



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD DE MURCIA

MÁSTER EN MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

# Modelos Dinámicos en Biología y Economía

---

**Autor:** Antonio Juárez Martínez

**Trabajo dirigido por:** Francisco Balibrea Gallego

**Curso:** 2016/2017

---



Antonio Juárez Martínez, autor del TFM:

## MODELOS DINÁMICOS EN BIOLOGÍA Y ECONOMÍA

bajo la tutela del profesor Francisco Balibrea Gallego, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 12 de Junio de 2017

(Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración)



---

“There’s real poetry in the real world. Science is the poetry of reality.”

— Richard Dawkins

“The nitrogen in our DNA, the calcium in our teeth, the iron in our blood, the carbon in our apple pies were made in the interiors of collapsing stars. We are made of starstuff.”

— Carl Sagan, *Cosmos: A Personal Voyage*



---

---

# Índice general

<b>Introducción</b> .....	<b>III</b>
<b>1 Introducción a los Sistemas Dinámicos</b> .....	<b>1</b>
<b>1.1 Teoría Cualitativa</b> .....	<b>2</b>
1.1.1 Puntos singulares de sistemas bidimensionales .....	2
1.1.2 Conjugación .....	8
1.1.3 Estabilidad .....	10
<b>1.2 Sistemas Dinámicos Discretos</b> .....	<b>24</b>
<b>2 Modelos Biológicos</b> .....	<b>33</b>
<b>2.1 Modelo de Lotka-Volterra</b> .....	<b>35</b>
2.1.1 Efectos de la pesca sobre el modelo .....	41
2.1.2 Efectos de competición interna de las especies .....	42
2.1.3 Interacción de tres o más especies .....	48
<b>2.2 Modelos biológicos discretos</b> .....	<b>53</b>
<b>3 Modelos Económicos</b> .....	<b>57</b>
<b>3.1 Modelo de Goodwin</b> .....	<b>58</b>
3.1.1 Variables y parámetros del modelo .....	58
3.1.2 Suposiciones en el modelo de Goodwin .....	59
<b>3.2 Modelos económicos caóticos</b> .....	<b>63</b>
3.2.1 Comercio internacional .....	64

3.2.2 Acelerador no lineal de Goodwin .....	65
3.3 Modelo de Goodwin: caso discreto .....	67
<b>Anexos</b> .....	69
<b>Índice de figuras</b> .....	81
<b>Bibliografía</b> .....	84

---

---

# Introducción

En esta memoria, se busca dar a conocer la importancia de las Matemáticas en otras ramas de la Ciencia (tanto experimental como social) como son la Biología y la Economía. Asimismo, se intenta crear un puente de conexión entre varias asignaturas vistas en el grado en Matemáticas y en el propio Máster de Matemática Avanzada tales como la Modelización y las asignaturas relacionadas con las Ecuaciones Diferenciales y los Sistemas Dinámicos, en especial el curso optativo de Teoría Cualitativa para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Todos conocemos la importancia que tienen las Matemáticas hoy día en cualquier situación de la vida real. En las tarjetas de crédito de los bancos, los códigos de barras, toda la tecnología, videojuegos, arquitectura y un gran repertorio de aplicaciones más hay siempre algún resultado matemático detrás. Con el creciente uso del ordenador a partir de la Segunda Guerra Mundial, la resolución de algoritmos que hasta la fecha se habían desarrollado a mano encontró un gran aliado en las computadoras produciéndose avances en modelización y simulación.

A modo de ejemplo, un terremoto o un tsunami son experiencias que no pueden reproducirse experimentalmente a nuestro antojo. Si queremos acercarnos a estos fenómenos de la naturaleza debemos modelizarlos matemáticamente utilizando las leyes de la Física que sean convenientes y después testar el modelo con una simulación por ordenador.

El trabajo se estructura en tres capítulos principales y un anexo.

En el primer capítulo trataremos de hacer un resumen de la parte matemática que nos servirá para estudiar los modelos biológicos y económicos más adelante. Nos guiaremos por [8] para algunos resultados relevantes sobre la Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales, tratando los conceptos de conjugación y estabilidad en un sistema autónomo.

En el segundo capítulo, estudiaremos en profundidad el modelo depredador-presa de Lotka-Volterra tomando como referencia [1]. Se hará un breve resumen histórico del problema para ver de dónde surgió la idea que lleva detrás y analizaremos resultados importantes sobre el sistema tradicional (2.2), demostrando que las órbitas que se obtienen en el retrato de fases son cerradas y periódicas.

Tras ello, modificaremos el modelo para añadir algunos efectos importantes a las

poblaciones de depredadores y presas y ampliaremos el modelo para estudiar un caso particular en tres dimensiones.

Además, al no tener el sistema una solución analítica, se usará también el software matemático para apoyarnos en nuestras conclusiones. Por ello, se hará uso de Easy Java Simulations ([3]) y PPlane ([11]).

Todo lo anterior es relativo a sistemas continuos. La última parte de este capítulo estará destinada a ver algunos casos discretos relacionados con la dinámica de poblaciones. En especial, analizaremos en parte el artículo [15] donde se plantea un modelo logístico discreto y veremos como en dicho artículo se desmonta con contraejemplos varios resultados referidos a otro artículo publicado con anterioridad a éste.

En el tercer capítulo, dejaremos la Biología a un lado para pasarnos a las Ciencias Sociales por un momento, en concreto a la Economía. Aquí, estudiaremos el modelo económico de Goodwin tomando como principal referencia [10]. Presentaremos las variables y parámetros de este modelo y veremos que a fin de cuentas las ecuaciones que resultan son las mismas que las del modelo de Lotka-Volterra. Además, se desarrollarán varios modelos económicos caóticos basados en el Capítulo 5 de [10]. Nuevamente, utilizaremos Easy Java Simulations para apoyarnos en la visualización e interpretación de los resultados.

Al finalizar este capítulo, veremos la versión discreta del modelo apoyándonos en [13], viendo alguna aplicación de la teoría de Sistemas Dinámicos Discretos.

Por último, para finalizar el trabajo el lector podrá indagar más en dos modelos un tanto curiosos cuyas ecuaciones son un tanto parecidas a las planteadas en los modelos antes mencionados.

Un primer modelo, busca representar el amor como una lucha entre dos partes. Para ello, estudiaremos el caso particular de Laura y Petrarca, dos personajes históricos cuya relación interpersonal sirve para modelizar lo propuesto.

Un segundo caso histórico, pretende representar cómo varía el número de soldados cuando dos fuerzas enemigas luchan en una batalla. Así desarrollaremos el modelo y después veremos que se puede ajustar bastante a la realidad considerando para tal fin el caso de la batalla de Iwo Jima.

---

---

## Introducción a los Sistemas Dinámicos

### Capítulo 1: Contenido

<b>1.1</b>	<b>Teoría Cualitativa</b>	<b>2</b>
1.1.1	Puntos singulares de sistemas bidimensionales	2
1.1.2	Conjugación	8
1.1.3	Estabilidad	10
<b>1.2</b>	<b>Sistemas Dinámicos Discretos</b>	<b>24</b>

---



EN este capítulo introductorio, se van a exponer de forma breve algunos resultados concernientes a la teoría de los sistemas dinámicos. Se hará bastante hincapié en la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales mostrando a su vez algunos ejemplos bastante ilustrativos del poder que pueden llegar a tener las Matemáticas incluso en casos en los que la resolución de un problema no puede hacerse de forma analítica.

Tras ello, haremos lo propio para los sistemas dinámicos discretos aunque de forma más reducida.

## 1.1 Teoría Cualitativa

En esta sección, vamos a basarnos en algunas partes de [6], [8] y en los apuntes del curso de Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias del cuarto curso del grado en Matemáticas por la Universidad de Murcia.

El último curso comentado comenzaba tratando las ecuaciones lineales con coeficientes constantes viendo algunos conceptos como el de exponencial de un operador lineal y cuál es la solución general para este tipo de ecuaciones. Tras ello, se vio el concepto de conjugación y se dio un repaso y ampliación de la teoría fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Dentro de esta teoría, se prestó especial atención a la existencia y unicidad de soluciones, a la prolongación de éstas y a la dependencia respecto a condiciones iniciales y parámetros. Así se estudiaron teoremas muy importantes tales como el de Picard o el de Peano.

Una vez completado este repaso, se introdujeron los campos de vectores y los flujos y por último se paso a ver la estabilidad.

En lo que resta de sección, veremos los resultados más importantes relativos a conjugación y estabilidad, pero antes de meternos de lleno en ello, estudiemos el concepto de punto singular y veamos cómo podemos clasificarlos en el caso particular de sistemas lineales bidimensionales ya que son estos sistemas los que estudiaremos en los capítulos siguientes.

### 1.1.1 Puntos singulares de sistemas bidimensionales

#### Definición 1.1

Dado el sistema  $\dot{x} = f(x)$ , se dice que un punto  $x_0$  es de equilibrio o singular si  $f(x_0) = 0$ .

Sea  $x' = Ax$  con  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  con  $\det(A) \neq 0$  (por tanto el origen será el único punto singular). Denotaremos por  $\text{tr}(A)$  a la traza de la matriz  $A$ .

Manipulando algebraicamente, se puede calcular el polinomio característico que resulta ser

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

lo que conlleva que los valores propios sean:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(A) \pm \sqrt{\operatorname{tr}(A)^2 - 4\det(A)}}{2}$$

Dependiendo de los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ , tenemos distintas posibilidades (nótese que al ser  $\det(A) \neq 0$  ninguno de los dos puede ser 0):

- a) Ambos son reales y distintos.
- b) Ambos son reales e iguales.
- c) Son complejos (y conjugados por tanto).

Comencemos viendo el comportamiento del sistema para el caso a). En este caso, toda solución del sistema  $y' = Jy$  sería combinación lineal de  $e^{\lambda_1 t}$  y  $e^{\lambda_2 t}$ , donde  $J$  es la matriz de Jordan que tiene a los valores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en su diagonal y el resto ceros. Por tanto, la solución de  $x' = Ax$  se obtiene de la forma  $x = P^t y$  con  $P^t = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$  donde denotamos por  $v_i = (v_{i1}, v_{i2})$  a los vectores propios correspondientes a los valores propios  $\lambda_i$  con  $i = 1, 2$ .

Así pues, la solución general del sistema sería

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$$

donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes.

Dentro de este caso, podemos distinguir tres subcasos:

- i)  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

Si  $c_1 = 0$ , entonces  $x(t)$  es una **semirrecta**. Si  $c_1 \neq 0$ , entonces tenemos un **nodo atractivo**.

- ii)  $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$

Caso similar al anterior, pero ahora obtenemos un **nodo repulsivo**.

- iii)  $\lambda_2 > 0 > \lambda_1$

En este caso, se obtiene un **punto silla**.

En el caso b), teníamos un valor propio real doble  $\lambda$ .

Distingamos dos casos:

i)  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 2$ , donde  $\text{Ker}$  denota el núcleo.

La matriz de Jordan tendría  $\lambda$  en la diagonal y cero fuera. Por tanto, es el mismo caso que antes considerando  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Se obtiene por tanto, un nodo atractivo si  $\lambda < 0$  y un nodo repulsivo en caso contrario. Este tipo de nodo también se puede denominar **nodo propio**.

ii)  $\dim \text{Ker}(A - \lambda I) = 1$

Ahora la matriz de Jordan sería  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$

y una solución de  $y' = Jy$  es  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$  con

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_1 e^{\lambda t} \\ y_2(t) &= c_1 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t} \end{aligned}$$

por lo que la solución para el sistema original sería

$$x(t) = e^{\lambda t} (c_1 v_1 + (c_2 + t c_1) v_2)$$

donde esta vez se han escogido  $v_1$  y  $v_2$  de forma que el primero no pertenezca al núcleo de  $A - \lambda I$  y el segundo sí lo haga.

Finalmente distinguimos dos subcasos. Si  $c_1 = 0$ ,  $x(t)$  forma una semirrecta de dirección  $v_2$ .

En caso contrario, se obtiene lo que se denomina **nodo impropio**, que dependiendo de si  $\lambda$  es positivo o negativo, puede ser repulsivo o atractivo respectivamente.

Ya solo resta analizar el caso c), en el que tenemos dos valores propios complejos conjugados. Denotémoslos por  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ .

Se tiene entonces que la matriz canónica de Jordan  $J$  en este caso es  $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

y la solución de  $y' = Jy$  vendrá dada por  $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$  con

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t} (c_1 \cos t\beta - c_2 \sin t\beta) \\ y_2(t) &= e^{\alpha t} (c_1 \sin t\beta + c_2 \cos t\beta) \end{aligned}$$

por lo que haciendo como en los casos anteriores  $x = P^t y$ , donde los vectores  $v_1$  y  $v_2$  que forman las columnas de  $P^t$  forman una base respecto la cual  $A$  tiene la forma  $J$ , y

utilizando el cambio de variable

$$\begin{aligned}\phi_1 &= v_1 \cos(t\beta) + v_2 \sin(t\beta) \\ \phi_2 &= -v_1 \sin(t\beta) + v_2 \cos(t\beta)\end{aligned}$$

se llega a que

$$x(t) = (c_1\phi_1 + c_2\phi_2)e^{\alpha t}$$

y finalmente, haciendo

$$\begin{aligned}c_1 &= \rho \cos(\omega) \\ c_2 &= \rho \sin(\omega)\end{aligned}$$

se deduce que  $c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = \rho(v_1 \cos(t\beta + \omega) + v_2 \sin(t\beta + \omega))$  y llegamos a que

$$x(t) = e^{\alpha t} \rho (v_1 \cos(t\beta + \omega) + v_2 \sin(t\beta + \omega))$$

El procedimiento anterior es simplemente un cambio a polares para poder así facilitar la interpretación de las soluciones.

En función del valor de  $\alpha$ , debemos distinguir tres casos:

i)  $\alpha = 0$

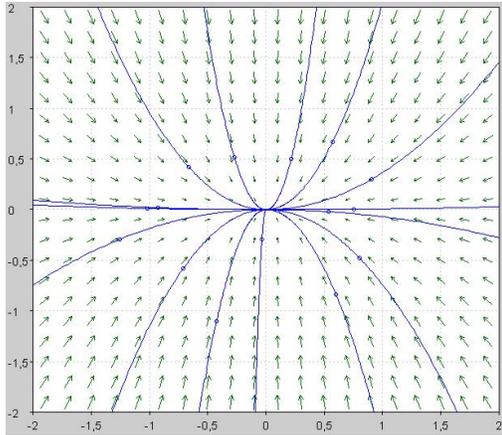
En este caso se obtiene lo que se conoce como **centro**, que no es otra cosa que elipses concéntricas alrededor del punto de equilibrio. De todos los casos que estamos considerando, este es el más importante ya que nos servirá en el resto de capítulos.

ii)  $\alpha > 0$

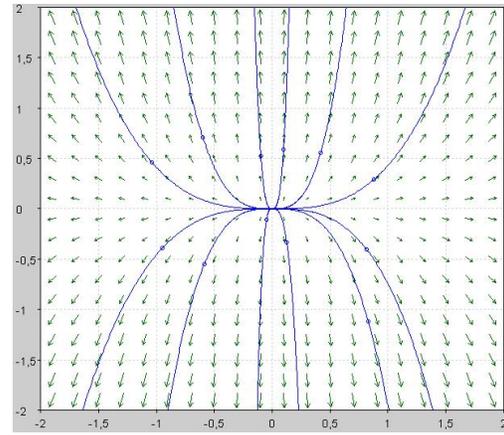
Se obtiene un **foco repulsivo**, una especie de espiral que se aleja cada vez más del punto en cuestión.

iii)  $\alpha < 0$

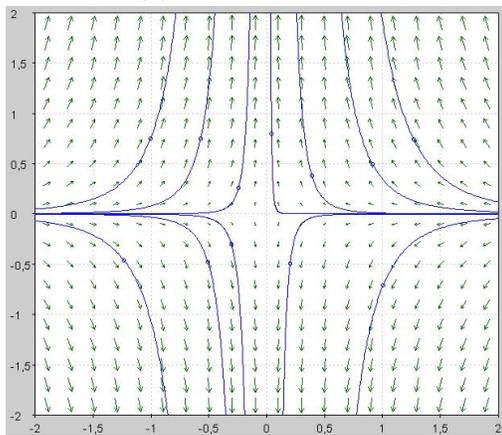
Se obtiene un **foco atractivo**, que es la espiral del caso anterior pero esta vez en vez de alejarse del punto, se acerca a medida que avanza el tiempo.



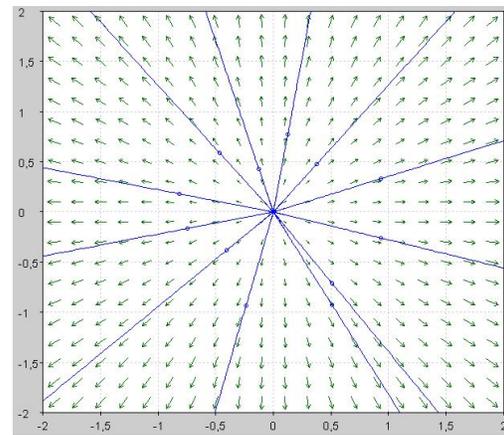
(a) Nodo atractivo



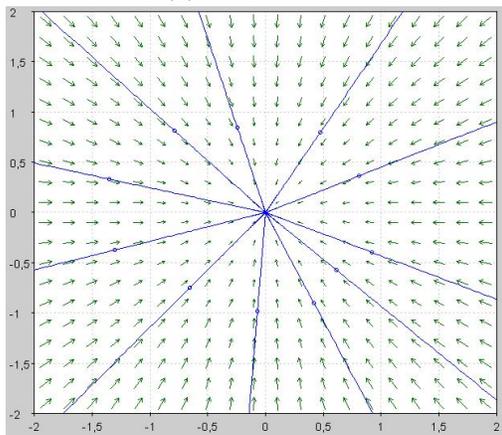
(b) Nodo repulsivo



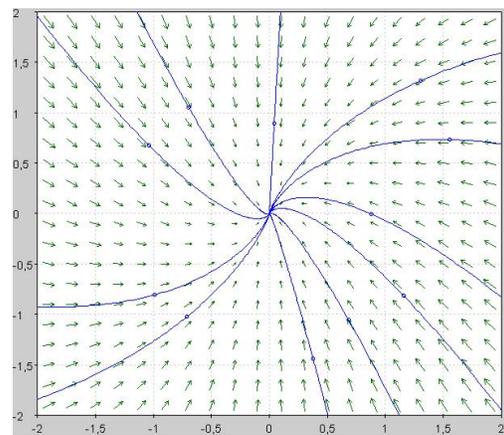
(c) Punto silla



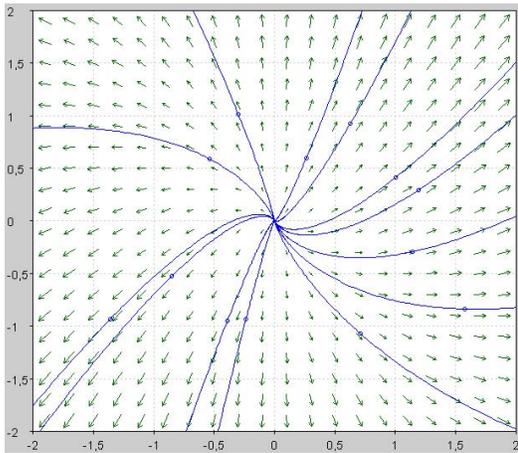
(d) Nodo propio repulsivo



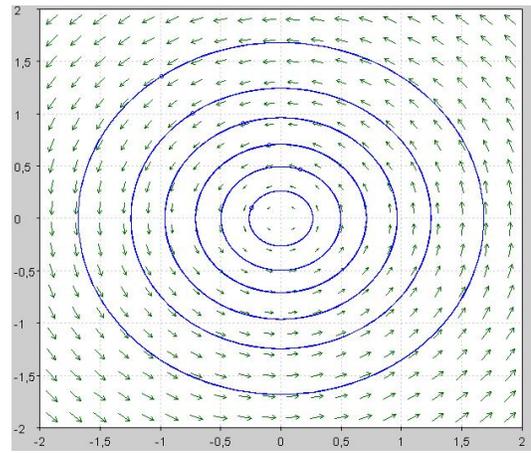
(e) Nodo propio atractivo



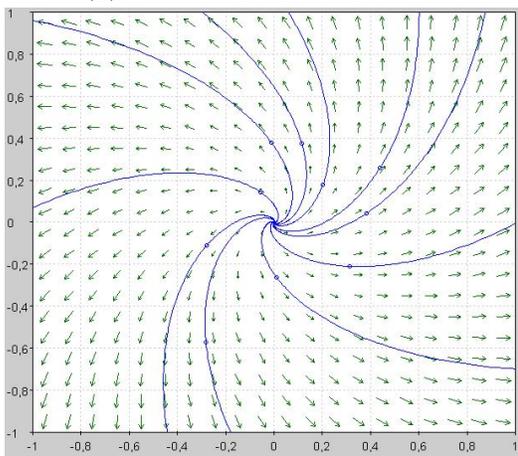
(f) Nodo impropio atractivo



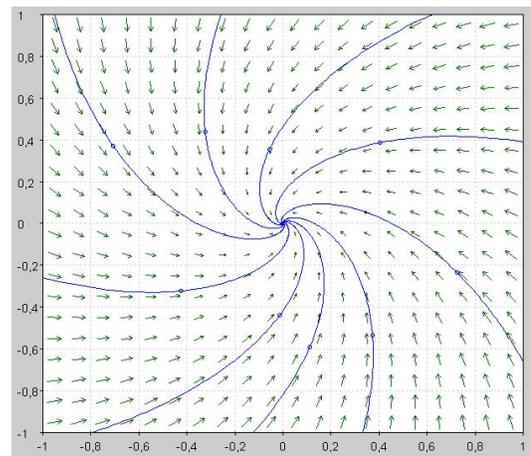
(g) Nodo impropio repulsivo



(h) Centro



(i) Foco repulsivo



(j) Foco atractivo

Figura 1.1: Clasificación de los puntos singulares en sistemas bidimensionales.

### 1.1.2 Conjugación

Hagamos un resumen basado en [8] de los resultados más importantes relativos a la conjugación topológica.

Dados los sistemas lineales  $y' = Ay$  e  $y' = By$  (con flujos  $e^{tA}y$  y  $e^{tB}y$  respectivamente), diremos que los sistemas son *conjugados* si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cumpliendo que  $h(e^{tA}y) = e^{tB}h(y)$  para cualquier  $t$  y cualquier  $y$ .

De forma intuitiva, la relación anterior nos dice que dos sistemas van a ser conjugados precisamente cuando podamos transformar uno en el otro mediante cambios continuos, de la misma forma que ocurre con dos figuras homeomorfas en Topología, es decir, si en esencia presentan la misma estructura y el mismo comportamiento.

Una vez establecida la definición de sistemas conjugados, cabe preguntarse si existe alguna caracterización basada en este concepto para los sistemas atractores y repulsores. La respuesta es afirmativa y los dos siguientes teoremas nos dan sendas caracterizaciones:

#### Teorema 1.1

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) El sistema  $y' = Ay$  es un atractor.
- ii) Todos los autovalores de  $A$  tienen parte real negativa.
- iii) Existen  $\lambda > 0$  y  $k > 0$  tales que  $\|e^{tA}y\| \leq ke^{-\lambda t}\|y\|$  si  $t \geq 0$  y  $\|e^{tA}y\| \leq k^{-1}e^{-\lambda t}\|y\|$  si  $t \leq 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$
- iv) El sistema es topológicamente conjugado a  $y' = -y$ .

#### Teorema 1.2

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) El sistema  $y' = Ay$  es un repulsor.
- ii) Todos los autovalores de  $A$  tienen parte real positiva.
- iii) Existen  $\lambda > 0$  y  $k > 0$  tales que  $\|e^{tA}y\| \leq ke^{-\lambda t}\|y\|$  si  $t \leq 0$  y  $\|e^{tA}y\| \leq k^{-1}e^{-\lambda t}\|y\|$  si  $t \geq 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}^n$
- iv) El sistema es topológicamente conjugado a  $y' = y$ .

Otro tipo de sistemas muy importante son los hiperbólicos, que son aquellos en los que los autovalores de  $A$  tienen parte real no nula. Denominaremos asimismo *índice de estabilidad* del sistema al número de autovalores con parte real negativa (contando multiplicidades). Así pues, tras el estudio del caso bidimensional hecho anteriormente en esta sección, podemos deducir que los sistemas que producen centros no son hiperbólicos, pero el resto sí, siendo el índice de estabilidad 1 para los sistemas de silla, 2 para los nodos y focos estables y 0 para los inestables.

### Teorema 1.3

Sea  $y' = Ay$  un sistema lineal hiperbólico con índice de estabilidad  $s$ . Entonces existen dos subespacios lineales de  $\mathbb{R}^n$ ,  $E^s$  y  $E^u$  satisfaciendo las siguientes propiedades:

- i)  $\dim E^s = s$ ,  $\dim E^u = n - s$  y  $\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$ , siendo la descomposición única.
- ii)  $e^{tA}y \in E^s \quad \forall y \in E^s$  y  $e^{tA}y \in E^u \quad \forall y \in E^u$  cualquiera que sea  $t \in \mathbb{R}$ .
- iii) Existen números  $\lambda > 0$  y  $k > 0$  tales que:

$$\|e^{tA}y\| \leq ke^{-\lambda t} \|y\|, t \geq 0 \quad \text{y} \quad \|e^{tA}y\| \geq k^{-1}e^{-\lambda t} \|y\|, t \leq 0 \quad \text{para} \quad y \in E^s$$

y

$$\|e^{tA}y\| \leq ke^{-\lambda t} \|y\|, t \leq 0 \quad \text{y} \quad \|e^{tA}y\| \geq k^{-1}e^{-\lambda t} \|y\|, t \geq 0 \quad \text{para} \quad y \in E^u$$

Los subespacios anteriores reciben respectivamente el nombre de *subespacio estable* y *subespacio inestable*. El Teorema (1.3) nos informa de cómo se comporta un sistema hiperbólico. En el subespacio estable,  $E^s$ , tendremos un atractor mientras que en el inestable habrá un repulsor. Las órbitas que pasen por puntos no pertenecientes a ninguno de estos dos subespacios tendrán una estructura de hipérbolas.

