



Universidad de Murcia
Máster en Matemática Avanzada
TRABAJO FIN DE MÁSTER

El Recíproco del Teorema de Dulac

por

Damián Mompeán Rueda

Tutor: Víctor Jiménez López
Departamento de Matemáticas

4 de septiembre de 2017

Declaración de originalidad

Yo, Damián Mompeán Rueda, autor del TFM “El Recíproco del Teorema de Dulac”, bajo la tutela del profesor Dr. Víctor Jiménez López, declaro que este trabajo que presento es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

Firmado: Fecha:

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

Índice general

Introducción	1
1. Teorema de la curva de Jordan	5
1.1. Teorema de la curva de Jordan	5
2. Algunos resultados de análisis complejo	15
2.1. Teorema de Janiszewski	15
2.2. Teorema de la aplicación de Riemann	18
2.2.1. Teorema de la aplicación de Riemann	18
2.2.2. Familias normales	21
2.2.3. Prueba de la aplicación de Riemann	23
3. Teorema de Schoenflies	27
3.1. Conexión local y el teorema de Carathéodory	27
3.1.1. Teorema de Carathéodory	31
3.2. Teorema de Schoenflies	39
3.3. Induzcamos el Teorema de Schoenflies	42
3.3.1. Discos disjuntos	42
3.4. Generalización de Schoenflies	48
4. El recíproco del teorema de Dulac	51
4.1. Situación	51
4.2. Teorema de realizabilidad	52
Anexo: Grafos dirigidos	55
Bibliografía	57

Introducción

Uno de los problemas más célebres de las matemáticas es el relativo al número 16 de la conocida lista de 23 problemas que publicó Hilbert en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900. Muchos de estos problemas han sido resueltos con el transcurso del tiempo. Se trata de una lista de problemas especiales que ha marcado el desarrollo de algunas ramas de las matemáticas como los sistemas dinámicos.

La segunda parte del problema 16 de Hilbert, está relacionada con esta rama y versa sobre la existencia de una cota superior y la posición relativa de los *ciclos límites*¹ de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y); \quad (1)$$

donde P y Q son polinomios de grado menor o igual que un cierto n . Esta segunda parte se suele dividir en tres problemas, cada cual incluido en el siguiente.

- El primer problema es si todo sistema de ecuaciones diferenciales (1) tiene un número finito de ciclos límites.
- El segundo es si existe una cota para el número de tales ciclos que solo dependa del grado de P y Q . De existir tal cota se denotará como $H(n)$ y se llamará número de Hilbert para ecuaciones diferenciales polinómicas (1) de grado n .
- El tercero es determinar $H(n)$.

Tal y como indica Llibre (2015) [6], el primer problema se conoce como teorema de Dulac, quien dio una demostración en 1923. No obstante, transcurridos 62 años, en 1985 Ilyashenko encontró un error en la demostración de Dulac. El propio Ilyashenko en 1991 e independientemente Écalle en 1992 publicaron dos nuevas demostraciones, aunque es bien sabido que ambas demostraciones son verdaderamente complicadas.

¹Órbita periódica topológicamente aislada del conjunto de órbitas periódicas.

Por otro lado, como se indica en Llibre y Rodríguez (2004) [7], el recíproco del teorema de Dulac, es decir, que dada una configuración o un conjunto finito de curvas de Jordan disjuntas \mathcal{C} , existe un sistema polinomial con un conjunto de ciclos límite topológicamente equivalente a \mathcal{C} , fue probado por Schecter y Singer en 1985, e independientemente por Sverdlove en 1981. No obstante, la novedad introducida por estos dos autores referenciados es la construcción de tal sistema polinomial. Más tarde, Peralta-Salas (2005) [9] dio otra construcción más sencilla para tal recíproco, aunque con ella se obtiene un sistema de grado mayor.

No obstante, cabe destacar que los dos últimos problemas siguen abiertos (lo último que se sabe es que se está comprobando la validez de una posible prueba de Llibre y Pedregal). De hecho, estos problemas ya han sido objeto de demostraciones incorrectas. Tal y como se expone en Ilyashenko (2002) [4], Petrovski y Landis publicaron en la década de 1950 una solución al tercer problema estableciendo que $H(n) \leq P_3(n)$ con $P_3(n)$ un polinomio de grado tres y que $H(2) = 3$. Dicha prueba fue refutada por S. P. Novikov en la década de 1960 y además hoy día también se sabe que $H(2) \geq 4$. A pesar de que existen conjeturas sobre el valor de $H(n)$ para algunos valores de n , lo cierto es que, como se puede leer en Han y Li (2012) [3], el valor del número de Hilbert no se ha determinado ni siquiera para ecuaciones de grado 2. En este mismo artículo también se exponen una serie de cotas inferiores concretas como $H(3) \geq 13$ y algunas cotas generales como $H(n) \geq (n-1)(n-2)/2$, que se debe a Ilyashenko.

