma\right)\\
&\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma |H||\psi-c|\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2\\
&\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma H\langle\psi-c,N\rangle\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2\\
&= \lambda_1\left(-\int_\Sigma 1\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2 = \lambda_1 A(\Sigma)^2.
\end{aligned}$$

La demostración de (5.4) es análoga, pero en este caso multiplicaremos por la integral de la curvatura escalar al cuadrado y usaremos la segunda fórmula de Minkowski (4.4).

$$\begin{aligned}
nA(\Sigma)\int_\Sigma S^2\,\mathrm{d}\Sigma &\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma |\psi-c|^2\,\mathrm{d}\Sigma\right)\left(\int_\Sigma S^2\,\mathrm{d}\Sigma\right)\\
&\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma |S||\psi-c|\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2\\
&\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma S\langle\psi-c,N\rangle\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2\\
&= \lambda_1\left(-n(n-1)\int_\Sigma H\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2\\
&= \lambda_1 n^2(n-1)^2\left(\int_\Sigma H\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2.
\end{aligned}$$

Por último, la demostración de (5.5) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
nA(\Sigma)^2 &\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma |\psi-c|^2\,\mathrm{d}\Sigma\right)A(\Sigma)\\
&= \lambda_1\left(\int_\Sigma |\psi-c|^2\,\mathrm{d}\Sigma\right)\left(\int_\Sigma 1^2\,\mathrm{d}\Sigma\right)\\
&\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma |\psi-c|\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2\\
&\geq \lambda_1\left(\int_\Sigma \langle\psi-c,N\rangle\,\mathrm{d}\Sigma\right)^2.
\end{aligned}$$

La igualdad en los tres casos es consecuencia directa del Lema 5.3. □

Corolario 5.5. *Si $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un embebimiento de manera que $\Sigma = \partial\Omega$ con Ω un dominio con clausura compacta, entonces*

$$\lambda_1 \leq \frac{nA(\Sigma)^2}{(n+1)^2 V(\Omega)^2},$$

con igualdad si, y sólo si, Ω es una bola y $\partial\Omega = \Sigma$ es una esfera.

Demostración. Si aplicamos la fórmula del volumen (4.7) a la expresión (5.5) del Teorema 5.4, obtenemos

$$nA(\Sigma)^2 \geq \lambda_1 \left(\int_\Sigma \langle \psi - c, N \rangle \, \mathrm{d}\Sigma \right)^2 = \lambda_1 (n+1)^2 V(\Omega)^2,$$

con igualdad si, y sólo si, Σ es una esfera $\mathbb{S}^n(c, r)$ con $r > 0$. □

5.2. Resultados de Garay

Los siguientes resultados que vamos a ver proceden del artículo publicado por Garay en 1989 y titulado *An application of Reilly's formula* (véase [Ga]). En dicho artículo se estudia una aplicación directa de la fórmula de Reilly (4.1) a los ovaloides. La referencia usada para esta parte es el propio artículo [Ga].

Definición 5.6. Un *ovaloide* en $\mathbb{R}^{n+1}$ es una hipersuperficie compacta y embebida con curvatura de Gauss-Kronecker distinta de 0 en todo punto.

Observemos que si Σ es un ovaloide entonces $k_i(p) > 0$ para todo punto $p \in \Sigma$ si tomamos N el campo normal interior. Y esto es equivalente a que el operador forma A_p sea definido positivo en todo $p \in \Sigma$.

Teorema 5.7. *Sea Σ un ovaloide con su embebimiento dado por la aplicación $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y sea Ω el dominio regular encerrado por Σ con $\overline{\Omega}$ compacto. Consideremos sobre Σ la orientación inducida por N el normal unitario interior. Entonces,*

$$\max H \geq \frac{(n+1)V(\Omega)}{r^2 A(\Sigma)},$$

donde r es el radio de la esfera circunscrita alrededor de Σ. Además, se da la igualdad si, y sólo si, Σ es una esfera de radio r y centro el centro de masas de la hipersuperficie.