Otro resultado importante relativo a los sistemas hiperbólicos es el siguiente:

**Teorema 1.4**

Dados dos sistemas hiperbólicos, entonces serán topológicamente conjugados si y sólo si tienen el mismo índice de estabilidad. En particular, dado un sistema hiperbólico con índice  $s$  será topológicamente conjugado al sistema:

$$\begin{cases} y'_1 = -y_1, & y_1 \in \mathbb{R}^s \\ y'_2 = y_2, & y_2 \in \mathbb{R}^{n-s} \end{cases}$$

### 1.1.3 Estabilidad

Intuitivamente se entiende por estabilidad el fenómeno por el cual al perturbar ínfimamente un sistema, por ejemplo físico, éste recupera su anterior estado sin producirse grandes alteraciones. Al mover ligeramente un muelle de su posición de equilibrio o al trastocar un péndulo podemos experimentar este fenómeno. Nótese que en estos casos podemos conjeturar qué va ocurrir con el estado del sistema.

Sin embargo, cuando se habla de algo inestable ocurre lo contrario, es decir, no sabemos a priori qué puede pasar como por ejemplo cuando queremos informarnos de la predicción meteorológica para dentro de una semana. En el sistema atmosférico, una pequeña perturbación en algún parámetro del modelo que se esté considerando puede producir grandes cambios si se deja pasar mucho tiempo.

Matemáticamente, el concepto de estabilidad fue estudiado en el siglo XIX por el matemático ruso Aleksandr Lyapunov. Podemos distinguir dos métodos para estudiar la estabilidad de un sistema: el método de linealización (o de la primera aproximación) de Lyapunov y el método directo de Lyapunov. Siguiendo [8] y los apuntes del curso comentado al inicio de este capítulo, pasemos a ver algunos resultados y ejemplos sobre ambos métodos. Comencemos definiendo algunos conceptos útiles para nuestro fin:

**Definición 1.2**

Sea  $\Omega = J \times \mathbb{R}^n$  abierto con  $[0, +\infty) \subset J$  y sea  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $\mathcal{C}^1$ . Sea  $\varphi(t)$  una solución del sistema  $x' = f(t, x)$ , definida sobre  $[0, +\infty)$ . Se dice que:

1.  $\varphi(t)$  es *estable* si para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que si  $\Psi(t)$  es solución de  $x' = f(t, x)$  con  $\|\Psi(0) - \varphi(0)\| < \delta$  entonces  $\Psi(t)$  está definida al menos sobre  $[0, +\infty)$  y se verifica  $\|\Psi(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ .
2.  $\varphi(t)$  es *atractiva* (o un atractor) si existe  $\delta > 0$  tal que si  $\Psi(t)$  es solución de  $x' = f(t, x)$  con  $\|\Psi(0) - \varphi(0)\| < \delta$  entonces  $\Psi(t)$  está definida al menos sobre  $[0, +\infty)$  y se verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Psi(t) - \varphi(t)\| = 0$

3.  $\varphi(t)$  es *asintóticamente estable* si es estable y atractiva.

En particular, si  $x_0$  es solución de un sistema autónomo (punto crítico), las definiciones anteriores toman una forma especial.

El punto crítico  $x_0$  es estable si para todo entorno  $U$  de  $x_0$ , existe un entorno  $U_1$  de  $x_0$  tal que si  $y_0 \in U_1$  entonces  $x(t, y_0)$  está definida para todo  $t \geq 0$  y se verifica  $x(t, y_0) \in U$  para todo  $t \geq 0$ , donde  $x(t, a)$  denota la solución de  $x' = f(x)$  que en  $t = 0$  vale  $a$ .

Por otro lado,  $x_0$  es atractor si existe un entorno  $V$  de  $x_0$  tal que si  $y_0 \in V$  entonces  $x(t, y_0)$  está definida para todo  $t \geq 0$  y se verifica  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, y_0) = x_0$ .

De estas definiciones también se sacan los respectivos conceptos de repulsor, estable hacia atrás y asintóticamente estable hacia atrás sin más que considerar el tiempo avanzando en sentido contrario.

El lector podría pensar que la última definición puede no ser necesaria puesto que atractor y estable parecen el mismo concepto pero eso es falso como se puede ver con el ejemplo que da [8] y que es analizado en dicho libro con todo detalle:

$$\begin{cases} x' = x - x\sqrt{x^2 + y^2} - y \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \\ y' = y - y\sqrt{x^2 + y^2} + x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{cases}$$

sistema que con un cambio a polares pasa a tomar la forma más sencilla:

$$\begin{cases} r' = r(1 - r) \\ \theta' = 1 - \cos(\theta) \end{cases}$$

Pues bien, en este sistema el punto  $(1, 0)$  es atractor pero inestable.

Consideremos un sistema no lineal autónomo,  $y' = f(y)$ , y un punto crítico de dicho sistema, por ejemplo, el origen. Al estar considerando  $f$  de clase  $\mathcal{C}^1$ , podemos considerar su desarrollo de Taylor en 0 y poner  $f(y) = Df(0)y + o(y)$  donde  $o(y)$  es muy pequeño en comparación con el otro sumando de la expresión. Esta forma de proceder es la idea que reside en el método de linealización de Lyapunov. Para justificarla formalmente contamos con los siguientes teoremas:

**Teorema 1.5**

Sea  $A$  una matriz cuyos autovalores tienen parte real negativa. Sean  $\Omega$  un abierto conteniendo a  $0$  y  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $\mathcal{C}^1$  tal que  $\lim_{y \rightarrow 0} g(y)/\|y\| = 0$ . Entonces el origen es un punto asintóticamente estable del sistema  $y' = Ay + g(y)$ .

**Teorema 1.6**

Sea  $y_0$  un punto crítico del sistema  $y' = f(y)$ . Supongamos que todos los autovalores de  $Df(y_0)$  tienen parte real negativa. Entonces  $y_0$  es asintóticamente estable.

**Teorema 1.7**

Sea  $y_0$  un punto crítico del sistema  $y' = f(y)$ . Supongamos que todos los autovalores de  $Df(y_0)$  tienen parte real positiva. Entonces  $y_0$  es asintóticamente estable hacia atrás.

Con estos teoremas en mente y redefiniendo el concepto de punto hiperbólico para el tipo de ecuaciones consideradas ahora, obtenemos el Teorema de Hartman-Grobman, que se basa en varios lemas que aquí nos limitamos a enunciar para centrarnos en el citado resultado. Para ver las pruebas de dichos lemas y más detalles relativos a esta parte de la teoría puede consultarse nuevamente [8].

**Definición 1.3**

Se dice que un punto de equilibrio  $y_0$  es hiperbólico si  $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$  siendo  $\lambda$  un autovalor de la matriz  $Df(y_0)$ .

**Lema 1.8**

Sea  $\alpha > 0$  y denotemos por  $r_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{B(0, \alpha)}$  a la retracción radial cuya expresión analítica es:

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leq \alpha \\ \alpha x / \|x\|, & \text{si } \|x\| \geq \alpha \end{cases}$$

siendo  $\|\cdot\|$  una norma arbitraria en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $r_\alpha$  es lipschitziana con constante de Lipschitz 2.

**Lema 1.9**

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  y  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función lipschitziana. Considérese el sistema  $y' = Ay + g(y)$ . Entonces todas sus soluciones maximales están definidas en todo  $\mathbb{R}$  verificándose además

$$\varphi(t, y) = e^{tA}y + \int_0^t e^{(t-s)A}g(\varphi(s, y))ds \quad (1.1)$$

para cada  $t$  e  $y$ , donde  $\varphi(t, y)$  denota el flujo del sistema.

**Lema 1.10**

Sea  $y: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable que verifica  $y'(t) \leq Ly(t)$  para cada  $t \in [t_1, t_2]$  siendo  $L$  una constante. Entonces se satisface que  $y(t) \leq y(t_1)e^{L(t-t_1)}$  para todo  $t$ .

**DEM:**

Hay que ver que se cumple la desigualdad  $y(t)e^{-Lt} \leq y(t_1)e^{-Lt_1}$  para cada  $t$ , lo cual es equivalente a lo que se enuncia como tesis en el Lema. Haciendo la derivada de la función  $g(t) = y(t)e^{-Lt}$  resulta:

$$(y(t)e^{-Lt})' = y'(t)e^{-Lt} - Ly(t)e^{-Lt} = (y'(t) - Ly(t))e^{-Lt} \leq 0$$

por la hipótesis. Por tanto  $g(t)$  es decreciente para cada  $t$ , lo cual finaliza la demostración. ■

**Lema 1.11**

Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  y sean  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$  sus autovalores. Entonces  $e^{\mu_1}, e^{\mu_2}, \dots, e^{\mu_l}$  son los autovalores de  $e^A$ .

Una matriz hiperbólica discreta es una matriz no singular tal que todos sus autovalores tienen módulo distinto de 1. Si denotamos por  $B$  a una matriz con estas características y por  $T$  su operador lineal asociado, se tiene que  $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_\infty$  cumpliéndose que los operadores  $T_0 := T|_{E_0}$  y  $T_\infty := T|_{E_\infty}$  están bien definidos y tienen como autovalores los de  $B$  con módulo menor y mayor que la unidad respectivamente. Con esta definición podemos enunciar otro lema más:

**Lema 1.12**

Existen bases  $\mathcal{B}_0$  y  $\mathcal{B}_\infty$  de  $E_0$  y  $E_\infty$  respectivamente tales que la norma asociada a la base  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\infty$ , denotada por  $\|\cdot\|$ , verifica  $\max\{\|T_0\|, \|T_\infty^{-1}\|\} < 1$  donde

$$\|T_0\| = \max\{\|T_0(x_0)\| : x_0 \in E_0, \|x_0\| \leq 1\}$$

$$\|T_\infty^{-1}\| = \max\{\|T_\infty^{-1}(x_\infty)\| : x_\infty \in E_\infty, \|x_\infty\| \leq 1\}$$

Y finalmente, el último lema antes del Teorema:

**Lema 1.13**

Existe una constante  $\varepsilon > 0$ , que depende solo de  $T$ , tal que si  $g$  es continua, acotada y lipschitziana con constante de Lipschitz menor que  $\varepsilon$  entonces los sistemas dinámicos discretos asociados (véase definición 1.5) a  $T$  y  $T + g$  son topológicamente conjugados. Además, existe una única conjugación  $h$  entre ellos de forma que  $h - Id$  es continua y acotada, donde  $Id$  denota la función identidad.

**Teorema 1.14 (Hartman-Grobman)**

Si  $y_0$  es un punto hiperbólico, existe un entorno  $U$  de  $y_0$  y un entorno  $V$  de 0 tal que  $y' = f(y)$  es topológicamente conjugado a  $y' = Df(y_0)(y)$  en  $V$ .

**DEM:**

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $y_0 = 0$  puesto que  $y' = f(y)$  e  $y' = f(y + y_0) = \hat{f}(y)$  son topológicamente conjugados por la traslación  $h(y - y_0)$  teniéndose también  $A = Df(y_0) = D\hat{f}(0)$ . A la aplicación lineal asociada a la matriz  $A$  la denotaremos en adelante por  $L$ .

Fijando  $\lambda > 0$  y una norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^n$  a la que después se le añadirán algunas restricciones, existe  $\alpha > 0$  de forma que la función  $u(y) = \overline{f(y) - Df(0)y}$  es lipschitziana con constante de Lipschitz  $\lambda/2$  cuando se restringe a  $\overline{B(0, \alpha)}$ , es decir, se cumple  $\|u(y) - u(x)\| \leq \frac{\lambda}{2} \|y - x\|$  para cualesquiera  $x, y \in \overline{B(0, \alpha)}$ . Esto es así, ya que podemos elegir  $\alpha$  de forma que se cumpla  $\|Df(z) - Df(0)\| \leq \lambda/2$  para cada  $z \in \overline{B(0, \alpha)}$ , de modo que  $\|Du(z)\| = \|Df(z) - Df(0)\| \leq \lambda/2$  y aplicando el teorema de los incrementos finitos para funciones vectoriales se obtiene la afirmación anterior relativa a la lipschitzianidad de  $u(y)$ .

Tomemos ahora la retracción radial  $r_\alpha$  y definamos  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  por composición de forma que  $g(y) = u(r_\alpha(y))$ . Se tiene que

$$\|g(y) - g(x)\| = \|u(r_\alpha(y)) - u(r_\alpha(x))\| \leq \frac{\lambda}{2} \|r_\alpha(y) - r_\alpha(x)\| \leq 2 \cdot \frac{\lambda}{2} \|y - x\| = \lambda \|y - x\|$$

donde se ha utilizado el lema (1.8). Por tanto,  $g$  también es lipschitziana con constante  $\lambda$ . Además, también se cumple que  $(L + g)(y) = f(y)$  si  $y \in \overline{B(0, \alpha)}$  ya que en este caso  $\|y\| \leq \alpha \implies r_\alpha(y) = y$  y por ende:

$$(L + g)(y) = L(y) + g(y) = Df(0)y + u(r_\alpha(y)) = Df(0)y + u(y) = f(y)$$

por la definición que se ha hecho de la función  $u$ .

Lo que se trata de ver para demostrar el Teorema es que para entornos del origen suficientemente pequeños los sistemas  $y' = f(y)$  e  $y' = Ay$  son topológicamente conjugados. Pero por lo que acabamos de ver al ser  $f(y) = (L + g)(y) = Ay + g(y)$  en  $\overline{B(0, \alpha)}$  es suficiente demostrar que existe una conjugación topológica  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  entre el sistema  $y' = Ay + g(y)$  e  $y' = Ay$  aunque al hacer esto ya debemos limitarnos a entornos contenidos en  $\overline{B(0, \alpha)}$ . Busquemos sin más dilación dicha conjugación.

Sea  $\varphi(t, y)$  el flujo del sistema  $y' = Ay + g(y)$ . Por el Lema 1.9,  $\varphi$  está definida en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  y cumple (1.1) en el mismo lema. Al ser  $g$  lipschitziana resulta lo siguiente:

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq e^{t\|A\|} \|x - y\| + \int_0^t e^{(t-s)\|A\|} \lambda \|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\| ds$$

para cada  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y cada  $t \geq 0$ , desigualdad que podemos reescribir de forma equivalente (sin más que multiplicar por el factor  $e^{-t\|A\|}$  a ambos lados) de la siguiente forma:

$$e^{-t\|A\|} \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq \|x - y\| + \int_0^t e^{-s\|A\|} \lambda \|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\| ds$$

Fijando  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , consideremos la función  $v : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por los sumandos del lado derecho de la última desigualdad de la forma siguiente:

$$v(t) = \|x - y\| + \int_0^t e^{-s\|A\|} \lambda \|\varphi(s, x) - \varphi(s, y)\| ds$$

Derivando respecto a  $t$  (recuérdese el Teorema Fundamental del Cálculo), se tiene que

$$v'(t) = e^{-t\|A\|} \lambda \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\|$$

Si tenemos en cuenta la última desigualdad tenemos que se cumple  $v'(t) \leq \lambda v(t)$  para cada

$t \geq 0$ , lo cual permite concluir utilizando el Lema 1.10 que  $v(t) \leq v(0)e^{\lambda t}$  para cada  $t \geq 0$ .

Concretamente desarrollando esta desigualdad se tiene que:

$$e^{-t\|A\|} \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq v(t) \leq \|x - y\| e^{\lambda t}$$

equivalentemente

$$\|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| \leq \|x - y\| e^{(\lambda + \|A\|)t} \quad (1.2)$$

Juntando (1.1) con (1.2) se obtiene una nueva desigualdad

$$\begin{aligned} \left\| (\varphi(t, \cdot) - e^{tA})(x) - (\varphi(t, \cdot) - e^{tA})(y) \right\| &\leq \int_0^t e^{(t-s)\|A\|} \lambda \|\varphi(t, x) - \varphi(t, y)\| ds \leq \\ &\leq \lambda \|x - y\| e^{t\|A\|} \int_0^t e^{\lambda s} ds = \|x - y\| e^{t\|A\|} (e^{\lambda t} - 1) \end{aligned} \quad (1.3)$$

para cada  $t \geq 0$  y cada  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Finalmente, la función  $g$  es continua y acotada, por lo que teniendo en cuenta nuevamente (1.1), se puede deducir que la función  $(\varphi(t, \cdot) - e^{tA})(y)$  también satisface esas dos propiedades.

Al ser 0 un punto crítico hiperbólico del sistema  $y' = f(y)$ , la matriz  $B = e^A$  es, aplicando el Lema 1.11, hiperbólica discreta. Denotando por  $T$  su operador lineal asociado y por  $\|\cdot\|$  la norma introducida en el Lema 1.12.

Al haber tomado al comienzo  $\lambda > 0$  arbitrario, esta variable puede suponerse lo suficientemente pequeña para que la función  $\tilde{g} = \varphi(1, \cdot) - T$  sea lipschitziana con constante de Lipschitz tan pequeña como se quiera, como se puede comprobar haciendo  $t = 1$  en (1.3). Como se comentó antes,  $\tilde{g}$  es continua y acotada por lo que aplicando el Lema 1.13 concluimos que los sistemas dinámicos discretos ligados a  $T$  y  $T + \tilde{g} = \varphi(1, \cdot)$  son conjugados y adicionalmente existe una única conjugación  $h$  entre  $\varphi(1, \cdot)$  y  $T$  ( $h \circ T = \varphi(1, \cdot) \circ h$ ) de forma que  $h - Id$  es continua y acotada. De la existencia de tal conjugación y utilizando la notación  $T_s = e^{sA}$  y  $\varphi_t = \varphi(t, \cdot)$ , se deduce que para cada  $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_1 \circ (\varphi_t \circ h \circ T_{-t}) = \varphi_t \circ \varphi_1 \circ h \circ T_{-t} = \varphi_t \circ h \circ T \circ T_{-t} = (\varphi_t \circ h \circ T_{-t}) \circ T$$

Por lo tanto, la composición  $\varphi_t \circ h \circ T_{-t}$  es también una conjugación entre  $\varphi_1$  y  $T$ . Para finalizar la demostración obsérvese que

$$\varphi_t \circ h \circ T_{-t} - Id = (\varphi_t - T_t) \circ h \circ T_{-t} + T_t \circ (h - Id) \circ T_{-t}$$

y las funciones  $\varphi_t - T_t$  y  $h - Id$  son continuas y acotadas, por lo que  $\varphi_t \circ h \circ T_{-t} - Id$

también cumple esas dos propiedades. Por la unicidad en el Lema 1.13, se deduce que  $\varphi_t \circ h \circ T_{-t} = h$  o equivalentemente  $\varphi_t \circ h = h \circ T = h \circ e^{tA}$  para cada valor de  $t$ , lo cual permite concluir que los sistemas  $y' = Ay + g(y)$  e  $y' = Ay$  son topológicamente conjugados como se quería probar. ■

Aunque los teoremas anteriores son bastante útiles, en especial, el último, dejan de lado la respuesta a qué ocurre con los puntos críticos del sistema que no son hiperbólicos, es decir, ¿qué tipo de estabilidad va a tener un punto crítico del sistema  $y' = f(y)$ , llámese  $y_0$ , si los autovalores de  $Df(y_0)$  tienen parte real menor o igual que 0?

Para dilucidar esta pregunta una de las posibilidades es utilizar el método directo de Lyapunov.

#### Definición 1.4

Sea  $y_0$  un punto crítico de  $y' = f(y)$ . Se denomina función de Lyapunov para  $y_0$  a una función  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, definida en un abierto  $U$ , con  $y_0 \in U$ , que satisface los siguientes requisitos:

- i)  $V(y_0) = 0$  y  $V(y) > 0$  para todo  $y \in U \setminus \{y_0\}$ .
- ii)  $\dot{V}(y_0) \leq 0$  para todo  $y \in U$ . Si  $V$  verifica además:
- iii)  $\dot{V}(y_0) < 0$  para todo  $y \in U \setminus \{y_0\}$ , entonces se dice que  $V$  es una función de Lyapunov estricta para  $y_0$ .

La propiedad que caracteriza a una función de Lyapunov es que es decreciente a lo largo de cada órbita (y estrictamente si es Lyapunov estricta) y esa es la clave del resultado más importante de esta teoría que se enuncia a continuación y fue presentado en la tesis del mismo Lyapunov en 1892. El Teorema dice lo siguiente:

#### Teorema 1.15 (Lyapunov, 1892)

Sea  $y_0$  un punto crítico de  $y' = f(y)$ . Si existe una función de Lyapunov para  $y_0$ , entonces  $y_0$  es estable. Si además existe una función de Lyapunov estricta para  $y_0$  entonces  $y_0$  es asintóticamente estable.

#### DEM:

Veamos la primera parte del Teorema en primer lugar. Sea  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Lyapunov para  $y_0$  y sea  $\delta$  tal que  $B := \overline{B(y_0, \delta)} \subset U$ . Definimos  $m := \min\{V(x) : \|y - y_0\| = \delta\}$  que por la Definición 1.4 i) es un valor positivo. Puesto que  $V(y_0) = 0 < m$  y  $V$  es continua (al ser diferenciable), existe un abierto  $U_1$  tal que  $y_0 \in U_1 \subset B$  con  $V(y) < m$

para todo  $y \in U_1$ . Al ser  $V$  decreciente a lo largo de cada órbita  $\varphi_y(t)$ , para cualquier  $y \in U_1$  y  $t \in [0, \omega_+(y))$  se verifica que

$$V(\varphi_y(t)) \leq V(x) < m$$

De aquí se deduce que  $\varphi_y(t)$  no puede cortar a la frontera de la bola  $B$  por la definición de  $m$ , es decir,  $\varphi_y(t) \in \overset{\circ}{B} = \{y : \|y - y_0\| < \delta\}$  y además, al ser  $B$  compacto, se tiene que  $\omega_+(y) = +\infty$ . En conclusión, se ha probado que dado cualquier entorno  $B(y_0, \delta)$  existe otro entorno  $U_1$  tal que si  $y \in U_1$ , entonces  $\omega_+(y) = +\infty$  y para todo  $y \in U_1$  se tiene que  $\varphi_y(t) \in B(y_0, \delta)$ . Por la Definición 1.2  $y_0$  es estable.

Para la segunda parte, supongamos ahora que  $V$  es una función de Lyapunov estricta. Debemos demostrar que si  $y \in U_1$  entonces  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi_y(t) = y_0$ , lo cual garantiza que  $y_0$  sea atractor, que unido a que es estable, permite concluir que es asintóticamente estable.

Para ver esto, vamos a probar que  $\{\varphi_y(t) : t \in [0, +\infty)\}$  tiene a  $y_0$  como su único punto de acumulación, o lo que es lo mismo, que para toda sucesión  $\{t_n\} \subset [0, +\infty)$  con  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\{\varphi_y(t_n)\}$  converge se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_y(t_n) = y_0$ , lo cual es equivalente a  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi_y(t) = y_0$ .

Sea entonces  $\{t_n\} \subset [0, +\infty)$  convergente a  $+\infty$  y sea  $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_y(t_n)$ . Como  $\varphi_y(t) \in B$  para todo  $t \in [0, +\infty)$  se tiene que  $z \in B$ . Además,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\varphi_y(t_n)) = V(z)$  y puesto que  $V$  decrece estrictamente a lo largo de  $\varphi_y(t)$  también se cumple  $V(\varphi_y(t)) > V(z)$ .

Si  $z = y_0$  quedaría demostrado el resultado, por tanto probemos dicha igualdad. Para ello, razonemos por reducción al absurdo suponiendo que  $z \neq y_0$ .

Consideremos la órbita del punto  $z$ ,  $\{\varphi_z(t) : t \in (\omega_-(z), \omega_+(z))\}$ . Como  $z \in B \subset U$ , existe  $\tau > 0$  tal que  $\varphi_z(t) \in U$  para todo  $t \in [0, \tau]$ .

Ahora por la continuidad respecto a las condiciones iniciales, existe un entorno  $U_2$  de  $z$  tal que para todo  $s \in U_2$ ,  $\varphi_s(t)$  está definida y contenida en  $U$  para todo  $t \in [0, \tau]$ .

Por ser  $V$  una función Lyapunov estricta, entonces

$$V(\varphi_z(\tau)) < V(z)$$

y al ser  $\varphi(\tau, \cdot)$  continua, existe un entorno  $U'_2 \subset U_2$  de  $z$  tal que

$$V(\varphi_s(\tau)) < V(z) \quad \text{para todo } s \in U'_2$$

Como  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_y(t_n) = z$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n_0$  entonces  $\varphi_y(t_n) \in U'_2$  y por tanto

$$V(\varphi_{\varphi_y(t_n)}(\tau)) = V(\varphi_y(t_n + \tau)) < V(z) \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

pero esto contradice el hecho de que  $V(\varphi_y(t)) > V(z)$  para todo  $t > 0$  y por tanto debe tenerse efectivamente que  $z = y_0$  y que éste es un punto crítico asintóticamente estable. ■

La propiedad característica antes mencionada es la que se utiliza en la prueba pero en realidad si se intercambia la hipótesis de la existencia de una función de Lyapunov estricta por una hipótesis que diga que es función de Lyapunov y añada cualquier condición que garantice de forma plena que la función va a ser decreciente de forma estricta a lo largo de cada órbita, el resultado sigue siendo válido.

