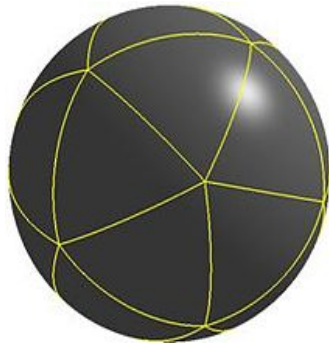




UNIVERSIDAD DE MURCIA  
FACULTAD DE MATEMÁTICAS  
TRABAJO FIN DE MÁSTER

**El teorema de clasificación de superficies  
compactas**



**José David Rodríguez Abellán**

Curso 2015-2016

dirigido por

José Antonio Pastor González y Luis José Alías Linares

## **Declaración de originalidad**

JOSÉ DAVID RODRÍGUEZ ABELLÁN, autor del TFM “EL TEOREMA DE CLASIFICACIÓN DE SUPERFICIES COMPACTAS”, bajo la tutela de los profesores JOSÉ ANTONIO PASTOR GONZÁLEZ y LUIS JOSÉ ALÍAS LINARES, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 1 de julio de 2016

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.)

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1. Superficies</b>	<b>9</b>
1.1. La topología cociente . . . . .	9
1.2. Superficies: una definición formal . . . . .	12
<b>2. Símplices, complejos y triangulaciones</b>	<b>15</b>
2.1. Símplices y complejos . . . . .	15
2.2. Triangulaciones . . . . .	22
<b>3. El grupo fundamental. Orientabilidad</b>	<b>25</b>
3.1. El grupo fundamental . . . . .	25
3.2. El índice de un lazo en el plano . . . . .	33
3.3. El grupo fundamental del plano agujereado . . . . .	36
3.4. El grado de una aplicación en el plano . . . . .	37
3.5. Orientabilidad de una superficie . . . . .	38
3.6. Superficies con frontera . . . . .	39
<b>4. Grupos de homología</b>	<b>43</b>
4.1. Grupos abelianos finitamente generados . . . . .	43
4.2. Homología simplicial y singular . . . . .	46
4.3. Grupos de homología de poliedros . . . . .	59
<b>5. El teorema de clasificación de superficies compactas</b>	<b>67</b>
5.1. Complejos celulares . . . . .	67
5.2. Formas normales de complejos celulares . . . . .	71
5.3. Demostración del teorema de clasificación . . . . .	82
5.4. Sumas conexas y el teorema de clasificación . . . . .	82
<b>Bibliografía</b>	<b>85</b>



# Introducción

El contenido principal de este trabajo, como su título indica, es el teorema de clasificación de superficies compactas. A lo largo de él presentaremos las herramientas necesarias para probar rigurosamente dicho teorema, para lo cual nos hemos basado en su mayoría en [4]; si bien se ha consultado otros textos con el fin de complementar y conseguir una máxima comprensión del mismo.

La prueba de este teorema requiere una gran cantidad de trabajo y maquinaria. De hecho, esto llevó más de 60 años de trabajo hasta que Brahana dio una prueba rigurosa en el año 1921. Möbius y Jordania, en 1861 y 1866 respectivamente, demostraron alguna versión del teorema, aunque ni siquiera existía por entonces la definición de superficie topológica.

Vamos a dar aquí una presentación informal del teorema y, posteriormente, presentaremos las herramientas básicas que nos serán útiles para demostrarlo: la definición de superficie, complejos simpliciales y triangulaciones, el grupo fundamental, orientabilidad y grupos de homología .

Para empezar, vamos a presentar cuál es el **problema** que vamos a estudiar en este trabajo. Nuestro objetivo es poder dar una lista de superficies, que llamaremos *formas normales*, de manera que toda superficie sea “equivalente” a una de la lista, donde entendemos que dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  son equivalentes si existe una “buena” biyección entre ellas.

El *teorema de clasificación* nos dice que, a pesar del hecho de que las superficies compactas pueden aparecer en diversas formas, estas pueden ser clasificadas, lo que quiere decir que toda superficie compacta es equivalente a una única superficie representativa, la cual es llamada *forma normal*.

Por supuesto, con el objetivo de hacer todo esto rigurosamente, hay que responder con detalle a las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué es una superficie?

2. ¿Cuál sería una definición adecuada de equivalencia de superficies?
3. ¿Cuáles son las formas normales?

Esto es precisamente lo que pretendemos hacer en este trabajo. Por el momento, vamos a decir solamente que una superficie es un espacio topológico con la propiedad de que alrededor de cada punto existe un subconjunto abierto que es homeomorfo a un disco abierto en el plano. Por otro lado, diremos que dos superficies  $S_1$  y  $S_2$  son equivalentes si existe una biyección continua  $f : S_1 \rightarrow S_2$  con inversa  $f^{-1}$  también continua. En otras palabras, existe un homeomorfismo entre ellas.

Pasamos ahora a presentar la **solución**. Toda prueba del teorema de clasificación de superficies compactas comprende dos etapas:

1. Un *paso topológico*. Este paso consiste en demostrar que toda superficie compacta puede ser triangulada.
2. Un *paso combinatorio*. Este paso consiste en demostrar que toda superficie triangulada puede ser convertida a una forma normal en un número finito de pasos, es decir, usando un número finito de transformaciones.

Con el fin de aclarar el primer paso, tenemos que explicar qué se entiende por *superficie triangulada*. Intuitivamente, una superficie puede ser triangulada si es homeomorfa a un espacio obtenido pegando triángulos a lo largo de sus bordes.

Por otro lado, también tenemos que decir que las formas normales de superficies se pueden distinguir por invariantes simples:

- (a) Su *orientabilidad* (orientable o no orientable).
- (b) Su *característica de Euler-Poincaré*, un número entero que recoge la cantidad de “agujeros” en la superficie.
- (c) Su número de *contornos* (componentes conexas de la frontera).

El hecho crucial que hace posible la demostración del teorema de clasificación de superficies compactas es que toda superficie compacta puede ser obtenida a partir de un conjunto de polígonos (posiblemente con lados curvados) en el plano, llamados *celdas* o *símplices*, pegando pares de bordes. Estos conjuntos de símplices representan superficies llamadas *complejos celulares*.

Tras desarrollar toda la maquinaria necesaria, en la que el Álgebra y la Topología jugarán un papel fundamental, llegaremos al siguiente resultado:

**Teorema 0.1.** *Todo complejo celular  $K$  puede ser convertido en un complejo celular en forma normal usando una secuencia de etapas que implican una transformación y su inversa: la división de un complejo celular y pegado de dos complejos celulares juntos.*

El siguiente paso es demostrar que las distintas formas normales no son equivalentes entre sí, es decir, no son homeomorfas.

En primer lugar, se puede demostrar que la orientabilidad de una superficie se preserva por las transformaciones para reducir a la forma normal. En segundo lugar, si dos superficies son homeomorfas, entonces tienen la misma naturaleza de orientabilidad (es decir, una es orientable si, y solo si, lo es la otra). La dificultad en este paso es definir adecuadamente lo que significa que una superficie sea orientable. En tercer lugar, podemos asignar un número invariante a toda superficie, su *característica de Euler-Poincaré*. Para una superficie triangulada  $S$ , si  $n_0$  es el número de vértices,  $n_1$  es el número de aristas, y  $n_2$  es el número de triángulos de la triangulación, entonces la característica de Euler-Poincaré está definida por:

$$\chi(S) = n_0 - n_1 + n_2,$$

que es una buena definición, pues se puede demostrar que esto no depende de la triangulación escogida.

Podemos demostrar que dos superficies homeomorfas tienen la misma característica de Euler-Poincaré y que distintas formas normales con el mismo tipo de orientabilidad tienen diferentes características de Euler-Poincaré. De esto se sigue que dos formas normales distintas corresponden a superficies que no son equivalentes.

Con todo esto obtendremos el siguiente teorema:

**Teorema 0.2.** *Dos superficies compactas (con o sin frontera) son homeomorfas si, y solo si, tienen el mismo tipo de orientabilidad, número de contornos y característica de Euler-Poincaré.*

Y una vez estudiado el concepto de suma conexa de superficies, podremos dar la siguiente versión:

**Teorema 0.3.** *Toda superficie compacta  $S$  es homeomorfa a una, y solo una, de las siguientes superficies:*

1.  $\mathbb{S}^2 \# p\mathbb{T}^2$ , donde  $p \geq 0$ , si es orientable.
2.  $p\mathbb{P}^2$ , donde  $p \geq 1$ , si no es orientable.

En el caso de superficies compactas con frontera tendremos el siguiente resultado:

**Teorema 0.4.** *Toda superficie compacta con frontera  $S$  es homeomorfa a una, y solo una, de las siguientes superficies:*

1.  $\mathbb{S}^2 \# p\mathbb{T}^2$  menos  $q$  discos, donde  $p \geq 0$ , si es orientable.
2.  $p\mathbb{P}^2$  menos  $q$  discos, donde  $p \geq 1$ , si no es orientable.



# Capítulo 1

## Superficies

### 1.1. La topología cociente

Como hemos comentado en la Introducción, las superficies pueden ser obtenidas pegando aristas de polígonos en el plano, y para definir este proceso rigurosamente necesitamos el concepto de topología cociente. En este capítulo repasaremos la construcción de la topología cociente sin entrar en muchos detalles, pues esto ya lo estudiamos con bastante profundidad en algunas asignaturas del Grado en Matemáticas, como por ejemplo, en la asignatura *Topología de Superficies*.

**Definición 1.1.** *Dado un espacio topológico  $X$ , un conjunto arbitrario  $Y$  y una función  $f : X \rightarrow Y$  sobreyectiva, definimos la **topología cociente sobre  $Y$  determinada por  $f$**  (también llamada la **identificación topológica sobre  $Y$  determinada por  $f$** ) de la siguiente manera: un subconjunto  $V \subset Y$  es abierto si el conjunto  $f^{-1}(V) \subset X$  es abierto en  $X$ .*

Tenemos el siguiente caso particular:

**Definición 1.2.** *Dada una relación de equivalencia  $R$  sobre un espacio topológico  $X$ , si  $\pi : X \rightarrow X/R$  es la proyección que asigna a cada punto  $x \in X$  su clase de equivalencia  $[x] \in X/R$ , el espacio  $X/R$  equipado con la topología cociente determinada por  $\pi$  es llamado el **espacio cociente de  $X$  módulo  $R$** .*

Teniendo en cuenta esto último, se tiene que un subconjunto  $V$  de clases de equivalencia en  $X/R$  es abierto si, y solo si,  $\pi^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , lo que es equivalente a que  $\bigcup_{[x] \in V} [x]$  es abierto en  $X$ .

Es inmediato comprobar que la Definición 1.1 define una topología en el espacio de llegada de la función y que  $f : X \rightarrow Y$  y  $\pi : X \rightarrow X/R$  son continuas cuando las topologías, en  $Y$  y en  $X/R$  respectivamente, son las topologías cociente.

**Ejemplo 1.3.** Consideremos  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  el cuadrado unidad con la topología inducida de  $\mathbb{R}^2$  y definamos en él la siguiente relación de equivalencia,  $R$ :

$$(x, 0) \sim (x, 1) \text{ para } 0 \leq x \leq 1,$$

$$(0, y) \sim (1, y) \text{ para } 0 \leq y \leq 1,$$

$$(x, y) \sim (x, y) \text{ para } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

El conjunto  $X/R$  junto con la topología cociente determinada por la aplicación proyección  $\pi : X \rightarrow X/R$ , que lleva cada elemento de  $X$  a su clase de equivalencia, es conocido como **toro** y lo denotaremos por  $\mathbb{T}^2$ .

**Ejemplo 1.4.** Consideremos  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  el cuadrado unidad con la topología inducida de  $\mathbb{R}^2$  y definamos en él la siguiente relación de equivalencia,  $R$ :

$$(x, 0) \sim (1 - x, 1) \text{ para } 0 \leq x \leq 1,$$

$$(0, y) \sim (1, 1 - y) \text{ para } 0 \leq y \leq 1,$$

$$(x, y) \sim (x, y) \text{ para } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

El conjunto  $X/R$  junto con la topología cociente determinada por la aplicación proyección  $\pi : X \rightarrow X/R$ , que lleva cada elemento de  $X$  a su clase de equivalencia, es conocido como **plano proyectivo** y lo denotaremos por  $\mathbb{P}^2$ .

**Ejemplo 1.5.** Consideremos  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  el cuadrado unidad con la topología inducida de  $\mathbb{R}^2$  y definamos en él la siguiente relación de equivalencia,  $R$ :

$$(x, 0) \sim (1 - x, 1) \text{ para } 0 \leq x \leq 1,$$

$$(x, y) \sim (x, y) \text{ para } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

El conjunto  $X/R$  junto con la topología cociente determinada por la aplicación proyección  $\pi : X \rightarrow X/R$ , que lleva cada elemento de  $X$  a su clase de equivalencia, es conocido como **banda de Möbius** y lo denotaremos por  $\mathbb{M}^2$ .

**Ejemplo 1.6.** Consideremos  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  el cuadrado unidad con la topología inducida de  $\mathbb{R}^2$  y definamos en él la siguiente relación de equivalencia,  $R$ :

$$(x, 0) \sim (1 - x, 1) \text{ para } 0 \leq x \leq 1,$$

$$(0, y) \sim (1, y) \text{ para } 0 \leq y \leq 1,$$

$$(x, y) \sim (x, y) \text{ para } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

El conjunto  $X/R$  junto con la topología cociente determinada por la aplicación proyección  $\pi : X \rightarrow X/R$ , que lleva cada elemento de  $X$  a su clase de equivalencia, es conocido como **botella de Klein** y lo denotaremos por  $\mathbb{K}^2$ .

Notemos que si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua y sobreyectiva, se tiene que no necesariamente  $Y$  tiene la topología cociente determinada por  $f$ . En efecto, puede no ser verdad que un subconjunto  $V \subset Y$  es abierto en  $Y$  cuando  $f^{-1}(V) \subset X$  es abierto en  $X$ . Sin embargo, esto siempre será verdad en dos casos importantes.

**Definición 1.7.** Diremos que una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es una **aplicación abierta** (o simplemente **abierta**) si  $f(U)$  es abierto en  $Y$  siempre que  $U$  sea abierto en  $X$ . Análogamente, diremos que una aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  es una **aplicación cerrada** (o simplemente **cerrada**) si  $f(F)$  es cerrado en  $Y$  siempre que  $F$  sea cerrado en  $X$ .

Así, tenemos que  $Y$  tiene la topología cociente inducida por la aplicación continua y sobreyectiva  $f : X \rightarrow Y$  si se cumple que  $f$  es abierta o  $f$  es cerrada. En efecto, si  $f$  es abierta, asumiendo que  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , tenemos que  $f(f^{-1}(V)) = V$  es abierto en  $Y$ . Por otro lado, como  $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$  para cualquier subconjunto  $B \subset Y$ , un subconjunto  $V \subset Y$  es abierto en la topología cociente si, y solo si,  $f^{-1}(Y \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V)$  es cerrado en  $X$ . Así, deducimos que si  $f$  es una aplicación cerrada, entonces  $V$  es abierto en  $Y$  si, y solo si,  $f^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ .

Entre las características deseables de la topología cociente, nos gustaría que la compacidad, la conexión, la conexión por arcos y el ser Hausdorff se preservara por la aplicación  $f : X \rightarrow Y$ . Como  $f : X \rightarrow Y$  y  $\pi : X \rightarrow X/R$  son continuas, esto se cumple para todas las propiedades excepto para la de ser Hausdorff, que por suerte sí que se cumple en algunos casos importantes.

**Proposición 1.8.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua y sobreyectiva, con  $X$  compacto e  $Y$  con la topología cociente determinada por  $f$ . Entonces se tiene que  $Y$  es Hausdorff si, y solo si,  $f$  es una aplicación cerrada.

La demostración de la Proposición 1.8 se puede consultar en cualquier libro de Topología General.

**Proposición 1.9.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos,  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua y sobreyectiva, y supongamos que  $Y$  tiene la topología cociente determinada por  $f$ . Si  $A$  es un subconjunto cerrado (resp. abierto) de  $X$  y  $f$  es una aplicación cerrada (resp. una aplicación abierta), entonces  $B = f(A)$  tiene la misma topología considerado como subespacio de  $Y$  que con la topología cociente inducida por  $f$ .

*Demostración.* Supongamos que  $A$  es un subconjunto abierto de  $X$  y que  $f$  es una aplicación abierta. Supongamos que  $B = f(A)$  tiene la topología de subespacio, es decir, los abiertos de  $B$  son de la forma  $B \cap U$ , donde  $U \subseteq Y$  es un conjunto abierto de  $Y$ . Como  $f$  es abierta, se tiene que  $B$  es abierto en  $Y$  y se tiene claramente

que  $f|_A : A \rightarrow B$  es una aplicación abierta. Pero entonces,  $B$  tiene la topología cociente inducida por  $f$ . La prueba en el caso de que  $A$  es cerrado y  $f$  es una aplicación cerrada es similar. □

## 1.2. Superficies: una definición formal

En esta sección vamos a definir el concepto de superficies abstractas. Intuitivamente, lo que distingue una superficie de un espacio topológico arbitrario es el hecho de que una superficie tiene la propiedad de que para cada punto de la superficie existe un entorno que es como una pequeña región en el plano. Más precisamente, una superficie es un espacio topológico que puede ser cubierto por conjuntos abiertos homeomorfos a conjuntos abiertos en el plano. Así, dado tal abierto  $U$  en la superficie  $S$ , existe un conjunto abierto  $\Omega$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  tal que  $U$  y  $\Omega$  son homeomorfos mediante un homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \Omega$ . El par  $(U, \varphi)$  es llamado normalmente un *sistema de coordenadas* o una *carta* de  $S$ , y la aplicación  $\varphi^{-1} : \Omega \rightarrow U$  es llamada una *parametrización* de  $U$ .

**Definición 1.10.** Para  $m \geq 1$ , una **variedad (topológica)  $m$ -dimensional** es un espacio topológico  $M$  que es Hausdorff y que satisface el segundo axioma de numerabilidad, junto con un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_{i \in I}$  y una familia  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de homeomorfismos  $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$ , donde cada  $\Omega_i$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición 1.11.** En las condiciones de la definición anterior, cada par  $(U_i, \varphi_i)$  es llamado un **sistema de coordenadas** o una **carta** (o **carta local**) de  $M$ . Cada homeomorfismo  $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$  es llamado un **mapa de coordenadas**, y su inversa  $\varphi_i^{-1} : \Omega_i \rightarrow U_i$  es llamada una **parametrización** de  $U_i$ . Para cada punto  $p \in M$ , para cada sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$  con  $\varphi : U \rightarrow \Omega$ , si  $p \in U$ , decimos que  $(\Omega, \varphi^{-1})$  es una **parametrización** de  $M$  en  $p$ . La familia  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  es llamada un **atlas** para  $M$ .

**Definición 1.12.** Una **superficie (topológica)** es una variedad 2-dimensional conexa.

En realidad, en la definición clásica de superficie no se exige que la variedad 2-dimensional sea conexa; sin embargo, toda superficie se descompone en una unión disjunta de superficies conexas, por lo que podemos suponer en la clasificación que son conexas. En lo que sigue trabajaremos con superficies compactas. Hemos de decir aquí que una variedad  $m$ -dimensional puede ser también una variedad  $n$ -dimensional para  $m \neq n$ . Sin embargo, aunque aquí no lo demostraremos, si la variedad  $m$ -dimensional es conexa, entonces la dimensión está unívocamente determinada (teorema de invariancia del dominio de Brouwer).

Como una variedad  $m$ -dimensional  $M$  tiene un cubrimiento abierto de conjuntos homeomorfos a conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^m$ , se tiene que una variedad  $m$ -dimensional es localmente conexa por arcos y localmente compacta. Además, las componentes conexas de una variedad  $m$ -dimensional son conexas por arcos, por lo que, en particular, una superficie conexa es conexa por arcos.

Un subconjunto abierto  $U$  de una superficie  $S$  es llamado una *región de Jordan* si su clausura  $\bar{U}$  es homeomorfa a un disco cerrado de  $\mathbb{R}^2$  de tal manera que el homeomorfismo lleva  $U$  al interior del disco y la frontera de  $U$  a la frontera del disco. Como cada punto de un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^2$  es el centro de un disco cerrado contenido en dicho conjunto abierto, tenemos que toda superficie tiene un cubrimiento abierto por regiones de Jordan.

Las triangulaciones son una herramienta fundamental para obtener una profunda comprensión de la topología de superficies. Para formular esta noción precisamente, necesitamos definir el concepto de *símplices* y *complejos simpliciales*.



# Capítulo 2

## Símplices, complejos y triangulaciones

### 2.1. Símplices y complejos

Como ya dijimos, toda superficie compacta va a poder ser triangulada, lo cual será un ingrediente principal en la demostración del teorema de clasificación. Informalmente, una triangulación es una colección de triángulos que satisfacen ciertas condiciones de adyacencia. Para dar una definición rigurosa de triangulación será de ayuda definir las nociones de símplex y complejo simplicial.

Para ello, recordemos que las propiedades de un espacio afín son invariantes tanto por aplicaciones lineales como por traslaciones. Recordemos también que si  $E$  es un espacio afín, para cualquier par de puntos  $a, b \in E$  existe un único vector  $\overrightarrow{ab}$  (en el espacio vectorial asociado a  $E$ ) tal que

$$b = a + \overrightarrow{ab}.$$

Dados  $n + 1$  puntos,  $a_0, a_1, \dots, a_n \in E$ , se dice que son *afínmente independientes* si, y solo si, los  $n$  vectores  $\{\overrightarrow{a_0a_1}, \dots, \overrightarrow{a_0a_n}\}$  son linealmente independientes. Dados  $n$  puntos  $a_1, \dots, a_n$  en un espacio afín  $E$ , una *combinación afín* de tales puntos es una combinación lineal

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n,$$

donde  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  y

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1.$$

Una *combinación convexa* es una combinación afín donde todos los  $\lambda_i$  son no negativos.

**Ejemplo 2.1.** Veamos  $\mathbb{R}$  como espacio afín (que denotamos por  $\mathbb{A}$ ). Dados dos puntos,  $a_0$  y  $a_1$  en  $\mathbb{A}$ , una combinación afín de tales puntos puede ser un punto cualquiera de  $\mathbb{A}$ , mientras que una combinación convexa es un punto perteneciente al segmento  $[a_0, a_1]$ .

**Ejemplo 2.2.** Veamos  $\mathbb{R}^2$  como espacio afín (que denotamos por  $\mathbb{A}^2$ ). Dados tres puntos,  $a_0$ ,  $a_1$  y  $a_2$  en  $\mathbb{A}^2$ , una combinación afín de tales puntos puede ser un punto cualquiera del plano, mientras que una combinación convexa es un punto del triángulo que determinan tales puntos.

Si tomamos cualquier punto  $a \in E$  como origen, entonces el espacio afín  $E$  está en  $\xrightarrow{a}$  biyección con el espacio vectorial consistente en todos los vectores de la forma  $\overrightarrow{ab}$  con  $b \in E$ . Nosotros a menudo usamos este hecho para definir objetos o aplicaciones en espacios afines usando definiciones de objetos o aplicaciones ya conocidas en el contexto de los espacios vectoriales. Cuando el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  lo veamos como espacio afín, lo denotaremos por  $\mathbb{A}^n$ . Un símlice es la envolvente convexa de un número finito de puntos afínmente independientes, aunque también tenemos que definir las caras, la frontera y el interior de un símlice.

**Definición 2.3.** Sea  $E$  un espacio afín. Dados  $n+1$  puntos afínmente independientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  en  $E$ , el  **$n$ -símlice** (o **símlice**)  $\sigma$  definido por  $a_0, \dots, a_n$  es la envolvente convexa de los puntos  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , esto es, el conjunto de todas las combinaciones convexas  $\lambda_0 a_0 + \dots + \lambda_n a_n$ , donde  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$  para todo  $0 \leq i \leq n$ . Lo denotamos por  $(a_0, \dots, a_n)$  y decimos que  $n$  es la **dimensión** del  $n$ -símlice  $\sigma$  y los puntos  $a_0, \dots, a_n$  son los **vértices** de  $\sigma$ .

**Definición 2.4.** Dado cualquier subconjunto  $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_k}\}$  de  $\{a_0, \dots, a_n\}$  (donde  $0 \leq k \leq n$ ), el  **$k$ -símlice** generado por  $a_{i_0}, \dots, a_{i_k}$  es llamado una **cara** de  $\sigma$ , que denotamos por  $(a_{i_0}, \dots, a_{i_k})$ . Una cara  $s$  de  $\sigma$  es una cara propia si  $s \neq \sigma$  (aceptamos que el conjunto vacío es una cara de cualquier símlice). Para cualquier vértice  $a_i$ , la cara generada por  $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$  es llamada la **cara opuesta** de  $a_i$ . Toda cara que es un  **$(n - 1)$ -símlice** es llamada una **cara frontera**. La unión de las caras frontera es la **frontera** de  $\sigma$ , denotada como  $\partial\sigma$ , y el complementario de  $\partial\sigma$  en  $\sigma$  es el **interior**  $\overset{\circ}{\sigma} = \sigma \setminus \partial\sigma$ .

Notemos que un 0-símlice consiste en un punto  $(a_0)$ , donde  $\partial(a_0) = \emptyset$ , y  $(a_0) = (a_0)$ . Un 1-símlice es el segmento de extremos  $a_0$  y  $a_1$ ,  $(a_0, a_1)$ , con ellos incluidos; un 2-símlice es el triángulo de vértices  $a_0, a_1$  y  $a_2$ ,  $(a_0, a_1, a_2)$ , con su interior; y un 3-símlice es el tetraedro de vértices  $a_0, a_1, a_2$  y  $a_3$ ,  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ , con su interior, como podemos ver en la Figura 2.1.

Vamos a enumerar una serie de propiedades de los símlices, cuyas pruebas omitiremos en este texto.