De lo anterior podemos deducir que lo único «real» que sabemos de este problema de Hilbert es el teorema de Dulac, cuya demostración es extremadamente difícil. Por tanto, si queremos hacer un trabajo fin de máster accesible y con «sustancia» sobre el problema de Hilbert, lo más razonable es realizar la demostración del recíproco de este teorema, probada constructivamente por Llibre y Rodríguez y simplificada por Peralta-Salas, que es la que seguiremos.

Cabe destacar que cuando decimos «demostración» pensamos en una demostración autocontenida, es decir, que solo dé por sabidos resultados estudiados en el grado -aunque añadiremos referencias bibliográficas a algunos de estos resultados cuando pensemos que potencialmente puedan no ser recordados por el lector-. Así pues, ese será el objetivo de este TFM: hacer una demostración autocontenida del recíproco del teorema de Dulac.

La construcción mencionada de Peralta-Salas, recogida en el capítulo cuarto de este trabajo, es muy corta y asequible, pero requiere de un hecho «bien conocido» en la literatura: dada cualquier configuración \mathcal{C} curvas de Jordan, existe una configuración de círculos topológicamente equivalente a \mathcal{C} . Ni Llibre y Rodríguez ni Peralta-Salas dan referencia alguna a dicho resultado y nosotros tampoco la hemos encontrado. Ciertamente, algunos de los casos particulares de este resultado son bien conocidos: el caso de

una única curva de Jordan es el llamado teorema de Schoenflies, y el caso en el que las curvas de Jordan tengan interiores también disjuntos dos a dos está demostrado en el libro Kuratowski (1968) [5] (aunque la demostración completa de Kuratowski es bastante difícil de seguir). En los primeros tres capítulos de este trabajo trataremos de demostrar este último hecho, que ocupará casi la totalidad del trabajo. Estos resultados, aunque intuitivamente obvios, no son nada triviales, así que una demostración autocontenida requiere bastante esfuerzo.

En el primer capítulo probaremos el teorema de la curva de Jordan que nos dice que cada una de estas curvas separa el plano en dos regiones, una acotada y la otra no acotada. El segundo capítulo recogerá algunos resultados del análisis complejo como el teorema de la aplicación de Riemann que nos brindará un homeomorfismo *conforme* entre la región interior a una curva de Jordan y el interior de un círculo.

El tercer capítulo constituirá el capítulo central de este trabajo. En él, nos trasladaremos a la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$, donde será más fácil extender, vía el teorema de Schoenflies, la aplicación conforme proporcionada por el capítulo segundo. A continuación se expondrán, también para $\overline{\mathbb{C}}$, algunos resultados recogidos en Kuratowski (1968) [5], que abordan el caso de que las curvas de Jordan tengan interiores disjuntos. A partir de este caso, se deducirá fácilmente este mismo caso para el plano complejo, que extenderemos al caso en que las curvas de Jordan se encuentren contenidas en la región interior de otras.

En suma, aunque nuestro último objetivo sea el recíproco del teorema de Dulac, la mayor parte del TFM la dedicaremos a probar el teorema de equivalencia de configuraciones.

Capítulo 1

Teorema de la curva de Jordan

En este TFM, siempre trabajaremos en el ámbito del plano \mathbb{C} o de la esfera de Riemann $\overline{\mathbb{C}}$ (la compactificación de \mathbb{C} añadiendo el punto del infinito). $B(x_0, r)$, $B[x_0, r]$ y $C(x_0, r)$ denotarán, respectivamente, la bola abierta, la cerrada y su frontera de centro un punto $x_0 \in \mathbb{C}$ y radio r .

Antes de comenzar a extender homeomorfismos, vamos a realizar esta parada en la topología del plano para proveernos de un resultado que requeriremos en los capítulos venideros. A pesar de que el enunciado del teorema de la curva de Jordan sea tan conocido como intuitivo, lo cierto es que en nuestro caso se ha obviado su prueba durante el grado dado el carácter técnico de las demostraciones existentes. No obstante, como lo convocaremos para la batalla reiterativamente, resulta razonable concederle al menos en un primer capítulo un momento de protagonismo.

1.1. Teorema de la curva de Jordan

A lo largo de todo el trabajo usaremos con frecuencia muchos objetos que convendría concretar mediante algunas definiciones.

Definición 1.1. Una *curva de Jordan* es un conjunto J homeomorfo a la circunferencia unidad \mathbb{S}^1 .

Definición 1.2. Un *arco* es un conjunto \tilde{J} homeomorfo a un intervalo cerrado y acotado I .

Presentemos el enunciado de nuestro teorema:

Teorema 1.3 (Teorema de la curva de Jordan). *Dada una curva de Jordan $J \subset \mathbb{C}$, esta divide el plano en una componente conexa acotada y otra no acotada. Además J es la frontera de ambas componentes.*

Salta a la vista la naturalidad de este enunciado que podría ser explicado intuitivamente a cualquier persona que no dudaría de su veracidad. No obstante, debemos ser cautos ya que se trata de un resultado muy engañoso. No solo no hemos encontrado una demostración sencilla, sino que en ella debemos hacer un esfuerzo para no dar por cierto, por mucho que nos seduzca nuestra intuición geométrica, todo aquello que no hayamos demostrado o pertenezca al bagaje de cualquier graduado en Matemáticas.

