UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

GAPS: UNA INTRODUCCIÓN

Víctor González López

Dirigido por

Prof. Dr. Antonio Avilés López

Curso 2016-2017

GAPS: UNA INTRODUCCIÓN

Víctor González López

Memoria presentada como parte de los requisitos para la obtención del título de Máster en Matemática Avanzada por la Universidad de Murcia.

Tutorizada por

Prof. Dr. Antonio Avilés López

Declaración de originalidad

Yo, Víctor González López, autor del TFM *Gaps: Una introduccón*, bajo la tutela del profesor Dr. Antonio Avilés López, declaro que este trabajo es original en el sentido de que he puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 3 de julio de 2017.

Víctor González López.

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración).

Índice general

Introducción

El objetivo de este trabajo es realizar una introducción a la teoría de los *gaps*. Esta teoría estudia las propiedades que surgen de la *mezcla* de dos o más familias de conjuntos de números naturales. A lo largo de este trabajo veremos algunos resultados importantes de esta teoría, los cuales conforma el corazón de la introducción que pretendemos ofrecer. La mayoría de estos resultados se deben a Stevo Todorcevic y Antonio Avilés, por lo que a lo largo del trabajo iremos indicando qué referencias utilizamos de sus trabajos.

El primer capítulo es un pequeño compendio de resultados de la Teoría Descriptiva de Conjuntos. Esta rama de las Matemáticas estudia determinados tipos de conjuntos que poseen ciertas características relativas a su definición y a su topología. Nos centraremos en el Espacio de Baire, los Espacios Polacos y los conjuntos analíticos. Estos últimos tienen un papel protagonista a lo largo de estas páginas, puesto que, en muchos casos, las familias de conjuntos que utilizaremos serán analíticas. Para concluir el primer capítulo, dedicaremos una sección a los árboles, un concepto de la Teoría Descriptiva de Conjuntos que constituye una formidable herramienta, como se verá en el segundo capítulo.

El segundo capítulo es el eje del trabajo. En él, trabajaremos con familias ortogonales de conjuntos de números naturales, y trataremos de dar condiciones suficientes para que estas familias estén separadas. Cuando dos familias ortogonales no puedan separarse, diremos que forman un ***gap***. La definición de nociones como la de separación y ortogonalidad serán el principio del capítulo, como no podría ser de otro modo. Una primera condición suficiente para que dos familias estén separadas será la numerabilidad de ambas familias. La segunda condición suficiente que daremos estará relacionada con la analiticidad de las familias. No obstante, la prueba de esta segunda condición requerirá de muchos y variados resultados, los cuales llenarán la mayor parte de las páginas e involucrarán elementos como los árboles.

Una vez probada la segunda condición suficiente, dedicaremos la sección final del segundo capítulo a mostrar el ejemplo más famoso que existe de gap: el **gap de Hausdorff**. Este gap lo conforman dos familias indexadas en ω_1. Así, la prueba de la existencia de este gap involucra ordinales; más concretamente, inducción transfinita. Esta es la razón por la cual el trabajo contiene un anexo en el que tratamos determinados asuntos referentes a los números ordinales.

Finalmente, el tercer capítulo está dedicado a introducir brevemente la generalización de la noción de familias separadas a una cantidad finita de ellas, lo que nos llevará a definir la noción de n-gap o *gap múltiple*. Además de esto, enunciaremos un resultado que afirma que todo gap analítico contiene a un determinado n-gap, el de las $[i]$-cadenas. Si bien no lo probaremos, sí demostraremos que, en el caso $n = 2$, este resultado es consecuencia de uno de los teoremas del segundo capítulo, el cual nos permite probar nuestra segunda condición suficiente. Por último, ofrecemos una sección en la que hablamos de los posibles pasos a seguir en el estudio de esta teoría por parte del lector.

En definitiva, con este trabajo pretendemos que el lector pueda introducirse al estudio de las familias ortogonales y de su separación. De este modo, y previo paso por ciertos conceptos de la Teoría Descriptiva de Conjuntos, ofrecemos un recorrido, con carácter de iniciación, por el comportamiento de las familias ortogonales bajo determinadas condiciones.

Capítulo 1

Teoría Descriptiva de Conjuntos

La Teoría Descriptiva de Conjuntos es una rama de las Matemáticas que estudia los subconjuntos de números naturales que se comportan de una determinada manera. Estos subconjuntos se llaman *definibles*, y se caracterizan por tener una descripción explícita mediante una fórmula, por poseer una estructura topológica "sencilla"...[1]

Este primer capítulo está dedicado a estudiar determinados conceptos de esta teoría, en los cuales nos apoyaremos a lo largo de los siguientes capítulos. Comenzaremos dando una serie de definiciones relativas a las sucesiones. Continuaremos hablando del Espacio de Baire, de los espacios polacos y de los conjuntos analíticos. Por último, trataremos el concepto de árbol.

1.1. Definiciones iniciales

En esta pequeña sección vamos a fijar la notación que emplearemos a lo largo del trabajo, en lo relativo a las sucesiones. Para llevar esto a cabo, hemos tomado como referencia [9, p. 5].

[1] Véase [5] y [8] para más información.

Sucesiones finitas

Definición 1.1. Sean $A \neq \emptyset$ conjunto y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos al conjunto de las sucesiones $s = (s(0), \dots, s(n-1)) = \left(s_0, \dots, s_{n-1}\right)$ de longitud n de elementos de A por A^n. En el caso $n = 0$, $A^0 = \{\emptyset\}$ que denota el conjunto formado por la sucesión vacía.

Definición 1.2. Dada $s \in A^n$ sucesión finita de elementos de A, para referirnos a su longitud, utilizaremos la notación "*length* **(s)**" . En tal caso, $\mathit{length}\left(\left(s_0, \dots, s_{n-1}\right)\right) = n$.

Definición 1.3. Dada $s \in A^n$ y $m \leq n$, denotamos por $s|m = \left(s_0, \dots, s_{m-1}\right)$ a la restricción de la sucesión s a las primeras m coordenadas. En el caso $m = 0$, $x|0 = \emptyset$.

Definición 1.4. Dadas s, t sucesiones finitas de A, diremos que s es un segmento inicial de t y t es una extensión de s si $s = t|m$ para algún $m \leq \mathit{length}(t)$. En tal caso diremos que $s \subseteq t$. Por tanto, $\emptyset \subseteq s$ para todo s.

Definición 1.5. Denotaremos de la siguiente manera al conjunto de las sucesiones finitas de elementos de A:

$$A^{<\mathbb{N}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$$

Definición 1.6. Dadas dos sucesiones finitas $s = \left(s_i\right)_{i<n}$ $t = \left(t_j\right)_{j<m}$, la concatenación de ambas (en ese orden) se denota por $s^\frown t := \left(s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{m-1}\right)$.

Sucesiones infinitas

Definición 1.7. Para referirnos al conjunto de las sucesiones infinitas de elementos de A usaremos el símbolo $A^{\mathbb{N}}$.

Nota 1.8. De ahora en adelante, emplearemos el término "sucesión" para referirnos tanto a sucesiones finitas como infinitas, salvo que el contexto no clarifique el concepto al que hacemos referencia, en cuyo caso haremos explícito de qué tipo de sucesión estamos hablando.

Definición 1.9. Sean $x \in A^{\mathbb{N}}$ y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por $x|n = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in A^n$ a la restricción de x a la n-ésima coordenada. En el caso $n = 0$, $x|0 = \emptyset$.

Definición 1.10. Diremos que $s \in A^n$ es un segmento inicial de $x \in A^{\mathbb{N}}$ si $s = x|n$. En tal caso, diremos que $s \subseteq x$.

Definición 1.11. Dada $x = (x_i)_{i<n} \in A^n$ y $s = (s_0, \dots, s_n, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$, denotaremos la concatenación de ambas (en ese orden) por $x^\frown s =:= (x_0, \dots, x_{n-1}, s_0, \dots)$. En caso de tener otra sucesión $t = (t_0, \dots, t_n, \dots) \in A^{\mathbb{N}}$, la concatenación de s y t (en ese orden) se denota del mismo modo, es decir, $s^\frown t := (s_0, \dots, s_n, \dots, t_0, \dots, t_n, \dots)$.

1.2. El Espacio de Baire

Un espacio topológico muy importante en la Teoría Descriptiva de Conjuntos es el Espacio de Baire. Este espacio topológico está formado por el conjunto de las sucesiones de números naturales $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dotado de la topología producto, donde $\mathbb{N}$ posee la topología discreta[2]. Para referirnos a él, utilizaremos el símbolo $\mathcal{N}$.

Una primera observación de importancia es el hecho de que una base de $\mathcal{N}$ es el conjunto de las sucesiones de naturales que poseen una cantidad finita de términos fija, es decir:

$$\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \text{ fijo } \forall\, i \in J, J \text{ finito}\}$$

Otra base de $\mathcal{N}$, la cual utilizaremos con mayor frecuencia es la siguiente:

$$\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_i \text{ fijo } \forall\, i \leq k, k \in \mathbb{N}\} \tag{1.1}$$

En otras palabras, un abierto básico, en el caso de (1.1), es el conjunto de las sucesiones de números naturales que comparten un cierto segmento inicial. Utilizando la notación secuencial introducida en el comienzo del capítulo, si fijamos una sucesión finita $s = (s_i)_{i<n} \subset \mathbb{N}^{<n}$, el conjunto

$$N_s := \{t \in \mathcal{N} : s \subseteq t\}$$

[2]Para consultar cómo se construye la topología producto, ver [3].

es un abierto básico. Así, (1.1) se transforma en el conjunto $\{N_s\}_{s\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$.

Una vez visto cómo son los abiertos básicos del Espacio de Baire, vamos a probar varios lemas una serie de resultados que nos llevarán a concluir que este espacio es un espacio polaco, concepto que definiremos posteriormente.

Lema 1.12. *(De [7], p. 40) El Espacio de Baire es metrizable.*

Demostración. Sea $d : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathbb{R}$ de forma que:

$$d(f,g) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+1}} & \text{si } f \neq g \\ 0 & \text{si } f = g \end{cases}$$

donde n es el menor número tal que $f(n) \neq g(n)$. Esta aplicación toma un valor menor cuantos más términos compartan las sucesiones, por lo que busca que la distancia entre dos sucesiones sea más pequeña cuanto mayor sea el número de términos que tengan en común. Probemos que d es una métrica.

En primer lugar $d(f,g) = 0 \iff f = g$ por definición. La simetría de la definición prueba que $d(f,g) = d(g,f)$. Resta probar la desigualdad triangular. Sean, pues, $f, g, h \in \mathcal{N}$. Veamos que $d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h)$. Si entre estas tres sucesiones hay dos iguales, se cumple. Supongamos, entonces, que todas son diferentes y que $d(f,g) = n$ y $d(g,h) = m$. Tenemos ahora tres casos. Si $n = m$, entonces $d(f,h) = n = m$ y queda probado. Si $n < m$, entonces $d(f,h) = n$ y queda probado. Del mismo modo, si $n > m$, entonces $d(f,h) = m$. □

Lema 1.13. *(De [7], p. 40) El Espacio de Baire es separable, es decir, contiene un conjunto denso y numerable.*

Demostración. Consideramos el conjunto

$$D := \{x \in \mathcal{N} : \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq n_0, x_n = x_{n_0}\}$$

de las sucesiones que son constantes a partir de cierto término. Para probar que es numerable, es conveniente notar que

$$D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{x \in \mathcal{N} : \forall n \geq k, x_n = x_k\}$$

El cardinal de cada conjunto de esta unión es el cardinal de $\overbrace{\mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}}^{\text{k}}$, por lo que D es unión numerable de conjuntos numerables, y, así, numerable.

Por otro lado, fijado $x \in \mathcal{N}$, tomo N_s entorno básico de x cualquiera, donde $s \subseteq x$ es una sucesión finita extendida por x. Consideramos ahora la sucesión $y = s^\frown (0, \dots, 0, \dots) \in D$. Por definición de N_s, tenemos que $y \in N_s$, lo que prueba la densidad de D. $\square$

Lema 1.14. *El Espacio de Baire es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{N}$ sucesión de Cauchy. Veamos que es convergente. Para ello, fijamos $\epsilon > 0$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe un natural n_0 de manera que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que $d(x_n, x_m) < \epsilon$. Esto quiere decir que podemos encontrar un término de la sucesión tal que a partir de él todos los términos compartan tantas coordenadas como queramos. Definimos ahora $x \in \mathcal{N}$ de manera que cada elemento suyo sea el elemento compartido por todos los términos de la sucesión (a partir de cierto valor). Esta definición nos proporciona que $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. $\square$

1.3. Espacios polacos

La Teoría Descriptiva de Conjuntos suele trabajar con un determinado tipo de espacios topológicos: los **espacios polacos**.

Definición 1.15. (De [7], pag. 42) Un **espacio polaco** X es un espacio topológico que es homeomorfo a un espacio métrico completo y separable.

Ejemplo 1.16. El conjunto de los números reales con la topología usual, $(\mathbb{R}, \tau_u)$, es un espacio polaco.

Como dijimos previamente, los lemas 1.12, 1.13 y 1.14nos permiten, una vez vista la definición de espacio polaco, concluir lo siguiente:

Corolario 1.17. *El Espacio de Baire $\mathcal{N}$ es polaco.*

Los espacios polacos se conservan mediante restricciones a subconjuntos cerrados:

Lema 1.18. *Sea X espacio polaco. Todo subespacio cerrado $C \subseteq X$ es polaco.*

Demostración. En primer lugar, C es un espacio métrico, ya que basta tomar la métrica inducida. Para probar que es completo, tomamos una sucesión $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en C. En particular, es de Cauchy en X, que es polaco, por lo que la sucesión converge en X. Ahora bien, C es cerrado, lo que nos garantiza que el límite queda dentro de C. Resta probar que C es separable. Como X lo es, tomamos D denso en X y numerable. Para todo $x \in D$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, tomamos, si existe, un punto $y_{x,n} \in C$ tal que $d(x, y_{x,n}) < \frac{1}{n}$. Tenemos, por tanto, un conjunto de puntos $D' := \{y_{x,n}\}$, el cual es numerable por serlo D. Veamos que es denso en C. SeaN $y \in C$ y $n \in \mathbb{N}$. Tomamos la bola de centro en y y de radio ϵ, donde $\epsilon > \frac{2}{n}$. Como D es denso en X, existe un punto $x \in D$ de forma que $d(x, y) < \frac{1}{n}$. Como $B(x, \frac{1}{n}) \cap Y \neq \emptyset$, puedo tomar $y_{x,n} \in D'$ tal que $d(x, y_{x,n}) < \frac{1}{n}$. Por consiguiente:

$$d(y, y_{x,n}) \leq d(y, x) + d(x, y_{x,n}) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < \epsilon$$

lo cual concluye la prueba. □

Enunciamos ahora un resultado que establece, en cierto modo, que el Espacio de Baire es un ejemplo canónico de espacio polaco, pues cualquier espacio polaco es imagen continua y suprayectiva de $\mathcal{N}$. Cabe resaltar que no incluimos su prueba debido a su extensión y al uso de otros resultados no incluidos en este trabajo.

Proposición 1.19. *Sea X espacio polaco. Entonces, existe*

$$f : \mathcal{N} \to X$$

continua y suprayectiva.

Demostración. Véase el teorema 7.9 de la página 38 de [9]. □

Concluimos la sección estableciendo la definición de conjunto de Borel en un espacio polaco, concepto necesario en este trabajo:

Definición 1.20. (De [7], pag. 132) Sea X un espacio polaco. Un conjunto $A \subseteq X$ es de Borel si pertenece a la menor σ-álgebra de conjuntos de X que contiene a todos los abiertos, llamada σ-álgebra de Borel.

1.4. Conjuntos analíticos

En esta scción vamos a definir y caracterizar otro concepto muy importante en la Teoría Descriptiva de Conjuntos, el de conjunto analítico:

Definición 1.21. (De [7], pag. 134) Un subconjunto A de un espacio polaco X se dice **analítico** si existe una función continua

$$f : \mathcal{N} \to X$$

tal que $f\left(\mathcal{N}\right) = A$.

Corolario 1.22. *Todo espacio polaco X es analítico.*

Demostración. Basta utilizar la proposición 1.19 con $A = X$. □

Proposición 1.23. *(De [7], pag. 134) Todo subespacio cerrado C en un polaco X es analítico.*

Demostración. Sea $C \subseteq X$ cerrado. El lema 1.18 nos dice que C es polaco. Basta aplicar la proposición 1.19 y queda probado. □

Establecemos ahora un teorema que caracteriza a los conjuntos analíticos, y que, en consecuencia, nos ofrece otras posibles definiciones de este concepto:

Teorema 1.24. *(De [7], pag. 134) Sea X espacio polaco. Para un subconjunto suyo A, son equivalentes:*

(I) A es la imagen continua de $\mathcal{N}$.