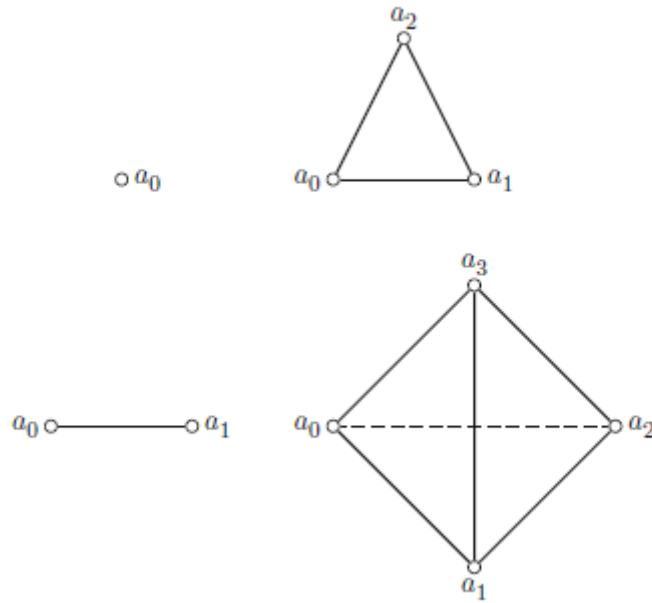


Figura 2.1: Ilustración extraída de [4] (p. 29). Ejemplos de símplices.

1. Un punto  $x$  pertenece a la frontera  $\partial\sigma$  de  $\sigma$  si, y solo si, al menos una de sus coordenadas baricéntricas  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  es cero, y un punto  $x$  pertenece al interior  $\overset{\circ}{\sigma}$  de  $\sigma$  si, y solo si, todas sus coordenadas baricéntricas  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  son positivas. En consecuencia, para cada  $x \in \sigma$  existe una única cara  $s$  tal que  $x \in \overset{\circ}{s}$ , la cara generada por los puntos  $a_i$  para los cuales  $\lambda_i > 0$ , donde  $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$  son las coordenadas baricéntricas de  $x$ .
2. Tanto el símplice  $\sigma$ , como su interior,  $\overset{\circ}{\sigma}$ , son convexos y conexos por arcos, donde  $\sigma$  es la clausura de  $\overset{\circ}{\sigma}$ .
3. Recordemos que la *bola unidad*  $\mathbb{B}^n$  es el conjunto de los puntos  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{A}^n$  tales que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$  y la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  es el conjunto de los puntos  $(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathbb{A}^n$  tales que  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$ . Dado un punto  $a \in \mathbb{A}^n$  y un vector no nulo  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ , el conjunto  $\{a + \lambda\vec{u} \mid \lambda \geq 0\}$  es llamado un *rayo con origen en a*. Se tiene que todo  $n$ -símplice es homeomorfo a la bola unidad  $\mathbb{B}^n$ , de tal manera que su frontera  $\partial\sigma$  es homeomorfa a la  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Nosotros probaremos un resultado más general sobre conjuntos convexos, pero primero necesitamos una proposición más simple.

**Proposición 2.5.** *Dado un espacio afín normado  $E$ , para cualquier conjunto convexo no vacío  $C$ , la clausura  $\overline{C}$  de  $C$  es también convexa. Además, si  $C$  es acotado entonces  $\overline{C}$  también es acotada.*

*Demostración.* En primer lugar, demostraremos lo siguiente: Para cualesquiera cuatro puntos  $a, b, a', b' \in E$ , para cualquier  $\epsilon > 0$  y para cualquier  $\lambda \geq 0$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ , tomando  $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$  y  $c' = (1 - \lambda)a' + \lambda b'$ , se tiene que si  $\|\vec{aa'}\| \leq \epsilon$  y  $\|\vec{bb'}\| \leq \epsilon$ , entonces  $\|\vec{cc'}\| \leq \epsilon$ . Esto es porque

$$\vec{cc'} = (1 - \lambda)\vec{aa'} + \lambda\vec{bb'},$$

y por tanto

$$\|\vec{cc'}\| \leq (1 - \lambda)\|\vec{aa'}\| + \lambda\|\vec{bb'}\| \leq (1 - \lambda)\epsilon + \lambda\epsilon = \epsilon.$$

Ahora, si  $a, b \in \overline{C}$ , por la definición de clausura, para cada  $\epsilon > 0$ , la bola abierta  $B_0(a, \epsilon/2)$  debe cortar a  $C$  en algún punto  $a'$ , la bola abierta  $B_0(b, \epsilon/2)$  debe cortar a  $C$  en algún punto  $b'$ , y por la inecuación demostrada anteriormente, tenemos que  $c' = (1 - \lambda)a' + \lambda b'$  pertenece a la bola  $B_0(c, \epsilon/2)$ . Como  $C$  es convexo,  $c' = (1 - \lambda)a' + \lambda b'$  pertenece a  $C$ , y  $c' = (1 - \lambda)a' + \lambda b'$  también pertenece a la bola abierta  $B_0(c, \epsilon/2)$ , lo cual demuestra que para cada  $\epsilon > 0$ , la bola abierta  $B_0(c, \epsilon/2)$  corta a  $C$ , lo cual quiere decir que  $c \in \overline{C}$ , y así, que  $\overline{C}$  es convexo. Finalmente, si  $C$  está contenido en una bola de radio  $\delta$ , por el argumento anterior, está claro que  $\overline{C}$  está contenido en una bola de radio  $\delta + \epsilon$ , para cualquier  $\epsilon > 0$ . □

La siguiente proposición muestra que los conjuntos topológicamente cerrados, acotados y convexos en  $\mathbb{A}^n$  son equivalentes a bolas cerradas. Necesitaremos esta proposición en el uso de triangulaciones más adelante.

**Proposición 2.6.** *Si  $C$  es cualquier conjunto no vacío, acotado, abierto y convexo en  $\mathbb{A}^n$ , para cualquier punto  $a \in C$ , cualquier rayo con origen en  $a$  corta a  $\partial C = \overline{C} \setminus C$  en un punto exactamente. Además, existe un homeomorfismo de  $\overline{C}$  en la bola unidad cerrada  $\mathbb{B}^n$ , la cual lleva  $\partial C$  a la  $n$ -esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* Como  $C$  es convexo y acotado, por la Proposición 2.5,  $\overline{C}$  también es convexo y acotado. Dado cualquier rayo  $R = \{a + \lambda\vec{u} \mid \lambda \geq 0\}$ , como  $R$  es claramente convexo, el conjunto  $R \cap \overline{C}$  es convexo, acotado y cerrado en  $R$ , lo cual quiere decir que  $R \cap \overline{C}$  es un segmento cerrado

$$R \cap \overline{C} = \{a + \lambda\vec{u} \mid 0 \leq \lambda \leq \mu\},$$

para algún  $\mu > 0$ . Claramente,  $a + \mu\vec{u} \in \partial C$ . Si el rayo  $R$  corta a  $\partial C$  en otro punto  $c$ , tenemos que  $c = a + v\vec{u}$  para algún  $v > \mu$ , y como  $\overline{C}$  es convexo,  $\{a + \lambda\vec{u} \mid 0 \leq \lambda \leq v\}$  está contenido en  $R \cap \overline{C}$  para  $v > \mu$ , lo cual es absurdo. Así, todo rayo con origen en  $a$  corta a  $\partial C$  en un solo punto.

La aplicación  $f : \mathbb{A}^n \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  definida por  $f(x) = \overrightarrow{ax}/\|\overrightarrow{ax}\|$ , donde  $\overrightarrow{ax}$  es el vector con origen en  $a$  y extremo en  $x$ , es continua. Por la primera parte de la demostración, la restricción  $f_b : \partial C \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  de  $f$  a  $\partial C$  es una biyección (ya que cada punto de  $\mathbb{S}^{n-1}$  corresponde a un único rayo con origen en  $a$ ). Como  $\partial C$  es un subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{A}^n$ , es compacto, y así,  $f_b$  es un homeomorfismo. Consideremos la inversa  $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial C$  de  $f_b$ , la cual es también un homeomorfismo. Necesitamos extender  $g$  a un homeomorfismo entre  $\mathbb{B}^n$  y  $\overline{C}$ . Como  $\mathbb{B}^n$  es compacta, es suficiente extender  $g$  a una biyección continua. Esto se hace definiendo  $h : \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{C}$  de la siguiente manera:

$$h(u) = \begin{cases} (1 - \|u\|)a + \|u\|g(u/\|u\|) & \text{si } u \neq 0; \\ a & \text{si } u = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Es claro que  $h$  es biyectiva y continua para  $u \neq 0$ . Como  $\mathbb{S}^{n-1}$  es compacta y  $g$  es continua en  $\mathbb{S}^{n-1}$ , existe  $M > 0$  tal que  $\|ag(u)\| \leq M$  para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , y si  $\|u\| \leq \delta$ , entonces  $\|ah(u)\| \leq \delta M$ , lo que demuestra que  $h$  es continua también en  $u = 0$ . □

Notemos que la segunda parte de la proposición demuestra que si  $C$  es un subconjunto abierto, convexo y acotado de  $\mathbb{A}^n$ , entonces cualquier homeomorfismo  $g : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \partial C$  puede ser extendido a un homeomorfismo  $h : \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{C}$ . Por la Proposición 2.6 obtenemos que si  $C$  es un subconjunto abierto, acotado y convexo de  $\mathbb{A}^n$ , entonces cualquier homeomorfismo  $g : \partial C \rightarrow \partial C$  puede ser extendido a un homeomorfismo  $h : \overline{C} \rightarrow \overline{C}$ . Usaremos este hecho cuando trabajemos con triangulaciones.

**Definición 2.7.** Un **complejo abstracto** o **complejo simplicial** (o más brevemente **complejo**) es un par  $K = (V, \Sigma)$  donde  $V$  es un conjunto finito no vacío de **vértices** y  $\Sigma$  es una familia de subconjuntos de  $V$  llamada **símplices abstractos** (o más brevemente **símplices**) satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. Todo  $x \in V$  pertenece al menos a un símlice en  $\Sigma$ .
2. Todo subconjunto de un símlice  $\sigma \in \Sigma$  es también un símlice en  $\Sigma$ .

Si  $\sigma \in \Sigma$  es un símlice no vacío de  $n + 1$  vértices, entonces su dimensión es  $n$  y es llamado un  $n$ -símlice. Un 0-símlice  $\{x\}$  es identificado con el vértice  $x \in V$ . La *dimensión de un complejo abstracto* es la máxima dimensión de sus símlices.

Cabe mencionar aquí que el conjunto  $V$  y la familia  $\Sigma$  podrían ser infinitos, aunque aquí basta considerar el caso finito, pues se puede demostrar que las triangulaciones de las superficies compactas tienen un número finito de vértices.

Nosotros usaremos la abreviación complejo en lugar de complejo abstracto y símplice en lugar de símplice abstracto. También, dado un símplice  $s \in \Sigma$ , a menudo usaremos la notación  $s \in K$ . Recordemos que dado cualquier conjunto  $I$ , el espacio vectorial real  $\mathbb{R}^{(I)}$  libremente generado por  $I$  está definido como un subconjunto del producto cartesiano  $\mathbb{R}^I$  consistente en las familias  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de elementos de  $\mathbb{R}$  con soporte finito (donde  $\mathbb{R}^I$  denota el conjunto de todas las funciones de  $I$  en  $\mathbb{R}$ ). Claramente,  $\mathbb{R}^{(I)}$  puede ser visto como un espacio afín normado (bajo la norma  $\|x\| = \max_{i \in I} \{x_i\}$ ) denotado como  $\mathbb{A}^{(I)}$ . Notemos que si  $I$  es un conjunto finito, como va a ser nuestro caso, entonces  $\mathbb{R}^{(I)} = \mathbb{R}^I$ .

**Definición 2.8.** Dado un complejo abstracto,  $K = (V, \Sigma)$ , definimos la **realización geométrica** (también llamada el **politopo de**  $K = (V, \Sigma)$ ) como el subespacio  $K_g$  de  $\mathbb{A}^V$  definido como sigue:  $K_g$  es el conjunto de todas las familias  $\lambda = (\lambda_a)_{a \in V}$  tales que:

1.  $\lambda_a \geq 0$  para todo  $a \in V$ ;
2. El conjunto  $\{a \in V \mid \lambda_a > 0\}$  es un símplice en  $\Sigma$ ;
3.  $\sum_{a \in V} \lambda_a = 1$ .

Para todo símplice  $s \in \Sigma$  obtenemos un subconjunto  $s_g$  de  $K_g$  considerando las familias  $\lambda = (\lambda_a)_{a \in V}$  de  $K_g$  tales que  $\lambda_a = 0$  para todo  $a \notin s$ . Así, por 2, tenemos que

$$K_g = \bigcup_{s \in \Sigma} s_g.$$

También está claro que para todo  $n$ -símplice  $s$ , su realización geométrica  $s_g$  puede ser identificada con un  $n$ -símplice en  $\mathbb{A}^n$ .

La Figura 2.2 ilustra la definición de complejo, mientras que la Figura 2.3 muestra su realización geométrica.



Figura 2.2: Ilustración extraída de [4] (p. 31). Un conjunto de símplices formando un complejo.

En este caso, el complejo  $K = (V, \Sigma)$  viene dado por  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  y  $\Sigma = \{\{v_1\}, \dots, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3\}, \{v_2, v_3, v_4\}\}$

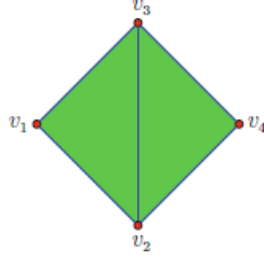


Figura 2.3: Ilustración extraída de [4] (p. 31). Realización geométrica del complejo de la Figura 2.2.

Dado un vértice  $a \in V$ , definimos la *estrella de  $a$* , denotada por  $St(a)$ , como la unión finita de los interiores  $\overset{\circ}{s}_g$  de los símlices geométricos  $s_g$  tales que  $a \in s$ . Claramente,  $a \in St(a)$ . La *estrella cerrada de  $a$* , denotada por  $\overline{St}(a)$ , consiste en la unión finita de los símlices geométricos  $s_g$  tales que  $a \in s$ .

Vamos a definir ahora una topología en  $K_g$ . Diremos que un subconjunto  $F$  de  $K_g$  es cerrado si  $F \cap s_g$  es cerrado en  $s_g$  para todo  $s \in \Sigma$ . Se verifica que esto define una topología en  $K_g$ . Además, tenemos lo siguiente.

**Proposición 2.9.** *La familia de subconjuntos  $U$  de  $K_g$  tales que  $U \cap s_g = \emptyset$  para un número finito de  $s \in \Sigma$ , y tales que  $U \cap s_g$  es abierto en  $s_g$  cuando  $U \cap s_g \neq \emptyset$ , constituyen una base de conjuntos abiertos para la topología de  $K_g$ . Para cualquier  $a \in V$ , la estrella  $St(a)$  de  $a$  es abierta, la estrella cerrada  $\overline{St}(a)$  de  $a$  es la clausura de  $St(a)$  y es compacta, y tanto  $St(a)$  como  $\overline{St}(a)$  son conexos por arcos. El espacio  $K_g$  es localmente compacto, localmente conexo por arcos y Hausdorff.*

*Demostración.* Para ver que el conjunto  $U$  cumpliendo las condiciones del enunciado es abierto, consideremos el complementario  $F = K_g \setminus U$  de  $U$ . Tenemos que probar que  $F \cap s_g$  es cerrado en  $s_g$  para todo  $s \in \Sigma$ . Se tiene que  $F \cap s_g = (K_g \setminus U) \cap s_g = s_g \setminus U$ , y si  $s_g \cap U \neq \emptyset$ , entonces  $U \cap s_g$  es abierto en  $s_g$ , y así  $s_g \setminus U$  es cerrado en  $s_g$ . Dado cualquier subconjunto abierto  $V$  de  $K_g$ , como todo  $a \in V$  pertenece a un número finito de símlices  $s \in \Sigma$ , denotando por  $U_a$  a la unión de los interiores de los  $s_g$  tales que  $a \in s$ , es claro que  $U_a$  es abierto en  $K_g$ , y que  $V$  es la unión de los conjuntos abiertos de la forma  $U_a \cap V$ , lo cual demuestra que los conjuntos  $U$  de la proposición constituyen una base de la topología de  $K_g$ . Para todo  $a \in V$ , la estrella  $St(a)$  de  $a$  tiene intersección no vacía con solamente un número finito de símlices  $s_g$ , y  $St(a) \cap s_g$  es el interior de  $s_g$  (en  $s_g$ ), el cual es abierto en  $s_g$ , y  $St(a)$  es abierto. Que  $\overline{St}(a)$  es la clausura de  $St(a)$  es evidente, y como cada símplex  $s_g$  es compacto, y

$\overline{St}(a)$  es una unión finita de símlices compactos, es compacto. Así,  $K_g$  es localmente compacto. Como  $s_g$  es conexo por arcos, para todo conjunto abierto  $U$  en la base, si  $U \cap s_g \neq \emptyset$ ,  $U \cap s_g$  es un conjunto abierto en  $s_g$  que contiene algún conjunto conexo por arcos  $V_s$  conteniendo a  $a$ , y la unión de esos conjuntos conexos por arcos  $V_s$  es conexa por arcos, y claramente un conjunto abierto de  $K_g$ . Así,  $K_g$  es localmente conexo por arcos. También es inmediato que  $St(a)$  y  $\overline{St}(a)$  son conexos por arcos. Sean  $a, b \in K_g$ , y supongamos que  $a \neq b$ . Si  $a, b \in s_g$  para algún  $s \in \Sigma$ , como  $s_g$  es Hausdorff, existen conjuntos abiertos disjuntos  $U, V \subseteq s_g$  tales que  $a \in U$  y  $b \in V$ . Si  $a$  y  $b$  no pertenecen al mismo símlice, entonces  $St(a)$  y  $St(b)$  son conjuntos abiertos disjuntos tales que  $a \in St(a)$  y  $b \in St(b)$ . □

Observemos que para cualesquiera dos símlices  $s_1, s_2 \in \Sigma$ , se tiene que

$$(s_1 \cap s_2)_g = (s_1)_g \cap (s_2)_g.$$

**Definición 2.10.** Decimos que un complejo  $K = (V, \Sigma)$  es **conexo** si no es la unión de dos complejos  $(V_1, \Sigma_1)$  y  $(V_2, \Sigma_2)$  donde  $V = V_1 \cup V_2$  con  $V_1$  y  $V_2$  disjuntos y  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$  con  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  disjuntos.

## 2.2. Triangulaciones

Vamos a definir ahora el concepto de triangulación. Las triangulaciones son un tipo especial de complejos de dimensión 2, por lo que los símlices involucrados serán de dimensión 0 (puntos), de dimensión 1 (segmentos) y de dimensión 2 (triángulos).

**Definición 2.11.** Dada una superficie  $M$ , una **triangulación de  $M$**  es un par  $(K, \sigma)$ , donde  $K = (V, \Sigma)$  es un complejo 2-dimensional y  $\sigma : \Sigma \rightarrow 2^M$  es una aplicación que lleva cada  $s \in \Sigma$  a un subconjunto cerrado  $\sigma(s)$  de  $M$ , satisfaciendo las siguientes condiciones:

1.  $\sigma(s_1 \cap s_2) = \sigma(s_1) \cap \sigma(s_2)$  para todo  $s_1, s_2 \in \Sigma$ .
2. Para todo  $s \in \Sigma$  existe un homeomorfismo  $\varphi_s : s_g \rightarrow \sigma(s)$  de la realización geométrica  $s_g$  de  $s$  a  $\sigma(s)$  tal que  $\varphi_s(s'_g) = \sigma(s')$  para todo  $s' \subseteq s$ .
3.  $\bigcup_{s \in \Sigma} \sigma(s) = M$ , es decir, los conjuntos  $\sigma(s)$  cubren  $M$ .
4. Para cada punto  $x \in M$ , existe un entorno de  $x$  al cual van a parar solo una cantidad finita de  $\sigma(s)$ .

Si  $(K, \sigma)$  es una triangulación de  $M$ , a la aplicación  $\sigma : \Sigma \rightarrow 2^M$  también la llamaremos una triangulación de  $M$ , o bien diremos que  $K$  es una triangulación  $\sigma : \Sigma \rightarrow 2^M$  de  $M$ . Como era de esperar, dada una triangulación  $(K, \sigma)$  de una superficie  $M$ , la realización geométrica  $K_g$  de  $K$  es homeomorfa a la superficie  $M$ . Lo vemos:

**Proposición 2.12.** *Dada una triangulación  $\sigma : \Sigma \rightarrow 2^M$  de una superficie  $M$ , existe un homeomorfismo  $h : K_g \rightarrow M$  de la realización geométrica  $K_g$  del complejo  $K = (V, \Sigma)$  en la superficie  $M$  tal que cada símplice geométrico  $s_g$  es llevado a  $\sigma(s)$ .*

*Demostración.* Claramente, para cada vértice  $x \in V$  definimos  $h(x_g) = \sigma(x)$ . Si  $s$  es un 1-símplice, definimos  $h$  en  $s_g$  usando cualquiera de los homeomorfismos cuya existencia está asegurada por 2. Teniendo definida  $h$  en la frontera de cada 2-símplice  $s$ , necesitamos extender  $h$  al 2-símplice total  $s$ . Sin embargo, por 2, existe un homeomorfismo  $\varphi$  de  $s_g$  a  $\sigma(s)$ , y si no coincide con  $h$  en la frontera de  $s_g$ , por lo que comentamos justo después de la Proposición 2.6, como la restricción de  $\varphi^{-1} \circ h$  a la frontera de  $s_g$  es un homeomorfismo, puede ser extendida a un homeomorfismo  $\psi$  de  $s_g$  en sí mismo, y así  $\varphi \circ \psi$  es un homeomorfismo de  $s_g$  en  $\sigma(s)$  que coincide con  $h$  en la frontera de  $s_g$ . De esta manera,  $h$  está ya definida en  $K_g$ . Dado cualquier conjunto cerrado  $F$  en  $M$ , para todo símplice  $s \in \Sigma$  se tiene que

$$h^{-1}(F) \cap s_g = h^{-1}|_{s_g}(F),$$

donde  $h^{-1}|_{s_g}$  es la restricción de  $h$  a  $s_g$ , la cual es continua por construcción, y así,  $h^{-1}(F) \cap s_g$  es cerrado para todo  $s \in \Sigma$ , lo que demuestra que  $h$  es continua. Además, es inyectiva por 1, sobreyectiva por 3, y con inversa continua por 4. Por lo tanto,  $h$  es un homeomorfismo que lleva  $s_g$  a  $\sigma(s)$ . □

En la proposición que va a continuación, cuando hablamos de aristas nos referimos a 1-símplices, y cuando hablamos de triángulos nos referimos a 2-símplices.

**Proposición 2.13.** *Un complejo 2-dimensional  $K = (V, \Sigma)$  es una triangulación  $\sigma : \Sigma \rightarrow 2^M$  de la superficie  $M = K_g$  tal que  $\sigma(s) = s_g$  para todo  $s \in \Sigma$  si, y solo si, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Toda arista  $a$  está contenida en exactamente dos triángulos  $A$ .*
2. *Para todo vértice  $\alpha$ , las aristas  $a$  y los triángulos  $A$  que contienen a  $\alpha$  pueden ser ordenados como una secuencia cíclica*

$$a_1, A_1, a_2, A_2, \dots, A_{m-1}, a_m, A_m$$

*de manera que  $a_i = A_{i-1} \cap A_i$  para todo  $2 \leq i \leq m$ , y  $a_1 = A_m \cap A_1$ , con  $m \geq 3$ .*

3.  *$K$  es conexo, es decir, no se puede escribir como la unión de dos complejos disjuntos no vacíos.*

La demostración de la Proposición 2.13 puede consultarse en [4].

A un complejo 2-dimensional  $K$  que satisface las condiciones de la Proposición 2.13 se le llama un *complejo triangulado* y su realización geométrica es llamada un *poliedro*. Así, los complejos triangulados son los complejos que corresponden a superficies compactas trianguladas.



# Capítulo 3

## El grupo fundamental. Orientabilidad

### 3.1. El grupo fundamental

Si queremos clasificar superficies, lo primero que tenemos que hacer es decidir cuál es el criterio que vamos a seguir para decir que dos superficies son equivalentes, para lo cual parece razonable el ser homeomorfas entre sí.

Uno de los problemas básicos de la *topología* es el de determinar cuándo dos espacios son o no homeomorfos. No hay un método para resolver este problema en general, pero existen técnicas que se aplican en casos particulares.

Demostrar que dos espacios son homeomorfos consiste en construir una aplicación continua de uno en el otro que tenga inversa continua, y construir aplicaciones continuas es un problema relativamente sencillo. Ahora bien, para demostrar que dos espacios no son homeomorfos debemos probar que no existe ninguna aplicación continua con inversa continua, y este es un problema más complicado que el anterior. Si podemos encontrar alguna propiedad topológica que sea cierta para un espacio pero no para el otro, entonces el problema queda resuelto, pues los espacios no pueden ser homeomorfos. Sin embargo, en muchas ocasiones, la mayoría de las propiedades topológicas que conocemos (compacidad, conexión, metrizabilidad, ...) no van muy lejos en la resolución del problema, pues no encontramos una propiedad que distinga entre ambos espacios topológicos.

Una técnica usada en topología muy útil para ello es la de, dado un espacio topológico  $X$ , asociarle un objeto algebraico  $H(X)$ , de modo que a cualquier espacio  $Y$  homeomorfo a  $X$  le corresponda, por el mismo procedimiento, un objeto algebraico  $H(Y)$  isomorfo a  $H(X)$ , es decir,  $H(\cdot)$  es lo que se llama un *invariante topológico*. Estos objetos algebraicos permiten detectar cuándo dos espacios topológicos no son

homeomorfos: si los invariantes asociados al uno y al otro no son isomorfos. Las técnicas que vamos a estudiar en este trabajo son el grupo fundamental y los grupos de homología. Pasamos ya a estudiar la primera de ellas.

Antes de definir el grupo fundamental de un espacio  $E$ , vamos a considerar caminos sobre  $E$  y una relación de equivalencia entre ellos conocida como *homotopía de caminos*, y, posteriormente, definiremos cierta operación sobre la colección de las clases de equivalencia.

**Definición 3.1.** Si  $f$  y  $g$  son aplicaciones continuas del espacio  $X$  en el espacio  $Y$ , decimos que  $f$  es *homotópica a  $g$*  si existe una aplicación continua

$$F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

tal que  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$  para cada  $x \in X$ . La aplicación  $F$  se conoce como **homotopía** entre  $f$  y  $g$ . Si  $f$  es homotópica a  $g$  escribimos  $f \simeq g$ . Si  $f$  es homotópica a una aplicación constante, decimos que  $f$  es **homotópicamente nula**.

