



Universidad de Murcia, Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística e Investigación Operativa

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Árboles Elegantes

Taxonomía y estudio de modelos propuestos para abordar
la Conjetura de Ringel-Kotzig.

Concepción Domínguez Sánchez

Dirigido por
Alfredo Marín Pérez

Julio 2017

Árboles Elegantes

Taxonomía y estudio de modelos propuestos para abordar
la Conjetura de Ringel-Kotzig.

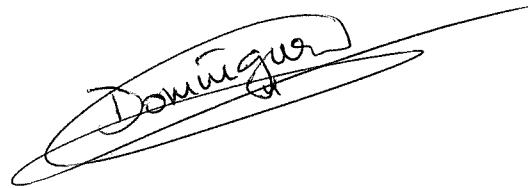
Concepción Domínguez Sánchez

Dirigido por
Alfredo Marín Pérez

Declaración de originalidad

Yo, Concepción Domínguez Sánchez, autora del TFM *Árboles elegantes: Taxonomía y estudio de modelos propuestos para abordar la Conjetura de Ringel-Kotzig*, bajo la tutela del profesor Alfredo Marín Pérez, declaro que el trabajo que presento es original, en el sentido de que se ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 3 de julio de 2017,

A handwritten signature in black ink, written in a cursive style. The name 'Domínguez' is clearly legible, with a large, sweeping flourish underneath it that extends to the right.

Concepción Domínguez Sánchez.

Índice general

Resumen	8
1. Grafos y árboles elegantes	11
1.1. Breve introducción a la Teoría de Grafos	11
1.2. Definición, origen y aplicaciones	13
2. Taxonomía de árboles elegantes	21
2.1. Árboles elegantes según su estructura	22
2.1.1. Árboles simétricos	22
2.1.2. Caminos y orugas	27
2.1.3. Estrellas, superestrellas y tracas	29
2.1.4. Construcción de árboles elegantes a partir de otros	32
2.1.5. Arañas	38
2.1.6. Langostas	41
2.2. Árboles elegantes según su diámetro	47
2.3. Árboles elegantes según su número de nodos	52
3. Modelos de Optimización Lineal Entera	53
3.1. El modelo de Redl	53
3.2. Nuevo modelo de Optimización Lineal Entera	56
3.2.1. Mejoras del modelo anterior	57
3.3. Comparativa entre los tres modelos. Resultados computacionales	66
Conclusiones y líneas de trabajo futuras	68
Bibliografía	68

Resumen

Un árbol $T = (V, E)$ de orden n es elegante si existe un etiquetado en el que se asignan a sus vértices valores diferentes en el conjunto de números $\{0, \dots, n - 1\}$ de manera que las etiquetas de las aristas, cuyos valores vienen dados por la diferencia en valor absoluto de las etiquetas de sus extremos, tomen valores distintos en el conjunto $\{1, \dots, n - 1\}$.

El origen de los etiquetados elegantes se remonta a principios de los 60, y está relacionado con las descomposiciones de grafos. En 1967, Rosa publica el artículo *On certain valuations of the vertices of a graph* con la intención de abordar una conjetura que enuncia Ringel cuatro años antes, según la cual todo árbol de orden $m + 1$ descompone a K_{2m+1} . Kotzig conjetura posteriormente que esta descomposición es cíclica. En su artículo, Rosa define un etiquetado elegante de los vértices de un grafo (al que él llama β -evaluación) y demuestra que todo árbol elegante de tamaño m descompone cíclicamente a K_{2m+1} . Esto centra la atención en probar la que se conoce con el nombre de Conjetura de Ringel-Kotzig, que establece que todos los árboles son elegantes.

Desde entonces se han publicado cientos de resultados sobre árboles elegantes, pero a día de hoy la conjetura sigue sin resolver. Este trabajo se centra en el estudio de árboles elegantes y en los avances que se han hecho hasta el momento en el intento de probarla.

El primer capítulo contiene una introducción a algunos contenidos básicos de Teoría de Grafos que emplearemos a lo largo del trabajo y una segunda sección en la que introducimos el concepto de grafo elegante, así como una breve contextualización, indicando su origen y utilidad inicial y algunas de las aplicaciones actuales de los etiquetados elegantes de árboles.

El segundo capítulo consiste en una taxonomía de árboles elegantes atendiendo a tres criterios. La primera sección del capítulo se centra en el estudio de etiquetados elegantes de árboles según su estructura, y en ella estudiaremos resultados acerca de la elegancia de caminos, estrellas, árboles simétricos y otras clases de árboles. También se ha incluido un apartado que muestra construcciones de árboles elegantes a partir de otros, esencial para la demostración de elegancia de árboles con estructura más compleja. A lo largo del capítulo, además de recopilar y clasificar los resultados más importantes existentes hasta la fecha, hemos elaborado demostraciones de algunos de ellos. En particular, incluimos demostraciones propias sobre la existencia de etiquetados elegantes de *tracas* y varios resultados relacionados con la elegancia de *langostas*. En otros casos, hemos desarrollado demostraciones que estaban meramente esbozadas u omitidas. Por último, para hacer más accesible su lectura y comprensión, hemos ejemplificado las demostraciones y los resultados de todo el capítulo.

La segunda sección del capítulo aborda la Conjetura de Árboles Elegantes atendiendo a su diámetro, y guarda similitud con la anterior en el enfoque matemático desde el que se realiza el estudio. En esta sección incluimos una demostración de que todos los árboles de diámetro menor o igual a cuatro son elegantes, realizada por Hrnčiar y Haviar en 2001 en [15], y sentamos la base de la demostración de árboles de diámetro cinco.

La última sección, en cambio, tiene un carácter más computacional, pues aborda el problema empleando como criterio el número de vértices que posee un árbol, estableciendo un breve resumen de resultados anteriores obtenidos mediante algoritmos de búsqueda

exhaustiva.

En el último capítulo presentamos un modelo de Optimización Lineal Entera propuesto por Redl en 2003 en [26] que hemos linealizado e implementado en el programa Xpress. A continuación, damos la formulación de un nuevo modelo de Optimización Entera que hemos diseñado y algunas desigualdades válidas que lo refuerzan. Finalmente, incluimos en el trabajo un estudio comparativo utilizando Xpress en el que comparamos el modelo de Redl con nuestro nuevo modelo, y este con y sin las desigualdades válidas adicionales, empleando instancias aleatorias de árboles de distinto orden.

Capítulo 1

Grafos y árboles elegantes

En este capítulo del trabajo, vamos a dar la definición de grafo elegante, concretando su origen en la literatura y dando a conocer algunas de sus aplicaciones. A continuación, presentaremos los avances que se han conseguido hasta ahora en el intento de probar la Conjetura de Árboles Elegantes o de Ringel-Kotzig, según la cual todos los árboles son elegantes.

1.1. Breve introducción a la Teoría de Grafos

Todos los contenidos que aparecen en esta sección pertenecen a la asignatura *Grafos y Optimización Discreta*.

Definición 1.1. Un **grafo simple no dirigido** es un par (V, E) formado por un conjunto finito $V \neq \emptyset$, a cuyos elementos denominaremos **vértices o nodos** y E , un conjunto de pares (no ordenados y formados por distintos vértices) de elementos de V a los que llamaremos **aristas**.

- A los nodos v_1, v_2 se les llama **extremos** de la arista e si $e = (v_1, v_2)$, y en tal caso se dice que los nodos son **adyacentes o vecinos**. Al conjunto de vecinos de un nodo v_1 de un grafo G se le denota por $N_G(v_1)$.
- Una arista e es **incidente** con un vértice v si v es uno de sus extremos. En ese caso, se dice que e **incide** en v .

Representaremos como $V(G)$ (o V) al conjunto de nodos de un grafo G , y como $E(G)$ (o E) al conjunto de aristas de G .

Un grafo se puede representar mediante un diagrama en el que cada vértice está asociado a un objeto (normalmente un círculo o una circunferencia), y cada arista se representa mediante una línea que une los dos vértices que la componen.

Definición 1.2. Se llama **orden** de un grafo a $|V|$ (se suele denotar por n). Se llama **tamaño** de un grafo a $|E|$ (se suele denotar por m).

Definición 1.3. El **grado de incidencia** $g(v)$ de un vértice v es el número de aristas que inciden en él. El **grado máximo** de un grafo es el máximo de los grados de todos sus vértices.

Definición 1.4. Dado un grafo $G = (V, E)$, se dice que otro grafo $G' = (V', E')$ es **subgrafo** de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

Dado un grafo $G = (V, E)$ y dado $V' \subseteq V$, se llama **subgrafo de G inducido por V'** a $G_B = (B, E_B)$, donde

$$E_B = \{(i, j) \in E : i \in V', j \in V'\}.$$

De modo similar, dado $E' \subseteq E$, llamaremos **subgrafo de G inducido por E'** a $G_{E'} = (V_{E'}, E')$ con

$$V_{E'} = \{v \in V : (v, u) \in E' \text{ para algún } u \in V\}.$$

Definición 1.5. Dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ se dice que son **isomorfos** (y en tal caso, los denotaremos por $G_1 \cong G_2$) si existe una aplicación biyectiva $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\forall u, v \in V_1$,

$$(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (f(u), f(v)) \in E_2.$$

Tal aplicación recibe el nombre de **isomorfismo**.

Definición 1.6. Se llama grafo **completo** a $G = (V, E)$ tal que $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 \Rightarrow (v_1, v_2) \in E$. A un grafo completo de n vértices lo denotaremos K_n .

Definición 1.7. Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq \emptyset, V_2 \neq \emptyset, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y

$$\forall (v_1, v_2) \in E \Rightarrow \begin{cases} v_1 \in V_1, & v_2 \in V_2 \\ v_1 \in V_2, & v_2 \in V_1. \end{cases} \quad \text{o bien}$$

Definición 1.8. Un **grafo completo bipartito** es un grafo bipartito con $E = V_1 \times V_2$, es decir, que contiene a todas las aristas posibles con un extremo en V_1 y otro en V_2 . Si $|V_1| = r$ y $|V_2| = s$, al correspondiente grafo bipartito completo se le denota por $K_{r,s}$.

Definición 1.9. Una **cadena o camino** es un grafo $P = (V, E)$ definido por $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$, es decir, una sucesión alternante de vértices y aristas distintos que comienza en un vértice y termina en otro, tal que cada arista incide en el nodo anterior y posterior de la sucesión. Se dice que P **conecta** v_1 con v_n . Un camino con m aristas se dice de **longitud m** y lo denominaremos P_{m+1} .

Definición 1.10. Un **ciclo** (o ciclo elemental) es un grafo $C = (V, E)$ definido por $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, con $n \geq 3$, y $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$, es decir, una cadena más una arista entre los vértices unidos por la cadena. Al ciclo con n nodos (y aristas) se le suele denominar C_n . Llamamos **longitud del ciclo** al número de aristas que lo componen. Un subgrafo de G que sea un ciclo se denominará ciclo en el grafo G .

Definición 1.11. Un grafo es **conexo** si cualquier par de vértices (distintos) están conectados por una cadena. Un grafo que no es conexo suele llamarse **disconexo**.

Definiendo en V la relación siguiente:

$$\forall v_1, v_2 \in V, \quad i \mathfrak{C} j \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 & \text{o bien} \\ \text{existe una cadena en } G \text{ que conecta } v_1 \text{ con } v_2. \end{cases}$$

\mathbb{C} es una relación de equivalencia, de forma que V/\mathbb{C} constituye una partición de V , cada una de cuyas clases de equivalencia se denomina **componente conexa**.

Dado $G = (V, E)$ conexo, si $(V, E \setminus \{e\})$ es desconexo, la arista e se denomina **punte**.

Definición 1.12. Dado un grafo conexo $G = (V, E)$, definimos la **distancia** entre dos nodos $v_i, v_j \in V$ como el menor número de aristas necesario para conectar v_i y v_j por medio de una cadena, y la denotamos por $d(v_i, v_j)$. La **excentricidad** de un nodo v , $\epsilon(v)$, se define como la máxima distancia de v a cualquier otro nodo. El **radio** de G se define como la mínima excentricidad de sus nodos, es decir, $\min_{v \in V} \epsilon(v)$; y el **diámetro**, como la máxima excentricidad de sus nodos, es decir, $\max_{v \in V} \epsilon(v)$.

Definición 1.13. Dados dos grafos $G = (V_G, E_G), G' = (V_{G'}, E_{G'})$ con $u \in V_G, u' \in V_{G'}$, decimos que el grafo H se ha formado a partir de G y G' **identificando los vértices u y u'** si $H = (V_H, E_H)$ con $V_H = V_G \cup V_{G'} \setminus \{u'\}$, $E_H = E_G \cup \{(v, w) \in E_{G'} : v \neq u' \neq w\} \cup \{(u, v) : v \in N_{G'}(u')\}$.

Definición 1.14. Dado $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, la **matriz de adyacencia** $M_{n \times n} = (m_{ij})$ se construye mediante

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definición 1.15. Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es un **árbol** si es conexo y no contiene ciclos. Un **árbol generador** de G es un subgrafo $G = (V, E')$, con $E' \subseteq E$, conexo y sin ciclos. En un árbol, los nodos con grado de incidencia 1 se denominan **hojas**.

Definición 1.16. Dado un árbol T , podemos distinguir un nodo cualquiera v , que pasará a llamarse **raíz**. El par compuesto por árbol y raíz se llamará entonces **árbol con raíz o enraizado**. Diremos que la raíz del árbol enraizado está a nivel cero. El **nivel** del resto de nodos será la longitud de la única cadena que los une a la raíz. Diremos que un nodo u_i es **hijo** de un nodo u_j si está en un nivel superior y todos los vértices de la única cadena que conecta u_i y u_j también están en un nivel superior al de u_j . Diremos que u_i es **hijo directo** de u_j si es hijo y son adyacentes.

Definición 1.17. Un árbol T con raíz v es **simétrico** si todos los vértices del mismo nivel tienen el mismo grado.

1.2. Definición, origen y aplicaciones

Un grafo $G = (V, E)$ se dice *etiquetado por ϕ* si a cada vértice $v \in V$ se le asigna un entero no negativo $\phi(v)$ y a cada arista $e = (u, v) \in E$ se le asigna el valor $|\phi(u) - \phi(v)|$.

Definición 1.18 (De [10], p. 5). Un etiquetado es elegante si $\phi : V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, |E|\}$ es inyectiva y si todas las aristas de E tienen una etiqueta distinta del conjunto $\{1, 2, \dots, |E|\}$. Si un grafo admite un etiquetado elegante, se le llama **grafo elegante**.

De acuerdo con [10], los etiquetados elegantes se introdujeron a finales de los años 60. Para explicar su origen, necesitamos hablar de descomposiciones de grafos.

Definición 1.19 (De [10], p. 6). Una **descomposición** de un grafo G es una colección $\{H_i\}$ de subgrafos no vacíos tal que $H_i = G_{E_i}$, el subgrafo inducido por algún subconjunto (no vacío) $E_i \subseteq E(G)$, donde $\{E_i\}$ es una partición de $E(G)$. Si $\{H_i\}$ es una descomposición de un grafo G tal que, para cada i , $H_i \cong H$ para algún grafo H , entonces se dice que G es **H -descomponible**. Si G es un grafo H -descomponible, escribimos $H|G$ y decimos que H **descompone a G** .

Definición 1.20 (Basada en la de [11], p. 210). Sea K_n el grafo completo de orden n con $V_{K_n} = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$. Una descomposición de K_n en k subgrafos $\{H_i\}_{i=1}^k$ isomorfos a H es **cíclica** si se cumple que para $i = 0, \dots, k-1$, $V_{H_{i+1}} \pmod{k} = \{v_{j+1} \pmod{n}\}_{v_j \in V_{H_i}}$, $E_{H_{i+1}} \pmod{k} = \{(v_{j+1} \pmod{n}, v_{k+1} \pmod{n})\}_{(v_j, v_k) \in E_{H_i}}$.

Un ejemplo de descomposición cíclica se puede ver en la Figura 1.3. Si $H|G$, el tamaño de H necesariamente divide al de G , y H es necesariamente subgrafo de G . Sin embargo, que el tamaño de H divida al de G no es condición suficiente para $H|G$. Es fácil ver que todo grafo no vacío es K_2 -descomponible.

De acuerdo con [10], las descomposiciones de grafos se han estudiado a lo largo de la historia en la teoría del diseño, principalmente las descomposiciones de K_n . Una de las conjeturas que han dado lugar al estudio de grafos elegantes ha sido la siguiente:

Conjetura de Ringel. *Todo árbol de orden $m+1$ descompone a K_{2m+1} .*

Esta conjetura la propuso Ringel en 1963 y aún está por resolver. Se dice también en [10] que Kotzig hizo una conjetura aún más fuerte que la de Ringel:

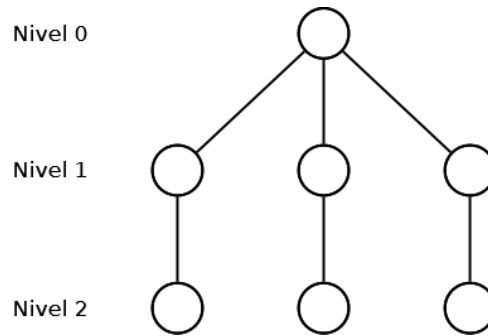
Conjetura de Kotzig. *Todo árbol de orden $m+1$ descompone cíclicamente a K_{2m+1} .*

En 1967, Rosa publicó el artículo [28] con la intención de atacar la Conjetura de Ringel. Su idea fue usar un etiquetado de vértices (al que llamaba *evaluación*) de un grafo H de tamaño m para probar que podía descomponer cíclicamente a K_{2m+1} . Empleando parte de su notación, consideremos un etiquetado ϕ_G del grafo G . Sea $|V(G)| = n$, V_{ϕ_G} el conjunto de números asignado a los vértices de G y E_{ϕ_G} el conjunto de números asignado a las aristas de G . Consideremos las siguientes condiciones:

1. $V_{\phi_G} \subseteq \{0, 1, \dots, m\}$,
2. $V_{\phi_G} \subseteq \{0, 1, \dots, 2m\}$,
3. $E_{\phi_G} = \{0, 1, \dots, m\}$,
4. $E_{\phi_G} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, donde $x_i = i$ o $x_i = 2m + 1 - i$,
5. existe $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ tal que para cada arista $(u, v) \in E(G)$ se tiene $\phi_G(u) \leq x$, $\phi_G(v) > x$ o bien $\phi_G(u) > x$, $\phi_G(v) \leq x$.

A partir de estas condiciones, Rosa definió cuatro tipos de etiquetados:

- Un ρ -etiquetado satisface las condiciones (2) y (4).
- Un σ -etiquetado satisface las condiciones (2) y (3).

Figura 1.1: Grafo bipartito S

- Un β -etiquetado satisface las condiciones (1) y (3).
- Un α -etiquetado de índice k satisface las condiciones (1), (3) y (5) para $x = k$.

El β -etiquetado de Rosa se conoce con el nombre de etiquetado elegante, mientras que el α -etiquetado se conoce también como etiquetado bipartito. Es claro que si un grafo G posee un α -etiquetado α_G de índice k , entonces es un grafo bipartito, donde $V_1 = \{v \in V(G) : \alpha_G(v) \leq k\}$ y $V_2 = \{v \in V(G) : \alpha_G(v) > k\}$.

Debido a que la condición 1 es más restrictiva que la 2, y la 3 más restrictiva que la 4, se tiene que cada uno de los etiquetados definidos anteriormente satisface condiciones más fuertes que el anterior. Por tanto, si se pudiera probar que todos los árboles tienen un etiquetado bipartito, esto implicaría que son elegantes. No obstante, Rosa probó que no todos los árboles tienen un etiquetado bipartito.

Nosotros vamos a demostrar que el grafo bipartito S de la Figura 1.1 (conocido como la araña $S(2, 2, 2)$), cuya raíz v tomaremos como el único nodo de grado 3, no tiene un etiquetado bipartito. En efecto, para que S tuviera un etiquetado bipartito, y sin pérdida de generalidad, los vértices de los niveles 0 y 2 tendrían que llevar el conjunto de etiquetas $\{0, \dots, k\}$, y los vértices de nivel 1, el conjunto $\{k + 1, \dots, n - 1\}$, donde $k = 3$ y $n = |V(S)| = 7$ (o bien los nodos de los niveles 0 y 2 el conjunto $\{k' + 1, \dots, n - 1\}$ y los nodos del nivel 1 las etiquetas del conjunto $\{0, \dots, k'\}$, con $k' = 3$, pero por el Lema 2.1 que veremos posteriormente, se tiene que estas dos condiciones son equivalentes).

Así pues, como S es simétrico, podemos asignar las etiquetas $\{4, 5, 6\}$ a los nodos de nivel 1 indistintamente. Una vez hecho esto, y sabiendo que queremos obtener un etiquetado bipartito, tenemos dos nodos que pueden etiquetarse con el valor 0, que son los dos nodos adyacentes al de etiqueta 6. Veamos cada uno de los casos:

- Si etiquetamos la raíz v con el valor 0, entonces nos queda distribuir las etiquetas $\{1, 2, 3\}$ en las tres hojas de manera que obtengamos en las aristas adyacentes a nodos de los niveles 1 y 2 el mismo conjunto de etiquetas. Por tanto, al nodo de nivel 2 vecino del de nivel 1 con la etiqueta 6, solo tenemos opción de etiquetarlo con el valor 3. Los otros dos nodos del nivel 2 se pueden etiquetar con las etiquetas $\{1, 2\}$ dando lugar a los etiquetados de la Figura 1.2a, ninguno de los cuales es elegante.
- Si etiquetamos con el valor 0 a la hoja adyacente al vértice de nivel 1 con la etiqueta 6, tenemos entonces que, para conseguir un etiquetado elegante, la raíz ha de llevar la

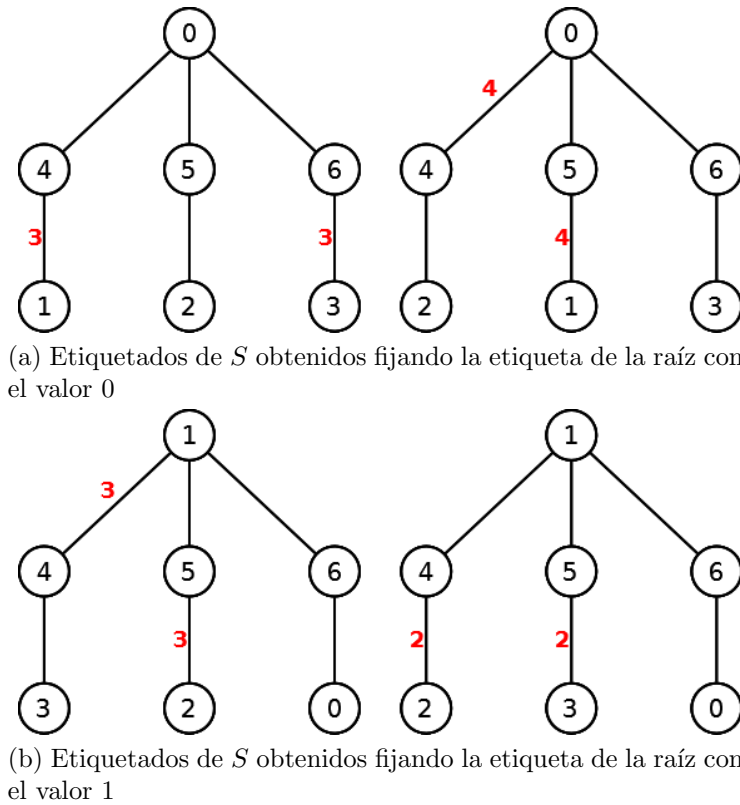


Figura 1.2: Etiquetados no elegantes de S obtenidos fijando algunas etiquetas

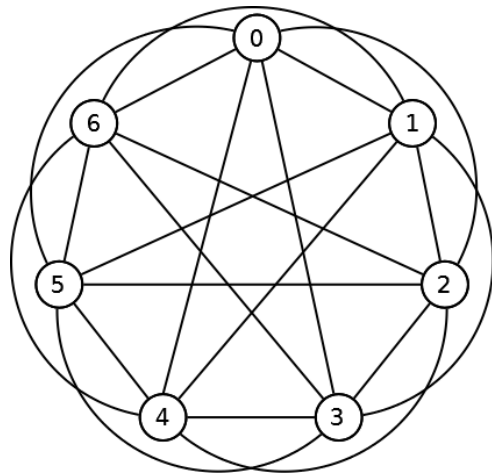
etiqueta 1 (o no conseguiremos ninguna arista con etiqueta 5). De nuevo obtenemos dos posibles etiquetados (que no son elegantes, y por tanto no son bipartitos) con estas condiciones, que se pueden ver en la Figura 1.2b.

Rosa también demostró el siguiente resultado en [28, pp. 353-354], aunque nosotros lo hemos tomado de [10, pp. 7-8], y hemos incluido algunas modificaciones en la demostración.

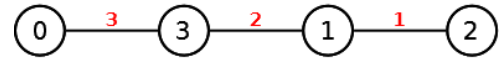
Teorema 1.21. *Si H es un grafo elegante de tamaño m , entonces K_{2m+1} es H -descomponible. De hecho, K_{2m+1} se puede descomponer cíclicamente en subgrafos isomorfos a H .*

Demostración. Como H es elegante, a sus vértices se les puede asignar una etiqueta del conjunto $\{0, 1, \dots, m\}$ de manera que las etiquetas inducidas de las aristas sean $1, 2, \dots, m$. Sea $V(K_{2m+1}) = \{v_0, v_1, \dots, v_{2m}\}$, donde los vértices de K_{2m+1} se han ordenado cíclicamente en un $(2m + 1)$ -ágono regular, y denotemos el $(2m + 1)$ -ciclo resultante por C . Identifiquemos cada vértice de etiqueta i de H (con $0 \leq i \leq m$) con $v_i \in K_{2m+1}$, y llamemos H_1 al subgrafo resultante isomorfo a H en K_{2m+1} , en la que las aristas de H se dibujan trazando una línea recta en K_{2m+1} . Así, $H_1 \cong H$ y $V(H_1) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$.