(II) A es la imagen continua de un conjunto de Borel B (en algún espacio polaco Y).

(III) A es la proyección de un conjunto de Borel B en $X \times Y$, para algún Y polaco.

(IV) A es la proyección de un cerrado C en $X \times \mathcal{N}$.

Demostración.

$\boxed{(I) \Rightarrow (IV)}$

Si existe $f : \mathcal{N} \to X$ continua tal que $f(\mathcal{N}) = A$, entonces

$$A = \{f(x) : x \in \mathcal{N}\} = \Pi_1 \left(\{(f(x), x) : x \in \mathcal{N}\}\right)$$

Ahora bien, el conjunto $\{(f(x), x) : x \in \mathcal{N}\}$ es cerrado en $X \times \mathcal{N}$, por ser el grafo de una función continua.

$\boxed{(IV) \Rightarrow (III)}$

Es consecuencia directa de que $\mathcal{N}$ es polaco (corolario 1.17) y de que todo conjunto cerrado es de Borel.

$\boxed{(III) \Rightarrow (II)}$

Es directo, teniendo en cuenta que $X \times Y$ es polaco.

$\boxed{(II) \Rightarrow (I)}$

Por hipótesis, sabemos que existe $g : Y \to X$ continua, donde Y es un cierto espacio polaco, de manera que $g(B) = A$, para cierto conjunto de Borel B. Un resultado que podemos encontrar en [7], p. 134, el cual no incluimos por su extensión, nos dice que existe $C \subseteq Y \times \mathcal{N}$ cerrado tal que $B = \Pi_1(C)$. Ahora bien, como $Y \times \mathcal{N}$ es polaco, podemos aplicar la proposición 1.23 y obtenemos $f : \mathcal{N} \to Y \times \mathcal{N}$ tal que $f\left(\mathcal{N}\right) = C$.

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Pi_{1_{|C}}} & B \\ {\scriptstyle f}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle g_{|B}} \\ \mathcal{N} & \overset{h}{\dashrightarrow} & A \end{array}$$

Una vez tenemos estas aplicaciones, y, como se muestra en el diagrama de arriba, basta definir $h := g_{|B} \circ \Pi_{1_{|C}} \circ f$, que es continua por serlo cada una de las tres funciones que la componen. □

Dentro de esta demostración, y de forma implícita, hemos probado el siguiente resultado:

Corolario 1.25. *Todo conjunto de Borel es analítico.*

Demostración. Sea X espacio polaco y sea $B \subseteq X$ de Borel. Según vemos en la prueba del teorema 1.24, existe $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ tal que $B = \Pi_1(C)$. Ahora bien, el propio teorema nos dice, una vez probado, que, en tal caso, B es analítico (véase la condición (IV)). □

1.5. Árboles

Los árboles son el objeto de estudio de esta última sección. Constituyen una herramienta importante en este trabajo, puesto que trabajaremos con ellos de manera recurrente. Comenzamos, entonces, con unas primeras definiciones:

Definición 1.26. (Basado en la def. 2.1 p. 5 de [9]) Un **árbol** en un conjunto $A \neq \emptyset$ es un subconjunto $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ cerrado bajo segmentos iniciales, es decir, tal que si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$. Llamaremos **nodos** a los elementos de T. El conjunto de los nodos con una misma longitud pertenecerán al mismo **nivel**.

En consecuencia, un árbol no es más que un conjunto de sucesiones cerrado bajo segmentos iniciales. Esta característica nos permite visualizar este tipo de cojuntos como si fueran árboles reales, como se puede ver en la figura 1.1:

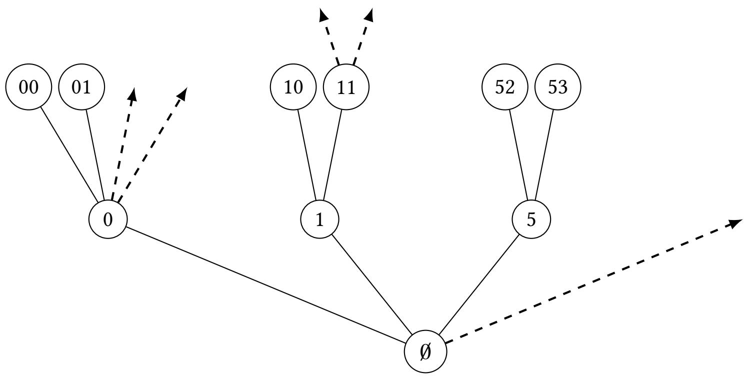


Figura 1.1: Ejemplo de árbol

Así mismo, esta analogía nos permite dar las siguientes definiciones:

Definición 1.27. Dado T árbol en A, una **rama finita** de T es una sucesión finita $s \in T$ tal que no existe $x \in A$ que cumpla que $s^\frown x \in T$.

Definición 1.28. Dado T árbol en A, se denomina **rama infinita** de T a una sucesión $x \in A^{\mathbb{N}}$ tal que $x|n \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos al conjunto de las ramas infinitas de T de la siguiente forma:

$$[T] := \{x \in A^{\mathbb{N}} : x|n \in T \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}$$

Nota 1.29. Si consideramos el árbol $A^{<\mathbb{N}}$, tenemos que $[A^{<\mathbb{N}}] = A^{\mathbb{N}}$, por lo que las ramas infinitas del árbol de las sucesiones finitas está formado por las sucesiones infinitas de dicho conjunto.

Definición 1.30. Dado $T \subseteq A^{<\mathbb{N}}$ árbol, un conjunto $S \subseteq T$ es un **subárbol** de T si para todo $s \in S$ y para todo $r \in T$ con $r \subseteq s$, se tiene que $r \in S$, es decir, si S es cerrado bajo segmentos iniciales.

1.5.1. Árboles producto

Supongamos ahora que tenemos un árbol T en un conjunto $A = B \times C$. En este caso, los nodos de T son sucesiones $s = \left(s_i\right)_{i<n} = \left(b_i, c_i\right)_{i<n}$, con $b_i \in B$ y $c_i \in C$ para

todo $i < n$. No obstante, es más conveniente visualizar s no como una sucesión en un espacio producto, sino como un producto de sucesiones. Para ello, consideramos la siguiente aplicación inyectiva:

$$\begin{aligned} f:\ (B \times C)^{<\mathbb{N}} &\to B^{<\mathbb{N}} \times C^{<\mathbb{N}} \\ \left(b_i, c_i\right)_{i<n} &\mapsto \left(\left(b_i\right)_{i<n}, \left(c_i\right)_{i<n}\right) \end{aligned}$$

de manera que podamos ver a T como un subconjunto de $B^{<\mathbb{N}} \times C^{<\mathbb{N}}$ que cumple que $(t, u) \in T$ si y solo si $length\,(t) = length\,(u)$ (la restricción del codominio a este subconjunto haría f biyectiva). Además, por ser árbol, ha de cumplir que si $(t, u) \subseteq (t', u')$, es decir, $t \subseteq t'$ y $u \subseteq u'$, con $(t', u') \in T$, entonces $(t, u) \in T$.

Tras esta identificación, el conjunto de las ramas infinitas de T es

$$[T] = \{(x, y) \in B^{\mathbb{N}} \times C^{\mathbb{N}} \,:\, (x|n, y|n) \in T \;\forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

Del mismo modo, esta identificación nos permite dar la siguiente definición:

Definición 1.31. Sea T árbol en $B \times C$. Definimos la restricción del conjunto de las ramas infinitas de T a la primera coordenada como

$$[T_1] := \{x \in B^{\mathbb{N}} \,:\; \text{existe } y \in C^{\mathbb{N}} \text{ tal que } (x, y) \in [T]\} = \Pi_1\left([T]\right)$$

1.5.2. Equivalencia de árboles

Acabamos de ver cómo un conjunto que no está estrictamente formado por sucesiones, sino por productos de ellas, puede ser considerado un árbol. En este apartado vamos a establecer un homeomorfismo entre dos espacios topológicos que nos va a permitir hablar de árbol en un conjunto que no está formado por sucesiones.

Tomamos el conjunto $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ de las sucesiones finitas de números naturales. Según lo visto en las definiciones arriba expuestas, es un árbol que, gráficamente, se puede ver como el de la figura 1.2.

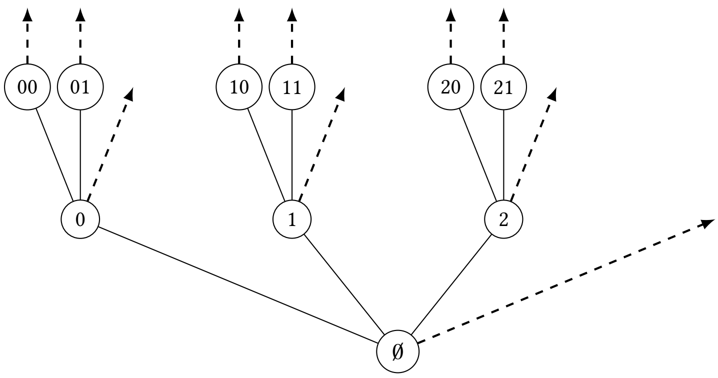


Figura 1.2: Árbol de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

La relación de extensión/restricción existente entre los nodos del árbol $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ nos permite dotar a este conjunto de un orden (parcial) natural “$\leq$", conocido por el nombre de “**end-extension**"[3]:

$$s \leq t \; :\Leftrightarrow s \subseteq t \tag{1.2}$$

Cabe resaltar que este orden se puede definir para cualquier árbol en cualquier conjunto $A \neq \emptyset$.

Consideremos ahora la colección de los conjuntos finitos de números naturales $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ (análogamente, $[\mathbb{N}]^{\omega}$ denota la coleccción de los conjuntos infinitos de naturales). Dotamos a este conjunto de un orden (parcial) de la siguiente manera: dados $A, B \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$

$$A \preceq B \;\; :\Leftrightarrow \;\; B \text{ extiende a } A \tag{1.3}$$

donde “extender” significa que los primeros $|A|$ elementos de B conforman A (ordenados de menor a mayor). Es rutinario comprobar que $\preceq$ es, en efecto, un orden. A modo de ejemplo, $\{0, 1, 5\} \preceq \{0, 1, 5, 6, 7\}$, pero $\{0, 1, 5\} \not\preceq \{0, 1, 4, 6, 7\}$.

Una vez definidos estos conjuntos ordenados, veamos que podemos biyectarlos conservando el orden, lo cual nos permitirá afirmar que, a efectos de finitud, podemos considerar a $([\mathbb{N}]^{<\omega}, \preceq)$ como un árbol.

[3]La definición de orden parcial se puede consultar en A.2. La prueba de que “end-extension" es un orden es directa.

Teorema 1.32. *Existe f biyección que conserva el orden entre $\left(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}, \leq\right)$ y $([\mathbb{N}]^{<\omega}, \preceq)$, es decir, tal que dados $A, B \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$*

$$A \leq B \iff f(A) \preceq f(B)$$

Demostración. Sea $A \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ sucesión finita. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $A = \left(a_1, \ldots, a_n\right)$. Definimos ahora

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} &\longrightarrow [\mathbb{N}]^{<\omega} \\ A = \left(a_1, \ldots, a_n\right) &\longmapsto f(A) \end{aligned}$$

donde $f(A) = \{a_1, a_1 + a_2 + 1, \ldots, a_1 + \cdots + a_n + (n-1)\}$. Esta aplicación es claramente inyectiva, puesto que si tenemos dos sucesiones, al menos uno de los elementos del conjunto imagen es diferente en ambos casos. Más concretamente, este elemento es el correspondiente al número de término en el que difieren las sucesiones.

Del mismo modo, para probar la suprayectividad, sea $B \in [\mathbb{N}]^{<\omega}$. Buscamos $A \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ tal que $f(A) = B$. Para que esto se cumpla, según la definición de f, en particular, $a_1 := b_1$. Definimos ahora

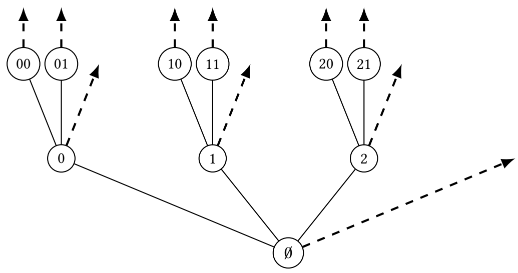
$$a_i := b_i - b_{i-1} - 1 \quad \forall\, 2 \leq i \leq |B|$$

Comprobemos que $f(A)\left(a_i\right) = b_i$ para todo $2 \leq i \leq length(A)$:

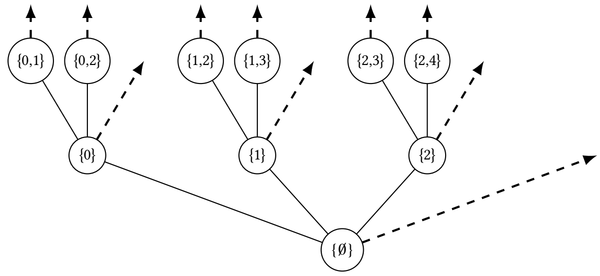
$$\begin{aligned} f(A)\left(a_i\right) &= \left(\sum_{j=1}^{i} a_j\right) + (i-1) = a_1 + \left(\sum_{j=2}^{i} a_j\right) + (i-1) \\ &= a_1 + \left(\sum_{j=2}^{i} \left(b_j - b_{j-1} - 1\right)\right) + (i-1) \\ &= b_1 + \left(\sum_{j=2}^{i} \left(b_j - b_{j-1}\right)\right) - \sum_{j=2}^{i} 1 + (i-1) \\ &= b_1 + b_i - b_1 - (i-1) + (i-1) \\ &= \cancel{b_1} + b_i - \cancel{b_1} - \cancel{(i-1)} + \cancel{(i-1)} = b_i \end{aligned}$$

Resta probar que esta biyección conserva el orden. Sean, en primer lugar, $A_1 \leq A_2$ sucesiones finitas de naturales. El hecho de que estén ordenados nos dice que A_2 extiende a A_1, por la definición del orden. Ahora bien, la definición de f nos dice que las primeras $length(A_1)$ coordenadas de $f(A_2)$ van a ser las coordenadas que conforman $f(A_1)$, por lo que tenemos que $g(A_1) \leq g(A_2)$. Sean, por otro lado, $B_1 \leq B_2$ conjuntos finitos de naturales. Como g es suprayectiva, tenemos que $B_1 = f(A_1)$ y $B_2 = f(A_2)$, para ciertas A_1, A_2 sucesiones finitas de naturales. Ahora bien, como B_2 extiende a B_1, los primeros $|B_1|$ elementos de B_2 conforman B_1, por lo que, yendo hacia atrás, A_2 extiende a A_1, lo que nos proporciona la otra implicación.

□



(a) Árbol de $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$



(b) Árbol de $[\mathbb{N}]^{<\omega}$

Este resultado se puede extender, mediante una prueba completamente análoga, al caso infinito, lo cual nos proporciona una biuección entre $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ y $[\mathbb{N}]^{\omega}$ (nótese que en este caso no hay un orden):

Teorema 1.33. *Existe g biyección entre* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ *y* $[\mathbb{N}]^{\omega}$.

Este resultado nos permite identificar dos espacios topológicos. En efecto, si tomamos el Espacio de Baire $\mathcal{N}$ y decimos que un conjunto $A \in [\mathbb{N}]^{\omega}$ es abierto si y solo si $g^{-1}(A)$ lo es en $\mathcal{N}$, tenemos que:

Corolario 1.34. $\mathcal{N}$ *y* $[\mathbb{N}]^{\omega}$ *son homeomorfos.*

En suma, hemos conseguido extender nuestra concepción inicial de árbol más allá de conjuntos de sucesiones. Este hecho nos va a permitir tratar, a lo largo de este trabajo, con el "árbol" $[\mathbb{N}]^{\omega}$ sin ningún tipo de problema.

Capítulo 2

Conjuntos ortogonales: separación.

Este capítulo, central en este trabajo, está dedicado al estudio de los conjuntos ortogonales de números naturales. Más concretamente, trataremos de discernir cuándo dos familias ortogonales de conjuntos pueden (o no) separarse.

Comenzaremos por clarificar las nociones de “ortogonalidad" y “separación", lo cual nos llevará al concepto de “gap". Seguidamente, dedicaremos una sección a la prueba de una condición suficiente para que dos familias ortogonales puedan separarse. Concluiremos el capítulo demostrando que, fuera del paraguas de los conjuntos analíticos, existen familias que no están separadas.

A la hora de desarrollar este capítulo, nos basaremos principalmente en el trabajo de Stevo Todorcevic ([10]), excepto en la parte final, donde usaremos [4]. Así mismo, utilizaremos puntalmente [1].

