UNIVERSIDAD DE MURCIA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

CLASIFICACIÓN DE ALGUNOS ANILLOS DE DIMENSIÓN BAJA

Alonso Albaladejo Rojo

Curso 2016/2017

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. Alonso Albaladejo Rojo, autor del Trabajo Fin de Máster *"CLASIFICACIÓN DE ALGUNOS ANILLOS DE DIMENSIÓN BAJA"*, bajo la tutela del profesor **D. Juan Martínez Hernández**,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 1 de julio de 2017.

Fdo.: Alonso Albaladejo Rojo.

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración).

Índice general

Resumen

En este Trabajo Fin de Máster demostraremos un teorema de estructura para anillos locales de dimensión global menor o igual que 2. Estos anillos están plenamente caracterizados ya que sólo hay tres posibles tipos de estructuras: los anillos locales regulares, los anillos de valoración y los anillos paraguas.

El trabajo está dividido en cinco capítulos: categorías, módulos, dimensión cero y uno, dimensión dos y F-anillos.

El primer capítulo versará sobre Categorías. En él se definirán los conceptos básicos de esta teoría introducida por Samuel Eilenberg y Sanders Mac Lane en 1942 con el fin de dar una descripción precisa de los procesos involucrados en la topología algebraica. Se introducirán brevemente los conceptos de categorías, funtores y algunas construcciones universales tales como el coproducto, el producto y el pullback. Además, nos ocuparemos especialmente de este último ya que construiremos el pullback de dos homomorfismos en la categoría ${}_A\mathbf{Mod}$.

En el segundo capítulo vamos a introducir algunas nociones básicas relacionadas con la categoría ${}_A\mathbf{Mod}$. Definiremos los diferentes tipos de módulos que juegan un papel destacado dentro del álgebra homológica. Estos son los módulos proyectivos, inyectivos y planos. A partir del concepto de resoluciones proyectivas e inyectivas construiremos los funtores derivados de un funtor. Seguidamente, explicaremos la construcción de los funtores Ext y Tor, así como algunas propiedades de gran utilidad de estos. Estos funtores son imprescindibles

a la hora de definir los conceptos de las diferentes dimensiones con las que trabajaremos. Finalmente, concluiremos este capítulo con las definiciones de dimensión proyectiva e inyectiva de un módulo y dimensión global y débil de un anillo, que son herramientas útiles a la hora de clasificar estos objetos.

El tercer capítulo lo dedicaremos al estudio de los anillos de dimensión global y débil cero y uno. En el primer caso, los anillos de dimensión global cero, demostraremos que dichos anillos son los anillos semisimples, es decir, anillos que como módulos son suma directa de submódulos simples. En caso de que los anillos sean de dimensión débil cero obtendremos que estos son los anillos regulares en el sentido de Von Neumann, es decir, los anillos en los que para cada elemento $a \in A$, existe otro $x \in A$ tal que $a = axa$.
En cuanto a los anillos de dimensión global uno, demostraremos que estos son los llamados anillos hereditarios, que son unos anillos cuyos ideales son módulos proyectivos. Acabaremos el capítulo demostrando que un anillos tiene dimensión débil uno si, y solo si, sus ideales son módulos planos.

El cuarto capítulo es el capítulo central y más importante de este trabajo puesto que en él se demostrará el teorema de clasificación de los anillos locales conmutativos de dimensión global dos. Al principio del capítulo se estudiarán algunos teoremas y definiciones necesarios que serán herramientas potentes a la hora de demostrar el teorema de estructura. Terminaremos el capítulo completando la demostración del teorema que aparece en [Vas76].

El siguiente capítulo trata sobre F- anillos. Generalizaremos el concepto de anillo paraguas a través del concepto de F-anillo y demostraremos que los F-anillos son, en realidad, pullbacks. Más concretamente, un anillo paraguas es el pullback de un anillo de valoración y un anillo local regular. Además, demostraremos un teorema que nos proporciona una manera para determinar la dimensión global de un F-anillo A en términos de las dimensión globales de A_P y A/P. Estos últimos resultados conectan con problemas abiertos de clasificación de anillos de dimensión determinada.

1

Categorías

1.1 Categorías

La teoría de categorías es un campo de las matemáticas relativamente joven ya que fue introducida por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1942 para dar una descripción precisa de los procesos involucrados en topología algebraica.

En esta nueva teoría se trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos. Al mismo tiempo se trata de mostrar una nueva forma de ver las matemáticas sin incluir las nociones de elementos o pertenencia, entre otras. En cierta medida, esta formulación fue posible debido a las similitudes y comparaciones que se encontraron entre los diferentes objetos matemáticos.

Durante todo el capítulo usaremos la notación y la terminología de [HS97]. No entraremos en la distinción profunda entre conjunto y clase. Consideraremos el concepto de clase como una agrupación de objetos y un conjunto como un elemento de una clase. Por ejemplo, la clase de todos los conjuntos, que sabemos que no puede ser un conjunto gracias a la paradoja de Russell, es una clase.

Definición 1.1. Una **categoría** $\mathcal{C}$ consiste en:

1. Una clase de objetos $A, B, C...$, denotada por $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. Usaremos la notación $A \in \mathcal{C}$ para referirnos a $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

2. Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, un conjunto $\mathcal{C}(A, B)$ de morfismos de A a B. A los elementos de estos conjuntos los denotaremos por $f, g, ...$

3. Para cada $A, B, C \in \mathcal{C}$, una aplicación $\mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C)$, llamada composición y denotada por $\circ$, satisfaciendo lo siguiente:

    a) Para cada $f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(B, C), h \in \mathcal{C}(C, D)$, se tiene $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

    b) Para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existe un morfismo $1_A : A \to A$, tal que $f \circ 1_A = f$ y $1_A \circ g = g$, para todo $f \in \mathcal{C}(A, B), g \in \mathcal{C}(C, A)$.

En definitiva, una categoría es una colección de objetos en la que podemos definir morfismos entre cada par de objetos de forma que la composición de estos cumpla la propiedad asociativa y, además, se tenga la existencia del morfismo identidad para cada objeto. Como ejemplos básicos de categorías tenemos la categoría de conjuntos (**Set**), la categoría de espacios topológicos (**Top**), la categoría de grupos (**Gr**), la categoría de A-módulos, etc.

Cuando para cualesquiera objetos A, B de $\mathcal{C}$ el conjunto $\mathcal{C}(A, B)$ tenga estructura de grupo abeliano cumpliendo la propiedad distributiva, diremos que la categoría $\mathcal{C}$ es una categoría **pre-aditiva**.

Sea A un anillo unitario. La categoría de A-módulos por la izquierda, denotada por ${}_A\mathbf{Mod}$, está formada por:

1. $\mathrm{Ob}({}_A\mathbf{Mod})$ es la clase de todos los A-módulos por la izquierda.

2. ${}_A\mathbf{Mod}(B, C)$ es el conjunto de los homomorfismos de A-módulos de B a C. Usualmente se denota por $\mathrm{Hom}(B, C)$. Cuando el anillo A sea conmutativo, $\mathrm{Hom}(B, C)$ será a su vez un A-módulo con la suma definida como $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ y la multiplicación como $(af)(x) := af(x)$, para todo $a \in A$.

3. La regla de composición es la composición de aplicaciones.

1.2 Funtores

Dentro de una categoría tenemos el conjunto de morfismos entre dos objetos que sirve para establecer relaciones entre esos dos objetos. De manera análoga también podemos definir "morfismos" entre categorías de una manera natural que mostraremos a continuación. Estos morfismos reciben el nombre de funtores entre categorías.

Definición 1.2. Un **funtor (covariante)** entre dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ es un par de funciones, denotadas ambas por F, de manera que:

1. $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ asocia a cada objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ un objeto $F(A) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.

2. Para cada par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, $F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(A), F(B))$ verifica que $F(1_A) = 1_{F(A)}$ y $F(gf) = F(g)F(f)$, para todo $f : A \to B, g : B \to C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gf"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(gf)"'] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C) \end{tikzcd}$$

Definición 1.3. Un **funtor contravariante** entre dos categorías $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ es un par de funciones, denotadas ambas por F de manera que:

1. $F : \text{Ob}(\mathcal{C}) \to \text{Ob}(\mathcal{D})$ asocia a cada objeto $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ un objeto $F(A) \in \text{Ob}(\mathcal{D})$.

2. Para cada par de objetos $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, $F : \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{D}(F(B), F(A))$ verifica que $F(1_A) = 1_{F(A)}$ y $F(gf) = F(f)F(g)$, para todo $f : A \to B, g : B \to C$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gf"] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[rr, bend right, "F(gf)"'] & F(B) \arrow[r, "F(f)"] & F(A) \end{tikzcd}$$

Entre la gran cantidad de ejemplos de funtores de gran relevancia en diversas áreas del álgebra, vamos a definir los funtores Hom y el funtor producto tensorial, pues los utilizaremos de manera central en posteriores capítulos del trabajo.

Funtor Hom$(A, -)$ covariante

Sea A un objeto fijo de una categoría $\mathcal{C}$. Definimos el funtor $\text{Hom}(A, -) : \mathcal{C} \to \textbf{Set}$ de manera que, actuando sobre objetos, tenemos que $\text{Hom}(A, B) := \mathcal{C}(A, B)$ es el conjunto de morfismos de A a B y, actuando sobre un morfismo $f : B \to C$, $\text{Hom}(A, f) : \text{Hom}(A, B) \to \text{Hom}(A, C)$ está definido por $\text{Hom}(A, f)(g) := fg$, para todo $g : A \to B$. Usualmente denotamos $f_* := \text{Hom}(A, f)$, por lo que $f_*(g) = fg$.

En la categoría de módulos ${}_A\mathbf{Mod}$, el funtor Hom no sólo tiene imagen en la categoría **Set**, sino que se puede restringir hasta la categoría **Ab** de grupos abelianos puesto que los morfismos entre módulos tienen estructura de grupo abeliano con la suma de morfismos definida elemento a elemento. Más aún, cuando A sea un anillo conmutativo, el funtor lo podemos considerar un endofuntor entre la categoría de A-módulos, $\mathrm{Hom}(M,-) : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_A\mathbf{Mod}$.

Funtor Hom$(-, B)$ contravariante

De forma análoga a la anterior construcción definimos el funtor $\mathrm{Hom}(-,B) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ de manera que, actuando sobre objetos, tenemos que $\mathrm{Hom}(A,B) := \mathcal{C}(A,B)$ es el conjunto de morfismos de A a B y, actuando sobre un morfismo $f : A \to C$, $\mathrm{Hom}(f,B) : \mathrm{Hom}(C,B) \to \mathrm{Hom}(A,B)$ está definido por $\mathrm{Hom}(A,f)(g) := gf$, para todo $g : C \to B$. Usualmente denotamos $f^* := \mathrm{Hom}(f,B)$, por lo que $f^*(g) = gf$.

Si nos fijamos ahora en la categoría de A-módulos cuando A es un anillo conmutativo, podemos definir un nuevo funtor como veremos a continuación.

Funtor producto tensorial $M \otimes_A -$

Sean M, N un A-módulo. Supongamos que A es un anillo conmutativo, entonces todos los módulos son bimódulos y viceversa, por lo tanto, $M \otimes_A N$ es un A-módulo. Así pues, si fijamos M, podemos definir $M \otimes_A - : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_A\mathbf{Mod}$ de manera que $M \otimes_A N$ es el producto tensorial de M y N sobre el anillo A y, si $f : N \to L$, entonces $M \otimes_A f : M \otimes_A N \to M \otimes_A L$ es el homomorfismo $1_M \otimes_A f$ definido por $(1_M \otimes_A f)(m \otimes n) := m \otimes f(n)$.

Funtor producto tensorial $- \otimes_A N$

De forma similar a la construcción anterior, podemos definir un nuevo funtor covariante $- \otimes_A N : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_A\mathbf{Mod}$ de manera que $M \otimes_A N$ es el producto tensorial de M y N sobre el anillo A y, si $f : M \to P$, entonces $f \otimes_A N : M \otimes_A N \to P \otimes_A N$ es el homomorfismo $f \otimes_A 1_N$ definido por $(f \otimes_A 1_N)(m \otimes n) := f(m) \otimes n$.

Aunque hemos definido los funtores producto tensorial sobre anillos conmutativos, en el caso en que A no sea conmutativo y se tenga que $M \in \mathbf{Mod}_A$ y $N \in {}_A\mathbf{Mod}$ podemos aplicar las mismas construcciones que acabamos de realizar, sin embargo, los funtores llegarían a la categoría de grupos abelianos $\mathbf{Ab} \cong eq\ {}_{\mathbb{Z}}\mathbf{Mod}$.

Estos dos funtores, $\mathrm{Hom}_A(-,-)$ y $- \otimes_A -$ constituyen ejemplos de bifuntores en el sentido de que si $\alpha : M \to M'$, $\beta : N \to N'$ son dos morfismos en ${}_A\mathbf{Mod}$, entonces conmutan los siguientes diagramas.

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_A(M,N) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{Hom}_A(M,N') \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha^*} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\
\mathrm{Hom}_A(M',N) & \xrightarrow{\beta_*} & \mathrm{Hom}_A(M',N')
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes_A N & \xrightarrow{1\otimes\beta} & M \otimes_A N' \\
\downarrow{\scriptstyle \alpha\otimes 1} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha\otimes 1} \\
M' \otimes_A N & \xrightarrow{1\otimes\beta} & M' \otimes_A N'
\end{array}$$

1.3 Construcciones Universales

Lo siguiente que vamos a introducir son varios conceptos utilizados en teoría de categorías, como son el producto, el copodructo, el núcleo, pullback, etc... que tienen propiedades universales muy importantes.

Definición 1.4. Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de objetos de una categoría $\mathcal{C}$. Un **producto** de los objetos X_i es un par $(\prod X_i, p_i : \prod X_i \to X_i)$, donde $\prod X_i$ es un objeto de $\mathcal{C}$ y p_i son morfismos (llamados proyecciones), de manera que se cumple la siguiente propiedad universal: para cualquier otro objeto Y y morfismos $f_i : Y \to X_i$, existe un único morfismo

$f : Y \to \prod X_i$ tal que $f_i = p_i f$, para todo $i \in I$. Es decir, conmuta el siguiente diagrama, para todo $i \in I$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f"'] & X_i \\ & \prod X_i \arrow[u, "p_i"] \end{tikzcd}$$

Análogamente se define el **coproducto** de los X_i como un par $(\coprod X_i, q_i : X_i \to \coprod X_i)$ con la siguiente propiedad universal: para cualquier otro objeto Y y morfismos $f_i : X_i \to Y$, existe un único morfismo $f : \coprod X_i \to Y$ tal que $f_i = f q_i$, para todo $i \in I$. Es decir, conmuta el siguiente diagrama, para todo $i \in I$

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "q_i"'] & Y \\ & \coprod X_i \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

Denotaremos al coproducto como $\oplus$, en lugar de $\coprod$, según convenga. Por otro lado, en la categoría ${}_A\mathbf{Mod}$, cuando la familia de los objetos X_i es finita, el producto y el coproducto es el mismo objeto.

Una categoría $\mathcal{C}$ se dice que tiene **objeto cero**, denotado por 0, si para cualquier otro objeto A, los conjuntos $\mathcal{C}(0, A)$ y $\mathcal{C}(A, 0)$ tienen un único elemento. A la vista de esta definición, entre dos objetos A y B de una categoría con objeto cero podemos definir el llamado morfismo cero como la siguiente composición

$$0_{A,B} : A \to 0 \to B.$$

Definición 1.5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con objeto cero y sea $\phi : A \to B$ un morfismo. Se define el núcleo de ϕ como un morfismo $\mu : K \to A$ de manera que $\phi\mu = 0_{K,B}$ y, si $\psi : K' \to A$ es tal que $\phi\psi = 0_{K',B}$, entonces existe un único $\psi' : K' \to K$ tal que $\psi = \mu\psi'$. Es decir, el **núcleo** de ϕ es un par (K, μ) de manera que cualquier morfismo cuya composición con ϕ sea cero se factoriza de forma única a traves de K y de μ.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "\phi"] & B \\
K' \arrow[u, "\psi'"] \arrow[ur, "\psi"] & &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.6. Sean A_1, A_2, A_0 objetos de una categoría $\mathcal{C}$. Sea $j_1 : A_1 \to A_0$ y $j_2 : A_2 \to A_0$ morfismos entre los objetos. Se define el **pullback**, cuadrado cartesiano o producto fibrado de j_1 y j_2 como un objeto A, junto con dos aplicaciones $i_1 : A \to A_1, i_2 : A \to A_2$ tal que $j_1 i_1 = j_2 i_2$, de manera que se satisface la siguiente propiedad universal: para cualquier otro objeto C y morfismos $f : C \to A_1, g : C \to A_2$ cumpliendo $j_1 f = j_2 g$, existe un único morfismo $\phi : C \to A$ tal que $f = i_1 \phi$ y $g = i_2 \phi$. Es decir, conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dotted, "\phi"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"] \\
& A_2 \arrow[r, "j_2"] & A_0
\end{tikzcd}$$

Con la notación anterior, cuando tengamos un diagrama como el siguiente, diremos que estamos ante un diagrama pullback.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"] \\
A_2 \arrow[r, "j_2"] & A_0
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

El siguiente teorema afirma que el núcleo, en caso de existir, de los morfismos i_2 y j_1 es el mismo objeto para ambos. salvo isomorfismos.

Teorema 1.7. Supongamos que tenemos un diagrama pullback como en (1.1) en una categoría $\mathcal{C}$ con objeto cero. Entonces se tiene lo siguiente:

1. Si (K, μ) es el núcleo de i_2, entonces $(K, i_1\mu)$ es el núcleo de j_1.

2. Si (K, ν) es el núcleo de j_1, entonces ν puede factorizarse como $\nu = i_1\mu$, donde (K, μ) es el núcleo de i_2.

Demostración. Sólo vamos a hacer la primera afirmación puesto que la segunda se podría realizar de manera análoga. No obstante, puede verse una prueba completa en [HS97, Teorema 6.2, pág 61].

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "\mu"] & K' \arrow[d, "\nu"] \\
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"] \\
A_2 \arrow[r, "j_2"] & A_0
\end{tikzcd}$$

Sean (K, μ) y (K', ν) los núcleos de i_2 y j_1 respectivamente. Como $j_1 i_1 \mu = j_2 i_2 \mu = j_2 0 = 0$, entonces, por la propiedad universal del núcleo K', existe un único $r : K \to K'$ tal que $\nu r = i_1\mu$. Por otro lado tenemos que $j_1\nu = 0 = j_2 0$, por la propiedad universal del cuadrado cartesiano, existe un único $s : K' \to A$ tal que $\nu = i_1 s$ y $0 = i_2 s$ y por la propiedad universal del núcleo K, existe un único $u : K' \to K$ tal que $s = \mu u$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[d, "\mu"] & K' \arrow[l, shift left, "u"] \arrow[d, "\nu"] \arrow[dl, "s"] \\
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"] \\
A_2 \arrow[r, "j_2"] & A_0
\end{tikzcd}$$

Vamos a ver que $ru = 1_{K'}$ y $ur = 1_K$ para demostrar que $K' \cong\ eqK$. Tenemos que $i_2\mu ur = i_2 sr = 0 = i_2\mu$ e $i_1\mu ur = \nu r = i_1\mu$. Por la propiedad universal del cuadrado cartesiano, obtenemos que $\mu ur = \mu$ y, como μ es monomorfismo, $ur = 1_K$. De manera análoga se comprueba que $ru = 1_{K'}$. Falta ver que $i_1\mu$ es el núcleo de j_1, pero esto es fácil puesto que el núcleo de j_1 es $\nu = i_1 s = i_1\mu u$, pero identificando K con K' tenemos que el núcleo es $\nu r = i_1\mu ur = i_1\mu$. $\square$

1.4 Funtores adjuntos. Equivalencia entre categorías

Definición 1.8. Sean $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Una transformación natural de F a G es una aplicación η que asigna a cada objeto $X \in \mathcal{C}$, un morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ tal que para cualquier morfismo $f : X \to Y$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

conmuta. Si, además, para cada X se tiene que η_X es un isomorfismo, se dice que η es una equivalencia natural y escribimos $F \simeq G$.