Para abordar la demostración requeriremos de algunos resultados así como el empleo de cierta notación que nos facilitará nuestra tarea, extraída de nuestro texto guía para este capítulo Luisto (2011) [8], de donde provienen todos los resultados de esta sección. En este documento se exponen varias pruebas de nuestro teorema. Dados nuestros conocimientos previos, hemos escogido la última, que se basa en el teorema del punto fijo de Brouwer.

En cuanto a notación, cabe aclarar que cuando tratemos con una curva de Jordan o un arco J , si $\Gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow J$ es el correspondiente homeomorfismo (o $\Gamma : [0, 1] \rightarrow J$), llamaremos a Γ también curva de Jordan o arco, respectivamente, entendiendo que estará siempre claro según el contexto. No obstante, para facilitar la distinción de ambos usos, emplearemos letras griegas para designar a la parametrización y letras latinas para el conjunto o la traza de dicha parametrización. También usaremos la notación $J = |\Gamma|$. Por último, para el caso de las curvas de Jordan, ocasionalmente también tomaremos $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow J$ con Γ continua, 2π -periódica y con $\Gamma|_{[t, t+2\pi)}$ biyectiva $\forall t$.

Comenzamos observando que al ser todo arco o curva de Jordan J compacto y $\mathbb{C} \setminus B^c$ conexo para cualquier bola cerrada B , solo puede existir una componente conexa no acotada en $\mathbb{C} \setminus J$.

Denotando como \mathbb{D} al disco unidad abierto, nuestra prueba tomará como punto de partida el siguiente teorema conocido como el teorema del punto fijo de Brouwer, que consideramos perteneciente al bagaje matemático habitual¹.

Teorema 1.4 (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Sea $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ una función continua. Entonces existe $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ de modo que $f(z_0) = z_0$.*

¹En el trabajo que estamos siguiendo, Luisto (2011) [8], p. 19, se recoge una prueba de este resultado.

Dado que el cuadrado de lado dos, $I^2 = [-1, 1]^2$, es homeomorfo a la clausura del disco unidad, el teorema también es cierto para funciones continuas $f : I^2 \rightarrow I^2$.

También requeriremos un corolario de este teorema, que usaremos reiteradamente en la prueba del teorema de la curva de Jordan:

Corolario 1.5 (De [8], p. 20). Sean $h = (h_1, h_2), v = (v_1, v_2)$ dos funciones continuas de I en I^2 tales que

$$h_1(-1) = -1, \quad h_1(1) = 1,$$

$$v_2(-1) = -1, \quad v_2(1) = 1;$$

entonces existen $t, s \in I$ tales que $h(s) = v(t)$.

Demostración. Por reducción al absurdo, supongamos que $h(s) \neq v(t) \forall s, t \in I$. Podemos definir una función continua

$$f : I^2 \rightarrow I^2, \quad f(s, t) := \left(\frac{-(h_1(s) - v_1(t))}{\|h(s) - v(t)\|_\infty}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{\|h(s) - v(t)\|_\infty} \right)$$

ya que $\|h(s) - v(t)\|_\infty \neq 0, \forall s, t$. Por el teorema de Brouwer debe existir al menos un punto fijo de esta función que denotaremos (s_0, t_0) . No obstante, la gráfica de f está contenida en ∂I^2 , por lo que $(s_0, t_0) \in \partial I^2$. Por tanto, se tiene que o bien $s_0 = \pm 1$, o bien $t_0 = \pm 1$. Considerando las cuatro posibilidades llegamos siempre a una contradicción:

$$\begin{aligned} s_0 = 1 &= f_1(1, t_0) = \frac{-(1 - v_1(t_0))}{\|h(1) - v(t_0)\|_\infty} = \frac{v_1(t_0) - 1}{\|h(1) - v(t_0)\|_\infty} \leq 0, \\ s_0 = -1 &= f_1(-1, t_0) = \frac{-(-1 - v_1(t_0))}{\|h(-1) - v(t_0)\|_\infty} = \frac{v_1(t_0) + 1}{\|h(-1) - v(t_0)\|_\infty} \geq 0, \\ t_0 = 1 &= f_2(s_0, 1) = \frac{h_2(s_0) - 1}{\|h(s_0) - v(1)\|_\infty} \leq 0, \\ t_0 = -1 &= f_2(s_0, -1) = \frac{h_2(s_0) + 1}{\|h(s_0) - v(-1)\|_\infty} \geq 0. \end{aligned}$$

□

Cabe aclarar que este corolario también es cierto en rectángulos arbitrarios para los que se tengan dos funciones continuas que los crucen de forma horizontal y vertical respectivamente, debido a que podemos reducir este caso al considerado en este corolario mediante el homeomorfismo pertinente.

También requeriremos la siguiente versión del teorema de extensión de Tietze que nos permitirá más adelante probar que el complementario de cualquier arco es conexo.

Lema 1.6 (De [8], p. 21). Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto cerrado y $f : A \rightarrow [a, b]$ continua. Entonces existe una función continua $g : \mathbb{C} \rightarrow [a, b]$ tal que $g|_A = f$.