2.1. Ortogonalidad y separación

Para dar comienzo a este capítulo, es necesario realizar un par de observaciones. En primer lugar, cabe resaltar que trabajaremos con familias de conjuntos de números naturales. Así mismo, dado que serán objeto de nuestro estudio conjuntos que difieren en un número finito de elementos, es preciso fijar una notación a este respecto:

Definición 2.1. Sean $x, y \subseteq \mathbb{N}$. Diremos que x está **casi contenido** en y, lo cual denotaremos por $x \subseteq^* y$, si $x \setminus y = \{a \in x : a \notin y\}$ es finito. Dicho de otro modo, x está **casi contenido** en y si todos los elementos de x están en y salvo un número finito de ellos. Si, además, $y \subseteq^* x$, es decir, si x e y difieren en una cantidad finita de elementos, diremos que $x =^* y$, es decir, que x e y son **casi iguales**.

Podemos pasar a definir conjuntos ortogonales y familias de conjuntos ortogonales:

Definición 2.2. (De [10]) Dos conjuntos de números naturales x e y son **ortogonales** si $x \cap y =^* \emptyset$, es decir, si su intersección es finita. En ocasiones utilizaremos la notación $x \perp y$.

Definición 2.3. (De [10]) Dos familias de conjuntos de números naturales Γ_0 y Γ_1 son **ortogonales** si $x \cap y =^* \emptyset$ para todo $x \in \Gamma_0$ e $y \in \Gamma_1$. En tal caso diremos que $\Gamma_0 \perp \Gamma_1$.

La primera pregunta que surge tras la definición de familias ortogonales es cuándo dos familias lo son. Una condición suficiente es la siguiente:

Proposición 2.4. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias de conjuntos de números naturales. Supongamos que existe $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $x \subseteq^* a$ y $a \perp y$ para todo $x \in \Gamma_0$ e $y \in \Gamma_1$, es decir, existe un conjunto de números naturales a tal que casi incluye a todos los elementos de Γ_0 y cuya intersección con todos los elementos de Γ_1 es finita. Entonces, $\Gamma_0 \perp \Gamma_1$.*

Demostración. Sean $x \in \Gamma_0$ e $y \in \Gamma_1$. Queremos probar que $x \cap y =^* \emptyset$. Sabemos que existe $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $x \subseteq^* a$ y $a \perp y$ Entonces:

$$\emptyset \subseteq x \cap y \subseteq^* a \cap y =^* \emptyset$$

Al ser todas estas diferencias finitas, queda probado que $x \cap y =^* \emptyset$. □

Esta condición suficiente para que dos familias de conjuntos de naturales sean ortogonales recibe un nombre:

Definición 2.5. (De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias de conjuntos de números naturales. Supongamos que existe $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $x \subseteq^* a$ y $a \perp y$ para todo $x \in \Gamma_0$ e $y \in \Gamma_1$. Diremos entonces que a **separa** Γ_0 y Γ_1 y que Γ_0 y Γ_1 **están separadas** o **se pueden separar**.

En definitiva, la proposición 2.4 nos dice que si dos familias de conjuntos de números naturales se pueden separar, entonces son ortogonales. Ahora bien, ¿cuándo se cumple el recíproco? Estudiar posibles respuestas a esta pregunta es el objetivo de este capítulo. Un primer resultado que nos proporciona una condición suficiente es el siguiente:

Proposición 2.6. *(De [1]) Sean Γ_0 y Γ_1 dos familias numerables y ortogonales de conjuntos de números naturales. Entonces, se pueden separar.*

Demostración. Sean $\Gamma_0 = \{x_n\}_{n<\omega}$ y $\Gamma_1 = \{y_n\}_{n<\omega}$. Si consideramos los conjuntos $\overline{x}_n = \bigcup_{k\leq n} x_k$ e $\overline{y}_n = \bigcup_{k\leq n} y_k$, las familias resultantes son crecientes. Notemos, en primer lugar, que nuestras dos nuevas familias $\overline{\Gamma}_0 = \{\overline{x}_n\}_{n<\omega}$ y $\overline{\Gamma}_1\{\overline{y}_n\}_{n<\omega}$ siguen siendo ortogonales, puesto que $\overline{x}_n \cap \overline{y}_n = \bigcup_{k\leq m, l\leq m}(x_k \cap y_l)$. Probemos ahora que $\overline{\Gamma}_0$ y $\overline{\Gamma}_1$ se pueden separar. Sea

$$a := \bigcup_{n<\omega}(\overline{x}_n \setminus \overline{y}_n)$$

Afirmamos que a separa nuestras familias. En efecto, por un lado, para todo natural

$$\overline{x}_n =^* (\overline{x}_n \setminus \overline{y}_n) \subset a$$

luego $\overline{x}_n \subseteq^* a$. Por otro lado,

$$\overline{y}_n \cap a = \overline{y}_n \cap \bigcup_{k\leq n}(\overline{x}_k \setminus \overline{y}_k)$$

ya que $\overline{y}_n \cap (\overline{x}_m \setminus \overline{y}_m) \subset \overline{y}_m \cap (\overline{x}_m \setminus \overline{y}_m) = \emptyset$ para todo $m > n$. Ahora bien, $\bigcup_{k\leq n}(\overline{x}_n \setminus \overline{y}_n) \subset \bigcup_{k\leq n}\overline{x}_k$, por lo que

$$\overline{y}_n \cap a \subset \overline{y}_n \cap \bigcup_{k\leq n}\overline{x}_k = \bigcup_{k\leq n}(\overline{y}_n \cap \overline{x}_k) \subset \bigcup_{k\leq n}(\overline{y}_n \cap \overline{x}_n) = \overline{y}_n \cap \overline{x}_n =^* \emptyset$$

Por tanto, $\overline{y}_n \cap a$ está contenido en un conjunto finito y, por tanto, es finito. Una vez visto que $\overline{\Gamma}_0$ y $\overline{\Gamma}_1$ se pueden separar, observemos que $x_n \subseteq \overline{x}_n$ e $y_n \subseteq \overline{y}_n$ para todo natural n. En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \subseteq \overline{x}_n \subseteq^* a$$
$$y_n \cap a \subseteq \overline{x}_n \cap a =^* \emptyset$$

Así pues, Γ_0 y Γ_1 se pueden separar. □

Este primer resultado nos proporciona un caso particular donde siempre vamos a tener separación entre dos familias ortogonales, que es el de familias numerables. Sin embargo, esto no es así en todos los casos.

Ejemplo 2.7. (De [10]) Consideremos las siguientes familias de subconjuntos de números naturales:

$$\Gamma_0 := \{x_n\}_{n<\omega}, \quad \Gamma_1 := \Gamma_0^{\perp} = \{y \subseteq \mathbb{N} : y \perp x_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

donde $x_n := \{2^n(2m+1)\}_{m<\omega}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, x_n es el conjunto de números naturales que son múltiplos de 2^n pero no de 2^{n+1}.

Una primera observación de este ejemplo nos dice que $x_n \cap x_m = \emptyset$ para todo $n \neq m$, es decir, que Γ_0 es una familia formada por conjuntos disjuntos dos a dos. Por otro lado, Γ_0 y Γ_1 son ortogonales por la propia definición de Γ_1. Sin embargo , no están separadas:

Proposición 2.8. *(De [10]) Las familias Γ_0 y Γ_1 del ejemplo 2.7 no se pueden separar.*

Demostración. Supongamos que sí se pueden separar, y que, por tanto, existe $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $x_i \subseteq^* a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \perp a$ para todo $y \in \Gamma_1$. Como los conjuntos x_n son infinitos, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in a \cap x_n$. Definimos ahora

$$b := \{c_1, c_2, \dots\}$$

Como la familia Γ_0 está formada por conjuntos disjuntos dos a dos y $c_n \in x_n$ para todo n natural, tenemos que $b \cap x_n = \{c_n\}$. En otras palabras, hemos probado que $b \in \Gamma_0^\perp = \Gamma_1$. Ahora bien, como a es un conjunto separador, $b \cap a =^* \emptyset$. Pero, por otro lado, todo elemento de b está en a, por lo que $b \cap a = b$, es decir, un conjunto finito es igual a otro infinito, lo cual es una contradicción. En consecuencia, Γ_0 y Γ_1 no se pueden separar. $\square$

El hecho de que no siempre tengamos separación entre dos familias ortogonales motiva la siguiente definición:

Definición 2.9. (De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales. Si no están separadas (no se pueden separar), diremos que existe un (Γ_0, Γ_1)-**gap**, o simplemente un **gap**.

Ahora bien, ¿por qué el nombre de gap? Sea $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ un gap. Definimos ahora $\Gamma_1^* := \{\mathbb{N} \setminus x : x \in \Gamma_1\}$. Si tomamos $x \in \Gamma_0$ e $y \in \Gamma_1$, como estas dos familias son ortogonales, $x \cap y =^* \emptyset$. Sea $\overline{y} = \mathbb{N} \setminus y \in \Gamma_1^*$. Por tanto, $x \subseteq^* \overline{y}$.

Supongamos ahora que existe un conjunto $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $x \subseteq^* a \subseteq^* \overline{y}$. En ese caso, $x \subseteq^* a$ y $a \cap y =^* \emptyset$, es decir, Γ_0 y Γ_1 estarían separados. En consecuencia, ya que no existe tal conjunto a, existe un “hueco" entre Γ_0 y Γ_1^*, y, de ahí el nombre de gap.

2.2. Una condición suficiente

En esta extensa sección vamos a probar una condición suficiente para que dos familias ortogonales de conjuntos de naturales estén separadas. Esta condición es diferente a la de la numerabilidad y requiere de otros resultados para poder ser demostrada. En consecuencia, comenzamos definiendo un par de conceptos que utilizaremos recurrente de ahora en adelante:

Definición 2.10. (De [10]) Dadas dos familias de subconjuntos de números naturales Γ_0 y Γ_1, decimos que Γ_0 está **numerablemente generada** en Γ_1 si existe una sucesión $\{y_n\}_{n<\omega}$ de elementos de Γ_1 de forma que todo elemento de Γ_0 esté casi incluido en un elemento de la sucesión. En otras palabras, Γ_0 está numerablemente generada en Γ_1 si existe $\{y_n\}_{n<\omega} \subset \Gamma_1$ tal que para todo $x \in \Gamma_0$ existe n_0 natural tal que $x \subseteq^* y_{n_0}$.

Lema 2.11. *La unión numerable de conjuntos numerablemente generados está numerablemente generada.*

Demostración. Basta concatenar las sucesiones, es decir, si $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, para cada A_n existe una sucesión y_n. Entonces, $y := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} y_n$ es la sucesión que buscamos. □

Lema 2.12. *Sea Γ_0 conjunto no numerablemente generado en otro conjunto Γ_1. Sea $a \subseteq \Gamma$ numerablemente generado en Γ_1. Entonces, a^c no está numerablemente generado en Γ_1.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que a^c está numerablemente generado en Γ_1. En ese caso, y dado que $\Gamma = a \cup a^c$, si utilizamos 2.11, Γ estaría numerablemente generado en Γ_1, algo que contradice la hipótesis. □

Definición 2.13. (De [10]) Decimos que una familia de subconjuntos de naturales Γ es **σ-dirigida** si para toda sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ de elementos de Γ existe un elemento $x \in \Gamma$ tal que $x_n \subseteq^* x$ para todo $n < \omega$.

Una vez vistas estas definiciones, enunciamos un teorema que no probaremos hasta el final de la sección, pues su prueba requiere de otros resultados:

Teorema 2.14. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales, con Γ_0 analítica. Entonces , Γ_0 está numerablemente generado en $\Gamma_1^\perp$ si y solo si todo subconjunto numerable de Γ_1 puede ser separado de Γ_0.*

No obstante, de este teorema se desprende la condición suficiente que da nombre a la sección, la cual sí estamos en condiciones de probar:

Corolario 2.15. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales σ-dirigidas de subconjuntos de $\mathbb{N}$. Si una de ellos es analítico, entonces se pueden separar.*

Demostración. Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales σ-dirigidas de subconjuntos de $\mathbb{N}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que Γ_0 es analítica. En primer lugar, sea $y_0 = \{y_n\}_{n<\omega}$ un subconjunto numerable de Γ_1. Como Γ_1 es σ-dirigida, existe $y \in \Gamma_1$ tal que $y_n \subseteq^* y$ para todo $n < \omega$. Tomamos ahora $a := y^c$. Por un lado, claro que $y_n \cap a =^* \emptyset$ para todo $n < \omega$. Por otro lado, dado $x \in \Gamma_0$, como las familias del enunciado son ortogonales, tenemos que $y \cap x =^* \emptyset$, es decir, $x \subseteq^* a$. En definitiva, hemos encontrado un conjunto de naturales a que casi contiene a todo elemento de Γ_0 y es ortogonal a todo elemento de $y_0 \subseteq \Gamma_1$. Concluimos, pues, que todo subconjunto numerable de Γ_1 se puede separar de Γ_0.

En virtud de esto, estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.14 y obtenemos que Γ_0 está numerablemente generada en $\Gamma_1^\perp$. Existe, pues, una sucesión $\{z_n\}_{n<\omega}$ de elementos de $\Gamma_1^\perp$ tal que, fijado $x \in \Gamma_0$, existe $n_0 < \omega$ de forma que $x \subseteq^* z_{n_0}$. Esta sucesión es la que nos va a dar el conjunto separador entre Γ_0 y Γ_1.

Si todo elemento de Γ_0 estuviera casi contenido en un mismo elemento de la sucesión, ese sería nuestro separador, al estar la sucesión $\{z_n\}_{n<\omega}$ contenida en $\Gamma_1^\perp$. Como Γ_0 es σ-dirigido, existe $x^* \in \Gamma_0$ de forma que $x_n \subseteq^* x^*$ para todo natural n. Ahora bien, como Γ_0 está numerablemente generado en $\Gamma_1^\perp$, existe z_{n_0} tal que $x^* \subseteq^* z_{n_0}$. Entonces, para todo natural n tenemos que (nótese que n_0 depende de x^* solamente.)

$$x_n \subseteq^* x^* \subseteq^* z_{n_0}$$ □

Así pues, acabamos de probar que dos familias ortogonales están separadas si son σ-dirigidas y una de ellas es analítica.

En consecuencia, y con el fin de dar consistencia a este último resultado, dedicamos el resto de la sección a probar el teorema 2.14. Sin embargo, esto va a requerir de varios resultados, por lo que iremos desgranando la prueba. Un primer paso en esta dirección consiste en dividir el teorema 2.14 en sendas implicaciones. Mostramos a continuación el teorema 2.14 y las dos implicaciones en las que lo dividimos:

Teorema 2.14. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales, con Γ_0 analítica. Entonces , Γ_0 está numerablemente generado en $\Gamma_1^\perp$ si y solo si todo subconjunto numerable de Γ_1 puede ser separado de Γ_0.*

Teorema 2.16. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales, con Γ_0 analítica. Supongamos que Γ_0 está numerablemente generada en $\Gamma_1^\perp$. Entonces, todo subconjunto numerable $\overline{\Gamma_1} \subseteq \Gamma_1$ se puede separar de Γ_0.*

Teorema 2.17. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales, con Γ_0 analítica. Si todo subconjunto numerable de Γ_1 puede ser separado de Γ_0, entonces Γ_0 está numerablemente generado en $\Gamma_1^\perp$.*

De estas dos implicaciones, podemos probar directamente el teorema 2.16. Casualmente, esta implicación no es la que se utiliza en el corolario 2.15, por lo que tendremos que continuar en busca de una prueba para el teorema 2.17:

Teorema 2.18. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales. Supongamos que Γ_0 está numerablemente generada en $\Gamma_1^\perp$. Entonces, todo subconjunto numerable $\overline{\Gamma_1} \subseteq \Gamma_1$ se puede separar de Γ_0.*

Demostración. Como Γ_0 está numerablemente generada en $\Gamma_1^\perp$, existe $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Gamma_1^\perp$ tal que, para todo $x \in \Gamma_0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $x \subseteq^* z_{n_0}$. Sea $\overline{\Gamma_1} \subseteq \Gamma_1$ numerable. En primer lugar, notemos que $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\overline{\Gamma_1} = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se pueden separar por ser numerables y ortogonales (véase la proposición 2.6). Por tanto, existe $z \in \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}^\perp$ conjunto tal que $y_n \subseteq^* z$ para todo natural n. En suma, para todo $x \in \Gamma_0$:

$$x \cap z \subseteq^* z_{n_0} \cap z =^* \emptyset$$

es decir, Γ_0 y $\overline{\Gamma_1}$ se pueden separar. $\square$

Nota 2.19. Estrictamente hablando este resultado no es el teorema 2.16, sino un resultado más general, ya que no se utiliza la hipótesis de la analiticidad de Γ_0.