Consideremos ahora el caso especial en el cual la aplicación es un camino. Recordemos que si  $\gamma : [0, 1] \longrightarrow E$  es una aplicación continua tal que  $\gamma(0) = a$  y  $\gamma(1) = b$ , decimos que  $\gamma$  es un camino en  $E$  desde  $a$  hasta  $b$ . También decimos que  $a$  es el **punto inicial** y  $b$  es el **punto final** del camino  $\gamma$ . Un camino es *cerrado* si  $a = \gamma(0) = \gamma(1) = b$ . Un camino  $\gamma$  es *simple* (o un *camino de Jordan*) si  $\gamma$  es inyectivo. Un camino cerrado es *simple* (o un *camino de Jordan cerrado*) si  $\gamma$  es inyectivo en  $[0, 1)$ .

**Definición 3.2.** Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son dos caminos que aplican el intervalo  $[0, 1]$  en  $E$ , se dice que son **homotópicos por caminos** si tienen el mismo punto inicial  $a$  y el mismo punto final  $b$ , y si existe una aplicación continua

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow E$$

tal que:

- $F(s, 0) = \gamma_1(s)$  y  $F(s, 1) = \gamma_2(s)$ ,
- $F(0, t) = a$  y  $F(1, t) = b$ ,

para cada  $s \in [0, 1]$  y cada  $t \in [0, 1]$ . La aplicación  $F$  recibe el nombre de **homotopía de caminos** entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Si  $\gamma_1$  es homotópico por caminos a  $\gamma_2$ , escribimos  $\gamma_1 \simeq_p \gamma_2$

La primera condición dice simplemente que  $F$  es una homotopía entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , mientras que la segunda dice que, para cada  $t$ , la aplicación  $f_t : [0, 1] \rightarrow E$ , definida por la ecuación  $f_t(s) = F(s, t)$ , es un camino desde  $a$  hasta  $b$ .

**Proposición 3.3.** *Consideremos dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ . La relación de homotopía  $f \simeq g$  es una relación de equivalencia en el conjunto de aplicaciones continuas de  $X$  a  $Y$ . Además, si  $f$  y  $g$  son caminos en  $X$  con los mismos puntos inicial y final, la relación  $f \simeq_p g$  también es una relación de equivalencia.*

*Demostración.* Veamos que se cumplen las propiedades de relación de equivalencia.

Dada  $f : X \rightarrow Y$ , es claro que la aplicación dada por  $F(x, t) = f(x)$  es una homotopía entre  $f$  y  $f$ , por lo que  $f \simeq f$ . Si  $f : [0, 1] \rightarrow X$  es un camino en  $X$ ,  $F$  es una homotopía de caminos.

Supongamos que  $f \simeq g$  y veamos que  $g \simeq f$ . Sea  $F$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Entonces  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$  es una homotopía entre  $g$  y  $f$ . Si  $F$  es una homotopía de caminos, también lo es  $G$ .

Supongamos que  $f \simeq g$  y  $g \simeq h$ . Probemos que  $f \simeq h$ . Sea  $F$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ , y  $G$  una homotopía entre  $g$  y  $h$ . Definamos

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

por la ecuación

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La aplicación  $H$  está bien definida ya que para  $t = \frac{1}{2}$ , tenemos  $F(x, 2t) = g(x) = G(x, 2t - 1)$ . Dado que  $H$  es continua en los dos subconjuntos cerrados  $X \times [0, \frac{1}{2}]$  y  $X \times [\frac{1}{2}, 1]$  de  $X \times [0, 1]$ , se tiene que  $H$  es continua en todo  $X \times [0, 1]$ , por el lema del pegamiento. Por lo tanto,  $H$  es una homotopía entre  $f$  y  $h$ .

Si  $F$  y  $G$  son homotopías de caminos, entonces también lo es  $H$ . Veamos:

Supongamos que  $a$  y  $b$  son los puntos inicial y final, respectivamente, de los caminos  $f$ ,  $g$  y  $h$ . Entonces se tiene que:

- $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$ ,
- $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ .

Ahora, si  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ :

- $H(0, t) = F(0, 2t) = a$ ,
- $H(1, t) = F(1, 2t) = b$ .

Y si  $t \in [\frac{1}{2}, 1]$ :

- $H(0, t) = G(0, 2t - 1) = a$ ,
- $H(1, t) = G(1, 2t - 1) = b$ .

□

Si  $\gamma$  es un camino, denotaremos su clase de equivalencia de homotopía de caminos por  $[\gamma]$ . En lo que sigue, la relación  $\simeq_p$  la denotaremos simplemente por  $\simeq$ , lo cual no debe producir confusión, pues si las aplicaciones consideradas son caminos con el mismo punto inicial y final, cuando digamos que son *homotópicos* en realidad lo que estamos diciendo es que son *homotópicos por caminos*.

Veamos algunos ejemplos de homotopías entre aplicaciones continuas:

**Ejemplo 3.4.** Sea  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación inclusión de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}^2$ , es decir,  $f(x, y) = (x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ , y sea  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la aplicación dada por  $g(x, y) = (0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ . Entonces, se tiene que  $f$  y  $g$  son homotópicas, pues la función  $F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $F((x, y), t) = (1 - t)f(x, y)$  es continua y tiene la propiedad de que  $F((x, y), 0) = (1 - 0)f(x, y) = f(x, y)$  y  $F((x, y), 1) = (1 - 1)f(x, y) = (0, 0) = g(x, y)$ .

**Ejemplo 3.5.** Volviendo al hilo del ejemplo anterior, sean  $f$  y  $g$  dos aplicaciones cualesquiera de un espacio  $X$  en  $\mathbb{R}^2$ . Se tiene entonces que  $f$  y  $g$  son homotópicas pues la aplicación  $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$  es una homotopía entre ellas. Se conoce como **homotopía por rectas** pues lleva el punto  $f(x)$  al punto  $g(x)$  a lo largo del segmento de recta que los une.

Si  $f$  y  $g$  son caminos de  $a$  a  $b$ , entonces  $F$  será una homotopía de caminos.

Más en general: Sea  $A$  un subespacio convexo de  $\mathbb{R}^n$  (es decir, para dos puntos cualesquiera  $a, b$  de  $A$ , el segmento de recta que los une está contenido en  $A$ ). Entonces dos caminos cualesquiera  $f, g$  en  $A$  de  $a$  a  $b$  son homotópicos por caminos en  $A$ , ya que la homotopía por rectas  $F$  entre ellos mantiene su imagen en  $A$ .

Como lo que buscamos en última instancia es la construcción de un *grupo*, pasamos ahora a definir cierta operación sobre las clases de equivalencia de homotopía de caminos como sigue:

**Definición 3.6.** Si  $\gamma_1$  es un camino en  $E$  de  $a$  a  $b$ , y  $\gamma_2$  es un camino en  $E$  de  $b$  a  $c$ , definimos el **producto** o **concatenación**  $\gamma_1\gamma_2$  de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  como el camino  $\gamma_1\gamma_2$  dado por las ecuaciones:

$$(\gamma_1\gamma_2)(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2s - 1) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3.1)$$

La aplicación  $\gamma_1\gamma_2$  está bien definida pues para  $s = \frac{1}{2}$  se obtiene  $(\gamma_1\gamma_2)(s) = \gamma_1(2s) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \gamma_2(2s - 1)$ , y es continua por el lema del pegamiento. Además, es un camino en  $E$  de  $a$  a  $c$ . Intuitivamente pensamos en  $\gamma_1\gamma_2$  como el camino cuya primera mitad es el camino  $\gamma_1$  y cuya segunda mitad es el camino  $\gamma_2$ .

La operación producto induce una operación bien definida sobre las clases de homotopía de caminos, dada por la ecuación  $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2]$ . Veamos:

Supongamos que  $[\gamma_1] = [\gamma_1']$  y  $[\gamma_2] = [\gamma_2']$ . Sea  $F$  una homotopía de caminos entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_1'$  y sea  $G$  una homotopía de caminos entre  $\gamma_2$  y  $\gamma_2'$ . Definamos

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ G(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dado que  $F(1, t) = b = G(0, t)$  para todo  $t$ , la aplicación  $H$  está bien definida, y es continua por el lema del pegamiento. Veamos que  $H$  es una homotopía de caminos entre  $\gamma_1\gamma_2$  y  $\gamma_1'\gamma_2'$ :

Se tiene que:

- $H(0, t) = F(0, t) = a$ ,
- $H(1, t) = G(1, t) = c$ .

Y por otro lado, si  $s \in [0, \frac{1}{2}]$ :

- $H(s, 0) = F(2s, 0) = \gamma_1(2s) = (\gamma_1\gamma_2)(s)$ ,
- $H(s, 1) = F(2s, 1) = \gamma_1'(2s) = (\gamma_1'\gamma_2')(s)$ .

Y si  $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ :

- $H(s, 0) = G(2s - 1, 0) = \gamma_2(2s - 1) = (\gamma_1\gamma_2)(s)$ ,
- $H(s, 1) = G(2s - 1, 1) = \gamma_2'(2s - 1) = (\gamma_1'\gamma_2')(s)$ .

Ahora bien, notemos que  $[\gamma_1][\gamma_2]$  no está definida para cualquier par de clases, sino únicamente para aquellos pares  $[\gamma_1], [\gamma_2]$  para los que  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ .

**Teorema 3.7.** *La operación satisface las siguientes propiedades:*

1. **Es asociativa:** Si  $[\gamma_1]([\gamma_2][\gamma_3])$  está definida, también lo está  $([\gamma_1][\gamma_2])[\gamma_3]$ , y son iguales.
2. **Neutro a izquierda y derecha:** Dado  $x \in E$ , denotemos por  $e_x$  el camino constante  $e_x : [0, 1] \rightarrow E$  que lleva todo punto del intervalo  $[0, 1]$  al punto  $x$ . Si  $\gamma$  es un camino en  $E$  desde  $a$  hasta  $b$ , entonces se cumple que

$$[\gamma][e_b] = [\gamma]$$

y

$$[e_a][\gamma] = [\gamma].$$

3. **Inverso:** Dado el camino  $\gamma$  en  $E$  desde  $a$  hasta  $b$ , sea  $\gamma^{-1}$  el camino definido por  $\gamma^{-1}(s) = \gamma(1 - s)$ , el cual se conoce como **inverso** de  $\gamma$ . Entonces se cumple que

$$[\gamma][\gamma^{-1}] = [e_a]$$

y

$$[\gamma^{-1}][\gamma] = [e_b].$$

Observemos que el conjunto de las clases de homotopía de caminos en un espacio  $E$  no es un grupo con la operación introducida anteriormente porque el producto de dos clases de homotopía de caminos no está siempre definido.

Para salvar esta situación, supongamos que cogemos un punto  $a$  de  $E$  y nos restringimos a aquellos caminos que comienzan y acaban en  $a$ . Entonces, el conjunto de sus clases de homotopía de caminos sí es un grupo con la operación anterior. Este será denominado *grupo fundamental* de  $E$ .

**Definición 3.8.** *Sea  $E$  un espacio topológico y sea  $a$  un punto de  $E$ . Un camino en  $E$  que comienza y acaba en  $a$  se denomina **lazo** basado en  $a$ . El conjunto de las clases de homotopía de caminos asociados a lazos basados en  $a$ , con la operación  $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2]$  para dos lazos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  basados en  $a$ , se denomina **grupo fundamental** de  $E$  relativo al **punto base**  $a$ . Se denota por  $\pi_1(E, a)$ .*

Por el Teorema 3.7, tenemos que la operación restringida a este conjunto, satisface los axiomas de grupo. Dados dos lazos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  basados en  $a$ , el producto  $\gamma_1\gamma_2$  siempre está definido y es a su vez un lazo basado en  $a$ .

Para un lazo  $\gamma$  basado en  $a$ , se tiene que el elemento neutro para la operación es  $[e_a]$ , mientras que el inverso de  $[\gamma]$  es  $[\gamma^{-1}]$ .

Llegados a este punto, es natural preguntarse sobre la dependencia del punto base  $a$  escogido. Tratemos esta cuestión.

**Definición 3.9.** *Sea  $\alpha$  un camino en  $E$  de  $a$  a  $b$ . Definimos la aplicación*

$$\hat{\alpha} : \pi_1(E, a) \longrightarrow \pi_1(E, b)$$

por la ecuación  $\hat{\alpha}([\gamma]) = [\alpha^{-1}][\gamma][\alpha]$ .

La aplicación  $\hat{\alpha}$  está bien definida ya que la operación está bien definida. Además, si  $\gamma$  es un lazo basado en  $a$ , entonces  $\alpha^{-1}(\gamma\alpha)$  es un lazo basado en  $b$ , por lo que  $\hat{\alpha}$  lleva elementos de  $\pi_1(E, a)$  a elementos de  $\pi_1(E, b)$ , tal y como buscamos.

**Teorema 3.10.** *La aplicación  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo de grupos.*

*Demostración.* Veamos en primer lugar que es un homomorfismo de grupos:

$$\hat{\alpha}([\gamma_1])\hat{\alpha}([\gamma_2]) = ([\alpha^{-1}][\gamma_1][\alpha])([\alpha^{-1}][\gamma_2][\alpha]) = [\alpha^{-1}][\gamma_1][\gamma_2][\alpha] = \hat{\alpha}([\gamma_1][\gamma_2])$$

Veamos ahora que es un isomorfismo: Sea  $\beta := \alpha^{-1}$  el camino inverso de  $\alpha$  y sea  $\eta$  un lazo basado en  $b$ . Se tiene entonces que:

$$\hat{\beta}([\eta]) = [\beta^{-1}][\eta][\beta] = [\alpha][\eta][\alpha^{-1}],$$

por lo que tenemos que

$$\hat{\alpha}(\hat{\beta}([\eta])) = [\alpha^{-1}]( [\alpha][\eta][\alpha^{-1}] )[\alpha] = [\eta]$$

Análogamente, tenemos que  $\hat{\beta}(\hat{\alpha}([\gamma])) = [\gamma]$  para todo  $[\gamma] \in \pi_1(E, a)$ , por lo que hemos probado que  $\hat{\beta}$  es el inverso de  $\hat{\alpha}$ , y por tanto,  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo de grupos.  $\square$

De esto obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 3.11.** *Si  $E$  es conexo por caminos, y  $a$  y  $b$  son dos puntos de  $E$ , entonces  $\pi_1(E, a)$  es isomorfo a  $\pi_1(E, b)$ .*

*Demostración.* Como  $E$  es conexo por caminos, existe  $\alpha : [0, 1] \rightarrow E$  camino en  $E$  uniendo  $a$  y  $b$ . Entonces  $\hat{\alpha}$  es un isomorfismo de grupos por el teorema anterior.  $\square$

**Definición 3.12.** *Un espacio  $E$  se dice que es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y  $\pi_1(E, a)$  es el grupo trivial para algún  $a \in E$ , y por tanto, para todo  $a \in E$ . En este caso escribiremos  $\pi_1(E, a) = 0$ .*

**Lema 3.13.** *En un espacio simplemente conexo  $E$ , dos caminos cualesquiera con los mismos puntos inicial y final son homotópicos por caminos.*

*Demostración.* Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos caminos de  $a$  a  $b$ . Entonces, el producto  $\alpha\beta^{-1}$  está definido y es un lazo en  $E$  basado en  $a$ . Como  $E$  es simplemente conexo, este lazo es homotópico por caminos al lazo constante en  $a$ , pues  $\pi_1(E, a)$  consta de un solo elemento. Así, tenemos que  $[\alpha] = [\alpha(\beta^{-1}\beta)] = [\alpha\beta^{-1}][\beta] = [e_a][\beta] = [\beta]$ , por lo que  $[\alpha] = [\beta]$ .  $\square$

Nuestro objetivo es ahora probar que el grupo fundamental es un invariante topológico del espacio  $E$ . Para ello, introducimos el siguiente concepto:

**Definición 3.14.** *Sea  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  una aplicación continua (es decir,  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua que lleva el punto  $x \in X$  al punto  $y \in Y$ ). Definimos*

$$f_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$$

*por la ecuación  $f_*([\gamma]) = [f \circ \gamma]$ . La aplicación  $f_*$  se denomina **homomorfismo inducido por  $f$** , relativo al punto base  $x$ .*

Veamos varias cosas acerca de esta definición:

- Si  $\gamma$  es un lazo basado en  $x$ , entonces  $f \circ \gamma$  es un lazo basado en  $y$  pues  $f(\gamma(0)) = f(x) = y$  y  $f(\gamma(1)) = f(x) = y$ .
- La aplicación  $f_*$  está bien definida ya que si  $F$  es una homotopía de caminos entre los caminos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , entonces  $f \circ F$  es una homotopía de caminos entre los caminos  $f \circ \gamma_1$  y  $f \circ \gamma_2$ . Es decir,  $f_*([\gamma_1]) = f_*([\gamma_2])$ .
- Es un homomorfismo de grupos pues  $(f \circ \gamma_1)(f \circ \gamma_2) = f \circ (\gamma_1\gamma_2)$ .



Observemos que el homomorfismo  $f_*$  depende, además de  $f$ , de la elección del punto base  $x$ . En el caso en el que queramos resaltar el punto base  $x$  elegido, escribiremos  $(f_x)_*$ .

Este homomorfismo inducido tiene dos propiedades muy importantes, llamadas “propiedades functoriales”. Veamos:

**Teorema 3.15.** *Si  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  y  $g : (Y, y) \rightarrow (Z, z)$  son continuas, entonces  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ . Si  $i : (X, x) \rightarrow (X, x)$  es la aplicación identidad, entonces  $i_*$  es el homomorfismo identidad.*

*Demostración.* Por definición, se tiene que  $(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma]$  y, por otro lado,  $(g_* \circ f_*)([\gamma]) = g_*(f_*([\gamma])) = g_*([f \circ \gamma]) = [g \circ (f \circ \gamma)]$ , y ambos coinciden.

Por otro lado,  $i_*([\gamma]) = [i \circ \gamma] = [\gamma]$ . □

**Corolario 3.16.** *Si  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  es un homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$ , entonces  $f_*$  es un isomorfismo entre  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(Y, y)$ .*

*Demostración.* Como  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$  es un homeomorfismo, existe la aplicación inversa  $g : (Y, y) \rightarrow (X, x)$  de  $f$ . Entonces se tiene que  $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = i_*$ , donde  $i$  es la aplicación identidad de  $(X, x)$ , y por otro lado  $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = j_*$ , donde  $j$  es la aplicación identidad de  $(Y, y)$ . Como  $i_*$  y  $j_*$  son los homomorfismos identidad de los grupos  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(Y, y)$ , respectivamente, se tiene que  $g_*$  es la inversa de  $f_*$ , por lo que  $f_*$  es un isomorfismo entre  $\pi_1(X, x)$  y  $\pi_1(Y, y)$ . □

Con esto, hemos demostrado que el grupo fundamental es un invariante topológico, es decir, si dos espacios topológicos son homeomorfos, entonces sus grupos fundamentales son isomorfos.

En general, es difícil determinar el grupo fundamental de un espacio. Nosotros vamos a calcular el grupo fundamental de  $\mathbb{A}^n$  y el del plano agujereado, para lo cual necesitamos el concepto de índice de un lazo en el plano.

## 3.2. El índice de un lazo en el plano

Consideremos un lazo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$  en el plano y sea  $z_0$  un punto que no está en la imagen de  $\gamma$ . En lo que sigue, es conveniente identificar el plano  $\mathbb{A}^2$  con el conjunto  $\mathbb{C}$  de los números complejos. Nuestro propósito es definir un número, que denotaremos por  $n(\gamma, z_0)$ , que cuente el número de vueltas que da el lazo  $\gamma$  alrededor del punto  $z_0$ , contando una vuelta en sentido contrario a las agujas del reloj como positiva y una vuelta en el sentido de las agujas del reloj como negativa.

En primer lugar, podemos afirmar que existe un número real  $\rho > 0$  tal que  $|\gamma(t) - z_0| > \rho$ . Si no se cumple esto tenemos que para todo entero  $n \geq 0$  existe algún  $t_n \in [0, 1]$  tal que  $|\gamma(t_n) - z_0| \leq 1/n$ . Como  $[0, 1]$  es compacto, la sucesión  $(t_n)$  tiene alguna subsucesión convergente  $(t_{n_p})$  con límite  $l \in [0, 1]$ . Pero entonces, por la continuidad de  $\gamma$  tenemos que  $\gamma(l) = z_0$ , lo que contradice el hecho de que  $z_0$  no está en la imagen de  $\gamma$ . Por otro lado, como  $[0, 1]$  es compacto y  $\gamma$  es continua, se tiene que  $\gamma$  es uniformemente continua. Así, existe algún  $\epsilon > 0$  tal que  $|\gamma(t) - \gamma(u)| \leq \rho$  para todo  $t, u \in [0, 1]$  con  $|u - t| \leq \epsilon$ . Sea  $n$  el entero más pequeño tal que  $n\epsilon > 1$  y sea  $t_i = i/n$  para todo  $0 \leq i \leq n$ . Tenemos entonces una subdivisión del intervalo  $[0, 1]$  en intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  tales que  $|\gamma(t) - \gamma(t_i)| \leq \rho$  para todo  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , con  $0 \leq i \leq n - 1$ .

Para todo  $0 \leq i \leq n - 1$  pongamos

$$w_i = \frac{\gamma(t_{i+1}) - z_0}{\gamma(t_i) - z_0}.$$

Se verifica inmediatamente que  $|w_i - 1| < 1$ , por lo que  $w_i$  tiene parte real positiva. De esta manera, existe un único ángulo  $\theta_i$  tal que  $w_i = \lambda_i(\cos \theta_i + i \operatorname{sen} \theta_i)$ , donde  $\lambda_i > 0$ . Más aún, como  $\gamma$  es un lazo,

$$\prod_{i=0}^{n-1} w_i = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\gamma(t_{i+1}) - z_0}{\gamma(t_i) - z_0} = \frac{\gamma(t_n) - z_0}{\gamma(t_0) - z_0} = \frac{\gamma(1) - z_0}{\gamma(0) - z_0} = 1,$$

y el ángulo  $\sum \theta_i$  es un múltiplo de  $2\pi$ . Así, para toda subdivisión de  $[0, 1]$  en intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  tal que  $|w_i - 1| < 1$ , con  $0 \leq i \leq n - 1$ , definimos el *índice de  $\gamma$  con respecto a  $z_0$*  por

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i.$$

Para ver que está bien definido, tenemos que probar que no depende de la subdivisión de  $[0, 1]$  en intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  (con  $|w_i - 1| < 1$ ) elegida. Como dos subdivisiones cualesquiera de  $[0, 1]$  en intervalos  $[t_i, t_{i+1}]$  puede ser refinada a una subdivisión común, es suficiente probar que este número no cambia si reemplazamos cualquier intervalo  $[t_i, t_{i+1}]$  por los dos intervalos  $[t_i, \tau]$  y  $[\tau, t_{i+1}]$ . Entonces, si  $\theta'_i$  y  $\theta''_i$  son los ángulos asociados a

$$\frac{\gamma(t_{i+1}) - z_0}{\gamma(t_i) - z_0},$$

y

$$\frac{\gamma(\tau) - z_0}{\gamma(t_i) - z_0},$$

tenemos que

$$\theta_i = \theta'_i + \theta''_i + k2\pi,$$

donde  $k$  es un número entero. Sin embargo, como  $-\frac{\pi}{2} < \theta_i < \frac{\pi}{2}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta'_i < \frac{\pi}{2}$ , y  $-\frac{\pi}{2} < \theta''_i < \frac{\pi}{2}$ , tenemos que  $|k| < \frac{3}{4}$ , lo que implica que  $k = 0$ , ya que  $k$  es entero. Así,  $n(\gamma, z_0)$  está bien definido.

**Proposición 3.17.** *Para todo lazo en el plano  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$ , para todo  $z_0$  que no está en la imagen de  $\gamma$ , el índice  $n(\gamma, z_0)$  es continuo en el complementario de  $\gamma$  en  $\mathbb{A}^2$ , y de hecho, constante en cada componente conexa del complementario de  $\gamma$ . Además, tenemos que  $n(\gamma, z_0) = 0$  en la componente no acotada del complementario de  $\gamma$ .*

*Demostración.* Usando la misma notación que antes, sea  $z'_0$  suficientemente cercano a  $z_0$  de manera que  $|z_0 - z'_0| < \rho$  y  $|\gamma(t) - z'_0| > \rho$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Podemos usar entonces la misma subdivisión para definir  $n(\gamma, z_0)$  y  $n(\gamma, z'_0)$ . Si ponemos

$$v_i = \frac{\gamma(t_i) - z'_0}{\gamma(t_i) - z_0},$$

tenemos que  $|v_i - 1| < 1$ , y al igual que antes, es posible escoger  $\alpha_i = \arg(v_i)$  con  $-\frac{\pi}{2} < \alpha_i < \frac{\pi}{2}$ . El nuevo argumento  $\theta'_i$  está relacionado con  $\theta_i$  por la fórmula

$$\theta'_i = \theta_i + \alpha_{i+1} - \alpha_i + k2\pi,$$

de donde tenemos que  $|k| < 1$ , y por lo tanto, como  $k$  es entero,  $k = 0$ . Se sigue entonces que  $\sum_i \theta'_i = \sum_i \theta_i$ , como queríamos probar.

Veamos ahora que  $n(\gamma, z_0) = 0$  en la componente no acotada del complementario de  $\gamma$ . Sea  $\rho > 2 \max |\gamma(t)|$  y supongamos que  $|z_0| > \frac{3}{2}\rho$ . Entonces,  $|\gamma(t) - z_0| > \rho > |\gamma(t) - \gamma(0)|$  para todo  $t \in [0, 1]$ , lo cual quiere decir que  $n(\gamma, z_0)$  puede ser calculado sin subdividir el intervalo. Tomando  $t_0 = 0$  y  $t_1 = 1$ , tenemos que  $w_0 = 1$  y  $\theta_0 = 0$ , por lo que  $n(\gamma, z_0) = 0$ . □

**Proposición 3.18.** *Sean  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$  y  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$  dos lazos en el plano y supongamos que son homotópicos mediante la homotopía  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$ . Si  $z_0$  es un punto de  $\mathbb{A}^2$  que no está en la imagen de ninguno de los dos lazos ni de la homotopía, se tiene que  $n(\gamma_1, z_0) = n(\gamma_2, z_0)$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$  es una homotopía entre  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  tal que  $F(t, u) \neq z_0$  para todo  $t, u \in [0, 1]$ . Podemos encontrar un número real  $\rho > 0$  y subintervalos  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $[u_j, u_{j+1}]$  tales que  $|F(t, u) - z_0| > \rho$  y  $|F(t, u) - F(t_i, u_j)| < \rho$  para todo  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  y para todo  $u \in [u_j, u_{j+1}]$ . Sean  $\theta_i, \theta'_i$  los argumentos correspondientes a  $u = u_j$  y  $u = u_{j+1}$ , respectivamente, y observemos que podemos escoger

$$\beta_i = \arg \frac{F(t_i, u_{j+1}) - z_0}{F(t_i, u_j) - z_0}$$

de manera que  $-\frac{\pi}{2} < \beta_i < \frac{\pi}{2}$ . Tenemos entonces la relación

$$\theta'_i - \theta_i = \beta_{i+1} - \beta_i + k2\pi,$$

y al igual que antes, se tiene que  $k = 0$ . Así,  $\sum_i \theta'_i = \sum_i \theta_i$ , de donde deducimos que el índice no varía al pasar desde  $u_j$  hasta  $u_{j+1}$ . En consecuencia, las curvas que corresponden a  $u = 0$  y  $u = 1$  tienen el mismo índice. □

### 3.3. El grupo fundamental del plano agujereado

En primer lugar, notemos que el grupo fundamental de  $\mathbb{A}^n$  es trivial. De hecho, si  $f$  y  $g$  son dos aplicaciones cualesquiera de un espacio  $E$  en  $\mathbb{A}^n$ , se tiene que  $f$  y  $g$  son homotópicas pues la aplicación  $F(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$  es una homotopía entre ellas. Se conoce como *homotopía por rectas* pues lleva el punto  $f(x)$  al punto  $g(x)$  a lo largo del segmento de recta que los une.