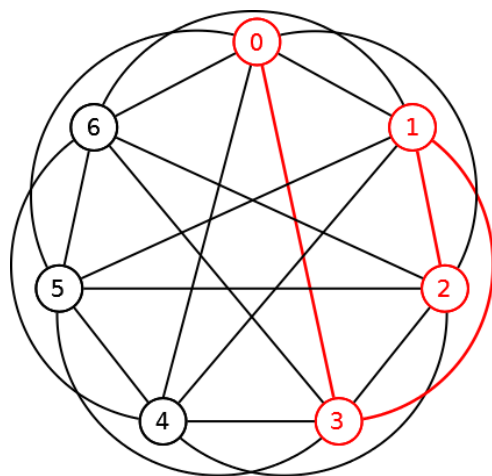
Etiquetemos cada arista (v_s, v_t) de K_{2m+1} (con $0 \leq s, t \leq 2m$) con la distancia $d_C(v_s, v_t)$ entre v_s y v_t en C (entendida como $d(v_s, v_t)$ en el subgrafo C), donde $1 \leq d_C(v_s, v_t) \leq m$. Consecuentemente, K_{2m+1} contiene exactamente $2m + 1$ aristas con la etiqueta i para $1 \leq i \leq m$ y H_1 contiene exactamente una arista de etiqueta i . Además, si la arista (v_s, v_t) tiene etiqueta i , entonces $(v_{s+1} \pmod{2m+1}, v_{t+1} \pmod{2m+1})$ también tiene etiqueta i , para $1 \leq i \leq m$.



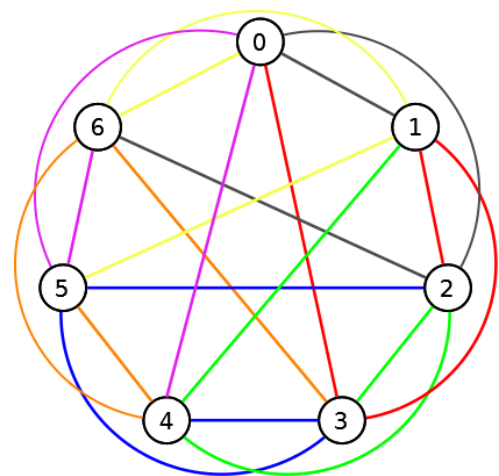
(a) Grafo completo K_7



(b) Etiquetado elegante del grafo $H = P_4$



(c) En rojo, H_1 , subgrafo de K_7 isomorfo a H



(d) H_k resultantes tras aplicar la demostración del Teorema 1.21

Figura 1.3: Descomposición cíclica de K_7 a partir de $H = P_4$

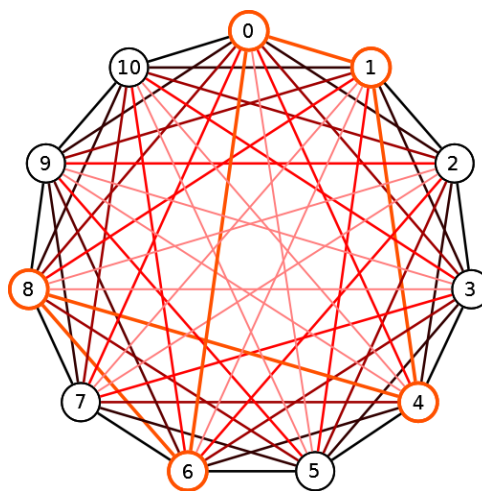


Figura 1.4: En naranja, subgrafo $H_1 \cong C_5$ de K_{11} . Siguiendo la demostración del Teorema 1.21, obtenemos que C_5 descompone a K_{11} cíclicamente

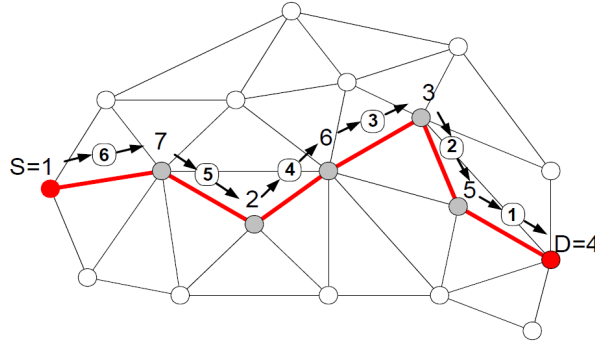


Figura 1.5: Ejemplo de aplicación del etiquetado elegante de caminos para el enrutamiento por MPLS. La imagen se puede encontrar en [6]

Sea $H_{k+1} = (V_{H_{k+1}}, E_{H_{k+1}})$, con $V_{H_{k+1}} = \{v_{i+k \pmod{2m+1}}\}_{v_i \in V_{H_1}}$, $E_{H_{k+1}} = \{(v_{i+k \pmod{2m+1}}, v_{j+k \pmod{2m+1}})\}_{(v_i, v_j) \in E_{H_1}}$, para $k = 1, \dots, 2m$. Entonces $H_k \cong H \forall k \in \{1, \dots, 2m+1\}$ y hemos obtenido una descomposición cíclica de K_{2m+1} en $2m+1$ subgrafos isomorfos a H . \square

En la Figura 1.3 tenemos una descomposición cíclica de K_7 en siete subgrafos isomorfos al árbol $H = P_4$, siguiendo los pasos de la demostración del Teorema 1.21.

Cabe destacar que no es necesario que H sea elegante para que K_{2m+1} sea H -descomponible cíclicamente. Por ejemplo, aunque C_5 no es elegante (demostrado por Rosa en su artículo [28] de 1967), C_5 descompone a K_{11} cíclicamente, tal y como se puede ver en la Figura 1.4. En naranja, tenemos un subgrafo H_1 de K_{11} isomorfo al ciclo $H = C_5$. Si seguimos los pasos de la demostración del Teorema 1.21, obtendremos los H_k y, por tanto, la descomposición cíclica de K_{11} en 11 grafos isomorfos a C_5 .

El trabajo de Rosa centró la atención en probar que todos los árboles son elegantes, para así demostrar la Conjetura de Ringel. Esto puede haber dado interés a la Conjetura de Árboles Elegantes, o de Ringel-Kotzig:

Conjetura de Ringel-Kotzig. *Todos los árboles son elegantes.*

Aunque estas fueron algunas de las razones originales que motivaron el estudio de árboles elegantes, más recientemente se han encontrado otras aplicaciones del etiquetado elegante de árboles, que se pueden ver en [2, p. 95].

Algunas de sus aplicaciones se encuentran en las redes de comunicación. Por ejemplo, en [6] se han desarrollado algoritmos de numeración de nodos basados en etiquetados elegantes de árboles (concretamente, de caminos y orugas, descritos en la sección siguiente). Estos etiquetados tienen utilidad en redes IP (*Internet Protocol*), especialmente en las áreas de MPLS (*multi-protocol label switching*) y QoS (*Quality of Service*), ya que les han servido para proponer refinamientos relacionados con el enrutamiento por IP.

Concretamente, cuando se envían paquetes a través de una red MPLS de un nodo a otro (es decir, a través de un circuito *end-to-end*), este se etiqueta inicialmente y pasa por una serie de nodos intermedios (llamados *label switch routers*) en los que se usa la etiqueta incluida en el paquete para determinar el siguiente nodo al que se tiene que ir, y luego se

reemplaza esta etiqueta por otra. En este contexto, se puede aprovechar el etiquetado de los nodos de forma que sirva para generar las etiquetas intermedias. En el caso *unicast routing case*, en el que se envía el paquete a un nodo específico, se pueden etiquetar elegantemente los nodos del camino en orden alternando la menor y la mayor etiqueta disponible, tal y como se ve en la Figura 1.5 (y como estudiaremos en la subsección 2.1.2), de manera que las etiquetas de las aristas (*link labels*) tomen valores distintos decrecientes de $n - 1$ a 1, del nodo fuente (*source node*) al nodo destino (*destination node*). Esto tiene como ventajas que los nodos intermedios pueden usar estas aristas inducidas para definir la ruta y que el valor de la arista indica el número de saltos de nodos restante. En el caso *multicast routing case*, en el que el paquete se envía a varios destinatarios que quieren recibirlo, se puede emplear el etiquetado de orugas descrito en la subsección 2.1.2 con el mismo objetivo.

También encontramos aplicaciones de los etiquetados elegantes en Big Data, donde las bases de datos orientadas a grafos son cada vez más utilizadas. Así, de acuerdo con [2], toda red social o dato relacional puede representarse mediante un grafo y almacenarse en dicha base de datos, lo que lleva a millones de relaciones entre usuarios almacenadas. La inclusión de etiquetados elegantes tiene como fin ayudar a indexar todos estos datos para agilizar las búsquedas.

Capítulo 2

Taxonomía de árboles elegantes

En este capítulo vamos a detallar algunos de los avances en el intento de probar la Conjetura de Ringel-Kotzig.

A la hora de probar que una determinada clase de árboles es elegante, los resultados de la literatura se basan en distintas características de los árboles, como su estructura, su diámetro o su número de vértices. Por ello, vamos a comenzar demostrando la elegancia de algunos tipos de árboles basándonos en su estructura; posteriormente, abordaremos el problema dando resultados basados en el diámetro del árbol y en el número de hojas; por último, mostraremos algunos resultados obtenidos computacionalmente que dependen del número de vértices del árbol.

No obstante, antes de incluir estos resultados vamos a explicar algunos procedimientos para obtener etiquetados bipartitos y elegantes de un árbol a partir de otros etiquetados. Aunque en las siguientes secciones nos centraremos en árboles elegantes, los etiquetados bipartitos nos serán útiles para construir etiquetados elegantes, por lo que los incluimos aquí.

Lema 2.1 (De [30], p. 3). *Sea ϕ un etiquetado elegante de un árbol T , donde $|V(T)| = n$. Entonces el etiquetado ϕ' definido como $\phi'(v) = n - 1 - \phi(v)$ es también un etiquetado elegante de T .*

Demostración. Como ϕ es inyectiva y tiene rango $\{0, 1, \dots, n-1\}$, ϕ' también es inyectiva y posee el mismo rango. Además, para cada arista $e = (u, v)$ tenemos $\phi'(u) - \phi'(v) = (n - 1 - \phi(u)) - (n - 1 - \phi(v)) = \phi(v) - \phi(u)$, luego el etiquetado inducido de la arista es el mismo, por lo que ϕ' es elegante. \square

Al etiquetado $\phi'(v) = n - 1 - \phi(v)$ se le suele llamar **etiquetado complementario** de ϕ .

Lema 2.2 (De [30], p. 4). *Sea ϕ un α -etiquetado de T de índice k , donde $|V(T)| = n$. Entonces, el etiquetado complementario ϕ' produce un α -etiquetado de T de índice $n-k-2$.*

Demostración. Por el Lema 2.1, sabemos que ϕ' es un etiquetado elegante. Sea $(u, v) \in E(T)$. Como ϕ es un α -etiquetado, tenemos, sin pérdida de generalidad, $\phi(u) \leq k < \phi(v)$.

Entonces $\phi'(u) < n - 1 - k \leq \phi'(v)$, luego $\phi'(u) \leq n - k - 2 < \phi'(v)$. Por tanto, ϕ' es un etiquetado de T de índice $n - k - 1$. \square

Lema 2.3 (De [30], p. 4). *Sea ϕ un α -etiquetado de T de índice k , con $|V(T)| = n$. Entonces el etiquetado*

$$\phi'(v) = \begin{cases} k - \phi(v) & \text{si } \phi(v) \leq k \\ n + k - \phi(v) & \text{si } \phi(v) > k \end{cases}$$

es también un α -etiquetado de índice k .

Demostración. Sea $(u, v) \in E(T)$. Como ϕ es un α -etiquetado, tenemos, sin pérdida de generalidad, $\phi(u) \leq k < \phi(v)$. Entonces $\phi'(u) \leq k < \phi'(v)$, y

$$\phi'(v) - \phi'(u) = (n + k - \phi(v)) - (k - \phi(u)) = n - \phi(v) + \phi(u).$$

Por tanto, las etiquetas de las aristas en ϕ' pertenecen también al conjunto $\{1, \dots, n - 1\}$, luego ϕ' es un etiquetado elegante, y también un α -etiquetado de índice k . \square

Al etiquetado anterior se le suele llamar **etiquetado inverso** de ϕ .

Definición 2.4 (De [10], p. 11). Un árbol T es **0-rotativo** si para cualquier $v \in V(T)$ existe un ϕ etiquetado elegante con $\phi(v) = 0$.

Si tenemos un árbol T con $|V(T)| = n$ y un etiquetado elegante ϕ , siempre podemos añadir un vértice w adyacente al vértice que lleva la etiqueta 0, y obtendremos un nuevo árbol T' . Entonces, el etiquetado ϕ' de T' definido como

$$\phi'(v) = \begin{cases} \phi(v) & \text{si } v \in T \\ n & \text{si } v = w \end{cases}$$

es elegante. Por tanto, a partir de un árbol T 0-rotativo podemos obtener un etiquetado elegante de cualquier árbol T' que se construya añadiendo un vértice y una arista a T . Además, empleando el Lema 2.1 obtendremos un etiquetado ϕ'' complementario tal que $\phi''(w) = 0$. Repitiendo el proceso, obtendríamos una familia de grafos elegantes a partir de uno.

2.1. Árboles elegantes según su estructura

2.1.1. Árboles simétricos

En este apartado vamos a ver que todos los árboles simétricos son elegantes. Para ello, veamos primero el siguiente resultado.

Lema 2.5 (De [27], p. 9). *Sea T un árbol simétrico de raíz v y sean $\{v_1, \dots, v_k\}$ los vértices del primer nivel. Sea $T_i \subset T$ la componente conexa del grafo $T \setminus \{(v, v_i)\}$ a la que pertenece el nodo v_i , para $1 \leq i \leq k$. Entonces los subgrafos $\{T_1, \dots, T_k\}$ son isomorfos.*

Demostración. Claramente, definiendo como raíces de los árboles $\{T_1, \dots, T_k\}$ los nodos $\{v_1, \dots, v_k\}$, respectivamente, se tiene que son simétricos. Supongamos $k \geq 2$, ya que si no la demostración sería evidente, y veamos que T_1 y T_2 son isomorfos, de donde se seguirá que todos los T_i son árboles isomorfos. Para ello, vamos a definir explícitamente un isomorfismo, $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$.

Empezando en el nivel 0, definimos $\varphi(v_1) = v_2$. Ahora nos dirigimos a los hijos directos de v_1 y v_2 , es decir, los vértices de nivel 1. Como T es simétrico, v_1 y v_2 tienen el mismo número de hijos, que llamaremos u_1, u_2, \dots, u_{k_1} para T_1 y w_1, w_2, \dots, w_{k_1} para T_2 . Así, definimos $\varphi(u_i) = w_i \forall i = 1, 2, \dots, k_1$. Supongamos ahora que hemos definido φ para todos los vértices de T_1 (y de T_2) hasta el nivel l . Entonces, para cada vértice u en el l -ésimo nivel de T_1 sabemos que tiene k_l hijos, pero como $\varphi(u) \in T_2$ se encuentra también en el nivel l -ésimo, también tiene k_l hijos, por lo que definimos φ como una biyección entre los hijos de u y los de $\varphi(u)$.

Sea $(u, u') \in T_1$ una arista con u perteneciente al nivel l -ésimo y u' al $(l+1)$ -ésimo. Entonces, por la forma en que hemos definido φ , tenemos que $(\varphi(u), \varphi(u'))$ es arista de T_2 con $\varphi(u)$ un vértice del nivel l -ésimo y $\varphi(u')$ del nivel $(l+1)$ -ésimo. Por tanto, T_1 y T_2 son isomorfos, y el isomorfismo induce una biyección entre los vértices de un mismo nivel. \square

Ahora procedemos con la prueba del teorema que queríamos demostrar:

Teorema 2.6 (De [27], pp. 9-13). *Todos los árboles simétricos son elegantes.*

Demostración. Probaremos el teorema por inducción en el número de niveles mediante la construcción de un etiquetado elegante que asigna la etiqueta 0 a la raíz.

Si T es un árbol simétrico con 0 niveles, entonces consiste en un único vértice y ninguna arista, y claramente es elegante asignándole la etiqueta 0 a dicho vértice. Supongamos que para todos los árboles simétricos con $l-1$ niveles (con $l \geq 1$) existe un etiquetado elegante tal que la etiqueta de la raíz es 0.

Sea T un árbol simétrico con l niveles. Sea v la raíz, $\{v_i\}_{i=1}^k$ sus hijos directos y $\{T_i\}_{i=1}^k$ los subgrafos dados por las componentes conexas de $T \setminus \{(v, v_1), \dots, (v, v_k)\}$ que contienen a los vértices v_i , respectivamente. Supondremos que cada T_i , para $1 \leq i \leq k$, tiene n vértices y la raíz v_i . Entonces, por el Lema 2.5, sabemos que T_1, \dots, T_k son isomorfos. Sean $\varphi_i : T_1 \rightarrow T_i$ los isomorfismos dados por dicho lema. Por la hipótesis de inducción, existe un etiquetado elegante $\phi_1 : T_1 \rightarrow \{0, \dots, n-1\}$ tal que $\phi_1(v_1) = 0$. Entonces, ϕ_1 induce etiquetados elegantes $\phi_i = \phi_1 \circ \varphi_i^{-1} : T_i \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$ tales que $\phi_i(v_i) = 0$ para $i = 2, 3, \dots, k$. Por mantener la notación, definiremos también $\varphi_1 = Id_{T_1}$, y $\phi_1 = \phi_1 \circ \varphi_1$.

Sean u_{1,l_j} , con $j = 1, \dots, m_l$, los vértices de T_1 en el nivel l , y $\varphi_i(u_{1,l_j})$ los vértices de T_i en el nivel l . Consideremos el siguiente etiquetado $\phi : T \rightarrow \{0, 1, \dots, nk\}$:

$$\phi(x) = \begin{cases} nk & \text{si } x = v, \\ (i-1)n & \text{si } x = v_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k, \\ \phi_i(\varphi_i(u_{1,l_j})) + (i-1)n = \phi_1(u_{1,j}) + (i-1)n & \text{si } x = \varphi_i(u_{1,l_j}), l \geq 1 \text{ es impar,} \\ \phi_i(\varphi_i(u_{1,l_j})) + (k-i)n = \phi_1(u_{1,j}) + (k-i)n & \text{si } x = \varphi_i(u_{1,l_j}), l \geq 2 \text{ es par.} \end{cases}$$

Veamos cómo son las etiquetas que ϕ induce en las aristas:

- Las etiquetas de las aristas que inciden en la raíz y sus hijos son de la forma $|\phi(v) - \phi(v_i)| = |nk - (i-1)n| = n(k-i+1)$ para $i = 1, 2, \dots, k$, es decir, el conjunto $\{n, 2n, \dots, kn\}$.
- Consideremos dos vértices adyacentes $u, u' \in T_1$ y los correspondientes $\phi_i(u), \phi_i(u') \in T_i$, y supongamos que u pertenece al nivel l y u' al nivel $l+1$.
 1. Si l es impar, tenemos el conjunto de etiquetas $\{|\phi(\varphi_i(u)) - \phi(\varphi_i(u'))| : i = 1, 2, \dots, k\} = \{|\phi_1(u) + (k-i)n - \phi_1(u') - (i-1)n| : i = 1, 2, \dots, k\} = \{|\phi_1(u) - \phi_1(u') + (k-2i+1)n| : i = 1, 2, \dots, k\}$.
 2. Si l es par, tenemos el conjunto de etiquetas $\{|\phi(\varphi_i(u)) - \phi(\varphi_i(u'))| : i = 1, 2, \dots, k\} = \{|\phi_1(u) + (i-1)n - \phi_1(u') - (k-i)n| : i = 1, 2, \dots, k\} = \{|\phi_1(u) - \phi_1(u') - (k-2i+1)n| : i = 1, 2, \dots, k\} = \{|\phi_1(u') - \phi_1(u) + (k-2i+1)n| : i = 1, 2, \dots, k\}$.

Nuestro objetivo ahora es ver que para cada $1 \leq m \leq n-1$ entero, el conjunto $\{m+in : 1 \leq i < k\}$ de etiquetas está entre las inducidas por ϕ en las aristas. En primer lugar, tenemos que para $1 \leq |m| \leq n-1$:

$$\begin{aligned} \{|m + (k-2i+1)n| : i = 1, 2, \dots, k\} &= \{m + (k-2i+1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\ &\cup \{-m - (k-2i+1)n : \frac{k+1}{2} < i \leq k\} \cup \{|m| : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{m + (k-2i+1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\ &\cup \{-m - (k-2(k+1-i)+1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \{|m| : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{m + (k-2i+1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\ &\cup \{-m - (k-2i+1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \{|m| : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\ &= \{|m| + (k-2i+1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\ &\cup \{n - |m| + (k-2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \{|m| : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Como ϕ_1 era el etiquetado elegante de T_1 que teníamos por hipótesis, sabemos que, dado m , con $1 \leq m \leq n-1$ y tal que $m \neq n-m$, existen dos aristas $(u, u'), (w, w') \in E(T_1)$ con dichas etiquetas, es decir, de manera que $|\phi_1(u) - \phi_1(u')| = m$ y $|\phi_1(w) - \phi_1(w')| = n-m$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que u y w pertenecen a un nivel impar de T , y por tanto u' y w' pertenecen a un nivel par. Haciendo uso de las igualdades

de conjuntos anteriores, veamos el conjunto de etiquetas inducido por ϕ en T a partir de estas dos etiquetas de aristas de T_1 :

$$\begin{aligned}
& \{|\phi_1(u) - \phi_1(u') + (k - 2i + 1)n| : i = 1, 2, \dots, k\} \cup \\
& \quad \cup \{|\phi_1(w) - \phi_1(w') + (k - 2i + 1)n| : i = 1, 2, \dots, k\} = \\
= & \{|\phi_1(u) - \phi_1(u')| + (k - 2i + 1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{n - |\phi_1(u) - \phi_1(u')| + (k - 2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{|\phi_1(u) - \phi_1(u')| : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} \cup \\
& \quad \cup \{|\phi_1(w) - \phi_1(w')| + (k - 2i + 1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{n - |\phi_1(w) - \phi_1(w')| + (k - 2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{|\phi_1(w) - \phi_1(w')| : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\
= & \{m + (k - 2i + 1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{n - m + (k - 2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \{m : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} \cup \\
& \quad \cup \{n - m + (k - 2i + 1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{m + (k - 2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \{n - m : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\
= & \{m + in : 0 \leq i < k\} \cup \{n - m + in : 1 \leq i < k\}.
\end{aligned}$$

Así pues, para cada m tal que $1 \leq m < n - 1$, $m \neq n - m$, el conjunto de etiquetas $\{m + in : 0 \leq i < k\}$ está entre las inducidas por ϕ en las aristas de T .

Si $m = n - m$, podemos también suponer que existe $(u, u') \in E(T)$ con u en un nivel impar y u' en un nivel par, de manera que $|\phi_1(u) - \phi_1(u')| = m$, y de forma similar al desarrollo anterior, tenemos que el conjunto de etiquetas inducido por ϕ en T a partir de esta es:

$$\begin{aligned}
& \{|\phi_1(u) - \phi_1(u') + (k - 2i + 1)n| : i = 1, 2, \dots, k\} = \\
= & \{|\phi_1(u) - \phi_1(u')| + (k - 2i + 1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{n - |\phi_1(u) - \phi_1(u')| + (k - 2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{|\phi_1(u) - \phi_1(u')| : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\
= & \{m + (k - 2i + 1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \\
& \quad \cup \{n - m + (k - 2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \{m : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\
= & \{m + (k - 2i + 1)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup
\end{aligned}$$

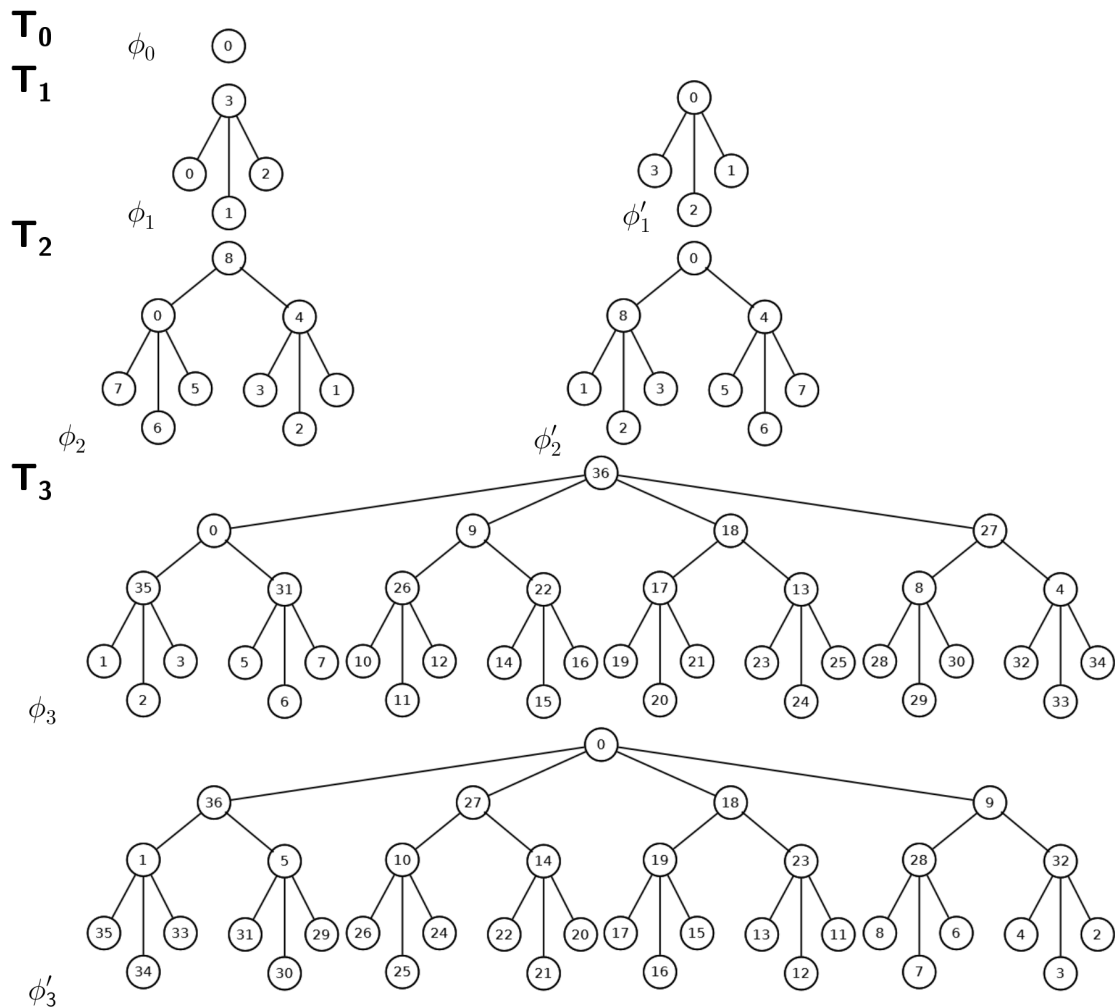


Figura 2.1: Etiquetado elegante de un árbol simétrico.

$$\begin{aligned}
 & \cup \{m + (k - 2i)n : 1 \leq i < \frac{k+1}{2}\} \cup \{m : i = \frac{k+1}{2}, i \in \mathbb{N}\} = \\
 & = \{m + in : 0 \leq i < k\}.
 \end{aligned}$$

Por tanto, las aristas de T_1, \dots, T_k llevan las etiquetas $\{m + in : 0 \leq i < k\}$ para $1 \leq m \leq n - 1$, y las aristas adyacentes a v y v_1, \dots, v_k , el conjunto de etiquetas $\{n + in : 0 \leq i \leq k\}$, luego ϕ es elegante.