Definición 1.9. Sean $F : \mathcal{C} \longleftrightarrow \mathcal{D} : G$ dos funtores entre categorías de manera que existe una equivalencia natural

$$\eta \equiv \eta_{XY} : \mathcal{D}(F(X), Y) \to \mathcal{C}(X, G(Y))$$

Entonces decimos que F es adjunto por la izquierda de G y G es adjunto por la derecha de F. En tal caso escribimos $F \dashv G$.

El ejemplo típico de adjunción entre funtores es la adjunción Hom-$\otimes$, ya que se tiene que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M \otimes N, L) \cong \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, L))$.

Si nos centramos ahora en las relaciones que nos proporciona la naturalidad de η y consideramos $\alpha : X' \to X, \beta : Y \to Y'$ y $\varphi : F(X) \to Y$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(F(X),Y) & \xrightarrow{\eta_{XY}} & \mathcal{C}(X,G(Y)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle (G\beta)_*} \\ \mathcal{D}(F(X),Y') & \xrightarrow{\eta_{XY'}} & \mathcal{C}(X,G(Y')) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle (F\alpha)^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha^*} \\ \mathcal{D}(F(X'),Y') & \xrightarrow{\eta_{X'Y'}} & \mathcal{C}(X',G(Y')) \end{array}$$

Se tiene que $\eta_{X'Y'} \circ (F\alpha)^* \circ \beta_*(\varphi) = \alpha^* \circ (G\beta)_* \circ \eta_{XY}(\varphi)$ y desarrollando llegamos a la siguiente relación

$$\eta(\beta \circ \varphi \circ F\alpha) = G\beta \circ \eta(\varphi) \circ \alpha \tag{1.2}$$

Si ahora tomamos $Y = F(X), \varphi = 1_{F(X)}$ y llamamos $\epsilon_X := \eta(1_{F(X)}) : X \to GF(X)$, la ecuación (2.2) nos demuestra que ϵ es una transformación natural del funtor 1 a GF. A esta transformación natural la llamamos **unidad de la adjunción**. De la misma manera, si tomamos $X = G(Y), \varphi = 1_{G(Y)}$, obtenemos una transformación natural $\delta_Y := \eta^{-1}(1_{G(Y)}) : FG(Y) \to Y$, denominada **counidad de la adjunción**.

Usando de nuevo la ecuación (2.2) se puede demostrar que $\delta F \circ F\epsilon = 1$ y que $G\delta \circ \epsilon G = 1$. De forma similar se puede probar que η está determinada por ϵ y que η^{-1} está determinada por δ, atendiendo a las siguientes reglas:

$$\eta(\varphi) = G\varphi \circ \epsilon_X, \text{ para } \varphi : F(X) \to Y. \tag{1.3}$$

$$\eta^{-1}(\psi) = \delta_Y \circ F\psi, \text{ para } \psi : X \to G(Y). \tag{1.4}$$

Gracias a la counidad, vamos a dar una construcción de un pullback en una categoría arbitraria. Sea $\mathcal{L}$ una categoría representada por

$$\begin{array}{ccc} & & \cdot \\ & & \Big\downarrow \\ \cdot & \longrightarrow & \cdot \end{array}$$

Dar un funtor entre $\mathcal{L}$ y una categoría $\mathcal{C}$ consiste en dar un par de morfismos (φ, ψ) en $\mathcal{C}$, por lo que podemos representar el funtor mediante el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

Por otra parte, tenemos un funtor constante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{L}}$ que asocia a cada objeto $Z \in \mathcal{C}$, un funtor de $\mathcal{L}$ a $\mathcal{C}$ representado por

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "1_Z"] \\ Z \arrow[r, "1_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

Así pues, dar un morfismo entre el funtor $F(Z)$ y un funtor (φ, ψ), que es lo mismo que dar una transformación natural, es dar un par de morfismos $\gamma : Z \to A, \delta : Z \to B$ de manera que conmute el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\delta"] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"] & X \end{tikzcd}$$

Sea ahora $F \dashv G$ y sea $\pi : FG \to 1$ la counidad de la adjunción. Entonces tenemos el siguiente teorema con el que podemos encontrar el pullback de dos morfismos.

Teorema 1.10. $\pi : FG(\varphi, \psi) \to (\varphi, \psi)$ es el pullback de (φ, ψ).

Demostración. Sea $Y = G(\varphi, \psi)$, entonces $\pi : F(Y) \to (\varphi, \psi)$ es dar un par de morfismos $\alpha : Y \to A, \beta : Y \to B$ tal que $\varphi\alpha = \psi\beta$. Sea ahora otro morfismo $(\gamma, \delta) : F(Z) \to (\varphi, \psi)$ que haga conmutar el cuadrado anterior. Como $F \dashv G$, podemos considerar η la equivalencia natural y entonces se cumple que $\eta(\gamma, \delta) : Z \to Y$ satisface, por (1.4),

$$\pi \circ F(\eta(\gamma, \delta)) = \eta^{-1}(\eta(\gamma, \delta)) = (\gamma, \delta)$$

Por lo tanto, $\gamma = \alpha \circ \eta$ y $\delta = \beta \circ \eta$, es decir, (α, β) es el pullback de (φ, ψ). $\square$

Aunque este teorema permite construir cuadrados cartesianos en categorías abstractas, en la categoría de módulos tenemos una construcción muy particular que es la siguiente.

Sean $\beta : L \to N, \alpha : M \to N$ en ${}_A\mathbf{Mod}$. Consideramos $M \oplus L$ el coproducto de M y L junto a las proyecciones $p_L : M \oplus L \to L$, $p_M : M \oplus L \to M$. Sea (C, u) el núcleo de $\beta p_L - \alpha p_M$. Entonces, si llamamos $\alpha' = p_L u$ y $\beta' = p_M u$, tenemos que $\beta\alpha' = \beta p_L u = \alpha p_M u = \alpha\beta'$.

Lo que vamos a demostrar es que (C, α', β') es el pullback de α y β. Si tenemos ahora otro módulo X, $\delta : X \to L, \gamma : X \to M$ tal que $\beta\delta = \alpha\gamma$, por la propiedad universal del producto, existe un único $\tau : X \to M \oplus L$ tal que $\delta = p_L\tau$ y $\gamma = p_M\tau$.

Además, $(\beta p_L - \alpha p_M)\tau = \beta p_L\tau - \alpha p_M\tau = \beta\delta - \alpha\gamma = 0$. Por lo tanto, por la proiedad universal del núcleo, existe un único $\tau' : X \to C$ tal que $u\tau' = \tau$. Pero entonces, $\alpha'\tau' = p_L u\tau' = p_L\tau = \delta$ y $\beta'\tau' = p_M u\tau' = p_M\tau = \gamma$. Por lo tanto, (C, α', β') es el pullback de α y β. El diagrama correspondiente sería el siguiente.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrrd, bend left, "\delta"] \arrow[dr, "\tau'"] \arrow[dddr, bend right, "\gamma"'] & & & \\
& C \arrow[rr, "\alpha'"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "\beta'"] & & L \arrow[dd, "\beta"] \\
& & M \oplus L \arrow[ur, "p_L"'] \arrow[dl, "p_M"] & \\
& M \arrow[rr, "\alpha"] & & N
\end{tikzcd}$$

En definitiva, si tenemos un diagrama pullback en la categoría de módulos de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"] & A_1 \arrow[d, "j_1"] \\
A_2 \arrow[r, "j_2"] & A_0
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

entonces se verifica que $A = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 : j_1(a_1) = j_2(a_2)\}$. Esta construcción la usaremos más adelante para demostrar que los anillos paraguas son pullbacks.

2

Módulos

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos sobre la categoría de A-módulos por la izquierda (derecha) ${}_A\mathbf{Mod}$ ($\mathbf{Mod}_A$) que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo. Aunque en futuros capítulos trabajaremos sobre anillos conmutativos, el desarrollo de éste va a versar sobre anillos unitarios generales, salvo que se indique lo contrario. La notación y terminología que seguiremos durante todo el capítulo es la misma que se utiliza en [Osb00].

Recordemos que una sucesión $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ de módulos es una sucesión exacta si $Im(f) = Ker(g)$. Diremos que $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ es una sucesión exacta corta si, y solo si, $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ es exacta, f es monomorfismo y g es epimorfismo.

Proposición 2.1. Sea $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta en ${}_A\mathbf{Mod}$, $R \in {}_A\mathbf{Mod}$ y $S \in \mathbf{Mod}_A$. Entonces se tiene lo siguiente:

- $0 \to \mathrm{Hom}(R,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(R,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(R,N)$ es exacta.

- $0 \to \mathrm{Hom}(L,R) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M,R) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(N,R)$ es exacta.

- $S \otimes L \xrightarrow{1\otimes f} S \otimes M \xrightarrow{1\otimes g} S \otimes N \to 0$ es exacta.

Demostración. Ver proposición 2.6, pág. 25 y proposición 2.7, pág. 27 de [Osb00]. □

Como observamos, los funtores Hom y $\otimes$ no convierten sucesiones exactas cortas en sucesiones exactas cortas, es decir, no son funtores exactos. Sin embargo, los funtores Hom son exactos por la izquierda y los funtores $\otimes$ son exactos por la derecha puesto que ahí sí se conserva la exactitud. Esta patología conduce a dos cuestiones naturales, la primera medir la inexactitud estudiando los correspondientes conúcleos y núcleos y la segunda determinar las clases de aquellos módulos para los cuales estos funtores son exactos, lo que conduce a los conceptos de módulos proyectivos, inyectivos y planos, que veremos a continuación.

2.1 Módulos Proyectivos, Inyectivos y Planos

Definición 2.2. Sean $P, E \in {}_A\mathbf{Mod}$ y $F \in \mathbf{Mod}_A$:

- P se dice **proyectivo** si el funtor $\mathrm{Hom}(P,-)$ es exacto, es decir, si preserva sucesiones exactas cortas.

- E se dice **inyectivo** si el funtor $\mathrm{Hom}(-,E)$ es exacto, es decir, si preserva sucesiones exactas cortas.

- F se dice **plano** si el funtor $F \otimes -$ es exacto, es decir, si preserva sucesiones exactas cortas.

Si analizamos la definición de módulo proyectivo obtenemos lo siguiente:

Sea P un módulo proyectivo y sea $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ una sucesión exacta corta, en particular, g es epimorfismo. Entonces, al ser P proyectivo, la sucesión

$$0 \to \mathrm{Hom}(P,L) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(P,M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(P,N) \to 0$$

es exacta corta. Por lo tanto, g_* es un epimorfismo y se tiene que para todo $\varphi : P \to N$, existe $\varphi' : P \to M$ tal que $g_*(\varphi') = \varphi$, es decir, $\varphi = g\varphi'$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ M \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Resumiendo, P es proyectivo si para todo epimorfismo $g : M \to N$ y para todo $\varphi : P \to N$, existe un $\varphi' : P \to M$ tal que $\varphi = g\varphi'$.
Análogamente se comprueba que un módulo E es inyectivo si para todo monomorfismo $f : L \to M$ y para todo $\varphi : L \to E$, existe un $\varphi' : M \to E$ tal que $\varphi = \varphi' f$.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & M \arrow[dl, dotted, "\varphi'"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Proposición 2.3. Se verifican las siguientes propiedades:

- El coproducto de una familia de módulos es proyectivo si, y solo si, cada módulo es proyectivo.
- El coproducto de una familia de módulos es plano si, y solo si, cada módulo es plano.
- El producto de una familia de módulos es inyectivo si, y solo si, cada módulo es inyectivo.

Demostración. Ver proposición 2.9, pág. 28 de [Osb00]. □

Gracias a la proposición anterior se consigue un corolario muy útil: los módulos libres son proyectivos y planos. La desmostración es sencilla puesto que un módulo libre es un coproducto del anillo A y, como el propio anillo es un módulo proyectivo y plano, el coproducto es proyectivo y plano.

Más aún, como cada módulo M es cociente de un módulo libre F, obtenemos que M es la imagen por un epimorfismo con dominio F. Es decir, cada módulo es la imagen epimórfica de un módulo proyectivo. Debido a esta peculiar propiedad, la categoría ${}_A\mathbf{Mod}$ se dice entonces que tiene suficientes proyectivos.

La propiedad dual con módulos inyectivos es que para cada módulo M, existe un módulo inyectivo E y un monomorfismo $M \to E$. La demostración de esta última propiedad, que no se obtiene por dualidad, puede encontrarse en [Osb00, Corolario 2.13].

En las siguientes proposiciones se mostrarán propiedades de los diferentes tipos de módulos que utilizaremos a lo largo del trabajo, así pues, se tiene lo siguiente:

Lema 2.4. Modulos Proyectivos. Son equivalentes las siguientes propiedades:

1. $P \in {}_A\mathbf{Mod}$ es proyectivo.

2. P es sumando directo de un módulo libre.

3. Cada sucesión exacta corta de la forma $0 \to L \to M \to P \to 0$ escinde.

4. (“Existencia de bases proyectivas”) Existe una familia $\{x_i\}_{i\in I}$ de elementos de P y homomorfismos $\varphi_i : P \to A$ tal que para cada $x \in P$, $x = \sum_i \varphi(x)x_i$.

Demostración. Ver proposición 6.1 y 6.3 de [Ste75]. □

El punto 4 del lema anterior no proporciona bases en el sentido de conjunto generador linealmente independiente. Lo que tenemos es que una base proyectiva es un conjunto generador, pero no es verdaderamente una base como tal.

Por otro lado, como un módulo proyectivo es sumando directo de un módulo libre, los módulos libres son proyectivos. Además, los módulos proyectivos son planos puesto que, como el anillo A es plano y P es sumando directo de un módulo libre, en particular, sumando directo de $A^{(I)}$, por la proposición 2.3 se tiene que P es plano.

Lema 2.5. Modulos Inyectivos. Son equivalentes las siguientes propiedades:

1. $E \in {}_A\mathbf{Mod}$ es inyectivo.

2. (Criterio de Baer I). Para cada ideal por la derecha I de A y cada homomorfismo $\varphi : I \to E$, existe un $y \in E$ tal que $\varphi(a) = ay$.

3. (Criterio de Baer II). Para cada ideal por la derecha I de A y cada homomorfismo $\varphi : I \to E$, existe un $\varphi' : A \to E$ tal que $\varphi'|_I = \varphi$.

4. E es sumando directo de cualquier módulo que contenga a E como submódulo.

Demostración. Para 1,2 y 3 ver proposición 6.5 de [Ste75]. Para 4 ver página 33 de [Osb00]. □

Si $F \in \mathbf{Mod}_A$, entonces $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un módulo por la izquierda con la multiplicación definida como $(r \cdot f)(x) := f(xr)$, para cada $r \in A$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ y $x \in F$.

Lema 2.6. Modulos Planos. Son equivalentes las siguientes propiedades:

1. $F \in \mathbf{Mod}_A$ es plano.

2. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ es un módulo inyectivo.

3. Para cada ideal I por la izquierda finitamente generado, el homomorfismo canónico $F \otimes I \to F \cong F \otimes A$ es un monomorfismo.

4. Se satisface la siguiente propiedad: para cada $x_i \in F, b_i \in A$, $i = 1, 2, ..., n$, verificando $\sum_{i=1}^{n} x_i b_i = 0$, existen $u_i, ...u_m \in F, a_{ij} \in A$, $i = 1, ..., n$; $j = 1, ...m$, tales que $\sum_i b_i a_{ij} = 0$, para todo j, y $x_i = \sum_j u_j a_{ij}$, para todo i.

Demostración. Ver corolario 10.5, proposición 10.6 y proposición 10.7 de [Ste75]. □

A continuación mostraremos los tipos de resoluciones que usaremos en posteriores capítulos puesto que la propia definición de dimensión global implica trabajar con resoluciones. Así pues, sea $M \in {}_A\mathbf{Mod}$. Diremos que una sucesión exacta de la forma

$$... \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to ... \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

es una **resolución proyectiva** de M cuando los P_i son módulos proyectivos.

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \to ... \to E_{n-1} \xrightarrow{d_n} E_n \xrightarrow{d_{n+1}} E_{n+1} \to ...$$

es una **resolución inyectiva** de M cuando los E_i son módulos inyectivos.

Finalmente, una sucesión exacta de la forma

$$... \to F_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} F_n \xrightarrow{d_n} F_{n-1} \to ... \to F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

es una **resolución plana** de M cuando los F_i son módulos planos.

Es lógico preguntarse si para cada módulo se pueden formar resoluciones proyectivas, inyectivas o planas; pero esto es cierto debido al comentario que hicimos sobre que la categoría ${}_A\mathbf{Mod}$ tiene la propiedad de existencia de sufcientes proyectivos, inyectivos y planos.

2.2

Funtores Derivados

En esta sección vamos a introducir un nuevo concepto de gran importancia en álgebra homológica, los llamados funtores derivados. El nombre se debe a que la construcción de estos funtores surge a raíz de otros funtores aditivos (funtores que conservan la suma de homomorfismos). Antes de empezar con los funtores derivados hay que saber que se pueden obtener dos tipos de funtores derivados, los funtores derivados por la izquierda y los funtores derivados por la derecha dependiendo del tipo de resolución que se utilice.

Sea $F : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_B\mathbf{Mod}$ un funtor aditivo y covariante. Sea $M \in {}_A\mathbf{Mod}$ y formamos una resolución proyectiva de M:

$$... \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to ... \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

Aplicamos ahora el funtor F a la resolución formada y obtenemos:

$$... \to F(P_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(P_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(P_{n-1}) \to ... \to F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(d_0)} F(M) \to 0$$

Ahora eliminamos el término $F(M)$ para obtener la siguiente sucesión:

$$... \to F(P_{n+1}) \xrightarrow{F(d_{n+1})} F(P_n) \xrightarrow{F(d_n)} F(P_{n-1}) \to ... \to F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \to 0$$

No podemos afirmar que esta sucesión sea exacta ya que el funtor F no tiene por qué ser exacto, sin embargo, se cumple que $F(d_{n+1})F(d_n) = F(d_{n+1}d_n) = F(0) = 0$, por lo que la sucesión es un complejo de cadena y podemos calcular su n-ésimo grupo de homología $H_n = \ker F(d_n)/\mathrm{im}\ F(d_{n+1})$. Observemos que $H_n = 0$ significa que $\ker F(d_n) = \mathrm{im}\ F(d_{n+1})$ y, por tanto, tendremos una sucesión exacta.