Sin embargo, el grupo fundamental del plano agujereado es el grupo cíclico infinito  $\mathbb{Z}$ , como vamos a ver en la siguiente proposición.

**Proposición 3.19.** *El grupo fundamental del plano agujereado es el grupo cíclico infinito  $\mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Supongamos que el punto suprimido del plano  $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}$  es el punto  $z = 0$ , y tomemos  $z = 1$  como punto base. Recordemos que la circunferencia unidad puede ser parametrizada como  $t \mapsto \cos t + i \sin t$ , y sea  $\alpha$  su correspondiente lazo. Lo primero de todo, notemos que para todo lazo  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$  basado en 1, existe una homotopía  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{A}^2$  deformando  $\gamma$  en un camino  $\beta$  cuya imagen está contenida en la circunferencia. Por continuidad uniforme, tal camino  $\beta$  puede ser descompuesto como  $\beta = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ , donde cada  $\beta_k$  o bien no pasa por  $z = 1$ , o bien no pasa por  $z = -1$ . Además, cada  $\beta_k$  puede ser deformado en un arco circular  $\delta_k$  uniendo sus extremos. Para todo  $2 \leq k \leq n$ , sea  $\sigma_k$  uno de los arcos circulares que van desde  $z = 1$  hasta el punto inicial de  $\delta_k$ , y sea  $\sigma_1 = \sigma_{n+1} = 1$ . Así, tenemos que

$$\gamma \simeq (\sigma_1 \delta_1 \sigma_2^{-1}) \cdots (\sigma_n \delta_n \sigma_{n+1}^{-1}),$$

donde cada arco  $\sigma_k \delta_k \sigma_{k+1}^{-1}$  es homotópico, o bien a  $\alpha$ , o bien a  $\alpha^{-1}$ , o bien al camino constante en 1. Por lo tanto,  $\gamma \simeq \alpha^m$ , para algún entero  $m \in \mathbb{Z}$ .

Falta probar que  $\alpha^m$  no es homotópico al camino constante en 1 para  $m \neq 0$ . Claramente, se tiene que  $n(\alpha^m, 0) = m$ , y  $n(1, 0) = 0$ , por lo que usando la Proposición 3.18, se tiene que  $\alpha^m$  y el camino constante en 1 no son homotópicos cuando  $m \neq 0$ . Así pues, tenemos que las clases de homotopía están en biyección con el conjunto de los números enteros, tal y como queríamos probar. □

Más adelante definiremos el concepto de orientabilidad de una superficie, para lo cual necesitamos el concepto de grado de una aplicación en el plano, y la noción de grado de un homeomorfismo con dominio una región plana.

### 3.4. El grado de una aplicación en el plano

Sea  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{C}$  una función continua, donde  $D$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $\varphi$  es *regular en*  $z_0 \in D$  si existe un abierto  $V \subseteq D$  con  $z_0 \in V$  tal que  $\varphi(z) \neq \varphi(z_0)$  para todo  $z \in V$  con  $z \neq z_0$ . Supongamos que  $\varphi$  es regular en  $z_0$ . Vamos a definir el *grado de*  $\varphi$  en  $z_0$ .

Sea  $\Omega$  el disco abierto agujereado  $\{z \in V : |z - z_0| < r\} \setminus \{z_0\}$  contenido en  $V$ . Como  $\varphi$  es regular en  $z_0$ , lleva  $\Omega$  al plano agujereado  $\Omega'$  obtenido quitando el punto  $w_0 = \varphi(z_0)$ . Por otro lado,  $\varphi$  induce un homomorfismo  $\varphi_* : \pi_1(\Omega) \rightarrow \pi_1(\Omega')$ . Por la Proposición 3.19, ambos grupos,  $\pi_1(\Omega)$  y  $\pi_1(\Omega')$ , son isomorfos a  $\mathbb{Z}$ . Por lo tanto, podemos determinar quién exactamente el homomorfismo  $\varphi_*$ . Sabemos que  $\pi_1(\Omega)$  está generado por la clase de homotopía de alguna circunferencia  $\alpha$  en  $\Omega$  con centro  $a$ , y que  $\pi_1(\Omega')$  está generado por la clase de homotopía de alguna circunferencia  $\beta$  en  $\Omega'$  con centro  $\varphi(a)$ . Si  $\varphi_*([\alpha]) = [\beta^d]$ , entonces el homomorfismo  $\varphi_*$  está completamente determinado. Si  $d = 0$ , entonces  $\pi_1(\Omega') = 0$ , y si  $d \neq 0$ , entonces  $\pi_1(\Omega')$  es el subgrupo cíclico infinito generado por la clase de  $\beta^d$ . Decimos entonces que  $d$  es el *grado de*  $\varphi$  en  $z_0$ , y lo denotamos por  $d(\varphi)_{z_0}$ . Cabe decir aquí que esta definición no depende de la elección de  $a$  (el centro de la circunferencia  $\alpha$ ) en  $\Omega$ , y así, tampoco de  $\Omega$ . Por otro lado, si tenemos una aplicación  $\psi$  regular en  $w_0 = \varphi(z_0)$ , entonces  $\psi \circ \varphi$  es regular en  $z_0$  y se verifica que

$$d(\psi \circ \varphi)_{z_0} = d(\psi)_{w_0} d(\varphi)_{z_0}.$$

Supongamos ahora que  $D$  es una región (un conjunto abierto conexo) y que  $\varphi$  es un homeomorfismo entre  $D$  y  $\varphi(D)$ . Por un teorema de Brouwer (la invariancia del dominio) resulta que  $\varphi(D)$  es también abierto, y de esta manera, podemos definir el grado de la aplicación inversa  $\varphi^{-1}$ . Como la aplicación identidad tiene grado 1, tenemos que  $d(\varphi)d(\varphi^{-1}) = 1$ , por lo que  $d(\varphi)_{z_0} = \pm 1$ .

De hecho, podemos probar, sin usar el teorema de la invariancia del dominio de Brouwer, que si  $\varphi(D)$  tiene interior no vacío, entonces el grado de  $\varphi$  es constante en  $D$ .

**Proposición 3.20.** *Dada una región  $D$  en el plano, para todo homeomorfismo  $\varphi$  entre  $D$  y  $\varphi(D)$ , si  $\varphi(D)$  tiene interior no vacío, entonces el grado  $d(\varphi)_z$  es constante para todo  $z \in D$ , y de hecho,  $d(\varphi) = \pm 1$ .*

*Demostración.* Para un  $z_0 \in D$  fijo, sean  $\Omega$ ,  $\Omega'$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  escogidos como al comienzo de esta sección. Se tiene entonces que  $\varphi_*([\alpha]) = [\beta^{d(\varphi)}]$  en  $\Omega'$ , y de esta manera,  $n(\varphi(\alpha), \varphi(z_0)) = d(\varphi)$ . Sea  $z_1$  suficientemente cercano a  $z_0$  para que  $n(\alpha, z_1) = n(\alpha, z_0) = 1$  y  $n(\varphi(\alpha), \varphi(z_1)) = n(\varphi(\alpha), \varphi(z_0)) = d(\varphi)$ . Para definir el grado en  $z_1$  usamos un disco agujereado  $\Omega_1$  centrado en  $z_1$ , el plano agujereado  $\Omega'_1$  y generadores  $\alpha_1$  y  $\beta_1$ . Si  $z_1$  está suficientemente cercano, podemos tomar  $\Omega_1$  de manera que contenga a  $\alpha$ . Entonces,  $\alpha \simeq \alpha_1$  en  $\Omega_1$  y  $\varphi(\alpha) \simeq \varphi(\alpha_1)$  en  $\Omega'_1$ . Se sigue que  $n(\varphi(\alpha_1), \varphi(z_1)) = n(\varphi(\alpha), \varphi(z_1)) = d(\varphi)$ , y por lo tanto, que  $\varphi_*([\alpha_1]) = [\beta_1^{d(\varphi)}]$  en  $\Omega'_1$ . En consecuencia, el grado en  $z_1$  es igual que  $d(\varphi)$ , el grado en  $z_0$ . Por lo tanto, tenemos que  $d(\varphi)$  es constante en un entorno de cada punto, y por lo tanto, en cada componente de  $D$ . Si  $D$  es conexo, entonces  $d(\varphi)$  es constante en  $D$ . Finalmente, si  $\varphi(D)$  tiene un punto interior  $\varphi(z_0)$ , sea  $\Delta \subseteq \varphi(D)$  un disco abierto conteniendo a  $\varphi(z_0)$ . Entonces  $\varphi$  tiene grado  $\pm 1$  en  $\varphi^{-1}(\Delta)$ , y por lo tanto, en todo  $D$ .  $\square$

Cuando  $d(\varphi) = 1$  en la Proposición 3.20, decimos que  $\varphi$  *preserva el sentido*, y cuando  $d(\varphi) = -1$ , decimos que  $\varphi$  *invierte el sentido*.

### 3.5. Orientabilidad de una superficie

Dada una superficie  $F$ , diremos que una región  $V$  de  $F$  es una *región plana* si existe un homeomorfismo  $h : V \rightarrow U$  de  $V$  a un conjunto abierto en el plano  $U$ . Gracias a la Proposición 3.20, dados dos homeomorfismos  $h_1, h_2 : V \rightarrow U$ , o bien  $d(h_1 \circ h_2^{-1}) = 1$ , o bien  $d(h_1 \circ h_2^{-1}) = -1$ . Diremos que  $h_1$  y  $h_2$  son equivalentes si la aplicación  $h_1 \circ h_2^{-1}$  tiene grado 1, es decir, *preserva el sentido*. Además, si  $\bar{h}$  es la aplicación conjugada de  $h$  (es decir,  $\bar{h}(z) = \overline{h(\bar{z})}$  para todo  $z \in V$ ), se tiene que  $d(h \circ \bar{h}^{-1}) = -1$ , por lo que  $h$  y  $\bar{h}$  están en diferentes clases.

Así pues, si  $V$  es una región plana, la elección de  $h$  o  $\bar{h}$  constituye una *orientación* de  $V$ . Por restricción, una orientación de  $V$  induce una orientación de cualquier subregión  $W$  de  $V$ . Si  $V_1$  y  $V_2$  son dos regiones planas con una orientación escogida para cada una de ellas, diremos que tales orientaciones son *compatibles* si ambas inducen la misma orientación para todas las subregiones comunes a  $V_1$  y  $V_2$ .

**Definición 3.21.** *Diremos que una superficie  $F$  es **orientable** si es posible asignar una orientación a todas las regiones planas de manera que las orientaciones de todas las regiones que se cortan son compatibles.*

La orientabilidad se preserva por homeomorfismos. Por lo tanto, hay dos clases de superficies, las superficies orientables y las superficies no orientables. Además, cada superficie orientable admite dos orientaciones.

## 3.6. Superficies con frontera

En esta sección vamos a extender el concepto que tenemos de superficie a una clase más general, las superficies con frontera. En lo que sigue, denotaremos por  $\mathbb{H}^m$  el subconjunto de los puntos de  $\mathbb{R}^m$  con su última coordenada no negativa, es decir,  $\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{R}, x_m \geq 0\}$ .

**Definición 3.22.** Para  $m \geq 1$ , una **variedad (topológica)  $m$ -dimensional con frontera** es un espacio topológico  $M$  que es Hausdorff y que satisface el segundo axioma de numerabilidad, junto con un cubrimiento por abiertos  $(U_i)_{i \in I}$  y una familia  $(\varphi_i)_{i \in I}$  de homeomorfismos  $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$ , donde cada  $\Omega_i$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{H}^m$  en la topología del subespacio.

**Definición 3.23.** En las condiciones de la definición anterior, cada par  $(U_i, \varphi_i)$  es llamado un **sistema de coordenadas**, o **carta**, de  $M$ . Cada homeomorfismo  $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$  es llamado un **mapa de coordenadas**, y su inversa  $\varphi_i^{-1} : \Omega_i \rightarrow U_i$  es llamada una **parametrización** de  $U_i$ . La familia  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  es llamada un **atlas** para  $M$ .

**Definición 3.24.** Una **superficie (topológica) con frontera** es una variedad 2-dimensional con frontera y conexa.

Notemos que una variedad  $m$ -dimensional es también una variedad  $m$ -dimensional con frontera.

Si  $\varphi_i : U_i \rightarrow \Omega_i$  es un homeomorfismo, siendo  $\Omega_i$  un conjunto abierto en la topología del subespacio  $\mathbb{H}^m$ , un punto  $p \in U_i$  puede ser llevado dentro de  $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_+$ , o dentro de la “frontera”  $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$  de  $\mathbb{H}^m$ . Poniendo  $\partial\mathbb{H}^m = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ , se puede demostrar usando homología que si algún mapa de coordenadas  $\varphi$  definido en  $p$  lleva  $p$  dentro de  $\partial\mathbb{H}^m$ , entonces todo sistema de coordenadas  $\psi$  definido en  $p$  lleva  $p$  dentro de  $\partial\mathbb{H}^m$ .

Así,  $M$  es la unión disjunta de dos conjuntos,  $\partial M$  e  $\text{Int } M$ , donde  $\partial M$  es el subconjunto que consiste en todos los puntos  $p \in M$  que son llevados por algún (de hecho todos) mapa de coordenadas  $\varphi$  definido en  $p$  dentro de  $\partial\mathbb{H}^m$ , y donde  $\text{Int } M = M \setminus \partial M$ . El conjunto  $\partial M$  es llamado la *frontera* de  $M$ , y el conjunto  $\text{Int } M$  es llamado el *interior* de  $M$ . Un ejemplo de superficie con frontera es la conocida banda de Möbius, cuya frontera es una circunferencia.

La frontera  $\partial M$  de  $M$  puede ser vacía, pero el interior  $\text{Int } M$  no es vacío. Además, se puede demostrar usando homología que el entero  $m$  es único. Se tiene también que  $\partial M$  es cerrado, mientras que  $\text{Int } M$  es abierto, y donde además  $\partial M$  es una  $(m - 1)$ -variedad.

En el caso particular de que  $m = 2$ , la frontera  $\partial M$  es una unión de caminos homeomorfos o bien a circunferencias o bien a segmentos abiertos. En este caso, si  $M$  es conexo pero no una superficie, se tiene que  $M$  es la clausura topológica de  $\text{Int } M$ . Además, el  $\text{Int } M$  es conexo, y por tanto, una superficie. En efecto, si esto no se cumpliera, podríamos escribir  $\text{Int } M = M_1 \cup M_2$ , para dos conjuntos no vacíos y disjuntos  $M_1$  y  $M_2$ . Pero entonces, tenemos que  $M = \overline{M_1} \cup \overline{M_2}$ , y como  $M$  es conexo, hay algún  $a \in \partial M$  también en  $\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \neq \emptyset$ . Sin embargo, existe un conjunto abierto  $V$  que contiene a  $a$  cuya intersección con  $M$  es homeomorfa a un semidisco abierto, y por lo tanto, conexa. Tenemos entonces que

$$V \cap M = (V \cap M_1) \cup (V \cap M_2),$$

con  $V \cap M_1$  y  $V \cap M_2$  abiertos en  $V$ , contradiciendo el hecho de que  $V \cap M$  es conexo. Por lo tanto,  $\text{Int } M$  es una superficie.

Cuando la frontera  $\partial M$  de una superficie con frontera  $M$  es vacía,  $M$  es una superficie. Normalmente, cuando nos referimos a una superficie con frontera, estaremos suponiendo que esta es no vacía. En otro caso solo diremos que es una superficie.

Una superficie con frontera  $M$  es orientable si, y solo si, su interior  $\text{Int } M$  es orientable. Además, se puede probar que una orientación de  $\text{Int } M$  induce una orientación de la frontera  $\partial M$ . Las componentes conexas de la frontera  $\partial M$  son llamadas *contornos*.

El concepto de triangulación de una superficie con frontera es idéntico al concepto definido para una superficie en la Definición 2.11, y también se cumple la Proposición 2.12. Sin embargo, necesitamos hacer un pequeño cambio en la Proposición 2.13.

**Proposición 3.25.** *Un complejo 2-dimensional  $K = (V, \Sigma)$  es una triangulación  $\sigma : \Sigma \rightarrow 2^M$  de la superficie con frontera  $M = K_g$  tal que  $\sigma(s) = s_g$  para todo  $s \in \Sigma$  si, y solo si, se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Toda arista  $a$  tal que  $a_g$  contiene algún punto en el interior  $\text{Int } M$  de  $M$  está contenida en exactamente dos triángulos  $A$ . Toda arista  $a$  tal que  $a_g$  está dentro de la frontera  $\partial M$  de  $M$  está contenida en exactamente un triángulo  $A$ . La frontera  $\partial M$  de  $M$  consiste en aquellos  $a_g$  que pertenecen a un solo  $A_g$ . Un vértice en la frontera o una arista en la frontera es un símplice  $\sigma$  tal que  $\sigma_g \subseteq \partial M$ .*
2. *Para todo vértice  $\alpha$  que no esté en la frontera, las aristas  $a$  y los triángulos  $A$  que contienen a  $\alpha$  pueden ser ordenados como una secuencia cíclica*

$$a_1, A_1, a_2, A_2, \dots, A_{m-1}, a_m, A_m$$

*de manera que  $a_i = A_{i-1} \cap A_i$  para todo  $2 \leq i \leq m$ , y  $a_1 = A_m \cap A_1$ , con  $m \geq 3$ .*



3. Para todo vértice  $\alpha$  que esté en la frontera, las aristas  $a$  y los triángulos  $A$  que contienen a  $\alpha$  pueden ser ordenados como una secuencia

$$a_1, A_1, a_2, A_2, \dots, A_{m-1}, a_m, A_m, a_{m+1}$$

de manera que  $a_i = A_{i-1} \cap A_i$  para todo  $2 \leq i \leq m$ , donde  $a_1$  y  $a_{m+1}$  son vértices que están en la frontera y que solo están contenidos en  $A_1$  y  $A_m$  respectivamente.

4.  $K$  es conexo, es decir, no se puede escribir como la unión de dos complejos disjuntos no vacíos.

La demostración de la Proposición 3.25 puede consultarse en [4].

Un complejo 2-dimensional satisfaciendo las condiciones de la proposición 3.25 será también llamado un *complejo 2-dimensional con frontera triangulado* y su realización geométrica será llamada un *poliedro con frontera*. Así, los complejos 2-dimensionales con frontera triangulados son los complejos que corresponden a superficies compactas con frontera trianguladas. Incluso, se puede demostrar que toda superficie compacta con frontera admite alguna triangulación, y así, la clase de las realizaciones geométricas de los complejos 2-dimensionales con frontera triangulados es la clase de todas las superficies compactas con frontera.



# Capítulo 4

## Grupos de homología

Vamos a dar ahora una breve presentación sobre los grupos de homología, para lo cual necesitamos hacer un pequeño repaso sobre grupos abelianos finitamente generados.

### 4.1. Grupos abelianos finitamente generados

Dado un espacio topológico  $X$ , existen varios invariantes topológicos asociados a este, como su *grupo fundamental* ya estudiado y su familia de *grupos de homología*. Una de las ventajas que tienen los grupos de homología es que son grupos abelianos, y en el caso de los complejos simpliciales finitos, grupos abelianos finitamente generados. Afortunadamente, la estructura de los grupos abelianos finitos es muy conocida, lo cual podemos usar para entender mejor la estructura de los poliedros en términos de su homología. Vamos a empezar recordando el teorema de estructura para grupos abelianos finitamente generados, para lo cual vamos a hacer primero un pequeño repaso de conceptos de la teoría de grupos.

Diremos que un grupo  $G$  es abeliano si la operación (que denotaremos por  $+$ ) es conmutativa. Denotaremos el elemento neutro por  $0$  y el inverso de un elemento  $a \in G$  por  $-a$ . Dado un número natural  $n \in \mathbb{N}$ , denotamos a

$$\underbrace{a + \cdots + a}_n$$

por  $na$ , y definimos  $(-n)a$  por  $n(-a)$  (donde  $0a = 0$ ). Con esta notación, tiene sentido escribir sumas del tipo  $\sum n_i a_i$  para elementos  $a_i \in G$  y números enteros  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Dado un grupo abeliano  $G$  y una familia  $A = (a_j)_{j \in J}$ , donde los elementos  $a_j \in G$  para todo  $j \in J$ , decimos que  $G$  está *generado por*  $A$  si todo elemento  $a \in G$  se puede expresar de la forma

$$a = \sum_{i \in I} n_i a_i,$$

para algún subconjunto finito  $I$  de  $J$  y algunos números enteros  $n_i \in \mathbb{Z}$ . Si  $J$  es finito, decimos que  $G$  está *finitamente generado por*  $A$ .

Si todo elemento  $a \in G$  admite una única expresión del tipo  $a = \sum_{i \in I} n_i a_i$ , decimos que  $G$  está *libremente generado por*  $A$ , y decimos que  $A$  es una *base* de  $G$ . Tenemos que se cumple lo siguiente: Si  $G$  es un grupo abeliano libre generado por  $A = (a_j)_{j \in J}$ , para todo grupo abeliano  $H$ , para toda función  $f : A \rightarrow H$ , existe un único homomorfismo  $\hat{f} : G \rightarrow H$  tal que  $\hat{f}(a_j) = f(a_j)$  para todo  $j \in J$ .

Se puede demostrar también que si  $G$  es un grupo abeliano libre, el cardinal de todas las bases de  $G$  es el mismo, y es lo que se conoce por *dimensión* de  $G$ .

Dada una familia  $A = (a_j)_{j \in J}$ , un grupo abeliano libre generado por  $A$  se construye como sigue: Consideremos el conjunto  $F(A)$  de todas las funciones  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{Z}$  tales que  $\varphi(a) \neq 0$  para solamente un número finito de elementos  $a \in A$ . Definimos una operación  $+$  en  $F(A)$  entre dos funciones  $\varphi$  y  $\psi$ ,  $\varphi + \psi$ , como la función dada por  $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$  para todo  $a \in A$ . Claramente,  $F(A)$  es un grupo abeliano y si identificamos cada elemento  $a_j$  con la función  $\varphi_j : A \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $\varphi_j(a_j) = 1$  y  $\varphi_j(a_i) = 0$  para todo  $i \neq j$ , está claro que  $F(A)$  está libremente generado por  $A$ . También está claro que toda función  $\varphi \in F(A)$  puede ser expresada de manera única como

$$\varphi = \sum_{i \in I} n_i \varphi_i,$$

para algún subconjunto finito  $I$  de  $J$  tal que  $n_i = \varphi(a_i) \neq 0$ . Para simplificar notación, escribimos  $\varphi$  como

$$\varphi = \sum_{i \in I} n_i a_i.$$

Dado un grupo abeliano  $G$ , decimos que un elemento  $a \in G$  tiene *orden finito* si existe un número natural  $n \neq 0$  tal que  $na = 0$ . El menor número natural  $n \neq 0$  con esta propiedad es llamado el *orden de*  $a$ . El subconjunto  $T$  de  $G$  formado por todos los elementos de orden finito es un subgrupo de  $G$ , llamado el *subgrupo de torsión de*  $G$ . Cuando  $T = \{0\}$ , decimos que  $G$  es *libre de torsión*. Cabe decir aquí que no todo grupo abeliano libre de torsión es libre. Por ejemplo, el grupo  $\mathbb{Q}$  de los números racionales junto con la operación  $+$  es libre de torsión, pero no es libre.

Claramente, la aplicación  $(n, a) \mapsto na$  de  $\mathbb{Z} \times G$  a  $G$  satisface las propiedades

$$(m + n)a = ma + na,$$

$$m(a + b) = ma + mb,$$

$$(mn)a = m(na),$$

$$1a = a,$$

por lo que tenemos que  $G$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo.

Dado un grupo abeliano  $G$  y subgrupos  $H_1, \dots, H_n$  de  $G$ , definimos la suma (interna)

$$H_1 + \dots + H_n$$

de los  $H_i$  como el grupo abeliano consistente en todas las sumas de la forma  $a_1 + \dots + a_n$ , donde  $a_i \in H_i$ . Si además se cumple que  $G = H_1 + \dots + H_n$  y  $H_i \cap (\sum_{j \neq i} H_j) = \{0\}$  para todo  $i$ , decimos que  $G$  es la *suma directa de los  $H_i$* , y lo denotamos por

$$G = H_1 \oplus \dots \oplus H_n.$$

Cuando  $H_1 = \dots = H_n = H$ , escribimos  $H \oplus \dots \oplus H$  como  $H^n$ . El *rango* de un grupo abeliano es el máximo de los tamaños de familias linealmente independientes en  $G$ .

Dada una familia  $(G_i)_{i \in I}$  de grupos abelianos, definimos la suma directa (externa) de los  $G_i$ , que denotamos por  $\bigoplus_{i \in I} G_i$ , como el conjunto de todas las funciones  $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i$  tales que  $f(i) \in G_i$  para todo  $i \in I$  con  $f(i) = 0$  para casi todo  $i \in I$ . Un elemento  $f \in \bigoplus_{i \in I} G_i$  es normalmente denotado por  $(f_i)_{i \in I}$ . Dadas dos funciones  $f = (f_i)_{i \in I}$  y  $g = (g_i)_{i \in I}$  en  $\bigoplus_{i \in I} G_i$ , definimos  $(f + g)$  por

$$(f + g)_i = f_i + g_i,$$

para todo  $i \in I$ . Se tiene que  $\bigoplus_{i \in I} G_i$  es un grupo abeliano. Para todo  $i \in I$ , existe un homomorfismo inyectivo  $in_i : G_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} G_i$ , definido de manera que para todo  $x \in G_i$ ,  $in_i(x)(i) = x$  y  $in_i(x)(j) = 0$  si, y solo si,  $j \neq i$ . Si  $G = \bigoplus_{i \in I} G_i$  es una suma directa externa, se verifica que  $G = \bigoplus_{i \in I} in_i(G_i)$  como suma directa interna. Para simplificar notación, a menudo identificaremos  $in_i(G_i)$  con  $G_i$ .