Veamos un ejemplo de aplicación del Teorema 1.15 sacado de [8]:

### Ejemplo 1.16

$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x+y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2 \end{cases}$$

En este sistema, el origen es un punto crítico aislado. La diferencial del campo  $f(x, y)$  en este caso es la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por autovalores al 0 y al -1. El método de linealización no puede ayudarnos en este caso por lo que necesitamos otro recurso. Se ve claramente que la función  $V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$  es una función de Lyapunov para el origen pues primeramente  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, y) > 0$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y en segundo lugar, derivando se tiene que:

$$\dot{V}(x, y) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^2 + 2x^2(x+y)^2 - y^4 + 2y^4(x+y)^2 = (2(x+y)^2 - 1)(x^2 + y^4)$$

El factor  $2(x+y)^2 - 1$  tiene la particularidad de tomar el valor -1 en  $(0, 0)$  y por tanto, utilizando la continuidad, debe existir un entorno del origen donde  $\dot{V}(x, y) < 0$  (salvo en el propio origen donde vale 0). Así pues,  $V$  es una función de Lyapunov estricta para el origen y por tanto éste es un punto crítico asintóticamente estable.

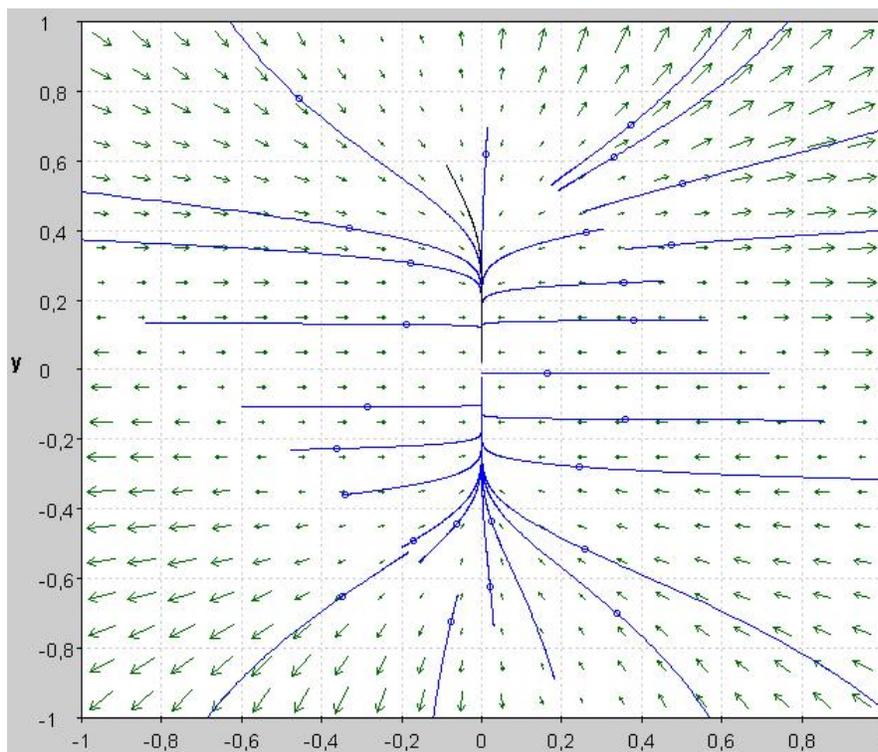


Figura 1.2: Retrato de fases del sistema del ejemplo 1.16.

Otros ejemplos de aplicación los realicé como ejercicio en la asignatura de Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias referenciada al comienzo del capítulo. Son los siguientes:

**Ejemplo 1.17**

$$\begin{cases} x' = y(x+1) \\ y' = x(1+y^3) \end{cases}$$

Calculemos en primer lugar los puntos críticos:

$$y(x+1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} y = 0 \longrightarrow x = 0 \\ x + 1 = 0 \longrightarrow x = -1 \longrightarrow -(1+y^3) = 0 \longrightarrow y = -1 \end{cases}$$

Por consiguiente, los puntos críticos del sistema son  $(0,0)$  y  $(-1,-1)$ . Estudiemos su estabilidad:

- **Punto crítico  $(0,0)$ :**

La parte lineal tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son 1 y -1. Por ende, el origen es un punto hiperbólico y podemos aplicar el Teorema 1.14 para concluir que alrededor de dicho punto el sistema del ejemplo es topológicamente conjugado al sistema lineal dado por la matriz anterior. Por tanto, tendremos un punto silla entorno al origen pero modificado por la parte no lineal.

- **Punto crítico  $(-1,-1)$ :**

En este punto, podemos encontrar una función de Lyapunov. Concretando, dicha función es  $V(x,y) = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y+1)^2}{2}$  que cumple  $V(-1,-1) = 0$  y  $V(x,y) > 0$  si  $(x,y) \neq (-1,-1)$ . Además:

$$\dot{V}(x,y) = (x+1)^2 y + (y+1)x(1+y^3)$$

y esa derivada es siempre menor o igual que 0 si tanto  $x$  como  $y$  lo son. Si nos quedamos con el abierto definido por dicha condición, es decir,  $U = \{(x,y) : x < 0 \text{ e } y < 0\}$  entonces  $\dot{V}(x,y) = 0 \iff x = y = -1 \implies V$  es Lyapunov estricta en  $U \subset \mathbb{R}^2 \implies (-1,-1)$  es asintóticamente estable.

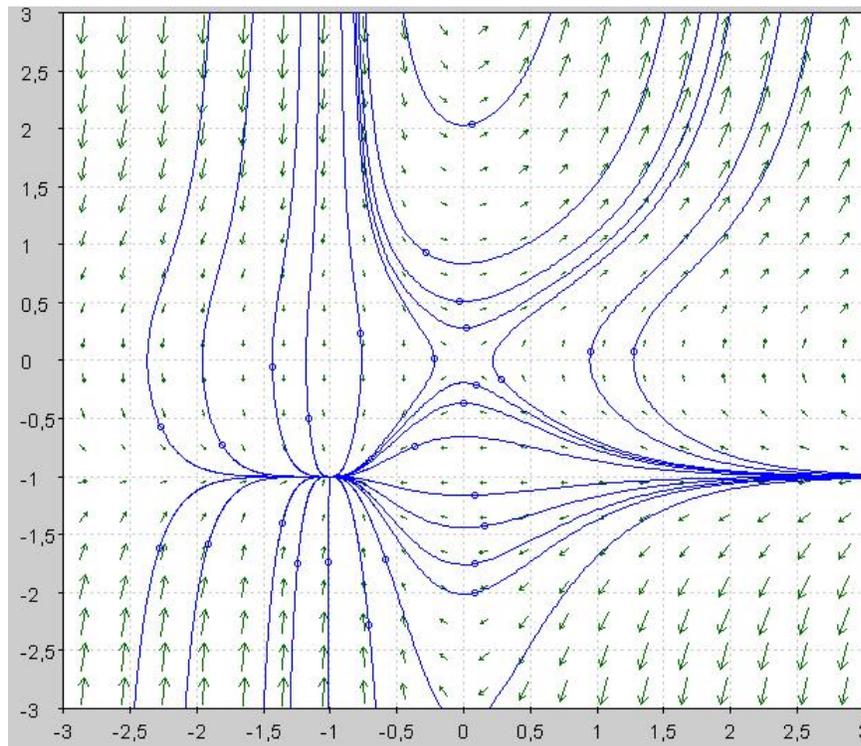


Figura 1.3: Retrato de fases del sistema del ejemplo 1.17.

También podemos considerar los razonamientos en  $\mathbb{R}^3$ :

#### Ejemplo 1.18

$$\begin{cases} x' = 2y(z-1) \\ y' = -x(z-1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

Vamos a partir de que sabemos que existe una función de Lyapunov de la forma  $V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$  para el origen  $(0, 0, 0)$  donde  $a, b, c$  son constantes positivas.

Claramente  $V(0, 0, 0) = 0$  y  $V(x, y, z) > 0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ .

Derivando se tiene:

$$\dot{V}(x, y, z) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y} + 2cz\dot{z} = 2ax2y(z-1) - 2byx(z-1) - 2czz^3 = xy(z-1)(4a-2b) - 2cz^4$$

El primer sumando puede variar de signo en un entorno del origen, por lo que para garantizar la negatividad de  $\dot{V}$ , debe cumplirse  $4a - 2b = 0 \iff a = b/2$ , en cuyo caso  $\dot{V}(x, y, z) = -2cz^4 \leq 0$  para cualquier valor de  $c$ .

Por tanto, tomando  $a = b/2$  y  $c > 0$  arbitrario, tenemos un función de Lyapunov para el origen que además es válida globalmente en todo el espacio.

Por tanto, como mínimo el origen es estable. Pero, ¿es asintóticamente estable?

La función de Lyapunov anterior no es estrictamente negativa en un entorno del origen pues en cualquier punto de la forma  $(x, y, 0)$  va a valer 0 su derivada, lo cual no permite concluir ni mucho menos que no exista otra función de Lyapunov estricta con otra forma algebraica.

Por tanto, tenemos dos opciones: o buscamos otra función de Lyapunov que sea estricta para aplicar el resultado del Teorema 1.15 o estudiamos el sistema de otra forma.

La primera opción es complicada porque aunque el Teorema 1.15 tenga un enunciado muy sencillo y muy concluyente sobre la estabilidad de los puntos críticos, encontrar funciones de Lyapunov es un trabajo muy duro aunque por los ejemplos que aparecen aquí resulte más bien lo contrario.

Por ello,elijamos la segunda opción y reduzcamos el estudio del sistema al plano  $z = 0$ . Como  $z = 0 \implies \dot{z} = 0$ , las soluciones estarán dentro del plano y además, el sistema queda reducido a

$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = x \end{cases}$$

que es un sistema lineal cuya matriz asociada tiene por valores propios el par  $\pm\sqrt{2}i$ . Por tanto, toda solución en el plano considerado es un centro entorno al origen, por lo que aunque sea estable no puede ser atractor y por consiguiente no es asintóticamente estable.

Y un último ejemplo en el que se nos da una ecuación diferencial de segundo orden, que sabemos se puede ver como un sistema:

#### Ejemplo 1.19

$$\ddot{x} + (x^6 - x^2)\dot{x} + x = 0$$

↓

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = (x^2 - x^6)v - x \end{cases}$$

La diferencial del campo en el origen (único punto crítico) en este caso viene representada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que tiene por autovalores el par conjugado  $\pm i$ . No podemos aplicar el Teorema 1.14 ni el método de linealización de Lyapunov, pues la parte real es nula para ambos autovalores. Estudiemos por tanto la estabilidad con el método directo de Lyapunov. Consideremos la función  $V(x, v) = \frac{x^2}{2} + \frac{v^2}{2}$  que cumple  $V(0, 0) = 0$  y  $V(x, v) > 0$  si  $(x, v) \neq (0, 0)$  y además:

$$\dot{V}(x, v) = x\dot{x} + v\dot{v} = xv + v^2(x^2 - x^6) - xv = x^2v^2(1 - x^4)$$

Si  $0 \leq x^4 \leq 1 \iff x \in [-1, 1] \implies \dot{V}(x, v) \geq 0$ . Por tanto, estamos ante una función “anti-Lyapunov” en ese entorno del origen, lo cual reinterpretando el resultado de Lyapunov nos permite concluir que el origen es una fuente.

## 1.2 Sistemas Dinámicos Discretos

### Definición 1.5

Siguiendo [8], dado  $X$  un espacio de fases,  $T$  un conjunto de tiempos y  $\phi : T \times X \longrightarrow X$  un flujo, se denomina **sistema dinámico** a una terna  $(X, T, \phi)$  que verifica las siguientes propiedades:

- 1)  $X$  es un espacio métrico,  $T$  es un subgrupo aditivo de  $\mathbb{R}$  ( $0 \in T$  y  $t, s \in T \implies t + s \in T$ ) y  $\phi$  es una aplicación continua.
- 2)  $\phi(0, x) = x \quad \forall x \in X$
- 3)  $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$  para todo  $t, s \in T$  y todo  $x \in X$

Una vez vista esta definición, distinguimos dos clases de sistemas dependiendo del conjunto  $T$ . Si  $T = \mathbb{Z}^+ \cup 0$ ,  $T = \mathbb{Z}^- \cup 0$  o  $T = \mathbb{Z}$  el sistema se denomina discreto. Si sustituimos  $\mathbb{Z}$  por  $\mathbb{R}$  en los tres casos anteriores obtendríamos un sistema continuo.

**Ejemplo 1.20** (El método de Newton)

Para resolver ecuaciones del tipo  $f(x) = 0$  donde  $f$  es una función de variable real diferenciable, uno de las posibles formas de hacerlo numéricamente es el método de Newton que partiendo de un punto  $x_0$  permite obtener una sucesión de puntos que bajo determinadas condiciones permiten encontrar un cero de la función  $f$  con la precisión que se desee. La sucesión se obtiene por la siguiente fórmula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

que puede utilizarse siempre y cuando la derivada que aparece en el denominador no sea 0. A modo de ejemplo, veamos qué ocurre con la función  $f(x) = e^x - x^2 - x - 1$  ( $f'(x) = e^x - 2x - 1$ ) si partimos de  $x_0 = 1$ . Calculando  $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - 1 = 0$  y ahora al calcular  $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = x_1 = 0$ , nos damos cuenta de que se entra en un bucle que va a dar el mismo resultado siempre. Comprobando que  $f(0) = 0$  vemos que el método ha encontrado una raíz. Partiendo de  $x_0 = 2$ , se puede comprobar que en 6 iteraciones el método encuentra que 1.7932821 es otra raíz de dicha ecuación.

A continuación vamos a demostrar, basándonos en los capítulos 5 de [7] y 2 de [4], el conocido resultado debido a Li y Yorke que lleva su nombre. En realidad, este teorema es un caso particular de otro Teorema más general que es debido al matemático Aleksandr Nikolayevich Sarkovskii<sup>1</sup> que pasamos a enunciar en un primer lugar. Para ello, primeramente debemos definir el concepto de *orden de Sarkovskii*:

**Definición 1.6**

El orden de Sarkovskii para números naturales es:

$$\begin{aligned} 1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \dots \prec 2^n \cdot 7 \prec 2^n \cdot 5 \prec 2^n \cdot 3 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 7 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 3 \prec \dots \\ \dots \prec 2 \cdot 7 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \dots \prec 7 \prec 5 \prec 3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $a \prec b$  indica que  $b$  es mayor que  $a$  para este orden. Nótese que todos los naturales quedan ordenados. Ya estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Sarkovskii.

<sup>1</sup>Sarkovskii demostró el teorema en 1964. Estaba escrito en ruso y en occidente fue totalmente desconocido hasta diez años después de la publicación cuando Li y Yorke publicaron su famoso artículo *Period Three Implies Chaos*, Amer.Math.Monthly 82, 985-992, 1975., hecho por el cual al Teorema de Li-Yorke también se le conoce en la literatura inglesa como "The Period Three Theorem". Poco después se descubrió que efectivamente este último era un caso particular del primero.

**Teorema 1.21** (Sarkovskii, 1964)

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua y con un punto periódico de período  $n$ . Si  $m \prec n$  en el orden de Sarkovskii, entonces  $f$  tiene también un punto periódico de período  $m$ .

Del anterior Teorema se deduce que si  $f$  tiene un punto periódico de período  $n$ , entonces tendrá puntos periódicos de todos los períodos menores que  $n$  en el orden de Sarkovskii. En particular, si  $f$  tiene un punto periódico de período 3 que es el mayor de todos los números en este orden, entonces  $f$  tendrá puntos periódicos de todos los períodos. Así por ejemplo, la función  $f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$  cumple que  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$  y  $f(2) = 0$ , luego  $\{0, 1, 2\}$  es una órbita de período tres. Por consiguiente, el Teorema 1.21 nos garantiza que habrá órbitas de cualquier período.

El resultado anterior es el conocido como Teorema de Li-Yorke que pasamos a enunciar y demostrar, aunque antes necesitaremos un lema y una proposición.

**Lema 1.22**

Sean  $J$  e  $I$  intervalos cerrados y sea  $f$  una función continua satisfaciendo  $I \subset f(J)$ . Entonces, existe un intervalo  $J_0$  tal que  $J_0 \subset J$  y  $f(J_0) = I$ .

**DEM:**

Sean  $p, q \in J$  tales que  $I = [f(p), f(q)]$  y supongamos sin pérdida de generalidad que  $p < q$ . Denotemos por  $r$  al mayor número del intervalo  $[p, q]$  con  $f(r) = f(p)$  por  $s$  al menor número de dicho intervalo cumpliendo que  $f(s) = f(q)$  y  $s > r$ . Demostremos que  $J_0 = [r, s] \subset [p, q] \subset J$  cumple que  $f(J_0) = I$ .

Por la definición de  $r$  y  $s$  junto con el Teorema de los Valores Intermedios se tiene el contenido  $I \subset f(J_0)$ .

Para ver el otro contenido, razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe  $t \in (r, s)$  tal que  $f(t) \notin I$  y además sin pérdida de generalidad que  $f(t) > f(q)$ . Podemos aplicar de nuevo el Teorema de los Valores Intermedios para deducir que  $I \subset f([r, t])$ , lo cual lleva a la existencia de un  $x \in [r, t)$  tal que  $f(x) = f(q)$ , contradiciéndose el hecho de que  $s$  era el menor número en  $[p, q]$  tal que  $f(s) = f(q)$ . Por consiguiente se tiene el otro contenido y la igualdad de conjuntos enunciada. ■

**Proposición 1.23**

Sea  $I$  un intervalo cerrado y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Si  $I \subset f(I)$ , entonces  $f$  tiene un punto fijo en  $I$ .

**DEM:**

Sea  $I = [a, b]$ . Por la hipótesis, existen  $c, d \in I$  tales que  $f(c) = a$  y  $f(d) = b$ . Si  $c = a$  o  $d = b$ , se tendría el resultado. En caso contrario, se cumpliría que  $a < c < b$  y  $a < d < b$ . Definiendo la función  $g(x) = f(x) - x$ , se tiene que  $g(c) = f(c) - c < 0$  y  $g(d) = f(d) - d > 0$ . Por el Teorema de Bolzano, existe  $e \in (c, d) \subset I$  tal que  $g(e) = f(e) - e = 0 \implies f(e) = e$ .

**Teorema 1.24** (Li-Yorke, 1975)

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua con órbitas de período minimal 3, entonces  $f$  tiene órbitas de todos los períodos.

**DEM:**

Sea  $\{a, b, c\}$  una órbita de período 3 (minimal), donde sin pérdida de generalidad asumimos que  $a < b < c$ . Tenemos por tanto que o bien  $f(a) = b$  o  $f(a) = c$ . Supongamos por ejemplo que se da la primera igualdad y por lo tanto se satisface  $f(b) = c$  y  $f(c) = a$ . Si se diera la segunda igualdad la demostración es análoga.

Sea  $I_0 = [a, b]$  e  $I_1 = [b, c]$ . Aplicando el Teorema de los Valores Intermedios resultan los siguientes contenidos  $I_1 \subset f(I_0)$ ,  $I_1 \subset f(I_1)$  y  $I_0 \subset f(I_1)$ . Como  $I_1 \subset f(I_1)$ , utilizando la Proposición 1.23 concluimos que  $f$  tiene un punto fijo en  $I_1$ , o lo que es equivalente,  $f$  tiene un punto periódico de período 1.

Consideremos ahora  $n > 1$  natural (y distinto de 3) y veamos que  $f$  tiene un punto periódico de período  $n$ . Para encontrar dicho punto, vamos a considerar una sucesión de intervalos encajados,  $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n$ , cumpliendo las siguientes cinco propiedades:

- i)  $A_0 = I_1$
- ii)  $f(A_k) = A_{k-1} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-2$
- iii)  $f^k(A_k) = I_1 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n-2$
- iv)  $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$
- v)  $f^n(A_n) = I_1$

Veamos que dicha sucesión de intervalos existe. Claramente podemos elegir  $A_0 = I_1$  y por tanto  $f(A_0) \supset A_0$ . Utilizando el Lema 1.22, existe un intervalo  $A_1 \subset A_0$  y que cumple  $f(A_1) = A_0$ . Además  $A_1 \subset A_0 \implies f(A_1) \supset A_1$  y podemos volver a aplicar el Lema 1.22 para obtener otro intervalo  $A_2 \subset A_1$  con  $f(A_2) = A_1$ . Iterando este método constructivo tenemos que se cumple la propiedad ii).

Nótese ahora, que la propiedad ii) garantiza que se cumpla iii) también:

$$\begin{aligned} f^2(A_k) = f(f(A_k)) &= f(A_{k-1}) = A_{k-2} \\ f^3(A_k) = f(f^2(A_k)) &= f(A_{k-2}) = A_{k-3} \\ &\vdots \\ f^{k-1}(A_k) = f(f^{k-2}(A_k)) &= f(A_2) = A_1 \\ f^k(A_k) = f(f^{k-1}(A_k)) &= f(A_1) = A_0 = I_1 \end{aligned}$$

para cada  $k = 1, 2, \dots, n - 2$ .

Ahora, téngase en cuenta que  $f^{n-1}(A_{n-2}) = f(f^{n-2}(A_{n-2})) = f(I_1)$  y al cumplirse  $I_1 \subset f(I_0)$ , resulta que  $f^{n-1}(A_{n-2}) \supset A_0$ . Por tanto, aplicando nuevamente el Lema 1.22, existe  $A_{n-1} \subset A_{n-2}$  tal que  $f^{n-1}(A_{n-1}) = I_0$  y por tanto,  $f^n(A_{n-1}) = f(I_0) \supset I_1$ . Si recurrimos al Lema 1.22 por última vez, encontramos un intervalo  $A_n \subset A_{n-1}$  cumpliendo  $f^n(A_n) = I_1$  satisfaciéndose iv) y v) finalmente.

Vayamos por último a la parte final de la demostración.

Como  $A_n \subset I_1$ , la propiedad v) y la Proposición 1.23 garantizan la existencia de un punto fijo en  $A_n$  para  $f^n$  y esto es equivalente a decir que  $f$  tiene un punto periódico  $p$  de período  $n$ . Se puede comprobar además que dicho período es minimal con las otras cuatro propiedades de la sucesión de intervalos anterior.

Procediendo, al tener  $A_n \subset I_1 \rightarrow p \in I_1 = [b, c]$ . Además por estar los intervalos encajados, utilizando la propiedad iii), se deduce que  $f(p), f^2(p), \dots, f^{n-2}(p)$  son puntos del intervalo  $I_1$  también y por la iv) que  $f^{n-1}(p) \in I_0 = [a, b]$ . Demostremos ahora que  $p$  no puede ser ni  $b$  ni  $c$  utilizando la reducción al absurdo.

Supongamos que  $p = c \implies f(p) = a \notin I_1$ . Como  $f^{n-1}(p)$  es la única iterada de  $p$  entre las  $n$  primeras que no está en  $I_1$ , debe ocurrir que  $f^{n-1} = f \implies n = 2$ , lo cual es contradictorio ya que  $p = c \iff f(p) = f(c) = a \implies c = f^2(c) = f(a) = b$ .

Por otro lado, si  $p = b \implies f^2(p) = a \notin I_1 \implies f^2 = f^{n-1} \implies n = 3$ . Pero estamos suponiendo que  $n \neq 3$ , por tanto es imposible también que  $p = b$ .

De los dos razonamientos anteriores, se deduce que  $p \in (b, c)$ . Adicionalmente,  $f^{n-1}(p) \neq p$  pues el intervalo  $I_1$  es disjunto de  $(b, c)$ , y por consiguiente el período minimal de  $p$  no puede ser  $n - 1$ . Si el período de  $p$  fuera menor que  $n - 1$ , utilizando nuevamente la propiedad iii) y el hecho de que  $p \neq b, c$ , llegaríamos a la conclusión de que la órbita de  $p$  estaría completamente contenida en  $(b, c)$ , lo cual contradice la propiedad iv). Por tanto,  $p$  es un punto periódico de período minimal  $n$  finalizándose la demostración. ■

Como vemos, la prueba del Teorema aunque es larga, se basa en ideas básicas de los primeros cursos de Matemáticas tales como el Teorema de los Valores Intermedios y el

Teorema de Bolzano.

Con respecto a los Teoremas 1.21 y 1.24 podemos resaltar las siguientes observaciones recogidas en [4]:

- Ambos están demostrados para funciones  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Para otros dominios (que no sean intervalos contenidos en  $\mathbb{R}$ ) puede ser completamente falso como puede comprobarse con la función  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $f(e^{i\theta}) = e^{i(\theta + \frac{2\pi}{3})}$  que cumple que todos los puntos  $\theta \in \mathbb{S}^1$  tienen período 3, pero no hay más períodos.
- Otro contraejemplo en relación con el anterior sería la función  $f : \mathbb{R} \setminus \{1, 0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$  con  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Todos los puntos tienen período 3 pues al hacer los cálculos se obtiene que  $f^3(x) = (f \circ f \circ f)(x) = x$ , pero sin embargo no existen puntos fijos (período 1), pues  $f(x) = x \implies \frac{1}{1-x} = x \implies x^2 - x + 1 = 0$  y esta ecuación no tiene soluciones reales.
- Si  $f$  tiene puntos periódicos de período impar o del tipo  $2^n \cdot (2k + 3)$  con  $n, k \in \mathbb{N}$ , entonces por el Teorema 1.21 (en concreto por la relación de orden (1.4)) tendrá infinitos puntos periódicos. La única forma de garantizar finitud en la cantidad de puntos periódicos es que tenga solo puntos de período  $2^m$  con  $m \in \mathbb{N}$ .
- Del Teorema 1.21 se deduce que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un punto periódico de período 5 entonces  $f$  tendrá puntos periódicos para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  salvo quizás para  $n = 3$  ya que 3 es mayor que 5 en el orden de Sarkovskii. De hecho se puede encontrar una función con una órbita de período 5 pero que no tiene órbitas de período 3, como bien puede verse a través del Ejemplo 1.25.