Por otro lado, para poder construir el funtor derivado tenemos que asociar un homomorfismo entre los grupos de homología de diferentes resoluciones para cada homomorfismo de módulos. La situación queda clara en la siguientes proposición.

Proposición 2.7. Sea $\varphi : M \to N$ un homomorfismo y sean (P_n, d_n) una resolución proyectiva de M y (P'_n, d'_n) una resolución proyectiva de N. Entonces existen homomorfismos $\varphi_n : P_n \to P'_n$ haciendo conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} ... \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, dotted, "\varphi_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_n"] & ... \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dotted, "\varphi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ ... \arrow[r] & P'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & P'_n \arrow[r] & ... \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "d'_0"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

Además, si existen otros homormorfismos $\varphi'_n : P_n \to P'_n$ haciendo conmutar el diagrama, entonces φ_n y φ'_n son **homotópicas**, es decir, existen $D_n : P_n \to P'_{n+1}$ tal que

$$\varphi_n - \varphi'_n = d'_{n+1} D_n + D_{n-1} d_n,$$

con $D_{-1} = 0$.

Demostración. La prueba se hará de manera recursiva. Así pues, vamos a definir $\varphi_0 : P_0 \to P'_0$ de la siguente forma. Si consideramos la composición $\varphi d_0 : P_0 \to N$, como P_0 es proyectivo y d'_0 es un epimorfismo, existe φ_0 de forma que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dotted, "\varphi_0"'] \arrow[d, "\varphi d_0"] & \\ P'_0 \arrow[r, "d'_0"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $\varphi d_0 = d'_0 \varphi_0$. Supongamos ahora que ya tenemos $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n$, ahora vamos a encontrar $\varphi_{n+1} : P_{n+1} \to P'_{n+1}$.

Sea $x \in \text{im } d_{n+1} = \ker d_n$, entonces $d_n(x) = 0 \Rightarrow 0 = \varphi_{n-1} d_n(x) = d'_n \varphi_n(x)$. Es decir, $\varphi_n(\text{im } d_{n+1}) \subset \ker d'_n = \text{im } d'_{n+1}$. Como P_{n+1} es proyectivo, volvemos a encontrar φ_{n+1}

haciendo conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & P_{n+1} \arrow[dl, dotted, "\varphi_{n+1}"'] \arrow[d, "\varphi_n d_{n+1}"] & \\ P'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] & \mathrm{im}\ d'_{n+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ya solo queda comprobar que φ_n y φ'_n son homotópicas, de nuevo, de forma rescursiva. Como $d'_0\varphi_0 = \varphi d_0 = d'_0\varphi'_0$, se tiene que $d'_0(\varphi_0 - \varphi'_0) = 0$, por lo que $\varphi_0 - \varphi'_0$ toma valores en ker $d'_0 =$ im d'_1. Como P_0 es proyectivo y d'_1 es epimorfismo en su imagen, tenemos que existe un $D_0 : P_0 \to P'_1$ tal que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P_0 \arrow[dl, dotted, "D_0"'] \arrow[d, "\varphi_0-\varphi'_0"] & \\ P'_1 \arrow[r, "d'_1"] & \mathrm{im}\ d'_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Por lo que $\varphi_0-\varphi'_0 = d'_1D_0 = d'_1D_0+D_{-1}d_0$. Así pues, supongamos que tenemos $D_0, D_1, ..., D_n$. Entonces sabemos que $\varphi_n - \varphi'_n = d'_{n+1}D_n + D_{n-1}d_n$, por lo que $d'_{n+1}(\varphi_{n+1} - \varphi'_{n+1} - D_nd_{n+1}) = d'_{n+1}\varphi_{n+1} - d'_{n+1}\varphi'_{n+1} - d'_{n+1}D_nd_{n+1} = \varphi_nd_{n+1} - \varphi'_nd_{n+1} - d'_{n+1}D_nd_{n+1} = (\varphi_n - \varphi'_n - d'_{n+1}D_n)d_{n+1} = D_{n-1}d_nd_{n+1} = 0$.

Por lo tanto, $\mathrm{im}(\varphi_{n+1} - \varphi'_{n+1} - D_nd_{n+1}) \subset$ ker $d'_{n+1} =$ im d'_{n+2}. De nuevo, usando la proyectividad de P_{n+1}, tenemos que existe $D_{n+1} : P_{n+1} \to P'_{n+2}$ tal que $d'_{n+2}D_{n+1} = \varphi_{n+1} - \varphi'_{n+1} - D_nd_{n+1}$.

□

Definición 2.8. Con la terminología anterior, se define el **n-ésimo funtor derivado por la izquierda** del funtor F, denotado por $\mathcal{L}_nF$, como sigue:

- $\mathcal{L}_nF(M) = H_n =$ ker $F(d_n)/$im $F(d_{n+1})$, para todo $M \in {}_A\mathbf{Mod}$
- Para homomorfismos $\varphi : M \to N$, $\mathcal{L}_nF(\varphi) : \mathcal{L}_nF(M) \to \mathcal{L}_nF(N)$ es el homomorfismo asociado a $F(\varphi_n)$ en el n-ésimo grupo de homología, denotado por $F(\varphi_n)_*$, donde φ_n es el homomorfismo construido mediante la proposición 2.7.

Llegados a este punto, el lector podría preguntarse qué pasaría si eligiésemos cualquier otra resolución proyectiva o cualquier otro φ_n ya que no existe unicidad en la construcción realizada. La respuesta a esta pregunta es que se obtienen objetos isomorfos tal y como veremos a continuación; por lo tanto, el funtor derivado por la izquierda es único salvo isomorfismos.

Supongamos que tenemos (P_n, d_n) y (P'_n, d'_n) dos resoluciones proyectivas de M y consideramos la identidad en M para aplicar la proposición 2.7 dos veces.

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, dotted, "\varphi_{n+1}"] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi_n"] & ... \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dotted, "\varphi_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "i_M"] & 0 \\
... \arrow[r] & P'_{n+1} \arrow[r, "d'_{n+1}"] \arrow[d, dotted, "\varphi'_{n+1}"] & P'_n \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\varphi'_n"] & ... \arrow[r] & P'_0 \arrow[r, "d'_0"] \arrow[d, dotted, "\varphi'_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "i_M"] & 0 \\
... \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r] & ... \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Entonces, tanto $\varphi'_n\varphi_n$ como i_{P_n} hacen conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
... \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] \arrow[d, dotted] & P_n \arrow[r] \arrow[d, dotted] & ... \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, dotted] & M \arrow[r] \arrow[d, "i_M"] & 0 \\
... \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r, "d_{n+1}"] & P_n \arrow[r] & ... \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Por lo tanto, por la proposición 2.7, $\varphi'_n\varphi_n$ y i_{P_n} son homotópicas, por lo que sus correspondientes homomorfismos asociados a su grupo de homología satisfacen que $\varphi'_{n*}\varphi_{n*} = i_{P_n*}$.

Análogamente se prueba que $\varphi_{n*}\varphi'_{n*} = i_{P'_n*}$, por lo tanto, el n-ésimo grupo de homología es independiente de la elección de la resolución proyectiva salvo isomorfismos.

Si suponemos ahora que $F : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_B\mathbf{Mod}$ es un funtor aditivo y contravariante y realizamos la misma construcción obtenemos un complejo de cadena de la siguiente forma:

$$... \xleftarrow{F(d_{n+1})} F(P_{n+1}) \xleftarrow{F(d_n)} F(P_n) \leftarrow ... \leftarrow F(P_1) \xleftarrow{F(d_1)} F(P_0) \leftarrow 0$$

Por tanto, para un funtor contravariante definiremos $\mathcal{L}^n F(M) = \ker F(d_{n+1})/ \operatorname{im} F(d_n)$

actuando sobre objetos y $\mathcal{L}^n F(\varphi)$ es el homomorfismo que se construye de manera análoga a como hemos hecho para funtores covariantes. Como siempre, se puede probar que, para funtores contravariantes, el funtor derivado es independiente de la resolución proyectiva escogida salvo isomorfismos.

Ahora vamos a estudiar los funtores derivados por la derecha. Sea $F : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_B\mathbf{Mod}$ un funtor aditivo y covariante. Sea $M \in {}_A\mathbf{Mod}$ y formamos una resolución inyectiva de M:

$$0 \to M \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2} ...$$

Aplicamos ahora el funtor F a la resolución formada, eliminamos el término $F(M)$ y obtenemos el complejo

$$0 \to F(E_0) \xrightarrow{F(d_1)} F(E_1) \xrightarrow{F(d_2)} F(E_2) \xrightarrow{F(d_3)} ...$$

Definición 2.9. Con la construcción anterior, se define el **n-ésimo funtor derivado por la derecha** del funtor F covariante como $\mathcal{R}_n F(M) = \ker F(d_{n+1})/ \operatorname{im} F(d_n)$ actuando sobre objetos y $\mathcal{R}_n F(\varphi)$ es el homomorfismo que se construye de manera análoga a como hemos hecho anteriormente.

Si F es un funtor contravariante, el complejo resultante sería

$$0 \leftarrow F(E_0) \xleftarrow{F(d_1)} F(E_1) \xleftarrow{F(d_2)} F(E_2) \xleftarrow{F(d_3)} ...$$

por lo que el n-ésimo funtor derivado por la derecha de un funtor contravariante se define como $\mathcal{R}^n F(M) = \ker(F(d_n))/ \operatorname{im} F(d_{n+1})$.

De nuevo se puede demostrar que la construcción de los funtores derivados por la derecha es independiente de las resoluciones inyectivas escogidas.

Vistas ya las definiciones de los funtores derivados, vamos a explicar algunas propiedades elementales que se obtienen cuando trabajamos con estos.

Proposición 2.10. Sea $F : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_B\mathbf{Mod}$ un funtor aditivo. Se tiene lo siguiente:

1. Si F es covariante y exacto por la derecha, entonces $\mathcal{L}_0F(M) \cong F(M)$, para todo $M \in {}_A\mathbf{Mod}$.

2. Si F es contravariante y exacto por la izquierda, entonces $\mathcal{L}^0F(M) \cong F(M)$, para todo $M \in {}_A\mathbf{Mod}$.

3. Si F es covariante y exacto por la izquierda, entonces $\mathcal{R}_0F(M) \cong F(M)$, para todo $M \in {}_A\mathbf{Mod}$.

4. Si F es contravariante y exacto por la derecha, entonces $\mathcal{R}^0F(M) \cong F(M)$, para todo $M \in {}_A\mathbf{Mod}$.

Demostración. Solo demostraremos el apartado 1. ya que los demás se hacen de manera análoga. Así pues, si F es un funtor covariante y exacto por la derecha, al formar una resolución proyectiva de M y aplicarle F tenemos una sucesión exacta de la siguiente forma

$$F(P_1) \xrightarrow{F(d_1)} F(P_0) \xrightarrow{F(d_0)} M \to 0$$

Por lo tanto, al ser $F(d_0)$ un epimorfismo, $\mathrm{im}F(d_0) = M \cong F(P_0)/\ker F(d_0) = F(P_0)/\mathrm{im}F(d_1) \cong \mathcal{L}_0F(M)$.

□

Un lema muy importante es el siguiente, que nos afirma que los funtores derivados se anulan en proyectivos e inyectivos.

Lema 2.11. Sea $F : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_B\mathbf{Mod}$ un funtor aditivo. Se tiene lo siguiente:

1. Si F es covariante, entonces $\mathcal{L}_nF(P) = 0$, para todo P módulo proyectivo y para todo $n \geq 1$.

2. Si F es contravariante, entonces $\mathcal{L}^n F(P) = 0$, para todo P módulo proyectivo y para todo $n \geq 1$.

3. Si F es covariante, entonces $\mathcal{R}_n F(E) = 0$, para todo E módulo inyectivo y para todo $n \geq 1$.

4. Si F es contravariante, entonces $\mathcal{R}^n F(E) = 0$, para todo E módulo inyectivo y para todo $n \geq 1$.

Demostración. De nuevo sólo demostraremos un apartado, el 1. Sea P proyectivo, entonces

$$... \to 0 \to ... \to 0 \to P \to P \to 0$$

es una resolución proyectiva de P. Aplicamos el funtor F y eliminamos el último término para obtener el complejo siguiente

$$... \to 0 \to ... \to 0 \to F(P) \to 0$$

Por lo tanto, $\mathcal{L}_n F(P) = 0$ para todo P proyectivo y para todo $n \geq 1$. $\square$

Para acabar la sección de funtores derivados vamos a enunciar el teorema de existencia de sucesiones exactas largas a raíz de una sucesión exacta corta.

Teorema 2.12. Sea $F : {}_A\mathbf{Mod} \to {}_B\mathbf{Mod}$ un funtor y sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta corta en ${}_A\mathbf{Mod}$.

1. Si F es un funtor covariante, entonces existe una sucesión exacta larga de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{L}_n F(L) \arrow[r] & \mathcal{L}_n F(M) \arrow[r] & \mathcal{L}_n F(N) \arrow[dll, rounded corners] \\ \mathcal{L}_{n-1} F(L) \arrow[r] & \mathcal{L}_{n-1} F(M) \arrow[r] & \mathcal{L}_{n-1} F(N) \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

2. Si F es un funtor contravariante, entonces existe una sucesión exacta larga de la

siguiente forma

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^n F(L) & \mathcal{L}^n F(M) \arrow[l] & \mathcal{L}^n F(N) \arrow[l] \arrow[dll, hook] \\
\mathcal{L}^{n-1} F(L) & \mathcal{L}^{n-1} F(M) \arrow[l] & \mathcal{L}^{n-1} F(N) \arrow[l]
\end{tikzcd}
\tag{2.5}
$$

Análogamente se tiene la existencia de sucesiones exactas largas con los funtores derivados por la derecha.

Demostración. La demostración de este resultado es tediosa pero simple puesto que, por caza de diagramas, se puede hacer. Por esta razón, como la prueba no aporta nada, no lo vamos a demostrar. No obstante, se puede ver una prueba para el caso 1. en [Rot09, Teorema 6.3]. □

2.3 Ext_A^n y Tor_n^A

En esta sección vamos a comenzar a utilizar los funtores derivados de los funtores Hom y $\otimes$. Para ello, vamos a suponer que el anillo A sobre el que estamos trabajando es un anillo unitario general. De esta forma, podemos asegurar, tal y como hemos visto en el capítulo anterior, que los funtores Hom y $\otimes$ son funtores entre la categoría de A-módulos y la categoría de grupos abelianos **Ab.**

Definición 2.13. [Ext_A^n]. Sea A un anillo y sea $N \in {}_A\mathbf{Mod}$. Consideramos el funtor contravariante $\mathrm{Hom}(-, N)$ y construimos su n-ésimo funtor derivado por la izquierda, denotado por $\mathcal{L}^n\mathrm{Hom}(-, N)$. Definimos entonces el funtor $\mathrm{Ext}_A^n(-, N) := \mathcal{L}^n\mathrm{Hom}(-, N)$.

Es decir, si tenemos $M \in {}_A\mathbf{Mod}$, para construir $\mathrm{Ext}_A^n(M, N)$ lo que se hace es coger una resolución proyectiva de M,

$$... \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to ... \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0$$

le aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}(-,N)$ contravariante y eliminamos el primer término, obteniendo el siguiente complejo

$$... \xleftarrow{d_{n+1}^*} \mathrm{Hom}(P_n,N) \xleftarrow{d_n^*} ... \xleftarrow{d_2^*} \mathrm{Hom}(P_1,N) \xleftarrow{d_1^*} \mathrm{Hom}(P_0,N) \leftarrow 0$$

Finalmente, tomamos el n-ésimo grupo de homología obteniendo que

$$\mathrm{Ext}_A^n(M,N) = \mathcal{L}^n\mathrm{Hom}(-,N)(M) = \ker\, d_{n+1}^*/\mathrm{im}\; d_n^*$$

Otra manera de obtener $\mathrm{Ext}_A^n(M,N)$ es usando los funtores derivados por la derecha, para ello hacemos lo siguiente. Tomamos una resolución inyectiva de N,

$$0 \to N \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \xrightarrow{d_2} ...$$

aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}(M,-)$ covariante y eliminamos el primer término, obteniendo el siguiente complejo.

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,E_0) \xrightarrow{d_{1*}} \mathrm{Hom}(M,E_1) \xrightarrow{d_{2*}} ...$$

Finalmente, tomamos el n-ésimo grupo de homología, obteniendo que

$$\mathrm{Ext}_A^n(M,N) = \mathcal{R}_n\mathrm{Hom}(M,-)(N) = \ker\, d_{n+1*}/\mathrm{im}\; d_{n*}$$

Ambas construcciones proporcionan grupos abelianos $\mathrm{Ext}_A^n(M,N)$ isomorfos, tal y como puede comprobarse en [Rot09].

Definición 2.14. [$\mathbf{Tor}_n^A$]. Sea A un anillo y sea $M \in \mathbf{Mod}_A$. Consideramos el funtor covariante $M \otimes -$ y construimos su n-ésimo funtor derivado por la izquierda, denotado por

$\mathcal{L}_n M \otimes -$. Definimos entonces el funtor $\mathrm{Tor}_n^A(M, -) := \mathcal{L}_n M \otimes -$.

Es decir, si tenemos $N \in {}_A\mathbf{Mod}$, para construir $\mathrm{Tor}_n^A(M, N)$ lo que se hace es coger una resolución proyectiva de N,

$$... \to P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \to ... \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} N \to 0$$

le aplicamos el funtor $M \otimes -$ covariante y eliminamos el primer término, obteniendo el siguiente complejo

$$... \xrightarrow{1 \otimes d_{n+1}} M \otimes P_n \xrightarrow{1 \otimes d_n} ... \to M \otimes P_1 \xrightarrow{1 \otimes d_1} M \otimes P_0 \to 0$$

Finalmente, tomamos el n-ésimo grupo de homología obteniendo que

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = \mathcal{L}_n(M \otimes -)(N) = \ker 1 \otimes d_n / \mathrm{im}\ 1 \otimes d_{n+1}$$

De la misma manera podemos construir el funtor Tor, que proporciona grupos abelianos isomorfos a la anterior construcción, como sigue.

$$\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = \mathcal{L}_n(- \otimes N)(M) = \ker d_n \otimes 1 / \mathrm{im}\ d_{n+1} \otimes 1$$

Unas consecuencias inmediatas que se obtienen de aplicar los resultados estudiados en la sección anterior son las siguientes:

- Si N o M son planos, entonces $\mathrm{Tor}_n^A(M, N) = 0$.
- Si N es inyectivo o M es proyectivo, entonces $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = 0$.

$\mathrm{Ext}(M, N)$ mide cuánto le falta a M para ser un módulo proyectivo y cuánto le falta a N para ser un módulo inyectivo, mientras que $\mathrm{Tor}(M, N)$ mide simultáneamente cuánto le falta a M y a N para ser módulos planos. Más aún, un módulo M es proyectivo si, y solo si, $\operatorname{Ext}_A^n(M,N)=0$ para cualquier otro módulo N; un módulo N es inyectivo si, y solo si, $\operatorname{Ext}_A^n(M,N)=0$ para cualquier otro módulo M; y F es un módulo plano si, y solo si, $\operatorname{Tor}_n^A(F,N)=0$ para cualquer otro módulo N.