Podemos enunciar ya el siguiente resultado, que constituye una herramienta esencial para estudiar la estructura de los grupos abelianos finitamente generados.

**Proposición 4.1.** *Sea  $G$  un grupo abeliano libre finitamente generado por los elementos  $(a_1, \dots, a_n)$  y sea  $H$  cualquier subgrupo de  $G$ . Entonces,  $H$  es un grupo abeliano libre y existe una base  $(e_1, \dots, e_q)$  de  $G$ , un número  $q \leq n$ , y números naturales positivos  $n_1, \dots, n_q$ , tales que  $(n_1 e_1, \dots, n_q e_q)$  es una base de  $H$  y  $n_i$  divide a  $n_{i+1}$  para todo  $1 \leq i \leq q - 1$ .*

Usando la Proposición 4.1 podemos demostrar el siguiente resultado:

**Proposición 4.2.** *Sea  $G$  un grupo abeliano finitamente generado. Entonces, existe un número natural  $m \geq 0$  y números naturales positivos  $n_1, \dots, n_q$  tales que  $G$  es isomorfo a la suma directa*

$$\mathbb{Z}^m \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z},$$

y donde  $n_i$  divide a  $n_{i+1}$  para todo  $1 \leq i \leq q - 1$ .

Observemos que  $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}$  es el subgrupo de torsión de  $G$ . Así, como corolario de la Proposición 4.2, obtenemos que todo grupo abeliano finitamente generado  $G$  es una suma directa  $G = \mathbb{Z}^m \oplus T$ , donde  $T$  es el subgrupo de torsión de  $G$  y  $\mathbb{Z}^m$  es el grupo abeliano libre de dimensión  $m$ . Se verifica que  $m$  es el rango de  $G$ , al que también se le llama *número de Betti*. Se puede demostrar también que el número  $q$  y los números  $n_i$  solo dependen de  $G$ .

El siguiente resultado nos será útil para calcular los grupos de homología de poliedros. En lo que sigue, denotaremos el rango de un grupo abeliano  $G$  como  $r(G)$ .

**Proposición 4.3.** *Si*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

*es una sucesión exacta corta de homomorfismos de grupos abelianos (es decir, que se cumple que  $\text{Im } f = \text{Ker } g$ , con  $f$  inyectiva y  $g$  suprayectiva) y  $F$  tiene rango finito, entonces  $r(F) = r(E) + r(G)$ . En particular, si  $G$  es un grupo abeliano de rango finito y  $H$  es un subgrupo de  $G$ , entonces  $r(G) = r(H) + r(G/H)$ .*

## 4.2. Homología simplicial y singular

En esta sección vamos a estudiar brevemente dos tipos de homología, la *homología simplicial* y la *homología singular*, aunque nos centraremos más en la primera de ellas.

Sea  $K = (V, \Sigma)$  un complejo. La esencia de la homología simplicial es asociar ciertos grupos abelianos  $H_p(K)$  a  $K$ . Esto se hace definiendo primero unos grupos abelianos libres  $C_p(K)$ , cuyos elementos son  $p$ -símplices orientados. Uno de los principales ingredientes es que a todo  $p$ -símplice orientado  $\sigma$  se le puede asignar una *frontera*  $\partial_p \sigma$ . Técnicamente, esto se consigue definiendo homomorfismos

$$\partial_p : C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$$

con la propiedad de que  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ . Si denotamos por  $Z_p(K)$  el núcleo de  $\partial_p$  y

$$B_p(K) = \partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$$

la imagen de  $\partial_{p+1}$  en  $C_p(K)$ , como  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$ , el grupo  $B_p(K)$  es un subgrupo del grupo  $Z_p(K)$ , y definimos el grupo de homología  $H_p(K)$  como el grupo cociente

$$H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K).$$

Lo que hace interesante a los grupos de homología de los complejos es el hecho de que estos solo dependen de la realización geométrica  $K_g$  del complejo  $K$ , aunque aquí no lo demostraremos.

El primer paso es definir símlices orientados. Dado un complejo  $K = (V, \Sigma)$ , recordemos que un  $n$ -símplice es un subconjunto  $\sigma = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$  de  $V$  que pertenece a la familia  $\Sigma$ . Como el subconjunto  $\sigma$  consta de  $n+1$  elementos, podemos ordenarlos de  $(n+1)!$  maneras diferentes, o lo que es lo mismo, podemos dar  $(n+1)!$  biyecciones distintas  $s : \{1, 2, \dots, n+1\} \rightarrow \sigma$ . Vamos a definir una relación de equivalencia en este conjunto de biyecciones diciendo que dos aplicaciones  $s_1 : \{1, 2, \dots, n+1\} \rightarrow \sigma$  y  $s_2 : \{1, 2, \dots, n+1\} \rightarrow \sigma$  son *equivalentes* si, y solo si,  $\pi = s_2^{-1} \circ s_1$  es una permutación de signo par (es decir,  $\pi$  es el producto de un número par de transposiciones).

Las dos clases de equivalencia asociadas a  $\sigma$  son llamadas *símlices orientados*, y si  $\sigma = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$ , denotamos la clase de equivalencia de la biyección  $s : \{1, 2, \dots, n+1\} \rightarrow \sigma$  por  $[s(1), \dots, s(n+1)]$ . También decimos que las dos clases de equivalencia asociadas a  $\sigma$  son las *orientaciones de  $\sigma$* . Se dice que dos símlices orientados  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  tienen *orientación opuesta* si son las dos clases de equivalencia asociadas a algún símplice  $\sigma$ . Dado un símplice orientado  $\sigma$ , denotamos el símplice orientado con orientación opuesta por  $-\sigma$ , con el convenio de que  $-(-\sigma) = \sigma$ .

Por ejemplo, si  $\sigma = \{a_0, a_1, a_2\}$  es un 2-símplice (un triángulo), hay seis secuencias ordenadas. Las secuencias  $\langle a_2, a_1, a_0 \rangle$ ,  $\langle a_1, a_0, a_2 \rangle$ , y  $\langle a_0, a_2, a_1 \rangle$  son equivalentes, al igual que también lo son las secuencias  $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ ,  $\langle a_1, a_2, a_0 \rangle$  y  $\langle a_2, a_0, a_1 \rangle$ . Así, tenemos los dos símlices orientados  $[a_0, a_1, a_2]$  y  $[a_2, a_1, a_0]$ .

**Definición 4.4.** Dado un complejo  $K = (V, \Sigma)$ , una  **$p$ -cadena** en  $K$  es una función  $c$  del conjunto de los  $p$ -símlices orientados a  $\mathbb{Z}$  tal que  $c(-\sigma) = -c(\sigma)$  para todo  $p$ -símplice  $\sigma \in \Sigma$ .

Definimos la suma de dos  $p$ -cadenas  $c_1$  y  $c_2$  como la  $p$ -cadena  $c_1 + c_2$  tal que  $(c_1 + c_2)(\sigma) = c_1(\sigma) + c_2(\sigma)$  para todo  $p$ -símplice orientado  $\sigma$ . El grupo de las  $p$ -cadenas lo denotamos por  $C_p(K)$ . Si  $p < 0$  o  $p > \dim(K)$ , establecemos  $C_p(K) = \{0\}$ .

Asociado a todo  $p$ -símplice orientado  $\sigma$  existe una  $p$ -cadena elemental  $c$ , definida de manera que

$$c(\sigma) = 1,$$

$$c(-\sigma) = -1, \text{ donde } -\sigma \text{ es la orientación opuesta de } \sigma, \text{ y}$$

$$c(\sigma') = 0 \text{ para todo símplice orientado } \sigma' \text{ distinto de } \sigma.$$

A menudo denotaremos la  $p$ -cadena elemental asociada al  $p$ -símplice orientado  $\sigma$  también por  $\sigma$ . Se cumple lo siguiente:

**Proposición 4.5.** *Para todo complejo  $K = (V, \Sigma)$ , para todo  $p$ , el grupo  $C_p(K)$  es un grupo abeliano libre. Para toda elección de una orientación para todo  $p$ -símplice, las correspondientes cadenas elementales forman una base para  $C_p(K)$ .*

La proposición nos muestra que si hay  $m_p$   $p$ -símplices en  $K$ , entonces  $C_p(K) = \mathbb{Z}^{m_p}$ . Como consecuencia también de esta proposición tenemos que para todo grupo abeliano  $G$  y toda aplicación  $f$  que lleva los  $p$ -símplices orientados de un complejo  $K$  a  $G$  y tal que  $f(-\sigma) = -f(\sigma)$  para todo  $p$ -símplice orientado  $\sigma$ , existe un único homomorfismo  $\hat{f} : C_p(K) \rightarrow G$  extendiendo  $f$ .

**Observación 4.6.** *Una vez visto esto, es natural preguntarse qué significa que la aplicación  $\hat{f} : C_p(K) \rightarrow G$  extiende  $f$ . La respuesta es la siguiente:*

1.  $\hat{f}(c) = f(\sigma)$  si, y solo si,  $c$  es la cadena elemental asociada al  $p$ -símplice  $\sigma$ .
2. Si  $c$  no es una cadena elemental asociada a ningún  $p$ -símplice  $\sigma$ , entonces  $c$  se puede escribir como suma de cadenas elementales asociadas a  $p$ -símplices, pues estas forman una base, y basta aplicar lo anterior.

Vamos a definir ahora las aplicaciones frontera  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ .

**Definición 4.7.** *Dado un complejo  $K = (V, \Sigma)$ , para todo  $p$ -símplice orientado*

$$\sigma = [\alpha_0, \dots, \alpha_p],$$

definimos la **frontera** de  $\sigma$ ,  $\partial_p \sigma$ , por

$$\partial_p \sigma = \sum_{i=0}^p (-1)^i [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p],$$

donde  $[\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p]$  denota el  $(p-1)$ -símplice orientado obtenido quitando el vértice  $\alpha_i$ .



Se verifica claramente que  $\partial_p(-\sigma) = -\partial_p\sigma$  para todo  $p$ -símplice orientado  $\sigma$ , por lo que aplicando el comentario hecho después de la Proposición 4.5 (con  $G = C_{p-1}(K)$  y  $f = \partial_p$ ), podemos extender  $\partial_p$  a  $C_p(K)$ .

**Definición 4.8.** Se define la **aplicación frontera**,  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ , como el único homomorfismo que extiende  $\partial_p$  a  $C_p(K)$ . Para  $p \leq 0$ ,  $\partial_p$  es el homomorfismo nulo.

Veamos ahora algunos ejemplos:

Si  $\sigma = [\alpha_0, \alpha_1]$ , entonces

$$\partial_1\sigma = \alpha_1 - \alpha_0.$$

Si  $\sigma = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ , entonces

$$\partial_2\sigma = [\alpha_1, \alpha_2] - [\alpha_0, \alpha_2] + [\alpha_0, \alpha_1] = [\alpha_1, \alpha_2] + [\alpha_2, \alpha_0] + [\alpha_0, \alpha_1].$$

Si  $\sigma = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ , entonces

$$\partial_3\sigma = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] - [\alpha_0, \alpha_2, \alpha_3] + [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3] - [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2].$$

Por otro lado,

Si  $\sigma$  es la cadena  $\sigma = [\alpha_0, \alpha_1] + [\alpha_1, \alpha_2] + [\alpha_2, \alpha_3]$  mostrada en la Figura 4.1a,

$$\partial_1\sigma = \partial_1[\alpha_0, \alpha_1] + \partial_1[\alpha_1, \alpha_2] + \partial_1[\alpha_2, \alpha_3] = \alpha_1 - \alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_3 - \alpha_0.$$

Si  $\sigma$  es el ciclo  $\sigma = [\alpha_0, \alpha_1] + [\alpha_1, \alpha_2] + [\alpha_2, \alpha_0]$  mostrado en la Figura 4.1b,

$$\partial_1\sigma = \partial_1[\alpha_0, \alpha_1] + \partial_1[\alpha_1, \alpha_2] + \partial_1[\alpha_2, \alpha_0] = \alpha_1 - \alpha_0 + \alpha_2 - \alpha_1 + \alpha_0 - \alpha_2 = 0.$$

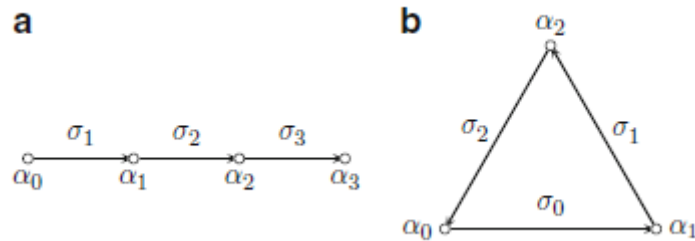


Figura 4.1: Ilustración extraída de [4] (p. 60). (a) Una cadena con frontera  $\alpha_3 - \alpha_0$ . (b) Una cadena con frontera 0.

**Proposición 4.9.** Para todo complejo  $K = (V, \Sigma)$ , para todo  $p$ , se tiene que  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ .

*Demostración.* Para cualquier  $p$ -símplice orientado  $\sigma = [\alpha_0, \dots, \alpha_p]$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
(\partial_{p-1} \circ \partial_p)(\sigma) &= \partial_{p-1}(\partial_p \sigma) \\
&= \partial_{p-1} \left( \sum_{i=0}^p (-1)^i [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p] \right) \\
&= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1} [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p] \\
&= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^i (-1)^j [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p] \\
&\quad + \sum_{i=0}^p \sum_{j=i+1}^p (-1)^i (-1)^{j-1} [\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \hat{\alpha}_j, \dots, \alpha_p] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  es el único homomorfismo extendiendo la aplicación  $\partial_p$  que actúa sobre  $p$ -símplices orientados a  $C_p(K)$ , se tiene el resultado. □

Como consecuencia de la Proposición 4.9, tenemos que la imagen  $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$  de la aplicación  $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$  es un subgrupo del núcleo  $\partial_p^{-1}(0)$  de la aplicación  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$ .

**Definición 4.10.** Dado un complejo  $K = (V, \Sigma)$ , el núcleo,  $\partial_p^{-1}(0)$ , del homomorfismo  $\partial_p : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  es denotado por  $Z_p(K)$  y a sus elementos se les llama  **$p$ -ciclos**. La imagen,  $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$ , del homomorfismo  $\partial_{p+1} : C_{p+1}(K) \rightarrow C_p(K)$  es denotada por  $B_p(K)$  y a sus elementos se les llama  **$p$ -fronteras**.

**Definición 4.11.** Se define el  **$p$ -ésimo grupo de homología**,  $H_p(K)$ , como el grupo cociente

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K).$$

**Definición 4.12.** Dos  $p$ -cadenas,  $c$  y  $c'$ , se dice que son **homólogas** si existe alguna  $(p+1)$ -cadena,  $d$ , tal que  $c = c' + \partial_{p+1}d$ .

A menudo omitiremos el subíndice  $p$  de  $\partial_p$ .

**Ejemplo 4.13.** Vamos a calcular los grupos de homología  $H_0(K)$  y  $H_1(K)$  del complejo  $K$  mostrado en la Figura 4.2.

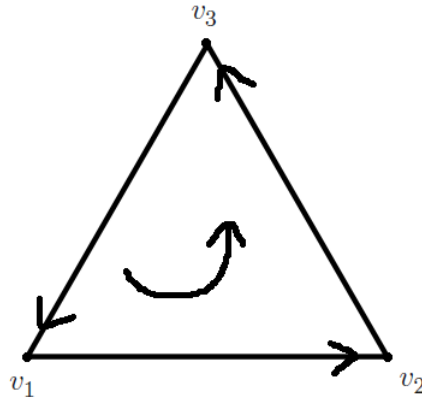


Figura 4.2: Un complejo de dimensión 2.

Este complejo consiste en los tres vértices  $v_1, v_2, v_3$ , las tres aristas orientadas  $a = [v_1, v_2]$ ,  $b = [v_2, v_3]$ ,  $c = [v_3, v_1]$ , y el triángulo orientado  $A = [v_1, v_2, v_3]$ .

Claramente,  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ , pues cualquier par de vértices están conectados por una 1-cadena (la arista que los une). Por lo tanto,  $H_0(K)$  está generado por la clase de equivalencia de cualquier vértice, y así,  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ .

Por definición,  $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$ , donde  $Z_1(K) = \text{Ker } \partial_1$  y  $B_1(K) = \text{Im } \partial_2$ .

Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
 B_1(K) &= \text{Im } \partial_2 \\
 &= \partial_2(C_2(K)) \\
 &= \{\partial_2(nA) : n \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{n\partial_2(A) : n \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{n(a + b + c) : n \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
 Z_1(K) &= \text{Ker } \partial_1 \\
 &= \{n_1a + n_2b + n_3c : \partial_1(n_1a + n_2b + n_3c) = 0\} \\
 &= \{n_1a + n_2b + n_3c : n_1(v_2 - v_1) + n_2(v_3 - v_2) + n_3(v_1 - v_3) = 0\} \\
 &= \{n_1a + n_2b + n_3c : (n_3 - n_1)v_1 + (n_1 - n_2)v_2 + (n_2 - n_3)v_3 = 0\} \\
 &= \{n_1a + n_2b + n_3c : n_1 = n_2 = n_3 = n \in \mathbb{Z}\} \\
 &= \{n(a + b + c) : n \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $B_1(K) = Z_1(K)$ , de donde tenemos que  $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = 0$ .

**Ejemplo 4.14.** Vamos a calcular los grupos de homología  $H_0(K)$  y  $H_1(K)$  del complejo  $K$  mostrado en la Figura 4.3.

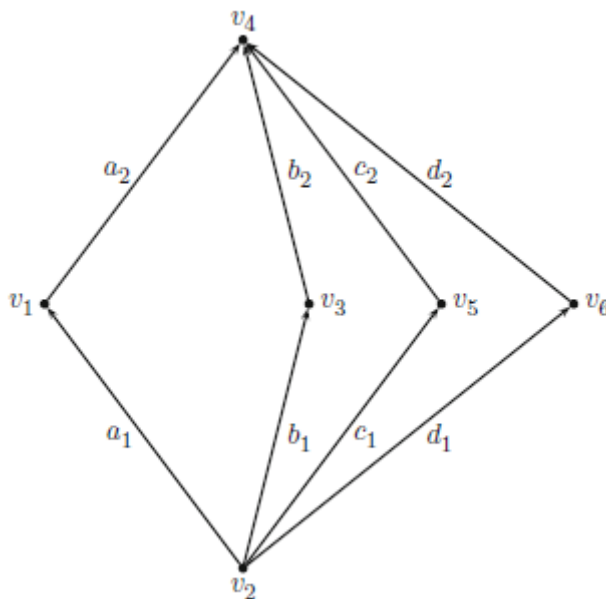


Figura 4.3: Ilustración extraída de [4] (p. 61). Un complejo de dimensión 1.

Este complejo consiste en los seis vértices  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  y las ocho aristas orientadas  $a_1 = [v_2, v_1]$ ,  $a_2 = [v_1, v_4]$ ,  $b_1 = [v_2, v_3]$ ,  $b_2 = [v_3, v_4]$ ,  $c_1 = [v_2, v_5]$ ,  $c_2 = [v_5, v_4]$ ,  $d_1 = [v_2, v_6]$ ,  $d_2 = [v_6, v_4]$ .

Como  $K$  es conexo, dados dos vértices cualesquiera,  $u$  y  $u'$  de  $K$ , existe un camino

$$\pi = [u, u_1] + [u_1, u_2] + \dots + [u_{n-1}, u']$$

uniendo  $u$  con  $u'$ , donde cada  $u_i$  es un vértice de  $K$ . Claramente, se tiene que

$$\partial_1(\pi) = u' - u,$$

por lo que  $u$  y  $u'$  son homólogos. En consecuencia, cualquier 0-cadena  $\sum n_i v_i$  es homóloga a  $(\sum n_i) v_1$ , lo que demuestra que

$$H_0(K) = \mathbb{Z}.$$

Por otro lado, se tiene que los 1-ciclos  $a_1 + a_2 - b_1 - b_2$ ,  $b_1 + b_2 - c_1 - c_2$  y  $c_1 + c_2 - d_1 - d_2$  forman una base de  $Z_1(K)$ , pues son independientes y cualquier 1-ciclo se puede escribir como combinación lineal de ellos, por lo que

$$H_1(K) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = \text{Ker } \partial_1 \approx \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Como los complejos  $K = (V, \Sigma)$  que aquí consideramos son todos finitos, se tiene que cada grupo  $C_p(K)$  es libre y finitamente generado, por lo que los grupos de homología  $H_p(K)$  son también finitamente generados.

Llegados a este punto queremos estudiar los grupos de homología de realizaciones geométricas de complejos, y en particular, superficies compactas. Sin embargo, hasta ahora no hemos definido los grupos de homología para espacios topológicos.

Es posible definir grupos de homología para espacios topológicos arbitrarios usando lo que se conoce como *homología singular*. Se puede demostrar, aunque no fácilmente, que los grupos de homología de un espacio  $X$ , el cual es la realización geométrica de algún complejo  $K$ , son independientes del complejo  $K$  tal que  $X = K_g$ , e iguales a los grupos de homología de cualquiera de tales complejos.

La idea que hay detrás de la homología singular es definir la noción de  $n$ -símplice asociado a un espacio topológico  $X$ . Recordemos que dado cualquier conjunto  $I$ , el espacio vectorial  $\mathbb{R}^{(I)}$  libremente generado por  $I$  está definido como un subconjunto del producto cartesiano  $\mathbb{R}^I$  consistente en las familias  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de elementos de  $\mathbb{R}$  con soporte finito (donde  $\mathbb{R}^I$  denota el conjunto de todas las funciones de  $I$  en  $\mathbb{R}$ ). En el caso particular  $I = \mathbb{N}$ , obtenemos un espacio vectorial de dimensión finita,  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ , cuyos elementos son las sucesiones  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  de números reales tales que  $\lambda_i = 0$  para casi todo  $i \in \mathbb{N}$ . Para cualquier número natural  $i \in \mathbb{N}$ , sea  $e_i$  el elemento de  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  tal que  $e_i(i) = 1$  y  $e_i(j) = 0$  para todo  $j \neq i$ , es decir,  $e_i$  es la sucesión de números reales que tiene un 1 en la posición  $i$ -ésima y 0 en el resto. Para cualquier  $p \in \mathbb{N}$ , sea  $\Delta_p$  el  $p$ -símplice generado por  $e_0, \dots, e_p$ , esto es, el subconjunto de  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  que consiste en todos los puntos de la forma

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i e_i, \text{ con } \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1, \text{ y } \lambda_i \geq 0.$$

Llamamos a  $\Delta_p$  el  $p$ -símplice canónico. Notemos que  $\Delta_{p-1}$  es una cara de  $\Delta_p$ .

**Definición 4.15.** Dado un espacio topológico  $X$ , un  **$p$ -símplice singular** es cualquier aplicación continua  $T : \Delta_p \rightarrow X$ . El grupo abeliano libre generado por los  $p$ -símplices singulares es llamado el  **$p$ -ésimo grupo cadena singular** y se denota por  $S_p(X)$ .

Dados  $p + 1$  puntos  $a_0, \dots, a_p$  en  $\mathbb{R}^{(N)}$ , existe una única aplicación afín  $f : \Delta_p \longrightarrow \mathbb{R}^{(N)}$  tal que  $f(e_i) = a_i$  para todo  $0 \leq i \leq p$ , a saber, la aplicación tal que

$$f\left(\sum_{i=0}^p \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=0}^p \lambda_i a_i,$$

para todo  $\lambda_i$  tal que  $\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$  y  $\lambda_i \geq 0$ . Esta aplicación es llamada el *símplice singular afín* determinado por  $a_0, \dots, a_p$  y se denota por  $l(a_0, \dots, a_p)$ . En particular, la aplicación

$$l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p),$$

donde el gorro sobre  $e_i$  significa que  $e_i$  es omitido, es una aplicación de  $\Delta_{p-1}$  a una cara de  $\Delta_p$ , que podemos considerar como una aplicación de  $\Delta_{p-1}$  a  $\Delta_p$ , aunque en realidad va de  $\Delta_{p-1}$  a  $\mathbb{R}^{(N)}$ . A esta aplicación se le llama la *i-ésima cara de  $\Delta_p$* .

Por lo tanto, si  $T : \Delta_p \longrightarrow X$  es un  $p$ -símplice singular, podemos formar la aplicación

$$T \circ l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p) : \Delta_{p-1} \longrightarrow X,$$

la cual es un  $(p - 1)$ -símplice singular, pues la composición de dos aplicaciones continuas es continua. Podemos pensar en esta aplicación como la *i-ésima cara de  $T$* . De hecho, para  $p = 1$ , un  $p$ -símplice singular  $T : \Delta_p \longrightarrow X$  puede ser visto como una curva en  $X$ , cuyas caras son sus dos puntos finales. Para  $p = 2$ , un  $p$ -símplice singular  $T : \Delta_p \longrightarrow X$  puede ser visto como un trozo de superficie triangular en  $X$ , cuyas caras son las tres curvas frontera. Para  $p = 3$ , un  $p$ -símplice singular  $T : \Delta_p \longrightarrow X$  puede ser visto como un tetraedro en  $X$ , cuyas caras son los cuatro trozos de superficie en la frontera.

**Definición 4.16.** Dado un espacio topológico  $X$ , para todo  $p$ -símplice singular  $T : \Delta_p \longrightarrow X$ , definimos la **frontera de  $T$** ,  $\partial_p T$ , como

$$\partial_p T = \sum_{i=0}^p (-1)^i T \circ l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p).$$

**Definición 4.17.** Se define la **aplicación frontera**,  $\partial_p : S_p(X) \longrightarrow S_{p-1}(X)$ , como el único homomorfismo que extiende  $\partial_p$  a  $S_p(X)$ . Para  $p \leq 0$ ,  $\partial_p$  es el homomorfismo nulo.

**Definición 4.18.** Dada una aplicación continua  $f : X \longrightarrow Y$  entre dos espacios topológicos,  $X$  e  $Y$ , definimos el homomorfismo  $f_{\#,p} : S_p(X) \longrightarrow S_p(Y)$  por

$$f_{\#,p}(T) = f \circ T,$$

para todo  $p$ -símplice singular  $T : \Delta_p \longrightarrow X$ .