Demostración. En primer lugar observemos que si tomamos dos conjuntos cerrados disjuntos A_1, A_2 podemos definir la siguiente aplicación continua

$$h : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1], \quad h(x) = \frac{d(x, A_1)}{d(x, A_2) + d(x, A_1)};$$

ya que por ser disjuntos $d(x, A_1) + d(x, A_2) > 0$. Además, esta función satisface que $h(A_1) = \{0\}$ y $h(A_2) = \{1\}$. Si la componemos con $h'(y) = (b - a)y + a$, habremos conseguido una función continua $\hat{h} : \mathbb{C} \rightarrow [a, b]$ satisfaciendo $\hat{h}(A_1) = \{a\}$ y $\hat{h}(A_2) = \{b\}$.

Sea $f : A \rightarrow [a, b]$ continua y supongamos sin pérdida de generalidad, componiendo f con la correspondiente transformación afín si fuese necesario, que $a = -1$ y $b = 1$.

Consideremos los conjuntos cerrados de A , y por tanto de \mathbb{C} , $A_1 := f^{-1}([-1, -\frac{1}{3}])$ y $A_2 := f^{-1}([\frac{1}{3}, 1])$. Como habíamos observado antes, existe una función continua $h_1 : \mathbb{C} \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ tal que $h_1(A_1) = \{-\frac{1}{3}\}$ y $h_1(A_2) = \{\frac{1}{3}\}$.

Por consiguiente se tiene que si $x \in A_1 \cup A_2$, $|f(x) - h_1(x)| \leq \frac{2}{3}$; mientras que si $x \notin A_1 \cup A_2$ también sucede que $|f(x) - h_1(x)| \leq |f(x)| + |h_1(x)| \leq \frac{2}{3}$.

Repetiendo este procedimiento con la función $(f - h_1|_A) : A \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ y cambiando los cerrados por $(f - h_1|_A)^{-1}([-\frac{2}{3}, -\frac{2}{9}])$ y $(f - h_1|_A)^{-1}([\frac{2}{9}, \frac{2}{3}])$, obtenemos otra función $h_2 : \mathbb{C} \rightarrow [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$ tal que $|f(x) - h_1(x) - h_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$.

Continuando inductivamente encontramos una sucesión h_n de funciones continuas definidas en todo el plano, que satisfacen que

$$|f(x) - \sum_{n=1}^k h_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \forall x \in A.$$

Definiendo la siguiente función $g := \sum_{n=1}^{\infty} h_n$ se tiene que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |h_n(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{C},$$

por lo que $g : \mathbb{C} \rightarrow [-1, 1]$ está bien definida y satisface que $g|_A = f$. □

Ahora que ya tenemos las herramientas necesarias vamos a comenzar con la demostración de nuestro teorema que abordaremos, para facilitarnos el trabajo, en varios pasos. En primer lugar, demostraremos el siguiente teorema mediante una doble inclusión.

Teorema 1.7 (De [8], p. 22). *Dados una curva de Jordan o un arco J , y A una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus J$, se tiene que $\partial A = J$.*

Demostración del teorema 1.7, inclusión “ \subset ”. Supongamos que existe $x_0 \in \partial A \setminus J$. Al ser J un cerrado debe existir $r > 0$ de modo que $B(x_0, r) \cap J = \emptyset$. Como $B(x_0, r)$ es conexa y contiene a x_0 , por ser A una componente conexa tenemos que $B(x_0, r) \subset A$, de donde deducimos que x_0 no puede pertenecer a la frontera de A como habíamos supuesto. \square

Antes de demostrar la otra inclusión haremos un pequeño inciso para introducir el siguiente resultado ya que nos resultará útil en nuestro propósito.

Lema 1.8 (De [8], p. 22). *Dado un arco $\Gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, se tiene que $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$ es conexo.*

Demostración. Vamos a proceder mediante reducción al absurdo para llegar a una contradicción con el teorema de Brouwer 1.4 puesto que, gracias al lema anterior, seremos capaces de construir una aplicación continua del disco en sí mismo sin puntos fijos.

A pesar de que supongamos que existan varias componentes conexas, solo una de dichas componentes es no acotada ya que $|\Gamma|$ es compacto. Por tanto, nuestra tarea equivale a probar que no existen componentes conexas acotadas.

Sea A una de dichas componentes, $x_0 \in A$ y tomemos $r > 0$ de modo que $|\Gamma| \subset B(x_0, r)$. Denotando como S a $C(x_0, r)$, se tiene que S está contenida en la componente no acotada. Al ser $|\Gamma|$ un cerrado y $\Gamma^{-1} : |\Gamma| \rightarrow [a, b]$ continua, por el lema 1.6 podemos extenderla a todo el plano obteniendo una función $\hat{\Gamma}^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow [a, b]$, que podremos componer con Γ obteniendo una función continua $s : \mathbb{C} \rightarrow |\Gamma|$. Además se tiene que en $s_{|(|\Gamma|)}$ coincide con la identidad.