Corolario 2.15. Se tiene lo siguiente:

- Si $0\to M\to F\to M'\to 0$ es exacta con F plano, entonces $\operatorname{Tor}_n^A(M,N)\cong \operatorname{Tor}_{n+1}^A(M',N)$, para todo módulo N.
- Si $0\to N\to E\to N'\to 0$ es exacta con E inyectivo, entonces $\operatorname{Ext}_A^n(M,N')\cong \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M,N)$, para todo módulo M.
- Si $0\to M\to P\to M'\to 0$ es exacta con P proyectivo, entonces $\operatorname{Ext}_A^n(M,N)\cong \operatorname{Ext}_A^{n+1}(M',N)$, para todo módulo N.

Demostración. La demostración de cada resultado se realiza usando las sucesiones exactas largas definidas en el teorema 3.12. Así pues, de nuevo, solo se realizará la primera. Por el teorema 3.12, sabemos que existe una sucesión exacta

$$0=\operatorname{Tor}_{n+1}^A(F,N)\to \operatorname{Tor}_{n+1}^A(M',N)\to \operatorname{Tor}_n^A(M,N)\to \operatorname{Tor}_n^A(F,N)=0,$$

donde los extremos son 0 por ser F plano. Por lo tanto, $\operatorname{Tor}_n^A(M,N)\cong \operatorname{Tor}_{n+1}^A(M',N)$. $\square$

2.4
Dimensiones de Anillos

Hasta aquí hemos desarrollado algunas herramientas fundamentales para poder entender los conceptos de las diferentes dimensiones. En esta sección vamos a definir cuatro dimensiones sobre un anillo conmutativo ya que, de esta forma, no trabajaremos por la izquierda ni por la derecha, además de que son las que utilizaremos en el capítulo central del trabajo; no obstante se pueden definir para anillos generales. Estas dimensiones son: la dimensión de Krull, que es más bien un concepto independendiente de las otras; las dimensiones proyectiva, inyectiva y plana; la dimensión global; y la dimensión débil.

Dimensión de Krull

Sea A un anillo conmutativo. Considerada una cadena estrictamente ascendente de ideales primos

$$P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq ... \subsetneqq P_n$$

, se dice que la cadena tiene longitud n. Se define la **dimensión de Krull** de un anillo conmutativo A como el supremo, en caso de que exista, de todas las cadenas estrictamente ascendentes de ideales primos y se denota por $\dim(A)$. Si dicho supremo no existe, se dice que $\dim(A) = \infty$. Incluso verificándose que toda cadena de primos estrictamente ascendente tenga longitud finita, puede ocurrir que la dimensión de Krull no lo sea tal y como podemos observar en el siguiente ejemplo debido a Nagata [Nag75].
Sea $A = k[x_1, x_2, ...]$, donde k es un cuerpo y sea $m_1 > m_2 > ...$ una sucesión creciente de números naturales de manera que $m_{i+1} - m_i > m_i - m_{i-1}$. Consideramos el ideal primo $P_i = (x_{m_i+1}, x_{m_i+2}, ..., x_{m_{i+1}})$ y sea $S = A \setminus \cup_{i \geq 1} P_i$, que es multiplicativamente cerrado porque los $P_i's$ son primos. Se puede demostrar que $S^{-1}P_i$ tiene altura $m_{i+1} - m_i$, por lo que $\dim(S^{-1}A) = \infty$, y que $S^{-1}A$ es noetheriano, por lo que toda cadena de primos estrictamente ascendente tiene longitud finita.

Si ahora A es un anillo local noetheriano, diremos que A es un **anillo local regular** si la dimensión de Krull coincide con el mínimo número de generadores del ideal maximal del anillo o si se tiene la igualdad $\dim(A) = \dim_{A/M}(M/M^2)$, es decir, si la dimensión de Krull coincide con la dimensión del A/M-espacio vectorial M/M^2.
Los anillos locales regulares son los anillos que aparecen como anillos locales de puntos no singulares de variedades algebraicas afines; de así su nombre.

Dimensión Proyectiva

Sea A un anillo conmutativo. Supongamos que $\mathrm{Ext}_A^n(M,-)=0$, para un $n \geq 1$. Esto quiere decir que $\mathrm{Ext}_A^n(M,N)=0$ para cualquier módulo N. Por la propiedad de suficientes inyectivos, sabemos que N se puede sumergir en un módulo inyectivo E, por lo tanto, tenemos la sucesión exacta $0 \to N \to E \to E/N \to 0$. Por el corolario 2.15, $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_A^n(M,E/N)=0$, por lo tanto, $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,-)=0$. Es decir, si $\mathrm{Ext}_A^n(M,-)=0$, entonces $\mathrm{Ext}_A^k(M,-)=0$, para todo $k \geq n$.

Definición 2.16. Sea M un A-módulo. Se define la **dimensión proyectiva** de M como

$$\mathrm{pd}(M)=\mathrm{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,-)=0\}.$$

Nótese que $\mathrm{pd}(M)=0$ implica que $\mathrm{Ext}_A^1(M,-)=0$, por lo que M es un módulo proyectivo ya que, si $0 \to N \to N' \to N'' \to 0$ es una sucesión exacta corta, por el teorema de existencia de sucesiones exactas largas, tenemos una sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Hom}(M,N) \to \mathrm{Hom}(M,N') \to \mathrm{Hom}(M,N'') \to \mathrm{Ext}_A^1(M,N)=0,$$

es decir, $\mathrm{Hom}(M,-)$ es un funtor exacto y, por tanto, M es proyectivo.

De esta forma, una idea intuitiva del significado de dimensión proyectiva puede ser lo que le falta a un módulo para ser proyectivo. Cuanto más baja sea la dimensión proyectiva, más cerca está de conseguir serlo.

Dimensión Inyectiva

La dimensión inyectiva se define de manera análoga a la dimensión proyectiva, por lo tanto, tenemos lo siguiente.

Definición 2.17. Sea N un A-módulo. Se define la **dimensión inyectiva** de M como

$$\mathrm{id}(M)=\mathrm{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Ext}_A^{n+1}(-,N)=0\}.$$

De nuevo, si $\mathrm{id}(N) = 0$, estamos diciendo que N es un módulo inyectivo.

Dimensión Plana

Definición 2.18. Sea N un módulo. Se define la **dimensión plana** de N como

$$\mathrm{fd}(N) = \text{ínf}\{n \geq 0 : \mathrm{Tor}_{n+1}^{A}(-, N) = 0\}.$$

De nuevo, si $\mathrm{fd}(N) = 0$, estamos diciendo que N es un módulo plano.

Dimensión Global

Sea A un anillo conmutativo, para definir la dimensión global del anillo tendremos que ver la dimensión proyectiva de cada A-módulo y tomar el supremo, es decir, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.19. Sea A un anillo conmutativo. Se define la **dimensión global** de A como

$$\mathrm{gldim}(A) = \sup\{\mathrm{pd}(M) : M \text{ es } A\text{-módulo}\}.$$

Si en la definición tomamos solo los módulos con dimensión proyectiva finita estamos calculando la **dimensión proyectiva finitistica** de A, es decir,

$$\mathrm{fpd}(A) = \sup\{\mathrm{pd}(M) : \mathrm{pd}(M) < \infty\}.$$

Cuando no estamos sobre anillos conmutativos surgen los conceptos de dimensión global por la derecha y por la izquierda, dependiendo de si los módulos son A-módulos por la derecha o por la izquierda, sin embargo, en el caso conmutativo, ambas dimensiones coinciden puesto que todos los módulos son módulos por la derecha y por la izquierda.

Dimensión Débil

De manera análoga a la dimensión global, se define la dimensión débil de un anillo A como sigue.

Definición 2.20. Sea A un anillo conmutativo. Se define la **dimensión débil** de A como

$$\operatorname{wdim}(A) = \sup\{\operatorname{fd}(M) : M \text{ es } A\text{-módulo}\}.$$

Para anillos no conmutativos, los conceptos de dimensión débil por la derecha y por la izquierda coinciden tal y como puede comprobarse en la proposición 4.1 de [Osb00], por lo que simplemente se habla de dimensión débil.

Nuestro siguiente cometido es aportar algunos resultados y proposiciones relacionados con las dimensiones que acabamos de ver. Para ello, la primera pregunta que se viene a la cabeza es si la dimensión global se puede definir en términos de dimensión inyectiva. La respuesta nos la da la siguiente proposición.

Proposición 2.21. Se tiene que $\operatorname{gldim}(A) = \sup\{\operatorname{id}(N) : N \text{ es } A\text{-módulo}\}$.

Demostración. Sea $n < \infty$. Entonces $n \geq \operatorname{gldim}(A)$ si, y solo si, $n \geq \operatorname{pd}(M)$ para todo M, si, y solo si, $\operatorname{Ext}_A^{n+1}(M, N) = 0$ para todo N y para todo M, si, y solo si, $n \geq \operatorname{id}(N)$ para todo N. □

La siguiente proposición es de suma importancia puesto que a partir de ella se pueden extraer una gran cantidad de corolarios muy útiles cuando se trabaja de lleno con las diferentes dimensiones. Así pues, se tiene lo siguiente.

Proposición 2.22. Sea $0 \to D \to L_1 \to ... \to L_n \to D' \to 0$ una sucesión exacta y $d \geq 0$. Se satisfacen las siguientes propiedades:

- Si $\operatorname{pd}(L_j) \leq d$ para todo j, entonces $\operatorname{Ext}_A^k(D, N) \cong \operatorname{Ext}_A^{k+n}(D', N)$, para todo módulo N y para todo $k > d$.

- Si $\mathrm{id}(L_j) \leq d$ para todo j, entonces $\mathrm{Ext}_A^k(M, D') \cong \mathrm{Ext}_A^{k+n}(M, D)$, para todo módulo M y para todo $k > d$.

- Si $\mathrm{fd}(L_j) \leq d$ para todo j, entonces $\mathrm{Tor}_k^A(M, D) \cong \mathrm{Tor}_{k+n}^A(M, D')$, para todo módulo M y para todo $k > d$.

Demostración. Como siempre, las pruebas de cada apartado se hacen de manera análoga, por lo que sólo realizaremos la primera. La demostración se hace por inducción en n. Así pues, si $n = 1$, tenemos una sucesión exacta $0 \to D \to L_1 \to D' \to 0$. Por el teorema de existencia de sucesiones exactas largas tenemos, para $k > d$, una sucesión

$$0 = \mathrm{Ext}_A^k(L_1, N) \to \mathrm{Ext}_A^k(D, N) \to \mathrm{Ext}_A^{k+1}(D', N) \to \mathrm{Ext}_A^{k+1}(L_1, N) = 0,$$

donde los extremos son 0 ya que $\mathrm{pd}(L_1) \leq d < k$. Así pues, $\mathrm{Ext}_A^k(D, N) \cong \mathrm{Ext}_A^{k+1}(D', N)$.

Supongamos cierto el resultado para $k \geq n - 1$ y vamos a probarlo para n. Sea $0 \to D \to L_1 \to ... \to L_n \to D' \to 0$ una sucesión exacta y definimos Q como el núcleo de $L_n \to D'$. Entonces tenemos dos sucesiones exactas $0 \to D \to L_1 \to ... \to L_{n-1} \to Q \to 0$ y $0 \to Q \to L_n \to D' \to 0$. Entonces, por la hipótesis de inducción, se tiene que

$$\mathrm{Ext}_A^k(D, N) \cong \mathrm{Ext}_A^{k+(n-1)}(Q, N) \cong \mathrm{Ext}_A^{k+(n-1)+1}(D', N) = \mathrm{Ext}_A^{k+n}(D', N).$$

□

Para poder seguir, supongamos que tenemos una resolución proyectiva de M

$$... \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0.$$

Definimos $K_0 = M$, $K_n = \ker d_{n-1}$, para $n \geq 1$, y lo llamaremos el n**-ésimo núcleo** de la resolución proyectiva de M. Entonces, si fijamos un n, tenemos una nueva resolución (P'_n, d'_n) construida de la siguiente manera: dejamos fijos los P_k con $k < n$, es decir, $P'_k = P_k$

para $k < n$; $P'_n = K_n$; y $P'_k = 0$ para $k > n$, por lo que queda una sucesión $... \to 0 \to K_n \to P_{n-1} \to ... \to P_0 \to M \to 0$. Si, por casualidad, K_n fuera un módulo proyectivo, la nueva resolución de M sería una resolución proyectiva de M.

Teorema 2.23. Teorema de la Dimensión Proyectiva. Sea $M \in {}_A\mathbf{Mod}$, entonces son equivalentes:

1. $\mathrm{pd}(M) \leq n$.

2. El n-ésimo núcleo de una resolución proyectiva de M es proyectivo.

3. Existe una resolución proyectiva de M cuyo n-ésimo núcleo es proyectivo.

4. Existe una resolución proyectiva de M de la forma $... \to 0 \to 0 \to P_n \to P_{n-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$.

Demostración. $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Sea K_n el núcleo de una resolución proyectiva (P_n, d_n) y construimos la resolución comentada anteriormente

$$0 \to K_n \to P_{n-1} \to ... \to P_0 \to M \to 0.$$

Como los P_i son proyectivos, $\mathrm{pd}(P_i) = 0$ y, si aplicamos la proposición 2.22, obtenemos que $\mathrm{Ext}^1_A(K_n, N) \cong \mathrm{Ext}^{n+1}_A(M, N) = 0$ para todo N porque, por hipótesis, $\mathrm{pd}(M) \leq n$. Como $\mathrm{Ext}^1_A(K_n, N) = 0$ para todo N, K_n es proyectivo.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Es trivial.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Por el comentario realizado antes del teorema, tenemos una resolución proyectiva de esa forma.

$\boxed{4. \Rightarrow 1.}$ Como $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(M, N)$ es la homología en $... \leftarrow \mathrm{Hom}(P_{n+1}, N) \leftarrow ...$ y sabemos que existe una resolución proyectiva con $P_{n+1} = 0$, entonces $\mathrm{Ext}^{n+1}_A(M, N) = 0$ para todo N, luego $\mathrm{pd}(M) \leq n$. $\square$

Debido al teorema de la dimensión proyectiva, una manera de calcular $\mathrm{pd}(M)$ es tomar resoluciones proyectivas de M de la forma $... \to 0 \to 0 \to P_n \to P_{n-1} \to ... \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$ y ver cuál es el mínimo n para el que $P_{n+1} = 0$ y $P_n \neq 0$.

Existe un teorema dual para la dimensión inyectiva. De nuevo, supongamos que tenemos una resolución inyectiva de N

$$0 \to N \to E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \to ...$$

Definimos $D_0 = N$ y $D_n = \text{ im } d_n$, y lo llamaremos el **n-ésimo conúcleo** de la resolución inyectiva. Si fijamos un n, definimos una nueva resolución (E'_k, d_k) de manera que $E'_k = E_k$ para $k < n$, $E'_n = D_n$ y $E'_k = 0$ para $k > n$. Así pues, conseguimos una resolución

$$0 \to N \to E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 ... \to E_{n-1} \to D_n \to 0 \to 0 \to ...$$

Teorema 2.24. Teorema de la Dimensión Inyectiva. Sea $N \in {}_A\mathbf{Mod}$, entonces son equivalentes:

1. $\mathrm{id}(N) \leq n$.

2. $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(A/I, N) = 0$ para cualquier ideal I por la derecha de A.

3. El n-ésimo conúcleo de cualquier resolución inyectiva de N es inyectivo.

4. Existe una resolución inyectiva cuyo n-ésimo conúcleo es inyectivo.

5. Existe una resolución inyectiva de la forma $0 \to N \to E_1 \to ... \to E_n \to 0 \to 0 \to ...$

Demostración. $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Trivial por la definición de dimensión inyectiva.

$\boxed{2. \Rightarrow 3.}$ Sea $0 \to N \to E_0 \to ... \to E_n \to ...$ una resolución inyectiva de N y construimos la resolución comentada anteriormente: $0 \to N \to E_0 \to ... \to D_n \to 0$. Entonces, por la proposición 2.22, $\mathrm{Ext}_A^1(A/I, D_n) \cong \ \mathrm{Ext}_A^{n+1}(A/I, N) = 0$, por lo tanto, D_n es inyectivo.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Trivial.

$\boxed{4. \Rightarrow 5.}$ La resolución construida es una resolución inyectiva de la forma pedida ya que D_n es inyectivo.

$\boxed{5. \Rightarrow 1.}$ Como $E_{n+1} = 0$ en la resolución obtenida, la homología en $n+1$ será 0, por lo que $\mathrm{id}(N) \leq n$.

□

La importancia del último teorema radica en que para poder calcular la dimensión inyectiva de un módulo, basta computar los funtores Ext en cada cociente del anillo por sus ideales. Esta idea proporciona el siguiente teorema, debido a Auslander.

Teorema 2.25. Teorema de la Dimensión Global.

$$\mathrm{gldim}(A) = \sup\{\mathrm{pd}(A/I) : I \text{ es un ideal de } A\}$$

Demostración. Sea $n = \sup\{\mathrm{pd}(A/I) : I \text{ es un ideal de } A\}$. Entonces, por definición de dimensión global, $n \leq \mathrm{gldim}(A)$. Supongamos que $n < \mathrm{gldim}(A)$, entonces existe un módulo N tal que $\mathrm{id}(N) > n$. Entonces, por el teorema de la dimensión inyectiva, existe un ideal I de A tal que $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(A/I, N) \neq 0$, llegando a una contradicción, ya que entonces $\mathrm{pd}(A/I) > n$.

□

Un teorema similar al anterior, pero usando la dimensión débil es el siguiente, que no vamos a demostrar ya que la prueba es muy parecida a la del teorema 2.25.

Teorema 2.26. Teorema de la Dimensión Débil.

$$\mathrm{wdim}(A) = \sup\{\mathrm{fd}(A/I) : I \text{ es un ideal de } A\}$$

Corolario 2.27. Supongamos que $\text{gldim}(A) > 0$, entonces

$$\text{gldim}(A) = 1 + \sup\{\text{pd}(I) : I \text{ es un ideal de } A\}$$

Demostración. Tenemos una sucesión exacta $0 \to I \to A \to A/I \to 0$, por lo tanto, $\text{Ext}^n_A(I, N) \cong \text{Ext}^{n+1}_A(A/I, N)$ para cualquier módulo N. Si A/I no fuera proyectivo, entonces se tendría que $n + 1 > \text{pd}(A/I) \iff n > \text{pd}(I)$. Es decir, si A/I no es proyectivo, $\text{pd}(A/I) = 1+ \text{pd}(I)$. Por otro lado, si A/I es proyectivo, entonces $\text{Ext}^1_A(I, N) \cong \text{Ext}^2_A(A/I, N) = 0$, por lo que I es proyectivo y $\text{pd}(I) = 0$. Así pues, en cualquier caso, $1+ \text{pd}(I) \leq \text{gldim}(A)$. Además, si $\text{pd}(A/I) > 0$, se tiene que $\text{pd}(A/I) = 1+ \text{pd}(I)$. Tomando supremos y aplicando el teorema de la dimensión global se tiene el resultado. □

Para finalizar esta sección vamos a enunciar unos teoremas que se usarán más adelante en alguna ocasión. Como la demostración de los siguientes teoremas requiere introducir varios resultados previos y sólo los vamos a utilizar en pasos concretos de algunas demostraciones, no los probaremos.