Demostración. Sea Σ la hipersuperficie del enunciado y supongamos que $\mathbb{S}^n(c,r)$ es la esfera circunscrita a su alrededor con c el centro de masas de la hipersuperficie.

Como nuestro espacio ambiente es $\mathbb{R}^{n+1}$, la fórmula de Reilly (4.1) queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left((\overline{\Delta} F)^2 - |\overline{\nabla}^2 F|^2 \right) \,\mathrm{d}\Omega \\ &\quad = \int_\Sigma \left(\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle + nH \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{\partial N}\Delta f \right) \,\mathrm{d}\Sigma.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Vamos a aplicar la fórmula (5.6) a la función $F(x) = |x-c|^2$. Entonces, por la Proposición 1.40 se tiene que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left((\overline{\Delta} F)^2 - |\overline{\nabla}^2 F|^2 \right) \,\mathrm{d}\Omega &= \int_\Omega \left[(2(n+1))^2 - 4(n+1) \right] \,\mathrm{d}\Omega \\ &= 4(n+1)(n+1-1)\int_\Omega 1 \,\mathrm{d}\Omega \\ &= 4(n+1)nV(\Omega).\end{aligned}$$

Para el segundo miembro de (5.6), usando la fórmula del volumen (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma \left(nH \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{\partial N}\Delta f \right) \,\mathrm{d}\Sigma \\ &\quad = \int_\Sigma \left[nH \left(2\langle \psi - c, N\rangle\right)^2 - 2\left(2\langle \psi - c, N\rangle\right)\left(2n + 2nH\langle \psi - c, N\rangle\right) \right] \,\mathrm{d}\Sigma \\ &\quad = \int_\Sigma \left(4nH\langle \psi - c, N\rangle^2 - 8n\langle \psi - c, N\rangle - 8nH\langle \psi - c, N\rangle^2 \right) \,\mathrm{d}\Sigma \\ &\quad = \int_\Sigma \left(-8n\langle \psi - c, N\rangle - 4nH\langle \psi - c, N\rangle^2 \right) \,\mathrm{d}\Sigma \\ &\quad = -8n\left[-(n+1)V(\Omega)\right] - 4n\int_\Sigma H\langle \psi - c, N\rangle^2 \,\mathrm{d}\Sigma \\ &\quad = 8n(n+1)V(\Omega) - 4n\int_\Sigma H\langle \psi - c, N\rangle^2 \,\mathrm{d}\Sigma.\end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_\Sigma \langle A(\nabla f), \nabla f\rangle \,\mathrm{d}\Sigma = -4n(n+1)V(\Omega) + 4n\int_\Sigma H\langle \psi - c, N\rangle^2 \,\mathrm{d}\Sigma. \tag{5.7}$$

Ahora, dado $p \in \Sigma$ y usando que Σ es un ovaloide (nótese el hecho de que hasta ahora no habíamos necesitado la hipótesis), observemos que

$$\int_\Sigma \langle A(\nabla f(p)), \nabla f(p)\rangle \, \mathrm{d}\Sigma \geq 0,$$

donde la igualdad se da si, y sólo si, $\nabla f(p) = 0$. Es decir, la igualdad se da cuando $f = |\psi - c|^2 = r^2$, lo cual es equivalente a decir que $\Sigma \subset \mathbb{S}^n(c, r)$. Además, como Σ es compacta, esto último implica que Σ es igual a la esfera.

Por otro lado, como $0 < H \leq \text{máx}\, H$ y $\langle \psi - c, N\rangle^2 \leq |\psi - c|^2 \leq r^2$, entonces

$$H\langle \psi - c, N\rangle^2 \leq |\psi - c|^2 \, \text{máx}\, H \leq r^2 \, \text{máx}\, H. \tag{5.8}$$