Si consideramos ahora la función q definida sobre $B[x_0, r]$ como sigue:

$$q(z) = \begin{cases} s(z), & \text{si } z \in \bar{A} \\ z, & \text{si } z \in A^c \cap B[x_0, r]; \end{cases}$$

tenemos que la función resultante está bien definida, ya que $\partial A \subset |\Gamma|$ (según hemos probado con anterioridad) donde s coincide con la identidad, y por el conocido lema del pegamento es continua.

No obstante, el punto x_0 no pertenece a la imagen de q porque $A \cap |\Gamma| = \emptyset$. Aprovechando este hecho, definimos las siguientes funciones continuas:

$$\begin{aligned} p : B[x_0, r] \setminus \{x_0\} &\rightarrow S, & p(z) &= \frac{r(z - x_0)}{\|z - x_0\|_2} + x_0, \\ t : S &\rightarrow S, & t(z) &= x_0 - (z - x_0) = 2x_0 - z; \end{aligned}$$

que se pueden componer en una función continua $t \circ p \circ q : B[x_0, r] \rightarrow B[x_0, r]$. Esta composición debe tener al menos un punto fijo que ha de pertenecer a S .

Ahora supongamos que $z_0 \in S$ es un punto fijo de $t \circ p \circ q$. Tenemos que $z_0 \notin \bar{A}$, ya que $S \cap A = \emptyset$ y $S \cap |\Gamma| = \emptyset$, y por tanto

$$z_0 = t \circ p \circ q(z_0) = t \circ p(z_0) = t(z_0) = 2x_0 - z_0;$$

de donde obtendríamos que $x_0 = z_0$ llegando a una contradicción. \square

En este punto nos gustaría resaltar que este último resultado también es válido en la esfera $\bar{\mathbb{C}}$, observando que si J es un arco de $\bar{\mathbb{C}}$ (usando una adecuada rotación no es restrictivo suponer que $J \subset \mathbb{C}$) entonces el hecho de que $\mathbb{C} \setminus J$ es conexo implica automáticamente que $\bar{\mathbb{C}} \setminus J$ también lo es.

Ahora vamos a continuar con la demostración del teorema 1.7 en la que nos faltaba probar la inclusión de J en la frontera de A .

Demostración del teorema 1.7, inclusión “ \supset ”. Comencemos por el caso en que solo haya una única componente conexa. En este caso, el conjunto $\mathbb{C} \setminus J$ constituye una componente conexa y por tanto su frontera debe ser todo J , puesto que de lo contrario habría un disco contenido en J (∂A es un subconjunto cerrado de J) y no sería homeomorfa a un intervalo o a una circunferencia.

Si hay más de una componente conexa, tal y como indica el lema 1.8, nuestro conjunto debe ser una curva de Jordan. Procedamos de nuevo por reducción al absurdo suponiendo, con lo que ya sabemos, que $\partial A \subsetneq |\Gamma| = J$. Sea, en efecto, $a = \Gamma(t_0) \in |\Gamma| \setminus \partial A$. Podemos considerar $r > 0$ de modo que $B[a, r] \cap \partial A = \emptyset$. Para simplificar notación supondremos que $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow J$ es continua y 2π -periódica, con $\Gamma|_{[t, t+2\pi)}$ biyectiva $\forall t$. Con esto y suponiendo también que $\Gamma(-\pi) = \Gamma(\pi) \in \partial A \neq \emptyset$ y que $t_0 \in (-\pi, \pi)$, podemos definir los dos siguientes puntos:

$$\begin{aligned} t_1 &:= \inf\{t > t_0 : \Gamma(t) \in C(a, r)\} \\ t_2 &:= \sup\{t < t_0 : \Gamma(t) \in C(a, r)\} \end{aligned}$$

con lo que resulta que $\hat{\Gamma} := \Gamma_{|[-\pi, \pi] \setminus [t_1, t_2]}$ es ahora un arco.

Si tomamos un punto en A y otro en otra componente conexa de $\mathbb{C} \setminus |\Gamma|$, podemos encontrar un arco $\alpha \subset \mathbb{C} \setminus |\hat{\Gamma}|$ que los una, por lo que dicho arco cortará a $|\Gamma|$ en $B[a, r]$, lo cual es imposible ya que el primero de dichos puntos debe pertenecer a la frontera de A . \square

Con todas estas herramientas por fin nos encontramos en una situación apropiada para abordar la demostración del teorema de la curva de Jordan.

Demostración del teorema 1.3 (De [8], p. 24). Antes de comenzar vamos a fijar algunos puntos en nuestra curva. En primer lugar, al ser J compacta, tenemos que $d : J \times J$ es continua. Por tanto, existen dos puntos a_1, a_2 de modo que $d(a_1, a_2) = \text{diam}(J)$. Sin pérdida de generalidad, haciendo un movimiento rígido y una homotecia, supondremos que $a_1 = (-1, 0)$, y que $a_2 = (1, 0)$. De este modo obtenemos que, dado que $\text{diam}(J) = 2$, nuestra curva está inscrita en el rectángulo $[-1, 1] \times [-2, 2]$ que llamaremos R .