**Proposición 4.19.** *Para toda aplicación continua  $f : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$ , las aplicaciones  $f_{\#,p}$  y  $\partial_p$  conmutan para todo  $p$ , es decir,*

$$\partial_p \circ f_{\#,p} = f_{\#,p-1} \circ \partial_p,$$

tal y como se muestra en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S_p(X) & \xrightarrow{f_{\#,p}} & S_p(Y) \\ \downarrow \partial_p & & \downarrow \partial_p \\ S_{p-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#,p-1}} & S_{p-1}(Y) \end{array}$$

Se cumple también que  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ .

*Demostración.* Para cualquier  $p$ -símplexe singular  $T : \Delta_p \rightarrow X$  se tiene, por un lado, que

$$\partial_p f_{\#,p}(T) = \partial_p(f \circ T) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (f \circ T) \circ l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p),$$

y por otro lado que

$$f_{\#,p-1}(\partial_p T) = \sum_{i=0}^p (-1)^i f \circ (T \circ l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p)).$$

Como la composición de aplicaciones es asociativa, tenemos la igualdad.

Veamos ahora que  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$ . En primer lugar, tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_p l(a_0, \dots, a_p) &= \sum_{i=0}^p (-1)^i l(a_0, \dots, a_p) \circ l(e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_p) \\ &= \sum_{i=0}^p (-1)^i l(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p), \end{aligned}$$

ya que la composición de aplicaciones afines es afín. Así, al igual que hicimos en la Proposición 4.9, se tiene que

$$\begin{aligned}
\partial_{p-1}\partial_p l(a_0, \dots, a_p) &= \partial_{p-1}\left(\sum_{i=0}^p (-1)^i l(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p)\right) \\
&= \sum_{i=0}^p (-1)^i \partial_{p-1} l(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p) \\
&= \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^i (-1)^j l(a_0, \dots, \hat{a}_j, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_p) \\
&\quad + \sum_{i=0}^p \sum_{j=i+1}^p (-1)^i (-1)^{j-1} l(a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_p) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $l(e_0, \dots, e_p)$  es simplemente la inclusión de  $\Delta_p$  en  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ , se tiene claramente que

$$\partial_{p-1}\partial_p T = \partial_{p-1}\partial_p(T_{\#}(l(e_0, \dots, e_p))),$$

por lo que, como  $\partial$  conmuta con  $T_{\#}$ , tal y como hemos probado más arriba, tenemos que

$$\partial_{p-1}\partial_p T = \partial_{p-1}\partial_p(T_{\#}(l(e_0, \dots, e_p))) = T_{\#}(\partial_{p-1}\partial_p l(e_0, \dots, e_p)) = T_{\#}(0) = 0,$$

tal y como queríamos probar. □

Como consecuencia de la Proposición 4.19, tenemos que la imagen  $\partial_{p+1}(S_{p+1}(X))$  de la aplicación  $\partial_{p+1} : S_{p+1}(X) \rightarrow S_p(X)$  es un subgrupo del núcleo  $\partial_p^{-1}(0)$  de la aplicación  $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$ .

**Definición 4.20.** Dado un espacio topológico  $X$ , el núcleo,  $\partial_p^{-1}(0)$ , del homomorfismo  $\partial_p : S_p(X) \rightarrow S_{p-1}(X)$  es denotado por  $Z_p(X)$  y a sus elementos se les llama ***p-ciclos singulares***. La imagen,  $\partial_{p+1}(S_{p+1}(X))$ , del homomorfismo  $\partial_{p+1} : S_{p+1}(X) \rightarrow S_p(X)$  es denotada por  $B_p(X)$  y a sus elementos se les llama ***p-fronteras singulares***.

**Definición 4.21.** El ***p-ésimo grupo de homología singular***,  $H_p(X)$ , es el grupo cociente

$$H_p(X) = Z_p(X)/B_p(X).$$



Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, el hecho de que

$$\partial_p \circ f_{\#,p} = f_{\#,p-1} \circ \partial_p$$

nos permite definir homomorfismos  $f_{*,p} : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$  que cumplen la propiedad de que

$$(g \circ f)_{*,p} = g_{*,p} \circ f_{*,p},$$

y donde además,  $Id_{*,p} : H_p(X) \rightarrow H_p(X)$  es el homomorfismo identidad cuando  $Id : X \rightarrow X$  es la aplicación identidad. Como corolario obtenemos que si  $f : X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo de espacios topológicos, entonces cada  $f_{*,p} : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$  es un isomorfismo de grupos, por lo que tenemos que los grupos de homología son un invariante topológico. Por lo tanto, para ver que dos espacios topológicos no son homeomorfos basta con comprobar que sus grupos de homología,  $H_p(X)$  y  $H_p(Y)$ , no son isomorfos para algún  $p$ , al igual que ocurría con el grupo fundamental.

Se puede probar que  $H_0(X)$  es un grupo abeliano libre, y que si  $(X_i)_{i \in I}$  es la familia formada por las componentes conexas por caminos de  $X$ , entonces  $H_0(X)$  es isomorfo a la suma directa  $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}$ . En particular, si  $X$  es conexo por caminos, entonces  $H_0(X) = \mathbb{Z}$ . El siguiente resultado, que aquí no demostraremos, muestra la relación que existe entre la homología singular y la homología simplicial.

**Teorema 4.22.** *Dado cualquier politopo  $X$ , si  $X = K_g = K'_g$  es la realización geométrica de dos complejos  $K$  y  $K'$ , entonces*

$$H_p(X) = H_p(K) = H_p(K')$$

para todo  $p \geq 0$ .

Por lo tanto,  $H_p(X)$  está finitamente generado para todo  $p \geq 0$ . Si  $K$  tiene dimensión  $m$ , entonces  $H_p(X) = 0$  para  $p > m$ , y se puede demostrar que  $H_m(X)$  es un grupo abeliano libre.

Pasamos ahora a estudiar la característica de Euler-Poincaré, otro invariante de los complejos finitos, que son los que aquí nos interesan.

**Definición 4.23.** *Dado un complejo finito,  $K = (V, \Sigma)$ , de dimensión  $m$ , sea  $m_p$  el número de  $p$ -símplices en  $K$ . Definimos la **característica de Euler-Poincaré**,  $\chi(K)$ , de  $K$  como*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^m (-1)^p m_p.$$

Se cumple lo siguiente:

**Teorema 4.24.** *Dado un complejo finito,  $K = (V, \Sigma)$ , de dimensión  $m$ , se tiene que*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^m (-1)^p r(H_p(K)),$$

donde  $r(H_p(K))$  es el número de Betti (o rango) de  $H_p(K)$ .

*Demostración.* Sabemos que  $C_p(K)$  es un grupo libre de rango  $m_p$ . Como  $H_p(K) = Z_p(K)/B_p(K)$ , usando la Proposición 4.3 tenemos que

$$r(H_p(K)) = r(Z_p(K)) - r(B_p(K)).$$

Como tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z_p(K) \longrightarrow C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1}(K) \longrightarrow 0,$$

usando de nuevo la Proposición 4.3 tenemos que

$$r(C_p(K)) = m_p = r(Z_p(K)) + r(B_{p-1}(K)).$$

Así,

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p m_p \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p (r(Z_p(K)) + r(B_{p-1}(K))) \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p r(Z_p(K)) + \sum_{p=0}^m (-1)^p r(B_{p-1}(K)). \end{aligned}$$

Usando el hecho de que  $B_m(K) = 0$  y  $B_{-1}(K) = 0$  tenemos que

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p r(Z_p(K)) + \sum_{p=0}^m (-1)^{p+1} r(B_p(K)) \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p (r(Z_p(K)) - r(B_p(K))) \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p r(H_p(K)). \end{aligned}$$

□

Una consecuencia importante que se obtiene juntando los dos teoremas anteriores es que la característica de Euler-Poincaré de un complejo finito  $K$  de dimensión  $m$  solo depende de la realización geométrica  $K_g$  de  $K$ , ya que solo depende de los grupos de homología,  $H_p(K) = H_p(K_g)$ , del politopo  $K_g$ . Por lo tanto, dos complejos  $K$  y  $K'$  con la misma realización geométrica tienen la misma característica de Euler-Poincaré, es decir, la característica de Euler-Poincaré es un invariante de todos los complejos finitos correspondientes al mismo politopo,  $X = K_g$ . Podemos decir entonces que esta es la característica de Euler-Poincaré del politopo  $X = K_g$ , y la denotamos por  $\chi(X)$ . En particular, esto es cierto para superficies que admiten una triangulación, y como veremos enseguida, la característica de Euler-Poincaré juega un papel muy importante en la clasificación de superficies compactas. En este caso,  $\chi(K) = m_0 - m_1 + m_2$ , donde  $m_0$  es el número de vértices,  $m_1$  el número de aristas, y  $m_2$  el número de triángulos en  $K$ .

### 4.3. Grupos de homología de poliedros

Recordemos aquí que un complejo 2-dimensional  $K$  satisfaciendo las condiciones de la Proposición 2.13 (y por ende, cuya realización geométrica es una superficie) es llamado un complejo 2-dimensional triangulado, y a tal superficie se le llama poliedro. Así pues, podemos determinar los grupos de homología de poliedros. En lo que sigue, diremos que un complejo 2-dimensional triangulado  $K$  es orientable si su realización geométrica  $K_g$  es orientable. En primer lugar, notemos que  $C_p(K)$  es el grupo trivial para  $p < 0$  y  $p > 2$ , por lo que solo tenemos que considerar los casos  $p = 0, 1, 2$ . Usaremos la notación  $c \sim c'$  para denotar que las  $p$ -cadenas  $c$  y  $c'$  son homólogas, lo cual quiere decir que existe una  $(p+1)$ -cadena  $d$  tal que  $c = c' + \partial_{p+1}d$ .

**Proposición 4.25.** *Para todo complejo 2-dimensional triangulado,  $K$ , se tiene que  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ .*

*Demostración.* Recordemos que  $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K)$ , donde  $Z_0(K) = \text{Ker } \partial_0 = C_0(K)$ , pues  $\partial_0$  es el homomorfismo nulo, y  $B_0(K) = \text{Im } \partial_1 = \partial_1(C_1(K))$ . Así pues,  $H_0(K) = C_0(K)/B_0(K)$ .

Vamos a ver qué son las 0-fronteras. Sea  $c \in B_0(K)$  una 0-frontera, es decir,  $c$  es de la forma  $c = \partial(\sum x_i a_i) = \sum x_i \partial a_i$ , donde cada  $a_i$  es una arista orientada,  $a_i = [\alpha_i, \beta_i]$ . Así, se tiene que  $c = \sum x_i \partial a_i = \sum x_i (\beta_i - \alpha_i)$ , por lo que  $B_0(K)$  está generado por  $(\beta_i - \alpha_i)$ , siendo  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  los extremos de cualquier arista.

Sean ahora  $\alpha$  y  $\beta$  dos vértices cualesquiera de  $K$ . Como  $K$  es conexo, existe un camino  $c \in C_1(K)$  del vértice  $\alpha$  al vértice  $\beta$ , esto es, la 1-cadena  $c = [\alpha, \alpha_1] + \cdots + [\alpha_n, \beta]$ , donde los  $\alpha_i$  son vértices de  $K$ .

Se cumple claramente que  $\partial c = \beta - \alpha$ , por lo que  $\alpha$  y  $\beta$  son homólogos. Así,  $\alpha$  y  $\beta$  general la misma clase de equivalencia en  $H_0(K)$ , por lo que  $H_0(K)$  está generado por un elemento (la clase de equivalencia de un vértice cualquiera de  $K$ ).

Falta ver que si  $\alpha$  es un vértice de  $K$ , entonces  $\alpha$  no puede ser homólogo a 0. Veamos: si  $\alpha$  fuera homólogo 0, existiría una 1-cadena  $d$  tal que  $\alpha = 0 + \partial d = \partial d \in B_0(K)$ , lo cual es imposible pues hemos visto que  $B_0(K)$  está generado por  $(\beta_i - \alpha_i)$ , por lo que se tiene que  $H_0(K) = \mathbb{Z}$ , tal y como queríamos probar.  $\square$

**Proposición 4.26.** *Para todo complejo 2-dimensional triangulado,  $K$ , se tiene que, o bien  $H_2(K) = \mathbb{Z}$ , o bien  $H_2(K) = 0$ . Más aún,  $H_2(K) = \mathbb{Z}$  si, y solo si,  $K$  no tiene frontera y es orientable. En otro caso,  $H_2(K) = 0$ .*

*Demostración.* Recordemos que  $H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K)$ , donde  $Z_2(K) = \text{Ker } \partial_2$  y  $B_2(K) = \text{Im } \partial_3 = 0$ , pues  $\partial_3 = 0$ . Así pues,  $H_2(K) = Z_2(K)$ . Vamos a calcular  $Z_2(K) = \text{Ker } \partial_2$ , donde  $\partial_2 : C_2(K) \rightarrow C_1(K)$ .

Un elemento genérico de  $C_2(K)$  es de la forma  $c = \sum x_i A_i$ , con  $x_i \in \mathbb{Z}$  y  $A_i$  triángulos orientados para todo  $i$ . Si suponemos que  $c \in Z_2(K)$ , se tiene que  $0 = \partial_2 c = \sum x_i \partial_2 A_i$ . Por lo tanto, si  $A_i$  y  $A_j$  tienen una arista  $a$  en común, debe cumplirse que, o bien  $x_i a + x_j a = 0$ , o bien  $-x_i a + x_j a = 0$ , o bien  $x_i a - x_j a = 0$ , o bien  $-x_i a - x_j a = 0$ , dependiendo de la orientación de cada triángulo, de donde se tiene que  $x_i = \epsilon x_j$ , con  $\epsilon = \pm 1$ . Consecuentemente, si  $A_i$  y  $A_j$  están unidos por una secuencia de triángulos adyacentes dos a dos, todos en  $c$ , se tiene que  $|x_i| = |x_j|$ . En virtud de la Proposición 2.13 y la Proposición 3.25, se tiene que cualesquiera dos triángulos  $A_i$  y  $A_j$  en  $K$  están conectados por una secuencia de triángulos adyacentes dos a dos. Si algún triángulo en el camino no pertenece a  $c$ , entonces hay dos triángulos adyacentes en el camino,  $A_h$  y  $A_k$ , con  $A_h$  en  $c$  y  $A_k$  fuera de  $c$ , tal que todos los triángulos en el camino desde  $A_i$  hasta  $A_h$  pertenecen a  $c$ . Pero entonces,  $A_h$  tiene una arista no adyacente a ningún otro triángulo en  $c$ , por lo que  $x_h = 0$ , y así,  $x_i = 0$ . El mismo razonamiento aplicado a  $A_j$  muestra que  $x_j = 0$ . Por tanto, si algún  $A_k \notin c$ , se tiene que  $c = 0$ . Nos centraremos pues en las 2-cadenas que contienen a todos los triángulos  $A_i$ . Así, podemos suponer que todos los triángulos de  $K$  están en  $c$ . Distinguimos:

1) Si  $K$  tiene frontera, existe algún triángulo  $A_i$  y una arista del mismo que no es adyacente a ningún otro triángulo, lo cual implica que  $x_i = 0$ . En este caso,  $H_2(K) = 0$ .

2) Si  $K$  no tiene frontera, por el argumento de antes, cualquier 2-ciclo  $c$  puede escribirse como

$$c = \sum \epsilon_i x A_i,$$

donde  $x = |x_i| > 0$  para todo  $i$ , y  $\epsilon_i = \pm 1$ . Como  $\partial_2 c = 0$ , se tiene que  $\sum \epsilon_i x \partial_2 A_i = 0$ , por lo que  $x(\sum \epsilon_i \partial_2 A_i) = 0$ , de donde deducimos que  $\sum \epsilon_i A_i$  es también un 2-ciclo. Sea ahora el 2-ciclo arbitrario  $\sum y_i A_i$ , y consideremos el 2-ciclo  $c' = \sum y_i A_i - \epsilon_1 y_1 (\sum \epsilon_i A_i) = \sum (y_i - \epsilon_1 \epsilon_i y_1) A_i = \sum_{i \neq 1} (y_i - \epsilon_1 \epsilon_i y_1) A_i$ . Como  $c'$  es un 2-ciclo, se tiene que todos los coeficientes  $y_i - \epsilon_1 \epsilon_i y_1$  tienen el mismo valor absoluto, e igual al valor absoluto del coeficiente de  $A_1$ , que es 0, por lo que  $y_i = \epsilon_1 \epsilon_i y_1$  para todo  $i \neq 1$ , y así,

$$\sum y_i A_i = \epsilon_1 y_1 (\sum \epsilon_i A_i).$$

Por tanto,  $H_2(K) = 0$  o  $H_2(K) = \mathbb{Z}$ , dependiendo de si  $\sum \epsilon_i A_i = 0$  o no.

Veamos ahora que  $H_2(K) = \mathbb{Z}$  si, y solo si,  $K$  es orientable.

Supongamos en primer lugar que  $H_2(K) = Z_2(K) = \mathbb{Z}$ . Podemos elegir entonces una orientación para cada  $A_i$  de suerte que  $\sum A_i \in Z_2(K)$  (para que tenga un generador). Sea  $A = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$  el 2-símplice correspondiente a un  $A_i$  cualquiera. Recordemos que la realización geométrica de  $A$ ,  $A_g$ , es un triángulo.

Sea  $f$  la aplicación afín que lleva  $A_g$  a un triángulo en el plano (visto como  $\mathbb{C}$ ) tal que  $\alpha_0, \alpha_1$  y  $\alpha_2$  son llevados a  $0, 1$  e  $i$ , respectivamente. Esta aplicación determina una orientación de  $A_g$ , y es natural pensar que tal orientación podría depender del orden en que tomemos los vértices. Sin embargo, la aplicación afín que efectúa una permutación cíclica de  $0, 1, i$  (es decir, que lleva el  $0$  al  $1$ , el  $1$  al  $i$ , y el  $i$  al  $0$ ) puede ser escrita como

$$(x, y) \mapsto (1 - x - y, x),$$

y claramente preserva el sentido pues su jacobiano es

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

En consecuencia, obtenemos así una orientación para el interior de cada 2-símplice.

Las estrellas (abiertas) de los vértices del complejo forman un cubrimiento por abiertos de  $K_g$ . Vamos a demostrar que este cubrimiento permite una orientación compatible.

Como la estrella  $St(\alpha_0)$  es homeomorfa a un disco abierto, la estrella es orientable (pues la orientabilidad se conserva por homeomorfismos), y además, la orientación de un  $A_g \subseteq St(\alpha_0)$  determina una orientación de la estrella. Necesitamos ver ahora que diferentes  $A_g$  determinan la misma orientación, para lo cual es suficiente considerar dos triángulos adyacentes,  $A_g$  y  $A'_g$ , en  $St(\alpha_0)$ .

Si el lado común a ambos triángulos es la arista  $(\alpha_0, \alpha_1)$ , las orientaciones deben ser de la forma  $A = [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ ,  $A' = [\alpha_0, \alpha_3, \alpha_1]$ . Sean  $f$  y  $f'$  las aplicaciones afines que me determinan tales orientaciones.

Un homeomorfismo  $h$  de  $A_g \cup A'_g$  al plano se puede construir definiendo  $h := f$  en  $A_g$  y  $h = \sigma \circ f'$  en  $A'_g$ , donde  $\sigma$  es la aplicación dada por  $z \mapsto -iz$ . Claramente, la orientación definida por  $h$  coincide con la definida por  $f$  en  $A_g$ , y también, la orientación definida por  $h$  y  $f'$  coinciden en  $A'_g$ , pues  $\sigma$  preserva el sentido. En efecto, como esta aplicación lleva el  $(1, 0)$  al  $(0, -1)$  y el  $(0, 1)$  al  $(1, 0)$ , se tiene que su jacobiano es

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Por lo tanto, ya hemos obtenido orientaciones de todas las estrellas. Más aún, dos estrellas abiertas son, o bien disjuntas, o bien tienen intersección conexa, la cual contiene el interior de un  $A_g$ . Como la orientación coincide con la de  $A_g$ ,  $K_g$  es una superficie orientable.

Supongamos ahora que  $K$  es orientable, es decir, que  $K_g$  es orientable. En este caso, podemos escoger la aplicación afín  $f$  sobre  $A_g$  de manera que sea acorde a la orientación de  $K_g$ , lo cual determina un orden  $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$  de los vértices. Vamos a ver que si  $A'_g$  es un triángulo adyacente a  $A_g$ , entonces este está orientado de la forma  $[\alpha_0, \alpha_3, \alpha_1]$ , de donde se tendrá que el la arista  $(\alpha_0, \alpha_1)$  se cancela en la frontera, por lo que se seguirá que  $\sum A_i$  es un 2-ciclo, y así,  $H_2(K) = \mathbb{Z}$ .

Supongamos que el triángulo  $A'_g$  adyacente a  $A_g$  está orientado de la forma  $[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3]$ . En este caso, podríamos llevar  $A_g \cup A'_g$  al plano mediante la aplicación definida por  $h := f$  en  $A_g$  y  $h = \sigma' \circ f'$  en  $A'_g$ , donde  $\sigma'$  es la aplicación dada por  $z \mapsto \bar{z}$ . Pero  $\sigma'$  invierte el sentido, por lo que  $f'$  no daría la misma orientación que  $h$ , y en consecuencia, no sería acorde a la orientación de  $K_g$ . □

**Proposición 4.27.** *Para todo complejo 2-dimensional triangulado,  $K$ , se tiene que, o bien  $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1}$ , o bien  $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Más aún,  $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si, y solo si,  $K$  no tiene frontera y es no orientable.*

*Demostración.* Recordemos que  $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$ , donde  $Z_1(K) = \text{Ker } \partial_1$  y  $B_1(K) = \text{Im } \partial_2$ .

Vamos a determinar el subgrupo de torsión de  $H_1(K)$ . Sea  $c \in Z_1(K)$  un 1-ciclo y supongamos que  $mc \sim 0$  para algún entero  $m > 0$ , lo cual quiere decir que  $mc \in B_1(K)$ , o lo que es lo mismo, que existe una 2-cadena  $\sum x_i A_i$  tal que  $mc = \partial(\sum x_i A_i) = \sum x_i \partial A_i$ .

Si  $A_i$  y  $A_j$  tienen una arista  $a$  en común, entonces la contribución de  $a$  a  $\sum x_i \partial A_i$  es, o bien  $x_i a + x_j a$ , o bien  $x_i a - x_j a$ , o bien  $-x_i a + x_j a$ , o bien  $-x_i a - x_j a$ , dependiendo de la orientación de  $A_i$  y  $A_j$ , lo que implica que, o bien  $x_i \equiv x_j \pmod{m}$ , o bien  $x_i \equiv -x_j \pmod{m}$ .

Al igual que hicimos en la Proposición 4.26, como  $K$  es conexo, se tiene que para cualesquiera dos triángulos de  $\sum x_i A_i$  se cumplirá también este hecho. Distinguiamos varios casos:

1) Si  $K$  tiene frontera, existe algún triángulo  $A_i$  y una arista del mismo que no es adyacente a ningún otro triángulo, lo cual implica que  $x_i$  es divisible por  $m$ , y así,  $x_j$  es divisible por  $m$  para todo  $j$ . Por lo tanto, tenemos que

$$c = \sum \frac{x_i}{m} \partial A_i = \partial \left( \sum \frac{x_i}{m} A_i \right),$$

y así  $c \in B_1(K)$ , por lo que  $c \sim 0$ , y  $H_1(K)$  es libre de torsión.

2) Si  $K$  no tiene frontera y es orientable, sabemos por la Proposición 4.26 que  $H_2(K) = \mathbb{Z}$ . Tomamos la 2-cadena  $\sum A_i$  y la orientamos de manera que sea un 2-ciclo (incluyendo los  $A_i$  de  $K$  que no estén en la 2-cadena con el coeficiente  $x_i = 0$ ). Así,  $\sum \partial A_i = 0$ , y tenemos que

$$mc = \sum x_i \partial A_i = \sum x_i \partial A_i - x_1 \sum \partial A_i = \sum (x_i - x_1) \partial A_i.$$

Debido a la conexión de  $K$ , al igual que antes, tenemos que para todo  $i, j$ , o bien  $x_i - x_1 \equiv x_j - x_1 \pmod{m}$ , o bien  $x_i - x_1 \equiv -x_j + x_1 \pmod{m}$ . Tomando  $j = 1$  deducimos que todo  $x_i - x_1$  es divisible por  $m$ , por lo que tenemos que

$$c = \sum \frac{x_i - x_1}{m} \partial A_i = \partial \left( \sum \frac{x_i - x_1}{m} A_i \right),$$

y así  $c \in B_1(K)$ , por lo que  $c \sim 0$ , y  $H_1(K)$  es libre de torsión.

3) Si  $K$  no tiene frontera y es no orientable, sabemos que no hay 2-ciclos, excepto el 0, pues  $H_2(K) = 0$ , y así,  $Z_2(K) = H_2(K) = 0$ . Por otro lado, los coeficientes en  $\sum \partial A_i$  deben ser, o bien 0, o bien  $\pm 2$ , dependiendo de la orientación de los  $A_i$ , por lo que podemos escribir  $\sum \partial A_i$  de la forma  $\sum \partial A_i = 2z$ . Como claramente  $\sum \partial A_i \sim 0$ , se tiene que  $2z \sim 0$ . Por otro lado,  $z$  no es homólogo a 0, ya que si lo fuera, como  $z = \sum x_i \partial A_i$ , tendríamos que  $\sum (2x_i - 1) \partial A_i \sim 0$ , en contradicción con el hecho de que no hay 2-ciclos excepto el 0. Por lo tanto,  $z$  es de orden 2.