Por último, como $\phi(v) = nk$, aplicando el Lema 2.1 obtenemos un etiquetado complementario ϕ' , de manera que $\phi'(v) = 0$. \square

Veamos, a través de un ejemplo, cómo proceder para etiquetar el árbol simétrico T_3 de la Figura 2.1, esto es, queremos encontrar un etiquetado elegante de un árbol simétrico de 3 niveles T_3 de raíz v , con 4 vértices adyacentes v_1, \dots, v_4 de grado 3, 8 vértices del segundo nivel de grado 4 y 24 vértices del tercer nivel de grado 1 (hojas). En este caso, siguiendo la demostración del Teorema 2.6, partimos del subgrafo T_0 generado por una hoja v de T_0 , y del etiquetado $\phi_0(v) = 0$.

A partir de T_0 , construimos el etiquetado de T_1 , subgrafo que obtenemos tomando cualquier nodo del nivel 2 de T_3 (que será la raíz v de T_1) y sus sucesores. Así, tendremos un árbol T_1 de 4 nodos, con una raíz que llamaremos v y tres hojas v_1, v_2, v_3 adyacentes a la misma, y el etiquetado ϕ_1 será tal que $\phi_1(v) = 3$, $\{\phi_1(v_i) = (i - 1)n = (i - 1)$, para $i = 1, 2, 3$. Posteriormente, tomaremos como etiquetado de T_1 el complementario de ϕ_1 , es decir, ϕ'_1 .

A partir de T_1 y de ϕ'_1 , vamos a construir el etiquetado ϕ_2 de T_2 , subgrafo de T_3 formado por un vértice del nivel 1 (que llamaremos raíz de T_2 y denotaremos por v) y sus sucesores, con $|V(T_2)| = 9$ y $n = |V(T_1)| = 4$. Siguiendo la demostración del Teorema 2.6, tenemos $\phi_2(v) = 8$, $\phi_2(v_1) = (1 - 1) * 4 = 0$, $\phi_2(v_2) = (2 - 1) * 4 = 4$, para v_1, v_2 los vértices adyacentes a v ; y también tenemos, para los vértices del nivel 2, el conjunto de etiquetas $\{\phi'_1(u_{1,j}) + (k - i)n\}$, donde $\phi'_1(u_{1,j})$ son las etiquetas de las hojas de T_1 , o sea, el conjunto $\{3, 2, 1\}$, $k = 2$ y $i = 1, 2$. Por tanto, las etiquetas de las hojas de T_2 serán el conjunto $\{3 + 4, 2 + 4, 1 + 4\} = \{7, 6, 5\}$ para las hojas adyacentes al nodo de etiqueta 8, y $\{3, 2, 1\}$ para las adyacentes a 4. Nos queda calcular ϕ'_2 , etiquetado complementario de ϕ_2 .

Realizando este proceso una última vez, obtenemos el etiquetado elegante de T_3 .

2.1.2. Caminos y orugas

Un tipo de árboles de estructura muy simple son los **caminos** (del inglés, *paths*), es decir, árboles con sólo dos hojas, y los árboles que tienen un camino de base (al eliminar todas sus hojas y las aristas incidentes en ellas), conocidos comúnmente con el nombre de **orugas** (del inglés, *caterpillars*).

En [28], Rosa probó que todos los árboles que tienen un camino como base son elegantes dando una construcción de un etiquetado bipartito de dichos árboles. El etiquetado bipartito de un camino se consigue etiquetando alternativamente los vértices con la mayor y menor etiqueta posible, comenzando en una hoja y terminando en la otra, tal y como se muestra en el ejemplo de la Figura 2.2.

En el caso de las orugas, un etiquetado elegante se puede obtener mediante un procedimiento similar. Supongamos que tenemos una oruga O con $|V(O)| = n$ y queremos construir un etiquetado elegante de O . En primer lugar, como las orugas son grafos bipartitos (todos los árboles lo son), tomamos un camino P de O de longitud máxima de vértices $V_P = \{v_1, \dots, v_c\}$ y definimos $\{v_i\}_{i \text{ impar}} \subseteq V_1$, $\{v_i\}_{i \text{ par}} \subseteq V_2$, donde V_1, V_2 son los conjuntos disjuntos que nos da la definición de grafo bipartito. Sea n_i el número de hojas adyacentes al nodo v_i , para $2 \leq i \leq c - 1$. A continuación, comenzamos etiquetando v_1 con la etiqueta 0. Luego, se le da a v_2 la etiqueta $n - 1$, y se etiquetan todas las hojas adyacentes a v_2 (que pertenecen a V_1 por ser vecinas de v_2) con las etiquetas del conjunto $\{1, 2, \dots, n_2\}$. Posteriormente, a v_3 se le da la etiqueta $n_2 + 1$, y a todas las hojas adyacentes a v_3 (pertenecientes a V_2) el conjunto de etiquetas $\{n - 2, n - 3, \dots, n - 1 - n_3\}$. Repitiendo el proceso con todos los nodos de P , obtenemos un etiquetado elegante. Podemos ver un etiquetado elegante de una oruga en el ejemplo de la Figura 2.3.

Así pues, tenemos los siguientes resultados, dados por Rosa en 1977:

Teorema 2.7. *Todos los caminos tienen un α -etiquetado.*



Figura 2.2: Etiquetado elegante de un camino

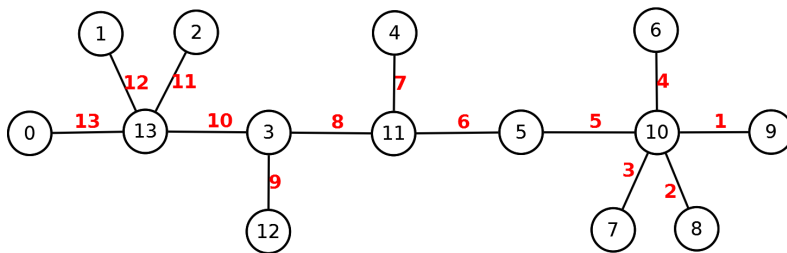


Figura 2.3: Etiquetado elegante de una oruga

Demostración. Basta considerar el etiquetado de un camino definido anteriormente, pues es también un α -etiquetado de índice $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. \square

Teorema 2.8. *Todas las orugas tienen un α -etiquetado.*

Demostración. Basta considerar el etiquetado definido anteriormente, que es también un α -etiquetado de índice $|V_1| - 1$. \square

Relacionados con caminos, existen en la literatura gran cantidad de resultados que amplían los que acabamos de ver. Concretamente, Rosa anunció en 1966 que todos los caminos son 0-rotativos, resultado que probó en una nota en 1977 en [29], de acuerdo con [10]. También probó en el mismo artículo que existe un etiquetado bipartito de cualquier camino en el que cualquier vértice puede llevar la etiqueta 0 si, y solo si tal vértice no es el central de P_5 .

Además, Chung y Hwang probaron en 1981 en [9] que todas las orugas cuyos vértices internos del camino base $\{v_2, \dots, v_{k-1}\}$ tienen el mismo grado (llamadas *t-toed caterpillars*, en inglés) son 0-rotativas, a partir del etiquetado bipartito de las mismas propuesto por Rosa. No obstante, y de acuerdo con [10], cabe destacar que todas las orugas no son 0-rotativas en general: si consideramos la oruga resultante de identificar una de las hojas v de $K_{1,3}$ con un vértice de K_2 , y le damos a v la etiqueta 0, no hay forma de obtener un etiquetado elegante.

Basándose en resultados anteriores de Rosa y Kotzig, Cattell describe en 2007 en [8] el conjunto de etiquetas que cualquier vértice de un camino de orden n puede tomar en un etiquetado elegante y en un α -etiquetado.

Por último, y aunque sabemos que todos los caminos son elegantes, desconocemos el número de etiquetados elegantes distintos que poseen. Aldred, Širáň y Širáň prueban

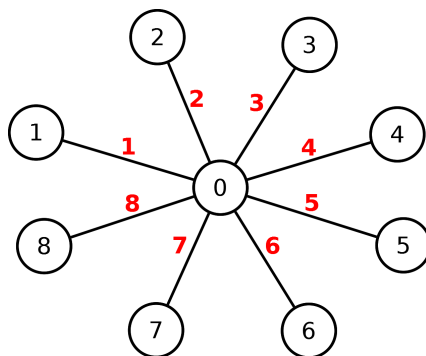


Figura 2.4: Etiquetado elegante de una estrella.

computacionalmente en 2003 en [4] que el número de etiquetados elegantes de un camino de longitud n crece asintóticamente al menos tan rápido como $(\frac{5}{3})^n$. Indican que resultados de este tipo pueden tener aplicaciones en Teoría de Grafos y Topología.

En cuanto a las orugas, existen numerosos resultados que prueban la elegancia de árboles formados a partir de ellas. Uno de ellos lo veremos en la sección 2.1.4, en [14] se definen las superorugas y superorugas extendidas (del inglés, *super-caterpillars* y *extended super-caterpillars*) y se demuestra que son elegantes, y en [24] se incluye una demostración de la elegancia de un árbol construido identificando vértices de máxima excentricidad de varias orugas que cumplen ciertas condiciones sobre el diámetro y el grado de sus vértices.

2.1.3. Estrellas, superestrellas y tracas

Otros árboles de estructura sencilla son las **estrellas** (del inglés, *stars*), esto es, árboles con un único nodo (o ninguno, si estamos ante P_2) de grado mayor que uno, que llamaremos *nodo central*. Su etiquetado elegante es sencillo de construir: basta etiquetar el nodo central con 0 o n , y asignar el resto de las etiquetas a las hojas indistintamente. Un ejemplo de ello lo tenemos en la Figura 2.4.

Una **superestrella** S (del inglés, *superstar*) es el árbol que resulta si, partiendo de una estrella central S_k con k hojas v_i y de k estrellas S_i , con $i = \{0, 1, \dots, k-1\}$, identificamos cada hoja v_i de la estrella central con una hoja de la estrella S_i . Diremos, en este caso, que l_i , con $i = \{0, \dots, k-1\}$, es el número de hojas de S que pertenecían a la estrella S_i (y, por tanto, el número total de hojas de S será $\sum_{i=0}^{k-1} l_i$). En [22, p. 1114] se prueba, empleando otra notación, que existe una clase particular de superestrellas para la que se puede construir un etiquetado elegante:

Teorema 2.9. *Sea S una superestrella con $n+1$ vértices formada por k estrellas $\{S_i\}_{i=0}^{k-1}$ y una estrella central S_k , y supongamos que para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, existen i estrellas $S_{t_0}, \dots, S_{t_i} \in \{S_k\}_{k=0}^{k-1}$ con al menos $k-i$ hojas en S , es decir, con $l_{t_j} \geq k-i \forall j \in \{0, \dots, i\}$. Entonces S es elegante.*

Demostración. Ordenemos las estrellas $\{S_i\}_{i=0}^{k-1}$ según su número de hojas, de forma que $l_0 \geq l_1 \geq \dots \geq l_{k-1}$. Entonces, por hipótesis tenemos que $l_i \geq k-i-1 \forall i \in \{0, \dots, k-1\}$. Asignémosle la etiqueta i al vértice central de la estrella S_i , para $i = \{0, 1, \dots, k\}$. Ahora

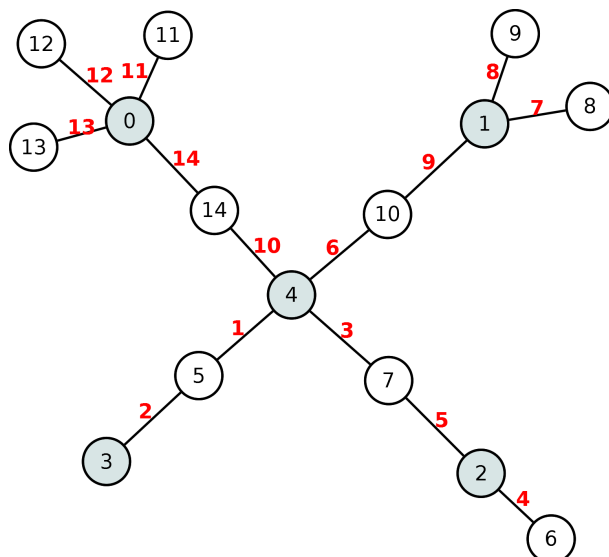


Figura 2.5: Etiquetado elegante de una superestrella

etiquetemos los vértices adyacentes al nodo central 0 (de S_0) con las etiquetas $\{n - l_0, \dots, n\}$ de forma que el vértice adyacente al central de S_k tenga la etiqueta $n - l_0 - 1 + k$. Repitiendo el proceso, etiquetemos los vértices adyacentes al nodo central de S_i , para $i = \{1, \dots, k - 1\}$, con las etiquetas $\{n - \sum_{j=0}^i l_j - i, \dots, n - \sum_{j=0}^{i-1} l_j - i\}$, de manera que el vértice adyacente al central de S_k tenga la etiqueta $n - \sum_{j=0}^i (l_j + 1) - i + k$. \square

En la Figura 2.5, podemos ver el etiquetado elegante de una superestrella de 15 vértices ($n = 14$) realizado según la demostración anterior. Así, tenemos que $k = 4$, y hemos numerado las estrellas empezando en la esquina superior izquierda, en el sentido de las agujas del reloj, de acuerdo con el número de hojas que poseen, de manera que $l_0 = 3$, $l_1 = 2$, etc. Los vértices en color gris, que se corresponden con los vértices centrales de las estrellas que componen la superestrella, llevan las etiquetas $\{0, \dots, 4\}$, y, por ejemplo, para la estrella S_1 , vemos que las etiquetas de los vértices adyacentes al central son las $\{n - \sum_{j=0}^i l_j - i, \dots, n - \sum_{j=0}^{i-1} l_j - i\} = \{14 - (3 + 2) - 1, \dots, 14 - 3 - 1\} = \{8, \dots, 10\}$ y la etiqueta del nodo adyacente al central de S_4 es $n - \sum_{j=0}^i (l_j + 1) - i + k = 14 - (4 + 3) - 1 + 4 = 10$.

Del mismo modo, y según el Teorema 2.9, vemos que $l_0 = 3 = k - i - 1$, $l_1 = 2$, $l_2 = 1$ y $l_3 = 0$, por lo que si eliminásemos una hoja de cualquiera de las estrellas S_0, \dots, S_3 , ya no podríamos conseguir un etiquetado elegante siguiendo este procedimiento.

A las superestrellas se las conoce también con el nombre de plataneros (del inglés, *banana trees*), y un platanero generalizado (del inglés, *generalized banana tree*) es un árbol obtenido a partir de una colección de estrellas conectando mediante un camino de longitud fija $h \leq 0$ una de las hojas de cada estrella con un nuevo vértice, llamado ápice (de *apex*).

De las definiciones se desprende que un platanero generalizado con $h = 1$ es un platane-ro. En 2007, Hrnčiar y Monoszová probaron en [16] que todos los plataneros generalizados son elegantes, dando la construcción de un etiquetado elegante. La demostración no vamos

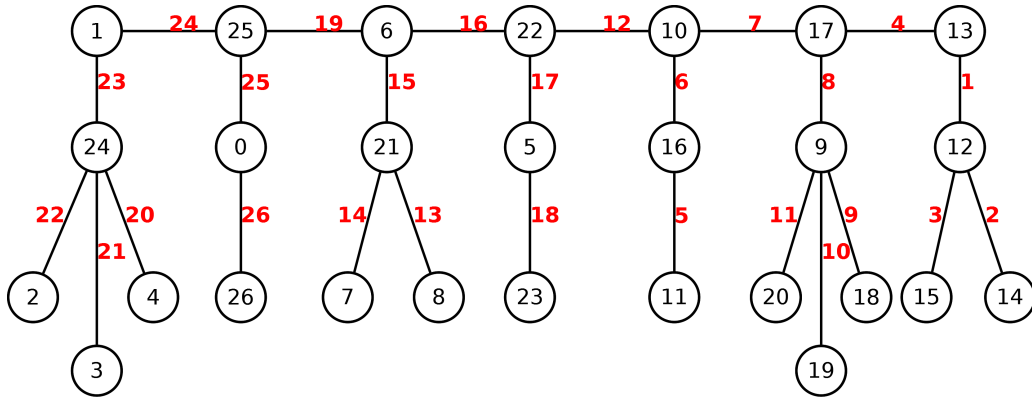


Figura 2.6: Etiquetado elegante de una traca

a incluirla en este trabajo, pero se basa en transferencias de hojas de primer y segundo orden, que introducimos en la sección 2.2.

Una **traca** (*firecracker*) es un árbol que consiste en un camino y una colección de estrellas, donde cada vértice del camino es adyacente al vértice central de exactamente una estrella. También puede ser visto como una clase particular de langosta (que estudiaremos en la sección 2.1.6). De acuerdo con [5], Chen, Lu y Yeh probaron en 1997 que todas las tracas son elegantes. No obstante, al no encontrar dicho artículo, he realizado una demostración independiente:

Teorema 2.10. *Todas las tracas son elegantes.*

Demostración. Supongamos que tenemos una traca de $n + 1$ vértices formado por un camino $P = (p_1, \dots, p_{n_P})$, y que cada p_i es adyacente al vértice central de la estrella S_i , que tiene l_i hojas.

Comenzaremos etiquetando los vértices del camino formado por p_1, p_2 y las estrellas S_1 y S_2 , alternando las etiquetas disponibles máximas y mínimas (de forma similar al etiquetado que realizábamos para una oruga). Así, las hojas de S_2 serán etiquetadas, indistintamente, con las etiquetas $\{n - l_2 + 1, \dots, n\}$; el vértice central de S_2 llevará la etiqueta 0; p_2 llevará la etiqueta $n - l_2$; la etiqueta de p_1 será 1; el vértice central de S_1 llevará la etiqueta $n - l_2 - 1$; y las hojas de S_1 serán etiquetadas, indistintamente, con las etiquetas $\{2, \dots, 2 + l_1 - 1\}$.

Generalizando el procedimiento, tenemos que para $i \in \{2, \dots, \lfloor \frac{n_P}{2} \rfloor\}$, las hojas de S_{2i} llevarán las etiquetas $\{n - \sum_{j=1}^i l_{2j} - 2i + 3, \dots, n - \sum_{j=1}^{i-1} l_{2j} - 2i + 2\}$; la etiqueta del vértice central de S_{2i} será $\sum_{j=1}^{i-1} l_{2j-1} + 2i - 2$; p_{2i} llevará la etiqueta $n - \sum_{j=1}^i l_{2j} - 2i + 2$; p_{2j-1} llevará la etiqueta $\sum_{j=1}^{i-1} l_{2j-1} + 2i - 1$; la etiqueta del vértice central de S_{2i-1} será $n - \sum_{j=1}^i l_{2j} - 2i + 1$; y las hojas de S_{2i-1} tomarán etiquetas en el conjunto $\{\sum_{j=1}^{i-1} l_{2j-1} + 2i, \dots, \sum_{j=1}^i l_{2j-1} + 2i - 1\}$.

Si n_P fuese par, el etiquetado estaría terminado; en caso contrario, terminaríamos el proceso de etiquetado comenzando por las hojas de S_{n_P} , que llevarían las etiquetas $\{n - \sum_{j=1}^{\frac{n_P+1}{2}} l_{2j} - (n_P + 1) + 3, \dots, n - \sum_{j=1}^{\frac{n_P-1}{2}} l_{2j} - (n_P + 1) + 2\}$; el vértice central de S_{n_P}

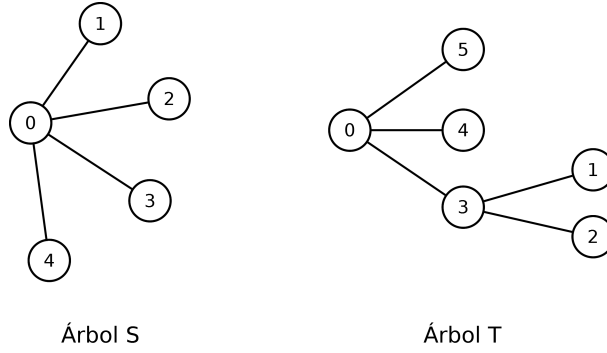


Figura 2.7: Árboles S y T con etiquetados elegantes s y t

llevaría la etiqueta $\sum_{j=1}^{\frac{n_P-1}{2}} l_{2j-1} + (n_P + 1) - 2$; y la etiqueta de p_{n_P} sería $n - \sum_{j=1}^{\frac{n_P+1}{2}} l_{2j} - (n_P + 1) + 2$. \square

En la Figura 2.6, podemos ver un ejemplo de etiquetado elegante en una traca.

2.1.4. Construcción de árboles elegantes a partir de otros

Dos métodos importantes que tenemos para construir árboles elegantes grandes a partir de otros más pequeños son los siguientes, conocidos como Δ -construcción y Δ_{+1} -construcción, descritos por Stanton y Zarnke en 1973 y que se pueden encontrar en [30, pp. 8-10].

Definición 2.11. Sean S y T dos árboles, y $v \in V(T)$, $|V(S)| = n_S$. Consideremos el árbol que resulta de identificar cada vértice v_i de S con el vértice correspondiente a v en un árbol T_i isomorfo a T , para $0 \leq i \leq n_S - 1$. Llamaremos a este árbol $S\Delta T$, y a esta construcción, Δ -construcción.

Teorema 2.12. Si S y T son elegantes, entonces $S\Delta T$ es elegante.

Demostración. Sean s y t etiquetados elegantes de S y T , y supongamos que S y T tienen, respectivamente, n_S y n_T vértices, por lo que $S\Delta T$ tendrá n_S subgrafos isomorfos a T , $\{T_0, \dots, T_{n_S-1}\}$. Vamos a construir n_S etiquetados $\{t_0, \dots, t_{n_S-1}\}$ de los árboles $\{T_0, \dots, T_{n_S-1}\}$ isomorfos a T . Para ello, como T es bipartito, elegiremos la partición (V_1, V_2) de $V(T)$ que nos da dicha propiedad, y las particiones (V_{1_i}, V_{2_i}) de T_i obtenidas por el isomorfismo de T a T_i . Tomando estas particiones, definiremos las etiquetas de T_i , con $i \in \{0, \dots, n_S - 1\}$, como:

$$t_i(v) = \begin{cases} in_T + t(v) & \text{si } v \in V_{1_i}, \\ (n_S - 1 - i)n_T + t(v) & \text{si } v \in V_{2_i}. \end{cases}$$

Por lo tanto, los vértices $v_i \in V_{1_i}$, con v_i imagen de v en el isomorfismo de T a T_i , para $0 \leq i \leq n_S - 1$, obtendrán el conjunto de etiquetas $\{t(v), t(v) + n_T, t(v) + 2n_T, \dots, t(v) +$

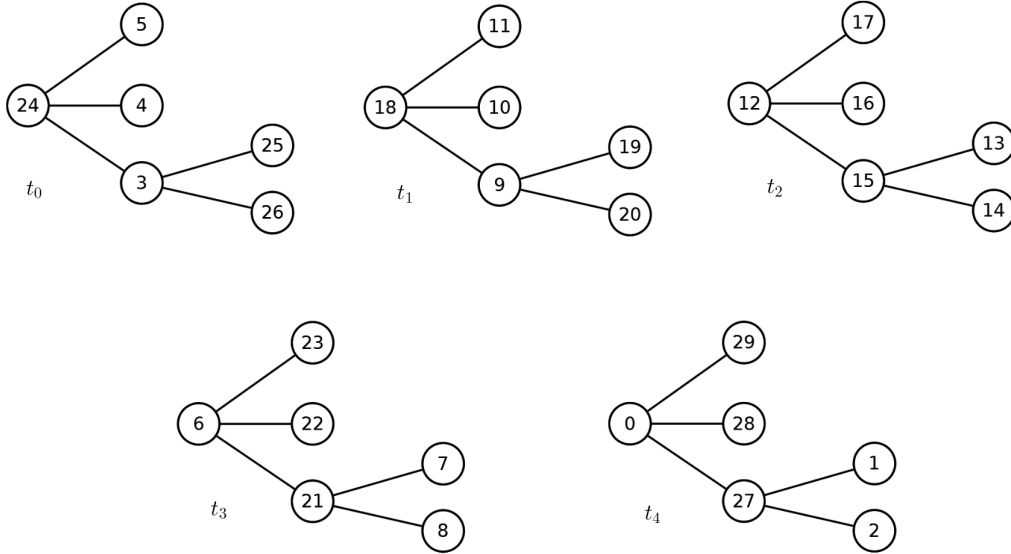


Figura 2.8: Cinco grafos $\{T_0, \dots, T_4\}$ isomorfos a T con los etiquetados $\{t_0, \dots, t_4\}$

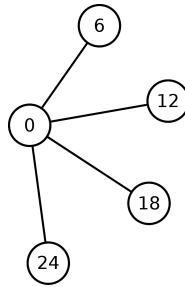


Figura 2.9: Etiquetado s' de S

$(n_S - 1)n_T\}$ en los subgrafos isomorfos $\{T_0, T_1, T_2, \dots, T_{n_S-1}\}$, respectivamente; sin embargo, si $v \in V_2$, las imágenes de dicho vértice por los isomorfismos de T a T_i obtendrán las etiquetas $\{t(v) + (n_S - 1)n_T, t(v) + (n_S - 2)n_T, \dots, t(v)\}$ en $\{T_0, T_1, T_2, \dots, T_{n_S-1}\}$. Es claro entonces que todas las etiquetas de los grafos $\{T_i\}_{i=0}^{n_S-1}$ son distintas, que las etiquetas inducidas en las aristas de los subgrafos también son distintas, y que los conjuntos $\cup V_{t_i}, \cup E_{t_i}$ de etiquetas de vértices y aristas empleados en los etiquetados de $\{T_i\}_{i=0}^{n_S-1}$ son:

$$\cup V_{t_i} = \{0, 1, \dots, n_S n_T - 1\}$$

$$\cup E_{t_i} = \{0, 1, \dots, n_S n_T - 1\} \setminus \{n_T, 2n_T, \dots, (n_S - 1)n_T\}.$$

Ahora, etiquetemos los vértices de S con un nuevo etiquetado $s'(v) = s(v)n_T$. Por lo anterior, sabemos que cada etiqueta dada a un vértice de S está dada también a un vértice de un T_i distinto. Además, las aristas de S llevan el conjunto de etiquetas $\{n_T, 2n_T, \dots, (n_S - 1)n_T\}$.