Teorema 2.28. Sea A un anillo y supongamos que a es un elemento central de A, a es no unidad y a no es divisor de cero. Entonces, si $\text{gldim}(A/(a)) < \infty$, se tiene que que $\text{gldim}(A) \geq 1 + \text{gldim}(A/(a))$.

Demostración. Ver Corolario 5.9 de [Osb00]. □

Teorema 2.29. Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta de A-módulos. Entonces se cumple lo siguiente:

- Si $\text{pd}(M) > \text{pd}(L)$, entonces $\text{pd}(N) = \text{pd}(M)$.
- Si $\text{pd}(M) < \text{pd}(L)$, entonces $\text{pd}(N) = \text{pd}(L) + 1$.
- Si $\text{pd}(M) = \text{pd}(L)$, entonces $\text{pd}(N) \leq \text{pd}(M) + 1$.

Demostración. Ver Teorema 2 de la página 169 de [Kap95]. □

Teorema 2.30. Sean A, B anillos conmutativos, $h : A \to B$ un homomorfismo inyectivo de anillos, I un ideal de A y E un A-módulo. Entonces E es proyectivo como A-módulo si, y solo si, $B \otimes_A E$ es proyectivo como B-módulo y E/EI es proyectivo como A/I-módulo en los siguientes casos:

1. I es un ideal de B.
2. I es nilpotente.

Demostración. Ver Teorema 1.1. de [Vas73]. □

3

Dimensión cero y uno

3.1

Dimensión Cero

En esta sección analizaremos los anillos de dimensión cero. Empezaremos con anillos de dimensión global cero y luego pasaremos a estudiar los anillos de dimensión débil cero. A lo largo de este capítulo trabajaremos con anillos generales, es decir, no tienen porqué ser conmutativos o locales. Así pues, nos vamos a encontrar con anillos semisimples y anillos regulares en el sentido de Von Neumann, como veremos más adelante.

3.1.1. Dimensión global cero

Comenzamos ya con la caracterización de los diferentes anillos según su dimensión global. En primer lugar empezaremos por lo más fácil, los anillos de dimensión global cero. Estos anillos son los anillos semisimples, como veremos a continuación.

Recordemos que un modulo M es simple si sus únicos submódulos son 0 y M, es decir, si no tiene submódulos propios. A partir de esta definición obtenemos la siguiente.

Definición 3.1. Un módulo S es **semisimple** si es una suma de submódulos simples.

Hay una caracterización muy útil de los módulos semisimples y es que un módulo es semisimple si, y solo si, cada submódulo de S es un sumando directo, en particular, S es una suma directa de módulos simples. La demostración de esta afirmación puede encontrarse en la página 23 de [Ste75].

Así pues, diremos que un anillo es **semisimple** si es un módulo semisimple.

Proposición 3.2. Son equivalentes:

1. A es un anillo semisimple.

2. Todos los A-módulos son semisimples.

3. Todos los A-módulos son proyectivos.

4. Todos los A-módulos son inyectivos.

5. Cada ideal de A es un sumando directo de A.

6. (Teorema de Artin-Wedderburn). $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$, donde cada D_i es un anillo de división.

Demostración. $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Como A es semisimple, cada módulo libre es semisimple, pero entonces, cualquier cociente de un módulo es semisimple y como todos los módulos son cocientes de libres, se tiene que todos los módulos son semisimples.

$\boxed{1. \Rightarrow 5.}$ Los ideales son submódulos de A y, como A es semisimple, son sumandos directos de A.

$\boxed{5. \Rightarrow 4.}$ Sea $\varphi : I \to E$ un homomorfismo. Como cada ideal de A es sumando directo, podemos extender el homomorfismo a todo el anillo A de la siguiente forma, $\varphi' : A = I \oplus J \to E$ tal que $\varphi'|_I = \varphi$ y $\varphi'|_J = 0$. Por lo tanto, por el criterio de Baer (2.5), se tiene que cualquier módulo es inyectivo.

$\boxed{4. \Rightarrow 3.}$ Sea $0 \to L \to M \to N \to 0$ una sucesión exacta corta. Como todos los módulos son inyectivos, la sucesión escinde y, por el lema 2.4, N es proyectivo. La arbitrariedad de la sucesión nos permite concluir que todos los módulos son proyectivos.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Es un comentario similar al anterior.

$\boxed{4. \Rightarrow 2.}$ Sea $L \subset M$. Vamos a ver que L es sumando directo. Como la sucesión $0 \to L \to M \to M/L \to 0$ escinde por ser L inyectivo, se tiene el resultado.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Trivial.

$\boxed{1. \Rightarrow 6.}$ Primero notemos que si un módulo S es simple, entonces $\mathrm{End}_A(S)$ es un anillo de división puesto que cualquier automorfismo no nulo de S tiene un inverso ya que es un isomorfismo puesto que se cumple que $\mathrm{Ker} = 0$ e $\mathrm{im} = S$.

Por otro lado, si S es un módulo semisimple, se tiene que $S = \oplus_{i=1}^{k}(\oplus_{j=1}^{n_i} S_{ij})$, donde $S_{ij} \cong S_{i'j'}$ si, y solo si, $i = i'$. Entonces se tiene que $\mathrm{End}_A(S) \cong \mathrm{End}_A(\oplus_{j=1}^{n_1} S_{1j}) \times \cdots \times \mathrm{End}_A(\oplus_{j=1}^{n_k} S_{kj})$ y, como $\mathrm{End}_A(\oplus_{j=1}^{n_i} S_{ij}) \cong M_{n_i}(D_i)$, con $D_i = \mathrm{End}_A(S_{i1})$ un anillo de división; entonces $\mathrm{End}_A(S) \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$

Si ahora sustituimos S por A, como A es semisimple, tenemos que $\mathrm{End}_A(S) \cong A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$

$\boxed{6. \Rightarrow 1.}$

Basta probar que $M_n(D)$ es semisimple cuando D es un anillo de división puesto que así se tendría que A es semisimple ya que, por hipótesis, $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$. Podemos escribir $M_n(D)$ como suma directa de ideales $I_1, ..., I_n$, donde I_j consiste en el ideal formado por las matrices cuyas filas son todo ceros excepto la j-ésima fila. Vamos a ver que I_j es simple como $M_(D)$-módulo. Por un lado, podemos pensar que I_j es un D-módulo en el que se tenga que $I_j = D^n$. La operación de $M_n(D)$ por la derecha puede ser interpretada como D-endomorfismos de I_j. Sea $x \neq 0 \in I_j$. Entonces existe una base B de $I_j = D^n$ tal que $x \in B$. Para cualquier otro $y \in I_j$ definimos el homomorfismo $\alpha : I_j \to I_j$ de manera que $\alpha(x) = y$. Entonces se tiene que $xM_n(D) = I_j$, para cada $x \neq 0 \in I_j$, es decir, I_j es simple y, por tanto, $M_n(D)$ es semisimple.

□

Es decir, un anillo es semisimple si, y solo si, todos sus módulos son proyectivos, por lo que tenemos la caracterización siguiente.

Teorema 3.3. Sea A un anillo tal que $\text{gldim}(A) = 0$, entonces A es un anillo semisimple.

Demostración. Supongamos que A es un anillo con dimensión global cero, es decir,

$$\text{gldim}(A) = 0 = \sup\{\text{pd}(M) : M \text{ es } A\text{-módulo}\}.$$

Entonces, para cada módulo M, $\text{pd}(M) = 0$. Es decir, M es un módulo proyectivo. Por el teorema 3.2, como todos los módulos son proyectivos, el anillo A es un anillo semisimple. □

Particularizando en el caso en que A es un anillo conmutativo de dimensión global cero, tenemos que A es un anillo semisimple conmutativo. Esto es equivalente a decir que A es un producto finito de cuerpos ya que por el teorema de Artin-Wedderburn, $A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k)$ debe ser conmutativo, y esto solo pasa cuando cada $M_{n_i}(D_i)$ es conmutativo. Un anillo de matrices sobre un anillo de división es conmutativo solo cuando el anillo de división D_i es un cuerpo y la dimensión del anillo de matrices es

1, es decir, cuando $M_{n_i}(D_i) \cong K_i$, con K_i un cuerpo. Por lo tanto, cuando A es un anillo conmutativo, $A \cong K_1 \times \cdots \times K_k$ es un producto finito de cuerpos.

Como hemos visto, la caracterización para anillos de dimensión global cero es sencilla de enunciar y demostrar. En capítulos posteriores, cuando estemos trabajando en dimensiones mayores, tendremos que añadir hipótesis sobre el anillo para poder dar un teorema de estructura, es decir, la dificultad del problema aumentará considerablemente. Pues bien, también hay una caracterización fácil para un anillo de dimensión debil cero, pero antes necesitamos un resultado previo.

3.1.2. Dimensión débil cero

Definición 3.4. Un anillo A se dice regular en el sentido de von Neumann si cada $a \in A$, existe un $x \in A$ tal que $a = axa$.

Proposición 3.5. Son equivalentes:

1. A es regular en el sentido de von Neumann.
2. Cada ideal principal está generado por un elemento idempotente.
3. Cada ideal finitamente generado está generado por un elemento idempotente.
4. Cada módulo es plano

Demostración. $\boxed{1. \Rightarrow 2.}$ Supongamos que A es regular y sea $(a) \subset A$ un ideal principal. Como A es regular, existe un $x \in A$ tal que $a = axa$. Entonces se tiene que $(a) = (ax)$, con ax idempotente porque $(ax)^2 = axax = ax$.

$\boxed{2. \Rightarrow 1.}$ Sea $a \in A$. Por hipótesis, sabemos que existe un elemento idempotente $e \in A$ tal que $(e) = (a)$. Entonces, $e = ax$, para cierto $x \in A$ y $a = ea = axa$.

$\boxed{1. \Rightarrow 3.}$ Es suficiente probar que si $e, f \in A$ son elementos idempotentes, entonces el ideal $(e) + (f)$ es un ideal principal ya que como 1. es equivalente a 2., ese ideal estará generado por un elemento idempotente. Así pues, se tiene que $(e)+(f) = (e)+(f-ef)$ y, si tomamos $x \in A$ tal que $f - ef = (f - ef)x(f - ef)$, entonces el elemento $f' = (f - ef)x$ es idempotente con $ef' = 0$ y $(e) + (f) = (e) + (f')$. Pero entonces, $e = (e + f' - f'e)e$ y $f' = (e + f' - f'e)f$, por lo que $(e) + (f') = (e + f' - f'e)$, es decir, $(e) + (f)$ es principal.

$\boxed{3. \Rightarrow 4.}$ Como cada ideal finitamente generado está generado por un elemento idempotente, entonces cada ideal finitamente generado es un sumando directo de A. Pero entonces, para cualquier módulo M y cualquier ideal finitamente generado, la aplicación $I \otimes M \to M$ es un monomorfismo, pero esto lo mismo que decir que M es plano.

$\boxed{4. \Rightarrow 1.}$ Supongamos que todos los módulos son planos. Entonces, A/I es plano para cualquier ideal I de A. Sea J otro ideal de A, entonces $J \otimes A/I \to A/I$ es un monomorfismo, pero como $J \otimes A/I \cong J/JI$, entonces la aplicación $J/JI \to A/I$ es monomorfismo, es decir, $I \cap J = JI$. Si tomamos ahora $I = (a), J = (a)$, se tiene que $(a) = (a) \cap (a) = (a)(a)$, es decir, $a = axa$, para algún $x \in A$.

$\square$

Teorema 3.6. Sea A un anillo tal que $\mathrm{wdim}(A) = 0$, entonces A es un anillo regular en el sentido de von Neumann.

Demostración. Es un argumento similar al del teorema 3.3, como $\mathrm{wdim}(A) = 0$, cualquier módulo M tiene dimensión plana cero, es decir, es plano y, por la proposición anterior, A es un anillo regular en el sentido de von Neumann.

$\square$

En el caso en que A sea un anillo conmutativo de dimensión débil cero, se tiene que A es un anillo conmutativo regular en el sentido de von Neumann. Esto equivale a decir que A_M es un cuerpo para cada M maximal de A tal y como demostró Kaplansky. Otra consecuencia que obtenemos es que un dominio conmutativo de dimensión débil cero es un cuerpo ya que es regular en el sentido de von Neumann y se tiene, por tanto, que $axa = a \Rightarrow a(xa - 1) = 0 \Rightarrow xa = 1$, para todo $a \in A$.

Un ejemplo típico de anillo de dimensión débil cero y dimensión global distinta de cero es $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Este anillo no puede tener dimensión global cero puesto que es conmutativo y no es un producto finito de cuerpos. Por otro lado, se puede probar que si hacemos la localización por cada maximal obtenemos cuerpos, es decir, $\mathrm{wdim}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) = 0$.

3.2 Dimensión Uno

En esta sección vamos a estudiar los anillos de dimensión global uno. Los anillos que vamos a estudiar son generales como en el capítulo anterior, es decir, pueden ser cualquier anillo, independientemente de si son conmutativos, locales, etc.

3.2.1. Dimensión global uno

Los anillos de dimensión global uno son los llamados anillos hereditarios, un concepto que vamos a definir a continuación.

Definición 3.7. Un anillo A es **hereditario** por la derecha si sus ideales por la derecha son proyectivos.

Teorema 3.8. Sea A un anillo. Entonces, $\mathrm{gldim}(A) \leq 1$ si, y solo si, A es hereditario.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\mathrm{gldim}(A) = 0$, entonces A es semisimple por el teorema 3.3 y, por tanto, por la proposición 3.2, todos los módulos son proyectivos, en particular, los ideales. Así pues, supongamos que $\mathrm{gldim}(A) = 1$ y sea I un ideal de A. Consideramos la siguiente sucesión exacta

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

Como $\mathrm{gldim}(A) = 1$, entonces $\mathrm{pd}(A/I) \leq 1$ y, por el teorema de la dimensión proyectiva, se tiene que I es proyectivo, es decir, A es un anillo hereditario.

$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, supongamos que A es un anillo hereditario, es decir, cualquier ideal I es proyectivo. Entonces tenemos una resolución proyectiva de A/I ya que tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

donde I y A son proyectivos, es decir, $\mathrm{pd}(A/I) \leq 1$ para todo ideal I. Por el teorema de la dimensión global 2.25, $\mathrm{gldim}(A) = \sup\{\mathrm{pd}(A/I)\} \leq 1$. □

Si el anillo A fuera un dominio conmutativo de dimensión global 1, entonces A sería un dominio conmutativo hereditario. Esto es lo mismo que decir que A es un dominio de Dedekind, es decir, cualquier ideal se puede expresar de manera única como un producto finito de ideales primos.

3.2.2. Dimensión débil uno

Al igual que en la sección anterior demostramos que los anillos de dimensión global menor o igual que uno son los anillos cuyos ideales son proyectivos, en esta sección vamos a demostrar que los anillos de dimensión débil menor o igual que uno son anillos cuyos ideales son planos.

Teorema 3.9. Sea A un anillo. Entonces, $\mathrm{wdim}(A) \leq 1$ si, y solo si, cada ideal de A es plano.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que A es un anillo de dimensión débil menor o igual que uno. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

Como $\mathrm{wdim}(A) \leq 1$, entonces $\mathrm{fd}(A/I) \leq 1$ y, por el teorema de la dimensión plana, se tiene que I es un ideal plano.

$\boxed{\Leftarrow}$ Recíprocamente, supongamos que todos los ideales de A son planos, entonces tenemos una resolución plana de la forma

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0$$

con I y A planos, es decir, $\mathrm{fd}(A/I) \leq 1$ para cualquier ideal I de A. Por el teorema de la dimensión débil, se tiene que $\mathrm{wdim}(A) \leq 1$. $\square$

Cuando A es un dominio conmutativo de dimensión débil 1, entonces A es un dominio de Prüfer ya que, como se puede ver en la proposición 1.2 de [Vas76], se tiene que A_P es un anillo de valoración, para cada ideal primo P, y esto es equivalente a decir que A es un dominio de Prüfer.

4

Dimensión global dos

En este capítulo estudiaremos la clasificación de los anillos conmutativos y locales de dimensión global dos. Como ya se comentó anteriormente, estos anillos están perfectamente clasificados en anillos locales regulares, anillos de valoración o anillos paraguas. Antes de comenzar a fondo con la demostración del teorema vamos a necesitar algunas definiciones y teoremas que serán indispensables en la prueba. Así pues, comenzamos con las definiciones de los diferentes anillos descritos.

4.1

Definiciones y Teoremas Previos

Definición 4.1. Sea A un anillo local noetheriano, diremos que A es un **anillo local regular** si la dimensión de Krull de A coincide con el mínimo número de generadores del ideal maximal del anillo. Se puede demostrar que un anillo es local regular si se tiene la igualdad $\dim(A) = \dim_{A/M}(M/M^2)$, es decir, si la dimensión de Krull coincide con la dimensión del A/M-espacio vectorial M/M^2.

Definición 4.2. Un dominio A es un **anillo de valoración** si para cualquier elemento $x \in qf(A)$, se tiene que $x \in A$ o $x^{-1} \in A$. Esto significa que para cualesquiera $a, b \in A$, se tiene que $a/b \in A$ o $b/a \in A$, es decir, si a divide a b o b divide a a. Una consecuencia que se desprende de la definición es que, en un anillo de valoración, los ideales están totalmente ordenados por la inclusión, es decir, si I, J son idelaes de A, entonces $I \subset J$ o $J \subset I$.

Definición 4.3. Un anillo local A es un **anillo paraguas** si A es un dominio que contiene un ideal primo P de manera que se cumple lo siguiente:

1. $P = PA_P$, es decir, P es divisible por todos los elementos fuera de P. Esto significa que para cualesquiera $p \in P, s \notin P$, existe $q \in P$ tal que $p = qs$.

2. A/P es un anillo local regular de dimensión dos.

3. A_P es un dominio de valoración de dimensión global uno o dos.

4. A solo tiene una cantidad contable de ideales primos principales.

El nombre de anillo paraguas se debe a la peculiar forma que tiene la distribución de los ideales primos tal y como veremos más adelante. Este concepto fue introducido por Wolmer Vasconcelos en su artículo [Vas76] y Brian Greenberg continuó el estudio de estos anillos en su artículo [Gre74], dando caracterizaciones de dichos anillos mediante el uso de pullbacks.

Definidos ya los tres tipos de anillos que nos vamos a encontrar cuando tengamos dimensión global dos, vamos a pasar a estudiar algunos teoremas que, de nuevo, serán de gran utilidad e importancia para poder demostrar el teorema de caracterización. Debido a la complejidad de las demostraciones de cada uno de los siguientes teoremas, las pruebas se van a omitir. No obstante, se mostrarán las fuentes bibliográficas donde poder ver dichas demostraciones.
Empezamos con un resultado debido a Irving Kaplansky.