Sean $b_1 = (0, 2)$ y $b_2 = (0, -2)$ que no forman parte de la curva puesto que, dado el diámetro de J , $R \cap J = \{a_1, a_2\}$. Como J une a_1 con a_2 , aplicando el corolario 1.5, tenemos que el segmento $[b_1, b_2]$ corta a nuestra curva, teniéndose además que dicha intersección es compacta. Tomemos entonces $m \in [b_1, b_2] \cap J$ con mayor segunda coordenada.

Denotemos J_1 y J_2 los dos arcos que unen a_1 con a_2 , siendo J_1 el que pasa por m y, de manera análoga, consideramos $n \in J_1 \cap [b_1, b_2]$ con menor segunda coordenada. Denotando por \widehat{mn} el arco de J_1 que une m con n (eventualmente, puede degenerar al punto $m = n$), se tiene que, de nuevo por el corolario 1.5, J_2 se interseca con la yuxtaposición de $[b_1, m]$, \widehat{mn} y $(n, b_2]$. Este corte debe producirse en $[n, b_2]$ ya que J_2 no sobrepasa a m ni corta a J_1 . Hecha esta aclaración, consideramos dos puntos más $k, j \in J_2 \cap [n, b_2]$ con mayor y menor segunda coordenada, respectivamente, y x el punto medio de $[n, k]$, como se ilustra en la figura 1.1.

Observemos que $x \notin J$ ya que queda por debajo de n y por encima de k en el segmento $[b_1, b_2]$.

Para proceder con nuestra prueba, vamos a ver en primer lugar que x pertenece a una componente acotada y, posteriormente, que no hay más componentes acotadas:

Supongamos que existe un arco $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ que une x con un punto en el exterior de nuestro rectángulo R sin intersectar con J y consideremos

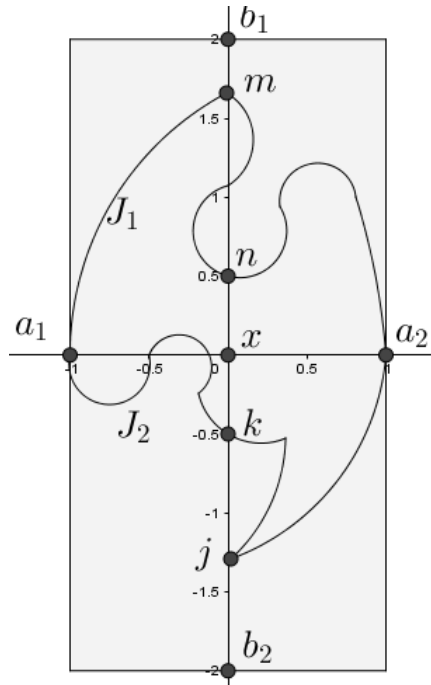


FIGURA 1.1: Fijación de puntos en una curva de Jordan.

$$\alpha = \gamma|_{[0, t_0]}, \quad t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \gamma(t) \in \partial R\}.$$

Como α no corta a nuestra curva se tiene que $\alpha(t_0)$ debe tener una segunda coordenada no nula para no cortar a J en a_1 o en a_2 .

Si dicha coordenada es positiva, J_1 ha de cortar a la yuxtaposición de $[b_2, x]$, α y el arco más corto de R uniendo $\alpha(t_0)$ con b_1 . Dicho arco no pasaría por ninguno de los a_i de donde podemos extraer una contradicción ya que J_1 solo corta a R en los a_i , no corta a α y tampoco al segmento $[b_2, x]$ por la definición de n y x .

Si por el contrario, dicha coordenada es negativa, de manera análoga, J_2 debe cortar a la yuxtaposición de $[b_1, x]$, α y el arco más corto en R uniendo $\alpha(t_0)$ con b_2 . De nuevo dicho arco no pasaría por ningún a_i lo cual resulta también contradictorio.

Deducimos así que el punto x pertenece a una componente conexa acotada por lo que solo falta ver que no existen más.

Supongamos que existe \tilde{A} otra componente conexa acotada y comencemos viendo que podemos unir b_1 con b_2 a través de un arco que no corte a \tilde{A} . En efecto, los segmentos $[b_1, m)$ y $(j, b_2]$ pertenecen a la componente conexa no acotada, los arcos \widetilde{mn} y \widetilde{kj} pertenecen a J y el segmento (n, k) se encuentra incluido en la misma componente conexa que x . Por consiguiente, si hubiese otra componente conexa acotada, no contendría

ningún punto de la yuxtaposición de $[b_1, m]$, \widetilde{mn} , $[n, k]$, \widetilde{kj} y $[j, b_2]$, que llamaremos $\widetilde{\alpha}$. Por supuesto tampoco contendría a a_1 ni a a_2 y además se tendría que $\widetilde{A} \subset R$ ya que solo puede haber una única componente no acotada.

Por otro lado, según el teorema 1.7, $a_1, a_2 \in \partial\widetilde{A}$, por lo que, podemos tomar dos puntos $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$ de \widetilde{A} tan cerca como queramos de a_1 y a_2 respectivamente. Además, como los arcos \widetilde{mn} y \widetilde{kj} no cortan a R , tomaremos \widetilde{a}_1 con primera coordenada menor y \widetilde{a}_2 con primera coordenada mayor que cualquier punto de $|\widetilde{\alpha}|$. Como $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$ se encuentran en la misma componente conexa, se podrán unir mediante un arco $\widetilde{\gamma} \subset \widetilde{A}$ que estaría también contenido en el interior de R .