Por último, identificamos cada vértice de S con el vértice del árbol T_i que lleva la misma etiqueta, y obtendremos el árbol $S\Delta T$ con un etiquetado elegante, luego $S\Delta T$ es elegante. \square

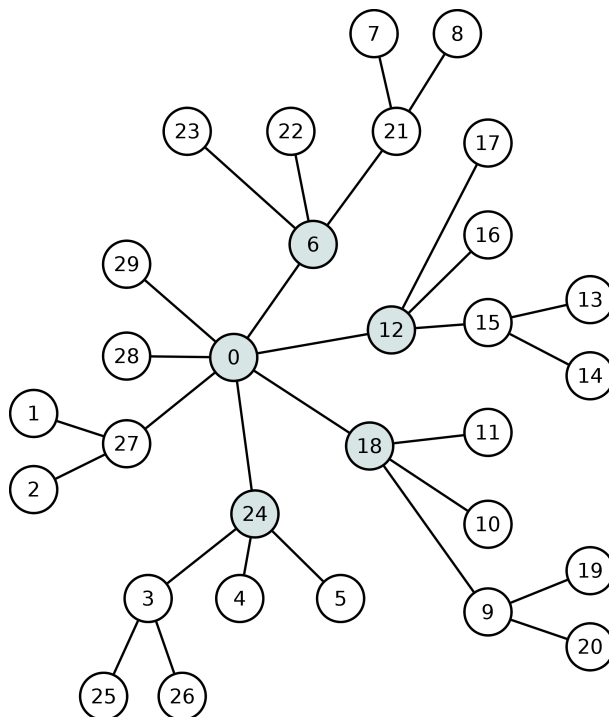


Figura 2.10: Árbol $S\Delta T$ con un etiquetado elegante

Vamos a ilustrar esta demostración con un ejemplo. Supongamos que tenemos los árboles S y T de la Figura 2.7, con $n_S = 5$ y $n_T = 6$ y los etiquetados respectivos s y t , y queremos que $S\Delta T$ contenga $n_S = 5$ subgrafos isomorfos a T . Vamos a realizar los etiquetados de estos 5 subgrafos, $\{T_0, \dots, T_4\}$. Para ello, primero tomamos la partición $(V_1 = \{5, 4, 3\}, V_2 = \{0, 1, 2\})$ de T y, siguiendo los pasos dados en la demostración anterior, obtendremos los etiquetados de la Figura 2.8.

Por último, etiquetamos los vértices de S por $s'(v) = n_T s(v) = 6s(v)$, lo que da lugar al árbol etiquetado de la Figura 2.9. Identificando los vértices de S con los de $\{T_0, \dots, T_4\}$ que tienen la misma etiqueta, obtenemos el árbol $S\Delta T$ con un etiquetado elegante, que podemos ver en la Figura 2.10.

Definición 2.13. Sean S, T dos árboles, u, v vértices de S, T , respectivamente, y $|V(S)| = n_S$. Consideremos el árbol que resulta de identificar cada vértice $v_i \neq u$ de S con el vértice correspondiente a v en un árbol T_i isomorfo a T , para $0 \leq i \leq n_S - 2$. Llamaremos a este árbol $S\Delta_{+1}T$, y a esta construcción, $S\Delta_{+1}$ -**construcción**.

Teorema 2.14. Si S, T tienen etiquetados elegantes s, t , respectivamente, con $s(u) = n_S - 1$ y $t(v) = 0$, entonces $S\Delta_{+1}T$ es elegante.

Demostración. Vamos a construir un etiquetado similar al del teorema anterior. Dados $|V(S)| = n_S$, $|V(T)| = n_T$, $S\Delta_{+1}T$ tiene $n_S - 1$ subgrafos isomorfos a T , $\{T_0, \dots, T_{n_S-2}\}$, por lo que vamos a construir $n_S - 1$ etiquetados auxiliares de T , $\{t_0, \dots, t_{n_S-1}\}$. Como T es bipartito, sean (V_1, V_2) la partición de $V(T)$ dada por dicha propiedad, con $v \in V_1$ y las particiones (V_{1_i}, V_{2_i}) de T_i obtenidas por el isomorfismo de T a T_i . Vamos a definir los etiquetados $\{t_i\}_{i=0}^{n_S-2}$ como:

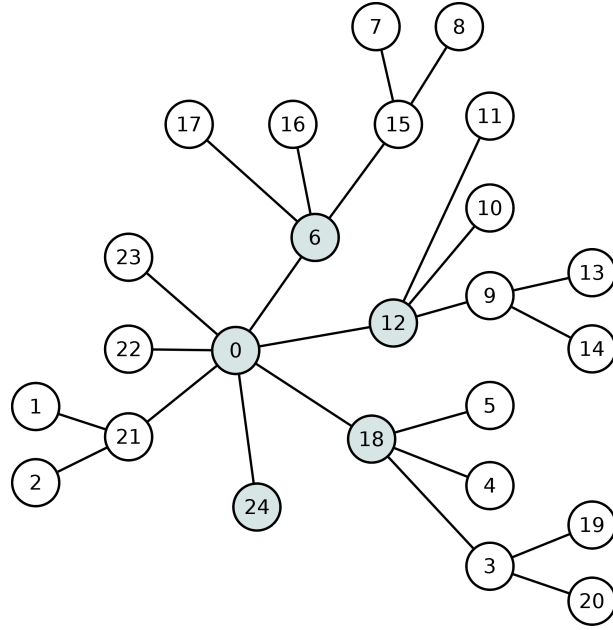


Figura 2.11: Árbol $S\Delta_{+1}T$ con un etiquetado elegante

$$t_i(v) = \begin{cases} in_T + t(v) & \text{si } v \in V_{1_i}, \\ (n_S - 2 - i)n_T + t(v) & \text{si } v \in V_{2_i}. \end{cases}$$

De modo análogo al de la demostración del Teorema 2.12, vemos que los conjuntos de etiquetas de vértices y aristas empleados en los etiquetados de $\{T_i\}_{i=0}^{n_S-2}$ son:

$$\cup V_{t_i} = \{0, 1, \dots, (n_S - 1)n_T - 1\},$$

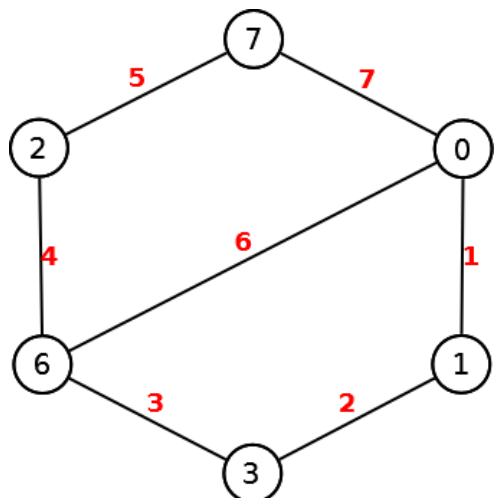
$$\cup E_{t_i} = \{0, 1, \dots, (n_S - 1)n_T - 1\} \setminus \{n_T, 2n_T, \dots, (n_S - 2)n_T\} = \{0, 1, \dots, (n_S - 1)n_T\} \setminus \{n_T, 2n_T, \dots, (n_S - 1)n_T\}.$$

A continuación, vamos a dar un nuevo etiquetado de los vértices de S , $s'(v) := s(v)n_T$. Así, hemos asignado a las aristas de S el conjunto de etiquetas $\{n_T, 2n_T, \dots, (n_S - 1)n_T\}$, y cada etiqueta asignada a un vértice de S distinto de u está también asignada a un vértice de un T_i distinto, por lo que identificando dichas etiquetas obtenemos el árbol $S\Delta_{+1}T$ con un etiquetado elegante. \square

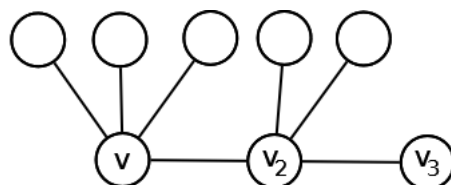
En la Figura 2.11, podemos ver el árbol $S\Delta_{+1}T$ construido a partir de los árboles elegantes S y T de la Figura 2.7.

El enunciado del siguiente resultado que vamos a ver se encuentra en [15, p. 134] y su demostración, que hemos elaborado nosotros, se basa en el Lema 2.1. Aunque en [15] G es un árbol, veremos que el lema se cumple también para un grafo elegante cualquiera G .

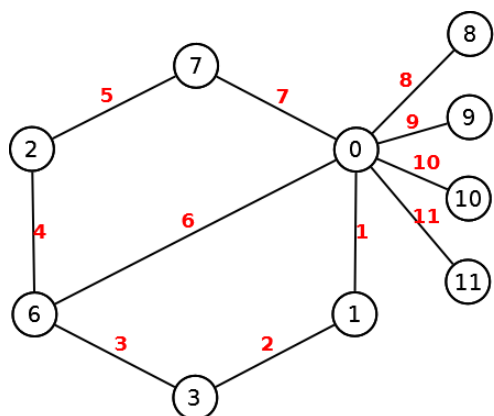
Lema 2.15. *Sea G un grafo con $|V(G)| = n_G$ y ϕ_G un etiquetado elegante de G , y sea $u \in V(G)$ tal que $\phi(u) = 0$ o $\phi(u) = n_G - 1$. Sea O una oruga, $V(G) \cap V(O) = \emptyset$ y sea $v \in V(O)$ un vértice que tiene máxima excentricidad o es adyacente a uno de máxima excentricidad. Sea G' el grafo obtenido identificando los vértices u y v de G y O . Entonces G' es elegante.*



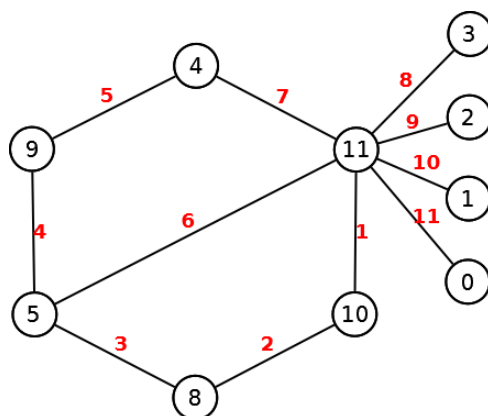
(a) Grafo G con un etiquetado elegante



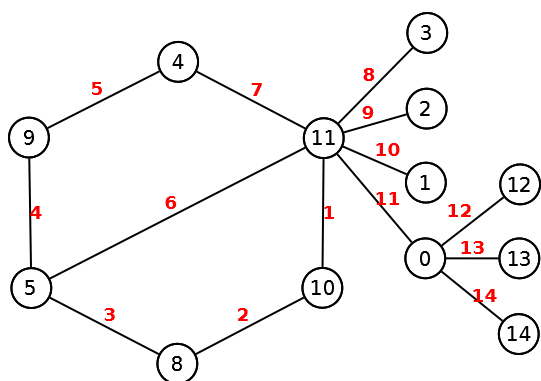
(b) Oruga O con un camino P_O que conecta v con una hoja y tiene longitud máxima



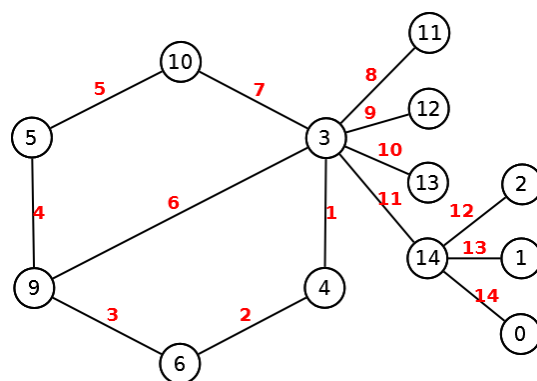
(c) Grafo G_1 con etiquetado elegante ϕ_{G_1}



(d) Grafo G_1 con etiquetado elegante ϕ'_{G_1}



(e) Grafo G_2 con etiquetado elegante ϕ_{G_2}



(f) Grafo $G_2 \cong G'$ con etiquetado elegante ϕ'_{G_2}

Figura 2.12: Etiquetado elegante del grafo G' obtenido identificando el vértice con la etiqueta 0 de G y $v \in O$ siguiendo la demostración del Lema 2.15

Demostración. Supongamos que tenemos G, O con $|V(G)| = n_G, |V(O)| = n_O$, el etiquetado elegante ϕ_G , y sea $v \in V(O)$ un vértice de máxima excentricidad o adyacente a uno de máxima excentricidad. Sea $u \in V(G)$ el vértice tal que $\phi(u) = 0$ (si tenemos $\phi_G(u) = n_G - 1$, podemos tomar ϕ'_G etiquetado complementario de ϕ_G , que es elegante y tal que $\phi'_G(u) = 0$). Sea $P_O = (v, v_2, v_3, \dots, v_{|P_O|})$ un camino que conecta v con una hoja y tiene longitud máxima.

Sea $G_1 := (V_1, E_1)$, con $V_1 = V \cup \{w_i \in N_O(v)\}$, $E_1 = E \cup \{(u, w_i) : w_i \in N_O(v)\}$, para $i = 0, \dots, g_O(v) - 1$. Definimos el etiquetado elegante ϕ_{G_1} como:

$$\phi_{G_1}(t) = \begin{cases} \phi_G(t) & \text{si } t \in G, \\ n_G + i & \text{si } t = w_i \in N_O(v), i = 0, \dots, g_O(v) - 1. \end{cases}$$

Entonces ϕ'_{G_1} , etiquetado complementario de ϕ_{G_1} , es elegante y cumple $\phi'_{G_1}(w_{g_O(v)-1}) = 0$.

Ahora, de manera análoga, definimos $G_2 := (V_2, E_2)$, con $V_2 = V_1 \cup \{x_i \in N_O(v_2) : x_i \neq v\}$, $E_2 = E_1 \cup \{(w_{g_O(v)-1}, x_i) : x_i \in N_O(v_2), x_i \neq v\}$, para $i = 0, \dots, g_O(v_2) - 2$; y definimos también el etiquetado elegante

$$\phi_{G_2}(t) = \begin{cases} \phi'_{G_1}(t) & \text{si } t \in G_1, \\ n_G + i & \text{si } t = x_i \in N_O(v_2), x_i \neq v, i = 0, \dots, g_O(v_2) - 2. \end{cases}$$

Al igual que anteriormente, ϕ'_{G_2} será el etiquetado complementario a ϕ_{G_2} , y tendremos que $\phi'_{G_2}(x_{g_O(v_2)-2}) = 0$.

Repitiendo este procedimiento para los vértices $\{v_3, \dots, v_{|P_O|} - 1\}$ del camino P_O , obtendremos el árbol buscado $G_{|P_O|-1} \cong G'$ y el etiquetado elegante de $G_{|P_O|-1}$, $\phi'_{G_{|P_O|-1}}$. \square

En la Figura 2.12, se puede ver un ejemplo de los pasos de la demostración del Lema 2.15.

Por último, vamos a incluir un resultado de Huang, Kotzig y Rosa [17], que podemos encontrar en [30, p. 15] y que permite combinar dos árboles con α -etiquetados para obtener otro:

Teorema 2.16. *Sean T_1, T_2 dos árboles, v_1, v_2 vértices de T_1, T_2 y ϕ_1, ϕ_2 etiquetados de T_1, T_2 con $\phi_1(v_1) = 0, \phi_2(v_2) = 0$, respectivamente. Entonces el árbol obtenido identificando los vértices v_1 y v_2 tiene un α -etiquetado (y, por tanto, es elegante).*

Demostración. Supongamos $|V(T_1)| = n_1, |V(T_2)| = n_2$, y supongamos que ϕ_1 tiene índice k_1 y ϕ_2 tiene índice k_2 . Empleando el Lema 2.3, obtenemos el etiquetado inverso ϕ'_1 de ϕ_1 , que sabemos que es un α -etiquetado de índice k_1 , y tal que $\phi'_1(v_1) = k_1$. Ahora, consideremos el etiquetado

$$\phi(v) = \begin{cases} \phi'_1(v) & \text{si } v \in V(T_1) \text{ y } \phi'_1(v) \leq k_1, \\ \phi'_1(v) & \text{si } v \in V(T_1) \text{ y } \phi'_1(v) > k_1, \\ k_1 + \phi_2(v) & \text{si } v \in V(T_2). \end{cases}$$

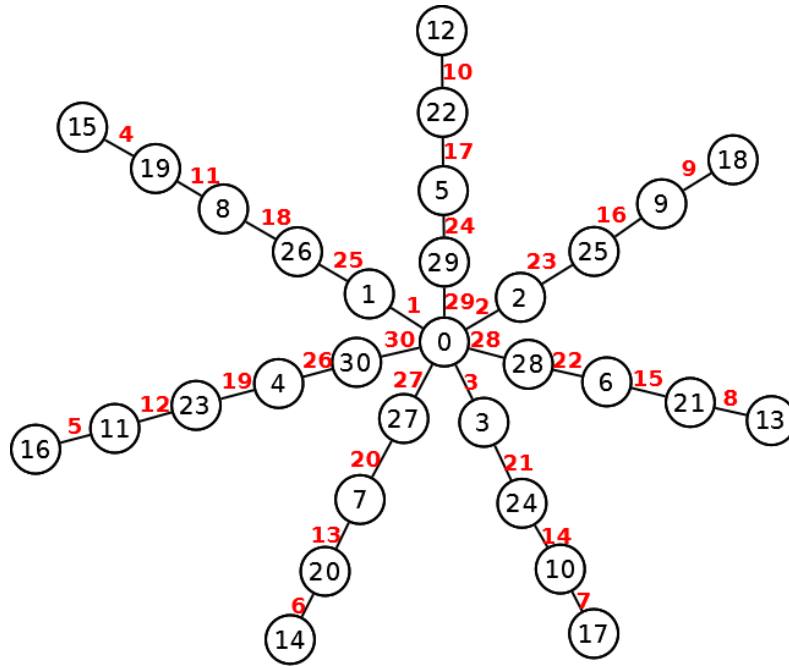


Figura 2.13: Araña S con un etiquetado elegante obtenido según el Teorema 2.18

Como $\phi'_1(v_1) = k_1 = k_1 + \phi_2(v_2)$, el etiquetado está bien definido, y el conjunto de etiquetas empleadas en los vértices por ϕ es $\{0, 1, \dots, n_1 + n_2 - 2\}$. Las aristas de T_2 toman mediante ϕ el conjunto de etiquetas $\{1, 2, \dots, n_2 - 1\}$, mientras que las de T_1 toman el conjunto $\{n_2, \dots, n_1 + n_2 - 2\}$, por lo que ϕ es elegante.

Como ϕ_1, ϕ_2 son α -etiquetados de índices k_1, k_2 , ϕ es un α -etiquetado de índice $k_1 + k_2$. \square

2.1.5. Arañas

Definición 2.17. Una **araña** (del inglés, *spider*) es un árbol con como máximo un vértice de grado mayor que dos. A dicho vértice se le llama *centro*, y a cada camino que parte del centro hacia una hoja, *pata*. Si las longitudes de las patas son $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r$ (con r el grado del centro), denotamos a la araña S como $S(a_1, \dots, a_r)$.

El siguiente teorema se puede encontrar en [7, pp. 142-144].

Teorema 2.18. *Sea S una araña de l patas, con l impar, cada una de longitud perteneciente a $\{m, m + 1\}$ para $m \leq l$. Entonces S es elegante.*

Demostración. Asumiremos $l \geq 3$, ya que si no, S es un camino, y ya hemos visto su elegancia.

Sea $l = l_0 + l_1$, donde l_i es el número de patas de longitud $m + i$, para $i \in \{0, 1\}$. Sea $n + 1 = ml + l_1 + 1$ el número de vértices de S , y llamemos L_1, \dots, L_l a las patas, donde L_1, \dots, L_{l_1} tienen longitud $m + 1$ y L_{l_1+1}, \dots, L_l tienen longitud m . Sea v^* el centro de S y denotemos por $v_{i,j}$ al vértice de L_i a distancia j de v^* .

Vamos a definir el etiquetado ϕ , de manera que $\phi(v^*) = 0$ y:

$$\phi(v_{i,j}) = \begin{cases} n - \frac{i-1}{2} - \frac{(j-i)l}{2} & \text{si } i, j \text{ son impares,} \\ n - \frac{l-1}{2} - \frac{i}{2} - \frac{(j-2)l}{2} & \text{si } i, j \text{ son pares,} \\ \frac{i}{2} + \frac{(j-1)l}{2} & \text{si } i \text{ es par y } j \text{ es impar,} \\ \frac{l-1}{2} + \frac{i+1}{2} + \frac{(j-2)l}{2} & \text{si } i \text{ es impar y } j \text{ es par.} \end{cases}$$

El etiquetado ϕ sitúa el 0 en el centro de S , y va alternando entre las mayores y menores etiquetas que permanecen sin usar, etiquetando los nodos de la araña atravesando primero las patas de mayor longitud, alejándose del centro en forma de espiral. Un ejemplo para $l = 7$, $l_0 = 5$, $l_1 = 2$ y $m = 4$ lo podemos ver en la Figura 2.13.

Ahora, vamos a ver que ϕ es elegante, y para ello veamos que las etiquetas inducidas en las aristas son distintas. Para calcularlas, notamos primero que las etiquetas inducidas se pueden obtener restando $\phi(v_{i,j}) - \phi(v_{i,j'})$, con $i \equiv j \pmod{2}$ y $j' \in \{j-1, j+1\}$. Así, para $i \equiv j \pmod{2}$, tenemos:

$$\phi(v_{i,j}) - \phi(v_{i,j+1}) = n - \frac{l-1}{2} - i + (1-j)l, \quad (2.1)$$

$$\phi(v_{i,j}) - \phi(v_{i,j-1}) = n - \frac{l-1}{2} - i + (2-j)l. \quad (2.2)$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que hay dos aristas distintas con la misma etiqueta inducida. Considerando dos vértices $v_{i,j}, v_{i',j'}$ extremos de dichas aristas, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $i \equiv j \pmod{2}$ y $i' \equiv j' \pmod{2}$, de donde obtenemos que las dos aristas pueden venir dadas por tres posibilidades:

$$\phi(v_{i,j}) - \phi(v_{i,j+1}) = \phi(v_{i',j'}) - \phi(v_{i',j'+1}), \quad (2.3)$$

$$\phi(v_{i,j}) - \phi(v_{i,j+1}) = \phi(v_{i',j'}) - \phi(v_{i',j'-1}), \quad (2.4)$$

$$\phi(v_{i,j}) - \phi(v_{i,j-1}) = \phi(v_{i',j'}) - \phi(v_{i',j'-1}). \quad (2.5)$$

Consideremos el caso (2.3). A partir de (2.1), tenemos $i - i' + (j - j')l = 0$. Esto implica $j \neq j'$, ya que si no tendríamos $i = i'$ también, lo cual se contradice con la suposición $(i, j) \neq (i', j')$. Así pues, podemos escribir

$$l = \frac{i - i'}{j' - j}.$$

Como tenemos $|i - i'| < l$ y $|j - j'| \geq 1$, llegamos a la contradicción

$$l = \frac{i - i'}{j' - j} < \frac{l}{1} = l.$$

Contradicciones similares surgen de suponer (2.4) y (2.5), por lo que no hay dos aristas distintas con etiquetas iguales, y ϕ es elegante. \square

A continuación, haremos uso de resultados anteriores para probar el siguiente resultado, cuyo enunciado también pertenece a [7].

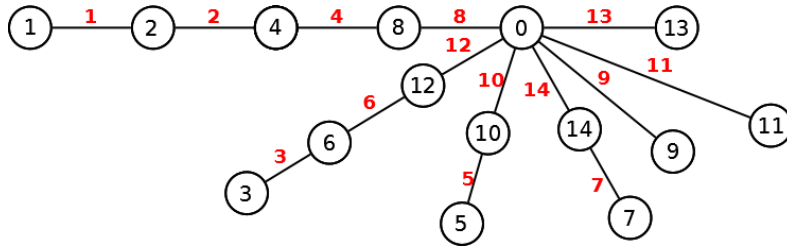


Figura 2.14: Araña S con un etiquetado elegante obtenido según el Teorema 2.20

Teorema 2.19. *Sea S una araña de l patas, con l par, donde al menos $l-1$ patas tienen longitud perteneciente a $\{m, m+1\}$ para algún $m \geq 1$. Entonces S es elegante.*

Demostración. Denotemos por L a la pata de $S = (V_S, E_S)$ cuya longitud es k , con $m \neq k \neq m+1$, o $k = m$ si todas las patas de la araña tienen longitudes pertenecientes a $\{m, m+1\}$. Sea S' la araña inducida por el conjunto $V_{S'} = \{v \in V_S : v \notin L\}$, y P_S el camino inducido por $V_{P_S} = \{v \in V_S : v \text{ es el centro de } S \text{ o } v \in L\}$. Dado que S' es elegante por el Teorema 2.18, podemos aplicar el Lema 2.15 para $G = S'$, $O = P$ y obtener un etiquetado elegante de S . \square

El siguiente teorema, que se puede ver en [30, p. 71], da un etiquetado elegante de otra clase de arañas.

Teorema 2.20. *Sea S una araña con $|V(S)| = n$ y centro v , y sean las longitudes de sus patas m_1, \dots, m_k , con $m_1 \geq \dots \geq m_k$. Si para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene*

$$m_i \leq \max\left(1, \log_2\left(\frac{n-1}{2^i-1}\right) + 1\right),$$

entonces S tiene un etiquetado elegante ϕ con $\phi(v) = 0$.

Demostración. Vamos a definir el etiquetado elegante ϕ . En primer lugar, $\phi(v) = 0$, y para cada i tal que $m_i \geq 2$, asignaremos a los vértices de la pata m_i , comenzando por el adyacente a v , las etiquetas $2^{m_i-1}(2i-1), 2^{m_i-2}(2i-1), \dots, (2i-1)$. Por último, asignaremos el resto de etiquetas a los vértices de las patas restantes indistintamente.