Teorema 4.4. [Irving Kaplansky] Cualquier módulo proyectivo sobre un anillo local es libre.

Demostración. Ver [Kap58]. □

Seguidamente vamos a enunciar un teorema debido a Lindsay Burch que dice lo siguiente. Supongamos que tenemos un ideal finitamente generado I que contiene a un divisor de cero y admite una resolución de la forma $0 \to A^{n-1} \xrightarrow{u} A^n \to I \to 0$. Entonces, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.5. [Lindsay Burch] El ideal I mencionado anteriormente se puede escribir como $I = dD$, donde d es un elemento regular de A y D es el ideal generado por los menores de orden $n-1$ de la matriz u.

Demostración. La extensa prueba de este teorema se puede encontrar en [Bur68]. □

Proposición 4.6. Se tiene lo siguiente:

1. Un anillo conmutativo y coherente con $\text{fpd}(A) = 0$ es artiniano.

2. Un dominio coherente A con $\text{fpd}(A) = 1$ es noetheriano.

Demostración. Ver Proposición 1.11 y 1.12 de [Vas76]. □

Teorema 4.7. [I.S. Cohen] Un anillo conmutativo en el que todos sus ideales primos son finitamente generados es noetheriano

Demostración. Ver Teorema 8.10 de [Sha00]. □

Proposición 4.8. Un anillo noetheriano conmutativo de dimensión global finita es regular.

Demostración. Ver Proposición 4.5 de [AB57]. □

Teorema 4.9. Sea T un conjunto multiplicativamente cerrado de $A\backslash\{0\}$ tal que $T \cap J(A) \neq \emptyset$. Sea M el submodulo de $qf(A)$ generado por $T^{-1} = \{\frac{1}{t}, t \in T\}$. Entonces, $\mathrm{pd}(M) = 1$ si, y solo si, M es contablemente generado.

Demostración. Ver Teorema 6.2 de [Oso68]. □

4.2 Teorema de Clasificación de Anillos Locales de Dimensión Global Dos

El teorema que exponemos aquí es debido a W. Vasconcelos. Podemos encontrar una demostración bastante esquemática en [Vas76]. Como esta es la sección central de todo el trabajo, nosotros daremos una prueba completa, por lo que haremos todos los comentarios necesarios para que un lector con unos conocimientos "básicos" de álgebra conmutativa pueda entenderla.

Teorema 4.10. [Anillos locales de dimensión global dos]. Sea A un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$. Entonces A es uno de los siguientes anillos:

- Un anillo de valoración.

- Un anillo local regular.

- Un anillo paraguas.

Antes de proceder a demostrar este teorema vamos a hacer una serie de observaciones sobre los anillos locales conmutativos de dimensión global dos.

Lema 4.11. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces A es un dominio.

Demostración. Sea $0 \neq f \in A$ y consideremos la sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Ann(f) \arrow[r] & A \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & A \arrow[r] & A/Af \arrow[r] & 0 \\
& & & Af \arrow[ur, tail] & & &
\end{tikzcd}$$

Como sabemos que $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces $\mathrm{pd}(A/Af) \leq 2$ y, por el teorema de la dimensión proyectiva (Teorema 2.23), $Ann(f)$ es proyectivo. Por el teorema 4.4, $Ann(f)$ es un módulo libre, por lo que necesariamente $Ann(f) = 0$, es decir, A es un dominio. □

Lema 4.12. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces A es coherente.

Demostración. Si I es un ideal finitamente generado de A, entonces existe una sucesión exacta $0 \to K \to A^n \to I \to 0$. Como $\mathrm{gldim}(A) = 2$, por el corolario 2.27, para cualquier ideal I de A se tiene que $\mathrm{pd}(I) \leq 1$ por lo que, aplicando de nuevo el teorema de la dimensión proyectiva, K es un módulo proyectivo sobre un anillo local, es decir, K es un módulo libre de rango a lo sumo n. Por lo tanto, A es un anillo coherente. □

Lema 4.13. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces A es un dominio GCD.

Demostración. Sean $a, b \in A$ elementos distintos de cero. Consideramos la sucesión

$$0 \to K \to A^2 \xrightarrow{\phi} (a, b) \to 0,$$

donde $\phi(1,0) = a$ y $\phi(0,1) = -b$. Por el mismo comentario realizado en el lema 4.12, K es un módulo libre de rango a lo sumo 2. Sin embargo, como $\phi(1,0) = a \neq 0$, K no puede tener rango 2. Por otro lado, $\phi(b,a) = ab - ba = 0$, por lo que K no puede tener rango 0. Es decir, K es un módulo libre de rango 1 y, por tanto, está generado por un elemento, digamos $(\beta,\alpha) \in K$. Como $(b,a) \in K$, entonces existe $\delta \in A$ tal que $(b,a) = \delta(\beta,\alpha)$. Vamos a ver que δ es el máximo común divisor de a y b. Como $b = \delta\beta$ y $a = \delta\alpha$, entonces δ divide a a y a b. Supongamos que existe otro divisor η de a y de b, es decir, $a = \eta a'$ y $b = \eta b'$, con $a', b' \in A$. Entonces se tiene que, $\delta\alpha = \eta a'$ y $\delta\beta = \eta b'$. Ahora bien, $\phi(b',a') = ab' - ba' = \eta a'b' - \eta b'a' = 0$, por lo que $(b',a') \in K$, es decir, existe un $\epsilon \in A$ tal que $(b',a') = \epsilon(\beta,\alpha)$. Finalmente, combinando igualdades llegamos a que $\delta\beta = b = \eta b' = \eta\epsilon\beta$ y, como A es un dominio, $\delta = \eta\epsilon$, por lo que η divide a δ, demostrando que δ es un máximo común divisor de a y b.

□

En lo que sigue, denotaremos por $[a,b] = \delta$ al máximo común divisor de a y b. Por otro lado, si $a = \delta\alpha$ y $b = \delta\beta$, entonces $\{\alpha,\beta\}$ forman una sucesión regular, es decir, si $r\alpha = s\beta$, entonces $r \in (\beta)$ y $s \in (\alpha)$. Veámoslo. Supongamos que $r\alpha = s\beta$, entonces $ra = r\delta\alpha = \delta s\beta = sb$, por lo que $ra - sb = 0$, es decir, $\phi(r,s) = 0 \Rightarrow (r,s) \in K \Rightarrow$ existe un $t \in A$ tal que $(r,s) = t(\beta,\alpha)$ y ya tendríamos que $r \in (\beta)$ y $s \in (\alpha)$.

Lema 4.14. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$ y el ideal maximal M es principal, entonces A es un anillo de valoración.

Demostración. Para ver que A es anillo de valoración tenemos que ver que para cualesquiera elementos $a, b \in A$, se tiene que $a|b$ o $b|a$. Supongamos que $M = (d)$ y sean $a, b \in A$ no unidades ya que, si alguno fuera unidad, se tendría trivialmente. Así pues, al no ser unidades, están contenidos en un ideal maximal y, como A es local, $a, b \in M$. Sea $\delta = [a,b]$, por lo que $a = \delta\alpha$ y $b = \delta\beta$. Si demostramos que α es unidad entonces $a\alpha^{-1} = \delta$, luego $b = \delta\beta = a\alpha^{-1}\beta$, por lo que $a|b$. Análogamente se tendría si β fuera unidad. Así pues, supongamos que ni α ni β son unidades. Por el comentario anterior, $\alpha, \beta \in M = (d)$, por lo que $\alpha = sd$ y $\beta = rd$ para ciertos $r, d \in A$, pero entonces, $r\alpha = rsd = s\beta$ y, por el comentario de arriba, $r \in (\beta)$, es decir, $r = r'\beta$, con $r' \in A$. Por lo tanto, $\beta = rd = r'\beta d$ y, como A es dominio, $r'd = 1$, por lo que d es unidad, llegando a una contradicción, pues $M = (d)$ es maximal propio. □

Lema 4.15. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$ y el ideal maximal M no es finitamente generado, entonces A es un anillo de valoración.

Demostración. Sean $a, b \in M$. Basta ver que el ideal $(\alpha, \beta) = A$ ya que, entonces, α o β serían unidades y se tendría que $a|b$ o $b|a$. Veamos esta afirmación. Si $(\alpha, \beta) = A$, entonces existen $r, s \in A$ tal que $1 = r\alpha + s\beta$ y, si α y β fueran no unidades, entonces $r\alpha + s\beta = 1$ sería no unidad. Contradicción. Así pues, veamos que $(\alpha, \beta) = A$. Supongamos que no, entonces $(\alpha, \beta) \subset M$. Como $\{\alpha, \beta\}$ forman una sucesión regular, α es no unidad y no divisor de cero. Por el teorema 2.28, si $\mathrm{gldim}(A/(\alpha)) = n$, entonces $\mathrm{gldim}(A) \geq 1+n$. Como $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces necesariamente $\mathrm{gldim}(A/(\alpha)) \leq 1$. De nuevo, por el mismo teorema, como β es no unidad y no divisor de cero en $A/(\alpha)$, $\mathrm{gldim}(A/(\alpha, \beta)) \leq 0$. Esto implica que $\mathrm{fpd}(A/(\alpha, \beta)) = 0$ y, como A es coherente por el lema 4.12 y (α, β) es finitamente generado, entonces $A/(\alpha, \beta)$ es un anillo coherente. Por la proposición 4.6, $A/(\alpha, \beta)$ es artiniano, en particular, su ideal maximal $M/(\alpha, \beta)$ es finitamente generado. Contradicción, por lo que $(\alpha, \beta) = A$ y, por tanto, A es un dominio de valoración. □

Nota: A partir de aquí y salvo que se diga lo contrario, el ideal maximal M lo consideraremos finitamente generado.

Lema 4.16. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$ y el ideal maximal M es finitamente generado y no principal, entonces M está generado por dos elementos.

Demostración. Supongamos que M está generado por $x_1, ..., x_n \in M$ con n mínimo. Por el mismo argumento utilizado en el lema 4.13, $\mathrm{pd}(M) = 1$, por lo que existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \to A^{n-1} \xrightarrow{u} A^n \to M \to 0$$

Por el teorema 4.5, $M = d(d_1, ...d_n)$, donde los $d_i's$ son los menores de orden $n-1$ de la matriz u. Ahora bien, todos los coeficientes de u están en M puesto que si algún u_{ij} fuera unidad, podríamos hacer un cambio de base para que la nueva matriz u tuviera la fila i y la columna j con ceros excepto u_{ij} que sería 1 y, entonces, el menor obtenido eliminando la columna j valdría 0 puesto que la fila i estará llena de ceros, por lo que M estaría generado por $n-1$ elementos, contradiciendo la minimalidad de n. Por otra parte, se tiene que $d_i \in M^{n-1}$ por ser la suma de productos de $n-1$ elementos de M y, como $M = d(d_1, ..., d_n)$, se tiene que $M = M^{n-1}$. Por el lema de Nakayama, si $n > 2$, como $M = M^{n-1} = M^{n-2}M$ y M es finitamente generado y $M^{n-2} \subset M = J(A)$, entonces $M = 0$. Contradicción porque M es maximal propio, es decir, $n = 2$. □

Lema 4.17. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces cada ideal primo $P \neq M$ es unión directa de sus ideales principales.

Demostración. Como sabemos que cada ideal P es el límite directo de los ideales finitamente generados contenidos en P, basta ver que para dos elementos $a, b \in P$, su máximo común divisor $\delta = [a, b]$ está en P ya que así los ideales finitamente generados serían principales y, por tanto, P sería la unión directa de sus ideales principales. Así pues, sean $a, b \in P$ y sea $\delta = [a, b]$. Vamos a probar que $\delta \in P$. Si esto no fuera así, como $a = \delta\alpha \in P$, $b = \delta\beta \in P$, P es primo y $\delta \notin P$, se tendría que $(\alpha, \beta) \subset P$. Por el mismo argumento usado en el lema 4.15, se tendría que $A/(\alpha, \beta)$ es un anillo artiniano, pero entonces $P/(\alpha, \beta)$, que es primo, sería un ideal maximal en $A/(\alpha, \beta)$. Contradicción pues, entonces, P sería maximal en A, pero el único maximal de A es $M \neq P$. □

Lema 4.18. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces cada ideal no finitamente generado está contenido en cada ideal finitamente generado.

Demostración. Se ha visto en el lema 4.17 que los ideales primos finitamente generados son

ideales principales puesto que el máximo común divisor de todos sus generadores está en el propio ideal. Sea ahora $P \neq M$ un ideal primo no finitamente generado y sea (d) un ideal primo principal. Vamos a ver que $P \subset (d)$. Supongamos que no se cumple esto, es decir, $P \not\subseteq (d)$. Como A es coherente y (d) es finitamente generado, $A/(d)$ es un anillo coherente con $\mathrm{fpd}(A/(d)) = 1$ y, por la proposición 4.6, $A/(d)$ es un anillo noetheriano. Como $(d) \subset (P, d)$, entonces $(P, d)/(d) \subset A/(d)$ es finitamente generado y, como (d) también es finitamente generado, se tiene que (P, d) es finitamente generado. Pongamos que $(P, d) = (p_1, ..., p_n, d)$ con $p_i \in P$, entonces si $p = [p_1, ..., p_n]$ se cumple que $(P, d) = (p_1, ..., p_n, d) = (p, d)$.
Si p no genera a P, como P es la unión directa de sus ideales principales, se tendría que existe un $q \in P$ tal que $(p) \subsetneq (q) \subset P$. Es decir, $p = qr$, con r no unidad puesto que si lo fuera se tendría que $(p) = (q)$. Como $q \in P \subset (P, d) = (p, d)$, existen $t, v \in A$ tal que $q = tp + vd = trq + vd$, por lo que $(1 - tr)q = vd$ y, como A es local, $(1 - tr)$ es unidad, por lo que $q \in (d)$, luego $p = qr \in (d)$ y llegamos a una contradicción pues $(P, d) = (d)$ y, por lo tanto se tendría que $P \subset (d)$. □

Lema 4.19. Si A es un anillo local conmutativo tal que $\mathrm{gldim}(A) = 2$, entonces los ideales primos no finitamente generados están totalmente ordenados por la inclusión.

Demostración. Supongamos que existen P, Q ideales primos no finitamente generados y no comparables, es decir, existen $a \in P \setminus Q$ y $b \in Q \setminus P$. Consideramos el máximo común divisor de a y b, $\delta = [a, b]$. Entonces se tiene que $a = \delta\alpha \in P \setminus Q$ y $b = \delta\beta \in Q \setminus P$, pero como δ no puede pertenecer ni a P ni a Q, se tiene que $\alpha \in P, \beta \in Q$, luego $(\alpha, \beta) \subset P + Q$. Por otro lado, como M es finitamente generado, $M \neq M^2$ ya que, por el lema de Nakayama, si $M = M^2 = MM = J(A)M$, se tendría que $M = 0$. Así pues, sea $d \in M \setminus M^2$. Entonces el ideal (d) es un ideal primo ya que, como $d \in M \setminus M^2$, d es un elemento irreducible y, al ser A un GCD por el lema 4.13, d es un elemento primo, por lo que (d) es primo. Por el lema 4.18, $P + Q \subset (d)$, pero entonces se tiene que $\alpha, \beta \in (d)$, es decir, $\alpha = dx$,$\beta = dy$, por lo que d divide a $[\alpha, \beta]$. Sin embargo, $[\alpha, \beta]$ es una unidad; veámoslo. Sea $\gamma = [\alpha, \beta]$ con $\alpha = \gamma A$, $\beta = \gamma B$. Entonces $a = \delta\alpha = \delta\gamma A$, $b = \delta\beta = \delta\gamma B$, luego $\delta\gamma$ divide a δ por ser máximo común divisor, por lo que necesariamente γ es unidad.

Así pues, d sería una unidad; contradicción, por lo que P y Q son comparables. $\square$

Volvamos a retomar el teorema 4.10 de clasificación de anillos locales conmutativos de dimensión global dos y hagamos la demostración con la ayuda de todos estos lemas.

$\boxed{\textit{\textbf{Demostración del Teorema 4.10}}}$. Si se cumple que el ideal maximal M es principal o que no es finitamente generado, entonces estamos ante las hipótesis de los lemas 4.14 o 4.15 y, por tanto, A es un ***anillo de valoración.***

Supongamos ahora que M es finitamente generado y no principal. Se cumplen entonces los lemas 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19.

Sea $P = \cup_{i \in I} P_i$ la unión de todos los ideales primos no finitamente generados. Por el lema 4.19, sabemos que P es un ideal de A. Además, P es un ideal primo ya que si $xy \in P$, entonces para algún $i \in I$, $xy \in P_i$ y, como P_i es primo, $x \in P_i \subset P$ ó $y \in P_i \subset P$.

Si $P = 0$, entonces A solo tiene ideales primos finitamente generados y, por el teorema 4.7, A es un anillo noetheriano. Por otro lado, el teorema 4.8 nos dice que A es un anillo local regular ya que A es un anillo noetheriano conmutativo con dimensión global finita. Por lo tanto, si $P = 0$, entonces A es un ***anillo local regular.***

Vamos a ver que si $P \neq 0$, entonces A es un ***anillo paraguas.***

La distribución del espectro primo de un anillo local de dimensión global dos con maximal M generado por dos elementos y con ideales primos no finitamente generados se puede ver en la figura 4.1. Como vemos, el ideal maximal M está en el primer nivel puesto que contiene a todos los ideales primos ya que estamos en un anillo local. Por otro lado, los ideales finitamente generados están en el segundo nivel puesto que son principales y contienen a todos los ideales no finitamente generados. Seguidamente está el ideal P, que no es finitamente generado y contiene a todos los ideales no finitamente generados. Además, los ideales no finitamente generados están ordenados por la inclusión, por lo que el espectro primo tiene forma de “paraguas”. A la vista de esta imagen, a W. Vasconcelos se lo ocurrió llamar a los anillos que cumplen estas propiedades anillos paraguas. Ahora vamos a ver que, en realidad, se cumplen todas las hipótesis de la definición 4.3 cuando $P \neq 0$.

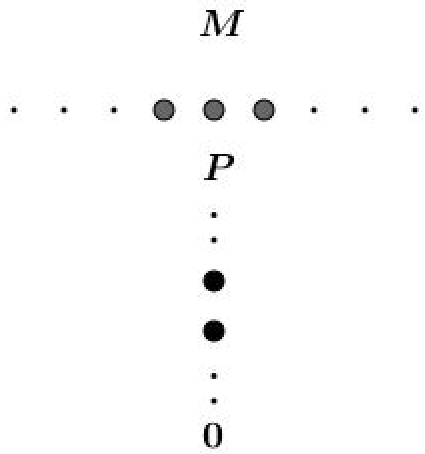

Figura 4.1: Anillo Paraguas

- *A/P es un anillo local regular de dimensión dos:* como los ideales primos de A/P se corresponden con los ideales primos de A que contienen a P, que son finitamente generados por el lema 4.18., entonces los ideales primos de A/P son finitamente generados y, por el teorema 4.7, A/P es un anillo noetheriano y local, por ser A local. Vamos a ver que es regular. Como los ideales primos de A/P conservan las inclusiones de los ideales primos de A que contiene a P, a lo sumo se puede hacer una cadena ascendente de ideales primos de longitud dos, que es el mínimo número de generadores del ideal maximal M/P, luego A/P es un anillo local regular de dimensión dos.