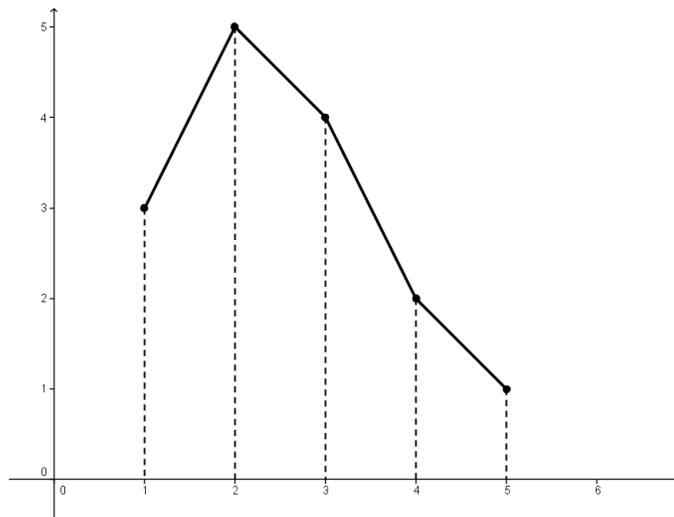


Figura 1.4: Gráfica de la función del Ejemplo 1.25.

**Ejemplo 1.25**

En este ejemplo, vamos a construir una función  $f$  que tiene puntos de período 5 pero no de período 3. Definamos la función en cuestión en el intervalo  $[0, 5] \subset \mathbb{R}$  de manera que:

$$f(1) = 3, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 2, \quad f(5) = 1$$

y en cada intervalo  $[n, n + 1]$  con  $1 \leq n \leq 4$  la función sea lineal (véase Figura 1.4). Los puntos 1,2,3,4 y 5 pertenecen a una órbita de período minimal 5 ( $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ ). Además,

$$f^3([1, 2]) = [2, 5], \quad f^3([2, 3]) = [3, 5], \quad f^3([4, 5]) = [1, 4]$$

Por tanto, en los intervalos  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  y  $[4, 5]$  la función  $f^3$  no puede contener puntos fijos. Pero sin embargo  $f^3([3, 4]) = [1, 5]$  y por la Proposición 1.23, existe un punto fijo  $\bar{x} \in [3, 4]$  de  $f^3$ . Demostremos que el período minimal de ese punto no es 3 sino 1, siendo por tanto  $\bar{x}$  un punto fijo de  $f$ .

Nótese primeramente que  $f(\bar{x}) \in [2, 4]$ . Si  $f(\bar{x}) \in [2, 3] \implies f^2(\bar{x}) \in [4, 5] \implies f^3(\bar{x}) = \bar{x} \in [1, 2]$  lo cual es imposible. Por tanto, se debe tener que  $f(\bar{x}) \in [3, 4] \implies f^2(\bar{x}) \in [2, 4]$ .

Si  $f^2(\bar{x}) \in [2, 3] \implies f^3(\bar{x}) = \bar{x} \in [4, 5]$ , lo cual no es posible. Por tanto, se deduce de las contradicciones anteriores que la órbita  $\{\bar{x}, f(\bar{x}), f^2(\bar{x})\} \subset [3, 4]$ .

Por la forma de definir la función, en el intervalo  $[3, 4]$  se tiene que  $f(x) = 10 - 2x$ , que cuenta con un único punto fijo  $x^* = 10/3$ . Calculando  $f^3(x)$  en dicho intervalo se tiene además que  $f^3(x) = 30 - 8x$  cuyo único punto fijo es  $x^* = 10/3$  y por tanto debe ser  $x^* = \bar{x}$ .

En consecuencia,  $f$  no puede tener puntos fijos de período minimal 3.

Veamos por último un ejemplo práctico de aplicación del Teorema 1.24, tomado de un ejercicio propuesto en [7].

**Ejemplo 1.26**

Consideremos la función  $f(x) = 4x(1 - x)$  y demostremos que existen órbitas de cualquier período (minimal). Utilizando el Teorema de Li-Yorke, bastará encontrar una órbita de período 3, o en otras palabras un punto tal que  $p = f^3(p) \neq f^2(p) \neq f(p)$ . Por tanto, la labor se reduce a encontrar un cero de la función  $g(x) = f^3(x) - x$ .

Calculando la expresión de  $g(x)$  con ayuda del software *wxMaxima*, se obtiene que

$$g(x) = -16384x^8 + 65536x^7 - 106496x^6 + 90112x^5 - 42240x^4 + \\ + 10752x^3 - 1344x^2 + 63x$$

Con ayuda del mismo software podemos ver cuáles son las raíces de ese polinomio, obteniendo ocho soluciones dentro del cuerpo de los reales (contenidas todas en el intervalo  $[0, 1]$ ) cuyos valores son:  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 0.116977778440511$ ,  $p_2 = 0.188255099070633$ ,  $p_3 = 0.413175911166535$ ,  $p_4 = 0.611260466978157$ ,  $p_5 = 3/4$ ,  $p_6 = 0.95048443395121$  y  $p_7 = 0.969846310392954$ .

- **Puntos  $p_0$  y  $p_5$**

Se tiene que  $f(p_0) = p_0$  y  $f(p_5) = p_5$  por lo que estos puntos son periódicos de período 3 pero éste no es el período minimal, por lo que no estamos en las condiciones del Teorema 1.24.

- **Puntos  $p_1, p_3$  y  $p_7$**

Estos tres puntos forman una órbita periódica de período minimal 3:

$$f(p_1) = p_3, \quad f(p_3) = p_7, \quad f(p_7) = p_1$$

- **Puntos  $p_2, p_4$  y  $p_6$**

Estos tres puntos también forman una órbita periódica de período minimal 3:

$$f(p_2) = p_4, \quad f(p_4) = p_6, \quad f(p_6) = p_2$$

En conclusión, al tener órbitas de período minimal 3, el Teorema de Li-Yorke nos garantiza la existencia de órbitas de todos los períodos naturales para  $f$ . Para encontrarlas podríamos proceder como antes utilizando el software informático buscando los ceros de las funciones correspondientes.

Con este ejemplo finaliza la sección y el capítulo. En el resto del trabajo, nos dedicaremos a intentar aplicar algunos de estos resultados a ejemplos concretos tomados de modelos biológicos y económicos, tanto en casos continuos como discretos.

En el siguiente capítulo, prestaremos toda la atención al modelo biológico de Lotka-Volterra (en su versión continua), analizando varios resultados matemáticos relativos al sistema de ecuaciones que lo define y viendo algunas modificaciones que se pueden llevar a cabo sobre el modelo de partida tradicional para conseguir adaptarlo lo máximo posible a la realidad.

Tras ello, veremos un modelo logístico discreto procedente de una adaptación del continuo para terminar el capítulo.

---

---

## Modelos Biológicos

### Capítulo 2: Contenido

<b>2.1</b>	<b>Modelo de Lotka-Volterra</b>	<b>35</b>
<b>2.1.1</b>	Efectos de la pesca sobre el modelo	41
<b>2.1.2</b>	Efectos de competición interna de las especies	42
<b>2.1.3</b>	Interacción de tres o más especies	48
<b>2.2</b>	<b>Modelos biológicos discretos</b>	<b>53</b>

---



EN este capítulo, analizaremos el modelo predador-presa de Lotka-Volterra en su forma continua gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal que puede ser modificado para obtener variaciones del modelo original que en algunos casos son bastante más próximas a la realidad. Veremos algunas de estas modificaciones, basándonos para todo ello en el Capítulo 4 de [1]. Además, analizaremos [15] viendo un modelo biológico

discreto y alguna peculiaridad de dicho artículo.

Siguiendo el anexo de Sir Edmund Whittaker a Volterra que se encuentra en un anexo de [5], si denotamos por  $N(t)$  al número de individuos de una población en un tiempo  $t$  y aplicamos el modelo de Malthus<sup>1</sup> interpretando que  $N(t)$  es continua en tiempo y que el ritmo de crecimiento es  $\varepsilon > 0$  entonces:

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N \implies N(t) = N_0 e^{\varepsilon t}$$

donde  $N_0$  es la población inicial.

Este modelo es el primero que se ve cuando se estudia la modelización de las variaciones poblacionales ya que es el más sencillo e históricamente tiene bastante celebridad.

Sin embargo, la interpretación de la solución ya nos está diciendo que dicho modelo no se ajusta a la realidad existente en el mundo pues partamos del  $N_0$  que partamos, la exponencial crecerá conforme el tiempo pase hasta hacerse todo lo grande que se quiera el número  $N(t)$ .

Visto lo anterior, cabría preguntarse por la ampliación a un modelo más parecido al mundo real, y es ahí donde aparece la figura de Pierre-François Verhulst que propone el modelo que lleva su nombre también conocido como modelo de crecimiento logístico.

En el modelo malthusiano se supone que  $\varepsilon$  es constante, pero si partimos de la hipótesis de que el medio en el que se encuentran los individuos de la población solo puede soportar la capacidad de un número limitado de ellos, entonces el valor de  $\varepsilon$  ya no sería constante, sino que dependería de la población y además lo haría de forma decreciente, de forma que a mayor  $N$  menor  $\varepsilon$  (menor ritmo de crecimiento). Verhulst propuso que el decrecimiento fuera de la forma  $\varepsilon(N) = \varepsilon' - \lambda N$  donde  $\varepsilon' > 0$  es constante, es decir, que fuera lineal, con lo cual llegó a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dN}{dt} = (\varepsilon' - \lambda N)N \implies N(t) = \frac{\varepsilon'}{\lambda + k e^{-\varepsilon' t}} \quad (2.1)$$

donde  $k$  es un número cualquiera que proviene de resolver la ecuación diferencial. Al sustituir el valor inicial  $N_0$  se determina este otro.

Este modelo se comporta como el de Malthus cuando el número de individuos es

---

<sup>1</sup>El *malthusianismo* es una teoría que dice que el crecimiento de una población sigue un crecimiento guiado por una progresión geométrica.

pequeño, pero a medida que éste crece y se acerca a la capacidad máxima del medio (que viene dada en términos de las constantes  $\lambda$  y  $\varepsilon'$  como  $\frac{\varepsilon'}{\lambda}$ ) ya que  $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\varepsilon'}{\lambda}$ . Por tanto, nuestra población no crece de forma indefinida como en el caso anterior.

Se pueden hacer más ampliaciones de este modelo para ajustarnos más a la realidad y tener en cuenta todas las casuísticas posibles que influyen en el crecimiento o decrecimiento de una población pero para nuestro objetivo, los dos modelos anteriores nos sirven de base de forma más que suficiente. Pasemos por tanto a estudiar el modelo de Lotka-Volterra en su forma continua.

## 2.1 Modelo de Lotka-Volterra

El biólogo italiano Umberto D'Ancona estaba estudiando las poblaciones de algunas especies de peces que interaccionaban entre sí. Durante su estudio, llegaron a sus manos una serie de datos relativos a la pesca en algunos puertos del Mar Mediterráneo durante los años en los que transcurrió la Primera Guerra Mundial y posteriores, entre ellos el del puerto de la, por aquel entonces, ciudad italiana de Fiume que se recogen en la siguiente tabla:

<b>1914</b>	<b>1915</b>	<b>1916</b>	<b>1917</b>	<b>1918</b>
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%
<b>1919</b>	<b>1920</b>	<b>1921</b>	<b>1922</b>	<b>1923</b>
27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

En la tabla, vienen expuestos los porcentajes de pesca de tiburones y rayas en dicho puerto en cada año. Así, en 1914 un 11.9% de las capturas fueron de este tipo de peces. D'Ancona, se dio cuenta de que esos porcentajes se mostraron muy elevados en el período de la guerra (1914-1919) pero tras ella, descendió considerablemente. ¿Qué ocurrió durante ese período para que se produjera este fenómeno?

Los tiburones y las rayas no interesan como alimento, pero sí lo que estas especies cazan, peces más pequeños. D'Ancona infirió que al haber menos pesca de éstos últimos durante la guerra, los tiburones tenían más alimento y por tanto, podían aprovechar dicha situación para prosperar y reproducirse con mayor facilidad. Pero, lo que no explicaba la teoría de D'Ancona es por qué habían también más peces, algo que aparentemente entra en contradicción con su explicación.

Como D'Ancona no obtuvo una solución a lo comentado en este último párrafo, tuvo que acudir en busca de ayuda al matemático, italiano también, Vito Volterra que generaría un modelo matemático para interpretar las variaciones entre dos especies que compiten de forma que una de ellas es la presa de la otra.

Volterra razonó en los siguientes términos. Si no existieran depredadores, las presas se reproducirían siguiendo la ley de Malthus, es decir, exponencialmente. Pero con depredadores, su ritmo de crecimiento decrecería al interactuar con ellos. Análogamente, Volterra supuso que el ritmo de crecimiento de los depredadores es negativo por naturaleza si no comen, es decir, que su número va descendiendo si no hay presas que cazar. Pero si cazan, se alimentan y reproducen y por tanto su ritmo de crecimiento aumenta.



(a) Alfred J. Lotka



(b) Vito Volterra

Figura 2.1: Fotografías de Lotka y Volterra

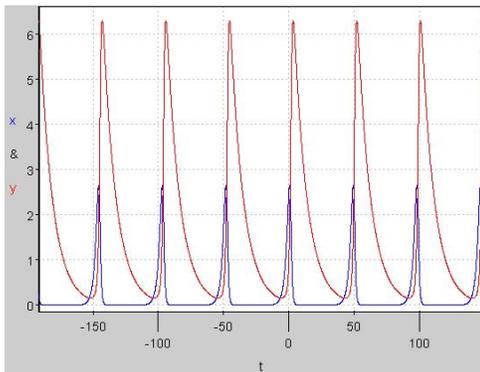
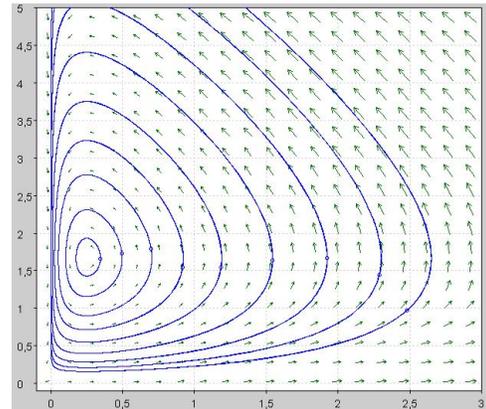
Sea  $x(t)$  el número de presas e  $y(t)$  el número de depredadores, en un instante de tiempo  $t$ . Las ecuaciones de Lotka-Volterra son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases} \quad (2.2)$$

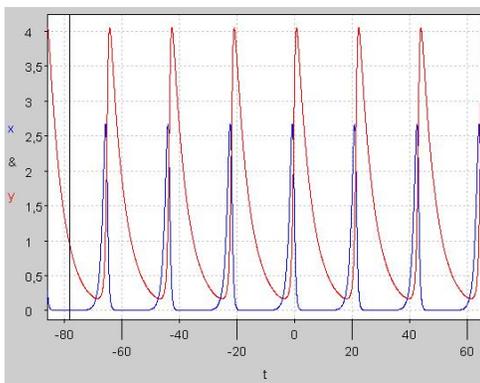
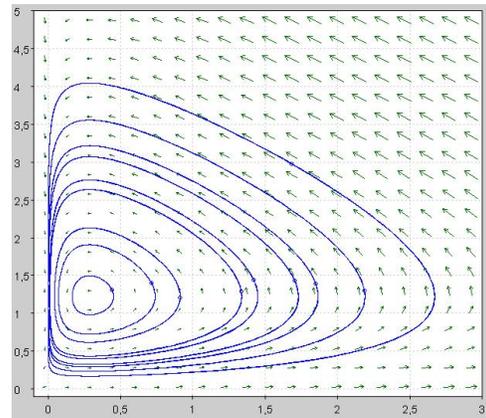
donde  $a, b, c, d$  son parámetros positivos que modelan los ritmos de crecimiento e interacción entre las dos especies en cuestión.

Tomando por ejemplo los valores de  $a = 0.5$ ,  $b = 0.3$ ,  $c = 0.1$  y  $d = 0.4$ , se obtienen los resultados de la Figura 2.2 producidos por el programa PPlane [11].

Cambiando los valores  $a = 1.1$ ,  $b = 0.9$ ,  $c = 0.2$  y  $d = 0.7$ , es decir, aumentando el ritmo de crecimiento individual de las presas, el ritmo al que son cazadas, haciendo disminuir la población de depredadores de forma más acusada pero provocando que se reproduzcan más rápido al comerse a las presas; se obtienen los resultados de la Figura 2.3.

(a)  $x(t)$  vs  $y(t)$ 

(b) Plano de fases

Figura 2.2: Parámetros:  $a = 0.5$ ,  $b = 0.3$ ,  $c = 0.1$  y  $d = 0.4$ (a)  $x(t)$  vs  $y(t)$ 

(b) Plano de fases

Figura 2.3: Parámetros:  $a = 1.1$ ,  $b = 0.9$ ,  $c = 0.2$  y  $d = 0.7$ 

Como vemos, el patrón que parecen seguir las curvas  $x(t)$  e  $y(t)$  es oscilante. Cuando el número de depredadores crece, el número de presas desciende pero nunca llega a cero pues si hay pocas presas que cazar, el número de depredadores baja a su vez, permitiendo a las presas reproducirse otra vez.

Los planos de fases son prueba también del patrón oscilante comentado, ya que producen órbitas periódicas cerradas. Estudiemos un poco más estas características derivadas de la observación de las gráficas.

En primer lugar, hagamos un estudio cualitativo basado en la teoría del primer capítulo. Denotando por  $f(x, y) = ax - bxy$  y por  $g(x, y) = -cy + dxy$ , vemos que estas dos funciones valen 0 al mismo tiempo en los puntos  $P_1 = (0, 0)$  y  $P_2 = (c/d, a/b)$  que son los puntos de equilibrio del sistema. Estudiemos su comportamiento de forma cualitativa.

Para ello, necesitamos calcular el jacobiano del sistema:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix}$$

La matriz anterior evaluada en los puntos de equilibrio, nos da una aproximación lineal de las ecuaciones en un entorno de estos puntos y por tanto, estudiándola podemos sacar alguna conclusión sobre el comportamiento del sistema.

Veamos qué ocurre con los dos puntos de equilibrio:

1.  $P_1 = (0, 0)$

En este caso se tiene:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son  $a$  y  $-c$ , uno positivo y otro negativo. Del estudio hecho en el Capítulo 1, se deduce que este punto es un **punto de silla**.

Pero en realidad, considerar que sea un punto de silla, implica tener que fijarnos en los cuatro cuadrantes lo cual no tiene sentido biológico en nuestro caso, pues siempre vamos a buscar soluciones que sean positivas, al estar representando nuestras variables el número de individuos de ciertas especies. Así pues, veamos qué ocurre con el otro punto de equilibrio.

2.  $P_2 = (c/d, a/b)$

La matriz ahora sería

$$J(c/d, a/b) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{da}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de la matriz serían  $\lambda = \pm\sqrt{cai}$ , que son complejos conjugados y además su parte real es cero. Nuevamente, recurriendo a nuestra clasificación del primer capítulo, deducimos que se trata de un centro (elipses concéntricas alrededor del punto  $P_2$ ).

Pero los cálculos anteriores solo sirven para la parte lineal. El Teorema 1.14 no puede utilizarse en este caso para deducir que tal comportamiento se va a tener en un entorno del punto teniendo en cuenta la parte no lineal puesto que los autovalores tienen ambos parte real nula. Por tanto, debemos proceder de otra forma en este caso.

Las órbitas de (2.2) son las curvas solución de la ecuación diferencial de primer orden siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)}$$

donde se ha dividido la segunda ecuación de (2.2) entre la primera.

Separando variables además se llega a que:

$$\frac{(a - by)}{y} dy = \frac{-c + dx}{x} dx$$

que integrando lleva a que  $x$  e  $y$  deben cumplir la relación:

$$a \ln y - by + c \ln x - dx = k_1$$

donde  $k_1$  es la constante de integración.

Una vez llegado aquí, solo resta utilizar la función exponencial para quitar los logaritmos, fruto de lo cual obtenemos la expresión final para la familia de curvas que son órbitas de las ecuaciones de Lotka-Volterra:

$$\frac{y^a}{e^{by}} \frac{x^c}{e^{dx}} = K \quad (2.3)$$

donde  $K$  es una constante.

El siguiente lema, permite ver que efectivamente todas las curvas van a ser cerradas.

**Lema 2.1**

La ecuación (2.3) define una familia de curvas cerradas para  $x, y > 0$ .

**DEM:**

Nótese primeramente que  $f(y) = y^a/e^{by}$  cumple  $f(0) = 0$  y  $f(\infty) = 0$  siendo  $f(y) > 0$  cuando  $y > 0$ , por lo que debe tener al menos un máximo en el intervalo  $[0, +\infty]$ . Si calculamos su derivada vemos que dicho punto crítico además es único:

$$f'(y) = \frac{ay^{a-1} - by^a}{e^{by}} = \frac{y^{a-1}(a - by)}{e^{by}}$$

Haciendo  $f'(y) = 0$  se tiene que en  $y = a/b$  se alcanza el máximo, y sustituyendo en la expresión de  $f(y)$  se obtiene el valor máximo que denotaremos por  $M_y$  y valdrá  $M_y = \frac{(a/b)^a}{e^a}$ . El mismo resultado se obtendría para la función  $g(x) = y^c/e^{dx}$ , que alcanzaría un máximo en  $x = c/d$  y valdría  $M_x = \frac{(c/d)^c}{e^c}$ .

Es decir, la forma de estas dos funciones cuando  $x$  e  $y$  son positivos sería como la que se muestra en la Figura 2.4a.

De la expresión (2.3) y esto último, se deduce que si  $K > M_x M_y$  dicha ecuación no tendrá solución cuando  $x$  e  $y$  sean positivos y además, solo tendrá la solución  $x = c/d$  e  $y = a/b$  cuando  $K = M_x M_y$ .

Por tanto, tan solo es necesario considerar el caso  $K = \lambda M_y$  con  $0 < \lambda < M_x$ . Por la forma de la gráfica la ecuación  $g(x) = \lambda$  tendrá dos soluciones, una menor que  $c/d$  que denotaremos por  $x_m$  y otra mayor  $x_M$ .

$$\text{Como } f(y)g(x) = K = \lambda M_y \implies f(y) = \left(\frac{\lambda}{g(x)}\right) M_y$$

Llamando  $L = \left(\frac{\lambda}{g(x)}\right)$ , la ecuación anterior en  $y$  va a tener la solución  $y = a/b$  cuando  $L = 1 \iff \lambda = g(x) \iff x = x_m \text{ o } x = x_M$ .

Cuando  $x < x_m$  o  $x > x_M$  se tendrá que  $L > 1$  y por tanto  $f(y) > M_y$  lo cual es imposible al ser  $M_y$  el máximo valor posible de  $f(y)$ .

Solo queda ver qué pasa cuando  $x_m < x < x_M$ . En esos casos, el valor de  $L < 1$  y por tanto tendríamos que hallar las soluciones de  $f(y) = c$  con  $0 < c < M_y$ , que por la forma de la función, se darán dos soluciones,  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  que dependerán del punto  $x$  que estemos considerando. Suponemos que  $y_1(x)$  será menor que  $y_2(x)$ , cumpliendo además que serán menores y mayores que  $a/b$  respectivamente. Si hacemos tender  $x$  hacia  $x_m$  o  $x_M$ , tanto  $y_1(x)$  como  $y_2(x)$  se aproximarán a  $a/b$ , lo cual demuestra el enunciado del lema, siendo las curvas cerradas (véase Figura 2.4b).

También se ha demostrado, que las órbitas de (2.2) son periódicas si tomamos  $x(0)$  e  $y(0)$  positivos como condición inicial, excepto el punto de equilibrio,  $x = a/b$  e  $y = c/d$ . ■

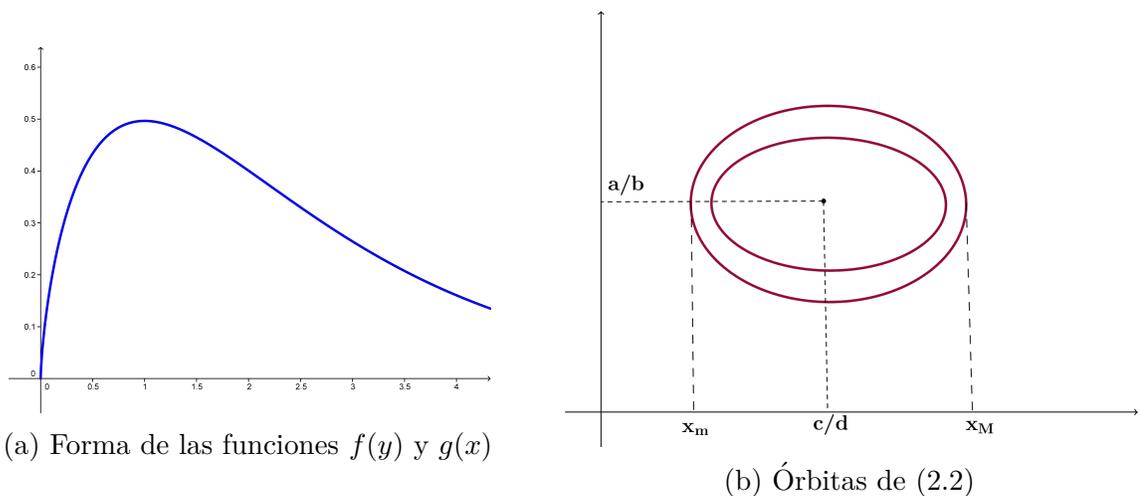


Figura 2.4: Gráficas de  $f(y)$  y  $g(x)$  junto con las órbitas de (2.2)

Ahora, al haber demostrado que las órbitas son cerradas y por tanto periódicas, podemos

concluir que contienen al punto de equilibrio en su interior y por tanto queda justificado que se trata de un centro, modificado por la parte no lineal del sistema.