Todas las etiquetas asignadas son distintas, y además para cada i con $m_i \geq 2$ tenemos

$$2^{m_i-1}(2i-1) \leq 2^{\log_2\left(\frac{n-1}{2^i-1}\right)}(2i-1) \leq \frac{n-1}{2^i-1}(2i-1) \leq n-1,$$

por lo que el conjunto de etiquetas asignadas a los vértices es $\{0, 1, \dots, n-1\}$. Finalmente, cabe resaltar que el conjunto de etiquetas inducidas en las aristas de una pata es justo el conjunto de etiquetas asignadas a los vértices de dicha pata, por lo que las etiquetas de las aristas son distintas y pertenecen al conjunto $\{1, \dots, n-1\}$. Así pues, ϕ es elegante. \square

En la Figura 2.14, podemos ver el etiquetado elegante de una araña S con $|V(S)| = 16$ dado por la demostración del Teorema 2.20.

Una araña con una o dos patas es un camino, por lo que vamos a dar algunos resultados para arañas de tres o cuatro patas, los cuales se deben a Huang, Kotzig y Rosa [17], aunque han sido tomados de [30, p. 25].

Teorema 2.21. *Sea S una araña con tres patas de longitudes p, q, r . Si $(p, q, r) \neq (2, 2, 2)$, S tiene un α -etiquetado, y si $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, entonces S es elegante pero no tiene un α -etiquetado.*

Demostración. Si $(p, q, r) \neq (2, 2, 2)$, podemos asumir $(p, q) \neq (2, 2)$. Entonces S se puede formar a partir de los caminos P_{p+q-1} y P_r , identificando el vértice v_p de P_{p+q-1} con una hoja v de P_r . Puesto que $(p, q) \neq (2, 2)$, v_p no es el vértice central de P_5 , luego existen α -etiquetados de P_{p+q-1} y P_r tales que v_p, v llevan la etiqueta 0. Por tanto, aplicando el Teorema 2.16 obtenemos el α -etiquetado de $S(p, q, r)$.

Si $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, entonces S es simétrica, y por tanto tiene un etiquetado elegante dado por el Teorema 2.6. Sin embargo, y tal y como vimos en el ejemplo en el que empleamos la Figura 1.1 de la página 15, $S(2, 2, 2)$ no tiene un α -etiquetado. \square

Teorema 2.22. *Sea S una araña con cuatro patas de longitudes p, q, r, s . Si al menos dos de las longitudes p, q, r, s no son iguales a 2, S tiene un α -etiquetado. En caso contrario, S es elegante (y puede o no tener un α -etiquetado).*

Demostración. Si al menos dos de las longitudes p, q, r, s son distintas de 2, podemos suponer $(p, q), (r, s) \neq (2, 2)$. Entonces S se puede formar a partir de los caminos P_{p+q-1} y P_{r+s-1} identificando el vértice v_p de P_{p+q-1} con el vértice v_r de P_{r+s-1} . Puesto que $(p, q), (r, s) \neq (2, 2)$, ni v_p ni v_r son los vértices centrales de P_5 , por lo que existen α -etiquetados de P_{p+q-1} y P_{r+s-1} de manera que v_p y v_r llevan la etiqueta 0. Por tanto, aplicando el Teorema 2.16 obtenemos el α -etiquetado de $S(p, q, r, s)$.

Si $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, entonces S es simétrica, y por tanto tiene un etiquetado elegante dado por el Teorema 2.6. Sin embargo, y tal y como vimos en el ejemplo en el que empleamos la Figura 1.1 de la página 15, $S(2, 2, 2)$ no tiene un α -etiquetado.

Si al menos tres de las longitudes p, q, r, s son iguales a 2, podemos obtener S a partir de $S(2, 2, 2)$, identificando su centro con una hoja de un camino. Como el Teorema 2.6 nos da un etiquetado elegante de $S(2, 2, 2)$ cuyo centro lleva la etiqueta 0, $S(p, q, r, s)$ es elegante aplicando el Teorema 2.15. \square

Además de estos resultados, y de acuerdo con [5], Pastel y Raynaud demostraron en el año 1978 en [25] que las arañas $S(1, 2, \dots, k)$ (también conocidas como *olive trees*, del inglés) son elegantes para cualquier k , mientras que Kanetkar y Sane [18] dieron en 2007 etiquetados elegantes de algunas arañas con cinco y seis patas, de acuerdo con [30].

2.1.6. Langostas

Definición 2.23. Una **langosta** (del inglés, *lobster*) es un árbol cuya eliminación de todas sus hojas y las aristas adyacentes a las mismas da como resultado una oruga.

De esta definición se deduce que las tracas, vistas en la subsección 2.1.3, son un tipo específico de langosta, para el que ya sabemos construir un etiquetado elegante. Aunque hay muchos resultados acerca de la elegancia de langostas, ninguno de ellos es general, sino que se centran en un tipo específico de langosta. Uno de ellos lo encontramos en

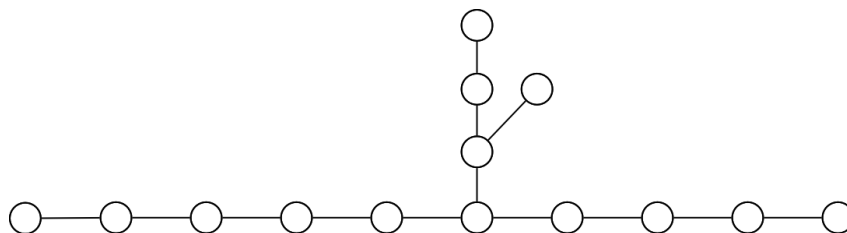


Figura 2.15: Árbol con una langosta de base que no cumple las condiciones del Teorema 2.25

[21], en el que se demuestra que todas las langostas con un emparejamiento perfecto son elegantes. Sin embargo, creemos que hay un fallo en la demostración del teorema y que el etiquetado que proponen no es correcto. No obstante, presentamos otra demostración del mismo teorema, el Teorema 2.25, surgida a través del estudio de este tipo de árboles.

Definición 2.24. Dado un grafo $G = (V, E)$, decimos que un subconjunto Q de aristas es un **emparejamiento** si dos aristas de Q no inciden sobre un mismo vértice. Si cualquier vértice $v \in V$ es extremo de una arista de Q , decimos que es un **emparejamiento perfecto**. Si todos los vértices excepto uno son extremos de una arista de Q , decimos que es un **emparejamiento casi perfecto**. Es claro que si G tiene un emparejamiento perfecto, tiene un número par de vértices, y si tiene un emparejamiento casi perfecto, entonces su número de vértices es impar.

Teorema 2.25. *Sea L una langosta o un árbol que tiene una langosta como base, es decir, al eliminar todas sus hojas y las aristas adyacentes. Entonces L es elegante si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Tiene un emparejamiento perfecto Q .*
2. *Se puede construir a partir de caminos P_3 de longitud dos y de una oruga O , identificando vértices de O con hojas de los P_3 .*

En la Figura 2.15, podemos ver un ejemplo de un árbol que cumple la primera condición del Teorema 2.25, pero no la segunda.

Demostración. Sea $L = (V, E)$ el árbol dado en el enunciado, con $|V| = n$, y O una oruga en L con el mayor número de vértices posible. Sea $P = (v_1, \dots, v_k)$ un camino de longitud máxima en O . Es claro que, si Q es un emparejamiento perfecto de L y se cumple la segunda condición del enunciado, entonces $Q|_O$ es un emparejamiento perfecto en O .

Como L es bipartito, existen dos conjuntos de vértices W_1, W_2 con $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $W_1 \cup W_2 = V$ y podemos suponer $v_1 \in W_1$, donde además sabemos que cada arista de Q incide en un vértice de W_1 y en otro de W_2 .

Vamos a definir los siguientes conjuntos $V_{i,j}$ de vértices para $i \in \{1, \dots, k\}$, $j \in \{0, 1, 2\}$ (algunos de los cuales pueden ser vacíos), que nos servirán para ordenar los vértices de

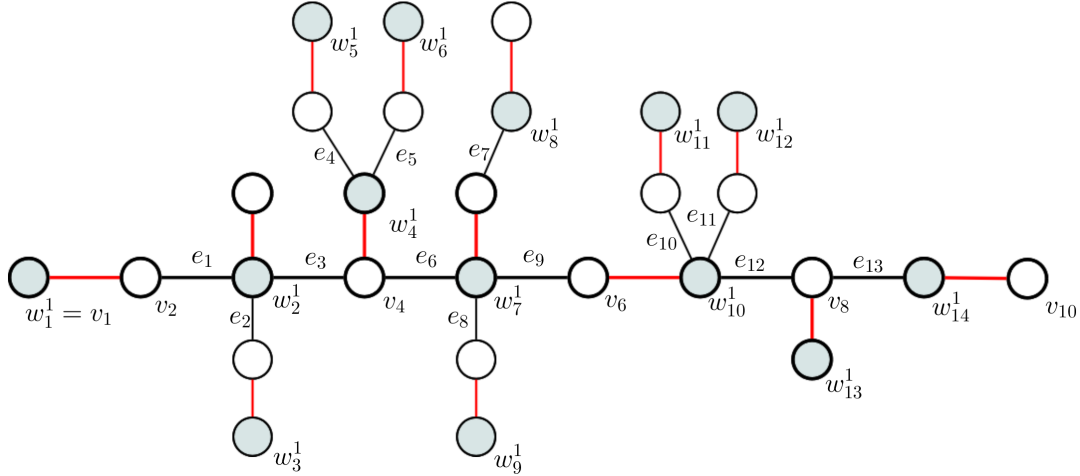


Figura 2.16: Árbol que cumple las condiciones del Teorema 2.25. En negrita, vértices y aristas de la oruga O . En gris, vértices pertenecientes a W_1 . En rojo, aristas del emparejamiento perfecto Q

W_1 :

$$\begin{aligned} V_{i,0} &= \{v_i\}, \\ V_{i,1} &= N_O(v_i) \setminus P, \\ V_{i,2} &= \{v \in L \setminus O : v_i \text{ es el vértice de } P \text{ más cercano a } v\}. \end{aligned}$$

Claramente, se tiene $\cup_{i,j} V_{i,j} = V$, $V_{i,j} \cap V_{i',j'} = \emptyset$ para $(i,j) \neq (i',j')$, por lo que los $V_{i,j}$ forman una partición de V .

Ahora vamos a establecer un orden parcial entre los vértices de W_1 empleando los conjuntos anteriores:

$$w_i^1 < w_{i'}^1 \iff w_i^1 \in V_{i,j}, w_{i'}^1 \in V_{i',j'}, i < i' \text{ o } i = i', j < j'.$$

De esta forma, podemos ordenar todos los vértices de W_1 , ordenando de forma aleatoria aquellos que pertenezcan al mismo conjunto $V_{i,2}$ (dado que $V_{i,j}$ tiene como máximo un elemento si $j \in \{0, 1\}$), y obtendremos el conjunto ordenado $(w_1^1, w_2^1, \dots, w_{\frac{n}{2}}^1) \in W_1$.

A continuación, vamos a definir un etiquetado ϕ para los vértices de W_1 . Así, definimos $\phi(w_1^1) = \phi(v_1) = 0$, y

$$\phi(w_{t+1}^1) = \begin{cases} \text{la menor etiqueta disponible con} & \text{si el camino que conecta } w_t^1 \text{ con } w_{t+1}^1 \\ \phi(w_{t+1}^1) \equiv \phi(w_t^1) + 1 \pmod{2} & \text{tiene una sola arista } (i, j) \notin Q, \\ \\ \text{la menor etiqueta disponible con} & \text{si el camino que conecta } w_t^1 \text{ con } w_{t+1}^1 \\ \phi(w_{t+1}^1) \equiv \phi(w_t^1) \pmod{2} & \text{tiene dos aristas } (i, j), (i', j') \notin Q, \end{cases}$$

para $t \in \{2, \dots, \frac{n}{2}\}$. Por último, definimos el etiquetado ϕ de los vértices de W_2 empleando el emparejamiento Q dado por hipótesis:

$$\phi(w^2) = n - 1 - \phi(w^1), \text{ donde } w^1 \in W_1, w^2 \in W_2, (w^1, w^2) \in Q.$$

Como sabemos que, dado un vértice $w^2 \in W_2$, existe una única arista de Q incidente en dicho vértice y en otro de W_1 , el etiquetado está bien definido.

Veamos ahora que este etiquetado es elegante. En primer lugar, es fácil ver que hemos etiquetado los vértices con etiquetas distintas. Así, los vértices de W_1 llevan el conjunto de etiquetas pares $\{2l\}_{l=0}^{l_1}$ y el conjunto de etiquetas impares $\{1+2k\}_{k=0}^{k_1}$, con $l_1+k_1=|W_1|-2=\frac{n}{2}-2$. Por otra parte, para los nodos de W_2 hemos empleado el conjunto de etiquetas pares $\{(n-1)-(1+2k)\}_{k=0}^{k_1}=\{n-2, n-4, \dots, n-2-2k_1\}$, con $n-2-2k_1=n-2-(n-4-2l_1)=2l_1+2$; y el conjunto de etiquetas impares empleado en los nodos de W_2 es $\{(n-1)-(2l)\}_{l=0}^{l_1}=\{n-1, n-3, \dots, n-1-2l_1\}$, donde $n-1-2l_1=n-1-(n-4-2k_1)=2k_1+3$. Por tanto, hemos empleado todas las etiquetas de 0 a $n-1$.

De igual modo, es sencillo notar que las aristas de Q , todas las cuales inciden en nodos cuyas etiquetas suman $n-1$, llevan etiquetas distintas, pues, al tener los vértices etiquetas distintas, llevan el conjunto $\{(n-1-k)-k\}_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}=\{n-1-2k\}_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}$. Por tanto, además de saber que son distintas, sabemos que son impares, ya que n es par.

Solo nos queda por probar que las aristas que no pertenecen a Q tienen todas etiquetas inducidas distintas y pares. Vamos a comenzar estableciendo un orden entre ellas similar al que hemos establecido para los nodos anteriormente, empleando los mismos conjuntos $V_{i,j}$ con $i \in \{0, \dots, k\}$ y $j \in \{0, 1, 2\}$. Primero, debemos notar que todas las aristas de $O \setminus P$ pertenecen a Q , lo que quiere decir que no existen aristas que no estén en Q y que incidan en nodos de $V_{i,0}, V_{i,1}$ para algún i . Entonces tenemos dos clases de aristas en $E \setminus Q$, aristas que pertenecen a P y aristas que inciden en algún nodo de $L \setminus O$, es decir, en algún nodo de $V_{i,2}$, para $i=1, \dots, k$. Si dos aristas pertenecen a P , son de la forma $e_k=(v_k, v_{k+1}), e_l=(v_l, v_{l+1})$, y $e_k < e_l \Leftrightarrow k < l$; si dos aristas e_k, e_l inciden en nodos pertenecientes a $V_{k,2}, V_{l,2}$, tendremos $e_k < e_l \Leftrightarrow k < l$, y si $l=k$, entonces como habíamos establecido un orden aleatorio entre los nodos de $W_1 \cap V_{i,2}$ y para cada uno de estos nodos existe una única arista no perteneciente a Q y del mismo P_3 , ordenamos las aristas respetando dicho orden; por último, si tenemos la arista $e_k=(v_k, v_{k+1})$ y la arista e_l incidente en un nodo de $V_{i,l}$, entonces $e_k < e_l \Leftrightarrow k < l$. Con este orden, llamaremos a estas aristas $(e_1, e_2, \dots, e_{\frac{n}{2}-1})$. Podemos ver las aristas ordenadas en el ejemplo de la Figura 2.16.

Ahora vamos a ver que $\phi(e_1)=n-2$. En efecto, $\phi(w_1^1)=\phi(v_1)=0$ y sabemos que v_1 es una hoja en L . Así pues, $(v_1, v_2) \in Q \Rightarrow \phi(v_2)=n-1$ y w_2^1 es adyacente a v_2 con $\phi(w_2^1)=1$, pues entre w_1^1 y w_2^1 solo hay una arista que no pertenece a Q . Por tanto, $\phi(e_1)=\phi((v_2, w_2^1))=(n-1)-1=n-2$. Es relevante destacar que la etiqueta de e_1 se ha obtenido restando a la del vértice de W_2 en el que incide la del vértice de W_1 .

Para finalizar, vamos a ver que $\phi(e_t)-\phi(e_{t+1})=2$ para $t=1, \dots, \frac{n}{2}-2$. Para ello, vamos a distinguir cuatro casos que se ilustran en la Figura 2.17, y que son los siguientes:

1. e_t y e_{t+1} inciden en un mismo vértice, es decir, $e_t=(u, v)$ y $e_{t+1}=(v, w)$.
 - a) $v \in W_1$. En este caso, como $u, w \in W_2$, existen $u', w' \in W_1$ adyacentes a u, w de manera que $(u, u'), (w, w') \in Q$, y vamos a estudiar el camino $P=(u', u, v, w, w')$. Suponemos $\phi(u')=k$, luego $\phi(u)=n-1-k$, y $\phi(v)=l$, con l y k de distinta paridad, tenemos que el único camino entre u' y w' contiene dos

aristas no pertenecientes a Q que además son de la forma e_t, e_{t+1} , luego $u' = w_r^1$, $w' = w_{r+r'}^1$, para algunos r, r' , y de forma que los vértices $\{w_{r+1}^1, \dots, w_{r+r'-1}^1\}$ tienen todos etiquetas de paridad distinta a u', w' . Esto implica $\phi(w') = 2 + \phi(u') = 2 + k \Rightarrow \phi(w) = (n-1) - (k+2) = n - k - 3$. Ahora vamos a suponer que la etiqueta de e_t se obtiene restando la etiqueta del nodo de W_2 en el que incide, v , menos la del nodo de W_1 , u (lo cual, teniendo en cuenta que $\phi(e_t) \geq 4$, implica que la de e_{t+1} se obtiene del mismo modo), y tendremos finalmente que $\phi(e_t) - \phi(e_{t+1}) = \phi((v, w) - \phi((u, v))) = (l - (n - k - 3)) - (l - (n - 1 - k)) = 2$. Este caso se puede ver para las aristas e_1, e_2 del árbol de la Figura 2.16, es decir, el camino $P = (u', u, v, w, w') = (w_1^1, \dots, w_3^1)$, y también para las aristas consecutivas e_{11}, e_{12} , que dan lugar al camino $(w_{11}^1, \dots, w_{12}^1)$ en T .

b) $v \in W_2$. En este caso, suponemos $\phi(u) = k$, $\phi(v) = l$, con k y l de distinta paridad. De forma análoga al caso anterior, tenemos que w es el siguiente a u con la misma paridad en la ordenación de los vértices de W_1 , ya que en el camino que los conecta hay dos aristas, luego $\phi(w) = k + 2$. Si de nuevo suponemos $l \geq k + 4$, tenemos $\phi(e_t) - \phi(e_{t+1}) = (l - k) - (l - (k + 2)) = 2$. Las aristas e_{12}, e_{13} son las únicas consecutivas del árbol de la Figura 2.16 que se incluyen en este caso, y dan lugar al camino $P = (u, v, w) = (w_{10}^1, \dots, w_{14}^1)$.

2. e_t y e_{t+1} no inciden en ningún vértice común, es decir, $e_t = (u, v)$ y $e_{t+1} = (w, x)$, con v, w nodos adyacentes.

a) $u \in W_1$. Entonces, como $x \in W_2$, existe $x' \in W_1$ adyacente a x , y vamos a estudiar el camino $P = (u, v, w, x, x')$. Suponemos de nuevo $\phi(u) = k$, $\phi(w) = l$, lo cual implica, como $(v, w) \in Q$, $\phi(v) = n - 1 - l$, y como P contiene dos aristas que no pertenecen a Q , x' es el siguiente a u con la misma paridad en la ordenación de los vértices de W_1 , luego $\phi(x') = k + 2 \Rightarrow \phi(x) = (n - 1) - (k + 2) = n - k - 3$. Así, suponiendo de nuevo $n - 1 - l \geq k + 4$, tenemos $\phi(e_t) - \phi(e_{t+1}) = ((n - 1 - l) - k) - ((n - k - 3) - l) = 2$. Dos ejemplos de aristas consecutivas del árbol de la Figura 2.16 que den lugar a este caso son las aristas e_3, e_4 y las aristas e_9, e_{10} , y dan lugar a los caminos $(u, v, w, x, x') = (w_2^1, \dots, w_5^1)$ y (w_7^1, \dots, w_{11}^1) , respectivamente.

b) $u \in W_2$. En este caso, existe $u' \in W_1$ adyacente a u , y tenemos el camino $P = (u', u, v, w, x)$. Suponemos $\phi(u') = k$, $\phi(v) = l$, y tenemos $\phi(u) = n - 1 - k$, $\phi(w) = n - 1 - l$. De forma análoga a las anteriores, tenemos $\phi(x) = k + 2$, y suponemos $n - 1 - k \geq 4 + l$, con lo que $\phi(e_t) - \phi(e_{t+1}) = ((n - 1 - k) - l) - ((n - 1 - l) - (k + 2)) = 2$. Este último caso lo encontramos en la Figura 2.16 en las aristas e_5, e_6 y e_6, e_7 , entre otras, y dan lugar a los caminos $(u', u, v, w, x) = (w_6^1, \dots, w_7^1)$ y (w_4^1, \dots, w_8^1) , respectivamente.

En los cuatro casos hemos visto que la diferencia entre la etiqueta de una arista y de la arista anterior es dos, es decir, que si la primera es par e igual a $n - 2$, todas son pares y distintas hasta la 2. No obstante, lo hemos hecho suponiendo que para calcular la etiqueta de la arista e_k , restábamos la etiqueta del nodo extremo de e_k perteneciente a W_2 menos la del extremo de e_k perteneciente a W_1 . Además, hemos visto que si suponíamos $\phi(e_k) \geq 4$, entonces obteníamos que $\phi(e_{k+1})$ se calculaba de la misma manera. Pero podemos suponer ambas cosas, ya que $\phi(e_1) = n - 2 \geq 4$ (salvo que el árbol tenga 2 o 4 nodos, pero ya hemos estudiado esos casos) y se obtiene de esa forma. \square

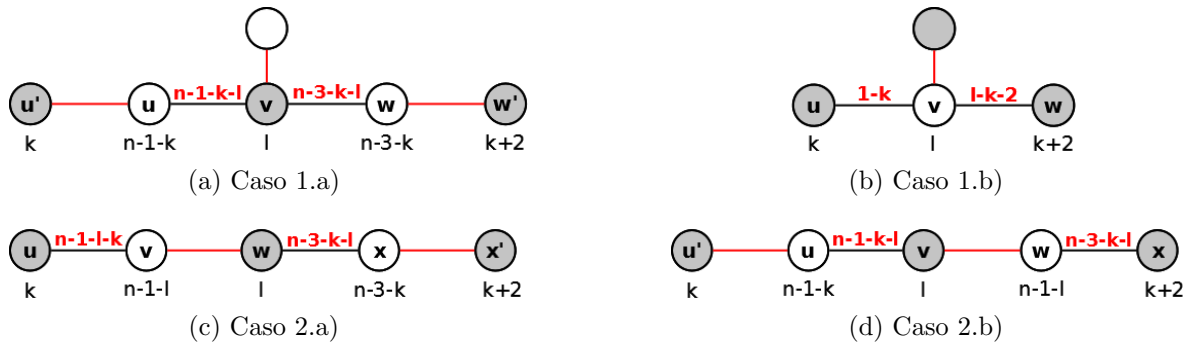


Figura 2.17: Casos 1a),1b),2a) y 2b) de la demostración del Teorema 2.25

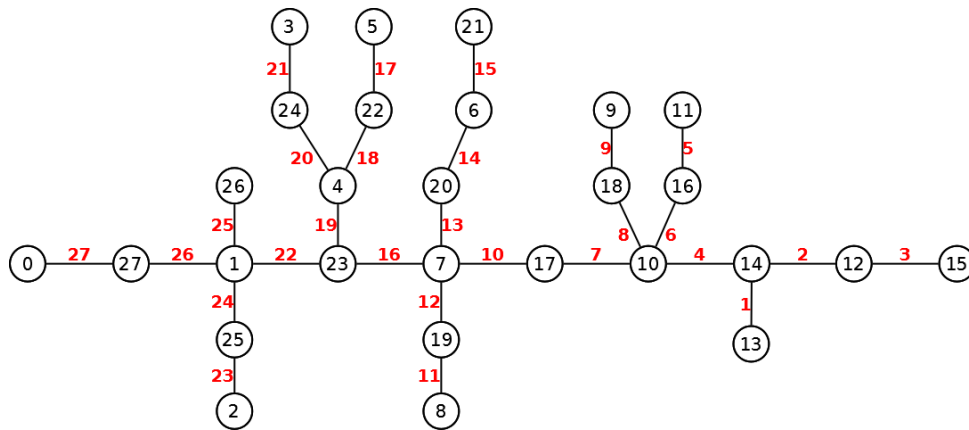


Figura 2.18: Árbol de la Figura 2.16 etiquetado siguiendo la demostración del Teorema 2.25

Corolario 2.26. *Todas las langostas con un emparejamiento perfecto son elegantes.*

Un ejemplo de un árbol de 28 vértices que cumple las condiciones del Teorema 2.25 lo podemos ver en la Figura 2.16. Así, tenemos la oruga O en negrita y el camino $P = (v_1, \dots, v_{10})$, en gris tenemos los vértices que pertenecen a W_1 y el orden dado por la demostración de dicho teorema. En rojo, las aristas pertenecientes al emparejamiento perfecto Q .

Siguiendo la demostración del teorema, $\phi(w_1^1) = 0$ y $\phi(v_2) = n - 1 - 0 = 27$. Como el camino que conecta w_1^1 con w_2^1 lleva contiene una arista en $E \setminus Q$, $\phi(w_2^1) = 1$, y, por el mismo razonamiento, $\phi(w_3^1) = 2$. Como el camino que conecta w_3^1 con w_4^1 tiene dos aristas en $E \setminus Q$, w_4^1 lleva la menor etiqueta no empleada anteriormente que tenga la misma paridad que w_3^1 , luego $\phi(w_4^1) = 4$ y $\phi(v_4) = 28 - 1 - 4 = 23$, y así sucesivamente. Continuando con este proceso, obtenemos el etiquetado elegante ϕ de la Figura 2.18.