- $P = PA_P$: vamos a ver que para todo $p \in P$ y para todo $s \notin P$, existe un $q \in P$ tal que $p = qs$. Si $\delta = [p, s] \neq 1$, entonces existen $\alpha, \beta \in A$ tal que $p = \delta\alpha \in P$, $s = \delta\beta \notin P$, pero entonces, $\alpha \in P$ y $\beta \notin P$, de donde se tiene que $\frac{p}{s} = \frac{\alpha}{\beta}$. Por lo tanto, basta probar el resultado para $[p, s] = 1$. Si $s \notin M$, s sería una unidad y, por tanto, se tendría que $p = (ps^{-1})s$. Así pues, supongamos que $s \in M$ y sea Q un ideal primo minimal sobre (s), es decir, $(s) \subset Q$. Como $s \notin P$, entonces el ideal primo Q tiene que ser finitamente generado y, por tanto, $P \subset Q$. El ideal Q/P es minimal sobre $(s+P)$ y, por el teorema del ideal principal de Krull, $ht(Q/P) = 1$. Como $ht(M/P) = 2$, entonces $Q/P \neq M/P$, por lo que $Q \neq M$. Como los ideales primos no maximales finitamente generados son principales, se tiene que $Q = (d)$. Si $d \notin (s)$, como $P \subset Q$, entonces $d|p$ y $s = ds''$, por lo que $d|[p,s] = 1$, contradicción. Así pues, $d \in (s)$, por lo que $(s) = Q$ es primo y, por lo tanto $P \subset (s)$ y se tendría el resultado.

- *A_P es un anillo de valoración de dimensión global uno o dos:* para demostrar que A_P es un anillo de valoración vamos a probar que A_P es un GCD y que sus ideales primos están totalmente ordenados. Después demostraremos que estas dos condiciones son suficientes para ser anillo de valoración y ya lo tendremos.

  Tenemos que probar que A_P es GCD. Sean $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in A_P$ y sea $\delta = [a,b] \in A$. Entonces $a = \delta\alpha, b = \delta\beta$, luego $\frac{a}{s} = \frac{\delta\alpha}{s} = \frac{\delta}{1}\frac{\alpha}{s}$ y $\frac{b}{t} = \frac{\delta\beta}{t} = \frac{\delta}{1}\frac{\beta}{t}$, es decir, $\frac{\delta}{1}$ es un común divisor de $\frac{a}{s}, \frac{b}{t}$. Supongamos que $\frac{a}{s} = \frac{g}{g'}\frac{x}{y}, \frac{b}{t} = \frac{g}{g'}\frac{x'}{y'}$, vamos a probar que $\frac{g}{g'}$ divide a $\frac{\delta}{1}$. Por un lado tenemos que $a = gx$, $b = gx'$ y, como A es un GCD, g divide a δ, es decir, $gz = \delta$. Pero entonces, $\frac{g}{g'} = \frac{gz}{g'z} = \frac{\delta}{g'z} = \frac{\delta}{1}\frac{1}{g'z}$, por lo que A_P es un GCD.
  Por otro lado, los ideales primos de A_P se corresponden y guardan inclusiones con los ideales primos de A contenidos en P, que están totalmente ordenados por 9., por lo que los ideamos primos de A_P están totalmente ordenados.

  Vamos a demostrar ahora que A_P es un anillo de valoración, es decir, dados dos elementos cualesquiera, uno divide a otro . Sean $a, b \in A_P$ en su ideal maximal, ya que si fueran unidades, se tendría trivialmente. Como A_P es GCD, consideramos $\delta = [a,b]$, con $a = \delta\alpha, b = \delta\beta$. Al igual que en el lema 4.14, vamos a probar que α o β es unidad. Si esto no fuera así, entonces α y β formarían una sucesión regular y estarían en el ideal maximal de A_P. Sean $P = \sqrt{(\alpha)}$ y $Q = \sqrt{(\beta)}$ los ideales radicales. Por hipótesis, uno está contenido en el otro, supongamos que es $\sqrt{(\alpha)} \subset \sqrt{(\beta)}$, entonces como $\alpha \in P \subset Q$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^n \in (\beta)$, es decir, existe un t tal que $\alpha^n = t\beta$. Pero entonces $(\alpha + (\beta))^n = 0$ en $A_P/(\beta)$, luego α y β no forman una sucesión regular, contradicción. Por lo que A_P es un anillo de valoración.

Finalmente falta demostrar que la dimensión global de A_P es uno o dos. Sea L un A_P-módulo, en particular, L es un A-módulo por restricción de escalares. Como $\mathrm{gldim}(A) \leq 2$, $\mathrm{pd}_A(L) \leq 2$, es decir, existe una sucesión exacta de la forma

$$0 \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to L \to 0$$

con los $F_i's$ libres y, como A_P es un módulo plano, obtenemos una sucesión exacta de la forma

$$0 \to F_2 \otimes A_P \to F_1 \otimes A_P \to F_0 \otimes A_P \to L \otimes A_P \cong\ L \to 0$$

donde cada $F_i \otimes A_P$ es libre, por lo que , $\mathrm{pd}_{A_P}(L) \leq 2$ y, por tanto, $\mathrm{gldim}(A_P) \leq 2$. Por otro lado, $\mathrm{gldim}(A_P) \neq 0$ ya que de ser así, A_P sería semisimple, cosa que no es.

- *A solo tiene una cantidad contable de ideales primos principales:* sea $P(A)$ el conjunto de los elementos primos de A. Vamos a demostrar que es contable, por lo que se tendría el resultado. Para ello, consideremos S como el conjunto multiplicativo que genera $P(A)$ y veamos que S es contable. Sea $x \in P$ un elemento cualquiera y sea J el ideal generado por $\{\frac{x}{s}\}_{s\in S}$. J es, en efecto, un ideal de A puesto que s divide a P como hemos visto en el segundo apartado. Ahora bien, podemos establecer un isomorfismo de A-módulos entre J y el módulo $T =< \frac{1}{s} >_{s\in S} \subset qf(A)$. Dicho isomorfismo viene dado por la siguiente aplicación

$$\varphi : J \to T$$
$$\textstyle\sum_i a_i \frac{x}{s_i} \mapsto \sum_i a_i \frac{1}{s_i}$$

Claramente φ es suprayectiva y es inyectiva puesto que $\varphi(\sum_i a_i \frac{x}{s_i}) = 0$ si, y solo si, $\sum_i a_i \frac{1}{s_i} = 0$, si, y solo si, $x \sum_i a_i \frac{1}{s_i} = 0$, si, y solo si, $\sum_i a_i \frac{x}{s_i} = 0$. Por el teorema 4.9. se tiene que si $\mathrm{pd}(T) = 1$, entonces T es contable. Pero como $J \cong\ T$ y $\mathrm{pd}(J) = 1$, entonces $\mathrm{pd}(T) = 1$, luego T es contable, es decir, J es contable; es decir, $P(A)$ es contable.

□

5

F-anillos

5.1 Construcción de Anillos Paraguas

En esta sección vamos a estudiar con más detalle los anillos paraguas introducidos en la sección anterior y nos basaremos en el artículo de Brian Greenberg [Gre74]. Lo que vamos a hacer ahora es determinar algunas condiciones necesarias y suficientes para que un anillo sea una anillo paraguas y obtendremos un resultado muy peculiar: un anillo paraguas se construye mediante el pullback de un anillo de valoración y un anillo local regular, por lo que el teorema 4.10 podría resumirse en que un anillo local de dimensión global dos es un anillo de valoración, un anillo local regular o el pullback de ambos.

Así pues, Greenberg generaliza el concepto de anillos paraguas relajando las hipótesis para definir un F-anillo y realiza resultados sobre estos anillos. Como siempre, estamos sobre anillos conmutativos.

Definición 5.1. Un dominio A se dice que es un F**-anillo** si existe un ideal primo $P \neq 0$ tal que:

1. A_P es un anillo de valoración.
2. $P = PA_P$.

Al ideal P se le denomina F-ideal.

En particular, los anillos paraguas son F-anillos puesto que cumplen las dos condiciones impuestas en la definición anterior.

Una consecuencia inmediata de la definición es que en un F-anillo A, si $a \notin P$, entonces $aP = P$ ya que si $p \in P$, como $P = PA_P$ y $a \notin P$, existe un $q \in P$ tal que $p = aq \in aP$, por lo que $aP = P$. Más aún, los ideales de A están contenidos en P o contienen a P ya que si I es un ideal con $I \nsubseteq P$, entonces existe $a \in I \setminus P$, por lo que $P = aP \subset I$. Además, A es local si, y solo si, A/P es local debido al teorema de la correspondencia entre los ideales maximales de A que contienen a P y los ideales maximales de A/P.

Proposición 5.2. Con la notación anterior, si el ideal P no es maximal, entonces P no es finitamente generado.

Demostración. Supongamos que el ideal P es finitamente generado. Como A es un F-anillo, se tiene que $P = PA_P$ y que A_P es un anillo de valoración. Como estamos suponiendo que P es finitamente generado, PA_P es finitamente generado sobre A_P, por lo que PA_P es principal. Es decir, P es principal. Supongamos que $P = (p)$, con $p \in A$. Sea $a \notin P$, entonces por el comentario anterior se tiene que $aP = P$, por lo que $p = ap'$, con $p' \in P = (p)$ y, por tanto, $p' = pq$. Ahora bien, como $p = ap' = aqp$, se tiene que $1 = aq$, es decir, a es una unidad, por tanto, P es maximal.

□

Proposición 5.3. Sea V un anillo de valoración con ideal maximal M y sea $I \neq 0$ un ideal de V. Entonces $IM \neq I$ si, y solo si, I es principal.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $IM \neq I$, entonces existe $x \in I \setminus IM$. Vamos a demostrar que $I = (x)$. Si esto no fuera así, existe un $y \in I \setminus (x)$, pero como V es un anillo de valoración y x no puede dividir a y, se tiene que y divide a x, por lo que, $x = ay$, para algún $a \in M$ y, por tanto, $x \in IM$, llegando a una contradicción.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que $I \neq 0$ es principal, entonces si fuera $IM = I$, por el lema de Nakayama se tendría que $I = 0$, llegando a una contradicción.

□

Proposición 5.4. Si J es un ideal contenido en P tal que JA_P no es finitamente generado sobre A_P, entonces se tiene que $JA_P = J$ y $PJ = J$.

Demostración. Siempre se tiene que $JP \subset J$. Como $P = PA_P$, $JPA_P \subset J$, es decir, $PJA_P \subset J$, por lo que $PA_PJA_P \subset J$. Ahora bien, si $PA_PJA_P \neq JA_P$, entonces, por la proposición anterior, JA_P sería principal, cosa que no puede ser, pues no es finitamente generado por hipótesis. Así pues, $PA_PJA_P = JA_P$, por lo que $JA_P \subset J$. Por otro lado, $J \subset JA_P$ siempre, por lo que se tiene que $JA_P = J$.
Para la segunda parte, como $PA_PJA_P = JA_P$ y $JA_P = J$, entonces se tiene que $PJ = J$.

□

Proposición 5.5. Sea M un A-módulo libre de torsión, entonces $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/P) = 0$.

Demostración. Sea la sucesión exacta corta

$$0 \to P \xrightarrow{i} A \to A/P \to 0$$

donde i es la inclusión de P en A. Por el teorema 2.12 de existencia de sucesiones exactas largas se tiene la siguiente sucesión exacta

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(A/P, M) \to P \otimes M \xrightarrow{i \otimes 1_M} A \otimes M \cong \ M$$

Vamos a probar que $i \otimes 1_M$ es una aplicación inyectiva y, por tanto, $\mathrm{Tor}_1^A(M, A/P) = 0$. Sea $\sum p_i \otimes m_i \in P \otimes M$ y consideremos un $p \neq 0 \in P$ tal que p divide a cada p_i, es decir, existen $a_i \in A$ tal que $p_i = a_i p$. Entonces $\sum p_i \otimes m_i = p \otimes \sum a_i m_i$.
Si $\sum p_i \otimes m_i$ fuera al elemento 0, entonces $p \sum a_i m_i = 0$ en M, pero como M es libre de torsión y $p \neq 0$, entonces $\sum a_i m_i = 0$, por lo que $\sum p_i \otimes m_i = p \otimes \sum a_i m_i = 0$, es decir, $i \otimes 1_M$ es inyectiva y, por tanto, $\mathrm{Tor}_1^A(A/P, M) = 0$. □

Proposición 5.6. Sea A un F-anillo con F-ideal P y sea M un A-módulo. Entonces M es proyectivo si, y solo si, $M \otimes A/P$ y $M \otimes A_P$ son proyectivos como A/P-módulos y A_P-módulos respectivamente.

Demostración. Como $M \otimes A/P$ y $M \otimes A_P$ son proyectivos, entonces $M \otimes (A/P \times A_P)$ es proyectivo como $(A/P \times A_P)$-módulo. Sea $h : A \to A/P \times A_P$ el homomorfismo inyectivo dado por $h(1) = (1, 1)$. Se tiene entonces que $h(P)$ es un ideal en $A/P \times A_P$.
Por un lado tenemos que $M \otimes (A/P \times A_P)$ es proyectivo como $(A/P \times A_P)$ módulo, que $P \cong \ h(P)$ es un ideal de $(A/P \times A_P)$ y que $M/MP \cong \ M \otimes A/P$ es proyectivo como A/P-módulo. Usando el teorema 2.30 concluimos que M es un módulo proyectivo como A-módulo. □

Tal como se ha dicho anteriormente, los anillos paraguas son F-anillos. Pues ahora, con los resultados previos que hemos visto, vamos a demostrar un teorema importante que nos da una condición suficiente para que un F-anillo sea un anillo paraguas.

Teorema 5.7. Sea A un F-anillo local con F-ideal P tal que:

- A_P tiene dimensión global uno o dos.

- A/P es un anillo local regular de dimensión global dos.
- $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) = 1$.

Entonces, A es un anillo paraguas.

Demostración. Vamos a seguir la prueba que aparece en el teorema 2.7 de [Gre74]. De nuevo, vamos a hacer una serie de observaciones que nos permitirán concluir que $\mathrm{gldim}(A) = 2$ y, por lo tanto, A es un anillo paraguas.

1. *El ideal P no es finitamente generado:* la proposición 5.2 dice que si P no es maximal, entonces P no es finitamente generado. Ahora bien, P no puede ser maximal ya que si lo fuera, entonces A/P sería un cuerpo y, por tanto, $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) = 0$, contradiciendo la tercera hipótesis.

2. *$pd_A(P) \geq 1$:* si $\mathrm{pd}_A(P) = 0$, entonces P sería proyectivo y, por el teorema 4.4, P sería libre, es decir, $P \cong A$. Por lo tanto, P sería finitamente generado, llegando a una contradicción.

3. *$gldim(A) \geq 2$:* como hemos encontrado un ideal con dimensión proyectiva mayor o igual que uno, por el corolario 2.27, se tiene que $\mathrm{gldim}(A) = 1 + \sup\{\mathrm{pd}_A(I)\} \geq 1 + 1 = 2$.

4. *Sea J un ideal de A y sea $0 \neq z \in P$, entonces $J \cong zJ$:* en un dominio, multiplicar por un elemento distinto de cero es un isomorfismo.
   Así pues, como $zJ \subset P$, podemos suponer que $J \subset P$.

   Consideremos ahora una sucesión exacta

   $$0 \to L \to F \to J \to 0 \tag{5.1}$$

   con F libre, luego proyectivo. Nuestro objetivo ahora es demostrar que L es un módulo proyectivo ya que de esta manera, $\mathrm{pd}_A(J) \leq 1$ para todo ideal J y, por tanto, $\mathrm{gldim}(A) = 2$.

Como A_P es un módulo plano, tensorizando la sucesión con él obtenemos una sucesión exacta

$$0 \to L \otimes A_P \to F \otimes A_P \to J \otimes A_P \to 0 \tag{5.2}$$

Por otro lado, como A es un dominio, J es un módulo libre de torsión y, por tanto, la proposición 5.5, nos dice que $\mathrm{Tor}_1^A(J, A/P) = 0$. Por el teorema 2.12 de la existencia de sucesiones exactas largas, se tiene

$$0 = \mathrm{Tor}_1^A(J, A/P) \to L \otimes A/P \to F \otimes A/P \to J \otimes A/P \to 0 \tag{5.3}$$

5. *Si JA_P no es finitamente generado sobre A_P, entonces $L \otimes A/P$ es proyectivo como A/P-módulo:* como JA_P no es finitamente generado, la proposición 5.4 dice que $PJ = J$. Como $J \otimes A/P \cong J/JP = J/J = 0$, entonces (5.3) se transforma en

$$0 \to L \otimes A/P \to F \otimes A/P \to 0$$

Es decir, $L \otimes A/P \cong eqF \otimes A/P$ y, como F es libre, $L \otimes A/P$ es libre como A/P-módulo y, por tanto, es proyectivo como A/P-módulo.

6. *Si JA_P es finitamente generado sobre A_P, entonces $L \otimes A/P$ es proyectivo como A/P-módulo:* como JA_P es finitamente generado, existe un $t \in J$ tal que $JA_P = tA_P$ ya que A_P es un dominio de valoración y, por tanto, los ideales finitamente generados son principales.

   Vamos a ver ahora que $tA_P/tA_PP \cong A_P/PA_P$. Para ello vamos a considerar la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : A_P/PA_P &\to tA_P/tA_PP \\ \frac{x}{s} + PA_P &\mapsto t\frac{x}{s} + tA_PP \end{aligned}$$

La suprayectividad de φ es obvia puesto que un elemento $t\frac{x}{s} + tA_P P$ es imagen de $\frac{x}{s} + PA_P$. Veamos la inyectividad. Sea $\frac{x}{s} + PA_P \in ker(\varphi)$, entonces $t\frac{x}{s} + tA_P P = 0$, por lo que $t\frac{x}{s} \in tA_P P = tP$. Por lo tanto, existe $b \in P$ tal que $t\frac{x}{s} = tb$, es decir, $t(\frac{x}{s} - b) = 0$ y se tiene que $\frac{x}{s} = b \in P$. Es decir, $\frac{x}{s} + PA_P = 0$.

Consideremos

$$J/PJ \hookrightarrow JA_P/PJ$$

Como $JA_P/PJ = JA_P/PA_PJ = JA_P/JA_PP = tA_P/tA_PP \cong A_P/PA_P = A_P/P$, tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \to J/PJ \to A_P/P \to C \to 0$$

donde C es el cokernel del primer homomorfismo.

Ahora bien, como $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) = 1$, si fuera $\mathrm{pd}_{A/P}(J/PJ) \geq 2$, por el teorema 2.29, $\mathrm{pd}_{A/P}(C) \geq \mathrm{pd}_{A/P}(J/PJ) + 1 = 3$, por lo que $\mathrm{gldim}(A/P) \geq 3$, contradiciendo la segunda hipótesis.