Veamos ahora que  $z$  es el único elemento de orden finito, de donde se seguirá que el subgrupo de torsión de  $H_1(K)$  es  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Consideremos de nuevo la cadena  $mc = \sum x_i \partial A_i$ . Como, o bien  $x_i \equiv x_j$  (mód  $m$ ), o bien  $x_i \equiv -x_j$  (mód  $m$ ), tomando  $j = 1$ , se tiene que, o bien  $x_i \equiv x_1$  (mód  $m$ ), o bien  $x_i \equiv -x_1$  (mód  $m$ ), por lo que  $x_i = \epsilon_i x_1 + t_i m$  para todo  $i$ , con  $\epsilon_i = \pm 1$ ,  $t_i \in \mathbb{Z}$ . Tenemos entonces que

$$mc = \sum x_i \partial A_i = \sum (\epsilon_i x_1 + t_i m) \partial A_i = x_1 \sum \epsilon_i \partial A_i + m \sum t_i \partial A_i,$$

donde al menos una de las aristas que aparecen en  $\sum \epsilon_i \partial A_i$  está multiplicada por  $\pm 2$ , pues si todas se cancelan, entonces  $\sum \epsilon_i \partial A_i = 0$ , y así,  $\partial(\sum \epsilon_i A_i) = 0$ , por lo que tenemos un 2-ciclo,  $\sum \epsilon_i A_i$ , distinto de 0, en contradicción con el hecho de que no hay 2-ciclos excepto el 0. Pero entonces,  $2x_1$  es divisible por  $m$ , por lo que tenemos que

$$2c = \sum \frac{2x_1 \epsilon_i}{m} \partial A_i + \sum 2t_i \partial A_i = \partial(\sum \frac{2x_1 \epsilon_i}{m} A_i + \sum 2t_i A_i),$$

y así,  $2c \sim 0$ . Por lo tanto,  $2c = \partial(\sum u_i A_i) = \sum u_i \partial A_i$  para enteros  $u_i \in \mathbb{Z}$ , donde además todos son pares o todos son impares. Veamos esto: supongamos que  $u_1$  es par y sea  $A_j$  un triángulo adyacente a  $A_1$ , donde la arista común a ambos es  $a_{1j}$ . Tras desarrollar la expresión  $\sum u_i \partial A_i$ , nos aparecerá, entre otras cosas, la cadena  $u_1 \epsilon_1 a_{1j} + u_j \epsilon_j a_{1j} = (u_1 \epsilon_1 + u_j \epsilon_j) a_{1j}$ , donde  $\epsilon_1 = \pm 1$ ,  $\epsilon_j = \pm 1$ , dependiendo de la orientación de  $A_1$  y  $A_j$ , respectivamente. Como  $u_1 \epsilon_1 + u_j \epsilon_j$  (el coeficiente que acompaña a  $a_{1j}$ ) es par, pues  $2c = \sum u_i \partial A_i$ , se tiene que  $u_j$  ha de ser necesariamente par. Por la Proposición 2.13, todos los triángulos están conectados por una secuencia de triángulos adyacentes, por lo que aplicando este razonamiento a cada par de triángulos adyacentes tenemos que todos los  $u_i$  han de ser pares. Análogamente si  $u_1$  es impar.

- Si todos son pares, tenemos que  $2c = \sum u_i \partial A_i = \sum 2\bar{u}_i \partial A_i$ , por lo que  $c = \sum \bar{u}_i \partial A_i = \partial(\sum \bar{u}_i A_i)$ , y así,  $c \sim 0$ .
- Si todos son impares, tenemos que  $2c = \sum u_i \partial A_i = \sum (2\bar{u}_i + 1) \partial A_i = \sum 2\bar{u}_i \partial A_i + \sum \partial A_i = \sum 2\bar{u}_i \partial A_i + 2z$ , por lo que  $c = \sum \bar{u}_i \partial A_i + z$ , y así,  $c \sim z$ .

En definitiva,  $z$  es el único elemento de orden finito (de orden 2), por lo que el subgrupo de torsión de  $H_1(K)$  es  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Por el corolario que obtuvimos de la Proposición 4.2, tenemos que  $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1} \oplus T$ , donde  $m_1$  es el rango de  $H_1(K)$  y  $T$  es el subgrupo de torsión de  $H_1(K)$ , que como hemos probado, cumple que  $T = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  si, y solo si,  $K$  no tiene frontera y es no orientable. En otro caso,  $T = 0$ .

□



Recordemos que, en virtud del Teorema 4.24, la característica de Euler-Poincaré del complejo 2-dimensional triangulado  $K$ ,  $\chi(K)$ , viene dada por

$$\chi(K) = r(H_0(K)) - r(H_1(K)) + r(H_2(K)).$$

Sabemos que  $r(H_0(K)) = r(\mathbb{Z}) = 1$ , y además, que o bien  $r(H_2(K)) = 0$  (si  $K$  tiene frontera, o no tiene frontera y es no orientable), o bien  $r(H_2(K)) = 1$  (si  $K$  no tiene frontera y es orientable).

Así pues, el rango,  $m_1$ , de  $H_1(K)$  es, o bien

$$m_1 = 2 - \chi(K),$$

si  $K$  no tiene frontera y es orientable, o bien

$$m_1 = 1 - \chi(K),$$

en otro caso. Por lo tanto, como  $m_1 \geq 0$ , se tiene que  $\chi(K) \leq 2$ .



# Capítulo 5

## El teorema de clasificación de superficies compactas

### 5.1. Complejos celulares

En este capítulo vamos ya a demostrar el teorema de clasificación de superficies compactas, que como hemos comentado varias veces a lo largo del trabajo, se debe principalmente al hecho de que toda superficie compacta puede ser triangulada.

Para ello, vamos a definir un concepto más general que el de complejo ya estudiado, los llamados *complejos celulares*, y definiremos una cierta relación de equivalencia en este conjunto, de manera que todo complejo celular será equivalente a alguna forma normal específica. Más aún, todo complejo celular tiene una realización geométrica la cual es una superficie, y complejos celulares equivalentes tienen realizaciones geométricas homeomorfas. También se tiene que todo complejo celular es equivalente a un complejo 2-dimensional triangulado, y además, las realizaciones geométricas de distintas formas normales no son homeomorfas. Para demostrar esto último se necesitan herramientas bastante sofisticadas, como son la homología y el grupo fundamental.

Antes de definir el concepto de *complejo celular*, dado un conjunto  $X$ , conviene definir el conjunto  $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$  de elementos inversos de elementos de  $X$ , donde asumimos que  $X \cap X^{-1} = \emptyset$ . Diremos que los elementos de  $X \cup X^{-1}$  están *orientados*, donde además supondremos  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

**Definición 5.1.** Un **complejo celular**,  $K$ , es una terna  $K = (F, E, B)$ , donde  $F$  es un conjunto finito no vacío de **caras**,  $E$  es un conjunto finito de **aristas**, y  $B : (F \cup F^{-1}) \rightarrow (E \cup E^{-1})^*$  es la **función frontera**, la cual asigna a cada cara orientada  $A \in F \cup F^{-1}$  una secuencia ordenada cíclicamente  $a_1 \dots a_n$  de aristas orientadas en  $E \cup E^{-1}$ , la **frontera** de  $A$ , de manera que  $B(A^{-1}) = a_n^{-1} \dots a_1^{-1}$ .

Para todo  $A_1, A_2 \in F$ , si  $A_1 \neq A_2$ , entonces  $B(A_1) \neq B(A_2)$  (distintas caras tienen distintas fronteras). Por secuencia ordenada cíclicamente queremos decir que no distinguimos entre la secuencia  $a_1 \dots a_n$  y cualquier secuencia obtenida a partir de una permutación cíclica de ella. En particular, el sucesor de  $a_n$  es  $a_1$ . Más aún, se cumple lo siguiente:

1. Toda arista orientada  $a \in E \cup E^{-1}$  aparece, o bien una vez, o bien dos veces, como un elemento de una frontera. En particular, esto significa que si  $a$  aparece dos veces en alguna frontera, entonces no puede aparecer en otra frontera.
2.  $K$  es conexo, lo cual quiere decir que  $K$  no es la unión de dos sistemas disjuntos satisfaciendo la condición 1.

Es posible que  $F = \{A\}$  y  $E = \emptyset$ , en cuyo caso  $B(A) = B(A^{-1}) = \epsilon$ , la secuencia vacía. Para acortar, a menudo diremos cara y arista, en lugar de cara orientada y arista orientada, respectivamente.

**Definición 5.2.** Dado un complejo celular  $K = (F, E, B)$ , para cualquier arista  $a \in E \cup E^{-1}$ , un **sucesor** de  $a$  es una arista  $b$  tal  $b$  es el sucesor de  $a$  en alguna frontera  $B(A)$ , es decir, la cadena  $ab$  aparece en alguna frontera. Si  $a$  aparece en dos lugares en el conjunto de fronteras,  $a$  tiene un par de sucesores (que pueden ser idénticos). En otro caso,  $a$  tiene un único sucesor.

Vamos a dar ahora una lista de definiciones que usaremos más adelante.

Dado un complejo celular  $K = (F, E, B)$ , diremos que:

- Una secuencia de un elemento  $\alpha = (a)$  es un *vértice interior* si, y solo si,  $aa^{-1}$  aparece en una única frontera.

**Ejemplo 5.3.** Si  $K$  tiene una única cara con frontera  $aa^{-1}$ , entonces  $K$  tiene un único vértice interior,  $\alpha = (a)$ , como podemos ver en la Figura 5.1. La correspondiente superficie es la esfera.



Figura 5.1: Ilustración extraída de [4] (p. 82). Una esfera (frontera  $aa^{-1}$ ).

- Una secuencia ordenada cíclicamente de dos elementos  $\alpha = (a, b)$ , con  $a \neq b$ , es un *vértice interior* si, y solo si, o bien  $b = a^{-1}$  y existe una cara cuya frontera es  $aa$ , o bien  $b \neq a^{-1}$  y  $ab^{-1}$  aparece dos veces en el conjunto de fronteras.

**Ejemplo 5.4.** Si  $K$  tiene una única cara con frontera  $abab$ , entonces  $K$  tiene dos vértices interiores,  $\alpha = (b^{-1}, a)$  y  $\beta = (a^{-1}, b)$ , como podemos ver en la Figura 5.2. La correspondiente superficie es el plano proyectivo. Veamos que  $\alpha$  es un vértice interior: se tiene que  $a \neq (b^{-1})^{-1} = b$ , y además, la cadena  $b^{-1}a^{-1}$  aparece dos veces en el conjunto de fronteras, pues si tomamos la orientación opuesta tenemos que la frontera es  $b^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}$ . Análogamente podemos ver que  $\beta$  también es un vértice interior.

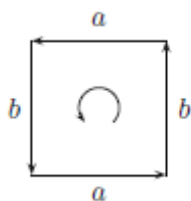


Figura 5.2: Ilustración extraída de [4] (p. 81). Un plano proyectivo (frontera  $abab$ ).

- Una secuencia ordenada cíclicamente  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ , con  $n \geq 3$ , es un *vértice interior* si todo  $a_i$  aparece en dos lugares en el conjunto de fronteras, si los sucesores de  $a_i$  aparecen en  $\alpha$ , y si  $a_i$  tiene a  $a_{i-1}^{-1}$  y  $a_{i+1}^{-1}$  como par de sucesores (notemos que  $a_1$  tiene a  $a_n^{-1}$  y  $a_2^{-1}$  como par de sucesores, y que  $a_n$  tiene a  $a_{n-1}^{-1}$  y  $a_1^{-1}$  como par de sucesores). (Ver Figura 5.3).

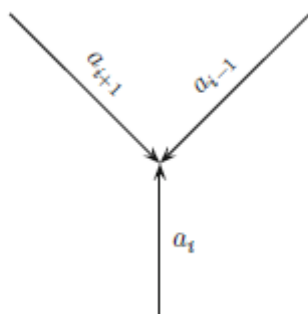


Figura 5.3: Ilustración extraída de [4] (p. 81). Un vértice interior ( $n \geq 3$ ).

**Ejemplo 5.5.** Si  $K$  tiene una única cara con frontera  $aba^{-1}b^{-1}$ , entonces  $K$  tiene un único vértice interior,  $\alpha = (a, b^{-1}, a^{-1}, b)$ , como podemos ver en la Figura 5.4. La correspondiente superficie es el toro. Las condiciones se cumplen:

$a$ ,  $b$ ,  $a^{-1}$  y  $b^{-1}$  aparecen dos veces en la frontera (una vez con una orientación y otra vez con la opuesta), los sucesores de cada arista en  $\alpha$  también están en  $\alpha$ , y  $a$  tiene a  $b$  y  $b^{-1}$  como par de sucesores,  $b^{-1}$  tiene a  $a$  y  $a^{-1}$  como par de sucesores,  $a^{-1}$  tiene a  $b$  y a  $b^{-1}$  como par de sucesores, y  $b$  tiene a  $a$  y a  $a^{-1}$  como par de sucesores.

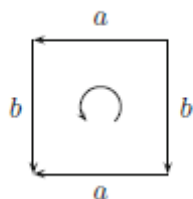


Figura 5.4: Ilustración extraída de [4] (p. 81). Un toro (frontera  $aba^{-1}b^{-1}$ ).

- Un *vértice frontera* es una secuencia ordenada cíclicamente  $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$ , con  $n \geq 2$ , tal que se cumplen las condiciones de arriba para todo  $2 \leq i \leq n-1$ , mientras que  $a_1$  y  $a_n$  aparecen una vez en el conjunto de fronteras,  $a_1$  tiene a  $a_2^{-1}$  como único sucesor, y  $a_n$  tiene a  $a_{n-1}^{-1}$  como único sucesor. Consideramos que  $(a_1, \dots, a_n)$  y  $(a_n, \dots, a_1)$  representan el mismo vértice.

**Ejemplo 5.6.** Si  $K$  tiene una única cara con frontera  $aah$ , entonces  $K$  no tiene vértice interior, sino que tiene un vértice frontera,  $\alpha = (h, a^{-1}, a, h^{-1})$ , como podemos ver en la Figura 5.5. La correspondiente superficie es la banda de Möbius.

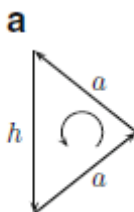


Figura 5.5: Ilustración extraída de [4] (p. 82). Una banda de Möbius (frontera  $aah$ ).

- Una arista  $a \in E \cup E^{-1}$  es una *arista frontera* si aparece una vez en una única frontera. En otro caso diremos que  $a$  es una *arista interior*.

Dada una arista  $a \in E \cup E^{-1}$ , podemos determinar un vértice  $\alpha$  como sigue: Los vecinos de  $a$  en el vértice  $\alpha$  son los inversos de sus sucesores (o sucesor). Los demás se obtienen repitiendo este proceso en ambas direcciones hasta que, o bien se cierre el ciclo, o bien encontremos aristas con un único sucesor. Así pues, el vértice  $\alpha$  consiste en la lista de las aristas que llegan al vértice. Decimos que  $a$  conduce a  $\alpha$ .

La Figura 5.6 muestra un complejo celular con frontera. El complejo celular tiene tres caras con fronteras  $abc$ ,  $bed^{-1}$ , y  $adf^{-1}$ , un vértice interior,  $(b^{-1}, a, d^{-1})$ , y tres vértices frontera,  $(e, d, f)$ ,  $(c^{-1}, b, e^{-1})$ , y  $(c, a^{-1}, f^{-1})$ . Si doblamos tal complejo identificando las dos aristas etiquetadas por  $d$ , obtenemos un tetraedro sin una cara.

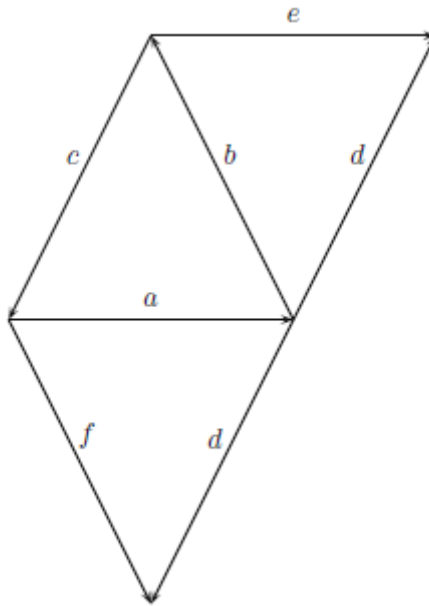


Figura 5.6: Ilustración extraída de [4] (p. 83). Un complejo celular con frontera.

Hay una manera natural de ver un complejo triangulado como un complejo celular, y además, si se cumplen las siguientes condiciones, podemos ver un complejo celular como un complejo triangulado.

1. Si  $a$  y  $b$  son aristas distintas que conducen al mismo vértice, entonces  $a^{-1}$  y  $b^{-1}$  conducen a vértices distintos.
2. La frontera de toda cara está compuesta por tres aristas, es decir, es de la forma  $abc$ .
3. Diferentes caras tienen diferentes fronteras.

## 5.2. Formas normales de complejos celulares

**Definición 5.7.** Decimos que un complejo celular  $K'$  es una **subdivisión elemental** del complejo celular  $K$  si  $K'$  es obtenido a partir de  $K$  mediante una de las dos siguientes operaciones:

(P1) Cualesquiera dos aristas  $a$  y  $a^{-1}$  en  $K$  son sustituidas por  $bc$  y  $c^{-1}b^{-1}$  en todas las fronteras, donde  $b$  y  $c$  son aristas distintas de  $K'$  que no están en  $K$ . (Ver Figura 5.7).

(P2) Cualquier cara,  $A$ , de  $K$ , con frontera  $a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_n$  es sustituida por dos caras,  $A'$  y  $A''$ , de  $K'$ , con fronteras  $a_1 \dots a_p d$  y  $d^{-1} a_{p+1} \dots a_n$ , donde  $d$  es una arista de  $K'$  que no está en  $K$ . (Ver Figura 5.8).

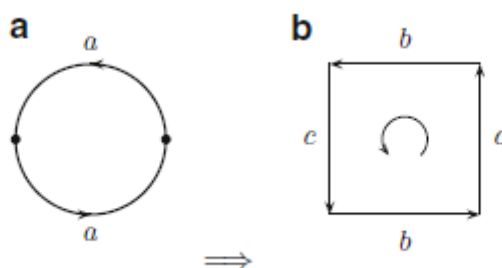


Figura 5.7: Ilustración extraída de [4] (p. 84). Ejemplo de operación (P1).

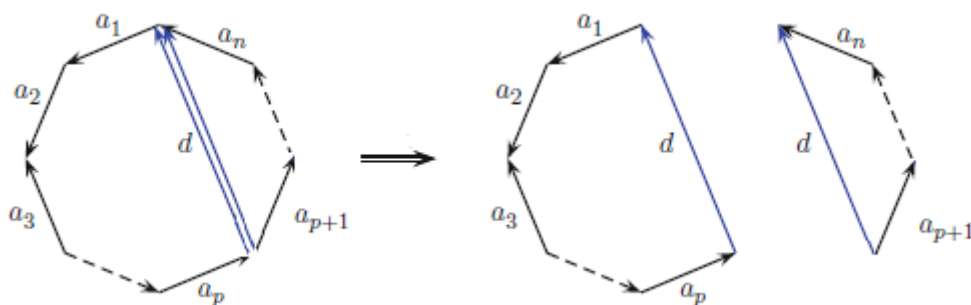


Figura 5.8: Ilustración extraída de [4] (p. 84). Ejemplo de operación (P2).

**Definición 5.8.** Decimos que dos complejos celulares,  $K$  y  $K'$ , son **equivalentes** si uno se puede obtener del otro aplicando las operaciones (P1), (P2) y sus inversas.

Vamos a explicar brevemente cuáles son los efectos de las operaciones inversas  $(P1)^{-1}$  y  $(P2)^{-1}$  de (P1) y (P2), respectivamente. En primer lugar, tenemos que la operación inversa de (P1),  $(P1)^{-1}$ , aplicada a la cadena  $bc$ , con  $b \neq c$ , elimina el vértice  $(b, c^{-1})$ . Por otro lado, la operación inversa de (P2),  $(P2)^{-1}$ , aplicada a dos caras  $A_1$  y  $A_2$  con  $A_1 \neq A_2$  y  $A_1 \neq A_2^{-1}$ , y  $B(A_1)$  conteniendo alguna arista  $d$  y  $B(A_2)$  conteniendo la arista  $d^{-1}$ , elimina tales aristas.



Dado un complejo celular  $K$ , podemos asociarle un espacio topológico  $|K|$  como sigue. Supongamos, en primer lugar, que no hay ninguna cara cuya frontera sea la secuencia vacía. Entonces, podemos asignar a cada cara  $A$  un disco circular, de manera que si la frontera de  $A$  es  $a_1 \dots a_m$  dividimos la frontera del disco en  $m$  arcos orientados, ordenados en el sentido de las agujas del reloj. A esos arcos los llamamos  $a_1 \dots a_m$ , mientras que a los arcos opuestos los llamamos  $a_1^{-1} \dots a_m^{-1}$ . Una vez hecho esto, formamos el espacio cociente obtenido identificando arcos con el mismo nombre en varios discos.

Además, se cumple que a complejos celulares equivalentes le corresponden espacios homeomorfos y que si  $K$  representa un complejo triangulado, entonces  $|K|$  es homeomorfo a  $K_g$ .

En el caso en el que  $K$  tiene una única cara  $A$  con frontera la secuencia vacía, aplicando la operación (P2),  $K$  es equivalente al complejo celular con dos caras,  $A'$  y  $A''$ , donde  $A'$  tiene frontera  $d$  y  $A''$  tiene frontera  $d^{-1}$ . En este caso,  $|K|$  debe ser homeomorfo a una esfera.

Con el objetivo de ver que el espacio  $|K|$  asociado a un complejo celular  $K$  es una superficie, vamos a demostrar que todo complejo celular es equivalente a un complejo 2-dimensional triangulado.

**Proposición 5.9.** *Se cumple que todo complejo celular  $K$  es equivalente a un complejo 2-dimensional triangulado.*

*Demostración.* El primer paso es dividir toda arista  $a$  en dos aristas  $b$  y  $c$ , con  $b \neq c$ , usando la operación (P1), e introduciendo nuevos vértices frontera  $(b, c^{-1})$ , con lo que conseguimos que  $a$  y  $a^{-1}$  conduzcan a vértices distintos para toda arista nueva  $a$ . Así, para toda frontera  $B = a_1 \dots a_n$ , tenemos que  $n \geq 2$ , e intuitivamente creamos un “vértice central”  $\gamma = (d_1, \dots, d_n)$ , y unimos este vértice a todos los vértices (incluyendo los nuevos) excepto a  $\gamma$  consigo mismo. Esto se hace como sigue: en primer lugar, usando la operación (P2), dividimos la frontera  $B = a_1 \dots a_n$  en  $a_1 d$  y  $d^{-1} a_2 \dots a_n$ , y después, usando la operación (P1), dividimos  $d$  en  $d_1 d_n^{-1}$ , obteniendo las fronteras  $d_n^{-1} a_1 d_1$  y  $d_1^{-1} a_2 \dots a_n d_n$ . Aplicando la operación (P2) a la frontera  $d_1^{-1} a_2 \dots a_n d_n$ , obtenemos las fronteras  $d_1^{-1} a_2 d_2$ ,  $d_2^{-1} a_3 d_3$ ,  $\dots$ ,  $d_{n-1}^{-1} a_n d_n$ , y  $\gamma = (d_1, \dots, d_n)$  es, en efecto, un vértice interior. Una vez llegado hasta aquí, tenemos que se cumplen las condiciones 2 y 3, aunque sin embargo, puede que la condición 1 no se cumpla. Para conseguir esto último, dividimos cada frontera triangular nueva  $a_1 a_2 a_3$  en cuatro subtriángulos, uniendo los puntos medios de sus tres lados. El complejo celular resultante ya sí que satisface la condición 1 y, por lo tanto, hemos triangulado el complejo celular.

□

En la Figura 5.9 podemos ver un ejemplo de los pasos descritos en la Proposición 5.9 en el caso de un complejo celular con frontera  $aba^{-1}b^{-1}$ , el cual representa un toro.

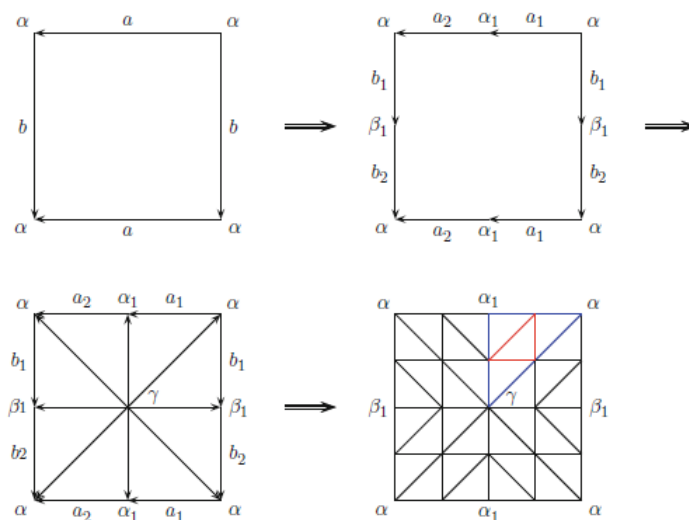


Figura 5.9: Ilustración extraída de [4] (p. 86). Triangulación del toro.

A continuación, vamos a definir el concepto de *orientabilidad* para un complejo celular y vamos a explicar cómo calcular su característica de Euler-Poincaré.

**Definición 5.10.** Dado un complejo celular  $K = (F, E, B)$ , una **orientación** de  $K$  es un conjunto de caras  $\{A^\epsilon | A \in F\}$ , donde cada cara  $A^\epsilon$  cumple que o bien  $A^\epsilon = A$  o bien  $A^\epsilon = A^{-1}$  para toda cara  $A \in F$ .

**Definición 5.11.** Decimos que una orientación es **coherente** si toda arista  $a \in E \cup E^{-1}$  aparece a lo sumo una vez en el conjunto de fronteras de las caras de  $\{A^\epsilon | A \in F\}$ .

**Definición 5.12.** Un complejo celular  $K$  es **orientable** si admite alguna orientación coherente.

**Definición 5.13.** Un **contorno** de un complejo celular es una secuencia ordenada cíclicamente  $(a_1, \dots, a_n)$  de aristas tal que  $a_i$  y  $a_{i+1}^{-1}$  conducen al mismo vértice y los  $a_i$  pertenecen a una única frontera.

Por ejemplo, el complejo celular  $K$  con una única cara  $A$  cuya frontera viene dada por  $B(A) = aba^{-1}b^{-1}$  es orientable. Sin embargo, el complejo celular  $K$  cuya única cara  $A$  tiene frontera  $B(A) = aabb$  no es orientable. Otro ejemplo puede ser el siguiente: el complejo celular  $K$  con dos caras  $A_1$  y  $A_2$  cuyas fronteras vienen dadas

por  $B(A_1) = abc$  y  $B(A_2) = bac$  es orientable ya que podemos tomar la orientación  $\{A_1, A_2^{-1}\}$ , donde tenemos que  $B(A_2^{-1}) = c^{-1}a^{-1}b^{-1}$ .