Usando (5.7) junto con (5.8) obtenemos

$$0 \leq \int_\Sigma \langle A(\nabla f(p)), \nabla f(p)\rangle \, \mathrm{d}\Sigma \leq 4n \left[-(n+1)V(\Omega) + r^2 A(\Sigma)\, \text{máx}\, H\right],$$

por lo que

$$-(n+1)V(\Omega) + r^2 A(\Sigma)\, \text{máx}\, H \geq 0.$$

Entonces,

$$\text{máx}\, H \geq \frac{(n+1)V(\Omega)}{r^2 A(\Sigma)},$$

con igualdad si, y sólo si, $\Sigma = \mathbb{S}^n(c, r)$. □

Proposición 5.8. *Sea Σ un ovaloide con embebimiento $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ y sea Ω el dominio regular encerrado por Σ con $\overline{\Omega}$ compacto. Consideremos sobre Σ la orientación inducida por N el normal unitario interior. Entonces,*

$$\text{máx}\, H \geq \frac{(n+1)V(\Omega)}{nA(\Sigma)}\lambda_1,$$

con igualdad si, y sólo si, Σ es una esfera de radio r y centro el centro de masas de la hipersuperficie.

Demostración. Si partimos de la expresión (5.7) del Teorema 5.7 y usamos la desigualdad (5.8) y el Lema 5.3, obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
0 &\leq -4n(n+1)V(\Omega) + 4n \int_\Sigma H\langle \psi - c, N\rangle^2 \, \mathrm{d}\Sigma \\
&\leq -4n(n+1)V(\Omega) + 4n \int_\Sigma |\psi - c|^2 \, \text{máx}\, H \, \mathrm{d}\Sigma \\
&\leq -4n(n+1)V(\Omega) + 4n \, \text{máx}\, H \frac{nA(\Sigma)}{\lambda_1} \\
&= 4n \left[-(n+1)V(\Omega) + \frac{n}{\lambda_1} A(\Sigma)\, \text{máx}\, H\right].
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$-(n+1)V(\Omega) + \frac{n}{\lambda_1} A(\Sigma) \max H \geq 0,$$

con igualdad si, y sólo si, Σ es una esfera. $\square$

5.3. Una estimación para hipersuperficies minimales

Los próximos resultados que van a aparecer en la memoria proceden del artículo *A first eigenvalue estimate for minimal surfaces*, publicado en 1983 por Choi y Wang (véase [CW]). En este artículo se vuelve a ver una aplicación de la fórmula de Reilly (4.1) que nos permite obtener una cota para el primer valor propio no nulo. La referencia usada será el artículo original [CW].

Teorema 5.9. *Sea Σ^n una hipersuperficie compacta y minimal (es decir, con curvatura media H igual a cero) embebida en una variedad riemanniana $\overline{M}^{n+1}$ compacta. Supongamos que la curvatura de Ricci de $\overline{M}$ está acotada inferiormente por una constante positiva c. Entonces $\lambda_1(\Sigma) \geq c/2$, donde $\lambda_1(\Sigma)$ es el primer valor propio del laplaciano de Σ.*

Demostración. Como la curvatura de Ricci de $\overline{M}$ es estrictamente positiva y $\overline{M}$ es compacta, el primer número de Betti de $\overline{M}$ es cero aplicando el Corolario 2.13. Combinando esto con la hipótesis de que $\overline{M}$ y Σ son orientables se tiene, por el teorema generalizado de Jordan-Brower, que Σ divide a $\overline{M}$ en dos componentes Ω_1 y Ω_2 tales que $\partial\Omega_1 = \Sigma = \partial\Omega_2$ (para más detalles véase [Wh] y [Wi]).

Sea f una función propia de Σ asociada al primer valor propio no nulo, es decir, tal que $\Delta f + \lambda_1 f = 0$, donde $\lambda_1 = \lambda_1(\Sigma)$. Además, sea F la solución al siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \overline{\Delta} F & = & 0 \ \text{(en } \Omega_1) \\ F|_{\partial\Omega_1} & = & F|_{\Sigma} \ = \ f \end{cases}$$