Nuestros esfuerzos se centran ahora en probar el teorema 2.17. Para ello, van a ser necesarios varios resultados previos, para los cuales necesitamos el concepto de árbol. En efecto, recordemos que, en la sección 1.5.2, vimos que podemos considerar a la familia $[\mathbb{N}]^{<\omega}$ de los subconjuntos finitos de naturales como un árbol. Aún más, probamos que este es equivalente, topológicamente, al árbol de las sucesiones finitas $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. En esta línea, si definimos

$$[\mathbb{N}]^{<\omega} \otimes [\mathbb{N}]^{<\omega} := \{(s,t) \in [\mathbb{N}]^{<\omega} \times [\mathbb{N}]^{<\omega} \, : \, |s| = |t|\}$$

podemos hablar de este conjunto como un árbol (equivalente topológicamente al árbol $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$). Veamos ahora un primer resultado auxiliar que relaciona árboles y conjuntos analíticos:

Proposición 2.20. *Un conjunto $A \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega}$ es analítico si y solo si existe $T \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega} \otimes [\mathbb{N}]^{<\omega}$ árbol tal que $A = \Pi_1([T])$.*

Demostración. En primer lugar, notemos que el teorema 1.24, que caracteriza a los conjuntos analíticos, nos dice que, $A \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega}$ es analítico si y solo si existe $C \subseteq [\mathbb{N}]^{\omega} \times [\mathbb{N}]^{\omega}$ cerrado tal que $\Pi_1(C) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Veamos que $[T]$ es cerrado. Para ello, probemos que su complementario es abierto. Sea $x \in [T]^c$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x|n \notin T$. Ahora bien, $N_{x|n}$ es un entorno de x que no comparte nada con $[T]$, porque, de ser así, existiría $y \in [T] \cap N_{x|n}$, es decir, $x|n = y|n \in T$, lo cual es una contradicción. Hemos encontrado, entonces, un entorno de x contenido en $[T]^c$, probando que este conjunto es abierto. (Nótese que tratamos con la topología de $[\mathbb{N}]^{\omega}$ como si fuera la de $\mathcal{N}$).

$\boxed{\Rightarrow}$

Definimos el siguiente árbol:

$$T := \{(s,t) \in [\mathbb{N}]^{<\omega} \otimes [\mathbb{N}]^{<\omega} \, : \, \text{existe } (a,b) \in C \, : \, s < a, t < b\}$$

Veamos que $C = [T]$, donde, recordemos,

$$[T] = \{(x, y) \in [\mathbb{N}]^\omega \times [\mathbb{N}]^\omega : (x|n, y|n) \in T \ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

En primer lugar, es claro que $C \subseteq [T]$, por definición de C. Probemos que $C \supseteq [T]$. Tomemos, en primer lugar $(\{a_0, a_1, \dots\}, \{b_0, b_1, \dots\}) \notin C$. Por ser C cerrado (C^c abierto), existe un abierto básico cuya intersección con C es vacía (basta ver el argumento utilizado en la implicación anterior), es decir, existe k tal que

$$\{(a, b) \subseteq [\mathbb{N}]^\omega \times [\mathbb{N}]^\omega : \{a_0, a_1, \dots, a_k\} < a; \{b_0, b_1, \dots, b_k\} < b\} \cap C = \emptyset$$

Por tanto, $(\{a_0, a_1, \dots, a_k\}, \{b_0, b_1, \dots, b_k\}) \notin T$, lo que implica que

$$(\{a_0, a_1, \dots\}, \{b_0, b_1, \dots\}) \notin [T]$$

En definitiva, $\Pi_1([T]) = \Pi_1(C) = A$. □

A continuación, definimos un tipo especial de árbol que utilizaremos en la prueba del siguiente teorema, clave para probar el teorema 2.17:

Definición 2.21. (De [10]) Sea Γ familia de subconjuntos de números naturales. Decimos que una familia de subconjuntos finitos de números naturales $\Sigma \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ es un Γ-árbol si:

I) $\emptyset \in \Sigma$.

II) Para todo $\sigma \in \Sigma$, el conjunto $\{i \in \mathbb{N} : \sigma \cup \{i\} \in \Sigma\}$ es infinito y está contenido en un elemento de Γ.

Nota 2.22. Un Γ-árbol es un árbol, como se desprende de la segunda condición impuesta en su definición.

Definición 2.23. Una familia de conjuntos de números naturales Γ decimos que es hereditaria si es cerrada bajo subconjuntos de sus elementos, es decir, si para todo $x \in \Gamma$ y para todo $y \subset x$, tenemos que $y \in \Gamma$.

Llegados a este punto, enunciamos y demostramos el siguiente teorema, el cual, como veremos con posterioridad, es una pieza clave del camino que nos llevará a la prueba del teorema 2.17, y, con ello, a la del teorema 2.14:

Teorema 2.24. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de subconjuntos de números naturales. Supongamos que Γ_0 es analítica y hereditaria. Si Γ_0 no está numerablemente generada en $\Gamma_1^{\perp}$, existe un Γ_1-árbol cuyas ramas infinitas son elementos de Γ_0.*

Demostración. Tomemos dos familias Γ_0 y Γ_1 como las del enunciado y supongamos que Γ_0 no está numerablemente generada en $\Gamma_1^{\perp}$.

En primer lugar, dado que Γ_0 es analítica, podemos usar la proposición 2.20 y afirmar la existencia de $T \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega} \otimes [\mathbb{N}]^{<\omega}$ árbol de forma que $\Pi_1([T]) = \Gamma_0$ (podemos suponer que está formada por conjuntos infinitos ya que aceptamos errores finitos. Véase el lema 2.25). Por tanto, un conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{N}$ está en Γ_0 si y solo si existe $f = \{\langle s_n, t_n \rangle\}_{n=0}^{\infty}$ rama infinita de T tal que $A = \bigcup\limits_{n<\omega} s_n$. Así, vamos a asignar a cada conjunto $A \in \Gamma_0$ una rama infinita de T, a la que llamaremos f_A. Ahora, para un $(s,t) \in T$ fijo, definimos

$$\Gamma_0(s,t) := \{A \in \Gamma_0 \,:\, f_A \text{ extiende a } (s,t)\}$$

Sea ahora

$$T_0 := \{(s,t) \in T \,:\, \Gamma_0(s,t) \text{ está numerablemente generado en } \Gamma_1^{\perp}\}$$

Notemos que $\Gamma_0(\emptyset) = \Gamma_0$ ya que toda rama extiende al conjunto vacío. Ahora bien, Γ_0 no está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$ por hipótesis. Así pues, $\emptyset \in T_1$, es decir, $T_1 \neq \emptyset$. Esto da sentido al siguiente conjunto, ya que lo dota de al menos un elemento:

$$\overline{\Gamma_0} := \Gamma_0 \setminus \left(\bigcup_{(s,t)\in T_0} \Gamma_0(s,t) \right)$$

El conjunto $\overline{\Gamma_0}$ consiste en eliminar de Γ_0 todo lo numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$, y no está, en consecuencia, numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$, en virtud del lema

2.12. Definimos ahora, para todo $(s,t) \in T_1$, el conjunto

$$\overline{\Gamma_0}(s,t) := \{A \in \overline{\Gamma_0} : f_A \text{ extiende a } (s,t)\}$$

el cual no está numerablemente generado en $\Gamma_1^\perp$ porque, si lo estuviera

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma_0}(s,t) &= \Gamma_0(s,t) \setminus \{A \in \bigcup_{(s',t')\in T_0} \Gamma_0\left(s',t'\right) : f_A \text{ extiende a}\,(s,t)\} \\ &= \Gamma_0(s,t) \setminus \bigcup_{(s',t')\in T_0} \{A \in \Gamma_0\left(s',t'\right) : f_A \text{ extiende a}\,(s,t)\}\end{aligned}$$

y este segundo conjunto no está numerablemente generado en $\Gamma_1^\perp$, ya que es el complementario de otro que si lo está, por ser unión numerable de conjuntos numerablemente generados. En efecto,

$$\{A \in \Gamma_0\left(s',t'\right) : f_A \text{ extiende a}\,(s,t)\} \subseteq \Gamma_0\left(s',t'\right)$$

por lo que, al estar contenido en un conjunto numerablemente generado, está numerablemente generado.

Una vez hechas estas consideraciones, pasamos a construir un Γ_1-árbol $\Sigma \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ cuyas ramas sean elementos de Γ_0. Lo vamos a construir de manera inductiva junto a una sucesión $\left(s_\sigma, t_\sigma\right)$ $(\sigma \in \Sigma)$ de elementos de T_1 y una sucesión d_σ $(\sigma \in \Sigma)$ de elementos de Γ_1 de forma que se cumplan:

(1) Si τ extiende a σ de manera estricta, entonces $\left(s_\tau, t_\tau\right)$ extiende estrictamente a $\left(s_\sigma, t_\sigma\right)$.

(2) $\sigma \subseteq s_\sigma$ para todo $\sigma \in \Sigma$.

(3) $b_\sigma = \{i \in d_\sigma : \sigma \cup \{i\} \in \Sigma\}$ es infinito para todo $\sigma \in \Sigma$.

Comenzamos fijando $\emptyset \in \Sigma$ y definimos $s_\emptyset = t_\emptyset = \emptyset$. Entonces, el conjunto $\overline{\Gamma_0}\left(\emptyset,\emptyset\right)$ no está numerablemente generado en $\Gamma_1^\perp$ (recordemos que $\left(\emptyset,\emptyset\right) \in T_1$). Sea $c_\emptyset := \bigcup \overline{\Gamma_0}\left(\emptyset,\emptyset\right) = \bigcup \overline{\Gamma_0}$. Este conjunto está compuesto de todas las primeras coordenadas de las ramas del árbol T que conforman algún $A \in \overline{\Gamma_0}$. Tenemos, entonces, que, dado $A \in \overline{\Gamma_0}$, $A \subseteq c_\emptyset$. Veamos ahora que $c_\emptyset \notin \Gamma_1^\perp$. En caso contrario, dado que $c_\emptyset$

contiene a todo elemento de $\overline{\Gamma_0}\left(\emptyset,\emptyset\right)$, este último conjunto estaría numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$, algo que probamos falso anteriormente. En definitiva, $c_{\emptyset} \notin \Gamma_1^{\perp}$. Existe, entonces, $d_{\emptyset} \in \Gamma_1$ de forma que $b_{\emptyset} := d_{\emptyset} \cap c_{\emptyset}$ es infinito.

Sea $i \in b_{\emptyset}$. Sabemos que, como $i \in c_{\emptyset}$, existe $a_i \in \overline{\Gamma_0}\left(\emptyset,\emptyset\right)$ de forma que $i \in a_i$. Como a_i es unión de las primeras coordenadas de los nodos que conforman la rama f_{a_i}, tomo $\left(s^i, t^i\right)$ el menor nodo de f_{a_i} tal que $i \in s^i$. De este modo, para todo $i \in b_{\emptyset}$ hacemos $\{i\} \in \Sigma$, además de fijar $s_{\{i\}} = s^i$ y $t_{\{i\}} = t^i$. Esto concluye el primer paso de la construcción. Notemos que $\left(s^i, t^i\right)$ está en T_1 porque $a_i \in \overline{\Gamma_0}$.

Supongamos que tenemos un cierto $\sigma \in \Sigma$, así como $\left(s_\sigma, t_\sigma\right) \in T_1$. Razonando de manera análoga, dado que $\overline{\Gamma_0}\left(s_\sigma, t_\sigma\right)$ no está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$, entonces $c_\sigma := \cup\overline{\Gamma_0}\left(s_\sigma, t_\sigma\right) \notin \Gamma_1^{\perp}$. Tomamos $d_\sigma \in \Gamma_1$ tal que $c_\sigma \cap d_\sigma$ es infinito. Definimos

$$b_\sigma := \{i \in c_\sigma \cap d_\sigma \, : \, i > \text{máx}\left(s_\sigma\right)\}$$

Esta definición requiere la eliminación de una cantidad finita de elementos de $c_\sigma \cap d_\sigma$, ya que hay que mantener el orden de end-extension. De nuevo, para todo $i \in b_\sigma$ tomamos $a_i \in \overline{\Gamma_0}\left(s_\sigma, t_\sigma\right)$ de forma que $i \in a_i$. En consecuencia, tomamos tomo $\left(s^i_\sigma, t^i_\sigma\right)$ el menor nodo de f_{a_i} tal que $i \in s^i_\sigma$ y que extienda a $\left(s_\sigma, t_\sigma\right)$. Hacemos $\sigma \cup \{i\} \in \Sigma$ y definimos $s_{\sigma\cup\{i\}} = s^i_\sigma$, $t_{\sigma\cup\{i\}} = t^i_\sigma$, finalizando la construcción del Γ_1-tree.

Comprobemos que, en efecto, el conjunto Σ es un Γ_1-tree. En primer lugar, $\emptyset \in \Sigma$. Además, el conjunto $b_\sigma = \{i \in d_\sigma \, : \, \sigma \cup \{i\} \in \Sigma\}$ es infinito para todo $\sigma \in \Sigma$ por la propia construcción. Resta comprobar que b_σ está contenido en un elemento de Γ_1. Ahora bien, esto es cierto, ya que en cada paso construimos $b_\sigma \subset c_\sigma \cap d_\sigma \subset d_\sigma \in \Gamma_1$.

Finalmente, tenemos que comprobar que todas las ramas infinitas de Σ son elementos de Γ_0. Una rama infinita de Σ es un conjunto infinito

$$a = \{i_0, i_1, \ldots\}$$

que cumple que $a = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sigma_n$, donde $\sigma_n = \{i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}\} \in \Sigma$ para todo $n < \omega$. En este contexto, $\left(s_{\sigma_n}, t_{\sigma_n}\right) \in T_1$ para todo $n < \omega$. Entonces, $\{\left(s_{\sigma_i}, t_{\sigma_i}\right)\}_{i<\omega}$ determina una rama infinita de T cuya proyección en la primera coordenada

$$\overline{a} = \bigcup_{n=0}^{\infty} s_{\sigma_n}$$

es un elemento de Γ_0, por la propia definición del principio del teorema. Por otro lado, gracias a la condición (2), obtenemos que $a \subseteq \overline{a}$, puesto que, para todo $x \in a$, $x \in \sigma_{n_0} \subseteq s_{\sigma_{n_0}} \subseteq \overline{a}$. Dado que Γ_0 es cerrado bajo subconjuntos de sus elementos, tenemos que $a \in \Gamma_0$, lo que concluye la prueba. □

Al comienzo de la demsotración, hemos dicho que bastaba probar el teorema en el caso de conjuntos infinitos. A continuación, ofrecemos un lema que clarifica esto:

Lema 2.25. *El teorema 2.24 es equivalente a su restricción a conjuntos infinitos.*

Demostración. Supongamos el teorema probado en el caso de conjuntos infinitos y queremos probar el caso general, tomamos conjuntos Γ_0 y Γ_1 como en la hipótesis. Definimos entonces

$$\widetilde{\Gamma_0} := \{x \in \Gamma_0 \,:\, |x| = \aleph_0\}$$
$$\widetilde{\Gamma_1} := \{y \in \Gamma_1 \,:\, |y| = \aleph_0\}$$

Podemos ver $\widetilde{\Gamma_0}$ como $\Gamma_0 \cap (\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathit{fin})$, donde *fin* simboliza los conjuntos finitos de naturales. La colección de conjuntos finitos de naturales es de Borel por ser unión numerable de cerrados (unión de los conjuntos unipuntuales que conforman la colección). Así, su complementario también es de Borel, por lo que $\widetilde{\Gamma_0}$ es de Borel. Así, por la proposición 1.25, $\widetilde{\Gamma_0}$ es analítico.

En definitiva, tanto $\widetilde{\Gamma_0}$ como $\widetilde{\Gamma_1}$ cumplen las hipótesis del teorema. Ahora bien, si Γ_0 no está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$, entonces para toda sucesión $\{y_n\}_{n<\omega} \subset \Gamma_1^{\perp}$ existe $x \in \Gamma_0$ tal que para todo $y_x \in \{y_n\}_{n<\omega}$, tenemos que $x \not\subseteq^* y_x$. Veamos que $\widetilde{\Gamma_0}$ no está numerablemente generado en $\widetilde{\Gamma_1^{\perp}}$. Supongamos que el conjunto $x \in \Gamma_0$ tal que

$x \not\subseteq^* y_x$ para todo $y_x \in \{y_n\}_{n<\omega}$ es finito. Ahora bien, todo conjunto finito está casi contenido en cualquier otro conjunto, pues aunque no esté ningún elemento suyo en el otro conjunto, siguen difiriendo en una cantidad finita. Por tanto, el susodicho $x \in \Gamma_0$ es infinito, es decir, $x \in \widetilde{\Gamma}_0$, lo que nos da lo que buscábamos. Como estamos suponiendo este cierto para el caso de conjuntos infinitos, tenemos que existe un Γ_1-árbol cuyas ramas infinitas son elementos de $\widetilde{\Gamma}_0$, ya que todo $\widetilde{\Gamma}_1$-árbol es un Γ_1-árbol. Pero, $\widetilde{\Gamma}_0 \subset \Gamma_0$, por lo que queda probado el teorema para los conjuntos originales.