Se verifica que la orientabilidad se preserva por la equivalencia entre complejos celulares. Es decir, si dos complejos celulares son equivalentes, entonces o bien ambos son orientables o bien ambos no son orientables. Dado un complejo celular  $K = (F, E, B)$ , el número de vértices se denota por  $n_0$ , el número  $n_1$  de aristas es el cardinal del conjunto  $E$  y el número  $n_2$  de caras es el cardinal del conjunto  $F$ . La característica de Euler-Poincaré de  $K$  es  $n_0 - n_1 + n_2$ . Se verifica que la operación (P1) aplicada a un complejo celular  $K$  incrementa  $n_0$  y  $n_1$  en una unidad, dejando  $n_2$  igual. La operación (P2) incrementa  $n_1$  y  $n_2$  en una unidad, dejando  $n_0$  igual. Así pues, dos complejos celulares equivalentes tienen la misma característica de Euler-Poincaré. El caso en el que  $K$  tiene una única cara  $A$  con frontera nula, aceptamos que  $K$  tiene el “vértice nulo”  $\epsilon$ .

**Definición 5.14.** *Un complejo celular en forma normal, o complejo celular canónico es un complejo celular  $K = (F, E, B)$ , donde  $F = \{A\}$  es un conjunto de un solo elemento  $y$ , o bien*

$$(I) E = \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p, c_1, \dots, c_q, h_1, \dots, h_q\} \text{ y}$$

$$B(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} c_1 h_1 c_1^{-1} \dots c_q h_q c_q^{-1},$$

donde  $p \geq 0, q \geq 0$ , o bien

$$(II) E = \{a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q, h_1, \dots, h_q\} \text{ y}$$

$$B(A) = a_1 a_1 \dots a_p a_p c_1 h_1 c_1^{-1} \dots c_q h_q c_q^{-1},$$

donde  $p \geq 1, q \geq 0$ .

En Figura 5.10 podemos ver un ejemplo de cada uno de los tipos anteriores.

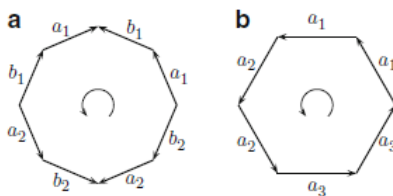


Figura 5.10: Ilustración extraída de [4] (p. 88). Ejemplos de formas normales: (a) Tipo I. (b) Tipo II.

Observemos que los complejos canónicos del tipo (I) son orientables, mientras que los complejos canónicos del tipo (II) no lo son. Las secuencias  $c_i h_i c_i^{-1}$  dan lugar a  $q$  vértices frontera,  $(h_i, c_i, h_i^{-1})$ , y  $q$  contornos,  $(h_i)$ , y, en el caso (I), el único vértice interior

$$(a_1^{-1}, b_1, a_1, b_1^{-1}, \dots, a_p^{-1}, b_p, a_p, b_p^{-1}, c_1^{-1}, \dots, c_q^{-1}),$$

y en el caso (II), el único vértice interior

$$(a_1^{-1}, a_1, \dots, a_p^{-1}, a_p, c_1^{-1}, \dots, c_q^{-1}).$$

De esta manera, en el caso (I) tenemos que  $n_0 = q + 1$ ,  $n_1 = 2(p + q)$  y  $n_2 = 1$ , por lo que

$$\chi(K) = q + 1 - 2(p + q) + 1 = 2 - 2p - q,$$

y en el caso (II) tenemos que  $n_0 = q + 1$ ,  $n_1 = p + 2q$  y  $n_2 = 1$ , por lo que

$$\chi(K) = q + 1 - (p + 2q) + 1 = 2 - p - q.$$

Notemos que si  $p = q = 0$ , tenemos que  $\chi(K) = 2$ . Este es el caso de la esfera.

Lo de arriba demuestra que complejos canónicos distintos  $K_1$  y  $K_2$  no pueden ser equivalentes, ya que si lo fueran se tendría que  $|K_1|$  y  $|K_2|$  serían homeomorfos, lo cual implicaría que  $K_1$  y  $K_2$  tienen el mismo número de contornos, el mismo tipo de orientabilidad y la misma característica de Euler-Poincaré.

Queda probar que todo complejo celular es equivalente a un complejo celular canónico, pero primero, nos va a servir de ayuda dar una mayor idea intuitiva con respecto a los complejos celulares canónicos.

Si un complejo celular canónico tiene la frontera  $B(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ , podemos pensar en la cara  $A$  como un cuadrado cuyos lados opuestos están orientados de la misma manera, y etiquetados también de la misma manera, por lo que identificando los lados opuestos etiquetados por  $a_1$  y después los lados opuestos etiquetados por  $b_1$  obtenemos una superficie homeomorfa al toro. (Ver Figura 5.11).

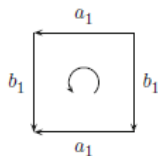


Figura 5.11: Ilustración extraída de [4] (p. 89). Un complejo celular correspondiente al toro.

Supongamos ahora que tenemos una esfera y un toro, a los que les quitamos un disco circular, y posteriormente pegamos a través de los agujeros. Podemos pensar en esto como si hubiéramos añadido un asa a la esfera. Por esta razón, la cadena  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$  es llamada también un *asa*. Un complejo celular canónico con frontera  $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \cdots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$  puede ser visto como resultado de pegar  $p$  toros a la esfera.

Si un complejo celular canónico tiene la frontera  $B(A) = a_1a_1$ , podemos pensar en la cara  $A$  como un disco circular cuya frontera está dividida en dos semicircunferencias, ambas etiquetadas por  $a_1$ . La correspondiente superficie se obtiene identificando puntos opuestos, y así, es homeomorfa al plano proyectivo. (Ver Figura 5.12).



Figura 5.12: Ilustración extraída de [4] (p. 89). Un complejo celular correspondiente al plano proyectivo.

Un cadena de la forma  $aa$  es también llamada un *cross-cap*. Generalmente, un complejo celular canónico con frontera  $a_1a_1 \cdots a_p a_p$  puede ser visto como el resultado de juntar  $p \geq 1$  planos proyectivos.

Una cadena de la forma  $c_1h_1c_1^{-1}$  en una frontera puede ser interpretada como un agujero con frontera  $h_1$ . A este tipo de cadenas se les denomina *lazos*.

Vamos a probar ahora un lema muy importante para la clasificación de superficies compactas. Como paso previo a la prueba, vamos a ver que el complejo celular con frontera  $abac$ , mostrado en la Figura 5.13, el cual corresponde a la banda de Möbius, es equivalente a un complejo celular del tipo (II) con frontera  $aachc^{-1}$ .

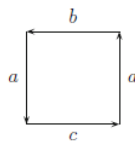


Figura 5.13: Ilustración extraída de [4] (p. 90). Un complejo celular correspondiente a la banda de Möbius.

En primer lugar, usando (P2), dividimos  $abac$  en  $abd$  y  $d^{-1}ac$ . Como  $abd = bda$  y la cara inversa de  $d^{-1}ac$  es  $c^{-1}a^{-1}d = a^{-1}dc^{-1}$ , aplicando  $(P2)^{-1}$ , eliminamos  $a$  y  $a^{-1}$  y obtenemos  $bddc^{-1} = ddc^{-1}b$ . Podemos aplicar ahora  $(P1)^{-1}$  para obtener  $ddk$ . Sin embargo, el complejo celular con frontera  $ddk$  no tiene vértice interior. Podemos introducir uno como sigue. Dividimos  $d$  en  $bc$ , obteniendo  $bcck = cbckb$ . A continuación, aplicamos (P2), obteniendo  $cba$  y  $a^{-1}ckb$ . Como  $cba = bac$  y la cara inversa de  $a^{-1}ckb$  es  $b^{-1}k^{-1}c^{-1}a = c^{-1}ab^{-1}k^{-1}$ , aplicando  $(P2)^{-1}$ , eliminamos  $c$  y  $c^{-1}$  y obtenemos  $baab^{-1}k^{-1} = aab^{-1}k^{-1}b$ , que es de la forma  $aachc^{-1}$ , con  $c = b^{-1}$  y  $h = k^{-1}$ . Así, el complejo celular canónico con frontera  $aachc^{-1}$  tiene la banda de Möbius como realización geométrica.

**Lema 5.15.** *Todo complejo celular  $K$  es equivalente a algún complejo celular canónico.*

*Demostración.* Vamos a hacer la demostración por pasos, mediante los cuales iremos acercando el complejo celular a una forma normal.

Paso 1. Eliminación de las cadenas de la forma  $aa^{-1}$  en todas las fronteras.

Para conseguir esto basta con identificar las aristas, tal y como se muestra en la Figura 5.14.

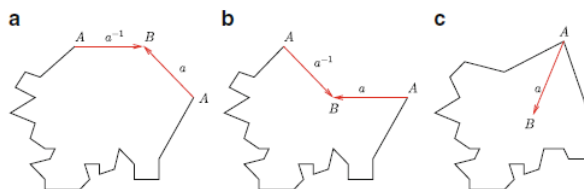


Figura 5.14: Ilustración extraída de [4] (p. 14). Eliminación de las cadenas de la forma  $aa^{-1}$ .

Paso 2. Eliminación de todos los vértices excepto uno.

Con el fin de hacer este paso más fácil de ver, en lugar de hacerlo algebraicamente, lo que puede ser muy engorroso, vamos a hacerlo gráficamente. La idea es muy sencilla: si queremos eliminar un vértice  $\alpha$ , por ejemplo, simplemente tenemos que cortar a lo largo de la arista identificada con  $c$  y pegar las aristas identificadas con  $b_2$ , de manera que este vértice desaparece y aparece un nuevo vértice  $\beta$  (ver Figura 5.15).

Repetiremos este paso tantas veces como sea necesario hasta eliminar todos los vértices excepto uno.

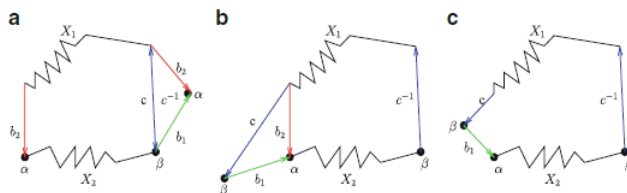


Figura 5.15: Ilustración extraída de [4] (p. 15). Eliminación del vértice  $\alpha$ .

Paso 3. Reducción a una única cara y obtención de planos proyectivos.

Reducir a una única cara el complejo es muy sencillo, pues basta con eliminar las aristas que aparecen en el interior del diagrama que representa el complejo, lo cual no varía su topología.

Veamos como obtener planos proyectivos. Supongamos que tenemos la frontera  $aXaY$ , donde  $X, Y$  denotan cadenas de aristas, con  $X, Y \neq \epsilon$ , y veamos que podemos pasar una frontera de la forma  $bbY^{-1}X$ . Es decir, se cumple la siguiente regla:  $aXaY \simeq bbY^{-1}X$ .

En efecto, podemos dividir la cadena  $aXaY$  en  $aXb$  y  $b^{-1}aY$ , donde la cara opuesta a la cara con frontera  $b^{-1}aY$  tiene frontera  $(b^{-1}aY)^{-1} = Y^{-1}a^{-1}b = a^{-1}bY^{-1}$ . Aplicando  $(P2)^{-1}$  podemos juntar ahora  $aXb = Xba$  y  $a^{-1}bY^{-1}$ , de donde obtenemos  $XbbY^{-1} = bbY^{-1}X$ , tal y como queríamos (ver Figura 5.16).

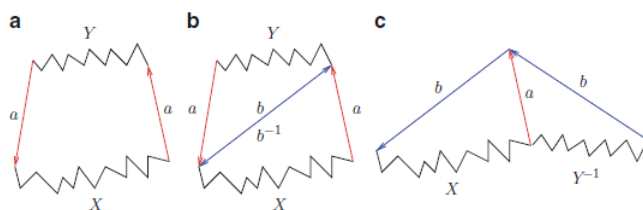


Figura 5.16: Ilustración extraída de [4] (p. 16). Obtención de planos proyectivos.

Paso 4. Obtención de toros.

El objetivo de este paso es convertir fronteras de la forma  $aUbVa^{-1}Xb^{-1}Y$  en fronteras de la forma  $cdc^{-1}d^{-1}YXVU$ , las cuales contienen toros. En primer lugar, vamos a ver que se verifica que

$$\mathbf{aUVa^{-1}X \simeq bVUb^{-1}X.}$$

Primero, dividimos  $\mathbf{aUVa}^{-1}\mathbf{X}$  en  $\mathbf{aUc} = \mathbf{Uca}$  y  $\mathbf{c}^{-1}\mathbf{Va}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{Xc}^{-1}\mathbf{V}$ , y después, aplicando  $(P2)^{-1}$  a  $\mathbf{Uca}$  y a  $\mathbf{a}^{-1}\mathbf{Xc}^{-1}\mathbf{V}$ , obtenemos  $\mathbf{UcXc}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{c}^{-1}\mathbf{VUcX}$ . Poniendo  $\mathbf{b} = \mathbf{c}^{-1}$  se tiene lo que queríamos probar.

Ahora, vamos a aplicar este resultado a  $aUbVa^{-1}Xb^{-1}Y$ . En primer lugar, poniendo  $\mathbf{a} = a$ ,  $\mathbf{U} = U$ ,  $\mathbf{V} = bV$ ,  $\mathbf{a}^{-1} = a^{-1}$ ,  $\mathbf{X} = Xb^{-1}Y$ , se tiene que

$$aUbVa^{-1}Xb^{-1}Y \simeq a_1bVUa_1^{-1}Xb^{-1}Y.$$

Poniendo ahora  $\mathbf{a} = b$ ,  $\mathbf{U} = VU$ ,  $\mathbf{V} = a_1^{-1}X$ ,  $\mathbf{a}^{-1} = b^{-1}$ ,  $\mathbf{X} = Y$ , se tiene que

$$a_1bVUa_1^{-1}Xb^{-1}Y \simeq a_1b_1a_1^{-1}XVUb_1^{-1}Y = a_1^{-1}XVUb_1^{-1}Ya_1b_1.$$

Finalmente, poniendo  $\mathbf{a} = a_1^{-1}$ ,  $\mathbf{U} = XVU$ ,  $\mathbf{V} = b_1^{-1}Y$ ,  $\mathbf{a}^{-1} = a_1$ ,  $\mathbf{X} = b_1$ , se tiene que

$$a_1^{-1}XVUb_1^{-1}Ya_1b_1 \simeq a_2^{-1}b_1^{-1}YXVUa_2b_1 = a_2b_1a_2^{-1}b_1^{-1}YXVU,$$

por lo que hemos obtenido toros (ver Figura 5.17).

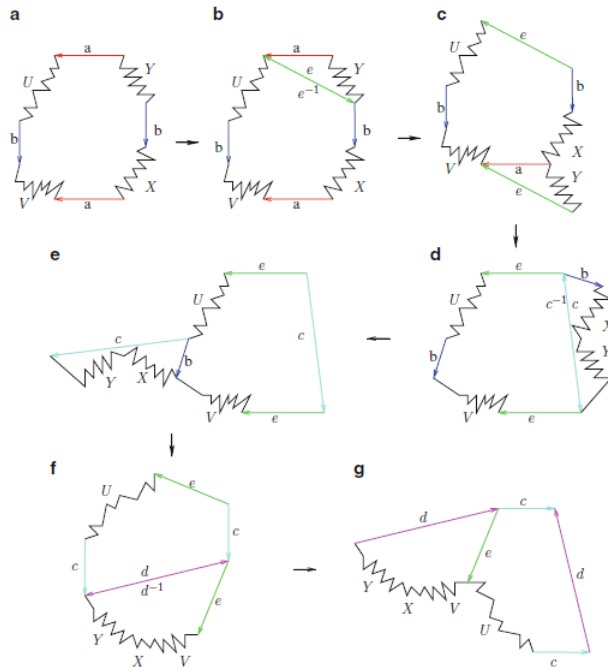


Figura 5.17: Ilustración extraída de [4] (p. 17). Obtención de toros.

Paso 5. Transformación de toros en planos proyectivos.

Vamos a demostrar ahora que un toro y un plano proyectivo es equivalente a tres planos proyectivos. Para ello, vamos a aplicar la regla  $\mathbf{aaXY} \simeq \mathbf{bYbX}^{-1}$ , la cual es equivalente a la regla que hemos probado en el paso 3.



En primer lugar, poniendo  $\mathbf{a} = a$ ,  $\mathbf{X} = Xb$ ,  $\mathbf{Y} = b^{-1}c^{-1}Y$ , se tiene que

$$aaXbcb^{-1}c^{-1}Y \simeq a_1b^{-1}c^{-1}Ya_1c^{-1}b^{-1}X^{-1} = b^{-1}c^{-1}Ya_1c^{-1}b^{-1}X^{-1}a_1.$$

Poniendo ahora  $\mathbf{b} = b^{-1}$ ,  $\mathbf{Y} = c^{-1}Ya_1c^{-1}$ ,  $\mathbf{X}^{-1} = X^{-1}a_1$ , se tiene que

$$b^{-1}c^{-1}Ya_1c^{-1}b^{-1}X^{-1}a_1 \simeq b_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}Xc^{-1}Ya_1c^{-1} = c^{-1}Ya_1c^{-1}b_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}X.$$

Poniendo ahora  $\mathbf{b} = c^{-1}$ ,  $\mathbf{Y} = Ya_1$ ,  $\mathbf{X}^{-1} = b_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}X$ , se tiene que

$$c^{-1}Ya_1c^{-1}b_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}X \simeq c_1^{-1}c_1^{-1}X^{-1}a_1b_1b_1Ya_1 = a_1b_1b_1Ya_1c_1^{-1}c_1^{-1}X^{-1}.$$

Finalmente, poniendo  $\mathbf{b} = a_1$ ,  $\mathbf{Y} = b_1b_1Y$ ,  $\mathbf{X}^{-1} = c_1^{-1}c_1^{-1}X^{-1}$ , se tiene que

$$a_1b_1b_1Ya_1c_1^{-1}c_1^{-1}X^{-1} \simeq a_2a_2Xc_1c_1b_1b_1Y,$$

tal y como queríamos probar (ver Figura 5.18).

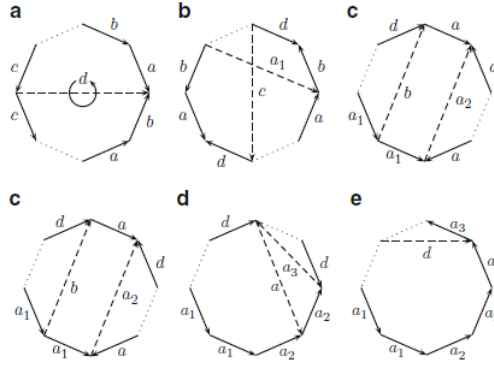


Figura 5.18: Ilustración extraída de [4] (pp. 17-18). Transformación de toros en planos proyectivos.

Paso 6. Agrupamiento de los lazos.

Finalmente, vamos a poner los lazos juntos. Para ello, vamos a usar la regla  $\mathbf{aUVa}^{-1}\mathbf{X} \simeq \mathbf{bVUb}^{-1}\mathbf{X}$ , la cual hemos probado en el paso 4.

En efecto, se tiene que

$$chc^{-1}Xdkd^{-1}Y = c^{-1}Xdkd^{-1}Ych,$$

de donde poniendo  $\mathbf{a} = c^{-1}$ ,  $\mathbf{U} = X$ ,  $\mathbf{V} = dkd^{-1}Y$ ,  $\mathbf{a}^{-1} = c$ ,  $\mathbf{X} = h$ , se tiene que

$$c^{-1}Xdkd^{-1}Ych \simeq c_1^{-1}dkd^{-1}YXc_1h = c_1hc_1^{-1}dkd^{-1}YX.$$

Una vez completados todos los pasos, hemos transformado el complejo celular en una forma normal. □

### 5.3. Demostración del teorema de clasificación

Podemos ya por fin enunciar y demostrar el teorema de clasificación de superficies compactas trianguladas y superficies compactas con frontera trianguladas.

**Teorema 5.16.** *Dos superficies compactas trianguladas (con o sin frontera) son homeomorfas si, y solo si, tienen el mismo tipo de orientabilidad, número de contornos y característica de Euler-Poincaré.*

*Demostración.* Supongamos que  $M_1 = (K_1)_g$  y  $M_2 = (K_2)_g$  son homeomorfas. Sabemos que  $M_1$  es orientable si, y solo si,  $M_2$  lo es, y que la restricción del homeomorfismo entre ambas a las fronteras,  $\partial M_1$  y  $\partial M_2$ , es un homeomorfismo, lo cual implica que  $\partial M_1$  y  $\partial M_2$  tienen el mismo número de componentes conexas por arcos, esto es, el mismo número de contornos. Además, sabemos también que espacios homeomorfos tienen grupos de homología isomorfos, por lo que usando el Teorema 4.24, tenemos que tienen la misma característica de Euler-Poincaré.

Recíprocamente, por el Lema 5.15, como todo complejo celular es equivalente a algún complejo celular canónico, los complejos 2-dimensionales triangulados  $K_1$  y  $K_2$ , vistos como complejos celulares, son equivalentes a los complejos celulares canónicos  $C_1$  y  $C_2$ . Sin embargo, sabemos que la equivalencia preserva el tipo de orientabilidad, el número de contornos y la característica de Euler-Poincaré, de donde se deduce que  $C_1$  y  $C_2$  son idénticos, y así,  $M_1 = (K_1)_g$  y  $M_2 = (K_2)_g$  son ambas homeomorfas a  $|C_1| = |C_2|$ . □

Teniendo en cuenta que toda superficie compacta (con o sin frontera) puede ser triangulada, hecho que aquí no demostraremos, se tiene la siguiente versión más general del Teorema 5.16.

**Teorema 5.17.** *Dos superficies compactas (con o sin frontera) son homeomorfas si, y solo si, tienen el mismo tipo de orientabilidad, número de contornos y característica de Euler-Poincaré.*

### 5.4. Sumas conexas y el teorema de clasificación

**Definición 5.18.** *Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies. Si quitamos un disco,  $D_1$ , a la superficie  $S_1$ , y un disco,  $D_2$ , a la superficie  $S_2$ , y pegamos ambas superficies a*

lo largo de las fronteras de los discos, obtenemos una nueva superficie, llamada la **suma conexa** de  $S_1$  y  $S_2$ , y que denotamos por  $S_1 \# S_2$ .

Aunque aquí no lo demostraremos, se puede ver que efectivamente  $S_1 \# S_2$  es una superficie, que no depende de los discos  $D_1$  y  $D_2$  eliminados. Además, si  $S_2$  es una esfera, entonces  $S_1 \# S_2$  es homeomorfa a  $S_1$ . La característica de Euler-Poincaré de esta nueva superficie viene dada por

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Se puede demostrar también que la realización geométrica de un complejo celular canónico resulta ser la suma conexa de algunas superficies elementales. Veamos:

Supongamos que tenemos dos complejos celulares canónicos del tipo (I) sin frontera,  $S_1$  y  $S_2$ , representados por discos circulares con fronteras

$$B_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_{p_1} b_{p_1} a_{p_1}^{-1} b_{p_1}^{-1}$$

y

$$B_2 = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \cdots c_{p_2} d_{p_2} c_{p_2}^{-1} d_{p_2}^{-1}$$

respectivamente. Cortando un pequeño agujero con frontera  $h_1$  en  $S_1$  formamos la nueva frontera

$$B'_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_{p_1} b_{p_1} a_{p_1}^{-1} b_{p_1}^{-1} h_1,$$

y análogamente, cortando un pequeño agujero con frontera  $h_2$  en  $S_2$  formamos la nueva frontera

$$B'_2 = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \cdots c_{p_2} d_{p_2} c_{p_2}^{-1} d_{p_2}^{-1} h_2^{-1}.$$

Si pegamos  $S_1$  y  $S_2$  a lo largo de  $h_1$  y  $h_2$  obtenemos una figura similar a dos polígonos convexos pegados a lo largo de una arista, que por deformación podemos transformar en un disco circular con frontera

$$B = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_{p_1} b_{p_1} a_{p_1}^{-1} b_{p_1}^{-1} c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \cdots c_{p_2} d_{p_2} c_{p_2}^{-1} d_{p_2}^{-1}.$$

Podemos aplicar un razonamiento similar a los complejos celulares canónicos del tipo (II) y obtenemos que, por un lado, la realización geométrica de un complejo celular del tipo (I) es, o bien una esfera, o bien una suma conexa de  $p \geq 1$  toros, y la realización geométrica de un complejo celular del tipo (II) es la suma conexa de  $p \geq 1$  planos proyectivos.

En consecuencia, podemos dar la siguiente versión del teorema de clasificación de superficies compactas:

**Teorema 5.19.** *Toda superficie compacta  $S$  es homeomorfa a una, y solo una, de las siguientes superficies:*

1.  $\mathbb{S}^2 \# p\mathbb{T}^2$ , donde  $p \geq 0$ , si es orientable.
2.  $p\mathbb{P}^2$ , donde  $p \geq 1$ , si no es orientable.

Para enunciar el teorema correspondiente a superficies compactas con frontera, notemos que la frontera de una superficie compacta con frontera  $S$  es una variedad 1-dimensional compacta, y por lo tanto, la unión finita disjunta de  $\mathbb{S}^1$ , una por cada agujero. Digamos que tiene  $q$  agujeros. Si tapamos esos agujeros obtendremos una superficie  $S'$  sin frontera, que ya sabemos clasificar.

Así pues, se tiene la siguiente versión del teorema de clasificación de superficies compactas con frontera:

**Teorema 5.20.** *Toda superficie compacta con frontera  $S$  es homeomorfa a una, y solo una, de las siguientes superficies:*

1.  $\mathbb{S}^2 \# p\mathbb{T}^2$  menos  $q$  discos, donde  $p \geq 0$ , si es orientable.
2.  $p\mathbb{P}^2$  menos  $q$  discos, donde  $p \geq 1$ , si no es orientable.

# Bibliografía

- [1] Bredon, G. E., *Topology and geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 139. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] Crossley, M. D., *Essential topology*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.
- [3] Fulton, W., *Algebraic topology. A first course*. Graduate Texts in Mathematics, 153. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [4] Gallier, J. y Xu, D., *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces*. Springer-Verlag, Berlín, 2013.
- [5] Hatcher, A., *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [6] Kinsey, L. C., *Topology of Surfaces*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [7] Massey, W. S., *Algebraic topology: an introduction*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [8] Massey, W. S., *A basic course in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, 127. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [9] Munkres, J. R., *Topología*. Prentice-Hall, Inc., Madrid, 2002.
- [10] Munkres, J. R., *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [11] Spanier, E. H., *Algebraic topology*. Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1981.
- [12] Willard, S., *General topology*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont. 1970.