Vamos a usar la fórmula de Reilly (4.1) tomando N_1 el normal interior con respecto a Ω_1 y A_1 el operador forma asociado a N_1. Entonces, como $\overline{\Delta} F = 0$ en Ω_1, $H = 0$ por ser Σ minimal y $\Delta f = -\lambda_1 f$, la fórmula queda de la siguiente manera:

$$\int_\Sigma \langle A_1(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma + 2\lambda_1 \int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N_1} f \, \mathrm{d}\Sigma$$
$$= -\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla}^2 F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1 - \int_{\Omega_1} \overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F) \, \mathrm{d}\Omega_1.$$

Ahora, usando que $-\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla}^2 F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1 \leq 0$ y que $\overline{\mathrm{Ric}}(\overline{\nabla} F, \overline{\nabla} F) \geq c|\overline{\nabla} F|^2$ obtenemos

$$\int_\Sigma \langle A_1(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma + 2\lambda_1 \int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N_1} f \, \mathrm{d}\Sigma \leq -c \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1.$$

Supongamos que $\int_\Sigma \langle A_1(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma \geq 0$, en ese caso

$$-c \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1 \geq 2\lambda_1 \int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N_1} f \, \mathrm{d}\Sigma.$$

Usando el teorema de la divergencia (Teorema 4.11) y la Proposición 1.13,

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \frac{\partial F}{\partial N_1} f \, \mathrm{d}\Sigma &= \int_{\partial\Omega_1} \langle \overline{\nabla} F, N_1\rangle f \, \mathrm{d}\partial\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \langle F\overline{\nabla} F, N_1\rangle \, \mathrm{d}\partial\Omega_1 \\ &= -\int_{\Omega_1} \overline{\mathrm{div}}\left(F\overline{\nabla} F\right) \, \mathrm{d}\Omega_1 = -\int_{\Omega_1} \left(\overline{\nabla} F(F) + f\,\overline{\mathrm{div}}\left(\overline{\nabla} F\right)\right) \, \mathrm{d}\Omega_1 \\ &= -\int_{\Omega_1} \left(|\overline{\nabla} F|^2 + f\overline{\Delta} F\right) \, \mathrm{d}\Omega_1 = -\int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1.\end{aligned}$$

De esta manera,

$$-c \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1 \geq -2\lambda_1 \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1,$$

lo cual implica que

$$(2\lambda_1 - c) \int_{\Omega_1} |\overline{\nabla} F|^2 \, \mathrm{d}\Omega_1 \geq 0.$$

Por tanto, como la integral es estrictamente positiva por ser F no constante, entonces $\lambda_1 \geq c/2$.

En el caso de que $\int_\Sigma \langle A_1(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma \leq 0$, trabajaríamos en Ω_2 tomando N_2 el normal interior con respecto a Ω_2. De esta manera, como $N_2 = -N_1$ y $A_2 = -A_1$, tendríamos

$$\int_\Sigma \langle A_2(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma = -\int_\Sigma \langle A_1(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma \geq 0$$

y podríamos proceder como hemos hecho antes. $\square$

Corolario 5.10. *Sea Σ una hipersuperficie compacta minimal embebida en $\mathbb{S}^{n+1}$ (la esfera usual de curvatura seccional 1). Entonces $\lambda_1(\Sigma) \geq n/2$.*

Demostración. Este corolario es una aplicación directa del Teorema 5.9, puesto que una hipersuperficie compacta embebida en $\mathbb{S}^{n+1}$ es orientable y la curvatura de Ricci de $\mathbb{S}^{n+1}$ es n, ya que, por la Proposición 1.36, $R(X,Y)Z = \langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X$ y entonces, dado un sistema referencial ortonormal local $\{E_1, \ldots, E_{n+1}\}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle R(X,E_i)Y, E_i\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} \left(\langle X,Y\rangle\langle E_i,E_i\rangle - \langle E_i,Y\rangle\langle X,E_i\rangle\right) \\
&= \langle X,Y\rangle \sum_{i=1}^{n+1} 1 - \sum_{i=1}^{n+1}\langle E_i,Y\rangle\langle X,E_i\rangle = \langle X,Y\rangle(n+1) - \langle X,Y\rangle \\
&= n\langle X,Y\rangle. \qquad \square
\end{aligned}$$

Para ver más aplicaciones del Teorema 5.9 podemos usar un resultado probado por Yang y Yau en 1980 (véase [YY]) que nos dice que dada una superficie riemanniana de género g y área A, se tiene que $\lambda_1 A \leq 8\pi(g+1)$.