Veamos ahora, otra propiedad de las ecuaciones del modelo que estamos estudiando. Se definen los valores medios de  $x(t)$  e  $y(t)$  como:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (2.4)$$

**Lema 2.2**

Sean  $x(t)$  e  $y(t)$  las soluciones periódicas de (2.2), con período  $T > 0$ . Entonces  $\bar{x} = \frac{c}{d}$  e  $\bar{y} = \frac{a}{b}$ . Es decir, los valores medios de  $x(t)$  e  $y(t)$  son los puntos de equilibrio.

**DEM:**

Tomemos la primera ecuación de (2.2) y dividámosla por  $x$ , para obtener que

$$\frac{\dot{x}}{x} = a - by$$

de lo cual integrando se sigue que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T (a - by(t)) dt = \frac{1}{T} (\ln x(T) - \ln x(0)) = 0$$

ya que por la periodicidad se tiene que  $x(T) = x(0)$ . Por tanto, tenemos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{T} \int_0^T by(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T a dt = \frac{Ta}{T} = a$$

de donde sacando la constante  $b$  del primer integrando se obtiene que  $\bar{y} = a/b$ .

Análogamente, dividiendo la segunda ecuación de (2.2) por  $y$  y realizando las operaciones anteriores se obtiene que  $\bar{x} = c/d$ . ■

### 2.1.1 Efectos de la pesca sobre el modelo

Vamos a añadirle al modelo, que las especies interactuando pueden ser pescadas. Así pues, las presas decrecerán a un ritmo que vamos a suponer proporcional a su número, digamos  $\varepsilon x(t)$ . De la misma forma decrecerá el número de depredadores a un ritmo de la forma

$\varepsilon y(t)$ . La constante  $\varepsilon$ , lleva incluidos todas las posibles formas de influir sobre la pesca, esto es, número de barcos en el mar, número de redes, la intensidad de la pesca, etc.

Por tanto, el sistema de ecuaciones (2.2), se transforma en:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - \varepsilon x = (a - \varepsilon)x - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - \varepsilon y = -(c + \varepsilon)x + dxy \end{cases} \quad (2.5)$$

Como vemos, (2.5) es el mismo sistema que (2.2), salvo una pequeña modificación de las constantes  $a$  y  $c$ . Por tanto, los valores medios calculados utilizando el Lema 2.2 son:

$$\bar{x} = \frac{c + \varepsilon}{d}, \quad \bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{b}$$

Y lo anterior, resulta bastante curioso, ya que con un ritmo de pesca moderado ( $\varepsilon < a$ ), el número medio de presas crece y decrece el número de depredadores. Sin embargo, con un ritmo de pesca reducido, se reduce el número de presas aumentándose el de depredadores paradójicamente.

Este fenómeno se conoce como *Principio de Volterra*<sup>2</sup>, y como vemos resuelve el problema que tenía D'Ancona para explicar los datos expuestos al comienzo de la sección.

### 2.1.2 Efectos de competición interna de las especies

Vamos a estudiar ahora, otra modificación del modelo de Lotka-Volterra, que es más general que las anteriores, ya que como sabemos, en la naturaleza algunas especies compiten entre sus miembros por los recursos limitados que rodean su entorno.

Fruto de esa competición entre ellas, se produce una bajada del ritmo de crecimiento de ambas poblaciones, quedando el modelo con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy - ex^2 \\ \frac{dy}{dt} = -cy + dxy - fy^2 \end{cases} \quad (2.6)$$

donde los términos  $ex^2$  y  $fy^2$  representan la competición interna de las especies.

Antes de pasar a analizar el problema (2.6), veamos dos lemas básicos pero muy útiles que nos ayudarán más adelante para sacar conclusiones relevantes sobre este sistema.

<sup>2</sup>En la literatura también puede encontrarse como *Paradoja de los pesticidas*.

**Lema 2.3**

Sea  $g(t)$  una función monótona creciente (decreciente) para  $t \geq t_0$  con  $g(t) \leq c$  ( $\geq c$ ) para alguna constante  $c$ . Entonces  $g(t)$  tiene límite cuando  $t$  tiende a infinito.

**DEM:**

Supongamos que  $g(t)$  es monótona creciente estando acotada superiormente cuando  $t \geq t_0$ , siendo  $L$  la menor de las cotas, es decir, el supremo. Veamos que  $L$  es precisamente el límite de  $g(t)$  cuando  $t$  tiende a infinito.

Para ello, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $t_\varepsilon \geq t_0$  tal que  $L - g(t_\varepsilon) < \varepsilon$ , es decir, nos podemos acercar tanto a  $L$  con puntos de la forma  $g(t)$  como queramos. Ahora, como  $g(t)$  es monótona si  $t \geq t_\varepsilon$  entonces  $g(t) \geq g(t_\varepsilon) \implies L - g(t) \leq L - g(t_\varepsilon) < \varepsilon$ , y esta última acotación es la definición de límite.

Para el caso en que  $g(t)$  sea monótona decreciente, la demostración es análoga pero considerando el ínfimo. ■

**Lema 2.4**

Si una solución  $x(t)$  de  $\dot{x} = f(x)$  con  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  converge, cuando  $t$  tiende a infinito, hacia un vector  $\xi$ . Entonces,  $\xi$  es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial.

**DEM:**

Supongamos que  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  se aproxima a  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  cuando  $t$  tiende a infinito. Entonces se tiene para cada  $j = 1, \dots, n$  que:

$$|x_j(t_1) - x_j(t_2)| = |(x_j(t_1) - \xi_j) + (\xi_j - x_j(t_2))| \leq |x_j(t_1) - \xi_j| + |\xi_j - x_j(t_2)|$$

y si  $t_1$  y  $t_2$  son suficientemente grandes, entonces  $|x_j(t_1) - \xi_j|$  y  $|\xi_j - x_j(t_2)|$  se aproximarán cada vez más a cero, pues las componentes de los vectores anteriores deben aproximarse al converger el uno al otro. Por tanto,  $|x_j(t_1) - x_j(t_2)|$  se aproxima a 0.

En particular, tomando  $t_1 = t$  y  $t_2 = t + h$  con  $h > 0$  fijo. Por lo anterior,  $|x_j(t+h) - x_j(t)|$  tiende a cero cuando  $t$  tiende a infinito. Pero, por el Teorema de los Valores Intermedios,

$$x_j(t+h) - x_j(t) = h \frac{dx_j(t_*)}{dt} = h f_j(x_1(t_*), \dots, x_n(t_*))$$

para cierto  $t_* \in (t, t+h)$ . Pero nuevamente, por la definición de límite,  $f_j(x_1(t_*), \dots, x_n(t_*))$  debe aproximarse a  $f_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , de lo cual sigue que  $f_j(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0$  para cada  $j = 1, \dots, n$ , que es precisamente la condición que debe cumplir un punto de equilibrio. ■

Denotemos por  $P_e = (a/e, 0)$  el punto de equilibrio que tiene (2.6) en el primer cuadrante que no es el  $(0, 0)$ .

Vamos a dividir el cuadrante en regiones donde  $\dot{x}(t)$  e  $\dot{y}(t)$  tengan signos distintos.

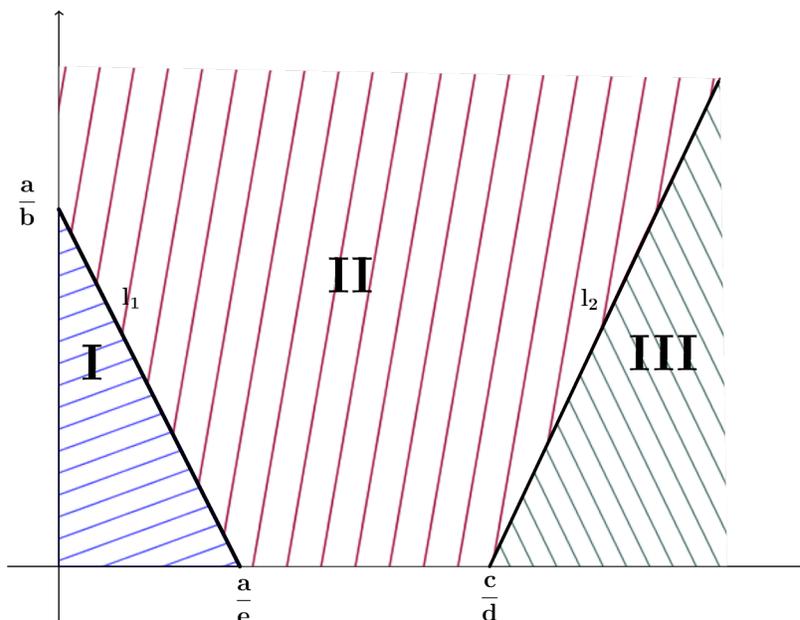


Figura 2.5: Regiones para (2.6)

Esta división se obtiene considerando las rectas  $l_1 \equiv a - by - ex = 0$  y  $l_2 \equiv -c + dx - fy = 0$  (véase Figura 2.5) que no intersecan si  $c/d$  es mayor que  $a/e$ . El cuadrante quedaría dividido en tres regiones, de manera que se tiene que  $ex + by < a$  en la región I y  $ex + by > a$  en las otras regiones. Por tanto,  $\dot{x} = ax - bxy - ex^2 = x(a - by - ex) > 0$  en la región I y  $\dot{x} < 0$  en las otras dos.

Análogamente, la expresión  $-dx + fy > -c$  en las regiones I y II y  $-dx + fy < -c$  en la región III. Por consiguiente,  $\dot{y} = -cy + dxy - fy^2 = y(-c + dx - fy) < 0$  en las regiones I y II y  $\dot{y} > 0$  en la región III.

A modo de resumen, las regiones tienen las siguientes características:

- \* **Región I:**  $\dot{x} > 0$  y  $\dot{y} < 0$
- \* **Región II:**  $\dot{x} < 0$  y  $\dot{y} < 0$
- \* **Región III:**  $\dot{x} < 0$  y  $\dot{y} > 0$

Ahora vamos a probar que cualquier solución de (2.6) que empiece en el primer cuadrante converge al punto de equilibrio  $P_e$  cuando  $t$  tiende a infinito. Para ello, vamos a apoyarnos en cuatro lemas que enunciamos y demostramos a continuación:

**Lema 2.5**

Cualquier solución  $x(t)$ ,  $y(t)$  de (2.6) que empiece en la región I en el tiempo  $t = t_0$  permanecerá en dicha región para  $t \geq t_0$  y convergerá al punto de equilibrio  $P_e$ .

**DEM:**

Supongamos que  $x(t)$ ,  $y(t)$  deja la región I en el instante  $t = t_*$ , es decir, el punto  $(x(t_*), y(t_*)) \in l_1 \implies \dot{x}(t_*) = 0$  por el cambio en la derivada de las regiones I y II y porque solo se puede dejar la región I saliendo por la región II. Derivando la primera ecuación en (2.6) respecto a  $t$  y evaluando el resultado en  $t = t_*$  queda:

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= a\dot{x}(t) - b(\dot{x}(t)y(t) + \dot{y}(t)x(t)) - 2e\dot{x}(t)x(t) \\ \ddot{x}(t_*) &= a\dot{x}(t_*) - b(\dot{x}(t_*)y(t_*) + \dot{y}(t_*)x(t_*)) - 2e\dot{x}(t_*)x(t_*) = \\ &= -b\dot{y}(t_*)x(t_*)\end{aligned}$$

y se tiene que  $\ddot{x} > 0$  pues  $\dot{y} < 0$  en las regiones I y II y por continuidad también en  $l_1$ . Por tanto,  $x(t)$  es convexa en un entorno de  $t_*$  y al ser  $\dot{x}(t_*) = 0$  en  $t = t_*$ ,  $x(t)$  tiene un mínimo, lo cual entra en contradicción con que  $x(t)$  sea creciente en la región I al ser  $\dot{x} > 0$ . Por tanto, hemos demostrado que la solución de (2.6) no puede abandonar la región I. Veamos ahora, que además converge a  $P_e$ .

Tenemos dos funciones  $x(t)$  e  $y(t)$ , de forma que son monótonas creciente y decreciente respectivamente, estando  $x(t)$  acotada superiormente por  $a/e$  e  $y(t)$  inferiormente por 0. Podemos aplicar llegados a este punto el Lema 2.3 para concluir que  $x(t)$  tiende a  $\xi$  cuando  $t$  tiende a infinito e  $y(t)$  hace lo propio tendiendo a otro límite que denotaremos por  $\nu$ . Por el Lema 2.4,  $(\xi, \nu)$  es un punto de equilibrio de (2.6). Pero sabemos que los únicos puntos de equilibrio del primer cuadrante que tiene (2.6) son  $(0, 0)$  y  $P_e$ , y además  $\xi$  no puede tender a 0 porque  $x(t)$  es creciente, de lo cual se deduce que necesariamente la solución converge a  $P_e$ . ■

**Lema 2.6**

Cualquier solución  $x(t)$ ,  $y(t)$  de (2.6) que empiece en la región III en el tiempo  $t = t_0$  saldrá de dicha región en algún instante posterior.

**DEM:**

Razonemos como en el lema anterior por reducción al absurdo. Supongamos que la solución  $x(t)$ ,  $y(t)$  no abandona en ningún instante de tiempo la región III partiendo de  $t = t_0$ . En

esta región, tendremos que  $x(t) > c/d$  es monótona decreciente e  $y(t) < \frac{dx(t_0)-c}{f}$  (al ser la región III el hiperplano  $-c + dx - fy > 0$ ) monótona creciente. Aplicando el Lema 2.3 se concluye que  $x(t)$  e  $y(t)$  tienen límites  $\xi$  y  $\nu$  respectivamente cuando  $t$  tiende a infinito, y aplicando el Lema 2.4 se tiene que  $(\xi, \nu)$  es un punto de equilibrio de (2.6). Pero como los únicos puntos de equilibrio ya hemos visto que son el origen y  $P_e$ , que no están en la región III, se llega a una contradicción. ■

**Lema 2.7**

Cualquier solución  $x(t), y(t)$  de (2.6) que empiece en la región II en el instante  $t = t_0$  y que no abandone dicha región para  $t \geq t_0$  converge al punto de equilibrio  $P_e$ .

**DEM:**

Si suponemos que la solución no abandona la región II, tanto  $x(t)$  como  $y(t)$  serán monótonas decrecientes cumpliéndose además que  $x(t)$  e  $y(t)$  son positivas pues no podemos cambiar de cuadrante, o en otros términos, están acotadas por 0 inferiormente. Por tanto, por el Lema 2.3 ambas tienen límite y por el Lema 2.4 el punto formado por los límites de cada una es un punto de equilibrio, que no puede ser el origen por no estar en la región II. Por tanto, dicho punto debe ser  $P_e = (a/e, 0)$ . ■

**Lema 2.8**

Cualquier solución  $x(t), y(t)$  de (2.6) no puede entrar en la región III desde la región II.

**DEM:**

Supongamos que una solución abandona la región II para entrar en la región III en un instante  $t = t_*$ . Entonces al cambiar  $\dot{y}$  de signo en estas regiones, se tiene que  $\dot{y}(t_*) = 0$  por la continuidad. Derivando en la segunda ecuación de (2.6) y evaluando en  $t = t_*$ :

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= -c\dot{y}(t) + d(\dot{x}(t)y(t) + \dot{y}(t)x(t)) - 2f\dot{y}(t)y(t) \\ \ddot{y}(t_*) &= -c\dot{y}(t_*) + d(\dot{x}(t_*)y(t_*) + \dot{y}(t_*)x(t_*)) - 2f\dot{y}(t_*)y(t_*) = \\ &= d\dot{x}(t_*)y(t_*) \end{aligned}$$

Al ser  $\dot{x}(t_*) < 0$ , la derivada segunda anterior es negativa, lo cual permite decir que en  $t = t_*$   $y(t)$  tiene un máximo. Pero esto es contradictorio con el hecho de que  $y(t)$  es decreciente en la región II. ■

**Nota:** Obsérvese también que cualquier solución que empiece en la recta  $l_1$  entrará en la región I y que cualquier solución que comience en la recta  $l_2$  debe entrar en la región II, por los argumentos de los Lemas 2.5 y 2.8.

De estos lemas, podemos deducir fácilmente la siguiente proposición:

**Proposición 2.9**

Cualquier solución  $x(t)$ ,  $y(t)$  de (2.6), con  $x(0) > 0$  e  $y(0) > 0$  converge hacia el punto de equilibrio  $P_e = (a/e, 0)$  cuando  $t$  tiende a infinito.

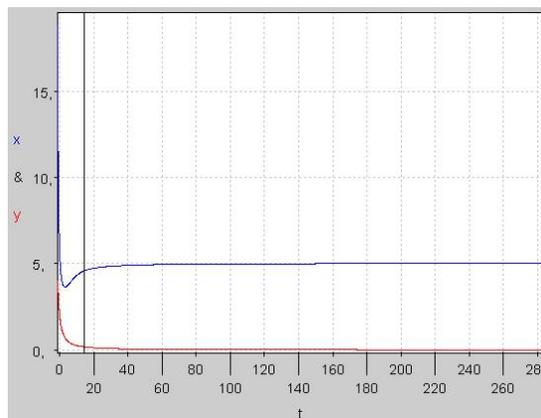
**DEM:**

Si la solución comienza en la región I, se aplica directamente el Lema 2.5, lo mismo que si se empieza en la recta  $l_1$ .

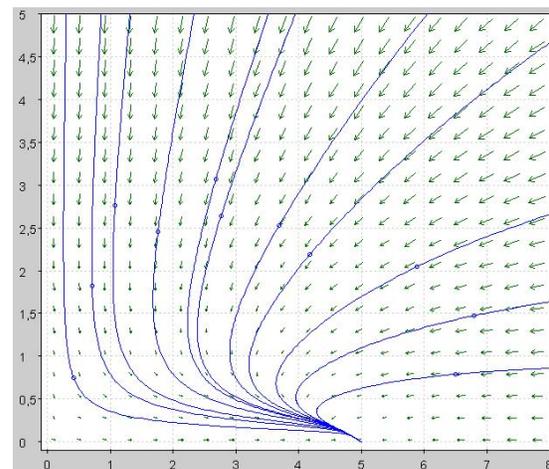
Si se comienza en la región II y no se sale de ella, el resultado sigue del Lema 2.7. En caso contrario, como no puede entrar en la región III por el Lema 2.8 debe entrar la región I, por lo que se reduce todo al caso anterior. Lo mismo ocurre, si se comienza en la recta  $l_2$ .

Por último, si se parte de la región III, por el Lema 2.6 en algún instante debemos salir de ella, y por tanto entrar en la región II, reduciendo el caso al considerado en el párrafo anterior. ■

Utilicemos de nuevo el software con ordenador para ver tales efectos en una gráfica. Recordemos que estamos suponiendo que  $c/d > a/e$ . Tomando los valores  $a = 0.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.17$ ,  $d = 0.03$ ,  $e = 0.1$  y  $f = 0.25$ :



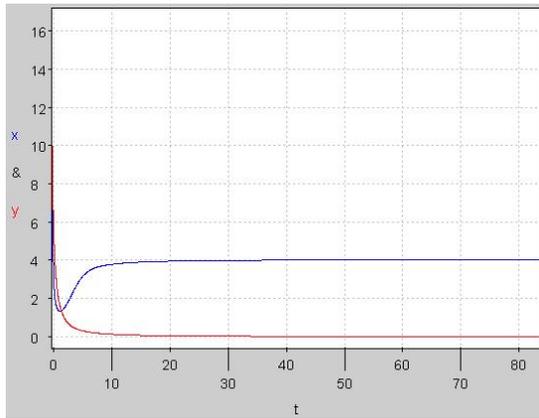
(a)  $x(t)$  vs  $y(t)$



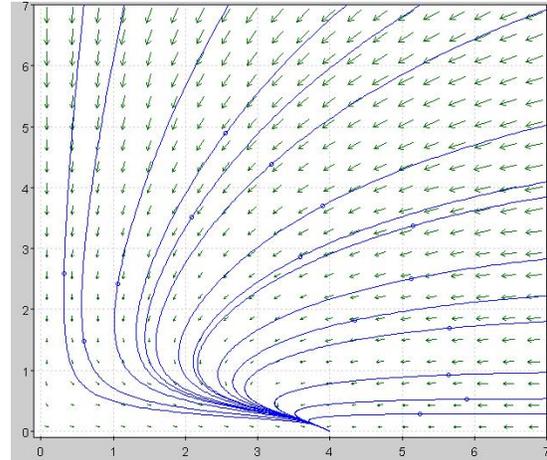
(b) Plano de fases

Figura 2.6: Parámetros:  $a = 0.5$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 0.17$ ,  $d = 0.03$ ,  $e = 0.1$  y  $f = 0.25$

Modificando los valores a estos otros,  $a = 1.2$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 0.4$ ,  $d = 0.075$ ,  $e = 0.3$  y  $f = 0.3$ , obtenemos las siguientes gráficas:



(a)  $x(t)$  vs  $y(t)$



(b) Plano de fases

Figura 2.7: Parámetros:  $a = 1.2$ ,  $b = 0.5$ ,  $c = 0.4$ ,  $d = 0.075$ ,  $e = 0.3$  y  $f = 0.3$

Como vemos, ya no se producen oscilaciones entre el número de presas y depredadores cuando el tiempo tiende hacia infinito, sino que ambas especies alcanzan un equilibrio, ya que según hemos demostrado, en el plano de fases se tiende hacia un punto de equilibrio de la ecuación (2.6). En el primer ejemplo  $P_e = (5, 0)$  y en el segundo  $P_e = (4, 0)$ . Otra cosa a observar, es que al ser la segunda coordenada de este punto siempre nula, quiere decir, reinterpreutando nuestro modelo, que el número de depredadores tiende a desaparecer conforme pasa el tiempo.

### 2.1.3 Interacción de tres o más especies

Al igual que interactúan dos especies, también cabe la posibilidad de que interactúen muchas más formando cadenas entre ellas. Volterra se planteó dicha posibilidad en su célebre libro “Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie”, [14]. Dicha posibilidad también viene recogida y analizada en [9] donde se plantea el siguiente sistema de Lotka-Volterra generalizado para  $N$  especies:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left( r_i - \sum_{j=1}^N K_{ij} x_j \right) \quad i = 1, \dots, N \quad (2.7)$$

donde  $x_i$  es el número de individuos de la especie  $i$ ,  $r_i$  su tasa de crecimiento o decrecimiento y la matriz  $K = (K_{ij})$  determina la interacción entre las especies.

Como este sistema es bastante complejo, veamos un ejemplo bastante interesante tomado de un ejercicio de [1] en el que se consideran tres especies:

### Ejemplo 2.10

Aunque el modelo de Lotka-Volterra está muy bien para modelar la interacción entre dos especies, en la naturaleza sabemos que se suelen formar cadenas alimentarias entre varias. En este ejemplo, vamos a ampliar el modelo de las secciones anteriores añadiendo una nueva especie.

Un caso típico de este tipo de interacción ocurre en la famosa isla de Komodo en Indonesia, que cuenta entre sus habitantes con los dragones de Komodo, que son carnívoros que se alimentan de algunos mamíferos que a su vez suelen nutrirse con plantas.



Por tanto, tenemos tres especies (dragones, mamíferos y plantas) que van a verse modificados en número por las interacciones entre ellos. Las ecuaciones del modelo son las siguientes:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = a_3x_3 - a_4x_3^2 - c_{31}x_1x_3 \end{cases} \quad (2.8)$$

donde  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  representan el número de mamíferos, dragones y plantas en un instante  $t$  respectivamente.

Tanto el número de mamíferos como de dragones tiende a desaparecer de manera natural, mientras que el de plantas crece exponencialmente.

En la primera ecuación de (2.8) tendríamos que el número de mamíferos se ve disminuido por la interacción con los dragones y aumentado por la interacción con las plantas.

En la segunda, los dragones crecerían al comer mamíferos y no se verían afectados por el número de plantas pues no se alimentan de ellas. De igual manera, las plantas tampoco se verían afectadas por los dragones, pero sí por los mamíferos que al alimentarse de ellas las hacen decrecer en número. Las plantas también compiten entre ellas por los nutrientes

del suelo, de ahí que aparezca el sumando  $a_4x_3^2$  (véase la subsección anterior relativa a la competición interna entre especies).

Calculemos todos los puntos de equilibrio que tiene el sistema (2.8). Para tal labor, debemos igualar a 0 cada una de las ecuaciones de dicho sistema.

Comenzando con la segunda, tenemos que  $-a_2x_2 + b_{21}x_1x_2 = x_2(-a_2 + b_{21}x_1) = 0 \implies x_2 = 0$  ó  $b_{21}x_1 = a_2 \implies x_1 = \frac{a_2}{b_{21}}$ .

Tenemos por tanto dos casos:

i) Caso  $x_2 = 0$ :

Sustituyendo este valor de  $x_2$  en las otras dos ecuaciones de (2.8) e igualándolas a 0 como antes, se llega a que en la primera se cumple  $x_1(-a_1 + c_{13}x_3) = 0 \implies x_1 = 0$  ó  $c_{13}x_3 = a_1 \implies x_3 = \frac{a_1}{c_{13}}$ .