En el artículo [19] se demuestra que todas las langostas con un emparejamiento casi perfecto son elegantes, basándose en el Teorema 2.25 y en la proposición siguiente:

Proposición 2.27. *Sea T un árbol con un emparejamiento casi perfecto Q . Para cada camino P de longitud máxima que acabe en el vértice v , existe un emparejamiento casi perfecto tal que el único vértice no extremo de una arista de Q es v .*

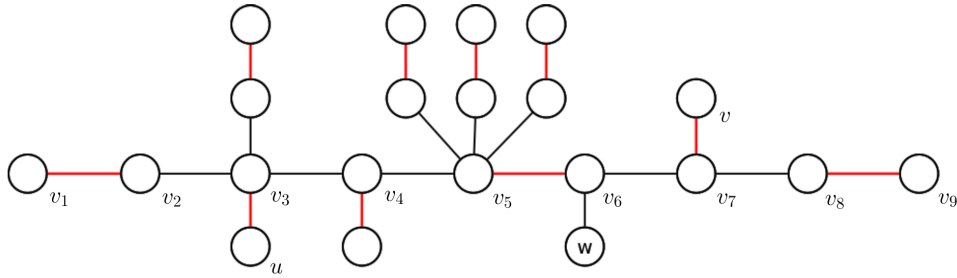


Figura 2.19: Langosta que sirve como contraejemplo de la Proposición 2.27

No obstante, dicha proposición es falsa, y proponemos como contraejemplo para probarlo la langosta de la Figura 2.19. Así, en la Figura 2.19 vemos que las aristas en rojo forman un emparejamiento casi perfecto Q del árbol, en el que el vértice w es el único que no es extremo de una arista de Q . Si tomamos como camino de máxima longitud $P = (v_1, v_2, \dots, v_9)$, deberíamos ser capaces de encontrar, según la Proposición 2.27, un emparejamiento casi perfecto que no incluyera a la arista (v_1, v_2) o a la arista (v_8, v_9) . Si tratamos de construir el primero, vemos que ha de contener a la arista (v_2, v_3) , con lo que no contendría a la arista incidente en el vértice u , por lo que no sería casi perfecto. Por el contrario, si dicho emparejamiento no contiene a la arista (v_8, v_9) , entonces contiene a la arista (v_7, v_8) y no puede contener a la arista incidente en v , luego tampoco es casi perfecto.

Existen muchos más resultados que prueban la elegancia de tipos concretos de langostas. Varios de ellos se deben a Mishra y Panigrahi, que emplean transferencias como las que veremos en la sección siguiente y algunas variaciones para dar varias clases de langostas elegantes, las cuales se pueden encontrar en [27, p. 18].

Más casos particulares de langostas elegantes se deben a Wang, Jin, Lu y Zhang [31], Ng [23], Sethuraman y Jesintha [20] y Abhyanker [1], entre otros.

2.2. Árboles elegantes según su diámetro

En esta sección, vamos a ver resultados en etiquetados elegantes de árboles teniendo en cuenta su diámetro. Los resultados de árboles cuyo diámetro es menor que cuatro se pueden encontrar en [10], y los de diámetros cuatro y cinco, en [15].

Teorema 2.28. *Todos los árboles de diámetro menor o igual a 3 son elegantes.*

Demostración. Los árboles de diámetro 2 y 3 son, respectivamente, estrellas y orugas, árboles cuya elegancia ya ha sido probada. \square

Existen varias pruebas de que los árboles de diámetro cuatro son elegantes, pero nosotros vamos a incluir la demostración de [15], pues se basa en algunos resultados que se emplean también para demostrar la elegancia de los árboles de diámetro cinco, y que se incluyen a continuación.

Definición 2.29. Sea T un árbol y sea $(u, v) \in E(T)$. Denotamos por $T_{u,v}$ al subgrafo de T inducido por el conjunto

$$V(T_{u,v}) = \{w \in V(T) : w = u \text{ o bien } v \text{ pertenece al único camino que conecta } u \text{ con } w\}.$$

El método empleado para estas demostraciones se basa en realizar transformaciones de un árbol elegante dado, y dichas transformaciones se apoyan en el siguiente resultado.

Lema 2.30. Sea T un árbol con un etiquetado elegante ϕ y sea u un vértice adyacente a los vértices u_1, u_2 . Sea T' el subgrafo de T inducido por el conjunto

$$V(T') = (V(T) - (V(T_{u,u_1}) \cup V(T_{u,u_2}))) \cup \{u\}$$

y sea $v \in V(T')$, $v \neq u$.

- (a) Si $u_1 \neq u_2$, $\phi(u_1) + \phi(u_2) = \phi(u) + \phi(v)$ y el árbol T'' se obtiene identificando los vértices $v \in T'$, $u \in T_{u,u_1}$ y $u \in T_{u,u_2}$, entonces ϕ es un etiquetado elegante de T'' .
- (b) Si $u_1 = u_2$, $2\phi(u_1) = \phi(u) + \phi(v)$ y el árbol T'' se obtiene identificando los vértices $v \in T'$, $u \in T_{u,u_1}$, entonces ϕ es un etiquetado elegante de T'' .

Demostración. La demostración se obtiene a partir de las siguientes igualdades:

- (a) $|\phi(u_1) - \phi(u)| = |\phi(u) + \phi(v) - \phi(u_2) - \phi(u)| = |\phi(v) - \phi(u_2)|$ y $|\phi(u_2) - \phi(u)| = |\phi(u) + \phi(v) - \phi(u_1) - \phi(u)| = |\phi(v) - \phi(u_1)|$.
- (b) $|\phi(u_1) - \phi(u)| = \left| \frac{\phi(u) + \phi(v)}{2} - \phi(u) \right| = \left| \frac{\phi(v) - \phi(u)}{2} \right|$ y $|\phi(u_1) - \phi(v)| = \left| \frac{\phi(u) + \phi(v)}{2} - \phi(v) \right| = \left| \frac{\phi(u) - \phi(v)}{2} \right| = \left| \frac{\phi(v) - \phi(u)}{2} \right|$.

□

Las Figuras 2.20 y 2.21 muestran ejemplos de las transformaciones llevadas a cabo en un árbol elegante T de acuerdo con los apartados (a) y (b) del Lema 2.30, respectivamente. En lo que sigue, no distinguiremos entre un vértice y su etiqueta (para un árbol con etiquetado elegante dado).

Definición 2.31. Si consideramos la transformación del árbol T en el árbol T'' dada por el Lema 2.30, diremos que el árbol T'' se obtiene a partir de T por una **transferencia de los árboles T_{u,u_1} y T_{u,u_2} del vértice u al v** . Como frecuentemente realizaremos transferencias de hojas de u a v , hablaremos de **transferencias $u \rightarrow v$** . Si consideramos transferencias sucesivas $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d \dots$, escribiremos $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow \dots$.

En estas demostraciones usaremos dos tipos de transferencias de hojas:

Definición 2.32. Una transferencia $u \rightarrow v$ se llama **transferencia de primer tipo** si las hojas extremos de las aristas transferidas son $k, k+1, \dots, k+m$. Dicha transferencia se puede realizar (según el Lema 2.30) si $u + v = k + (k+m)$ (ya que $k + (k+m) = (k+1) + (k+m-1) = (k+2) + (k+m-2) = \dots$).

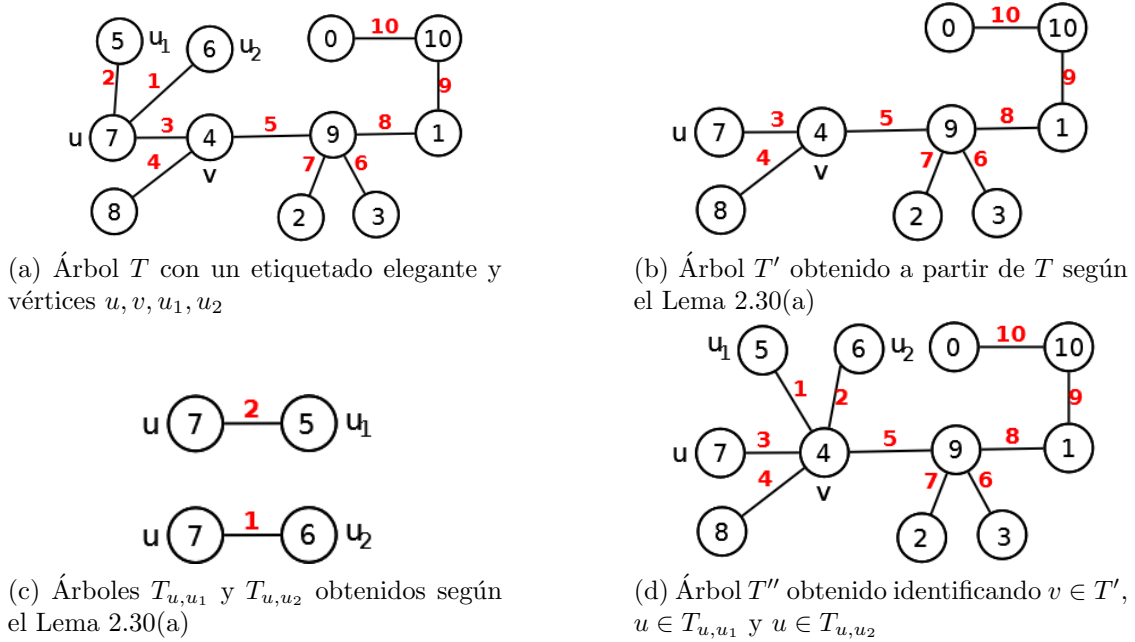


Figura 2.20: Árbol T'' obtenido a partir de T siguiendo el enunciado del Lema 2.30(a)

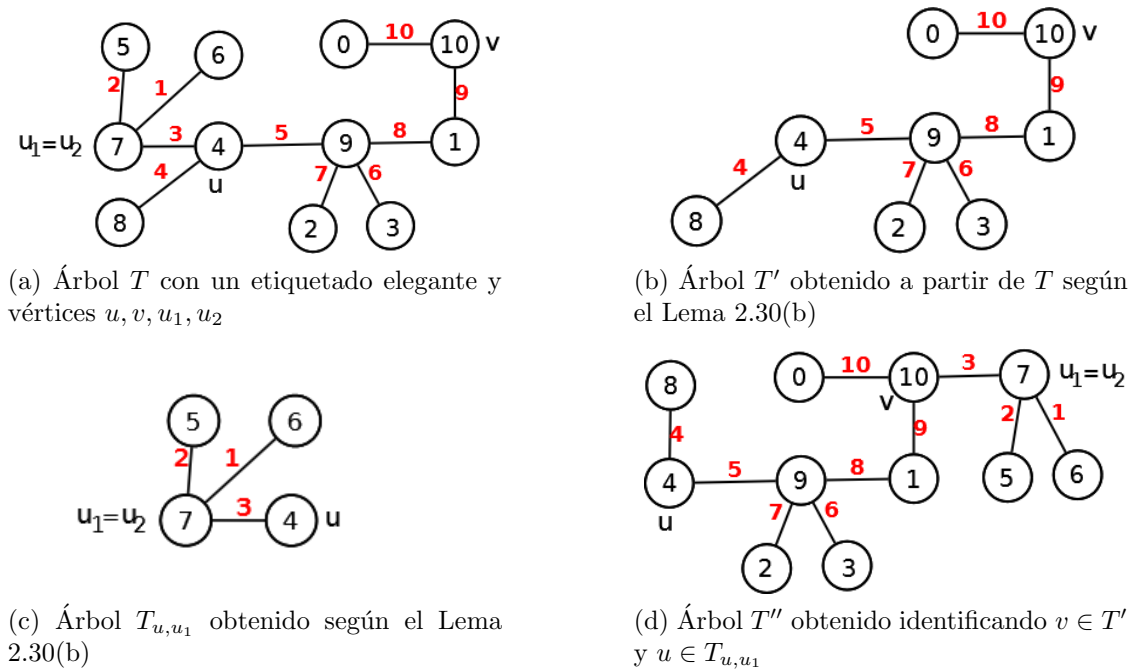


Figura 2.21: Árbol T'' obtenido a partir de T siguiendo el enunciado del Lema 2.30(b)

Definición 2.33. Una transferencia $u \rightarrow v$ se llama **transferencia de segundo tipo** si las hojas de las aristas transferidas forman dos secciones, $k, k+1, \dots, k+m$ y $l, l+1, \dots, l+m$. De acuerdo con el Lema 2.30, esta transferencia puede realizarse si $u + v = k + l + m$ (ya que $k + (l + m) = (k + 1) + (l + m - 1) = (k + 2) + (l + m - 2) = \dots$).

Normalmente, emplearemos transferencias del primer tipo si necesitamos dejar un número impar de aristas incidentes en hojas, y una del segundo tipo si queremos dejar un número par.

A continuación, mostraremos a partir del ejemplo de la Figura 2.22 cómo emplear los dos tipos de transferencias anteriores para, a partir de una estrella, dar un etiquetado elegante de un árbol de diámetro 4 cuyo vértice central (aquel de menor excentricidad) tiene grado impar, de forma que dicho vértice obtenga la mayor etiqueta.

Supongamos que queremos dar un etiquetado elegante del árbol T de la Figura 2.22a, que tiene 16 vértices. Para ello, comenzaremos con una estrella E que se puede ver en la Figura 2.22b, con $|V(E)| = 16$ y un etiquetado elegante que asigna la mayor etiqueta al vértice central de la estrella.

En primer lugar, realizaremos transferencias $15 \rightarrow 0$ de primer tipo de las aristas incidentes en las hojas 3, 4, \dots , 12 (recordemos que dicha transferencia puede hacerse porque $0 + 15 = 3 + 12 = 4 + 11 = \dots$), obteniendo el árbol de la Figura 2.22c. Después, haremos transferencias $0 \rightarrow 14$ de primer tipo de las aristas incidentes en las hojas 3, \dots , 11 para dejar solo una hoja adyacente al nodo 0. Así, obtendremos el árbol de la Figura 2.22d. A continuación, buscando dejar tres hojas adyacentes al nodo 14, realizaremos transferencias $14 \rightarrow 1$ de primer tipo de las aristas incidentes en los vértices 5, 6, \dots , 10, con lo que obtendremos el árbol de la Figura 2.22e. Por último, como buscamos dejar dos hojas adyacentes al nodo 1 (un número par), realizaremos transferencias $1 \rightarrow 13$ de segundo tipo de las aristas incidentes en los conjuntos de vértices 5, 6 y 8, 9, con lo que obtendremos el grafo inicial T con un etiquetado elegante, que se puede ver en la Figura 2.22f.

Este procedimiento nos permite obtener una prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.34. *Todo árbol de diámetro 4 es elegante.*

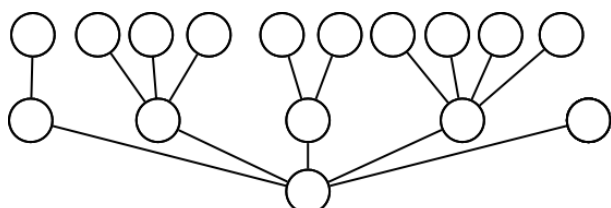
Demostración. Debido al Lema 2.15, es suficiente probar que cualquier árbol T de diámetro 4 con el vértice central de grado impar tiene un etiquetado elegante tal que la etiqueta del vértice central es máxima.

Sean x, y el número de vértices de grado par e impar mayor que 1 adyacentes al vértice central de T , respectivamente. Sea $2k + 1$ el grado del vértice central, y $|V(T)| = n$. Entonces, partiendo de una estrella E con $|V(E)| = n$ con la etiqueta $n - 1$ en el vértice central, realizamos una transferencia $n - 1 \rightarrow 0$ de los vértices $k + 1, k + 2, \dots, n - k - 1$. Posteriormente, llevamos a cabo transferencias

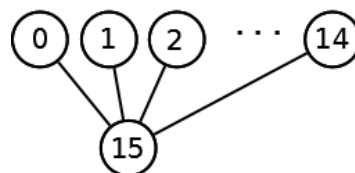
$$0 \rightarrow n - 2 \rightarrow 1 \rightarrow n - 3 \rightarrow 2 \rightarrow n - 4 \rightarrow \dots,$$

donde las x primeras (o $x - 1$ si $y = 0$) son de primer tipo, y las $y - 1$ siguientes (si $y \geq 1$) son de segundo tipo. \square

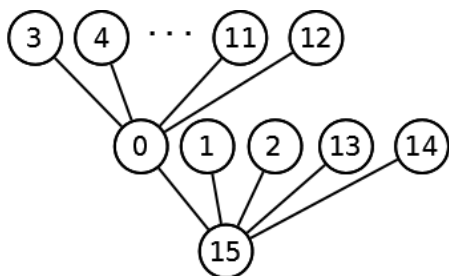
Teorema 2.35. *Todo árbol de diámetro 5 es elegante.*



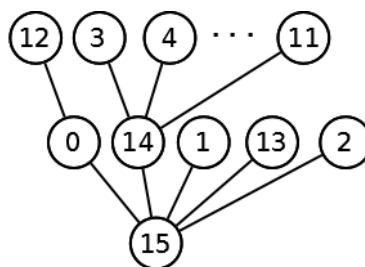
(a) Árbol T de diámetro 4, con $|V(T)| = 16$



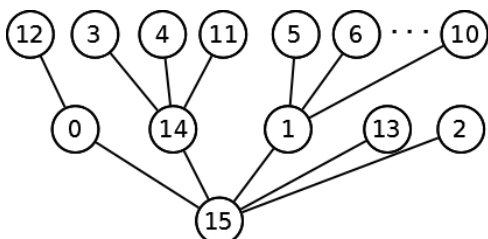
(b) Estrella E con $|V(E)| = 16$



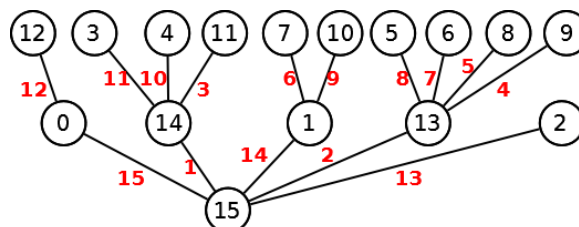
(c) Árbol obtenido a partir de E realizando transferencias $15 \rightarrow 0$



(d) Árbol obtenido a partir del anterior realizando transferencias $0 \rightarrow 14$



(e) Árbol obtenido a partir del anterior realizando transferencias $14 \rightarrow 1$



(f) Árbol obtenido a partir del anterior realizando transferencias $1 \rightarrow 13$

Figura 2.22: Etiquetado elegante de un árbol T de diámetro 4 con vértice central de grado impar a partir de una estrella empleando transferencias de primer y segundo tipo

La demostración de que todos los árboles de diámetro 5 son elegantes no vamos a incluirla en este texto por ser demasiado larga, pero se basa, al igual que la del Teorema 2.34, en las transferencias de primer y segundo tipo, y en otra transferencia que recibe el nombre de *transferencia doble hacia atrás de primer tipo*, compuesta por 8 transferencias de primer tipo, con el objetivo de dejar un número par de aristas incidentes en los cuatro nodos en los que se realiza. Además de esto, se incluyen en el artículo [15] las definiciones de *ramas pares e impares*, que servirán para diferenciar múltiples casos durante la demostración.

De momento, no existen resultados que garanticen la elegancia de todos los árboles de diámetro 6. En [30, pp. 64-68] se dan dos clases de árboles elegantes de diámetro 6 y se generalizan resultados a árboles de mayor diámetro.

2.3. Árboles elegantes según su número de nodos

En la primera parte de esta sección del trabajo, damos un resumen de los avances que se han logrado en la tarea de probar la Conjetura de Ringel-Kotzig tomando como criterio el número de vértices del árbol. Después, incluimos un modelo de Optimización Lineal Entera dado por Redl en [26] y que nosotros hemos linealizado e implementado en el optimizador Xpress. A continuación, proponemos nosotros una nueva formulación para abordar la Conjetura, y una serie de desigualdades válidas que la refuerzan. Por último, hemos realizado una comparativa entre el modelo de Redl y el nuestro, con y sin las desigualdades válidas propuestas. Cabe destacar que las formulaciones con que trabajamos sirven también para demostrar la elegancia de grafos (con pequeñas modificaciones), aunque nosotros nos centremos en árboles.

Rosa ya anuncia sin prueba en [28] en 1966 que cualquier árbol de hasta 16 vértices tiene un β -etiquetado, es decir, un etiquetado elegante. El siguiente artículo que amplía el número de árboles elegantes basándose en el número de vértices es de Aldred y McKay [3], publicado en 1998. En dicho artículo, establecen el siguiente resultado:

Teorema 2.36. *Todos los árboles de orden menor o igual que 27 son elegantes.*

Aldred y McKay demuestran el teorema mediante una búsqueda computacional, empleando un algoritmo que parte de un etiquetado del árbol T que utiliza el conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$ y que intercambia las etiquetas de dos nodos siempre que se incrementa el número de etiquetas distintas inducidas en las aristas. Si no se produce mejoría al intercambiar dos etiquetas para ningún par de vértices, se elige un par que no se haya intercambiado en un número fijo M de veces anteriores y que maximice el conjunto de etiquetas distintas de las aristas.

En 2003, Horton [13] extiende este resultado, concluyendo mediante una búsqueda aleatoria con retroceso que todos los árboles de orden menor o igual a 29 son elegantes. Finalmente, en 2010 Fang [12] prueba mediante una búsqueda determinista con retroceso la elegancia de todos los árboles de hasta 35 vértices.

Capítulo 3

Modelos de Optimización Lineal Entera

En este capítulo, vamos a describir dos modelos de Optimización Lineal Entera, uno que presenta Redl en [26] y otro modelo que hemos propuesto nosotros, y algunas desigualdades válidas que hemos diseñado para reforzarlo. La última sección del capítulo consiste en una comparativa entre ambos modelos, y entre nuestro modelo con y sin las desigualdades presentadas.

3.1. El modelo de Redl

En 2003, Redl [26] describe dos formulaciones, una que emplea optimización entera y otra que incluye optimización con restricciones. Incluimos aquí la primera de ellas, donde suponemos G un grafo con n vértices y m aristas. Así, las variables son $\{x_i\}_{i=1}^n$ y representan las etiquetas asignadas al conjunto de nodos, por lo que son enteras. Este modelo se puede ver en la Figura 3.1.

En el análisis que se incluye en [26] de esta formulación, se explica que únicamente interesa encontrar factibilidad, no una maximización o minimización de una función objetivo, y es por esto que se emplea la función objetivo constante (3.1). Si logramos encontrar

Minimizar	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$	(3.1)
sujeto a	$ x_i - x_j = a$ para alguna arista $(i, j) \in E(G)$, $a = 1, \dots, m$	(3.2)
	$ x_i - x_j \geq 1$ para cada i, j tal que $(i, j) \notin E(G)$	(3.3)
	$0 \leq x_i \leq m$ para $i = 1, 2, \dots, n$	(3.4)
	$x_i \in \mathbb{Z}$ para $i = 1, 2, \dots, n$.	(3.5)

Figura 3.1: Modelo de optimización propuesto por Redl en [26]

Minimizar	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$	(3.6)
sujeto a	$ x_i - x_j = z_k$ para cada arista $k = (i, j)$, con $k = 1, \dots, m$	(3.7)
	$ x_i - x_j \geq 1$ para cada i, j tal que $(i, j) \notin E(G)$	(3.8)
	$ z_k - z_l \geq 1$ para $k, l = 1, \dots, m, k < l$	(3.9)
	$x_i \in \{0, 1, \dots, m\}$ para $i = 1, 2, \dots, n$	(3.10)
	$z_k \in \{1, 2, \dots, m\}$ para $k = 1, 2, \dots, m$.	(3.11)

Figura 3.2: Modelo de Optimización añadiendo el conjunto de variables $\{z_k\}_{k=1}^m$ y las desigualdades correspondientes.

un conjunto de etiquetas que satisfaga todas las desigualdades (3.1)-(3.5) para un grafo G , entonces G es elegante y $\{x_i\}_{i=1}^n$ son las etiquetas de los nodos $1, \dots, n$, mientras que si no se obtiene solución factible, G no será elegante.

Para linealizar las desigualdades (3.2) y (3.3) hay que hacer uso de variables binarias. Con el objetivo de disminuir el número de variables binarias necesarias, se propone en [26] emplear las variables enteras $\{z_i\}_{i=1}^m$, relativas a una etiqueta de cada arista de G , de manera que para cada arista $k = (i, j)$, tengamos que su etiqueta viene inducida por las de los dos nodos en los que incide: $z_k = |x_i - x_j|$, con $k = 1, \dots, m$. Empleando estas variables, llegaríamos a la formulación de la Figura 3.2, en la que tenemos que incluir un conjunto de desigualdades para que las etiquetas inducidas en las aristas sean distintas, y que aún no es lineal.

Nosotros hemos llevado a cabo la implementación del modelo utilizando el programa Xpress. Para ello, hemos optado por introducir el grafo mediante su matriz de adyacencia $M_{n \times n} = (m_{ij})$, lo cual modifica los índices de las variables asociadas a las aristas de las formulaciones anteriores, que ahora son $\{z_{ij}\}_{i,j=1, i < j}^n$ para i, j tales que $m_{ij} = 1$. También hemos linealizado la formulación, empleando dos conjuntos de variables auxiliares: $\{u_{ij}\}_{i,j=1}^n$ con $i < j$, variables binarias para linealizar las desigualdades (3.7) y (3.8), es decir, las relativas a las etiquetas de los vértices; y $\{v_{ijkl}\}_{i,j,k,l=1}^n$ para $m_{ij} = m_{kl} = 1$, $i < j$, $k < l$, $(i, j) < (k, l)$ con el orden lexicográfico, variables binarias para linealizar las desigualdades (3.9), relativas a las etiquetas inducidas en las aristas.