Corolario 5.11. *Sea Σ^2 una superficie compacta y minimal embebida en una variedad $\overline{M}^3$ compacta. Supongamos además que la curvatura de Ricci de $\overline{M}$ está acotada inferiormente por una constante positiva c. Entonces*

$$A \leq 16\pi(g+1)/c.$$

Corolario 5.12. *Sea Σ una superficie minimal compacta embebida en $\mathbb{S}^3$. Entonces $A \leq 8\pi(g+1)$.*

5.4. Un resultado de Deshmukh

El último resultado que vamos a ver en esta memoria procede de un artículo titulado *Compact hypersurfaces in a Euclidean space* y publicado en 1998 por Deshmukh (véase [De]). En este artículo, en vez de dar una cota para el primer valor propio no nulo se demuestra que si éste está acotado de una cierta forma, entonces la hipersuperficie tiene que ser una esfera.

Teorema 5.13. *Sea Σ una hipersuperficie compacta, con curvatura de Ricci definida positiva e inmersa mediante $\psi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$. Si la curvatura escalar S y el primer valor propio no nulo del operador laplaciano λ_1 satisfacen la desigualdad $S \leq \lambda_1(n-1)$, entonces M es isométrica a una esfera en $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Demostración. Sea Σ la hipersuperficie del enunciado y supongamos que tiene centro de masas c. Además, sean f y ϕ las funciones definidas en Σ de la siguiente forma:

$$f = \frac{1}{2}|\psi - c|^2 \quad y \quad \phi = \langle \psi - c, N \rangle.$$

Por ser Σ una hipersuperficie, sabemos que $\psi - c = (\psi - c)^\top + \phi N$. Pero, por la Proposición 1.40, $\nabla f = (\psi - c)^\top$, por lo que $\psi - c = \nabla f + \phi N$. Entonces, dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y usando la fórmula de Weingarten (1.5),

$$\begin{aligned}
\langle X, \nabla\phi \rangle = X(\phi) = X(\langle \psi - c, N \rangle) &= \langle \overline{\nabla}_X(\psi - c), N \rangle + \langle \psi - c, \overline{\nabla}_X N \rangle \\
&= \langle X, N \rangle - \langle \psi - c, AX \rangle = -\langle \nabla f + \phi N, AX \rangle \\
&= -\langle \nabla f, AX \rangle - \langle \phi N, AX \rangle = \langle -A(\nabla f), X \rangle
\end{aligned}$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, por lo que $\nabla\phi = -A(\nabla f)$.

Sea $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base ortonormal local de $T\Sigma$, entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A(\nabla f)) &= \operatorname{tr}(\nabla(A(\nabla f))) = \operatorname{tr}(Y \mapsto \nabla_Y(A(\nabla f))) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{E_i}(A(\nabla f)), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A)(\nabla f), E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle A(\nabla_{E_i} \nabla f), E_i \rangle.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Ahora, si recordamos, en la demostración de la Proposición 1.40 obtuvimos la expresión (1.12), que con nuestra actual notación sería de la siguiente forma:

$$\nabla_X \nabla f = X + \phi AX. \tag{5.10}$$

Por otro lado, se cumple que $n\nabla H = \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A) E_i$. Para demostrar esto, tomemos $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ y usemos la ecuación de Codazzi (1.6). De esta forma tenemos