Si denotamos como $\widehat{a}_1 \geq -1$ a la mínima primera coordenada de $\widetilde{\gamma}$, y $\widehat{a}_2 \leq 1$ a la máxima, tendremos que tanto $\widetilde{\gamma}$ como $\widetilde{\alpha}$ estarían incluidos en $[\widehat{a}_1, \widehat{a}_2] \times [b_1, b_2]$ de donde se deduciría por el corolario 1.5 que habrían de cortarse, lo cual es imposible ya que $\widetilde{A} \cap \widetilde{\alpha} = \emptyset$. \square

Vamos a aprovechar este momento para probar este teorema también en $\overline{\mathbb{C}}$ ya que lo requeriremos en los capítulos venideros:

Corolario 1.9. *Dada una curva de Jordan $J \subset \overline{\mathbb{C}}$, esta divide a $\overline{\mathbb{C}}$ en dos componentes conexas, siendo J es la frontera de ambas.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\infty \notin J$. Dado que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ es homeomorfo al plano, del teorema de la curva de Jordan en el plano deducimos que $(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}) \setminus J$ tiene dos componentes conexas, A y B , cuya frontera es J (en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$). Como solo una de ellas es no acotada, pongamos B , y J es acotada, tenemos que $\{\infty\} \cup B$ es un conjunto conexo de $\overline{\mathbb{C}} \setminus J$. Finalmente, como A y B son conexos, abiertos, cerrados y constituyen una partición en $\overline{\mathbb{C}} \setminus J$, son las dos componentes conexas buscadas, y como vimos su frontera (en $\overline{\mathbb{C}}$) es J . \square

Capítulo 2

Algunos resultados de análisis complejo

En este capítulo probaremos dos resultados a través de herramientas del análisis complejo: el teorema de Janiszewski y el teorema de la aplicación de Riemann. Ambos resultados serán importantes en nuestro propósito y darán cuenta de la potencia de este campo en la topología del plano.

En dichos resultados y en lo que sigue llamaremos *región* a un conjunto abierto y conexo, *camino regular* a una aplicación $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ de clase C^1 y *camino regular a trozos* a una yuxtaposición finita de caminos regulares.

2.1. Teorema de Janiszewski

Para este resultado topológico, como hemos dicho, utilizaremos algunas herramientas de análisis complejo. La primera es el siguiente teorema que nos limitaremos a enunciar porque lo consideramos perteneciente a los conocimientos habituales de análisis complejo.

Teorema 2.1 (De [13], p. 4). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *Para toda función analítica $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ y camino regular a trozos cerrado $|\gamma| \subset G$ se tiene que $\int_{\gamma} f = 0$.*
2. *Toda función analítica $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ tiene antiderivada.*

3. Si $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y no se anula en G , entonces existe un logaritmo de f en G (existe $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $e^g = f$).
4. Para cada $w \in \mathbb{C} \setminus G$ y $\gamma \subset G$, $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$.

A la luz de este último resultado definiremos región *simplemente conexa* como aquella que cumpla las condiciones del teorema 2.1.

En particular, este teorema nos sirve para garantizar la existencia de logaritmos en la siguiente situación:

Proposición 2.2 (De [13], p. 6). *Si $G \subset \mathbb{C}$ es una región y cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus G$ es no acotada, entonces G es simplemente conexa.*

Demostración. Veamos que se satisface la cuarta propiedad del teorema anterior:

Si $\gamma \subset G$, entonces $w \in (\mathbb{C} \setminus G) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$. Por tanto, la componente conexa de w en $\mathbb{C} \setminus G$ está contenida en la componente conexa de w en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, de donde se deduce que w pertenece a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. Como $\text{Ind}_\gamma(z)$ es constante (por ser continuo y entero) en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ y se satisface que

$$|\text{Ind}_\gamma(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{ds}{s-z} \right| \leq \int_\gamma \frac{ds}{|s-z|},$$

tomando $z \in G$ suficientemente alejado del compacto γ , se tiene que $\text{Ind}_\gamma(w) = 0$. \square

Con todo esto, deducimos que los interiores de las curvas de Jordan son conjuntos simplemente conexos.

A continuación, vamos a probar un resultado conocido como el teorema de Janiszewski con el que se pondrá de manifiesto la potencia de las herramientas del análisis complejo.

Teorema 2.3 (Janiszewski. De [10], p. 31). *Sean A_1 y A_2 dos conjuntos cerrados de $\overline{\mathbb{C}}$, tales que $A_1 \cap A_2$ es conexo. Si a y $b \in \overline{\mathbb{C}}$ no están separados ni por A_1 ni por A_2 , entonces tampoco están separados por $A_1 \cup A_2$.*

Demostración. Seguiremos la prueba referenciada, aunque hemos completado algunos detalles.