Esta implicación sumada al recíproco, el cual es trivial, nos dicen que estas dos versiones son equivalentes. □

Recordemos que nuestro objetivo no es otro que probar el teorema 2.17, con el fin de concluir la prueba del teorema 2.14. No obstante, para ello necesitamos aún otro resultado, el cual probamos a continuación:

Proposición 2.26. *Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales y hereditarias de conjuntos de números naturales, con Γ_0 analítica. Si existe un Γ_1-árbol cuyas ramas infinitas son elementos de Γ_0, entonces existe un subconjunto numerable $\overline{\Gamma_1} \subseteq \Gamma_1$ que no se puede separar de Γ_0.*

Demostración. Supongamos que Σ es un Γ_1-árbol cuyas ramas infinitas son elementos de Γ_0. Por ser Γ_1-árbol, fijado $\sigma \in \Sigma$, el conjunto $b_\sigma := \{i \in \mathbb{N} : \sigma \cup \{i\} \in \Sigma\}$ es infinito está contenido en un elemento de Γ_1. Por tanto, la familia $\overline{\Gamma_1} := \{b_\sigma\}_{\sigma\in\Sigma}$ es una familia numerable contenida en Γ_1, por ser Γ_1 hereditaria. Veamos que $\overline{\Gamma_1}$ no se puede separar de Γ_0. Supongamos, por el contrario, que existe un conjunto $a \in \Gamma_0^\perp$ tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, $b_\sigma \subseteq^* a$. Tomo ahora $\sigma = \emptyset$. Entre los elementos de $b_\emptyset$, existe $\sigma_0 \in a$, por ser $b_\emptyset$ infinito (esto último implica que existe un elemento en $b_\emptyset \cap a$). Procediendo de esta forma, obtenemos una rama infinita del Γ_1-árbol

$$D := \{\sigma_0, \sigma_1, \dots\}$$

formada por elementos de a, es decir, contenida en a. No obstante, esta rama infinita, por hipótesis, es un elemento de Γ_0. Pero ningún elemento infinito de Γ_0 puede estar contenido en a dado que $a \in \Gamma_0^\perp$, lo cual nos lleva a una contradicción. $\square$

Estos dos últimos resultados son los que nos van a permitir probar el teorema 2.17, y, con él, el teorema 2.14. Sin embargo, tanto el teorema 2.24 como la proposición 2.26 tienen como hipótesis el hecho de que una (o ambas) de las familias involucradas sean hereditarias. Esto no ocurre con los teoremas que queremos demostrar, por lo que necesitamos probar que estas hipótesis no alteran el resultado:

Lema 2.27. *El teorema 2.14 es equivalente al que resulta de añadir la hipótesis de que ambas familias sean hereditarias.*

Demostración. La versión sin familias hereditarias es más general, por lo que basta probar la otra implicación. Así, sean dos familias de conjuntos Γ_0 y Γ_1 ortogonales con Γ_0 analítica. Definimos ahora

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma_0} &:= \{x \subseteq \mathbb{N} : \exists\, x' \in \Gamma_0 : x \subset x'\}\\ \widetilde{\Gamma_1} &:= \{y \subseteq \mathbb{N} : \exists\, y' \in \Gamma_1 : y \subset y'\}\end{aligned}$$

Estas familias son hereditarias por definición. Además, son ortogonales por serlo Γ_0 y Γ_1. Por otro lado, $\widetilde{\Gamma_0}$ es analítica porque la aplicación

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \Gamma_0 &\to \widetilde{\Gamma_0}\\ (x, a) &\mapsto x \cap a\end{aligned}$$

es continua y suprayectiva, lo que, componiendo

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \Gamma_0 \to \widetilde{\Gamma_0}$$

prueba que $\widetilde{\Gamma_0}$ es imagen continua de $\mathbb{N}$.

Notemos, en primer lugar, que $\Gamma_1^\perp = \widetilde{\Gamma_1^\perp}$. En efecto, como $\Gamma_1 \subset \widetilde{\Gamma_1}$, entonces $\Gamma_1^\perp \supset \widetilde{\Gamma_1^\perp}$. Por otro lado, sea $z \in \Gamma_1^\perp$. Tomamos ahora un elemento $x \in \widetilde{\Gamma_1}$. Existe, por definición, $y \in \Gamma_1$ tal que $x \subset y$. Entonces,

$$x \cap z \subset y \cap z =^* \emptyset$$

es decir, $z \in \widetilde{\Gamma_1^{\perp}}$. Por tanto, podemos concluir que $\widetilde{\Gamma}_0$ está numerablemente generado en $\widetilde{\Gamma}_1^{\perp}$ si y solo si $\widetilde{\Gamma}_0$ está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$.

Por otro lado, como $\Gamma_0 \subset \widetilde{\Gamma}_0$, si este último está numerablemente generado en $\widetilde{\Gamma_1^{\perp}}$, también lo está Γ_0. Ahora bien, como todo elemento de $\widetilde{\Gamma}_0$ está contenido en un elemento de Γ_0, también se cumple el recíproco. En definitiva, Γ_0 está numerablemente generado en $\widetilde{\Gamma_1^{\perp}}$ si y solo si $\widetilde{\Gamma}_0$ está numerablemente generado en $\widetilde{\Gamma_1^{\perp}}$. Así pues, hemos probado que Γ_0 está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$ si y solo si $\widetilde{\Gamma}_0$ está numerablemente generado en $\widetilde{\Gamma_1^{\perp}}$.

Supongamos que todo subconjunto numerable de $\widetilde{\Gamma}_1$ se puede separar de $\widetilde{\Gamma}_0$. Veamos que, entonces, todo subconjunto numerable de $\widetilde{\Gamma}_1$ se puede separar de Γ_0. Ahora bien, como $\Gamma_0 \subset \widetilde{\Gamma}_0$, queda probado. Para ver el recíproco, basta notar que, dado $x \in \widetilde{\Gamma}_0$, existe $y \in \Gamma_0$ tal que $x \subset y$, por lo que, para cierto $a \subset \mathbb{N}$

$$a \cap x \subset a \cap y =^* \emptyset$$

En definitiva, todo subconjunto numerable de $\widetilde{\Gamma}_1$ se puede separar de $\widetilde{\Gamma}_0$ si y solo si todo subconjunto numerable de $\widetilde{\Gamma}_1$ se puede separar de Γ_0.

Del mismo modo, supongamos que todo subconjunto numerable de Γ_1 se puede separar de Γ_0. Veamos que, en ese caso, todo subconjunto numerable de $\widetilde{\Gamma}_1$ se puede separar de Γ_0. Sea $N \subset \widetilde{\Gamma}_1$ numerable. Entonces, por definición, existe $N \subset N' \subset \Gamma_1$ numerable. Como N' se puede separar de Γ_0, entonces, para todo $x \in N$, existe $x' \in N'$ tal que $x \subset x' \subset a$, para cierto $a \subset \mathbb{N}$. Para probar el recíproco, basta notar que $\Gamma_1 \subset \widetilde{\Gamma}_1$, por lo que todo subconjunto numerable de Γ_1 también lo es de $\widetilde{\Gamma}_1$. Así, hemos probado que todo subconjunto numerable de $\widetilde{\Gamma}_1$ se puede separar de $\widetilde{\Gamma}_0$ si y solo si todo subconjunto numerable de Γ_1 se puede separar de Γ_0. □

Ahora sí, una vez hecha esta última aclaración, vamos a demostrar el teorema 2.17 como consecuencia del teorema 2.24 y de la proposición 2.26:

Teorema 2.28. *Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales y hereditarias de subconjuntos de números naturales, donde Γ_0 es analítica. Supongamos que Γ_0 no está numerablemente* *generado en $\Gamma_1^{\perp}$. Entonces, existe un subconjunto numerable $\overline{\Gamma_1} \subseteq \Gamma_1$ que no se puede separar de Γ_0.*

Demostración. En virtud del teorema 2.24, existe un Γ_1-árbol cuyas ramas infinitas son elementos de Γ_0. Aplicando ahora la proposición 2.26, existe un subconjunto numerable $\overline{\Gamma_1} \subseteq \Gamma_1$ que no se puede separar de Γ_0. □

Teorema 2.17. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales, con Γ_0 analítica. Si todo subconjunto numerable de Γ_1 puede ser separado de Γ_0, entonces Γ_0 está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 2.28 y el lema 2.27. □

En definitiva hemos probado el teorema 2.14:

Teorema 2.14. *(De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias ortogonales de conjuntos de números naturales, con Γ_0 analítica. Entonces , Γ_0 está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$ si y solo si todo subconjunto numerable de Γ_1 puede ser separado de Γ_0.*

Demostración. Basta combinar los teoremas 2.18 y 2.17. □

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_0 \text{ no num} \dots \arrow[r, equal] \arrow[d, dashed, "2.17=2.26+2.24"] & \Gamma_0 \text{ no num} \dots \arrow[d, Rightarrow, "2.24"] \\
\exists\, \overline{\Gamma_1} \subseteq \Gamma_1 \dots & \exists\, \Gamma_1 - \text{árbol} \dots \arrow[l, Rightarrow, "2.26"']
\end{tikzcd}$$

Figura 2.1: Teo. 2.24 + Prop. 2.26 $\Longrightarrow$ Teorema 2.17

2.3. El gap de Hausdorff

En la sección anterior hemos probado un resultado que nos dice que dos familias ortogonales y σ-dirigidas de conjuntos de números naturales pueden separarse si una de ellas es analítica (corolario 2.15). El objetivo de esta nueva sección es ver que esta última hipótesis es fundamental.

Para llevar a cabo nuestro propósito vamos a probar la existencia de dos familias de subconjuntos de naturales σ-dirigidas que no pueden separarse, es decir, que conforman un gap. Esta construcción es conocida como el ***gap de Hausdorff***, e involucra el proceso de inducción transfinita. Así pues, durante esta sección utilizaremos conceptos relacionados con los números ordinales, cuyos enunciados pueden consultarse en el anexo dedicado a ellos.

Sin más preámbulos, enunciamos el teorema que prueba la existencia de estas familias:

Teorema 2.29 (Gap de Hausdorff). *(De [4], pag. 38)*

(a) Existen familias indexadas $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ y $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ de conjuntos de números naturales tales que

1. *Si $\eta < \xi < \omega_1$, entonces $A_\eta \setminus A_\xi$, $B_\eta \setminus B_\xi$ y $A_\xi \cap B_\xi$ son finitos; $A_\xi \setminus A_\eta$ y $B_\xi \setminus B_\eta$ son infinitos.*
2. *Si $\xi < \omega_1$ y $r \in \mathbb{N}$, entonces $\{\eta : \eta < \xi, B_\eta \cap A_\xi \subseteq r\}$ es finito.*

(b) No existe $C \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A_\xi \setminus C$ y $B_\xi \cap C$ son ambos finitos para todo $\xi < \omega_1$.

Este enunciado es poco esclarecedor, ya que no hay en él indicios de que las familias cuya existencia prueba sean σ-dirigidas ni de que conformen un gap. Por ello, antes de probar el teorema, vamos a tratar de clarificar tanto su enunciado como las consecuencias que este tiene.

En primer lugar, nos fijamos en el apartado **(a)**. Este afirma la existencia de dos familias de conjuntos indexadas en ω_1, y, por tanto, no numerables (véase A.31). Estas familias satisfacen varias condiciones:

- Respecto al apartado **(a).1**, cuando decimos que si $\eta < \xi < \omega_1$, entonces $A_\eta \setminus A_\xi$ y $B_\eta \setminus B_\xi$ son finitos, decimos que estas familias son “casi crecientes":

$$A_0 \subseteq^* A_1 \subseteq^* \cdots \subseteq^* A_\omega \subseteq^* A_{\omega+1} \subseteq^* \cdots$$

$$B_0 \subseteq^* B_1 \subseteq^* \cdots \subseteq^* B_\omega \subseteq^* B_{\omega+1} \subseteq^* \cdots$$

Aún más, el hecho de que $A_\xi \setminus A_\eta$ y $B_\xi \setminus B_\eta$ sean infinitos nos dice que estos “casi contenidos" son estrictos, es decir, que dados dos elementos de la familia, no se diferencian en una cantidad finita de elementos, ya que el que tenga una posición mayor posee infinitos elementos que no están en aquel con una posición más pequeña.
Una consecuencia inmediata de que estas familias sean “casi crecientes" es que también son σ-dirigidas:

Proposición 2.30. *Las familias $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ y $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ de 2.29 son σ-dirigidas.*

Demostración. Sea $\{A_{\alpha_i}\}_{i<\omega}$ sucesión de elementos de $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$. Sea $\alpha := \bigcup_{i<\omega} \alpha_i$. Como $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ es casi creciente, tenemos que $A_{\alpha_i} \subseteq^* A_\alpha$ para todo $i < \omega$. Nótese que $\alpha < \omega_1$ porque la unión numerable de conjuntos numerables es numerable. La prueba es análoga con $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_1}$. □

Por otro lado, el apartado **(a).1** afirma que $A_\xi \cap B_\xi$ es finito para todo $\xi < \omega$. Esto se traduce en que $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ y $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ son ortogonales, ya que, dados $\eta < \xi < \omega_1$, $A_\eta \subseteq^* A_\xi$ y $B_\eta \subseteq^* B_\xi$, por lo que $A_\xi \cap B_\eta$ y $A_\eta \cap B_\xi$ son finitos. En otras palabras, las familias son “casi disjuntas".

- La condición **(a).2** establece que, en cierto sentido, estas familias no se estancan, porque, fijados el natural y el elemento que queramos, las intersecciones con la otra familia hasta llegar a nuestro puesto elegido están contenidas en el natural elegido en un número finito de casos.

Pasamos ahora al apartado **(b)**. La consecuencia inmediata de este apartado es que las familias $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ y $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ forma, en efecto, un gap:

Proposición 2.31. *Las familias $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ y $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ del teorema 2.29 no se pueden separar.*

Demostración. Debemos probar que no existe $C \subseteq \mathbb{N}$ de manera que $A_\xi \subseteq^* C$

y $B_\eta \cap C =^* 0$ para todo $\xi, \eta < \omega_1$. Supongamos, por el contrario, que sí existe tal conjunto. Notemos que $A_\xi \setminus C$ es finito si y solo si $A_\xi \subseteq^* C$. Tomando, entonces, $\eta = \xi$ contradiríamos el apartado (b) del teorema 2.29. $\square$

Una vez explicadas las consecuencias de este teorema, pasamos a su demostración.

Teorema 2.29 (Gap de Hausdorff). *(De [4], pag. 38)*

(a) Existen familias indexadas $\{A_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ y $\{B_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ de conjuntos de números naturales tales que

1. *Si $\eta < \xi < \omega_1$, entonces $A_\eta \setminus A_\xi$, $B_\eta \setminus B_\xi$ y $A_\xi \cap B_\xi$ son finitos; $A_\xi \setminus A_\eta$ y $B_\xi \setminus B_\eta$ son infinitos.*
2. *Si $\xi < \omega_1$ y $r \in \mathbb{N}$, entonces $\{\eta : \eta < \xi, B_\eta \cap A_\xi \subseteq r\}$ es finito.*

(b) No existe $C \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A_\xi \setminus C$ y $B_\xi \cap C$ son ambos finitos para todo $\xi < \omega_1$.

Demostración. Comencemos con la prueba de (a). Hagamos inducción transfinita (véase el teorema A.22). Incluimos, como parte de la hipótesis de inducción lo siguiente, ya que necesitamos asegurarnos de que, al construir los conjuntos, estos no cubran todo el espacio:

$$\mathbb{N} \setminus (A_\xi \cup B_\xi) \text{ es infinito } \forall\, \xi < \omega_1 \tag{2.1}$$

<u>Paso 1 (Ordinal cero)</u>

En este primer paso hay que probar el teorema para $\xi = 0$. Basta entonces definir $A_0 = \emptyset = B_0$.