$$\begin{aligned}
\langle \nabla H, X \rangle = X(H) &= \frac{1}{n} X(\operatorname{tr}(A)) = \frac{1}{n} \nabla_X(\operatorname{tr}(A)) \\
&= \frac{1}{n} \operatorname{tr}(\nabla_X A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_X A) E_i, E_i \rangle \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle (\nabla_{E_i} A) X, E_i \rangle = \langle X, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\nabla_{E_i} A) E_i \rangle.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Partiendo de (5.9) y usando las expresiones (5.10) y (5.11) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(A(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{E_i}A)(\nabla f), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{E_i}A)(\nabla f), E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle AE_i, E_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle A\phi AE_i, E_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle(\nabla_{E_i}A)(\nabla f), E_i\rangle + nH + \phi\mathrm{tr}(A^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla f, (\nabla_{E_i}A)E_i\rangle + nH + \phi|A|^2 \\
&= \langle\nabla f, \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{E_i}A)E_i\rangle + nH + \phi|A|^2 \\
&= n\langle\nabla f, \nabla H\rangle + nH + \phi|A|^2,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\mathrm{div}(A(\nabla f)) = n\nabla f(H) + nH + \phi|A|^2. \tag{5.12}$$

Por otro lado, usando la Proposición 1.13,

$$\begin{aligned}
\phi\mathrm{div}(A(\nabla f)) &= \mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) - A(\nabla f)(\phi) \\
&= \mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) - \langle A(\nabla f), \nabla\phi\rangle \\
&= \mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) + \langle A(\nabla f), A(\nabla f)\rangle \\
&= \mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) + |A(\nabla f)|^2.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Ahora, combinando las expresiones (5.12) y (5.13), llegamos a

$$\mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) + |A(\nabla f)|^2 = n\phi\nabla f(H) + nH\phi + \phi^2|A|^2. \tag{5.14}$$

Observemos que, de nuevo por la Proposición 1.13,

$$\mathrm{div}(H\phi\nabla f) = \phi\nabla f(H) + H\mathrm{div}(\phi\nabla f). \tag{5.15}$$

Usando (5.15) en (5.14) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) + |A(\nabla f)|^2 \\
&\quad = n\mathrm{div}(H\phi\nabla f) - nH\mathrm{div}(\phi\nabla f) + nH\phi + \phi^2|A|^2.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Si ahora tenemos en cuenta que $\nabla\phi = -A(\nabla f)$ junto con la Proposición 1.13 y la Proposición 1.40, podemos observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle &= -\langle \nabla\phi, \nabla f\rangle = -\nabla f(\phi) = -\mathrm{div}(\phi\nabla f) + \phi\Delta f\\ &= -\mathrm{div}(\phi\nabla f) + n\phi(1 + H\phi).\end{aligned}$$

Ahora, multiplicando por nH,

$$nH\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle = -nH\mathrm{div}(\phi\nabla f) + n^2H\phi(1 + H\phi). \tag{5.17}$$

A continuación, combinando (5.16) y (5.17) junto con la Proposición 4.18,

$$\begin{aligned}\int_\Sigma nH\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle \,\mathrm{d}\Sigma &= \int_\Sigma \big(-nH\mathrm{div}(\phi\nabla f) + n^2H\phi(1 + H\phi)\big)\,\mathrm{d}\Sigma\\ &= \int_\Sigma \big(\mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) + |A(\nabla f)|^2 - \mathrm{div}(nH\phi\nabla f)\\ &\quad - nH\phi - \phi^2|A|^2 + n^2H\phi(1 + H\phi)\big)\,\mathrm{d}\Sigma\\ &= \int_\Sigma (\mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) - \mathrm{div}(nH\phi\nabla f) - nH\phi)\,\mathrm{d}\Sigma\\ &\quad + \int_\Sigma |A(\nabla f)|^2\,\mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \phi^2(n^2H^2 - |A|^2)\,\mathrm{d}\Sigma\\ &\quad + \int_\Sigma n^2H\phi\,\mathrm{d}\Sigma\\ &= \int_\Sigma |A(\nabla f)|^2\,\mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \phi^2 S\,\mathrm{d}\Sigma\\ &\quad + \int_\Sigma \big(n^2H\phi - nH\phi\big)\,\mathrm{d}\Sigma\\ &\quad + \int_\Sigma (\mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) - \mathrm{div}(nH\phi\nabla f))\,\mathrm{d}\Sigma.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma nH\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle \,\mathrm{d}\Sigma\\ &\quad= \int_\Sigma |A(\nabla f)|^2\,\mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \phi^2 S\,\mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \big(n^2H\phi - nH\phi\big)\,\mathrm{d}\Sigma\\ &\qquad+ \int_\Sigma (\mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) - \mathrm{div}(nH\phi\nabla f))\,\mathrm{d}\Sigma.\end{aligned} \tag{5.18}$$