De esta forma, el conjunto de desigualdades (3.7) comprende dos conjuntos de desigualdades a su vez: $|x_i - x_j| \leq z_{ij}$ y $|x_i - x_j| \geq z_{ij}$. Cada uno de estos conjuntos supone dos nuevos conjuntos de desigualdades, que son los siguientes:

$$x_i - x_j \leq z_{ij} \quad \text{si } i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n, \quad (3.12)$$

$$x_j - x_i \leq z_{ij} \quad \text{si } i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

$$x_i - x_j + C_1 u_{ij} \geq z_{ij} \quad \text{si } i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n, \quad (3.14)$$

$$x_j - x_i + C_1(1 - u_{ij}) \geq z_{ij} \quad \text{si } i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n, \quad (3.15)$$

donde C_1 es una constante que tenemos que calcular. Si $u_{ij} = 0$, entonces el conjunto de desigualdades (3.14) está activo, y $x_j - x_i + C_1 \geq z_{ij}$ tiene que cumplirse para cualesquier

Minimizar	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$	
sujeto a	$x_i - x_j \leq z_{ij}$ si $i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n$	(3.12)
	$x_j - x_i \leq z_{ij}$ si $i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n$	(3.13)
	$x_i - x_j + 2mu_{ij} \geq z_{ij}$ si $i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n$	(3.14)
	$x_j - x_i + 2m(1 - u_{ij}) \geq z_{ij}$ si $i < j, m_{ij} = 1, i, j = 1, \dots, n$	(3.15)
	$x_i - x_j + (m + 1)u_{ij} \geq 1$ si $i < j, m_{ij} = 0, i, j = 1, \dots, n$	(3.16)
	$x_j - x_i + (m + 1)(1 - u_{ij}) \geq 1$ si $i < j, m_{ij} = 0, i, j = 1, \dots, n$	(3.17)
	$z_{ij} - z_{kl} + (m + 1)v_{ijkl} \geq 1$ si $m_{ij} = m_{kl} = 1, i < j, k < l, (i, j) < (k, l)$	(3.18)
	$z_{kl} - z_{ij} + (m + 1)(1 - v_{ijkl}) \geq 1$ si $m_{ij} = m_{kl} = 1, i < j, k < l, (i, j) < (k, l)$	(3.19)
	$x_i \in \{0, 1, \dots, m\}$ para $i = 1, 2, \dots, n$	
	$z_{ij} \in \{1, 2, \dots, m\}$ para $i, j = 1, 2, \dots, n, m_{ij} = 1, i < j$.	

Figura 3.3: Modelo de Optimización Lineal Entera de Redl

valores de x_i, x_j, z_{ij} tales que $x_i - x_j \geq z_{ij}$; del mismo modo, para $u_{ij} = 1$, el conjunto de desigualdades (3.15) está activo y se tiene que cumplir $x_i - x_j + C_1 \geq z_{ij}$ para x_i, x_j, z_{ij} tales que $x_j - x_i \geq z_{ij}$. Por tanto, se tiene que cumplir siempre $-|x_i - x_j| + C_1 \geq z_{ij} \Rightarrow C_1 \geq z_{ij} + |x_i - x_j|$. Como sabemos que $z_{ij} \leq m$ y $|x_i - x_j| \leq m \forall i, j$, basta fijar $C_1 = 2m$.

De modo análogo, linealizamos ahora el conjunto de desigualdades (3.8), obteniendo los siguientes conjuntos de desigualdades lineales:

$$x_i - x_j + C_2 u_{ij} \geq 1 \quad \text{si } i < j, m_{ij} = 0, i, j = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

$$x_j - x_i + C_2(1 - u_{ij}) \geq 1 \quad \text{si } i < j, m_{ij} = 0, i, j = 1, \dots, n, \quad (3.17)$$

donde, con un razonamiento análogo al previo, obtenemos que C_2 es una constante que tiene que cumplir $-|x_i - x_j| + C_2 \geq 1$ para cualquier valor de x_i, x_j . Así, como $|x_i - x_j| \leq m \forall i, j$, fijamos $C_2 = m + 1$.

Las desigualdades (3.9) se linealizan de la misma manera, obteniendo

$$z_{ij} - z_{kl} + C_3 v_{ijkl} \geq 1 \quad \text{si } m_{ij} = m_{kl} = 1, i < j, k < l, (i, j) < (k, l), \quad (3.18)$$

$$z_{kl} - z_{ij} + C_3(1 - v_{ijkl}) \geq 1 \quad \text{si } m_{ij} = m_{kl} = 1, i < j, k < l, (i, j) < (k, l), \quad (3.19)$$

con $C_3 = m + 1$. El modelo de Redl linealizado completo se puede ver en la Figura 3.3.

En [26], el modelo visto se implementa en CPLEX y se obtienen resultados computacionales acerca de la elegancia de algunos tipos de grafos, pero no se muestran resultados sobre su rendimiento con árboles. Nosotros abordaremos esta tarea en apartados siguientes.

3.2. Nuevo modelo de Optimización Lineal Entera

A continuación, vamos a proponer un nuevo modelo de Optimización Lineal Entera para encontrar etiquetados elegantes de árboles.

Vamos a definir en primer lugar las variables que emplearemos en el modelo. Así, dado un árbol T con $|V(T)| = n$ y $|E(T)| = m$, tendremos un conjunto de variables binarias $\{x_{ij}\}$, con $i = 0, \dots, n-1$ y $j = 0, \dots, m$, tales que $x_{ij} = 1$ si al vértice i se le asigna la etiqueta 0 , y $x_{ij} = 0$ en caso contrario. Análogamente, contaremos con el conjunto de variables binarias $\{y_{ij}\}$, con $i = 0, \dots, m-1$, $j = 1, \dots, m$, tales que y_{ij} será 1 si la arista i tiene la etiqueta inducida j , y 0 en caso contrario.

Empleando estas variables, un etiquetado elegante debe cumplir las siguientes condiciones:

- Cada vértice sólo puede tener asignada una etiqueta:

$$\sum_{j=0}^m x_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, \dots, n-1. \quad (3.20)$$

- Cada etiqueta solo se puede asignar a un vértice:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 0, \dots, m. \quad (3.21)$$

- Cada arista solo puede llevar una etiqueta:

$$\sum_{j=1}^m y_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, \dots, m-1. \quad (3.22)$$

- Cada etiqueta solo se puede asignar a una arista:

$$\sum_{i=0}^{m-1} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m. \quad (3.23)$$

- Si los nodos i, j llevan etiquetas l y $l+k$, entonces la arista $e = (i, j)$ tiene que llevar la etiqueta k :

$$\begin{aligned} y_{ek} + 1 &\geq x_{il} + x_{j,l+k} && \forall e, l = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, m-l, \\ y_{ek} + 1 &\geq x_{jl} + x_{i,l+k} && \forall e, l = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, m-l. \end{aligned}$$

La forma de introducir el árbol en Xpress ha sido mediante una matriz $A_{m \times 2}$, de forma que la arista e incide en los nodos (a_{e1}, a_{e2}) , para $e = 0, \dots, m-1$. Así pues, empleando esta matriz, reescribimos el conjunto de desigualdades anterior:

$$y_{ek} + 1 \geq x_{a_{e1},l} + x_{a_{e2},l+k} \quad \forall e, l = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, m-l, \quad (3.24)$$

$$y_{ek} + 1 \geq x_{a_{e2},l} + x_{a_{e1},l+k} \quad \forall e, l = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, m-l. \quad (3.25)$$

- Por último, incluimos en el modelo las desigualdades de integridad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m, \quad (3.26)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 0, \dots, m-1, j = 1, \dots, m. \quad (3.27)$$

- Como de este modelo solo nos interesa obtener un etiquetado elegante dado un árbol, y no pretendemos optimizar nada, podemos establecer una función objetivo que tenga un valor fijo, de la misma manera que en el modelo anterior:

$$\text{mín } f(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0. \quad (3.28)$$

3.2.1. Mejoras del modelo anterior

En este apartado vamos a describir algunas desigualdades válidas que podemos incluir en el modelo anterior.

En primer lugar, observemos los conjuntos de desigualdades (3.24) y (3.25). Fijada una arista e , si tenemos $x_{a_{e1},l} = 1$ y fijadas l y k , la desigualdad $\sum_{j=0}^m x_{a_{e1},j} = 1$ (del conjunto de desigualdades (3.20)) implica que $x_{a_{e1},l+k} = 0$, mientras que la desigualdad $\sum_{i=0}^{n-1} x_{il}$ (del conjunto de desigualdades (3.21)) implica $x_{a_{e2},l} = 0$. Extrapolando este mismo razonamiento a cada desigualdad de (3.24), podemos sustituir los conjuntos (3.24) y (3.25) por el conjunto siguiente:

$$y_{ek} + 1 \geq x_{a_{e1},l} + x_{a_{e2},l} + x_{a_{e1},l+k} + x_{a_{e2},l+k} \quad \forall e, l = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, m-l. \quad (3.29)$$

Así, hemos reducido el número de desigualdades de este tipo a la mitad, lo cual supone tener $m^2(m + (m-1) + \dots + 1) = m^2 \frac{(m+1)m}{2}$ desigualdades menos, y además las desigualdades (3.29) son más fuertes que las (3.24) y (3.25).

A continuación, vamos a describir dos conjuntos de desigualdades que hemos obtenido atendiendo a las características de los árboles elegantes. En primer lugar, como un etiquetado elegante ϕ induce en una de las aristas la etiqueta $|E(T)| = m$, que solo se puede obtener restando las etiquetas de los nodos 0 y m , es claro que estos dos nodos tienen que ser adyacentes. Esto da lugar a los conjuntos de desigualdades:

$$x_{i0} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin N(i)}}^{n-1} x_{jm} \leq 1 \quad \forall i = 0, \dots, n-1, \quad (3.30)$$

$$x_{im} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin N(i)}}^{n-1} x_{j0} \leq 1 \quad \forall i = 0, \dots, n-1. \quad (3.31)$$

Siguiendo el mismo razonamiento, la arista de etiqueta $m-1$ tiene que ser extremo de los nodos 0 y $m-1$ o de los nodos 1 y m , lo cual da lugar a los conjuntos de desigualdades

válidas:

$$x_{i0} + x_{j1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k,m-1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k,m} \leq 3 \quad \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j, \quad (3.32)$$

$$x_{i0} + x_{j,m} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k,m-1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k,1} \leq 3 \quad \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j, \quad (3.33)$$

$$x_{i,m-1} + x_{j1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k,0} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k,m} \leq 3 \quad \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j, \quad (3.34)$$

$$x_{i,m-1} + x_{j,m} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k,0} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k,1} \leq 3 \quad \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j. \quad (3.35)$$

Supongamos, dada la arista $e_l = (i_l, j_l)$, que $\phi(i_l) = s$, $\phi(j_l) = t$ con $s \in \{0, \dots, s'\}$, $t \in \{t', \dots, m\}$, con $t' - s' \geq 2$. Entonces $\phi(e) \geq t' - s'$. Este razonamiento motiva los siguientes conjuntos de desigualdades válidas:

$$\sum_{s=0}^{s'} x_{i_s} + \sum_{t=t'}^m x_{j_t} + \sum_{k=0}^{t'-s'-1} y_{e_l k} \leq 2$$

$$\forall l = \{0, \dots, m-1\}, s' = \{0, \dots, m-2\}, t' = \{s'+2, \dots, m\}, \quad (3.36)$$

$$\sum_{s=0}^{s'} x_{j_s} + \sum_{t=t'}^m x_{i_t} + \sum_{k=0}^{t'-s'-1} y_{e_l k} \leq 2$$

$$\forall l = \{0, \dots, m-1\}, s' = \{0, \dots, m-2\}, t' = \{s'+2, \dots, m\}. \quad (3.37)$$

Finalmente, vamos a describir algunas características de un árbol que nos permiten definir distintos etiquetados elegantes a partir de uno dado.

Proposición 3.1. *Sea $T = (V, E)$ un árbol con un etiquetado elegante ϕ y una arista $e = (v, w) \in E_T$. Sea T' el subgrafo dado por la componente conexa a la que pertenece v en $T'' = (V, E'')$, con $E'' = E \setminus \{e\}$. Fijemos v raíz de T' y sean v_1, \dots, v_k los nodos adyacentes a v en T' . Sea T_i el subgrafo dado por la componente conexa a la que pertenece v_i en $T'_i = (V_{T'}, E_{T'_i})$, con $E_{T'_i} = E_{T'} \setminus \{(v_i, v)\}$, para $i = 1, \dots, k$. Entonces, para cada $1 \leq i < j \leq k$ tal que exista $\varphi_{ij} : T_i \rightarrow T_j$ isomorfismo con $\varphi_{ij}(v_i) = v_j$, existe un etiquetado elegante ϕ_{ij} de T tal que para cada $a \in T_i$ existe un $b \in T_j$ con $\phi_{ij}(a) = \phi(b)$.*

Demostración. Supongamos que tenemos un par de subgrafos T_i, T_j con un isomorfismo $\varphi_{ij} : T_i \rightarrow T_j$, para $1 \leq i < j \leq k$. Podemos definir ϕ_{ij} como:

$$\phi_{ij}(w) \begin{cases} \phi(w) & \text{si } w \in T \setminus \{T_i, T_j\}, \\ \phi(\varphi_{ij}(w)) & \text{si } w \in T_i, \\ \phi(\varphi_{ij}^{-1}(w)) & \text{si } w \in T_j. \end{cases}$$

Claramente, todos los vértices de T llevan etiquetas distintas en el etiquetado ϕ_{ij} . Además, tenemos que las aristas de $T \setminus \{T_i, T_j\}$ conservan las etiquetas dadas por ϕ en ϕ_{ij} , $\phi_{ij}(v, v_i) = \phi(v, v_j)$, $\phi_{ij}(v, v_j) = \phi(v, v_i)$ y $\phi_{ij}(u_1, u_2) = \phi(\varphi_{ij}(u_1), \varphi_{ij}(u_2))$ para $u_1, u_2 \in T_i$, $\phi_{ij}(u_1, u_2) = \phi(\varphi_{ij}^{-1}(u_1), \varphi_{ij}^{-1}(u_2))$ para $u_1, u_2 \in T_j$, por lo que las etiquetas de las aristas también son distintas. Por tanto, ϕ_{ij} es elegante. \square

Corolario 3.2. *Sea T un árbol con un etiquetado elegante ϕ y una arista $e = (v, w) \in E_T$. Sea T' el subgrafo dado por la componente conexa a la que pertenece v en $T'' = (V, E'')$, con $E'' = E \setminus \{e\}$. Fijemos v raíz de T' y sean v_1, \dots, v_k los nodos adyacentes a v en T' . Sea T_i el subgrafo dado por la componente conexa a la que pertenece v_i en $T'_i = (V_{T'}, E_{T'_i})$, con $E_{T'_i} = E_{T'} \setminus \{(v_i, v)\}$, para $i = 1, \dots, k$. Entonces, si T' es simétrico con raíz v , para cada $1 \leq i < j \leq k$ existe un etiquetado elegante ϕ'_{ij} de T de manera que para cada $u_i \in T_i$ existe un $u_j \in T_j$ con $\phi(u_i) = \phi_{ij}(u_j)$.*

Sea T un árbol con un etiquetado elegante ϕ , y sea T' un subgrafo de T simétrico con raíz v y v_1, \dots, v_k los vértices del primer nivel. Sea $T_i \subset T'$ la componente conexa del grafo $T' \setminus \{(v, v_i)\}$ a la que pertenece el nodo v_i , para $1 \leq i \leq k$. Entonces, para cada $1 \leq i < j \leq k$, existe un etiquetado elegante ϕ'_{ij} de T de manera que para cada $u_i \in T_i$ existe un $u_j \in T_j$ con $\phi(u_i) = \phi_{ij}(u_j)$.

Demostración. Como el subgrafo T' es simétrico, sabemos por el Lema 2.5 de la página 23 que los subgrafos T_1, \dots, T_k son isomorfos. Por tanto, estamos en condiciones de aplicar la Proposición 3.1 para cada par de subgrafos T_i, T_j con $1 \leq i < j \leq k$, lo que nos da el resultado buscado. \square

Así, tenemos que para cada árbol T con T' un subgrafo simétrico de raíz v y k' hojas en el primer nivel, podemos definir, a partir de uno, $P_{k'} - 1 = k'! - 1$ etiquetados elegantes distintos. Es más, dados T_1, \dots, T_m subgrafos simétricos de T con k_1, \dots, k_m hojas en el primer nivel, respectivamente, podríamos formar $P_{k_1} P_{k_2} \cdots P_{k_m} - 1 = k_1! \cdots k_m! - 1$ etiquetados elegantes distintos a partir de uno.

Proposición 3.3. *Dado un árbol T con un etiquetado elegante ϕ y $v_1, v_2 \in T$ dos vértices adyacentes, sean $T_1, T_2 \subset T$ las componentes conexas de $T' = (V, E')$, $E' = E \setminus \{(v_1, v_2)\}$ a las que pertenecen v_1, v_2 , respectivamente. Si existe $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$ isomorfismo con $\varphi(v_1) = v_2$, entonces existe un etiquetado elegante ϕ' de T que cumple que para cada vértice $u_1 \in T_1$, existe un vértice $u_2 \in T_2$ con $\phi(u_1) = \phi'(u_2)$.*

Demostración. Vamos a definir el etiquetado ϕ' :

$$\phi'(w) = \begin{cases} \phi(\varphi(w)) & \text{si } w \in T_1, \\ \phi(\varphi^{-1}(w)) & \text{si } w \in T_2. \end{cases}$$

Es claro que ϕ' es elegante, pues el conjunto de etiquetas asignado por ϕ a T_1 lo asigna ϕ' a T_2 , y viceversa, mientras que $\phi'((v_1, v_2)) = \phi((v_1, v_2))$, y $\phi'((u_1, u'_1)) = \phi((\varphi(u_1), \varphi(u'_1)))$ para $u_1, u'_1 \in T_1$, $\phi'((u_2, u'_2)) = \phi((\varphi^{-1}(u_2), \varphi^{-1}(u'_2)))$ para $u_2, u'_2 \in T_2$. \square

Como T_1, T_2 son isomorfos en la proposición anterior con $V(T_1) \cup V(T_2) = V(T)$, es claro que $|V(T_1)| = |V(T_2)| = \frac{|V(T)|}{2}$, luego para un árbol T solo podrá existir un

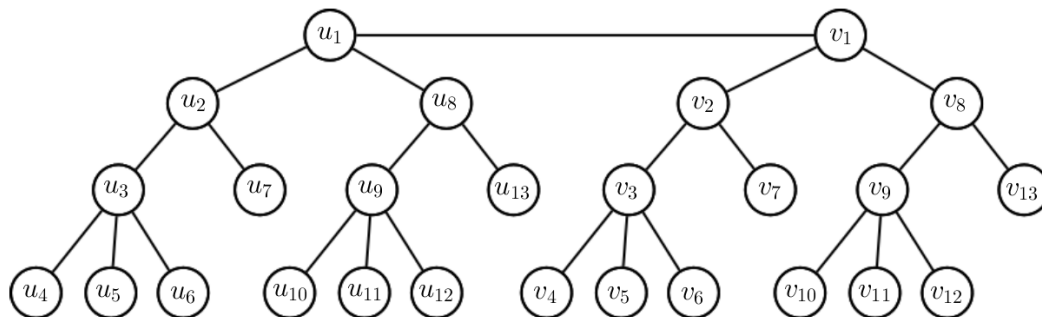


Figura 3.4: Árbol T propuesto para ilustrar mediante un ejemplo la utilidad de las Proposiciones 3.1 y 3.3 y el Corolario 3.2

isomorfismo de este tipo, ya que la eliminación de otra arista en T no dejará el mismo número de vértices en cada componente conexa.

Cabe destacar también que para un árbol T con un etiquetado elegante ϕ y dos subgrafos T_1, T_2 isomorfos cualesquiera de T , no necesariamente se da la existencia de otro etiquetado elegante que asigne el conjunto de etiquetas asignado por ϕ a T_1 a T_2 y viceversa. Únicamente los casos descritos en las Proposiciones 3.1 y 3.3 nos aseguran la existencia de dichos etiquetados.

Vamos a ver a través del ejemplo de la Figura 3.4 los distintos etiquetados elegantes que podríamos obtener a partir de uno aplicando las Proposiciones 3.1 y 3.3 y el Corolario 3.2.

En primer lugar, podemos aplicar la Proposición 3.1 para los subgrafos T_U y T_V inducidos por los conjuntos de vértices $U = \{u_i\}_{i=1}^{13}$ y $V = \{v_i\}_{i=1}^{13}$. Para T_U , definimos u_1 como raíz del árbol, u_2, u_8 son los vértices del primer nivel, T_{u_2} el árbol inducido por el conjunto de vértices $\{u_2, \dots, u_7\}$ y T_{u_8} el árbol inducido por el conjunto de vértices $\{u_8, \dots, u_{13}\}$. Así, podemos establecer el isomorfismo $\varphi : T_{u_2} \rightarrow T_{u_8}$ con $\varphi(u_{2+k}) = u_{8+k}$, para $k = 0, \dots, 5$, y aplicando la Proposición 3.1, podemos encontrar un etiquetado elegante distinto de T a partir de uno dado. Podemos repetir el proceso para T_V , obteniendo otro etiquetado elegante a partir de cada uno de los anteriores, con lo que en total tendríamos 4 etiquetados elegantes.

Asimismo, podemos aplicar el Corolario 3.2 al árbol T y los subgrafos simétricos $T_{u_3}, T_{u_9}, T_{v_3}$ y T_{v_9} inducidos por los conjuntos de vértices $\{u_3, \dots, u_6\}$, $\{u_9, \dots, u_{12}\}$, $\{v_3, \dots, v_6\}$ y $\{v_9, \dots, v_{12}\}$ y de raíces u_3, u_9, v_3 y v_9 , respectivamente, obteniendo $3! = 6$ etiquetados elegantes a partir de cada uno de los anteriores cada vez que aplicamos dicho corolario. En total, tendríamos $4 * (3!)^4 = 5184$ etiquetados elegantes.

Por último, notemos que también podemos aplicar la Proposición 3.3 a T , u_1, v_1 vértices adyacentes y T_U, T_V los árboles definidos anteriormente, pues tenemos un isomorfismo $\varphi_{UV} : T_U \rightarrow T_V$ dado por $\varphi_{UV}(u_i) = v_i$, para $i = 1, \dots, 13$. Aplicando dicha proposición, obtenemos un etiquetado elegante por cada uno de los anteriores, es decir, doblamos la cantidad de etiquetados elegantes distintos. Por tanto, hemos visto como, suponiendo que existe un etiquetado elegante de T , somos capaces de encontrar 10367 etiquetados elegantes distintos a partir del primero.

Nosotros hemos diseñado un algoritmo que, dado un árbol T , genera desigualdades válidas que eliminan los etiquetados múltiples dados por las Proposiciones 3.1 y 3.3 y el Corolario 3.2 (aunque no hemos de olvidar que pueden existir múltiples etiquetados elegantes de un árbol que no vengan dados por estos resultados). Para ello, si k subgrafos de T , T_1, \dots, T_k , cumplen las condiciones de la Proposición 3.1 o del Corolario 3.2, con v_1, \dots, v_k las raíces de dichos árboles isomorfos, nuestro algoritmo generará las desigualdades $\phi(v_1) < \dots < \phi(v_k)$, es decir, de los $k!$ etiquetados elegantes que tenemos a partir de uno, tomará aquel en el que las etiquetas de las raíces de dichos árboles estén ordenadas de menor a mayor. Algo semejante ocurre cuando T tiene dos subgrafos T_1, T_2 isomorfos con $v_1 \in T_1$ adyacente a $v_2 \in T_2$ según las condiciones de la Proposición 3.3, ya que en este caso, se generará una desigualdad válida del tipo $\phi(v_1) < \phi(v_2)$.

Para explicar el algoritmo, vamos a introducir algunos conceptos con los que necesitaremos trabajar posteriormente:

Definición 3.4. Sea T un árbol con un etiquetado elegante ϕ y una arista $e = (v, w) \in E_T$. Sea T' el subgrafo dado por la componente conexa a la que pertenece v en $T' = (V, E')$, con $E' = E \setminus \{e\}$. Fijemos v raíz de T' y sean v_1, \dots, v_k los nodos adyacentes a v en T' . Sea $T_i = (V_i, E_i)$, con $V_i = V_{T'} \setminus \{v\}$, $E_i = E_{T'} \setminus \{(v_i, v)\}$, para $i = 1, \dots, k$. Entonces, si dos subgrafos T_i, T_j cumplen las condiciones de la Proposición 3.1 (o del Corolario 3.2), diremos que los vértices v_i, v_j son **simétricos por la Proposición 3.1**.

Definición 3.5. Sea T un árbol con $v_1, v_2 \in T$ adyacentes y $T_1, T_2 \subset T$ las componentes conexas de $T' = (V, E')$, $E' = E \setminus \{(v_1, v_2)\}$ a las que pertenecen v_1, v_2 , respectivamente. Entonces, si T_1, T_2 cumplen las condiciones de la Proposición 3.3, diremos que los vértices v_1, v_2 son **simétricos por la Proposición 3.3**.

En el texto que sigue, con la finalidad de abreviar, diremos que v_1, v_2 son **simétricos** si lo son por la Proposición 3.1 o por la 3.3.

Definición 3.6. Dado un árbol T y un vértice $v \in T$, definimos la **tensión de v** , $t(v)$, como la mínima distancia entre v y una hoja en un camino P que contenga a v y cuya longitud sea máxima entre todos los caminos que contienen a v .

Una forma de establecer la tensión de todos los nodos de T recursivamente consiste en dar a las hojas de T tensión 0; a las hojas del subgrafo T_1 de T inducido por todos los nodos de T que no son hojas, la tensión 1; a las hojas del subgrafo T_2 de T_1 inducido por los vértices de T_1 que no son hojas, la tensión 2; y así sucesivamente.

Lema 3.7. *Dado un árbol T y un vértice $v \in T$, se da uno de los siguientes casos:*

1. *La tensión de v es máxima en T .*
2. *Existe un único vértice w adyacente a v con $t(w) > t(v)$.*

Demostración. Supongamos que $t(v)$ no es máxima, y vamos a ver que se tiene la segunda condición. Supongamos primero, por reducción al absurdo, que no existe ningún vértice adyacente a v de tensión mayor que este. Tomemos entonces un camino P que contenga al nodo v y tenga longitud máxima entre los caminos que contienen a v , que

conecta la hoja h_1 con h_2 . Ahora hemos de ver que existe un vértice u de tensión máxima en el camino. Si suponemos que no, entonces podemos construir un camino $P' = (h_1, \dots, v, \dots, u, \dots, h_3)$ o bien $P'' = (h_2, \dots, v, \dots, u, \dots, h_3)$, para h_3 una hoja a distancia máxima de u . En cualquiera de los dos casos, la longitud de este camino es mayor a la de P , y contiene a v , luego tendríamos una contradicción. Por tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $P = (h_1, \dots, v, w, \dots, u, \dots, h_3)$. Pero entonces tenemos $t(w) \geq d(w, h_1) > d(v, h_1) = t(v)$.

Supongamos ahora que v es adyacente a dos vértices u, w de tensiones $t_u \leq t_w$ respectivamente, y veamos que $t(v) > t_u$. Vamos a tomar el camino $P = (h_1, \dots, u, v, \dots, h_2)$, con h_1, h_2 las hojas de T a mayor distancia de u, v , respectivamente (donde h_1 puede ser igual a u sin pérdida de generalidad). Tenemos dos posibilidades, que w pertenezca a P o que no. Si $w \in P$, entonces existe un camino que contiene a w , empieza en h_2 y tiene longitud máxima entre los caminos que contienen a w , luego $t_w \leq d(w, h_2) \Rightarrow t_w + 1 \leq d(v, h_2)$. Por el contrario, si $w \notin P$, podemos tomar un camino $P' = (h_2, \dots, v, w, \dots, h_3)$ (donde $d(h_2, v) \geq d(v, h_3)$ por hipótesis) y tendremos $d(h_2, w) > d(w, h_3) \Rightarrow t_w \leq d(w, h_3) \Rightarrow t_w + 1 \leq d(w, h_3) + 1 = d(v, h_3) \leq d(h_2, v)$. Es decir, en ambos casos se tiene $t_w + 1 \leq d(h_2, v)$.