<u>Paso 2 (Ordinal sucesor)</u>

Supongamos el teorema cierto para $\xi < \omega_1$ y probémoslo para $\xi + 1$. Dados A_ξ y B_ξ, consideramos tres conjuntos infinitos disjuntos C, D y E de $\mathbb{N} \setminus (A_\xi \cup B_\xi)$, gracias a (2.1). Definimos

$$\begin{aligned} A_{\xi+1} &:= A_\xi \cup C \\ B_{\xi+1} &:= B_\xi \cup D \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como $A_\xi \subseteq A_{\xi+1}$ y $B_\xi \subseteq B_{\xi+1}$, por definición, tenemos que $A_\xi \setminus A_{\xi+1} = \emptyset = B_\xi \setminus B_{\xi+1}$. Además, para todo $\eta < \xi$:

$$A_\eta \setminus A_{\xi+1} = A_\eta \cap A_{\xi+1}^c \subseteq A_\eta \cap A_\xi^c = A_\eta \setminus A_\xi$$
$$B_\eta \setminus B_{\xi+1} = B_\eta \cap B_{\xi+1}^c \subseteq B_\eta \cap B_\xi^c = B_\eta \setminus B_\xi$$

pUtilizando la hipótesis de inducción, $A_\eta \setminus A_{\xi+1}$ y $B_\eta \setminus B_{\xi+1}$ son finitos para todo $\eta \leq \xi$. Además, por (2.2) y por ser $C, D \subset \mathbb{N} \setminus (A_\xi \cup B_\xi)$ disjuntos:

$$A_{\xi+1} \cap B_{\xi+1} = (A_\xi \cup C) \cap (B_\xi \cup D) = (A_\xi \cap B_\xi) \cup (C \cap D) \cup (A_\xi \cap D) \cup (B_\xi \cap C) = (A_\xi \cap B_\xi)$$

De nuevo, gracias a la hipótesis de inducción, $A_{\xi+1} \cap B_{\xi+1}$ es finito. Fijamos ahora $\eta \leq \xi$ y consideramos el conjunto $C \setminus (A_\eta \setminus A_\xi)$, el cual podemos reescribir de la siguiente manera:

$$C \setminus (A_\eta \setminus A_\xi) = C \setminus (A_\eta \cap A_\xi^c) = C \cap (A_\eta^c \cup A_\xi) = (C \cap A_\eta^c) \cup (C \cap A_\xi) = (C \cap A_\eta^c)$$

donde la última igualdad se da porque $C \subseteq \mathbb{N} \setminus (A_\xi \cup B_\xi)$. En definitiva, y usando de nuevo (2.2):

$$C \setminus (A_\eta \setminus A_\xi) = C \cap A_\eta^c \subseteq (C \cup A_\xi) \cap A_\eta^c = A_{\xi+1} \setminus A_\eta$$

Tenemos, pues que $A_{\xi+1} \setminus A_\eta \supseteq C \setminus (A_\eta \setminus A_\xi)$. Debido a que este último es infinito por ser C infinito y $A_\eta \setminus A_\xi$ finito, $A_{\xi+1} \setminus A_\eta$ contiene un conjunto infinito y, por tanto, es infinito. Un razonamiento completamente análogo permite probar que $B_{\xi+1} \setminus B_\eta \supseteq D \setminus (B_\eta \setminus B_\xi)$, por lo que $B_{\xi+1} \setminus B_\eta$ es infinito. Tomamos ahora el conjunto $\mathbb{N} \setminus (A_{\xi+1} \cup B_{\xi+1})$. Operando:

$$\mathbb{N} \setminus (A_{\xi+1} \cup B_{\xi+1}) = \mathbb{N} \cap A_{\xi+1}^c \cap B_{\xi+1}^c = (A_\xi \cup C)^c \cap (B_\xi \cup D)^c = A_\xi^c \cap C^c \cap B_\xi^c \cap D^c$$

Ahora bien, sabemos que el conjunto E es infinito, disjunto con C y D y además está contenido en $\mathbb{N} \setminus (A_\xi \cup B_\xi)$. Podemos concluir que $E \subseteq \mathbb{N} \setminus (A_{\xi+1} \cup B_{\xi+1})$ y, en consecuencia, este último es infinito.

Finalmente, fijamos $r < \omega$. Veamos que el conjunto $\{\eta : \eta \leq \xi, B_\eta \cap A_{\xi+1} \subseteq r\}$ es finito. Si notamos que $A_\xi \subseteq A_{\xi+1}$ (2.2), tenemos que

$$\{\eta : \eta \leq \xi, B_\eta \cap A_{\xi+1} \subseteq r\} \subseteq \{\xi\} \cup \{\eta : \eta < \xi, B_\eta \cap A_\xi \subseteq r\}$$

Como este último conjunto es finito por la hipótesis de inducción, queda probada la finitud.

<u>Paso 3 (Ordinal límite)</u>

Supongamos que $0 \neq \xi < \omega_1$ es un ordinal límite y supongamos el teorema cierto para todo $\eta < \xi$. Veamos que se cumple para ξ. Sea $\{\zeta(n)\}_{n<\omega}$ sucesión estrictamente creciente de ordinales con supremo ξ, comenzando en $\zeta(0) = 0$ (véase el lema A.23). Sabemos que, por la hipótesis de inducción, para todo $n < \omega$, $A_{\zeta(n)} \cap B_{\zeta(n)}$ es finito. Más aún, $A_{\zeta(n)} \cap B_{\zeta(i)}$ es finito para todo $i \leq n$. Por tanto, $\bigcup\limits_{i\leq n}(A_{\zeta(n)} \cap B_{\zeta(i)})$ es finito para todo $n < \omega$. Existe pues, $k_n < \omega$ tal que $\bigcup\limits_{i\leq n}(A_{\zeta(n)} \cap B_{\zeta(i)}) \subseteq k_n$.

Definimos $A'_\xi := \bigcup\limits_{n<\omega}(A_{\zeta(n)} \setminus k_n)$. Vamos a probar ciertas propiedades sobre este conjunto auxiliar que nos servirán de puente para hacerlo con A_ξ. Fijamos $n < \omega$. Entonces:

$$\begin{aligned} A_{\zeta(n)} \setminus A'_\xi &= A_{\zeta(n)} \cap (\bigcup_{m<\omega}(A_{\zeta(m)} \setminus k_m))^c = A_{\zeta(n)} \cap (\bigcap_{m<\omega}(A^c_{\zeta(m)} \cup k_m)) = \\ &= \bigcap_{m<\omega}((A^c_{\zeta(m)} \cup k_m) \cap A_{\zeta(n)}) \subseteq (A^c_{\zeta(n)} \cup k_n) \cap A_{\zeta(n)} = \\ &= (A^c_{\zeta(n)} \cap A_{\zeta(n)}) \cup (k_n \cap A_{\zeta(n)}) = k_n \cap A_{\zeta(n)} \subseteq k_n \end{aligned}$$

Sea ahora $\eta < \xi$. Por la forma que tiene la sucesión $\{\zeta(n)\}_{n<\omega}$, existe $m < \omega$ tal que $\zeta(m) > \eta$. Por tanto, usando la hipótesis de inducción:

$$A_\eta \setminus A'_\xi \subseteq^* A_{\zeta(m)} \setminus A'_\xi \subseteq k_m$$

Por tanto, $A_\eta \setminus A'_\xi$ es finito. Por otro lado, haciendo uso de la hipótesis de inducción, sabemos que $A_{\zeta(m)} \setminus A_\eta$ es infinito. Además, $A_{\zeta(m)} \subseteq^* A'_\xi$. Por tanto:

$$A_{\zeta(m)} \setminus A_\eta \subseteq^* A'_\xi \setminus A_\eta$$

Concluimos que $A'_\xi \setminus A_\eta$ es infinito, ya que contiene un conjunto infinito. Sea $m < \omega$. $A'_\xi \cap B_{\zeta(m)} = \bigcup_{n<\omega} (A_{\zeta(n)} \cap B_{\zeta(m)} \setminus k_n)$. Como ya hemos visto antes, si $n \geq m$ $A_{\zeta(n)} \cap B_{\zeta(m)} \subseteq k_n$. Por tanto:

$$A'_\xi \cap B_{\zeta(m)} = \bigcup_{n<m} (A_{\zeta(n)} \cap B_{\zeta(m)} \setminus k_n)$$

Como cada conjunto de esta última unión es finito por la hipótesis de inducción, entonces $A'_\xi \cap B_{\zeta(m)}$ es finito para todo $m < \omega$. Continuamos fijando $n < \omega$ y definimos

$$J_n = \{\eta : \zeta(n) \leq \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap A'_\xi \subseteq n\}$$

Como, dado $\eta \in J_n$, $B_\eta \cap (A_{\zeta(n+1)} \setminus k_{n+1}) \subseteq \bigcup_{m<\omega} B_\eta \cap (A_{\zeta(m)} \setminus k_m) = B_\eta \cap A'_\xi$.

$$\begin{aligned} J_n &\subseteq \{\eta : \zeta(n) \leq \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap (A_{\zeta(n+1)} \setminus k_{n+1}) \subseteq n\} \subseteq \\ &\subseteq \{\eta : \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap (A_{\zeta(n+1)} \setminus k_{n+1}) \subseteq n\} = \\ &= \{\eta : \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap A_{\zeta(n+1)} \subseteq \text{máx}\{n, k_{n+1}\}\} \end{aligned}$$

Para poder obtener la última igualdad, basta distinguir si un natural i es mayor o no que k_{n+1}. Aplicando la hipótesis de inducción a $\zeta(n+1)$, este último conjunto es finito, por lo que J_n también lo es. Sea $J = \bigcup_{n<\omega} J_n$. $J \cap \eta$ es finito para todo $\eta < \xi$ porque al intersecar con η estamos considerando tan solo los ordinales menores que η y, por tanto, una cantidad finita de uniones de J_n.

Para todo $\eta \in J \setminus \{0\}$ definimos

$$C_\eta := B_\eta \setminus \bigcup \{B_{\zeta(i)} : i < \omega, \zeta(i) < \eta\}$$

Sea $p = \text{máx}\{n : \zeta(n) < \eta\}$. Entonces,

$$(B_\eta \setminus B_{\zeta(p)}) \setminus (B_\eta \setminus \bigcup_{n\leq p} B_{\zeta(n)}) = (B_\eta \cap B^c_{\zeta(p)}) \cap (B^c_\eta \cup \bigcup_{n\leq p} B_{\zeta(n)}) = B_\eta \cap \bigcup_{n\leq p} (B_{\zeta(n)} \setminus B_{\zeta(p)})$$

Como $B_{\zeta(n)} \subseteq^* B_{\zeta(p)}$ para todo $n \leq p$ con $\zeta(i) < \eta$, tenemos que $(B_\eta \setminus B_{\zeta(p)}) \subseteq^* (B_\eta \setminus \bigcup_{n\leq p} B_{\zeta(n)})$. Pero $(B_\eta \setminus B_{\zeta(p)})$ es infinito, ya que podemos usar la hipótesis de inducción con $\zeta(p) < \eta$. Por tanto $(B_\eta \setminus \bigcup_{n\leq p} B_{\zeta(n)})$ también lo es, es decir, C_η es infinito. Definimos ahora

$$j(\eta) := \text{mín}\{C_\eta \setminus n\} \text{ si } \eta \in J_n \setminus \{0\}$$

Notemos que $\{J_n \setminus \{0\}\}_{n<\omega}$ forman un cubrimiento disjunto de $J \setminus \{0\}$. Es por esto que el n presente en la definición de $j(\eta)$ es aquel que corresponde al único $J_n \setminus \{0\}$ al que pertenece η.

Pasamos a definir ya el conjunto A_ξ de la siguiente manera:

$$A_\xi := A'_\xi \cup \{j(\eta) : \eta \in J \setminus \{0\}\}$$

Utilizamos ahora las propiedades que el conjunto A'_ξ posee y que antes hemos probado. En efecto, hemos probado que, para todo $\eta < \xi$, $A_\eta \setminus A'_\xi$ es finito y $A'_\xi \setminus A_\eta$ es infinito. Ahora, por definición, tenemos que $A'_\xi \subseteq A_\xi$. Por tanto:

$$A_\eta \setminus A_\xi \subseteq A_\eta \setminus A'_\xi$$

$$A'_\xi \setminus A_\eta \subseteq A_\xi \setminus A_\eta$$

Como uno está contenido en un conjunto finito y otro contiene a un conjunto infinito, podemos concluir la finitud del primero y la infinitud del segundo, para todo $\eta < \xi$. Por otro lado

$$\begin{aligned} A_\xi \cap B_{\zeta(n)} &= (A'_\xi \cup \{j(\eta) : \eta \in J \setminus \{0\}\}) \cap B_{\zeta(n)} = \\ &= (A'_\xi \cap B_{\zeta(n)}) \cup (\{j(\eta) : \eta \in J \setminus \{0\}\} \cap B_{\zeta(n)}) \subseteq \\ &\subseteq (A'_\xi \cap B_{\zeta(n)}) \cup \{j(\eta) : \eta \in J \setminus \{0\}, \eta \leq \zeta(n)\} \end{aligned}$$

Para justificar este último contenido, notemos que $j(\eta) \in C_\eta \subseteq B_\eta \setminus B_{\zeta(n)}$ si $\eta > \zeta(n)$.

Ahora bien, con anterioridad probamos que $A'_\xi \cap B_{\zeta(n)}$ es finito para todo $n < \omega$. Además, $\{j(\eta) : \eta \in J \setminus \{0\}, \eta \leq \zeta(n)\}$ es finito porque estamos restringiendo J a una cantidad finita de J_n. En definitiva, $A_\xi \cap B_{\zeta(n)}$ es finito para todo $n < \omega$. Sea ahora $r < \omega$. Definimos

$$\{\eta : \eta < \xi : B_\eta \cap A_\xi \subseteq r\} = \bigcup_{n<\omega} \{\eta : \zeta(n) \leq \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap A_\xi \subseteq r\} =: \bigcup_{n<\omega} K_n^r$$

Si conseguimos probar que esta unión es finita, habremos probado la finitud del primer conjunto, que es uno de nuestros objetivos. Para ello, vamos a trabajar con un cierto K_n^r. Fijamos $n < \omega$:

$$\begin{aligned} K_n^r &\subseteq \{\eta : \zeta(n) \leq \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap A'_\xi \subseteq r\} \subseteq \\ &\subseteq \{\eta : \zeta(n) \leq \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap A_{\zeta(n+1)} \subseteq \text{máx}\{r, k_{n+1}\}\} \\ &\subseteq \{\eta : \zeta(n) \leq \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap A_{\zeta(n+1)} \subseteq \text{máx}\{r, k_{n+1}\}\} \subseteq \\ &\subseteq \{\eta : \eta < \zeta(n+1), B_\eta \cap A_{\zeta(n+1)} \subseteq \text{máx}\{r, k_{n+1}\}\} \end{aligned}$$

El primer contenido se debe a que $A'_\xi \subseteq A_\xi$, mientras que los otros se obtienen de manera análoga a los obtenidos cuando trabajamos con el conjunto J_n. Además, el último nos permite utilizar la hipótesis de inducción y concluir que K_n^r es finito para todo $n < \omega$. Si conseguimos probar que, salvo una cantidad finita, los conjuntos K_n^r son vacíos, habremos demostrado que su unión es finita.

Como r está fijo, trabajemos con n. Si $n \geq r$, $K_n^r \subseteq J_n$, dado que $r \subseteq n$. Por otro lado, dado $\eta \in J_n \setminus \{0\}$, $j(\eta) \in A_\xi$ por definición de A_ξ. Además, por la definición de $j(\eta)$ y C_η, se tiene que $j(\eta) \in B_\eta \setminus n$. Sea entonces $\eta \in K_n^r$ con $n \geq r$. Sabemos que $B_\eta \cap A_\xi \subseteq r \subseteq n$. Como hemos visto,

$$j(\eta) \in A_\xi \cap (B_\eta \setminus n) \subseteq B_\eta \cap A_\xi \subseteq r \subseteq n$$

Sin embargo, como $j(\eta) = \text{mín}\{C_\eta \setminus n\}$, $J(\eta) \notin n$. Esto nos lleva a una contradicción. Así, $K_n^r = \emptyset \ \forall\ n \geq r$, lo cual nos dice que $\bigcup_{n<\omega} K_n^r$ es finito para todo $r < \omega$.

Dado que $A_\xi \cap B_{\zeta(n+1)}$ es finito para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B_{\zeta(n+1)} \setminus B_{\zeta(n)} \subset A_\xi^c \setminus B_{\zeta(n)}$. Ahora bien, $A_\xi^c \setminus B_{\zeta(n)} \subset A_\xi^c \setminus \bigcup_{i \leq n} B_{\zeta(i)}$, ya que la sucesión de $B_{\zeta(i)}$ es casi creciente por hipótesis de inducción. Así pues, $A_\xi^c \setminus \bigcup_{i \leq n} B_{\zeta(i)}$ es infinito. De esta forma, puedo ir tomando elementos $e_i \in A_\xi^c \setminus \bigcup_{i \leq n} B_{\zeta(i)}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ de forma que construyo un conjunto $E = \{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ cuya intersección con $B_{\zeta(n)}$ es finita para todo natural, ya que, a partir del término n-ésimo, $e_n \notin B_{\zeta(n)}$.