Por la primera fórmula de Minkowski (4.3),

$$\int_\Sigma H\phi\,\mathrm{d}\Sigma = -A(\Sigma),$$

por lo que

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \left(n^2H\phi - nH\phi\right)\, \mathrm{d}\Sigma &= -n^2A(\Sigma) + nA(\Sigma)\\ &= (n-n^2)A(\Sigma)\\ &= -n(n-1)A(\Sigma).\end{aligned} \tag{5.19}$$

Por otro lado, usando el teorema de la divergencia (Teorema 1.20), sabemos lo siguiente:

$$\int_\Sigma \left(\mathrm{div}(\phi A(\nabla f)) - \mathrm{div}(nH\phi\nabla f)\right)\, \mathrm{d}\Sigma = 0. \tag{5.20}$$

Retomando (5.18) y teniendo en cuenta (5.19) y (5.20), obtenemos

$$\begin{aligned}&\int_\Sigma nH\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle\, \mathrm{d}\Sigma\\ &\quad= \int_\Sigma |A(\nabla f)|^2\, \mathrm{d}\Sigma + \int_\Sigma \phi^2 S\, \mathrm{d}\Sigma - n(n-1)A(\Sigma).\end{aligned} \tag{5.21}$$

Como c es el centro de masas, sabemos que satisface $\int_\Sigma \psi - c\, \mathrm{d}\Sigma = 0$ por la Proposición 5.2, así que podemos aplicar la caracterización mín-máx (Teorema 1.29) para llegar a

$$\int_\Sigma |\psi - c|^2\, \mathrm{d}\Sigma \leq \frac{nA(\Sigma)}{\lambda_1}. \tag{5.22}$$

Ahora, tomando normas en $\psi - c = \nabla f + \phi N$ obtenemos

$$|\psi - c|^2 = |\nabla f|^2 + \phi^2. \tag{5.23}$$

A continuación, combinando (5.22) y (5.23), y usando la hipótesis sobre la curvatura escalar, llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \phi^2 S\, \mathrm{d}\Sigma &= \int_\Sigma (|\psi - c|^2 - |\nabla f|^2) S\, \mathrm{d}\Sigma\\ &\leq \lambda_1(n-1)\int_\Sigma \left(|\psi - c|^2 - |\nabla f|^2\right)\, \mathrm{d}\Sigma\\ &\leq \lambda_1(n-1)\left(\frac{nA(\Sigma)}{\lambda_1} - \int_\Sigma |\nabla f|^2\, \mathrm{d}\Sigma\right)\\ &= n(n-1)A(\Sigma) - \lambda_1(n-1)\int_\Sigma |\nabla f|^2\, \mathrm{d}\Sigma\\ &\leq n(n-1)A(\Sigma).\end{aligned}$$

Entonces, si volvemos a (5.21),

$$\int_\Sigma nH\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma \leq \int_\Sigma |A(\nabla f)|^2 \, \mathrm{d}\Sigma,$$

de donde

$$\int_\Sigma nH\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma |A(\nabla f)|^2 \, \mathrm{d}\Sigma \leq 0.$$

Por otro lado, si usamos la expresión (4.10) obtenemos

$$\int_\Sigma \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \, \mathrm{d}\Sigma = n \int_\Sigma H\langle A(\nabla f), \nabla f\rangle \, \mathrm{d}\Sigma - \int_\Sigma |A(\nabla f)|^2 \, \mathrm{d}\Sigma.$$

De esta manera, hemos obtenido

$$\int_\Sigma \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \, \mathrm{d}\Sigma \leq 0,$$

pero por hipótesis la curvatura de Ricci es definida positiva, por lo que $\nabla f = 0$. Por tanto, como Σ es conexa, f es constante digamos que a $r^2/2$, y por tanto Σ es una esfera de radio r y centro c. $\square$

Índice alfabético

Bibliografía

[Al1] A. D. Aleksandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large. V. *Vestnik Leningrad Univ. Math.* **13** (1958), 5-8.