Entonces tenemos $d(v, h_2) \geq 1 + t_w \geq 1 + t_u > t_u$, y por lo tanto $d(u, h_2) = 1 + d(v, h_2) > t_u \Rightarrow d(h_1, u) = t_u$, pero esto último implica $d(h_1, v) > t_u$, luego hemos encontrado un camino en el que $d(v, h_2) > t_u$ y $d(h_1, v) > t_u$, es decir, $t(v) > t_u$.

La primera parte de la prueba nos indica que, si $t(v)$ no es máxima, existe al menos un vértice w adyacente a v con $t(w) > t(v)$; y la segunda parte nos indica que no pueden existir u, w adyacentes a v con $t(u) \geq t(w) > t(v)$. Por tanto, tenemos el resultado que queríamos probar. \square

Dados dos vértices v_1, v_2 de un árbol T simétricos, podemos observar las siguientes características, en las que se basa el algoritmo:

- $g(v_1) = g(v_2)$ y $t(v_1) = t(v_2)$.

Que el grado de v_1 y v_2 ha de ser el mismo se deduce del enunciado de las Proposiciones 3.1 y 3.3.

En cuanto a la tensión, vamos a llamar h_1, h_2 a unas hojas de T_1, T_2 cuya distancia a v_1, v_2 , respectivamente, es máxima (y la misma por ser T_1, T_2 isomorfos). Entonces, como cualquier camino que contenga a v_1 ha de comenzar (o terminar) en una hoja de T_1 (y lo mismo para v_2), tenemos $t(v_1) \leq d(v_1, h_1)$. Además, como tenemos el camino P que conecta h_1 con h_2 , se tiene $t(v_1) \geq d(v_1, h_1)$. Por tanto, tenemos que $t(v_1) = d(v_1, h_1) = d(v_2, h_2) = t(v_2)$.

- Si son simétricos por la Proposición 3.1, son adyacentes a un mismo nodo v (el que establece la proposición) y se cumple $t(v) > t(v_1) = t(v_2)$.

Supongamos que tenemos los árboles T_1, T_2 y los vértices v, v_1, v_2 dados por la proposición. Hemos visto en el apartado anterior que $t(v_1) = d(v_1, h_1)$, para h_1 la hoja de T_1 a mayor distancia de v_1 . No obstante, sabemos que el camino que conecta la hoja h_1 con la hoja $h_2 \in T_2$ a mayor distancia de v_2 contiene al vértice v , por lo que $t(v) \geq d(v_1, h_1) + 1$, luego $t(v) > t(v_1)$.

- Si son simétricos por la Proposición 3.3, tienen tensión máxima.

Si se cumplen las condiciones de la Proposición 3.3, entonces para h_1, h_2 hojas de T_1, T_2 a máxima distancia d de v_1, v_2 , se tiene que un camino de longitud máxima P en T conecta h_1 con h_2 y mide $2d + 1$. Además, P contiene a v_1 y v_2 (que son los vértices centrales de P), por lo que se tiene $t(v_1) = t(v_2) = d > t(w) \forall w \in T$.

Por tanto, tenemos que dos nodos v_1, v_2 simétricos tienen el mismo grado y, o bien tienen la misma tensión y son adyacentes a uno de tensión mayor, o bien son adyacentes y tienen tensión máxima dentro de T . Esto da lugar al siguiente algoritmo para determinar todos los nodos simétricos de un árbol T :

Algoritmo 3.8. *Dado un árbol T con n vértices, ordenamos los vértices de $V : v_1, \dots, v_n$, y creamos la matriz simétrica $S_{m \times m}$, donde S_{ij} será igual a 1 si v_i, v_j son simétricos y a 0 en caso contrario.*

1. Dada t_{\max} la tensión máxima de los vértices de T y $h(T)$ el número de hojas de T , vamos a construir una matriz $M_{t_{\max}+1 \times h(T)}$ de manera que la primera fila de M sea $(k_1, \dots, k_{h(T)})$, para $\{v_{k_i}\}_{i=1}^{h(T)}$ el conjunto de hojas de T y la entrada m_{ij} , con $i \geq 2$, sea r si v_r es el único nodo adyacente a $v_{m_{i-1,j}}$ de tensión mayor (que sabemos que existe por el Lema 3.7) y además la tensión de $v_{m_{i-1,j}}$ no es t_{\max} , e ∞ si $t(v_{m_{i-1,j}}) = t_{\max}$.

2. Para $k = 2, \dots, t_{\max} + 1$, hacer:

a) Primero descartamos nodos que no sean simétricos. Así, para $i = 1, \dots, n - 1$, $j = i + 1, \dots, n$, si el número de veces que aparece el vértice v_i en la fila k de M , n_{ik} , es distinto al número de veces que aparece v_j , entonces $S_{ij} = S_{ji} = 0$. (Esto se debe a que el número de veces que aparece v_i en la fila k , n_{ik} , es igual al número de caminos que conectan v_i con una hoja y que pasan únicamente por vértices de tensión menor o igual a $t(v_i)$.)

b) A continuación, comprobamos los que son simétricos en la etapa k a partir de la matriz M . Para ello, vamos a estudiar, para cada nodo v_i que aparezca en la fila k , la submatriz $(M_{ik})_{k \times n_{ik}}$ formada por las entradas de las filas 1 a k y de las columnas j cuya entrada $m_{kj} = i$ (de las cuales hay n_{ik}). Para esta submatriz, tenemos que la fila k tiene siempre la entrada i , es decir, incluye todos los caminos distintos que conectan v_i con una hoja de T pasando por nodos de tensión menor que $t(v_i)$. Esto equivale en la Proposición 3.1 al subgrafo dado por la componente conexa a la que pertenece v_i en $T \setminus \{(v_i, u)\}$, donde u es el único nodo adyacente a v_i de tensión mayor que él, y cuya raíz es v_i .

Siguiendo el enunciado de la Proposición 3.1, vamos a ver si los vértices hijos de v_i , que en la matriz se encuentran en la fila $k - 1$, son simétricos, comparando los subgrafos que generan dos a dos. Comparar dos subgrafos equivale a comparar las submatrices de la anterior que estos generan y ver si tienen el mismo tamaño y si se puede establecer una biyección entre los vértices de ambas matrices, de manera que si un nodo aparece m veces en la fila k , exista un nodo en la otra matriz que aparezca las mismas veces en la misma fila. Si esto ocurre para las submatrices generadas por v_j, v_h de la fila $k - 1$, entonces

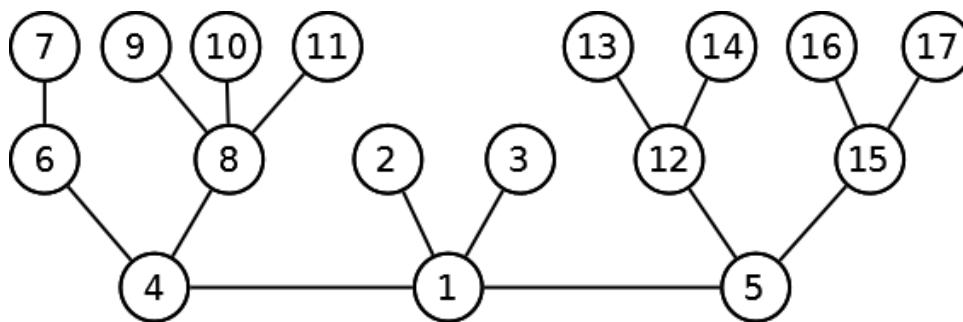


Figura 3.5: Árbol T propuesto para ilustrar el funcionamiento del Algoritmo 3.8

los nodos v_j y v_h son simétricos, luego $S_{jh} = S_{hj} = 1$. Notemos que en este paso la comparación entre dos matrices se hace con matrices de como mucho $t_{\text{máx}}$ filas.

3. Para $k = t_{\text{máx}} + 1$, si existen en T dos vértices v_i, v_j de tensión máxima, pueden darse las condiciones de la Proposición 3.3 (y si no, es imposible que se den, pues hemos visto que dos vértices simétricos por dicha proposición tienen tensión máxima). Por tanto, hemos de comparar las submatrices que generan v_i y v_j para $k = t_{\text{máx}} + 1$, que tendrán $t_{\text{máx}} + 1$ filas, del mismo modo que hemos comparado las de los hijos de un vértice común en el apartado anterior (solo que estos dos no son hijos de ningún vértice común, pues son adyacentes). Si podemos establecer la biyección indicada anteriormente entre los vértices de dichas submatrices, y no hemos descartado como simétricos a dichos vértices en algún paso anterior del algoritmo, entonces $S_{ij} = S_{ji} = 1$.

Vamos a ilustrar el funcionamiento de este algoritmo a través del ejemplo de la Figura 3.5. El Paso 1 da lugar a la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 9 & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 \\ 1 & 1 & 6 & 8 & 8 & 8 & 12 & 12 & 15 & 15 \\ \infty & \infty & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pasemos al Paso 2. Para $k = 2$, descartamos como simétricos aquellos nodos que no aparezcan el mismo número de veces en la fila 2 de M . Por ejemplo, descartaríamos como simétricos los nodos 1 y 2, pues el 1 aparece dos veces en dicha fila, mientras que el 2 no aparece. A continuación, para cada nodo i que aparezca en la fila, creamos la submatriz que nos indica el Algoritmo 3.8 y vemos si dos nodos de la fila $k - 1$ son simétricos. Para $i = 1$, tenemos la submatriz $M_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, luego los nodos de la fila $k - 1 = 1, 2$ y 3, son simétricos. La submatriz dada por $i = 6$ solo tiene una columna, por lo que no podemos comparar dos nodos. Para $i = 8$, tenemos la submatriz $M_{82} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, y por tanto tenemos que los nodos 9, 10 y 11 son simétricos. Y así para $i = 12, 15$, obteniendo que los nodos 13 y 14 son simétricos y los nodos 16 y 17 también.

Para $k = 3$, repetimos el proceso. Así, para $i = 4$ tenemos la submatriz $M_{43} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, y para saber si los nodos 6 y 8 son simétricos, comparamos las submatrices $\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\text{Minimizar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (3.28)$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j=0}^m x_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, \dots, n-1 \quad (3.20)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 0, \dots, m \quad (3.21)$$

$$\sum_{j=1}^m y_{ij} = 1 \quad \forall i = 0, \dots, m-1 \quad (3.22)$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad (3.23)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m \quad (3.26)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i = 0, \dots, m-1, j = 1, \dots, m \quad (3.27)$$

$$y_{ek} + 1 \geq x_{a_{e1}, l} + x_{a_{e2}, l} + x_{a_{e1}, l+k} + x_{a_{e2}, l+k} \\ \forall e, l = 0, \dots, m-1, k = 0, \dots, m-l \quad (3.29)$$

$$x_{i0} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin N(i)}}^{n-1} x_{jm} \leq 1 \quad \forall i = 0, \dots, n-1 \quad (3.30)$$

$$x_{im} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin N(i)}}^{n-1} x_{j0} \leq 1 \quad \forall i = 0, \dots, n-1 \quad (3.31)$$

$$x_{i0} + x_{j1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k, m-1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k, m} \leq 3 \\ \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j \quad (3.32)$$

$$x_{i0} + x_{j, m} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k, m-1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k, 1} \leq 3 \\ \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j \quad (3.33)$$

$$x_{i, m-1} + x_{j1} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k, 0} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k, m} \leq 3 \\ \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j \quad (3.34)$$

$$x_{i, m-1} + x_{jm} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(i)}}^{n-1} x_{k, 0} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin N(j)}}^{n-1} x_{k, 1} \leq 3 \\ \forall i, j = 0, \dots, n-1, i \neq j \quad (3.35)$$

$$\sum_{s=0}^{s'} x_{is} + \sum_{t=t'}^m x_{jt} + \sum_{k=0}^{t'-s'-1} y_{e_1 k} \leq 2 \quad \forall l = \{0, \dots, m-1\}, \\ s' = \{0, \dots, m-2\}, t' = \{s'+2, \dots, m\} \quad (3.36)$$

$$\sum_{s=0}^{s'} x_{jt} + \sum_{t=t'}^m x_{is} + \sum_{k=0}^{t'-s'-1} y_{e_1 k} \leq 2 \quad \forall l = \{0, \dots, m-1\}, \\ s' = \{0, \dots, m-2\}, t' = \{s'+2, \dots, m\}. \quad (3.37)$$

Figura 3.6: Modelo de Optimización Lineal Entera con algunas desigualdades válidas

y $\begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$, y vemos que no son simétricos, puesto que ambas matrices no tienen el mismo tamaño. Del mismo modo, tenemos para $i = 5$ la submatriz $M_{53} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 16 & 17 \\ 12 & 12 & 15 & 15 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, y al comparar los nodos 12 y 15 de la fila $k-1 = 2$, vemos que las submatrices correspondientes sí nos permiten decir que ambos nodos son simétricos. Cabe destacar que, por ejemplo, no comparamos las submatrices generadas por los nodos 1 y 12, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 13 & 14 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$, puesto que en la fila 3 no tienen el mismo vértice (lo que equivale a decir que no son adyacentes a un mismo vértice en T , tal y como requiere la Proposición 3.1).

Por último, para $k = 4$, solo tenemos una submatriz, la dada por $i = 1$, que es la siguiente:

$$M_{14} = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 11 & 13 & 14 & 16 & 17 \\ 6 & 8 & 8 & 8 & 12 & 12 & 15 & 15 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como en la fila 3 solo tenemos los nodos 4 y 5, en este paso solo vamos a comparar las submatrices dadas por ambos nodos, $\begin{pmatrix} 7 & 9 & 10 & 11 \\ 6 & 8 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 13 & 14 & 16 & 17 \\ 12 & 12 & 15 & 15 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, para determinar si son simétricos o no. Como el nodo 6 aparece solo una vez en la fila 2 de la primera submatriz y no existe ningún nodo en la fila 2 de la otra submatriz que solo aparezca una vez, tenemos que los nodos 4 y 5 no son simétricos.

El Paso 3, como solo hay un vértice de tensión máxima en este árbol (el vértice 1), no se lleva a cabo. Si hubiera dos vértices, tendríamos que comparar ambas matrices de 4 filas y ver si son simétricos o no (siempre que no hayan sido descartados como simétricos por no aparecer el mismo número de veces en cada fila de M).

Hemos programado el Algoritmo 3.8 en Netbeans, empleando lenguaje JAVA de programación, de manera que dado un árbol T a través de sus aristas devuelva directamente el conjunto de desigualdades válidas que se pueden incluir en nuestro modelo para evitar la multiplicidad de etiquetados elegantes asociada a estas *simetrías* de T . Como estas desigualdades dependen del árbol en cuestión, no se pueden incluir como un conjunto de desigualdades de forma genérica como los anteriores, por lo que no aparecen en la Figura 3.6, que muestra el modelo con todas las desigualdades válidas vistas en este apartado. Hay una última desigualdad válida que también evita la multiplicidad de etiquetados y que viene dada por el Lema 2.1. En este caso, basta añadir una desigualdad que haga que un nodo tenga etiqueta menor que otro, y podemos escoger ambos nodos al azar siempre que no sean simétricos por ninguna de las proposiciones anteriores.

3.3. Comparativa entre los tres modelos. Resultados computacionales

En este apartado, vamos a exponer los resultados que hemos obtenido tras comparar el modelo de Redl y nuestro modelo, con y sin desigualdades válidas dadas en la subsección 3.2.1. Para ello, hemos implementado los modelos en el programa de optimización Xpress-IVE, en un ordenador Dell modelo Server PET110II, con un procesador Inter(R) Xeon(R) CPU E31270 @ 3.40 GHz y una memoria RAM de 16,0 GB.

Nº de vértices	Modelo de Redl			Nuevo modelo			Nuevo mod. + Des. vál.		
	T(s)	Nº Nodos	Res.	T(s)	Nº Nodos	Res.	T(s)	Nº Nodos	Res.
10	21,82	13556,13	15/15	0,33	195,33	15/15	0,43	58,60	15/15
12	283,48	65934,20	10/15	0,63	413,67	15/15	1,85	602,67	15/15
15	396,40	93744,50	2/15	2,26	1887,40	15/15	30,88	10316,14	14/15

Tabla 3.1: Comparativa entre el modelo de Redl y el nuevo modelo sin y con las desigualdades válidas vistas en la subsección 3.2.1

Número de vértices	Nuevo modelo			Nuevo modelo + Des. vál.		
	T(s)	Nº Nodos	Resueltos	T(s)	Nº Nodos	Resueltos
25	135,09	28367,42	12/15	224,89	14864,30	10/15

Tabla 3.2: Comparativa entre nuestro modelo sin y con las desigualdades válidas (3.30)-(3.37)

Primero hemos llevado a cabo una comparativa entre el modelo de Redl, el modelo dado en el apartado 3.2 (en el que hemos sustituido los conjuntos de desigualdades (3.24) y (3.25) por el conjunto (3.29)) y este modelo incluyendo además las desigualdades (3.30)-(3.37) y las dadas por el Algoritmo 3.8. Para ello, hemos introducido instancias aleatorias de 10, 12 y 15 vértices, y los resultados se muestran en la Tabla 3.1. Hemos introducido 15 instancias de cada tipo, y la Tabla 3.1 muestra el tiempo medio en segundos de las instancias resueltas (T(s)), el número medio de nodos del árbol de ramificación explorados en las instancias resueltas (Nº Nodos) y el número de instancias resueltas en menos de 1200 segundos en cada uno de los modelos (Res). En ella podemos ver que para instancias de 10 y 12 vértices el modelo nuevo, tanto con las desigualdades válidas como sin ellas, reduce los tiempos de resolución con respecto al modelo de Redl en dos órdenes de magnitud. Para instancias de 15 vértices, el modelo de Redl solo resuelve dos de las quince propuestas en menos de 1200 segundos, con un tiempo medio de 1092,85 segundos si contamos las instancias no resueltas. Los otros dos modelos, en cambio, resuelven en pocos segundos casi todas las instancias propuestas, con lo que podemos concluir que nuestro modelo proporciona mejores resultados que el modelo de Redl.

Además, hemos realizado otra comparativa entre nuestro modelo con y sin desigualdades válidas adicionales, tomando instancias de mayor tamaño. Esta segunda comparativa se ha realizado incluyendo únicamente las desigualdades válidas (3.30)-(3.37), sin tener en cuenta aquellas derivadas de las simetrías del árbol en cuestión. Así, hemos ejecutado 15 instancias aleatorias de 25 vértices cada una, y en la Tabla 3.2 podemos ver los resultados obtenidos. El modelo sin las desigualdades válidas resuelve dos instancias más que el otro, y además sus tiempos medios de resolución son menores en una media de 90 segundos aproximadamente, lo que nos lleva a pensar que el gran número de desigualdades válidas añadidas al segundo ralentiza la resolución, aunque sí se aprecia que ayuda a reducir el número de nodos explorados. Queremos destacar que los tiempos de resolución son muy dispares, oscilando entre los 7,7 segundos y más de 1200 en el modelo sin desigualdades

válidas y entre los 67,3 segundos y más de 1200 en el otro, lo que implica que, además del número de nodos, la estructura del árbol influye en su tiempo de resolución.

Conclusiones y líneas de trabajo futuras

Aunque la Conjetura de Árboles Elegantes cobró interés inicialmente debido a su relación con las Conjeturas de Ringel y Kotzig de descomposiciones de grafos, ha ido creciendo su fama con el paso de los años y hoy en día tiene interés en sí misma. Sin embargo, a pesar de los esfuerzos tendentes a la derivación de una demostración para esta conjetura no existen métodos para etiquetar un árbol elegantemente que sugieran una línea de razonamiento que no dependa de ninguna característica del mismo.

En relación a la estructura de un árbol, en este trabajo hemos visto demostraciones de la elegancia de caminos y orugas, algunas clases de arañas y langostas, estrellas y superestrellas, árboles simétricos y varias clases de árboles que se pueden construir a partir de otros. Algunas de las líneas de investigación abiertas más importantes se centran en probar la elegancia de todas las clases de arañas y langostas, todos los árboles de cinco hojas, árboles de diámetro seis y árboles de grado máximo tres, entre otros.

En cuanto a los resultados computacionales obtenidos mediante búsqueda exhaustiva u Optimización Lineal Entera, si bien nunca servirán para probar la veracidad de la conjetura, pueden resultar útiles para hallar un contraejemplo. Nosotros hemos diseñado un nuevo modelo de Optimización Lineal Entera para abordar el problema. Una extensión natural de esta línea de trabajo cuyo interés ha sido puesto de manifiesto por los resultados computacionales obtenidos es la adición de subconjuntos de desigualdades válidas que permita reducir el tamaño del poliedro subyacente sin incrementar dramáticamente el tamaño de la formulación. A tal fin se necesita diseñar un método eficiente de separación de desigualdades violadas por la solución óptima de la relajación lineal del problema, e implementarlo adecuadamente dentro de un algoritmo de ramificación y corte.

Bibliografía

- [1] Abhyankar, V.J. 2002. Direct methods of gracefully labeling graphs. *Doctoral dissertation, Ph. D. thesis, University of Mumbai.*
- [2] Al Aziz, M.M., Hossain, M.F., Faequa, T. y Kaykobad, M. 2014. Graceful labeling of trees: Methods and Applications. En *Computer and Information Technology (IC-CIT), 2014 17th International Conference on*, pp. 92-95.
- [3] Aldred, R.E.L. y McKay, B.D. 1998. Graceful and harmonious labellings of trees. *Bull. Inst. Combin. Appl*, **23**, pp. 69-72.
- [4] Aldred, R.E., Širáň, J. y Širáň, M. 2003. A note on the number of graceful labellings of paths. *Discrete Mathematics*, **261**(1-3), pp. 27-30.
- [5] Alfalayleh, M., Brankovic, L., Giggins, H. y Islam, M.Z. 2004. Towards the graceful tree conjecture: a survey. *Proceedings of AWOCA2004*, Ballina, Australia.
- [6] Arkut, I.C., Arkut, R.C. y Ghani, N. 2000. Graceful label numbering in optical MPLS networks. *Proc. SPIE*, **4233**, pp. 1-8.
- [7] Bahls, P., Lake, S. y Wertheim, A. 2010. Gracefulness of families of spiders. *Involve, a Journal of Mathematics*, **3**(3), pp. 241-247.
- [8] Cattell, R. 2007. Graceful labellings of paths. *Discrete Mathematics*, **307**(24), pp. 3161-3176.
- [9] Chung, F.R.K. y Hwang, F.K. 1981. Rotatable graceful graphs. *Ars Combinatoria*, **11**, pp. 239-250.
- [10] Edwards, M. y Howard, L.A. 2006. Survey of Graceful Trees. *Atlantic Electronic Journal of Mathematics*, **1**(1), pp. 5-30.
- [11] El-Zanati, S.I., Vanden Eiden, C. y Punnim, N. 2001. On the cyclic decomposition of complete graphs into bipartite graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, **24**, pp. 209-219.
- [12] Fang, W. 2010. A computational approach to the graceful tree conjecture. *arXiv preprint arXiv:1003.3045*.
- [13] Horton, M. 2003. Graceful trees: statistics and algorithms. *Doctoral dissertation, Honours thesis, University of Tasmania.*

- [14] Hossain, M.F., Aziz, M.M.A. y Kaykobad, M. 2014. New classes of graceful trees. *Journal of Discrete Mathematics*, **2014**.
- [15] Hrnčiar, P. y Haviar, A. 2001. All trees of diameter five are graceful. *Discrete Mathematics*, **233**(1-3), pp. 133-150.
- [16] Hrnčiar, P. y Monoszová, G. 2007. A new family of graceful trees. *Department of Mathematics, Faculty of Natural Sciences, Matej Bel University. Preprint*.
- [17] Huang, C., Kotzig, A. y Rosa, A. 1982. Further results on tree labellings. *Utilitas mathematica*, **21c**, pp. 31-48.
- [18] Kanetkar, A.V. y Sane, S.S. 2007. Graceful labeling of a family of quasistars with paths in arithmetic progression. *Ars Combinatoria*, **83**, pp. 307-320.
- [19] Krop, E. 2014. Lobsters with an almost perfect matching are graceful. *arXiv preprint arXiv:1402.3994*.
- [20] Mishra, D. y Panigrahi, P. 2009. A new class of graceful lobsters obtained from diameter four trees. *Utilitas Mathematica*, **80**, pp. 183-209.
- [21] Morgan, D. 2002. All lobsters with perfect matchings are graceful. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, **11**, pp. 503-508.
- [22] Munia, A.A., Maowa, J., Tania, S. y Kaykobad, M. 2014. A new class of Graceful Tree. *International Journal of Scientific and Engineering Research (IJSER)*, **5**(11), pp. 1112-1115.
- [23] Ng, H.K. 1986. Gracefulness of a class of lobsters. *Notices AMS*, **7**, pp. 825-05.
- [24] Sethuraman, G. y Jesintha, J.J. 2008. Gracefulness of a family of rooted trees. *Far East Journal of Applied Mathematics*, **30**, pp. 143-159.
- [25] Pastel, A.M. y Raynaud, H. 1978. Les oliviers sont gracieux. En *Colloquium Grenoble, Université de Grenoble*.
- [26] Redl, T.A. 2003. Graceful graphs and graceful labelings: two mathematical programming formulations and some other new results. *Congressus Numerantium*, pp. 17-32.
- [27] Robeva, E. 2011. An extensive survey of graceful trees. *Undergraduate Honours Thesis, Stanford University, USA*.
- [28] Rosa, A. 1966. On certain valuations of the vertices of a graph. En *Theory of Graphs (Internat. Symposium, Rome)*, pp. 349-355.
- [29] Rosa, A. 1977. Labelling snakes. *Ars Combinatoria*, **3**, pp. 67-74.
- [30] Superdock, M.C. 2014. The Graceful Tree Conjecture: a class of graceful diameter-6 trees. *arXiv preprint arXiv:1403.1564*.
- [31] Wang, J.G., Jin, D.J., Lu, X.G. y Zhang, D. 1994. The gracefulness of a class of lobster trees. *Mathematical and computer modelling*, **20**(9), pp. 105-110.