Por consiguiente, tenemos dos subcasos:

i.1) Subcaso  $x_1 = 0$ :

Haciendo la tercera ecuación igual a cero y sustituyendo el valor de  $x_1 = 0$ , llegamos a que  $x_3(a_3 - a_4x_3) = 0 \implies x_3 = 0$  ó  $x_3 = \frac{a_3}{a_4}$ .

i.2) Subcaso  $x_3 = \frac{a_1}{c_{13}}$ :

Igualando la tercera ecuación a cero y sustituyendo este valor de  $x_3$  llegamos a

$$\text{que: } a_3 \frac{a_1}{c_{13}} - a_4 \left( \frac{a_1}{c_{13}} \right)^2 - c_{31}x_1 \frac{a_1}{c_{13}} = 0 \implies x_1 = \frac{a_3 \frac{a_1}{c_{13}} - a_4 \left( \frac{a_1}{c_{13}} \right)^2}{\frac{c_{31}a_1}{c_{13}}}$$

Simplificando y denotando por  $x_1^*$  al valor de  $x_1$  resultante (por comodidad) se tendría que:

$$x_1^* = \frac{c_{13}a_3a_1 - a_4a_1^2}{c_{13}c_{31}a_1}$$

Por tanto, de este primer caso hemos obtenido tres puntos de equilibrio que son:

$$P_1 = (0, 0, 0), P_2 = (0, 0, \frac{a_3}{a_4}) \text{ y } P_3 = (x_1^*, 0, \frac{a_1}{c_{13}}).$$

ii) Caso  $x_1 = \frac{a_2}{b_{21}}$ :

Sustituyendo este valor de  $x_1$  en las otras dos ecuaciones e igualando a 0 obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_1 \frac{a_2}{b_{21}} - b_{12} \frac{a_2}{b_{21}} x_2 + c_{13} \frac{a_2}{b_{21}} x_3 = 0 \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_3 - a_4 x_3^2 - c_{31} \frac{a_2}{b_{21}} x_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

De esta segunda ecuación se deduce que  $x_3(a_3 - a_4x_3 - c_{31}\frac{a_2}{b_{21}}) = 0$  y por tanto o bien  $x_3 = 0$  ó  $a_3 - a_4x_3 - c_{31}\frac{a_2}{b_{21}} = 0 \implies$  denotando por  $x_3^*$  el valor resultante al despejar  $x_3$  en la ecuación que  $x_3^* = \frac{a_3b_{21} - c_{31}a_2}{b_{21}a_4}$ .

Distinguiendo estos dos casos obtenemos finalmente:

ii.1) Subcaso  $x_3 = 0$ :

Sustituyendo en la primera ecuación de (2.9) que  $x_2 = \frac{-a_1\frac{a_2}{b_{21}}}{\frac{b_{12}a_2}{b_{21}}} = -\frac{a_1}{b_{12}}$

ii.2) Subcaso  $x_3 = x_3^*$ :

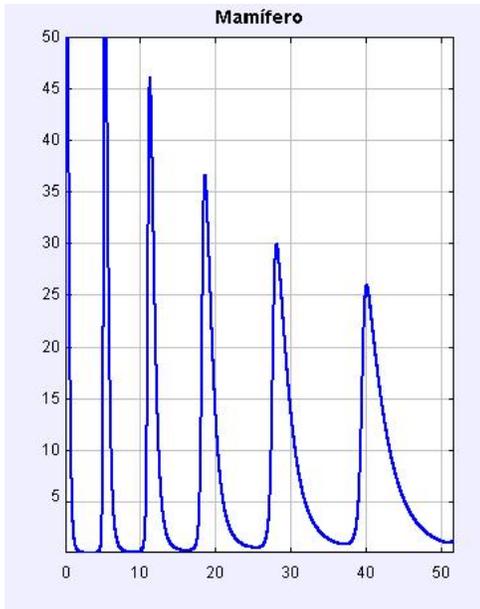
Sustituyendo en  $x_1 = 0$  este valor de  $x_3$ , llegamos a una ecuación en  $x_2$  que tras despejar nos da un valor para esta última variable que denotamos por  $x_2^*$  y vale tras simplificar las expresiones:  $x_2^* = \frac{-a_1a_2 + c_{13}a_2x_3^*}{b_{12}a_2}$

De este caso, obtenemos dos nuevos puntos de equilibrio que son  $P_4 = (\frac{a_2}{b_{21}}, -\frac{a_1}{b_{12}}, 0)$  y  $P_5 = (\frac{a_2}{b_{21}}, x_2^*, x_3^*)$

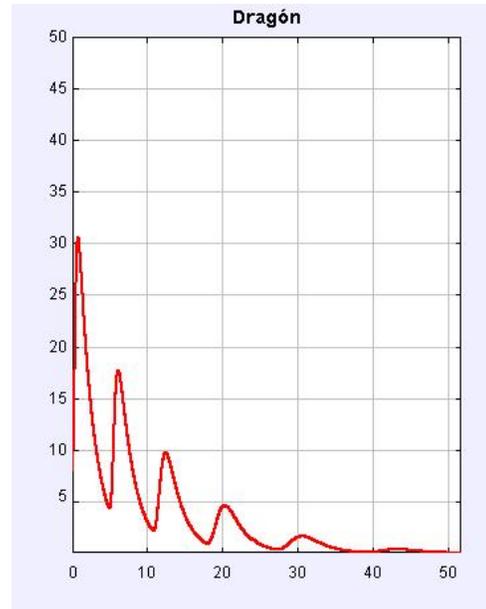
Los valores que a nosotros nos interesan para las variables deben ser positivos, pues estamos contando el número de individuos de ciertas especies, por tanto el punto de equilibrio  $P_4$  no tendría sentido biológico al igual que los puntos  $P_3$  y  $P_5$  para ciertos valores de los parámetros en cuestión que pueden conducir a valores negativos.

Ya que el sistema es no lineal y difícil de estudiar analíticamente, podemos utilizar la herramienta EJS para resolver estas ecuaciones y ver cómo sería la trayectoria de las soluciones en 3D. Tras hacer varias pruebas con el programa, observamos que cambiando ligeramente los valores de algunos de los parámetros anteriores, a medida que pasa el tiempo las soluciones pueden variar mucho, lo cual quiere decir que este sistema es bastante caótico en este sentido. Tomemos en primer lugar como ejemplo los parámetros  $a_1 = 0.3$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 0.005$ ,  $b_{12} = 0.15$ ,  $b_{21} = 0.05$ ,  $c_{31} = 0.2$  y  $c_{13} = 0.2$ .

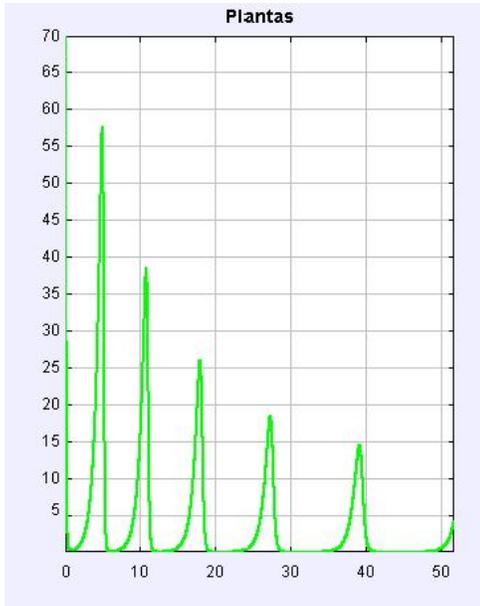
Los puntos de equilibrio es este caso serían:  $P_1 = (0, 0, 0)$ ,  $P_2 = (0, 0, 300)$ ,  $P_3 = (7.46, 0, 1.5)$ ,  $P_4 = (10, -2, 0)$  y  $P_5 = (10, -135.33, -100)$ . Los resultados se pueden ver en la Figura 2.8.



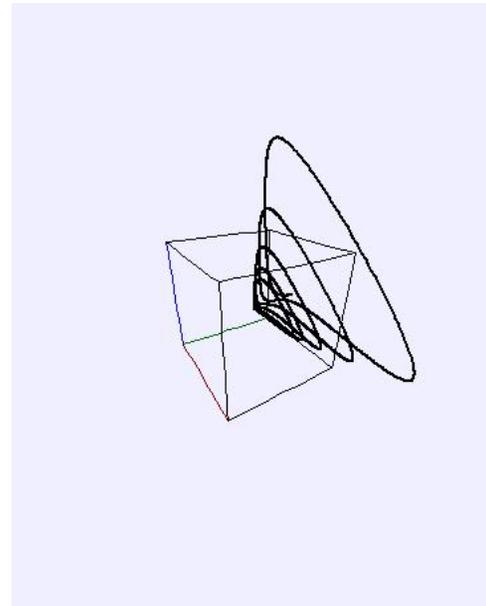
(a)  $t$  vs  $x_1(t)$



(b)  $t$  vs  $x_2(t)$



(c)  $t$  vs  $x_3(t)$



(d) Espacio de fases (en 3D)

Figura 2.8: Parámetros:  $a_1 = 0.3$ ,  $a_2 = 0.5$ ,  $a_3 = 1.5$ ,  $a_4 = 0.005$ ,  $b_{12} = 0.15$ ,  $b_{21} = 0.05$ ,  $c_{31} = 0.2$  y  $c_{13} = 0.2$

## 2.2 Modelos biológicos discretos

En esa sección vamos a explorar parte del contenido de [15] en el que se analizan algunas propiedades del modelo logístico discreto dado por

$$x_{n+1} = x_n e^{r_n(1-x_n/K_n)} \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.10)$$

donde  $x_n$  denota el número de individuos de cierta especie en un instante de tiempo  $n$ ,  $r_n$  su ritmo de crecimiento/decrecimiento y  $K_n$  la capacidad.

En [15], se da la respuesta al siguiente problema: si  $r_n$  y  $K_n$  son periódicas (no constantes) con el mismo período  $T$ , entonces, ¿la ecuación del modelo tiene una solución periódica positiva de período  $T$  que además atrae a cualquier otra solución?

Pues la respuesta es negativa. Pero lo más curioso del artículo no es eso, sino que se dan contraejemplos para desmontar algunos resultados recogidos en otro artículo publicado<sup>3</sup> un par de años antes que [15].

Comencemos viendo por qué no es cierto el resultado relativo a la periodicidad para el caso discreto en cuestión. Para ello hagamos previamente las siguientes suposiciones:

- $x_0 > 0$
- $r_n$  y  $K_n$  son sucesiones positivas de números reales.
- Además están acotadas:  $0 < r_* \leq r_n \leq r^*$  y  $0 < K_* \leq K_n \leq K^* \quad \forall n \in \mathbb{N}$

El contraejemplo que refuta la conjetura planteada es el siguiente:

Tomemos  $r_n$  y  $K_n$  de la siguiente forma:

$$r_{3n} = 1 \quad r_{3n+1} = 1.5 \quad r_{3n+2} = 1$$

$$K_{3n} = 1 \quad K_{3n+1} = 5 \quad K_{3n+2} = 8$$

bajo esta manera de definir las dos sucesiones va implícito que van a tener período 3 ambas, es decir,  $r_{3n+3} = r_{3n} = 1$  y  $K_{3n+3} = K_{3n} = 1$

Con todo esto, la ecuación (2.10) presenta una solución periódica de período 3,  $\bar{x}_{3n}$ , dada por:

$$\bar{x}_{3n} = 3.2184 \quad \bar{x}_{3n+1} = 0.3501 \quad \bar{x}_{3n+2} = 1.4126$$

y otra solución de período 6 dada por:

<sup>3</sup>MOHAMAD, S. Y GOPALSAMY, K., *Extreme stability and almost periodicity in a discrete logistic equation*, Tohoku Math. J.52, 107-125 (2000).

$$\begin{aligned} x_{6n}^* &= 5.6940 & x_{6n+1}^* &= 0.0521 & x_{6n+2}^* &= 0.2299 \\ x_{6n+3}^* &= 0.6072 & x_{6n+4}^* &= 0.8993 & x_{6n+5}^* &= 3.0774 \end{aligned}$$

Sin embargo, la solución  $\bar{x}_n$  es inestable, por lo que no se puede cumplir lo conjeturado.

Veamos a continuación uno de los errores antes mencionados del artículo que figura en la nota a pie de página.

Un primer teorema enuncia que si las sucesiones  $r_n$  y  $K_n$  satisfacen las condiciones dadas por los items de la página anterior entonces cualesquiera dos soluciones  $x_n, y_n$  de (2.10) deben cumplir que  $\lim_{x \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = 0$  y claramente el contraejemplo anterior con las dos soluciones  $\bar{x}$  y  $x^*$  también nos sirve para invalidar este teorema.

El problema es que este “Teorema” está basado en dos lemas que ya son falsos. Pasemos a enunciarlos y ver contraejemplos que permitan probar su falsedad:

**Lema 2.11**

Consideremos que  $r_n$  y  $K_n$  cumplen las tres condiciones expuestas anteriormente. Entonces para cualquier solución de (2.10), existe  $N > 0$  cumpliendo que

$$x_{min} \leq x_n \leq x_{max}, \quad n \geq N$$

donde

$$x_{min} = x_{max} e^{r_* - r^* x_{max}/K_*}, \quad x_{max} = \frac{K^*}{r_*} e^{r^* - 1}$$

Consideremos  $r_n = 1/2$ ,  $K_{2n} = 10/11 \approx 0.9090909$  y  $K_{2n+1} = \frac{10}{9} e^{-1/20} \approx 1.0569216$   $n \in \mathbb{N}$ .

Claramente se cumplen los supuestos de acotación con  $r_* = r^* = 1/2$ ,  $K^* = \frac{10}{9} e^{-1/20}$  y  $K_* = 10/11$ .

Pongamos  $x_0 = 1$ , entonces  $x_{2n} = 1$  y  $x_{2n+1} = e^{-1/20}$   $n \in \mathbb{N}$

Calculando  $x_{max} = \frac{K^*}{r_*} e^{r^* - 1} = \frac{20}{9} e^{-11/20} \approx 1.2821107$  y  $x_{min} = x_{max} e^{r_* - r^* x_{max}/K_*} \approx 1.0443000$ , nos damos cuenta de que  $x_{2n+1} < x_{min}$  para cualquier entero, por tanto no puede existir ningún  $N$  satisfaciendo el enunciado de este supuesto lema.

Veamos el segundo lema que afirma lo siguiente:

**Lema 2.12**

Sean  $r_n$  y  $K_n$  como antes pero ahora pongamos  $r^* < 2$ . Entonces para cualquier solución positiva  $x_n$  de (2.10) existe un entero positivo  $N$  tal que:

$$\left|1 - r_n \frac{x_n}{K_n}\right| < 1, \quad n \geq N$$

$$\left|1 - r_n \frac{x_n}{K_n}\right| e^{r_n(1-x_n/K_n)} < 1, \quad n \geq N$$

Para este lema, se proponen dos contraejemplos en [15].

El primero de ellos toma los siguientes valores:

$$r_n = 1, \quad K_{3n} = \frac{4}{1 + \ln(4)}, \quad K_{3n+1} = \frac{1}{1 - \ln(2)}, \quad K_{3n+2} = \frac{2}{1 - \ln(2)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Nuevamente se cumplen todos los supuestos de acotación con  $r_* = r^* = 1$ ,  $K^* = \frac{2}{1 - \ln(2)}$  y  $K_* = \frac{4}{1 + \ln(4)}$ . Pongamos  $x_0 = 4$ , tras lo cual se obtiene que:

$$x_{3n} = 4, \quad x_{3n+1} = 1, \quad x_{3n+2} = 2, \quad n \in \mathbb{N}$$

y por tanto

$$1 - r_{3n} \frac{x_{3n}}{K_{3n}} = -\ln(4) = -1.38629436112 < -1$$

incumpléndose una de las acotaciones conjeturadas en el enunciado del lema para cualquier valor natural.

El segundo contraejemplo utiliza unos valores distintos llegando a una contradicción con la otra acotación afirmada.

Tomemos ahora:

$$r_n = 1, \quad K_{2n} = 4, \quad K_{3n+1} = \frac{1}{1 - \ln(2)}, \quad K_{2n+1} = \frac{4}{7}e^{3/4} \approx 1.20971430, \quad n \in \mathbb{N}$$

Se cumplen todas las acotaciones de la hipótesis con  $r_* = r^* = 1$ ,  $K^* = 4$  y  $K_* = \frac{4}{7}e^{3/4}$ . Poniendo  $x_0 = 1$ , se tiene que  $x_{2n} = 1$  y  $x_{2n+1} = e^{3/4}$   $n \in \mathbb{N}$ . Pero sin embargo,

$$\left|1 - r_{2n} \frac{x_{2n}}{K_{2n}}\right| e^{r_{2n}(1-x_{2n}/K_{2n})} = \frac{3}{4}e^{3/4} \approx 1.58775 > 1$$



---

---

## Modelos Económicos

### Capítulo 3: Contenido

<b>3.1</b>	<b>Modelo de Goodwin</b>	<b>58</b>
3.1.1	Variables y parámetros del modelo	58
3.1.2	Suposiciones en el modelo de Goodwin	59
<b>3.2</b>	<b>Modelos económicos caóticos</b>	<b>63</b>
3.2.1	Comercio internacional	64
3.2.2	Acelerador no lineal de Goodwin	65
<b>3.3</b>	<b>Modelo de Goodwin: caso discreto</b>	<b>67</b>



EN este tercer y último capítulo, vamos a estudiar principalmente el modelo económico de Goodwin, tanto en su forma continua, que veremos que no es más que una reinterpretación de los parámetros del modelo de Lotka-Volterra estudiado en el capítulo anterior, como discreta. Adicionalmente, desarrollaremos brevemente y a modo de curiosidad dos modelos más en los que el caos puede jugar un papel primordial.

### 3.1 Modelo de Goodwin

Utilizaremos [10], para guiarnos en el desarrollo de esta sección.

En el año 1967, Richard Goodwin ideó un modelo en el que consideró una economía consistente en trabajadores y capitalistas. Los trabajadores gastan todos sus ingresos en consumir mientras que los capitalistas ahorran todo su dinero.

Este modelo, es una alternativa interesante a los modelos tradicionales que buscan explicar la dinámica de los ciclos económicos y el comportamiento a largo plazo como tendente hacia la estabilidad.

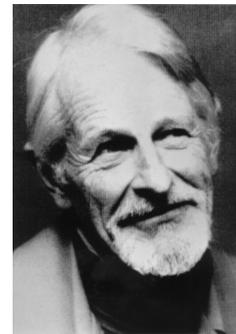


Figura 3.1: Richard Goodwin

En el modelo de Goodwin, la economía no se encuentra en un punto de equilibrio único, sino que se mantiene en fluctuación lo cual se ajusta a la idea de la “contradicción del capitalismo” de Karl Marx, que es un conjunto de leyes generales sobre la acumulación capitalista que Marx desarrolló a través de los tres volúmenes de su obra “Capital”. Goodwin probó que bajo ciertos supuestos semejantes a los establecidos por Marx en dicha obra, es posible producir crecimiento y ciclo simultáneamente.

#### 3.1.1 Variables y parámetros del modelo

- $l(t)$ : número de empleados en el instante  $t$  (total de la fuerza de trabajo empleada).
- $n(t)$ : número de trabajadores con posibilidad de trabajar, con una tasa de crecimiento constante (ejército industrial de reserva). Debe cumplirse:

$$\frac{n'(t)}{n(t)} = \beta \implies n(t) = n(0)e^{\beta t} \quad (3.1)$$

- $v(t)$ : tasa de empleo en el instante  $t$ . Estará relacionada con  $l(t)$  y  $n(t)$  de la forma

siguiente:

$$v(t) = \frac{l(t)}{n(t)} \quad \text{y además se denomina tasa de empleo relativa a: } \frac{v'(t)}{v(t)}$$

- $q(t)$ : producción en valores monetarios.
- $p(t)$ : productividad de los trabajadores empleados. Se define como el cociente entre la producción  $q(t)$  y el número de empleados  $l(t)$ .
- $k(t)$ : capital en términos monetarios.
- $i(t)$ : inversión en términos monetarios. Debe satisfacer que sea igual a la variación del capital. Por tanto,  $i(t) = k'(t)$ .
- $w(t)$ : salario medio real de los trabajadores empleados.
- $u(t)$ : participación del trabajo en la producción. Se define como el cociente:

$$u(t) = \frac{w(t)l(t)}{q(t)}$$

- $s(t)$ : ahorros (beneficios) en términos monetarios.

### 3.1.2 Suposiciones en el modelo de Goodwin

En el modelo de Goodwin vamos a realizar ciertas suposiciones para simplificarlo que son las siguientes:

- Si denotamos por  $\sigma = \frac{k(t)}{q(t)}$ , vamos a suponer que es constante en todo instante de tiempo. Por tanto, se cumple

$$\frac{k'(t)}{k(t)} = \frac{q'(t)}{q(t)}$$

- Se va a cumplir la Ley de Say <sup>1</sup>, que establece lo que ocurre cuando los beneficios o ahorros en una empresa son totalmente reinvertidos. Al ser ambas variables iguales, se cumple que:

$$s(t) = i(t) = q(t) - w(t)l(t) = q(t)(1 - u(t))$$

- La productividad va a seguir un crecimiento exponencial.

<sup>1</sup>Debida al francés Jean-Baptiste Say.

- Goodwin asumió que el ritmo de cambio del salario de los trabajadores empleados, tiene la forma:

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = f(v)$$

con  $\lim_{x \rightarrow 1} f(v) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(v) = a < 0$  y  $\frac{\partial f}{\partial v} > 0$ .

Por simplicidad, en lo siguiente tomaremos  $f(v) = -\gamma + \rho v$ , con  $\gamma$  y  $\rho$  parámetros positivos.

De estas suposiciones y las relaciones entre las distintas variables, podemos deducir las ecuaciones del modelo.

En primer lugar, suponiendo que  $p(t) = p_0 e^{\alpha t}$  ( $\alpha > 0$  constante):

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{q(t)}{l(t)} \implies q(t) = p(t)l(t) \implies q'(t) = l(t)p'(t) + l'(t)p(t) = \\ &= l(t)p_0\alpha e^{\alpha t} + p_0 e^{\alpha t}l'(t) \implies \\ \implies \frac{k'(t)}{k(t)} &= \frac{q'(t)}{q(t)} = \alpha + \frac{l'(t)}{l(t)} = \frac{i(t)}{k(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{l(t)}{n(t)} \implies v'(t) = \frac{n(t)l'(t) - l(t)n'(t)}{n(t)^2} = \frac{l'(t)}{n(t)} - \frac{n'(t)l(t)}{n(t)^2} \\ \frac{v'(t)}{v(t)} &= \frac{l'(t)}{n(t)} : \frac{l(t)}{n(t)} - \frac{n'(t)l(t)}{n(t)^2} : \frac{l(t)}{n(t)} = \frac{l'(t)}{l(t)} - \frac{n'(t)}{n(t)} = \frac{l'(t)}{l(t)} - \beta \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{q'(t)}{q(t)} = \frac{l'(t)}{l(t)} + \frac{p'(t)}{p(t)}$$

se tendría que

$$\frac{l'(t)}{l(t)} = \frac{1 - u(t)}{\sigma} - \alpha$$

lo cual lleva a que:

$$v'(t) = \left[ \frac{1}{\sigma}(1 - u(t)) - (\alpha + \beta) \right] v(t) \quad (3.2)$$

Por otro lado, derivando  $u(t)$ :

$$\begin{aligned}
u'(t) &= \frac{q(t)[w'(t)l(t) + w(t)l'(t)] - w(t)l(t)q'(t)}{q(t)^2} \\
\frac{u'(t)}{u(t)} &= \frac{q(t)^2[w'(t)l(t) + w(t)l'(t)] - w(t)l(t)q'(t)q(t)}{q(t)^2w(t)l(t)} = \\
\frac{w'(t)}{w(t)} + \frac{l'(t)}{l(t)} - \frac{q'(t)}{q(t)} &= \frac{w'(t)}{w(t)} + \frac{l'(t)}{l(t)} - \frac{l'(t)}{l(t)} - \alpha = -\alpha + \frac{w'(t)}{w(t)} = \\
&= -\alpha + f(v(t)) - \alpha - \gamma + \rho v(t) = -(\alpha + \gamma) + \rho v(t)
\end{aligned}$$

De lo cual se deduce que

$$u'(t) = [-(\alpha + \gamma) + \rho v(t)]u(t) \quad (3.3)$$

Uniendo (3.2) con (3.3) obtenemos las ecuaciones de nuestro modelo que servirán para resolver el problema de cómo fluctua la participación del trabajo en la producción así como la tasa de empleo en cada instante de tiempo  $t$ , y por consiguiente teniendo en cuenta todas las relaciones entre las variables también se podrá determinar en cada instante de tiempo, el número de trabajadores empleados, su salario, la producción y el resto de variables.

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \left[ \frac{1}{\sigma} - (\alpha + \beta) \right] v(t) - \frac{1}{\sigma} v(t)u(t) \\ \frac{du}{dt} = -(\alpha + \gamma)u(t) + \rho v(t)u(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

Las ecuaciones son exactamente las mismas que las de Lotka-Volterra, lo cual demuestra que bajo ciertas hipótesis los sistemas económicos no son más que un problema de “lucha por la supervivencia entre dos especies”.

Debemos añadirle las condiciones iniciales que serán  $u(0) = 2$  y  $v(0) = 2$ . Además  $n(0) = 200$  y  $p_0 = 30$ .

Resolviendo las ecuaciones numéricamente con la ayuda de EJS [3], obtenemos los resultados que se ven en la Figura 3.2 para las variables  $u(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$ ,  $q(t)$ ,  $l(t)$ ,  $s(t)$  y el plano de fases de  $v(t)$  frente a  $u(t)$ . Se han utilizado los siguientes valores para los parámetros del modelo:  $\alpha = 0.0001$ ,  $\beta = 0.0003$ ,  $\gamma = 0.3$ ,  $\sigma = 0.2$  y  $\rho = 0.1$ .