Así pues, $\mathrm{pd}_{A/P}(J/PJ) \leq 1$ y, por (5.3), tiene que ser $L \otimes A/P$ proyectivo como A/P-módulo.

7. *$L \otimes A_P$ es proyectivo como A_P-módulo:* como $J \otimes A_P$ es un ideal de A_P y, por hipótesis, $\mathrm{gldim}(A_P) = 1$ o 2, se tiene que $\mathrm{pd}_{A_P}(J \otimes A_P) \leq 1$. Por lo tanto, $L \otimes A_P$ es proyectivo como A_P-módulo.

8. *L es proyectivo y, por tanto, A es un anillo paraguas:* por la proposición 5.6, como $L \otimes A/P$ es proyectivo como A/P-módulo y $L \otimes A_P$ es proyectivo como A_P-módulo, entonces L es proyectivo.

   Como L es proyectivo, por (5.1), se tiene que $\mathrm{pd}_A(J) \leq 1$, por lo que $\mathrm{gldim}(A) = 2$. Por el teorema 4.10 de clasificación de los anillos locales de dimensión global dos, se tiene que A es un anillo de valoración, un anillo local regular o un anillo paraguas. Sin embargo, como A es un F-anillo que cumple todas las hipótesis de anillo paraguas,

A es un anillo paraguas.

$\square$

Para acabar este capítulo vamos a dar una construcción a partir de la que obtenemos F-anillos. Veremos que un F-anillo A con F-ideal P se construye mediante el producto fibrado de A_P y A/P sobre A_P/P.

Construcción 1. Sea V un anillo de valoración con ideal maximal P y sea D un subanillo de V/P que no es un cuerpo. Sea $\pi : V \to V/P$ la proyección canónica y consideramos $A = \pi^{-1}(D)$. Es decir, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & V \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ D & \xrightarrow{j} & V/P \end{array} \tag{5.4}$$

Bajo estas condiciones se tiene que $A = \pi^{-1}(D) = \{d + p \in V : \pi(d) \in D, p \in P\}$.

Proposición 5.8. Con la notación de la construcción 1, se tiene que $\mathrm{qf}(D) = V/P$ si, y solo si, $V = A_P$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $v \in V$, entonces $\pi(v) \in V/P = \mathrm{qf}(D)$. Por lo tanto, $\pi(v) = \frac{a}{b}$, con $a, b \in D$ y $b \neq 0$. Entonces, existen $a', b' \in A$ tal que $\pi(a') = a, \pi(b') = b \neq 0$, por lo que $b' \notin P$, es decir, $\pi(v) = \frac{\pi(a')}{\pi(b')} = \pi(\frac{a'}{b'})$. Esto implica que $v - \frac{a'}{b'} \in P$, es decir, existe un $z \in P$ tal que $z = v - \frac{a'}{b'}$ pero, entonces, $v = z + \frac{a'}{b'} = \frac{b'z+a'}{b'} \in A_P$ puesto que $b' \notin P$.
Como V es dominio de valoración, se tiene la otra inclusión.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos ahora que $V = A_P$. Sea $u \in V/P$, entonces existe un $v \in V$ tal que $\pi(v) = u$, pero entonces existen $a, b \in A, b \notin P$ tal que $v = \frac{a}{b}$. Esto implica que $u = \pi(v) = \pi(\frac{a}{b}) = \frac{\pi(a)}{\pi(b)} \in \mathrm{qf}(D)$.
Recíprocamente, sea $\frac{a}{b} \in \mathrm{qf}(D)$, entonces existen $a', b' \in A, b' \notin P$ tal que $\pi(\frac{a'}{b'}) = \frac{a}{b}$. Como $V = A_P$, existe un $v \in V$ tal que $\frac{a'}{b'} = v$, es decir, $\frac{a}{b} = \pi(v) \in V/P$. $\square$

Construcción Básica 2. Con la notación de la construcción 1, si $\mathrm{qf}(D) = V/P$, entonces decimos que tenemos una **construcción básica**, que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ D \arrow[r, "j"] & V/P \end{tikzcd} \tag{5.5}$$

es un diagrama básico y que A proviene de una construcción básica.

Proposición 5.9. Si A proviene de una construcción básica, se tiene lo siguiente:

1. $V = A_P$.

2. $D = A/P$.

3. $V/P = A_P/P$.

4. $P = PA_P$.

Demostración. $\boxed{1}$ Está visto en la proposición 5.8.

$\boxed{2}$ Como π es suprayectiva, $\pi(A) = D$. Sin embargo, $\pi(A) = A/P$, por lo tanto, $A/P = D$.

$\boxed{3}$ Por 1. sabemos que $V = A_P$, entonces se tiene directamente que $V/P = A_P/P$.

$\boxed{4}$ Como P es un ideal de V, $PV = P$. Como $V = A_P$, se tiene entonces que $P = PV = PA_P$. $\square$

Proposición 5.10. Un anillo A es un F-anillo si, y solo si, A proviene de una construcción básica.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que A es un F-anillo, entonces se cumple que A_P es un anillo de valoración, que $P = PA_P$ y que $\mathrm{qf}(A/P) = A_P/P$. Tenemos pues, un diagrama básico de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"] & A_P \arrow[d, "\pi"] \\ A/P \arrow[r, "j"] & A_P/P \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Por lo tanto, A proviene de una construcción básica.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que A proviene de una construcción básica. Entonces, por la proposición 5.9, $V = A_P$ es una anillo de valoración y $P = PA_P$, es decir, A es un F-anillo.

□

Proposición 5.11. Sea

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d, "\pi"] \\ D \arrow[r, "j"] & V/P \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

un diagrama básico, entonces su pullback es igual al anillo que proviene de la construcción básica.

Demostración. Como sabemos, el pullback de π y j se corresponde con el conjunto $B = \{(v, d) \in V \times D : \pi(v) = j(d) = d\}$. Por lo tanto, basta ver que el anillo A que proviene de la construcción básica se puede identificar con B, es decir, $A \equiv B$.

Sea $(v, d) \in B$. Entonces se tiene que $\pi(v) = d$, pero $\pi(v) = v + P$ y, como $d \in D$, existe un $u \in V$ tal que $d = u + P$. Por lo tanto, $v + P = u + P \Longrightarrow u - v \in P$. Llamemos $v' = u - v \in P$.

Por un lado, definimos la aplicación $\Phi : B \to A$ de manera que $\Phi(v, d) = v + v' \in A$. Por otro lado, definimos la aplicación $\Psi : A \to B$ de manera que $\Psi(v + v') = (v, d) \in B$, donde $d = v + v' + P$ y, por tanto, se tiene que $\pi(v) = \pi(v + v') = d$.

Vamos a comprobar que $\Phi\Psi = 1_A$ y que $\Psi\Phi = 1_B$.

$\Phi\Psi(v + v') = \Phi(v, d) = v + v'$ ya que, como $d = v + v' + P$, entonces se tiene que $(v + v') - v = v'$ es el elemento que le hace corresponder la aplicación Φ, por lo tanto, $\Phi\Psi = 1_A$.

$\Psi\Phi(v, d) = \Psi(v + v') = (v, d)$, ya que $v' = u - v$ y, por tanto, $v + v' + P = v + u - v + P =$

$u + P = d$. Es decir,$\Psi\Phi = 1_B$. $\square$

Ya estamos dispuestos a enunciar y demostrar el resultado sobre anillos paraguas que llevamos diciendo durante toda esta sección.

Teorema 5.12. Un anillo local A es un anillo paraguas si, y solo si, es el pullback de un diagrama básico en el que:

- V tiene dimensión global uno o dos.
- D es un anillo local regular de dimensión dos.
- $\mathrm{pd}_D(V/P) = 1$.

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que A es un anillo paraguas, en particular, A es un F-anillo. Por la proposición 5.10, A proviene de una construcción básica y, por las proposiciones 5.11 y 5.9, A es el pullback de un diagrama básico en el que $V = A_P$ y $D = A/P$. Por la definición de anillo paraguas, V tiene dimensión global uno o dos, D es un anillo local regular de dimensión dos y $\mathrm{pd}_D(V/P) = 1$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos que A es el pullback de un diagrama básico cumpliendo esas condiciones. Entonces por la proposición 5.11, A proviene de una construcción básica y, por la proposición 5.10, A es un F-anillo.
Ahora bien, como A es un F-anillo con F-ideal P cumpliendo que $A_P = V$ tiene dimensión global uno o dos, $A/P = D$ es un anillo local regular de dimensión global dos y $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) = \mathrm{pd}_D(V/P) = 1$, entonces podemos aplicar el teorema 5.7 para concluir que A es un anillo paraguas.

$\square$

5.2 Dimensión Global de F-anillos

El objetivo principal de esta sección es encontrar la dimensión global de un F-anillo A con F-ideal P a partir de la dimensión global de los anillos A/P y A_P. Por lo tanto, durante toda la sección A denotará un F-anillo y P su F-ideal.

Proposición 5.13. Si M es un A-módulo libre de torsión, entonces se tiene que

$$\mathrm{pd}_A(M) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{A/P}(M \otimes A/P), \mathrm{pd}_{A_P}(M \otimes A_P)\}$$

Demostración. Sea $m = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{A/P}(M \otimes A/P), \mathrm{pd}_{A_P}(M \otimes A_P)\}$. Si $\mathrm{pd}_A(M)$ es finita y consideramos una resolución proyectiva de M, al tensorizar con A_P y A/P llegamos a resoluciones proyectivas de $M \otimes A/P$ y $M \otimes A_P$, por lo tanto, $m \leq \mathrm{pd}_A(M)$.

Consideremos una sucesión exacta de A-módulos

$$0 \to Q \to Q_{m-1} \to \cdots \to Q_0 \to M \to 0$$

donde cada Q_i es proyectivo. Entonces, la proposición 5.6 nos dice que $Q_i \otimes A_P$ y $Q_i \otimes A/P$ son proyectivos y, por lo tanto, la sucesión exacta de arriba da lugar a resoluciones proyectivas de $M \otimes A/P$ y $M \otimes A_P$, por lo que $Q \otimes A_P$ y $Q \otimes A/P$ son proyectivos y, por tanto, Q es proyectivo. Como Q es proyectivo se cumple entonces que $\mathrm{pd}_A(M) \leq m$.

En el caso en que m o $\mathrm{pd}_A(M)$ fueran infinitos se tendría la igualdad directamente.

$\square$

Corolario 5.14. Se tiene que $\mathrm{pd}_A(A_P) = \mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P)$.

Demostración. Tomando $M = A_P$ y aplicando la proposición 5.13 tenemos que $\mathrm{pd}_A(A_P) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{A/P}(A_P \otimes A/P), \mathrm{pd}_{A_P}(A_P \otimes A_P)\}$. Sin embargo, $\mathrm{pd}_{A_P}(A_P \otimes A_P) = 0$, por lo tanto, $\mathrm{pd}_A(A_P) = \mathrm{pd}_{A/P}(A_P \otimes A/P) = \mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P)$. $\square$

Teorema 5.15. Si $\mathrm{gldim}(A_P) = n \geq 1$ y $\mathrm{gldim}(A/P) = m \geq 1$, entonces

$$\mathrm{gldim}(A) = \begin{cases} n & si \qquad n > m \\ \\ m & si \quad m \geq n \text{ y } \mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) < m \\ \\ m+1 & si \quad m \geq n \text{ y } \mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) = m \end{cases}$$

Demostración. 1. $n > m$. Para un ideal I de A, $\mathrm{pd}_A(I) \leq n-1$ ya que, por la proposición 5.13, $\mathrm{pd}_A(I) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{A/P}(I \otimes A/P), \mathrm{pd}_{A_P}(I \otimes A_P)\} \leq \text{máx}\{m-1, n-1\} \leq n-1$. Por lo tanto, $\mathrm{gldim}(A) \leq n$. Sin embargo, como $\mathrm{gldim}(A_P) = n$, existe un ideal J de A tal que $\mathrm{pd}_{A_P}(JA_P) = n-1$, por lo tanto, $\mathrm{pd}_A(J) = n-1$ y se tiene que $\mathrm{gldim}(A) = n$.

2. $m \geq n$. Sea I un ideal de A que contiene a P tal que $\mathrm{pd}_{A/P}(I/P) = m-1$. Como $I/P = I/IP$, se tiene que $\mathrm{pd}_A(I) = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{A/P}(I \otimes A/P), \mathrm{pd}_{A_P}(I \otimes A_P)\} = \text{máx}\{\mathrm{pd}_{A/P}(I/IP), \mathrm{pd}_{A_P}(I \otimes A_P)\} = m-1$, por lo que $\mathrm{gldim}(A) \geq m$.

   Sea I un ideal arbitrario de A. Vamos a tratar de computar $\mathrm{pd}_A(I)$. Para ello podemos suponer que $I \subset P$ tal y como hemos visto en el teorema 5.7. Así pues, consideremos la sucesión exacta

   $$0 \to L \to F \to I \to 0$$

   donde F es libre.

   Tensorizando con A_P y A/P, obtenemos una sucesión exacta de A_P-módulos y A/P-módulos, respectivamente. Se tiene entonces que $\mathrm{pd}_{A_P}(I \otimes A_P) \leq \mathrm{gldim}(A_P) - 1 \leq n - 1 \leq m - 1$.

   Si IA_P no es finitamente generado podemos hacer lo mismo que en el teorema 5.7 para obtener que $I = IP$ y, por tanto, $\mathrm{pd}_{A/P}(I \otimes A/P) = \mathrm{pd}_{A/P}(I/IP) = \mathrm{pd}_{A/P}(0) =$

0. Aplicando ahora la proposición 5.13, se tiene que $\mathrm{pd}_A(I) = \mathrm{máx}\{\mathrm{pd}_{A/P}(I \otimes A/P), \mathrm{pd}_{A_P}(I \otimes A_P)\} \leq \mathrm{máx}\{0, m-1\} = m-1$.

Si IA_P es finitamente generado, como en el teorema 5.7, podemos encontrar una sucesión exacta de la forma

$$0 \to I/IP \to A_P/P \to C \to 0$$

a) Si $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) < m$, entonces $\mathrm{pd}_{A/P}(I/IP) < m$ ya que de otra manera, por el teorema 2.29, se tendría que $\mathrm{pd}_{A/P}(C) \geq m+1$, y esto no puede ocurrir porque $\mathrm{gldim}(A/P) = m$. Aplicando de nuevo la proposición 5.13 se tiene que $\mathrm{pd}_A(I) \leq m-1$, por lo que $\mathrm{gldim}(A) \leq m$, llegando a la igualdad $\mathrm{gldim}(A) = m$.

b) Si $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) = m$, entonces $\mathrm{pd}_{A/P}(I/IP) \leq m$ ya que de otra forma se tendría que $\mathrm{pd}_{A/P}(C) \geq m+2$. Por lo tanto, $\mathrm{pd}_A(I) \leq m$, teniendo que $\mathrm{gldim}(A) \leq m+1$. Sin embargo, $\mathrm{pd}_A(A_P) = pd_{A/P}(A_P/P) = m$, por lo que si cogemos $0 \neq z \in P$, zA_P es un ideal de A con dimensión proyectiva m, por lo que $\mathrm{gldim}(A) = m+1$.

□

Corolario 5.16. Si $\mathrm{gldim}(A) = d$, entonces se tiene lo siguiente:

1. $\mathrm{gldim}(A_P) \leq d$,

2. $\mathrm{gldim}(A/P) \leq d$,

3. si $\mathrm{gldim}(A/P) = d$, entonces $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) < d$.

Demostración. Supongamos que $\mathrm{gldim}(A) = d$. Entonces por el teorema anterior se tiene necesariamente que $\mathrm{gldim}(A_P) \leq d$ y que $\mathrm{gldim}(A/P) \leq d$. Ahora bien, si se tiene que $\mathrm{gldim}(A/P) = d$, entonces es porque estamos en el caso dos del teorema, por lo que $\mathrm{pd}_{A/P}(A_P/P) < d$. □

Corolario 5.17. Supongamos que $\operatorname{gldim}(A) = d$, entonces se tiene lo siguiente:

1. Si $\operatorname{gldim}(A_P) = d$, entonces $\operatorname{gldim}(A/P) \leq d$ y, si $\operatorname{gldim}(A/P) = d$, entonces $\operatorname{pd}_{A/P}(A_P/P) < d$.

2. Si $\operatorname{gldim}(A_P) < d$, se tiene que:

    a) $\operatorname{gldim}(A/P) = d$ si $\operatorname{pd}_{A/P}(A_P/P) < d - 1$,

    b) $\operatorname{gldim}(A/P) = d - 1$ o d si $\operatorname{pd}_{A/P}(A_P/P) = d - 1$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{gldim}(A_P) = d$. Necesariamente tenemos que tener que $\operatorname{gldim}(A/P) \leq d$ ya que de lo contrario llegaríamos a que $\operatorname{gldim}(A) > d$. Ahora bien, si $\operatorname{gldim}(A/P) = d$, entonces estamos en el caso dos del teorema anterior y tenemos que $\operatorname{pd}_{A/P}(A_P/P) < d$.

Supongamos que $\operatorname{gldim}(A_P) < d$. Entonces o bien estamos en el caso dos, o bien en el caso tres. Si estamos en el caso dos es porque $\operatorname{gldim}(A/P) = d$ y $\operatorname{pd}_{A/P}(A_P/P) \leq d - 1$. Si estamos en el caso tres es porque $\operatorname{gldim}(A/P) = d - 1$ y $\operatorname{pd}_{A/P}(A_P/P) = d - 1$. $\square$

Bibliografía

[AB57] M. Auslander and D. A. Buchsbaum. Homological dimension in local rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 85(2):390–405, 1957.

[Bur68] Lindsay Burch. On ideals of finite homoloical dimension in local rings. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 64(4):941–948, 1968.

[Gre74] Brian Greenberg. Global dimension of cartesian squares. *Journal of Algebra*, 32:31–43, 1974.

[HS97] Peter J. Hilton and Urs Stammbach. *A course in homological algebra.* Springer-Verlag, New York, 1997.

[Kap58] Irving Kaplansky. Projective modules. *Annals of Mathematics*, 68(2):372–377, 1958.

[Kap95] Irving Kaplansky. *Fields and Rings.* University of Chicago Press, Chicago, 1995.

[Nag75] M. Nagata. *Local rings.* Interscience tracts in pure and applied mathematics. R. E. Krieger Pub. Co., 1975.

[Osb00] M. Scott Osborne. *Basic Homological Algebra.* Springer, New York, 2000.

[Oso68] B. L. Osofsky. Homological dimension and the continuum hypothesis. *Transactions of the American Mathematical Society*, 132(1):217–230, 1968.

[Rot09] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Springer-Verlag, New York, 2009.

[Sha00] R.Y. Sharp. *Steps in Commutative Algebra.* London Mathematical Society St. Cambridge University Press, 2000.

[Ste75] Bo Stenström. *Rings of Quotients.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.

[Vas72] Wolmer V. Vasconcelos. The local rings of global dimension two. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 35(2):381–386, 1972.

[Vas73] Wolmer V. Vasconcelos. Conductor, projectivity and injectivity. *Pacific Journal of Mathematics*, 46(2):603–608, 1973.

[Vas76] Wolmer V. Vasconcelos. *The Rings of Dimension Two.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc, New York, 1976.