Una vez tenemos esto, definimos $B_\xi := A_{xi}^c \setminus E$. En primer lugar, notemos que $B_{\zeta(n)} \subseteq^* B_\xi$ para todo n, ya que $A_\xi \cap B_{\zeta(n+1)}$ y $E \cap B_{\zeta(n)}$ siempre es finito. Además, $B_\xi \setminus B_{\zeta(n)}$ es infinito, pues contiene a un conjunto infinito: $B_{\zeta(n+1)} \setminus B_{\zeta(n)} \subseteq^* B_\xi \setminus B_{\zeta(n)}$.

Pasamos ahora a probar (b). Supongamos que existe $C \subseteq \mathbb{N}$ tal que $A_\xi \setminus C$ y $B_\xi \cap C$ son ambos finitos para todo $\xi < \omega_1$. Entonces,

$$\omega_1 = \bigcup_{n<\omega} \{\xi : B_\xi \cap C \subseteq n\}$$

Por tanto, existe $n < \omega$ tal que

$$H := \{\xi : B_\xi \cap C \subseteq n\}$$

tenemos que H es no numerable. Sea ahora $\xi \in H$ tal que $\xi \cap H$ es infinito. Por hipótesis, $A_\xi \setminus C$ es finito. Por tanto, existe $m < \omega$ tal que $A_\xi \setminus C \subseteq m$. Entonces

$$H \cap \xi \subseteq \{\eta : \eta < \xi, B_\eta \cap A_\xi \subseteq \text{máx}\{m, n\}\}$$

ya que dado $x \in B_\eta \cap A_\xi$, si $x \in C$, basta aplicar la definición de H. Si, por el contrario, $x \notin C$, entonces $A_\xi \setminus C \subseteq m$. Como $H \cap \xi$ es infinito y en el apartado (a) hemos probado que $\{\eta : \eta < \xi, B_\eta \cap A_\xi \subseteq r\}$ es finito para cualquier $r < \omega$, esto es una contradicción. Por tanto, no existe tal $C \subseteq \mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 3

Multiple Gaps

El objetivo de este capítulo es generalizar el concepto de familias no se paradas a una cantidad finita de ellas. De esta forma, introduciremos la noción de «gap-múltiple» como una generalización de la de gap. Una vez hecho esto, buscaremos un ejemplo de gap múltiple que sea, en cierto sentido, canónico; el cual estará relacionado con un resultado del capítulo anterior. Para llevar a cabo esto, nos basamos en el trabajo de Stevo Todorcevic y Antonio Avilés, y, más concretamente, en[2] y en [1].

3.1. Generalizando el concepto de gap

Comenzamos el capítulo estableciendo qué significa que una colección finita de familias de subconjuntos de $\mathbb{N}$ se diga separada o se pueda separar:

Definición 3.1. (De [1], pág. 9) Sea $\{\Gamma_i\}_{i<n}$ una colección finita de familias de subconjuntos de un cierto conjunto numerable $\mathbb{N}$. Diremos que estas familias **están separadas** o **se pueden separar** si existen $a_0, \ldots, a_{n-1}$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que

1. $x \subseteq^* a_i \quad \forall\, x \in \Gamma_i$.
2. $\bigcap_{i<n} a_i =^* \emptyset$.

Nota 3.2. Permitir errores finitos es crucial, puesto que en caso contrario, nuestra definición se reduciría a que $\bigcap_{i<n} \Gamma_i = \emptyset$. A modo de ejemplo, si fijamos $n = 2$ y tomáramos $z \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$, este cumpliría que $z \subseteq a_0 \cap a_1 = \emptyset$, luego $z = \emptyset$, es decir, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$. En consecuencia, estaríamos diciendo que tenemos dos familias disjuntas.

Dado que estamos tratando de generalizar el concepto de gap a una cantidad finita de familias cualquiera, es de esperar que esta última definición sea equivalente, en el caso $n = 2$, a la que dimos de dos familias separadas en el capítulo anterior. Así pues, a continuación probamos esta equivalencia, no sin antes recordar la definición bidimensional dada en el capítulo anterior:

Definición 2.5. (De [10]) Sean Γ_0 y Γ_1 familias de conjuntos de números naturales. Supongamos que existe $a \subseteq \mathbb{N}$ tal que $x \subseteq^* a$ y $a \perp y$ para todo $x \in \Gamma_0$ e $y \in \Gamma_1$. Diremos entonces que a **separa** Γ_0 y Γ_1 y que Γ_0 y Γ_1 **están separadas** o **se pueden separar**.

Proposición 3.3. *Si $n = 2$, las definiciones 2.5 y 3.1 son equivalentes.*

Demostración.

$\boxed{2.5 \Rightarrow 3.1}$

Supongamos que existe $a \subseteq N$ tal que $x \subseteq^* a$ para todo $x \in \Gamma_0$ y $a \cap y =^* \emptyset$ para todo $y \in \Gamma_1$. Sean $a_0 := a$ y $a_1 := a^c$. Evidentemente, $a_0 \cap a_1 = \emptyset$. Así mismo, dado $x \in \Gamma_0$, $x \subseteq^* a = a_0$, y, dado $y \in \Gamma_1$, $y \subseteq^* a^c = a_1$.

$\boxed{3.1 \Rightarrow 2.5}$

Sea ahora $a := a_0$. Dado $x \in \Gamma_0$, $x \subseteq^* a_0 = a$. Por otro lado, dado $y \in \Gamma_1$

$$y \cap a = y \cap a_0 \subseteq^* a_1 \cap a_0 =^* \emptyset \implies y \cap a =^* \emptyset. \qquad \square$$

Nota 3.4. La condición $a_0 \cap a_1 =^* \emptyset$ es irrelevante en el sentido de que la prueba también es válida si se cumpliera que $a_0 \cap a_1 = \emptyset$.

Del mismo modo que, en el caso $n = 2$, definíamos el concepto de gap negando la separación de dos familias ortogonales, para el caso $n > 2$ haremos lo propio. No obstante, hay una salvedad, y es que distinguiremos cuando las familias sean ortogonales dos a dos de cuando cumplan una condición más débil, caso de la siguiente definición:

Definición 3.5. (De [1], pág. 9) Una colección finita $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i<n}$ de familias de subconjuntos de N es un n_* -gap si

1. Si tomamos $x \in \Gamma_i$ para todo $i < n$, entonces $\bigcap_{i<n} x_i =^* \emptyset$.
2. Las familias $\{\Gamma_i\}_{i<n}$ no se pueden separar.
3. Cada familia es hereditaria, es decir, si $x \in \Gamma_i$ e y es un subconjunto de x, entonces $y \in \Gamma_i$.

Nota 3.6. Si eliminamos la última condición, esta definición es la misma que la de gap para dos familias ortogonales dada en el capítulo anterior.

Algo muy importante en esta definición es el hecho de permitir errores finitos al intersecar conjuntos de diferentes familias: la condición 1. Esto hace que nuestra definición no lleve a un absurdo. Supongamos que no permitiéramos errores finitos y que nuestra condición 1 fuera sustituida por la siguiente:

1'. Si tomamos $x_i \in \Gamma_i$ para todo $i < n$, entonces $\cap_{i<n} x_i = \emptyset$.

En estas condiciones, la familia de conjuntos $\{a_i\}_{i<n}$, donde $a_i = \cup\Gamma_i$, haría de separador. En efecto, $x_i \subseteq^* \cup\Gamma_i$ para todo $x_i \in \Gamma_i$, por definición de $\cup\Gamma_i$ (de hecho, el contenido es completo). Además, $\cap_{i<n}(\cup\Gamma_i) = \emptyset$, ya que $\cap_{i<n} x_i = \emptyset$. Por tanto, es esencial que la condición 1 permita errores finitos.

Esta primera y esencial condición de la definición de n_*-gap puede ser endurecida, como es el caso de la definición del concepto de n-gap:

Definición 3.7. (De [1], pág. 10) Un n-gap es un n_*-gap Γ en el que, además, las familias $\{\Gamma_i\}_{i<n}$ son ortogonales dos a dos.

Nótese que, en el caso $n = 2$, un n-gap y un n_*-gap son lo mismo, y se suele llamar simplemente gap.

3.2. Un ejemplo canónico

Nuestro propósito en esta sección, como su propio nombre indica, es el de dar con un n-gap canónico, un n-gap que se esconda tras cualquier otro. Para intentar dar respuesta a esto, vamos a comenzar definiendo una serie de conceptos, así como estableciendo una notación:

Al igual que, anteriormente, hemos trabajado con el árbol $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ de las sucesiones finitas de números naturales, ahora vamos a trabajar con el árbol de las sucesiones finitas de números naturales del 0 al $n-1$, el cual denotamos como $n^{<\omega}$ y llamamos **árbol n-ádico**. Consideraremos el orden *end-extension*, al igual que en temas anteriores.

Una vez fijada esta notación, pasamos a definir un concepto clave en esta sección, como es el de $[i]$-cadena:

Definición 3.8. Una cadena en el árbol n-ádico es un subconjunto $X \subseteq n^{<\omega}$ totalmente ordenado.

Un tipo especial de cadenas son las $[i]$-cadenas:

Definición 3.9. (De [1], pág. 12) Sea $0 \leq i < n$ número natural y sea $X \subseteq n^{<\omega}$. Diremos que X es una $[i]$-cadena si podemos escribir $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ de tal modo que $x_{k+1} = x_k^\frown i^\frown w_k$, donde $\max\{w_k\} \leq i$.

Definición 3.10. (De [1], pág. 12) Fijado $0 \leq i < n$, denotaremos a la colección de todas las $[i]$-cadenas del árbol n-ádico como C_i^n. Del mismo modo, definimos $C^n := \{C_i^n\}_{i<n}$ la familia de las colecciones de $[i]$-cadenas del árbol n-ádico.

Ejemplo 3.11. El conjunto

$$X = \{2, (2, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1)\}$$

es una [1]-cadena porque $X = \{x_0, x_1 x_2, x_3\}$, donde

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= x_0^\frown 1^\frown (0, 1) \\ x_2 &= x_1^\frown 1^\frown (0, 0, 0, 1, 0) \\ x_3 &= x_2^\frown 1^\frown \emptyset \end{aligned}$$

Recordemos que el árbol n-ádico es numerable, por lo que estamos en condiciones de preguntarnos si C^n se puede separar o no, ya que es una colección finita de familias de subconjuntos del árbol n-ádico. Así pues, vamos a probar que C^n no se puede separar. Previo a esto, veamos el siguiente lema:

Lema 3.12. *Si la familia C^n cumple que existen $a_0, \dots, a_{n-1}$ subconjuntos de $\mathbb{N}$ tales que $x \subseteq^* a_i$ para todo $x \in C_i^n$, entonces para todo $t \in n^{<\omega}$ existe $s > t$ tal que $s^\frown r \in a_i$ para todo $r \in \{0, 1, \dots, i\}^{<\omega}$ y para todo $0 \leq i < n$.*

Demostración. Supongamos, por el contrario, que existe $t \in n^{<\omega}$ tal que para todo $s > t$, $s^\frown r \notin a_i$ para cierto $r \in \{0, 1, \dots, i\}^{<\omega}$ y para cierto $0 \leq i < n$. Si encontrarmos una $[i]$-cadena que no esté casi contenida en a_i, habremos terminado, por contradicción. Tomamos, entonces, $t \in n^{<\omega}$ que cumpla lo arriba dicho. Defino $s_0 := t^\frown i$. Por tanto, existe $r_0 \in \{0, 1, \dots, i\}^{<\omega}$ de forma que $s_0^\frown r_0 \notin a_i$. Definimos entonces $s_1 := s_0^\frown r_0^\frown i$ y volvemos a repetir el proceso. De esta forma, mediante inducción, encontramos una $[i]$-cadena cuyos elementos no están en a_i, por lo que la $[i]$-cadena es disjunta con a_i, que es lo que buscábamos. □

Proposición 3.13. *La familia C^n no se puede separar.*

Demostración. Supongamos que la familia C^n se puede separar. Existen, entonces, $a_0, \dots, a_{n-1}$ subconjuntos de N de forma que $x \subseteq^* a_i$ para todo $x \in C_i^n$, con $\bigcap_{i<n} a_i =^* \emptyset$. En tal caso, en virtud del lema 3.12, para todo $t \in n^{<\omega}$ existe $s > t$ tal que $s^\frown r \in a_i$ para todo $r \in \{0, 1, \dots, i\}^{<\omega}$ y para todo $0 \leq i < n$. En particular, para todo $t \in n^{<\omega}$, existe s tal que $s^\frown 0 \in a_i$ para todo $0 \leq i < n$, es decir, para todo $t \in n^{<\omega}$, existe s con $s^\frown 0 \in \bigcap_{i<n} a_i$. Dado que $n^{<\omega}$ es numerable, queda probado que $\bigcap_{i<n} a_i$ es infinito, contradiciendo la hipótesis de la separación. □

Proposición 3.14. *La familia C^n es un n-gap.*

Demostración. Dados $i \neq j$, una $[i]$-cadena no puede ser una $[j]$-cadena, puesto que una vez se ha fijado el primer elemento en el orden, el siguiente elemento de la sucesión ha de contar con i. Así pues, la familia C^n es ortogonal dos a dos.

Por otro lado, cada familia de $[i]$-cadenas es infinitamente hereditaria, dado que todo subconjunto de una $[i]$-cadena es una $[i]$-cadena. La proposición 3.13 termina la prueba. □

El n-gap C^n es aquel que estábamos buscando. De hecho, recibe el nombre de n-gap **crítico** porque cualquier otro n-gap analítico lo contiene. Este resultado, el cual no probamos por su gran extensión, es el siguiente:

Teorema 3.15. *(De [2], p. 70) Sea $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i<n}$ una colección de familias hereditarias y analíticas en $\mathbb{N}$ que no están separadas. Entonces, existe una función inyectiva $u : n^{<\omega} \to \mathbb{N}$ y una permutación $\epsilon : n \to n$ tal que $u(C_i^n) \subseteq \Gamma_{\epsilon(i)}$ para todo $i < n$, es decir, tal que $u(x) \in \Gamma_{\epsilon(i)}$ para toda $[i]-$cadena x, con $i < n$.*

No obstante, como dijimos al comienzo de este capítulo, el teorema que acabamos de enunciar tiene relación con un resultado del tema anterior. Más concretamente, en su versión $n = 2$ es consecuencia del teorema 2.24. Así, nuestro propósito en las próximas líneas es demostrar esto. Comencemos con el siguiente resultado:

Teorema 3.16. *(De [2], p. 70) Sean Γ_0, Γ_1 familias hereditarias analíticas en $\mathbb{N}$ tales que Γ_1 es analítica y no está numerablemente generada en $\Gamma_0^\perp$. Entonces, existe una función inyectiva $u : 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$ tal que $u(x_i) \in \Gamma_i$ para toda $[i]$-cadena x, $i = 0, 1$.*

Demostración. El teorema 2.24 afirma que, en estas condiciones, existe un Γ_0-árbol cuyas ramas están en Γ_1, es decir, existe una familia $\Sigma \subseteq [\mathbb{N}]^{<\omega}$ tal que

1. $\emptyset \in \Sigma$.
2. $\Sigma_a := \{k \in \mathbb{N} : a \cup \{k\} \in \Sigma\}$ es un conjunto infinito que está en Γ_0.
3. Si $\{a_n\}_{n<\omega} \subseteq \Sigma$, con $a_0 \subset a_1 \subset \cdots$, entonces $\bigcup_{i<\omega} a_i \in \Gamma_1$.

Vamos a definir de manera inductiva la función $u : 2^\omega \to \mathbb{N}$, junto con una función $a : 2^{<\omega} \to \Sigma$, de forma que $u(s) \in \Sigma_{a(s)}$:

- $a(\emptyset) = \emptyset$ y $u(\emptyset)$ es un elemento cualquiera de $\Sigma_\emptyset$.
- Dado $s \in 2^{<\omega}$, definimos $a(s^\frown 0) := a(s)$ y $a(s^\frown 1) := a(s) \cup \{u(s)\}$. Notemos que $a(s^\frown 1) \in \Sigma$, porque $u(s) \in \Sigma_{a(s)}$. Del mismo modo, $u(s^\frown 0)$ se define como un elemento de $\Sigma_{a(s^\frown 0)} = \Sigma_{a(s)}$ diferente de los $u(t)$ anteriormente elegidos. Finalmente, definimos $u(s^\frown 1)$ como un elemento de $\Sigma_{a(s^\frown 1)}$ diferente de los $u(t)$ anteriormente elegidos.