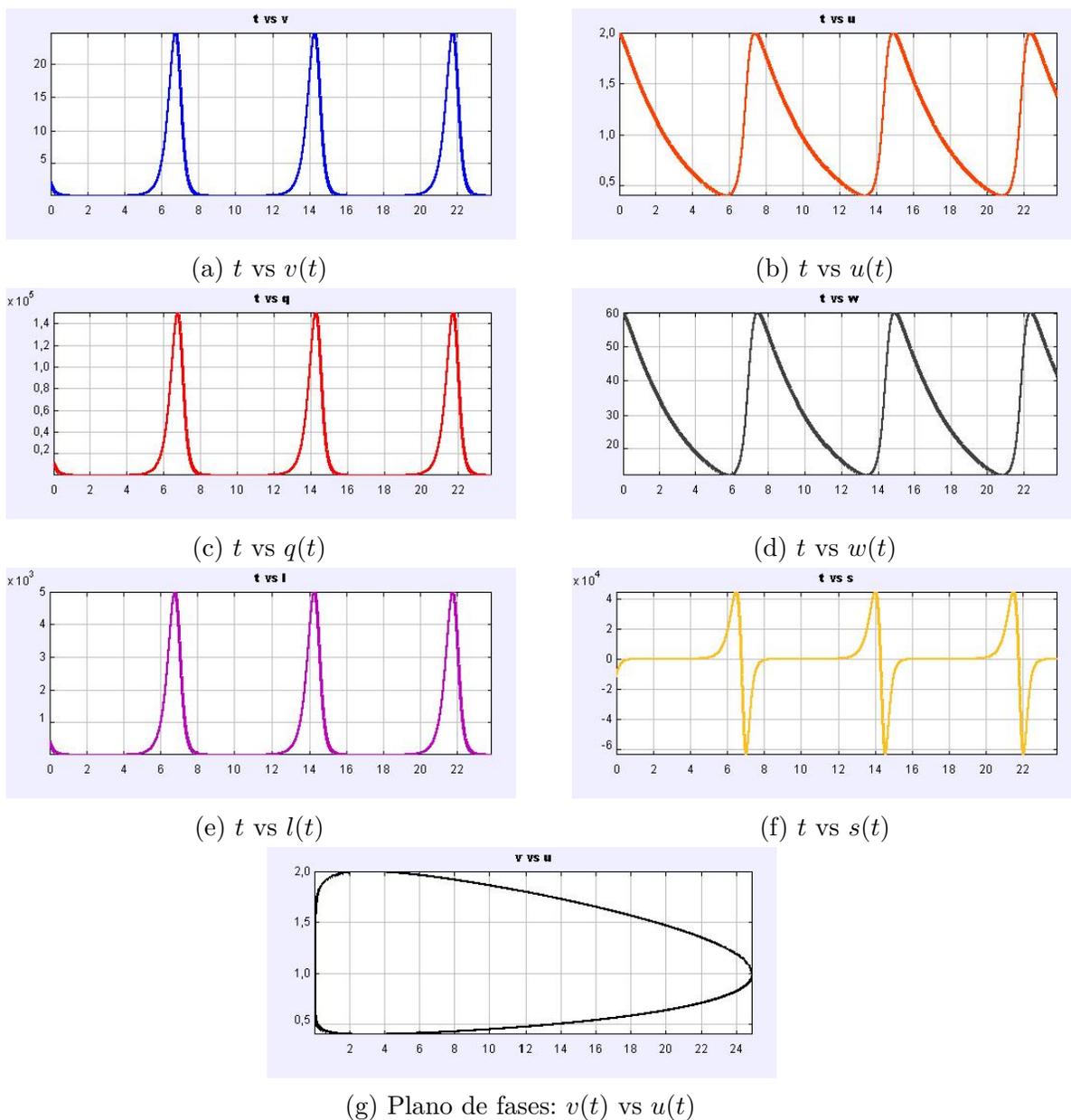


Figura 3.2: Resultados del modelo de Goodwin

## 3.2 Modelos económicos caóticos

En esta sección vamos a estudiar dos modelos continuos que aparecen en el capítulo 5 de [10], donde se habla de *dinámica caótica en modelos económicos*.

Cuando se habla de *caos* siempre se piensa en el *efecto mariposa* y el famoso sistema de Lorenz<sup>2</sup> dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(-x + y) \\ \frac{dy}{dt} = bx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases} \quad (3.5)$$

donde  $a, b$  y  $c$  son parámetros positivos. Para ciertos valores de estos parámetros, las trayectorias obtenidas en el espacio de fases son un tanto peculiares, puesto que hay un objeto tridimensional al cual convergen. Este objeto no es ni un punto ni una curva cerrada, se le llama *atractor extraño* y la siguiente definición nos formaliza matemáticamente el significado del adjetivo *extraño*:

### Definición 3.1

Sea  $x' = f(x, \mu)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\mu \in \mathbb{R}$  un parámetro. Un conjunto acotado  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$  se dice que es un *atractor extraño* del sistema si existe un conjunto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$  satisfaciendo las siguientes propiedades:

- i)  $\mathcal{U}$  es un entorno de  $\mathcal{A}$ .
- ii)  $\mathcal{A}$  es un conjunto atractor, extendiendo la Definición 1.2 para  $\mathcal{A}$ .
- iii) Pequeñas variaciones en  $x(0) \in \mathcal{U}$  llevan a diferentes trayectorias del sistema tras un breve período de tiempo (sensibilidad respecto a las condiciones iniciales).
- iv) El atractor es indescomponible, es decir, no se puede separar en dos o más subconjuntos.

Con esta definición en mano, podemos formalizar el concepto de caos:

### Definición 3.2

Un sistema es caótico si posee un atractor extraño en el sentido que da la Definición 3.1.

Podríamos extendernos mucho dentro de esta teoría, pero esto nos sacaría de nuestro objetivo. Así pues, pasemos a estudiar los dos modelos comentados al comienzo de la sección.

<sup>2</sup>Debido al meteorólogo Edward Lorenz, que fue pionero en la Teoría del Caos.

### 3.2.1 Comercio internacional

Denotemos por  $Y$  a los ingresos,  $r$  la tasa de interés y  $M$  el dinero almacenado. La inversión bruta  $I$  la vamos a suponer dependiente tanto de  $Y$  como de  $r$  al igual que los ahorros  $S$  y la preferencia por liquidez  $L$ . Así pues, se tendría que  $\dot{Y} = \alpha(I - S)$  con  $\alpha > 0$ . Asumimos siguiendo [10] que  $\dot{r} = \beta(L - M)$  con  $\beta > 0$ . Por último, considerando exportación ( $E_x$ ) e importación ( $I_m$ ), se tiene que  $\dot{M} = E_x - I_m$ .

Estas ecuaciones modelarían la economía comercial de un país. En [10] se propone un ejemplo complejo considerando las interacciones entre tres países llegando a un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión 9 que permite deducir la existencia de caos a través de los retratos de fase. Para no complicar y extender la memoria vamos a considerar un modelo alternativo que también va a ser caótico aunque económicamente no sea muy riguroso. Vamos a tomar  $\beta = \alpha = 1$ ,  $L = -Y$ ,  $S = Y/10$ ,  $I = r + \left(\frac{10a+1}{10}\right)Y$  con  $a > 0$  un parámetro y vamos a suponer que  $M$  crece linealmente con constante  $b > 0$  cuando  $r = c$  para cierta constante  $c > 0$  y cuando  $r \neq c$  entonces el crecimiento se perturba dependiendo de  $r$  y  $M$ . De esta forma, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en  $\mathbb{R}^3$  que es conocido como *sistema de Rössler*:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -Y - M \\ \frac{dY}{dt} = r + aY \\ \frac{dM}{dt} = b + M(r - c) \end{cases} \quad (3.6)$$

Para ciertos valores de los parámetros el sistema (3.6) presenta un atractor. Concretamente para la condición inicial  $(r_0, Y_0, M_0) = (0.1, 0.005, 0.1)$  y valores de los parámetros  $a = 0.1$ ,  $b = 0.1$  y  $c = 14$ , se obtiene el citado atractor que anunciábamos y que puede observarse en la Figura 3.3 obtenida resolviendo numéricamente el sistema en Easy Java Simulations.

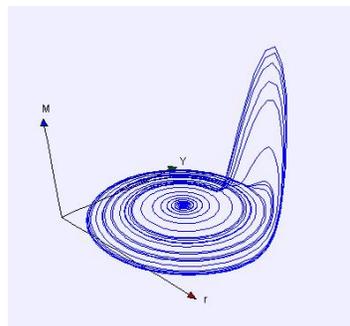


Figura 3.3: Movimiento caótico en el sistema (3.6).

### 3.2.2 Acelerador no lineal de Goodwin

Para ver las ecuaciones de este modelo, necesitamos primeramente hacer una introducción a lo que se llaman *ecuaciones de Liénard*, que son ecuaciones diferenciales de segundo orden y no lineales de la forma:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

con  $f, g \in \mathcal{C}^1$ .

Al lidiar con ecuaciones de segundo orden, debemos recurrir a un cambio a sistema de ecuaciones. Llamando  $\dot{x} = y$ , se tiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) \end{cases} \quad (3.7)$$

obteniendo un sistema autónomo de orden 2. Un caso particular de estas ecuaciones se da cuando  $f(x) = a(x^2 - 1)$  y  $g(x) = x$ , que permite obtener el modelo físico para un oscilador con rozamiento no lineal conocido como *oscilador de van der Pol*.

Si en lugar de considerar la ecuación de segundo orden igualada a 0, la igualamos a una función dependiente del tiempo  $h(t)$  que además sea periódica, entonces obtenemos las ecuaciones de lo que se denomina un *oscilador forzado*. Adicionalmente, se habla de oscilador forzado *débil* ó *fuerte* según las oscilaciones que produzca la función  $h(t)$ .

Goodwin obtuvo en 1951, la siguiente ecuación diferencial

$$\varepsilon\theta\ddot{y} + (\varepsilon + (1 - \alpha)\theta)\dot{y} - \varphi(\dot{y}) + (1 - \alpha)y = I^\alpha(t) \quad (3.8)$$

donde  $y$  son los ingresos,  $\alpha$  el ritmo marginal de consumición,  $\varepsilon$  una constante representando un desfase en la dinámica del proceso,  $\theta$  el desfase entre la decisión de invertir y el gasto,  $\varphi(\dot{y})$  la inversión inducida e  $I^\alpha(t)$  el total de gastos en el tiempo  $t$ .

Si  $I^\alpha(t) = 0$ , derivando la ecuación respecto a  $t$  se tiene:

$$\varepsilon\theta\ddot{\dot{y}} + (\varepsilon + (1 - \alpha)\theta)\dot{\dot{y}} - \varphi'(\dot{y})\dot{\dot{y}} + (1 - \alpha)\dot{y} = 0$$

y haciendo el cambio  $x = \dot{y}$  en esta última, se obtiene:

$$\ddot{x} + A(x)\dot{x} + B(x) = 0$$

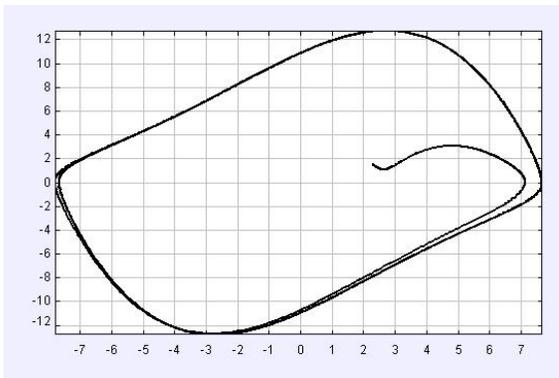
donde  $A(x) = [(\varepsilon + (1 - \alpha)\theta) - \varphi'(x)]/(\varepsilon\theta)$  y  $B(x) = (1 - \alpha)x/(\varepsilon\theta)$ . Es decir, obtenemos una ecuación de Liénard.

Lo que vamos a hacer ahora, es considerar oscilaciones forzadas añadiendo el término  $i^\alpha = I^\alpha(t)/(\varepsilon\theta)$  (donde se ha dividido por  $\varepsilon\theta$  para mantener la forma de las ecuaciones de Liénard), de hecho  $i^\alpha = a \sin(\omega t)$  con  $a > 0$  y  $\omega$  parámetros. El modelo queda establecido en forma de sistema de la siguiente manera:

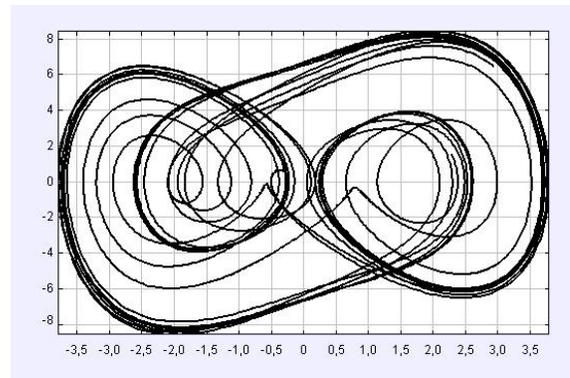
$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{z} = i^\alpha(t) - A(x)z - B(x) \end{cases} \quad (3.9)$$

que resuelto numéricamente para  $\theta = 1 + \sqrt{21}$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $\varepsilon = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}$ ,  $a = 12$ ,  $w = 1$  y  $\varphi(x) = x^3/3$ , vemos como dando valores iniciales la órbita se acerca a una especie de atractor en el plano, como bien se observa en la Figura 3.4a.

En [10] se comenta que si  $B(x) = x^3$  (podemos modificar el modelo para que así sea) y  $A(x) = -0.1(1 - x^2)$  (ya se han tomado los valores de los parámetros antes para que esto sea así), se obtiene una dinámica caótica. Utilizando de nuevo Easy Java Simulations, comprobamos que así es, ya que obtenemos el atractor de la Figura 3.4b que es más irregular que en el caso anterior y cuya dinámica se hace más difícil de predecir al ejecutar el programa con el software mencionado.



(a) Modelo (3.9)



(b) Modelo (3.9) modificado con  $B(x) = x^3$

Figura 3.4: Acelerador no lineal de Goodwin

### 3.3 Modelo de Goodwin: caso discreto

En esta sección, vamos a modificar el modelo de Goodwin visto en la primera sección, siguiendo [13] para estudiar lo que ocurre considerándolo como un modelo discreto.

Comencemos haciendo una redenotación de las variables para adaptarlas al nuevo caso y a la notación del artículo en cuestión. El número de trabajadores con posibilidad de trabajar viene dado por la variable  $N_n$  y el de trabajadores empleados por  $L_n$  donde  $n$  es el período temporal (discreto). Así, se obtiene la tasa de empleo,  $E_n$ , como  $E_n = L_n/N_n$ .

Haciendo unas suposiciones parecidas a las anteriores (que pueden encontrarse en [13]) para el caso continuo, se llega a que esta última variable sigue la siguiente relación:

$$E_{n+1} = E_n [1 + r(1 - E_n/E^*)] \quad (3.10)$$

donde tanto  $r$  como  $E^*$  son constantes dependientes a su vez de los parámetros del modelo considerados. Como vemos, la relación anterior puede interpretarse como una ecuación logística en diferencias.

Realizando el cambio de variable  $x_n = rE_n/(1+r)E^*$  en (3.10), se llega a una forma más cómoda de expresión:

$$x_{n+1} = (1+r)x_n(1-x_n) = F(x_n; r) \quad (3.11)$$

que es una ecuación en diferencias cuya dinámica puede ser estudiada en términos de su único parámetro  $r$ .

Antes de proceder a tal labor, hay que tener en cuenta que para que tenga sentido económico en nuestro modelo  $r$  debe ser positivo y  $E_n < 1$  (pues no puede haber más trabajadores empleados que trabajadores posibles). Además, incorporando la condición  $r < 3$ , también se garantiza que  $E_n > 0$  en todo instante  $n$  y que las soluciones estén acotadas.

Nótese ahora que el punto  $x^* = r/(1+r)$  es un punto de equilibrio de (3.11). Calculando la derivada de  $F$  en dicho punto y tomando su valor absoluto de tiene que:

$$F'(x_n; r) = (1+r) - 2(1+r)x_n \implies |F'(x^*; r)| = |(1+r) - 2(1+r)r/(1+r)| = |1-r|$$

Si dicha derivada es menor que la unidad, el punto será un atractor local, y esto ocurre precisamente si se cumple  $0 < r < 2$ . Además, dicho equilibrio se alcanzará monótonamente para  $0 < r < 1$  y de forma oscilante si  $1 < r < 2$ .

Veamos qué ocurre para los casos en que  $2 < r < 3$ . Ahora tenemos que el punto fijo  $x^*$  es repulsor pero por otro lado también conocemos que las soluciones deben estar acotadas. Entonces, ¿hacia dónde van las trayectorias de dichas soluciones?

Para responder a tal pregunta, consideremos el valor de  $x_n$  en el instante  $n + 2$  y Tenemos que:

$$x_{n+2} = F(F(x_n; r)) = F^2(x_n; r) = F((1+r)x_n(1-x_n)) = (1+r)^2 x_n(1-x_n)(1 - (1+r)x_n(1-x_n))$$

y resolviendo  $x^{(2)*} = F^{(2)}(x^{(2)*}; r)$  obtenemos dos puntos fijos de período 2,  $x_1^{(2)*}$  y  $x_2^{(2)*}$ , que vienen dados por la expresión:

$$x_{1,2}^{(2)*} = (2+r \pm \sqrt{r^2-4})(2(1+r))$$

Se puede comprobar asimismo que la pendiente de  $F^2(x_n; r)$  evaluada en los dos puntos es la misma y vale  $5 - r^2$ . Por tanto, cuando se tenga que  $|5 - r^2| < 1$  el ciclo de período dos que da esas dos soluciones será atractor, y eso ocurre precisamente cuando  $2 < r < \sqrt{6} = 2.449$ .

Cuando  $r > \sqrt{6}$ , el ciclo antes comentado será repulsor y por tanto podemos razonar al igual que en el caso anterior sabiendo que las trayectorias están acotadas e intentar ver hacia dónde convergen.

Para ello, se considera  $x_{n+4} = F^4(x_n; r)$  que tiene cuatro puntos fijos que conforman un ciclo de período 4. Calculando la pendiente e imponiendo que sea menor que uno, se tiene que dicho ciclo será atractor cuando  $\sqrt{6} < r < 2.544$ . Para valores mayores que está cota se razona análogamente y se obtienen ciclos de período 8, 16, ...,  $2^k$  siendo  $k$  un número natural.

Sin embargo, este proceso solo es posible extrapolarlo hasta que  $r$  alcanza un valor crítico, concretamente  $r_c = 2.570$ , valor en el cual (3.11) tiene un número infinito de puntos periódicos.

Todos estos ciclos son de periodicidad par cuando se incrementa  $r$  más allá del valor crítico anterior hasta que se llega a  $r = 2.679$  cuando se forma un ciclo de período impar muy grande.

Si se sigue incrementando  $r$  a partir del último valor, se siguen obteniendo ciclos de período impar cuyo período va decreciendo hasta llegar al valor  $r = 2.828$  cuando se forma un ciclo de período 3.

Aplicando el Teorema de Li-Yorke 1.24, concluimos que al tener una órbita de período 3, existirán órbitas de todos los períodos.

---

---

## Anexos

### Petrarca y Laura: el amor también se puede modelar

En el siglo XIV, el poeta italiano Francesco Petrarca vivía enamorado de Laura de Noves, mujer a la que dedicó gran parte de sus poemas como puede verse en la más conocida de sus obras titulada el *Canzoniere*, en la que brindó gran parte de los 366 poemas de los que consta a Laura.

Todo artista, incluidos los poetas, sufre cambios en su estilo y en el enfoque que da a sus obras a lo largo de su trayectoria profesional. Es por ello, que es de vital importancia en el estudio de la obra de un poeta el conocer las fechas en las que compone sus poemas para así poder ver y analizar su evolución. Con respecto a Petrarca y su *Canzoniere*, solo una pequeña parte de los poemas estaban fechados hasta los trabajos del lingüista Frederic Jones y el matemático Sergio Rinaldi, que sirvieron para explicar desde el punto de vista de las letras y de las matemáticas respectivamente lo que ocurrió en la vida de Petrarca desde que conoció a Laura a los 23 años hasta que ella murió 20 años después.



Figura 3.5: Petrarca y Laura

Si comenzamos viendo el trabajo de Jones, realizando un análisis exhaustivo de los poemas, éste asignó un valor de +1, cuando el poeta alcanzaba un éxtasis de amor hacia Laura en el poema y un valor de  $-1$  cuando estaba deprimido o desesperado por los rechazos que ella le daba. Así, pudo observar representando los puntos producidos al asignar su valor a cada poema cierto patrón cíclico a medida que transcurrían los 20 años de aventura amorosa como bien se observa en la Figura 3.6 donde en el eje  $x$  está el tiempo en años y en el  $y$  el valor asignado a cada poema por Jones.

**Ejemplo 3.1** (Valoración de F.Jones)

- Soneto LXXVI  $\implies$  Valoración=+0.6

Amor con sue promesse lusingando,  
mi ricondusse alla prigione antica

- Soneto LXXIX  $\implies$  Valoración=-0.6

Così mancando vo di giorno in giorno,  
si chiusamente, ch'i' sol me ne accorgo  
et quella che guardando il cor mi strugge.

- Soneto CLXXVI  $\implies$  Valoración=-0.45

Parme d'udir la, udendo i rami et l'ore  
et le frondi, et gli augei lagnarsi, et l'acque  
mormorando fuggir per l'erba verde.

Este intento de Jones de buscar patrones es algo que siempre buscan los matemáticos en sus trabajos y es aquí donde Rinaldi aparece para dar un fundamento más riguroso a la investigación llevada a cabo por Jones.

El **modelo matemático de Rinaldi**, que se puede encontrar con todo detalle en [12] o [2], trata de ajustar dichos datos recogidos por Jones a funciones que permitan estudiar la dinámica emocional que hizo fluctuar el amor entre estas dos personas. Sergio Rinaldi, define las siguientes variables:

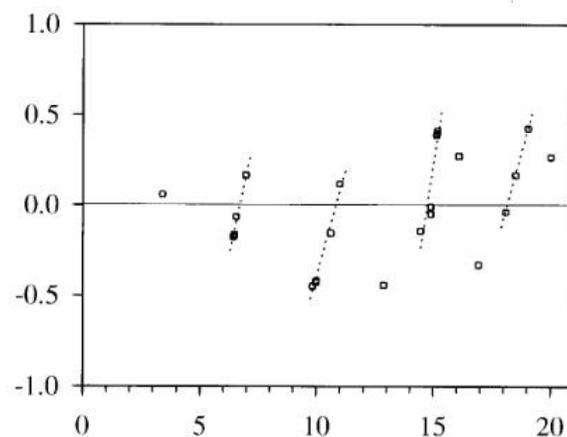


Figura 3.6: Representación de F. Jones

- $L(t)$ : indica el sentimiento de Laura hacia Petrarca en cada instante de tiempo. Si esta variable es positiva, Laura se siente más cercana al poeta mientras que si es negativa, ésta se muestra más fría hacia él.
- $P(t)$ : es análoga a  $L(t)$  pero de forma recíproca, es decir, modela el sentimiento de Petrarca hacia Laura.
- $Z(t)$ : representa la inspiración del poeta en cada instante temporal.

Con estas tres variables, Rinaldi construyó el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales donde aparecen varios términos que se comentan más adelante:

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -\alpha_1 L + R_L(P) + \beta_1 A_P \\ \frac{dP}{dt} = -\alpha_2 P + R_P(L) + \beta_2 \frac{A_L}{1+Z} \\ \frac{dZ}{dt} = -\alpha_3 Z + \beta_3 P \end{cases} \quad (3.12)$$

donde  $R_L(P)$  y  $R_P(L)$  marcan la reacción de Laura hacia el amor de Petrarca y viceversa respectivamente. Además,  $A_P$  es la influencia del atractivo de Petrarca sobre Laura (se multiplica por  $\beta_1 > 0$  para agrandar o empequeñecer) y viceversa para  $A_L$ . Ambas variables serán constantes en nuestro modelo. Las constantes  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  son positivas para  $i = 1, 2, 3$ .

Para ver el por qué de estas ecuaciones, razonemos de la siguiente manera. La primera ecuación dicta en su primer sumando (olvidándonos del resto) que si Petrarca desapareciese, Laura lo olvidaría de forma exponencial (y viceversa para la segunda ecuación), y en su segundo cómo reacciona Laura ante el poeta. Esta reacción puede tener la forma siguiente:

$$R_L(P) = \beta_1 P (1 - P^2)$$

Si  $P = 1$ ,  $R_L(P)$  será nulo, indicando que para reacciones amorosas muy fuertes por parte del poeta se produce un rechazo por parte de la dama.

Mientras tanto, a mayor sentimiento de Laura ante Petrarca, éste reacciona positivamente, lo cual permite escribir  $R_P(L) = \beta_2 L$  aunque podría modificarse para que no sea lineal. Para la fracción que aparece en la segunda ecuación, Rinaldi pensó que valores altos de inspiración poética  $Z(t)$ , podrían contrarrestar la acción del atractivo de Laura ( $A_L$ ), mientras que para valores bajos se invertiría dicha situación.

La tercera ecuación modela lo comentado al principio acerca de que el estado emocional del poeta puede producir un aumento en su producción artística e inspiración, mientras

que si éste está deprimido o desesperado (valores de  $P(t)$  bajos) la inspiración tendería a desaparecer.

Como todo sistema de ecuaciones diferenciales, debe tener unos valores iniciales de los que partir en la resolución, que en este caso, no va a ser analítica, sino que vamos a tener que utilizar nuevamente el ordenador y los métodos numéricos para poder apreciar la forma de las funciones solución  $P(t)$ ,  $L(t)$  y  $Z(t)$ . Como antes de conocerse, los sentimientos del uno hacia el otro no pueden existir y además Petrarca casi no escribió nada de especial relevancia antes de conocer a Laura, los valores iniciales de las tres variables van a ser cero.