[Al2] L. J. Alías, *Análisis geométrico y geometría global de superficies: una introducción elemental.* IMPA, Brasil, RJ, 2006.

[AM] L. J. Alías y J. M. Malacarne, Hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Euclidean space. *Differential geometry*, Valencia, 2001, 28-58, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002.

[BGM] M. Berger, P. Gauduchon y E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemanniene.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[BW] D. Bleecker y J. Weiner, Extrinsic bounds on λ_1 of Δ on a compact manifold. *Comment. Math. Helv.* **51** (1976), 601-609.

[Bo] S. Bochner, Vector field and Ricci curvature, *Bull. Amer. Math. Soc* **52** (1946), 776-797.

[Ch1] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian geometry.* Pure and Applied Mathematics, 115. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984.

[Ch2] I. Chavel, *Riemannian geometry. A modern introduction. Second edition.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 98. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[CW] H. I. Choi y A. N. Wang, A first eigenvalue estimate for minimal hypersurfaces. *J. Differential Geom* **18** (1983), 559-562.

[De] S. Deshmukh, Compact hypersurfaces in a Euclidean space. *Quart. J. Math. Oxford Ser.(2)* **49** (1998), 35-41.

[Es] J. Escobar, Uniqueness theorems on conformal deformation of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate. *Comm. Pure Appl. Math.* **43** (1990), 857-883.

[Fe] M. C. Fernández Moya, *Hipersuperficies de curvatura media constante. El teorema de Alexandrov y sus generalizaciones.* Tesina de licenciatura. Universidad de Murcia, Murcia, 2004.

[Ga] O. J. Garay, An application of Reilly's formula. *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 176-178.

[Le1] J. M. Lee, *Riemannian manifolds. An introduction to curvature.* Graduate Texts in Mathematics, 176. Springer-Verlag, New York, 1997.

[Le2] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds. Second Edition.* Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer-Verlag, New York, 2013.

[Li1] P. Li, *Geometric analysis.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[Li2] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations.* Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.

[MS] S. B. Myers y N. E. Steenrod, The group of isometries of a Riemannian manifold. *Ann. Math.* **40** (1939), 400-416.

[Ob] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric to the sphere. *J. Math. Soc. Japan* **14** (1962), 333-340.

[On] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity.* Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York, 1983.

[PRS] S. Pigola, M. Rigoli y A. G. Setti, Some applications of integral formulas in Riemannian geometry and PDE's. *Milan J. Math.* **71** (2003), 219-281.

[Po] W. A. Poor, *Differential geometric structures.* McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.

[Re1] R. C. Reilly, Applications of the Hessian operator in a Riemannian manifold. *Indiana Univ. Math. J.* **26** (1977), 459-472.

[Re2] R. C. Reilly, On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space. *Comment. Math. Helv.* **52** (1977), 525-533.

[Ro1] A. Romero, *El espectro de una variedad riemanniana.* Tesina de licenciatura. Universidad de Granada, Granada, 1980.

[Ro2] A. Ros, Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. *J. Differential Geometry* **27** (1988), 215-220.

[SF] M. Sánchez Caja y J. L. Flores Dorado, *Introducción a la geometría diferencial de variedades. Variedades diferenciables y aplicaciones.* Editorial Académica Española, 2012.

[Wa] F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman and Co., Glenview, Ill.-London, 1971.

[Wh] P. A. White, Extensions of the Jordan-Brower separation theorem and its converse. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3** (1952), 488-498.

[Wi] R. L. Wilder, *Topology of manifolds.* Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. 32, 1949.

[Ya] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian geometry.* Pure and Applied Mathematics, No. 1, Marcel Dekker, Inc., New York, 1970.

[YY] P. Yang y S. T. Yau, Eigenvalue of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4)* **7** (1980), 55-63.