En estas condiciones, tenemos que:

- Si $x = \{s_0, s_1, \dots\}$ es una [0]-cadena en $2^{<\omega}$, entonces $a(s_i) = a(s_0)$ para todo $i < \omega$ (solo añadimos ceros). En consecuencia, $\{u(s_0), u(s_1), \dots\} \subset \Sigma_{a(s_0)}$, por lo que $u(x) = \{u(s_0), u(s_1), \dots\} \subset \Sigma_{a(s_0)} \in \Gamma_0$. Como Γ_0 es hereditaria, $u(x) \in \Gamma_0$.
- Si $x = \{s_0, s_1, \dots\}$ es una [1]-cadena en $2^{<\omega}$, entonces $a(s_0) \subset a(s_1) \subset \cdots$ y $u(x) = \{u(s_0), u(s_1), \dots\}, \subset \bigcup_{i<\omega} a(s_i) \in \Gamma_1$, debido a que $u(s_i) \subset a(s_i^\frown 1) \subset a(s_{i+1})$. Por tanto, como Γ_1 es hereditaria, $u(x) \in \Gamma_1$.
- Finalmente, u es inyectiva porque en cada paso nos aseguramos de que $u(t)$ es diferente de todos los valores anteriores elegidos de u. □

En la prueba de este resultado hemos hecho uso del teorema 2.24. Del mismo modo, para probar el teorema en su versión $n = 2$, vamos a hacer uso del teorema que acabamos de probar. Así, el teorema en su versión $n = 2$ es consecuencia del teorema 2.24:

Teorema 3.17. *(De [2], p. 70) Sean $\Gamma = \{\Gamma_i\}_{i<2}$ dos familias hereditarias analíticas en $\mathbb{N}$ que no están separadas. Entonces, existe una función inyectiva $u : 2^{<\omega} \to \mathbb{N}$ y una permutación $\epsilon : 2 \to 2$ tal que $u(C_i^2) \subseteq \Gamma_{\epsilon(i)}$ para todo $i < 2$, es decir, tal que $u(x) \in \Gamma_{\epsilon(i)}$ para toda $[i]-$cadena x, con $i < 2$.*

Demostración. Si probamos que, o bien Γ_0 no está numerablemente generado en $\Gamma_1^{\perp}$, o bien Γ_1 no está numerablemente generado en $\Gamma_0^{\perp}$, podremos aplicar el teorema 3.16 y quedaría probado, con la permutación $\epsilon = Id$.

Supongamos, por el contrario, que ambas familias están numerablemente generadas en el ortogonal de la otra. En virtud de esto, existen $\{x_n\}_{n<\omega}$ e $\{y_n\}_{n<\omega}$ sucesiones en $\Gamma_0^{\perp}$ y $\Gamma_1^{\perp}$, respectivamente, de forma que todo elemento de Γ_1 (Γ_0 resp.) está casi contenido en un determinado elemento de la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ ($\{y_n\}_{n<\omega}$, resp.) Así mismo, podemos suponer las sucesiones crecientes, como hicimos en pruebas anteriores. Sean ahora

$$x = \bigcup_{k<\omega}(x_k \setminus y_k) \qquad y = \bigcup_{k<\omega}(y_k \setminus x_k)$$

Afirmamos que x e y separan Γ_1 y Γ_0. Para que esto ocurra, en primer lugar, debe cumplirse que $x \cap y =^* \emptyset$. Ahora bien:

$$\begin{aligned} x \cap y &= (\bigcup_{k<\omega} x_k \setminus y_k) \cap (\bigcup_{l<\omega} y_l \setminus x_l) = \bigcup_{k,l<\omega}(x_k \setminus y_k) \cap (y_l \setminus x_l) \\ &= \bigcup_{k,l<\omega} x_k \cap y_k^c \cap y_l \cap x_l^c = \bigcup_{l<k<\omega} x_k \cap y_k^c \cap y_l \cap x_l^c = \emptyset \end{aligned}$$

donde las dos últimas igualdades se da gracias a que son sucesiones crecientes. Resta probar que $\gamma_0 \subseteq^* y$ para todo $\gamma_0 \in \Gamma_0$ y que $\gamma_1 \subseteq^* x$ para todo $\gamma_1 \in \Gamma_1$. Comprobaremos tan solo el segundo, ya que el otro es análogo. Sea, pues, $\gamma_1 \in \Gamma_1$. Como Γ_1 está numerablemente generado en $\Gamma_0^{\perp}$, existe $k_o < \omega$ tal que $\gamma_1 \subseteq^* x_{k_0}$. Por otro lado, como

$\{y_n\}_{n<\omega} \subset \Gamma_1^{\perp}$, tenemos, en particular, que $y_{k_0} \cap \gamma_1 =^* \emptyset$, es decir, $\gamma_1 \subseteq^* y_{k_0}^{\mathsf{c}}$. En suma, $\gamma_1 \subseteq^* x_{k_0} \cap y_{k_0}^{\mathsf{c}} = x_{k_0} \setminus y_{k_0}$, por lo que

$$\gamma_1 \subseteq^* \bigcup_{k<\omega} (x_k \setminus y_k) = x$$

En conclusión, hemos encontrado una separación para nuestras familias, algo que contradice las hipótesis. □

Nota 3.18. Notemos que en estas dos últimas demostraciones no aparece la hipótesis de la ortogonalidad de las familias, algo necesario para poder aplicar el teorema 2.24. No obstante, lo que ocurre es que si nuestras familias no fueran ortogonales, bastaría enviar mediante la aplicación u el árbol diádico al conjunto infinito perteneciente a la intersección de ambas familias. De esta forma, tanto las [0]-cadenas como las $[i]$-cadenas estarían contenidas en nuestras familias mediante u.

Apéndices

Apéndice A

Ordinales

A.1. Relaciones de orden

Establecemos una serie de definiciones que utilizamos a lo largo del trabajo y del apéndice:

Definición A.1. (De [6], pags. 69, 77 y 78) Sea R una relación binaria en A, es decir, un subconjunto del producto cartesiano $A \times A$

- Decimos que R es **reflexiva** en A si para todo $a \in A$ se tiene que aRa.
- Decimos que R es **antisimétrica** en A si para todo $a, b \in A$, aRb y bRa implica $a = b$.
- Decimos que R es **transitiva** en A si para todo $a, b, c \in A$ se tiene que aRb y bRc implica aRc.
- Decimos que R es **asimétrica** en A si para todo $a, b \in A$, aRb implica que no ocurre bRa. Es decir, a y b no pueden ser ambos elementos de R.

Definición A.2. (De [6], pag. 77) Una relación R en A que es reflexiva, antisimétrica y transitiva se llama **orden (parcial)** en A. El par (A, R) recibe el nombre de conjunto (parcialmente) ordenado. Denotaremos usualmente por '$\leq$' a los órdenes.

Definición A.3. (De [6], pag. 78) Una relación S en A que es asimétrica y transitiva se llama **orden estricto** en A. Denotaremos usualmente por '<' a los órdenes estrictos.

Teorema A.4. *(De [6], pag. 78)*

- *Sea R un orden en A. Entonces, la relación S definida en A por aSb si y solo si aRb y $a \neq b$ es un orden estricto en A.*
- *Sea S un orden estricto en A. Entonces, la relación R definida en A por aRb si y solo si aSb o $a = b$ es un orden en A.*

Este teorema nos dice que los órdenes y los órdenes estrictos se corresponden de manera mutua, es decir, dado un orden, podemos construir un orden estricto, y viceversa.

Definición A.5. (De [6], pag. 79) Sean $a, b \in A$ y sea $\leq$ un orden en A. Diremos que a y b son comparables en el orden $\leq$ si

$$a \leq b \quad \text{o} \quad b \leq a$$

Definición A.6. (De [6], pag. 79) Sean $a, b \in A$ y sea $<$ un orden estricto en A. Diremos que a y b son comparables en el orden estricto $<$ si

$$a < b, \quad a = b \quad \text{o} \quad b \leq a$$

Definición A.7. (De [6], pag. 79) Un orden (estricto) $\leq$ ($<$) es llamado **lineal** o **total** si para todo $a, b \in A$, a y b son comparables en tal orden.

Definición A.8. (De [6], pag. 80) Sea $\leq$ un orden en A y sea $B \subseteq A$.

- $b \in B$ es el **elemento mínimo (primer elemento)** de B en el orden $\leq$ si para todo $x \in B$, $b \leq x$.
- $b \in B$ es el **elemento máximo** de B en el orden $\leq$ si para todo $x \in B$, $x \leq b$.

Definición A.9. (De [6], pag. 98) Decimos que un conjunto x es **transitivo** si para todo $y \in x$, y es un subconjunto de x, es decir, $y \subseteq x$.

Definición A.10. (De [6], pag. 85) Un conjunto parcialmente ordenado $(W, \leq)$ se llama **bien ordenado** si cada subconjunto no vacío $B \subseteq W$ tiene elemento mínimo. En tal caso al orden '$\leq$' se le llama **buen orden**.

Nota A.11. Notar que cualquier conjunto bien ordenado $(W, \leq)$ es totalmente ordenado, ya que el par $\{a, b\}$ tiene elemento mínimo para todo $a, b \in W$.

A.2. Ordinales

A.2.1. Motivación y definición

Definición A.12. (De [6], pag. 98) Un conjunto x es un **número natural** si cumple las siguientes condiciones:

- x es transitivo.
- La relación de pertenencia restringida a x ($\in_x$) es un orden lineal estricto en x.
- Todo subconjunto no vacío de x tiene elementos mínimo y máximo en el orden $\in_x$.

Un número natural n es el conjunto

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

Denotaremos al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ por ω, es decir,

$$\omega = \{0, 1, \dots, n-1, n, \dots\}$$

'Podemos pensar que ω es el primer «número» más grande que cualquier natural'. [1] Para ir generando «números», recurrimos a la operación de sucesor, teniendo

$$S(\omega) = w \cup \{w\} = \{0, 1, \dots, n-1, n, \dots, \omega\}$$

[1] Así se introducen los ordinales de manera intuitiva en el capítulo 9 de [6]

Utilizando la convención $\omega + 1 := S(\omega)$, obtenemos que

$$\omega + 2 := \{0, 1, \dots, n-1, n, \dots, \omega, S(\omega)\} = S(S(\omega)) = S(\omega + 1) = (\omega + 1) + 1$$

Del mismo modo que ocurría con los números naturales, tenemos ahora una serie de números $0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n, \dots$. Podemos proceder de manera análoga y construir el primer «número» más grande que todos estos, que sería el siguiente conjunto:

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega = \{0, 1, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega + n, \dots\}$$

Esta construcción puede continuar, dando lugar a $\omega \cdot n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e incluso a $\omega \cdot \omega$.

Cabe resaltar que todos estos conjuntos poseen todas las condiciones establecidas en la Definición A.12 por la manera en la que los hemos construido, salvo la tercera, ya que no están acotados superiormente. En otras palabras, son transitivos y están linealmente ordenados por

$$x < y \iff x \in_z y \quad \forall\, x, y \in z$$

Esta serie de consideraciones motivan la siguiente definición:

Definición A.13. (De [6], pag. 218) Un conjunto x es un **número ordinal** u **ordinal** si:

- x es transitivo.
- x es bien ordenado por $\in_x$.

Ejemplo A.14. Todo número natural es un ordinal y w es un ordinal.

A.2.2. Propiedades de los ordinales

Dado α ordinal, como hicimos de manera intuitiva en la presentación de los ordinales, definimos su sucesor como $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$, y lo denotaremos por $\alpha + 1$. En tal caso, el sucesor de un ordinal también es un ordinal:

Proposición A.15. *(De [6], pag. 218) Si α es un número ordinal, entonces $S(\alpha)$ también es un ordinal.*

Distinguimos ahora entre dos tipos de ordinales. Si bien todo número natural es un ordinal, así como lo es ω, existe una diferencia sustancial entre ellos, y es que, así como todo número natural n distinto de cero tiene un predecesor, $(n-1)$, esto no ocurre con w.

Definición A.16. (De [6], pag. 219) Un ordinal α se llama **ordinal sucesor** si para algún ordinal β se tiene que $\alpha = \beta + 1$. Si no existe tal β, α recibe el nombre de **ordinal límite**.

Ejemplo A.17.

- Los números naturales distintos de cero, $\omega + 1$ y $\omega + 747$ son ordinales sucesores.
- 0, ω, $\omega \cdot 2$ son ordinales límite.

Definición A.18. Para ordinales α y β ordinales definimos

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta$$

Nota A.19. Este orden estricto podemos extenderlo de manera natural a

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \in \beta \quad o \quad \alpha = \beta$$

como dice el Teorema A.4.

Proposición A.20. *(De [6], pag. 220) Dado X conjunto de ordinales, el conjunto $\bigcup X$ es un número ordinal. Además, es el mínimo ordinal mayor o igual que todos los elementos de X.*

Esta proposición justifica la siguiente definición:

Definición A.21. (De [6], pag. 220) Sea X conjunto de ordinales. Entonces:

$$\sup X := \bigcup X$$

Del mismo modo que con los números naturales tenemos el Principio de Inducción, con los ordinales tenemos el Principio de Inducción Transfinita:

Teorema A.22 (Principio de Inducción Transfinita)**.** *(De [6], pag. 227) Sea $P(x)$ una propiedad. Supongamos que:*

- *$P(0)$ se cumple.*
- *$P(\alpha)$ implica $P(\alpha+1)$ para todos los ordinales α.*
- *Para todo ordinal límite $\alpha \neq 0$, si $P(\beta)$ se cumple para todo $\beta < \alpha$, entonces $P(\alpha)$ se cumple.*

Entonces, $P(\alpha)$ se cumple para todos los ordinales α.

Lema A.23. *Sea $\xi < \omega_1$ ordinal límite. Entonces, existe $\{\zeta(n)\}_{n<\omega}$ sucesión de ordinales tales que* $\sup\{\zeta(n)\}_{n<\omega} = \xi$.

Demostración. Como ξ es numerable, tenemos que $\xi = \{\xi(0), \xi(1), \xi(2), \dots\}$. Definimos $\zeta(0) = 0$ y, por inducción $\zeta(n) := \text{mín}\{\alpha < \xi : \alpha > \text{máx}\{\zeta(n-1), \zeta(n)\}\}$. □

A.2.3. Ordinales Iniciales

Definición A.24. (De [6], pag. 246) Un número ordinal α se llama **ordinal inicial** si no es equipotente a ningún $\beta < \alpha$.

Ejemplo A.25. Todos los números naturales son ordinales iniciales, así como ω. $\omega + 1$ no lo es. Tampoco lo son $\omega \cdot \omega$ ni ω^ω.

Teorema A.26. *(De [6], pag. 246) Todo conjunto bien ordenado es equipotente a un único ordinal inicial.*

Corolario A.27. *(De [6], pag. 246) El Axioma de Elección implica que todo conjunto es equipotente a un ordinal inicial.*

Definición A.28. (De [6], pag. 246) Dado X conjunto, se define el **cardinal** de X, al que denotaremos por $|X|$ como el único ordinal inicial equipotente a X.

Por tanto, acabamos de ver que los cardinales son ordinales iniciales.

Definición A.29. (De [6], pag. 247) Para cualquier conjunto A, sea $h(A)$ el mínimo número ordinal que no es equipotente a ningún subconjunto de A. Llamaremos a $h(A)$ el **número de Hartog** de A.

Proposición A.30. *(De [6], pag. 247) Para todo conjunto A, $h(A)$ es un ordinal inicial.*

Podemos definir entonces una 'escala' de números ordinales iniciales:

Definición A.31. (De [6], pag. 247)

$$\omega_0 = \omega;$$

$$\omega_{\alpha+1} = h(\omega_\alpha) \text{ para todo } \alpha;$$

$$\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta : \beta < \alpha\} \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ es un ordinal límite.}$$

En particular, ω_1 es el mínimo número ordinal que no es equipotente a ningún subconjunto de ω, es decir, es el mínimo número ordinal no numerable.

Bibliografía

[1] Avilés, A. An introduction to multiple gaps. `http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/zr/25/zrn25p7-32.pdf`.

[2] Avilés, A., and Todorcevic, S. Finite basis for analytic multiple gaps. *Publications mathématiques de l'IHÉS 121* (2015), pp. 57–79.

[3] Camino, R. L. *Topología.* Editorial Universitaria de Granada, 2014.

[4] Fremlin, D. H. *Consequences of Martin's Axiom.* Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

[5] Galicki, A. Aspects of classical descriptive set theory. Tech. rep., 2013. Disponible en `https://arxiv.org/pdf/1308.6318.pdf`.

[6] Hernández, F. H. *Teoría de Conjuntos (una introducción).* Sociedad Matemática Mexicana, 1998.

[7] Jech, T. J. *Set Theory.* New York: Springer-Verlag, 2003.

[8] Kanamori, A. The emergence of descriptive set theory. In *From Dedekind to Gödel*, J. Hintikka, Ed., vol. 251. Springer Netherlands, 1995, pp. 241–262.

[9] Kechris, A. S. *Classical Descriptive Set Theory.* New York: Springer-Verlag, 1995.

[10] Todorcevic, S. Analytic gaps. *FUNDAMENTA MATHEMATICAE 150* (1996), pp. 55–66.