Para los valores de los parámetros de nuestro modelo, sigamos las indicaciones que se dan en [12]. Dado que el sentimiento de Petrarca hacia Laura no es del todo correspondido el valor de  $\alpha_1$  debe ser mayor que el de  $\alpha_2$ , es decir, Laura lo olvidaría más rápido a él. Y por otra parte, tras la muerte de Laura, Petrarca siguió con su inspiración poética aunque ésta fue decayendo paulatinamente a lo largo de 10 años, lo cual permite escribir  $\alpha_2 > \alpha_3$ . Teniendo esto en cuenta, podríamos poner por ejemplo  $\alpha_1 = 3\alpha_2$  y  $\alpha_2 = 10\alpha_3$ , y tras ello hacer  $\alpha_2 = 1.2$ .

Por otro lado, para las  $\beta$ 's, Rinaldi propuso, teniendo en cuenta todo lo expuesto hasta el momento sobre estos personajes, los siguientes valores:  $\beta_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_2 = 5\alpha_2$  y  $\beta_3 = 10\alpha_2$ .

Por último, para los atractivos, teniendo en cuenta que Laura era más atractiva según los cánones de la época que Petrarca,  $A_P = -1$  y  $A_L = 2$ .

Ya tenemos construido nuestro modelo, tras haber propuesto unas ecuaciones diferenciales para las funciones con las que tratamos, unas condiciones iniciales y haber valorado los parámetros con la conciencia que cabría tener en este problema conociendo algo de los personajes a través de los estudios de los poemas.

Así pues, es el momento de utilizar el ordenador para resolver numéricamente las ecuaciones como bien anunciábamos antes. Utilizaremos para tal propósito el software científico Easy Java Simulations [3]. Procediendo con la simulación, obtenemos los resultados de la Figura 3.7 para las funciones del modelo así como para el retrato de fases de  $P(t)$  y  $L(t)$ .

Como vemos, el carácter cíclico que aparece en las investigaciones de Jones es representado a la perfección por el modelo matemático de Rinaldi, con el cual podemos concluir que durante los 20 años de “relación amorosa” entre Laura y Petrarca, los sentimientos del uno hacia el otro variaron periódicamente. Para más índole, Petrarca siempre tuvo sentimientos positivos hacia Laura pese a las fluctuaciones, pero para Laura, los sentimientos siempre fueron negativos. También se aprecia que cuando el poeta estaba deprimido o desesperado, su inspiración decaía siguiendo el mismo patrón.

Por último, en el plano de fases vemos que se entra en un ciclo a partir de cierto instante de tiempo. Este tipo de carácter, es bastante parecido al que hemos estudiado en los Capítulos 2 y 3 respecto a nuestros modelos biológicos y económicos.

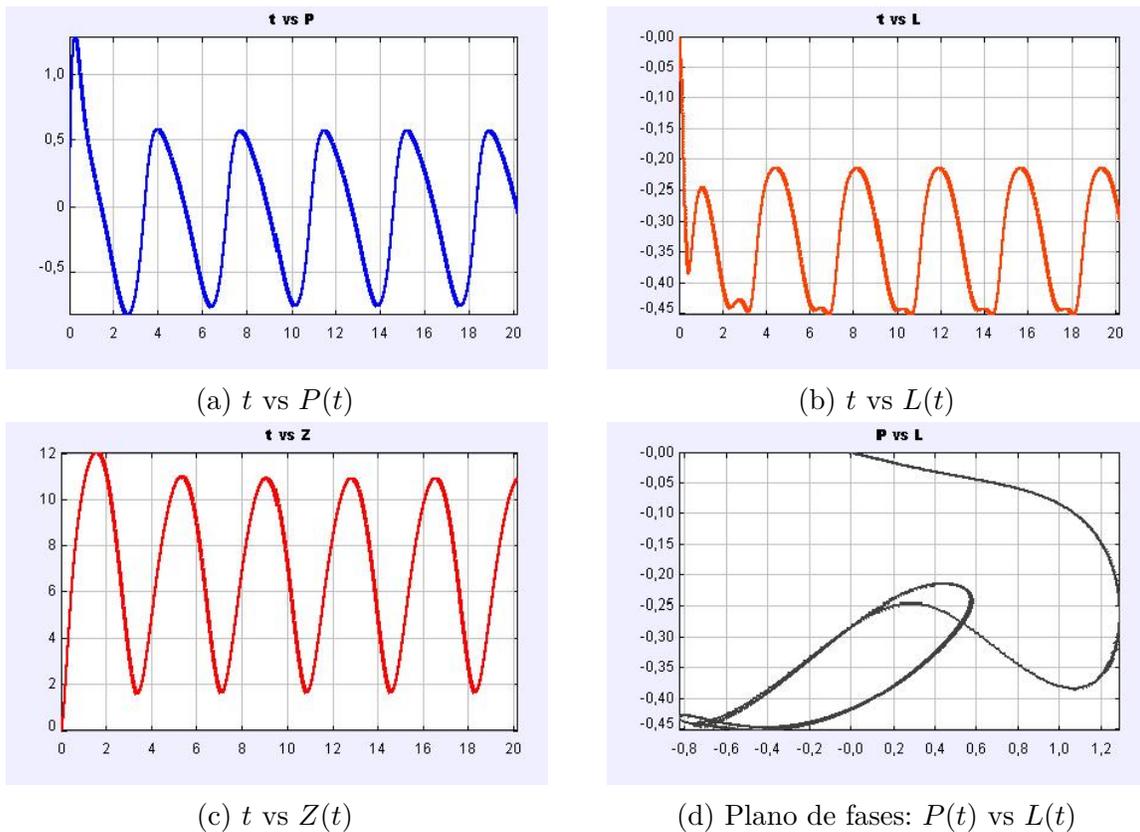


Figura 3.7: Dinámica del amor entre Laura y Petrarca

## Modelos de combate y la batalla de Iwo Jima

En este apartado del anexo, vamos a desarrollar un modelo, siguiendo nuevamente un ejemplo de [1], para estudiar cómo varían las fuerzas, entendidas como el número de tropas de dos contrincantes en un combate. Tras ello, veremos que curiosamente una vez más el modelo matemático puede ajustarse bastante a la realidad por medio de un ejemplo concreto ocurrido en una de las batallas más famosas de la historia (que incluso ha sido llevada al cine en tiempos recientes de la mano de Clint Eastwood<sup>3</sup>) como fue la *batalla de Iwo Jima*.

Fue durante la Primera Guerra Mundial cuando F.W. Lanchester, un inglés famoso por sus contribuciones a la aeronáutica y la ingeniería, se dio cuenta de que en el combate moderno era crucial la concentración de tropas, tras lo cual desarrolló modelos matemáticos de los cuales se pudiera sonsacar cuál iba a ser el resultado. De estas investigaciones pudo derivar lo que se conoce como *Leyes de Lanchester* (*Lanchester's Laws* en la literatura

<sup>3</sup>*Cartas desde Iwo Jima* (*Letters from Iwo Jima*, Clint Eastwood, 2006) y *Banderas de nuestros padres* (*Flags of Our Fathers*, Clint Eastwood, 2006)

inglesa) entre las cuales destaca la *Ley del cuadrado de Lanchester*, que establece que la fuerza de una potencia de combate es proporcional al cuadrado del número de combatientes que entran en la acción del combate.

Veamos dos de los modelos desarrollados por Lanchester. Supongamos que en una batalla tenemos dos potencias luchando entre sí. Queremos estudiar cómo varía la fuerza de combate de cada una de ellas, lo cual será visto a través de la variación del número de combatientes de cada uno de ellos. Los dos modelos que vamos a representar son para la batalla de dos potencias convencionales y para la batalla de una potencia convencional con una guerrilla. Más adelante veremos las diferencias.

Sean por tanto,  $x(t)$  e  $y(t)$  los números de combatientes de cada potencia de la batalla en un instante de tiempo  $t$ . Dentro de una batalla, tenemos tres factores que contribuyen a las variaciones de estas variables: *el ritmo de pérdida operacional, el ritmo de pérdida de combate y el ritmo de reforzamiento*.

El primero de estos factores se debe a las pérdidas por enfermedad, abandonos, etc los cuales son factores muy difíciles de modelar matemáticamente, por lo que para nuestros modelos, vamos a considerar este factor despreciable, o en otras palabras, no va a afectar a la resolución del conflicto.

Respecto al ritmo de pérdida de combate, distingamos dos casos dependiendo del modelo elegido. En cuanto al modelo de dos fuerzas convencionales, supongamos que la potencia representada con  $x(t)$  opera al aire libre y que cada uno de sus combatientes puede ser derrotado por alguien de la otra potencia  $y(t)$  que dispara a la región donde se encuentra  $x(t)$ . Bajo este supuesto, la pérdida de unidades de  $x(t)$  será proporcional a  $y(t)$  ya que a mayor número de enemigos mayor número de individuos se pierden, en términos matemáticos,  $\dot{x} = -ay$  siendo  $a > 0$  la constante de proporcionalidad antes mencionada. Análogamente, si suponemos lo mismo para la otra potencia, llegaríamos a que  $\dot{y} = -bx$ .

Con respecto al segundo modelo relativo a la potencia guerrillera batallando contra una convencional, se tendría que el supuesto anterior no se da pues la guerrilla siempre se oculta con el fin de sorprender a su enemigo. Así pues, si  $x(t)$  modela dicha guerrilla e  $y(t)$  la otra potencia, esta última si dispara no sabrá si derrota a su enemigo pues no lo ve. Además, si  $x(t)$  es grande será más fácil que  $y(t)$  pueda abrir fuego y aniquilar a alguien. De estas suposiciones se deduce que  $\dot{x} = -cxy$  con  $c > 0$  constante.

Por último, tenemos que añadir a nuestros dos modelos el factor relativo a la contribución que viene dado por el refuerzo que reciban las tropas en combate. Este número de refuerzos no tiene por qué depender de  $x(t)$  ni  $y(t)$ , por tanto lo representaremos como un factor que únicamente depende del tiempo.

Así pues las ecuaciones de nuestros modelos quedarían como sigue a continuación, donde el primer recuadro es para el modelo de dos potencias convencionales y el segundo

para cuando una de ellas es una guerrilla.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -bx + g(t) \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -cxy + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -dx + g(t) \end{cases} \quad (3.14)$$

donde las funciones  $f(t)$  y  $g(t)$  modelan el refuerzo que experimentan las tropas. Para el primer caso, siempre se puede obtener una solución explícita de las ecuaciones (conociendo  $f(t)$  y  $g(t)$ ), pero para el segundo puede que resulte más complicado y sea necesario el uso del ordenador.

Para hacer un primer estudio de nuestros modelos, supongamos que  $f(t) = 0$  y que  $g(t) = 0$ , es decir, que no hay un aporte de nuevos soldados a la batalla. Además, como condiciones iniciales pondremos  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ .

- **Modelo convencional vs convencional:** Dividiendo la segunda ecuación entre la primera, se llega a la relación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay} \implies aydy = bxdx$$

que integrando y trasponiendo términos conduce a

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - bx_0^2 = K$$

con lo cuál las órbitas del sistema serían hipérbolas. La relación anterior es lo que llamábamos al principio *Ley de los cuadrados de Lanchester*.

Si  $K > 0$ , al ser el número de combatientes decreciente en todo momento, en caso de que  $y = \sqrt{K/a}$  entonces  $x(t) = 0$ , por tanto en este caso ganaría la potencia  $y$ .

Si fuera  $K < 0$ , por el mismo argumento, ganaría la batalla la potencia  $x$ . En el caso extremo en que  $K = 0$ , se tendría un empate.

Por tanto, el que gane uno u otro, depende de  $a$ ,  $b$ ,  $x_0$  e  $y_0$ . De hecho, si la potencia  $y$  quisiera ganar buscaría que se cumpliera la desigualdad  $ay_0^2 > bx_0^2$ . Si por ejemplo

se doblará el valor de  $a$  por dos,  $ay_0^2$  se doblaría por dos también, pero si se dobla el número inicial de combatientes, al estar al cuadrado, en la expresión anterior se incrementaría en un factor de cuatro el valor de  $ay_0^2$ , por tanto, es más efectivo comenzar la batalla con un número grande de soldados en vez de que éstos sean capaces de aniquilar a un ritmo mayor al enemigo.

- **Modelo guerrilla vs convencional:**

En este caso, efectuando el mismo cociente que en el caso anterior (no confundir el  $dx$  del incremento con el  $dx$  donde  $d > 0$  es una constante) llegamos a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{cxy} = \frac{d}{cy} \implies cydy = ddx$$

que integrando conduce a:

$$cy^2 - 2dx = cy_0^2 - 2dx_0 = M$$

Estas curvas solución son en este caso parábolas. Si  $y(t)$  alcanza el valor  $\sqrt{M/c}$  siendo  $M > 0$ , la potencia  $x$  (guerrilla) habrá sido aniquilada. Si  $M < 0$ , ganaría la guerrilla.

Las constantes anteriores que modelan las batallas son imposibles de calcular en la vida real, pero estudiando datos de batallas y guerras ocurridas en la historia se pueden sacar algunas conclusiones que aplicar en caso de que se presente otra batalla en similares condiciones de las que se disponga datos. Ese es el caso de la batalla de Iwo Jima que vemos a continuación.

## La batalla de Iwo Jima

Durante el final de la Segunda Guerra Mundial, se libró una batalla en la isla japonesa de Iwo Jima (situada a unos 1000 km al sur de Tokio) entre el ejército de los Estados Unidos de América y el Imperio del Japón, ya que esta isla era considerada un lugar estratégico por los americanos y por supuesto los japoneses no la iban a regalar. La batalla fue finalizada a los 36 días del inicio del combate, aunque los americanos ya habían tomado el control total de la isla a los 28 días.

En [1] se puede encontrar una tabla con los datos que se recogieron de la batalla. Veamos cómo a partir



Figura 3.8: Batalla de Iwo Jima

de ellos podemos deducir el valor de las constantes del modelo.

Los japoneses no tuvieron ningún refuerzo durante esos días pero contaban con 21500 soldados en la isla al comienzo, mientras que los americanos mandaron 54000 soldados el primer día (no había tropas antes del comienzo del combate), 6000 el tercero y 13000 en el sexto. El resto de días no aportaron ninguna unidad más.

Las pérdidas operacionales fueron despreciables en ambos bandos, pero no las pérdidas de combate, ya que los americanos perdieron unos 29000 soldados y los japoneses 20000.

Si representamos por  $x(t)$  e  $y(t)$  el número de soldados americanos y japoneses respectivamente y suponemos que no se hizo guerrilla al no ser la isla muy grande y fácil de esconderse en ella, las ecuaciones de nuestro modelo serían:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay + f(t) \\ \frac{dy}{dt} = -bx \end{cases} \quad (3.15)$$

donde  $f(t)$  será discontinua teniendo en cuenta los datos antes comentados. Además, las condiciones iniciales serán  $x(0) = x_0 = 0$  e  $y(0) = y_0 = 21500$ . Utilizando el método de variación de las constantes se obtendría una expresión para  $x(t)$  e  $y(t)$  que puede ser encontrada en [1], pero no nos centraremos en esas expresiones porque nuestro objetivo es ver si el modelo de Lanchester se puede ajustar a la realidad en este caso. Para ello, debemos calcular  $a$  y  $b$ .

Comencemos integrando la segunda ecuación de (3.15) entre el tiempo 0 y un tiempo  $s$ , lo cual nos lleva a:

$$b = \frac{y_0 - y(s)}{\int_0^s x(t) dt}$$

Como no se sabe el valor de  $y(28)$  pues aunque los americanos ya habían tomado el control, los japoneses aún ocupaban zonas de la isla, debemos tomar ahora  $s = 36$ , que es el día en el que podemos decir aproximando que  $y(36) = 0$ :

$$b = \frac{21500}{\int_0^{36} x(t) dt}$$

y la integral del denominador puede ser aproximada por sumas de Riemann, obteniendo:

$$b = \frac{21500}{\sum_{i=0}^{36} x(i)}$$

Como los americanos hicieron un recuento de sus tropas, se conocen los valores de  $x(i)$  en cada día, lo cual permite realizar el sumatorio y concluir que  $b = 0.0106$ .

Calculemos ahora el valor de  $a$ . Debemos integrar la primera ecuación de (3.15) entre 0 y 28 (en este caso sí se conoce el dato para el día 28):

$$x(28) = -a \int_0^{28} y(t)dt + \int_0^{28} f(t)dt = -a \int_0^{28} y(t)dt + 73000$$

Se sabe que en el día 28 habían 52735 soldados americanos, con lo cual podemos sustituir y despejar  $a$  obteniendo:

$$a = \frac{20265}{\int_0^{28} y(t)dt}$$

y ya solo quedaría integrar en el denominador de la expresión anterior, lo cual podemos llevarlo a cabo nuevamente por aproximación por sumas de Riemann.

Así, tenemos que

$$\int_0^{28} y(t)dt = \sum_{j=0}^{28} y(j)$$

Ahora bien, no se dispone de los valores de  $y(j)$ , pero si podemos recurrir a otra aproximación utilizando que:

$$y(j) = y_0 - b \int_0^j x(t)dt = 21500 - b \sum_{i=0}^j x(i)$$

Por tanto, calculando  $y(j)$  en una primera aproximación y sumando todos los valores de  $y(j)$  hasta el día 28, ya podemos obtener el valor de la constante que es  $a = 0.0544$ .

A modo de resumen, los japoneses tenían una mayor capacidad de lucha (al ser  $a > b$ ) lo cual corrobora que recibieran órdenes de luchar hasta el último hombre, pero al ganar los americanos la batalla podemos concluir que el factor de refuerzo  $f(t)$  jugó un papel fundamental para el devenir del conflicto.

Si comparamos los datos recogidos cada día del número de soldados americanos con la solución explícita de  $x(t)$ , los resultados son casi perfectos (véase [1] para los detalles), por lo que el modelo propuesto por Lanchester parece bastante bueno para representar este tipo de acciones bélicas o por lo menos así ocurre para este caso particular. Como se ha mencionado antes, en un conflicto de este tipo entran en juego factores muy difíciles de ajustar matemáticamente por lo que generalizar este buen funcionamiento del modelo a otros casos podría conducir a error.

## Easy Java Simulations

Easy Java Simulations es una herramienta de creación de simulaciones interactivas con el lenguaje Java. En este entorno, una simulación se estructura en tres partes o paneles: *Descripción*, *Modelo* y *Vista*. Veamos qué podemos encontrar y hacer en cada una de ellas de forma sucinta. Para información más detallada consúltese [3].

### ► Descripción

Este panel se utiliza con fines divulgativos para dar a conocer al usuario de la simulación ciertos detalles sobre ésta: en qué consiste, qué se puede hacer o simular con ella, etc.

Para escribir en ella se debe hacer uso del editor de código HTML de EJS.

### ► Modelo

Este panel es el núcleo de la simulación. Consta de seis subpaneles: *Variables*, *Inicialización*, *Evolucion*, *Relaciones Fijas*, *Propio* y *Elementos*.

En el subpanel *Variables*, se crean las variables del modelo que pueden ser de distintos tipos (boolean, double, int, String y Object). Además, pueden crearse *arrays* especificando la dimensión de la variable en la casilla correspondiente.

También se puede en algunos casos dar valores iniciales a estas variables en este mismo subpanel aunque en otros como los arrays es necesario utilizar el subpanel *Inicialización* en el que podemos dar valores iniciales a las variables que requieran un proceso más complicado.

En *Evolución* se procede a escribir el código necesario para la resolución del modelo. Se pueden crear varias páginas de código que son de dos tipos: páginas normales de código y páginas de resolución de EDOs.

La primera opción permite crear código al usuario de la forma habitual en lenguaje Java. La segunda, se utiliza cuando se dispone de ecuaciones diferenciales que definen nuestro modelo, pero siempre hay que tener en cuenta que EJS sólo resuelve ecuaciones de primer orden, por lo que si tenemos ecuaciones de orden superior hay que transformarlas en un sistema de orden uno, procedimiento que siempre se puede realizar a cambio de incrementar el número de variables del modelo.

A la hora de resolver ecuaciones diferenciales numéricamente con EJS podemos utilizar varios métodos clásicos como *Euler* o *Runge-Kutta* y otros más elaborados de paso adaptativo. Todos ellos vienen programados y su elección se lleva a cabo de forma dinámica, permitiendo al usuario fijar paso y tolerancia a su gusto.

En ciertas ocasiones, hay variables que están ligadas a otras variables de forma precisa por lo que un cambio producido en alguna de ellas por parte del usuario por ejemplo, debe producir un cambio en las variables ligadas a ésta. Para ligar variables entre sí con este fin se encuentra el subpanel *Relaciones Fijas*.

Por último, se encuentran los subpaneles *Propio* y *Elementos*.

El primero se utiliza para crear funciones o métodos por parte del usuario con la misma estructura que cualquier código Java. Puede ser útil para ahorrar código que se repite varias veces en otras partes de la simulación y para mayor claridad visual. Además de los métodos que puede definir el usuario, hay algunos que ya vienen incorporados en EJS (todos llevan `_` delante del nombre) como por ejemplo `_pause()` o `_initialize()` utilizados para parar la simulación o inicializarla.

El segundo no se ha utilizado durante este trabajo pero es una herramienta muy útil que permite utilizar librerías digitales.

#### ► Vista

Este panel es el que permite al usuario dar el toque visual a su simulación a través de la elección de elementos de dibujo tanto en 2D como en 3D, que son ligados a las variables del modelo.

Para finalizar esta introducción a EJS cabe decir que una vez creadas las simulaciones, éstas pueden condensarse en un archivo `.jar` o incluso crear páginas HTML donde interactuar con ellas.

---

---

## Índice de figuras

1.1	Clasificación de los puntos singulares en sistemas bidimensionales. . . . .	7
1.2	Retrato de fases del sistema del ejemplo 1.16. . . . .	20
1.3	Retrato de fases del sistema del ejemplo 1.17. . . . .	22
1.4	Gráfica de la función del Ejemplo 1.25. . . . .	29
2.1	Fotografías de Lotka y Volterra . . . . .	36
2.2	Parámetros: $a = 0.5$ , $b = 0.3$ , $c = 0.1$ y $d = 0.4$ . . . . .	37
2.3	Parámetros: $a = 1.1$ , $b = 0.9$ , $c = 0.2$ y $d = 0.7$ . . . . .	37
2.4	Gráficas de $f(y)$ y $g(x)$ junto con las órbitas de (2.2) . . . . .	40
2.5	Regiones para (2.6) . . . . .	44
2.6	Parámetros: $a = 0.5$ , $b = 0.2$ , $c = 0.17$ , $d = 0.03$ , $e = 0.1$ y $f = 0.25$ . . . . .	47
2.7	Parámetros: $a = 1.2$ , $b = 0.5$ , $c = 0.4$ , $d = 0.075$ , $e = 0.3$ y $f = 0.3$ . . . . .	48
2.8	Parámetros: $a_1 = 0.3$ , $a_2 = 0.5$ , $a_3 = 1.5$ , $a_4 = 0.005$ , $b_{12} = 0.15$ , $b_{21} = 0.05$ , $c_{31} = 0.2$ y $c_{13} = 0.2$ . . . . .	52
3.1	Richard Goodwin . . . . .	58
3.2	Resultados del modelo de Goodwin . . . . .	62
3.3	Movimiento caótico en el sistema (3.6). . . . .	64
3.4	Acelerador no lineal de Goodwin . . . . .	66
3.5	Petrarca y Laura . . . . .	69
3.6	Representación de F. Jones . . . . .	70
3.7	Dinámica del amor entre Laura y Petrarca . . . . .	73
3.8	Batalla de Iwo Jima . . . . .	76



---

---

## Bibliografía

- [1] BRAUN, M., *Differential Equations and Their Applications*, 3ª edición, Springer-Verlag, 1983.
- [2] BREITENECKER, F., JUDEX F., POPPER, N. Y OTROS, Love Emotions between Laura and Petrarch: an Approach by Mathematics and System Dynamics, *Journal of Computing and Information Technology*, CIT 16, 2008, 255–269.
- [3] *Easy Java Simulations*, <http://www.um.es/fem/EjsWiki/>
- [4] ELAYDI, S.N., *Discrete Chaos with applications in Science and Engineering*, Second Edition, CRC Press Taylor & Francis Group, 2007.
- [5] GOODSTEIN, J.R., *The Volterra Chronicles*, American Mathematical Society, 2007.
- [6] HIRSCH, M.W., SMALE, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press Inc., 1974
- [7] HOLMGREN, R., *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Springer, Segunda Edición, 1996.
- [8] JIMÉNEZ, V., *Ecuaciones Diferenciales: cómo aprenderlas, cómo enseñarlas*, Universidad de Murcia, 2000.
- [9] KOZLOV, V., VAKULENKO, S., On Chaos in Lotka-Volterra systems: an analytical approach, *IOP Publishing*, 2013.
- [10] LORENZ, HANS-WALTER, *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*, Springer-Verlag, 1989.
- [11] Página web del ejecutable PPlane: <http://math.rice.edu/~dfield/dfpp.html>
- [12] PÉREZ-CAMACHO, SANTIAGO; GÓMEZ, FERNANDO M<sup>A</sup>; MARBÁN, JOSÉ M<sup>A</sup>, *Modelos Matemáticos y Procesos Dinámicos*, Universidad de Valladolid, 2002.

- [13] POHJOLA, M., Stable, Cyclic and Chaotic Growth: The Dynamics of a Discrete-Time Version of Godwin 's Growth Cycle Model, *Journal of Economics*, Vol. 41, No. 1-2, pp. 27-38 , Tampere, Finlandia, 1981.
- [14] VOLTERRA, V., *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*, Paris, 1931.
- [15] ZHOU, Z., ZOU, X., Stable Periodic Solutions in a Discrete Periodic Logistic Equation, *Applied Mathematics Letters*, pp. 165-171, 2003.