Supondremos por reducción al absurdo que tenemos dos puntos $a, b \in \overline{\mathbb{C}}$ y dos conexos cerrados A_1 y A_2 tales que su intersección es conexa, que no separan a de b , pero cuya

unión sí los separa. Además sin pérdida de generalidad asumiremos que $a = 0$ y que $b = \infty$, por lo que $A_1 \cup A_2$ es un conjunto acotado.

En esta situación, sabemos que existen $C_i \subset A_i^c$ con $i = 1, 2$ dos arcos que unen 0 y ∞ , que deben ser distintos ya que $A_1 \cup A_2$ separa estos dos puntos.

El conjunto conexo $A_1 \cap A_2$ pertenece a una de las dos componentes conexas de $\overline{\mathbb{C}} \setminus (C_1 \cup C_2)$. Llamemos F a dicha componente. Como los cerrados en esta topología son compactos, podemos encontrar dos abiertos disjuntos V_1 y V_2 que contengan a $A_1 \setminus F$ y $A_2 \setminus F$ respectivamente. Reduciendo aún más estos abiertos si fuera necesario podemos obtener dos abiertos disjuntos V_1 y V_2 tales que

$$A_i \setminus F \subset V_i \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus C_i \quad (i = 1, 2).$$

Por otro lado, los conjuntos $G_i = (\overline{\mathbb{C}} \setminus C_i) \subset \mathbb{C}$, con $i = 1$ y 2 , son abiertos y conexos (observación tras el lema 1.8) y satisfacen la proposición 2.2. De este modo, al no contener al punto 0 , se puede definir en cada G_1 y G_2 un logaritmo analítico f_1 y f_2 respectivamente. Sumando un múltiplo de $2\pi i$ a una de ellos si fuera necesario, podemos suponer que coinciden en F . Tomando el abierto $H = V_1 \cup V_2 \cup F$ que contiene a A_1 y a A_2 , definimos la función analítica $f : H \rightarrow \mathbb{C}$,

$$f(z) := \begin{cases} f_i(z) & \text{si } z \in V_i \\ f_1(z) = f_2(z) & \text{si } z \in F. \end{cases}$$

Como 0 e ∞ pertenecen a dos componentes conexas distintas en $\overline{\mathbb{C}} \setminus (A_1 \cup A_2)$, la componente conexa de 0 en $\overline{\mathbb{C}} \setminus (A_1 \cup A_2)$ está acotada (recordemos que $A_1 \cup A_2$ está acotado). Llamemos G a tal componente que satisface que $\partial G \subset H$. Al ser H abierto se tiene que $\partial H \cap \partial G = \emptyset$ con lo que podemos tomar $0 < \delta < d(\partial H, \partial G)$ ¹. Cubrimos el plano con una cuadrícula formada por cuadrados de diámetro δ , parametrizados mediante una orientación positiva, de manera que el punto 0 esté en el interior de uno de dichos cuadrados. Solo una cantidad finita de ellos, Q_1, \dots, Q_n cortará a G , ya que se trata de un conjunto acotado. Llamando Q a la unión de tales cuadrados, como 0 solo pertenece al interior de uno de ellos se tiene que

$$\text{Ind}_Q(0) := \sum_{k=1}^n \text{Ind}_{Q_k}(0) = 1.$$

Pensemos ahora en Q como un grafo dirigido (V, Q) cuyo conjunto de nodos está formado por los vértices de los cuadrados de Q y su conjunto de arcos por el de los pares de

¹Nótese que d representa la distancia euclídea en \mathbb{C} y que aunque H sea no acotado, la distancia entre ambos es real y positiva.

vértices (v_1, v_2) para los que exista un lado de algún Q_i que vaya de v_1 a v_2 . En este grafo el número de arcos de entrada en un determinado vértice es el mismo que de salida. Ahora bien, cuando calculamos el índice de Q los lados de cuadrados adyacentes (que se corresponden con arcos contrarios en nuestro grafo dirigido) se cancelan por lo que a partir de Q podemos formar un conjunto \tilde{Q} obviando todos estos lados adyacentes. De este modo $\text{Ind}_Q(0) = \text{Ind}_{\tilde{Q}}(0)$. Como hemos retirado de Q los mismos arcos de entrada que de salida en cada vértice, se sigue cumpliendo que el número de arcos de entrada en cada vértice es el mismo que de salida por lo que en el subgrafo (V, \tilde{Q}) , se satisface que \tilde{Q} es unión de circuitos². De este modo, tenemos que \tilde{Q} se puede expresar como unión de curvas de Jordan. Cada uno de estos lados que forman \tilde{Q} debe pertenecer a un Q_i que corte a $\mathbb{C} \setminus G$, puesto que si $Q_i \subset G$, entonces los ocho cuadrados adyacentes a Q_i pertenecen a Q . Así que todos los lados de \tilde{Q} están a distancia menor que δ de $\partial G \subset H$. Como habíamos tomado $\delta < d(\partial G, \partial H)$ se tiene que $\tilde{Q} \subset H$ donde habíamos definido un logaritmo analítico que es una antiderivada de $\frac{1}{z}$ lo cual constituye una contradicción ya que en esta situación tenemos que

$$\text{Ind}_Q(0) = \text{Ind}_{\tilde{Q}}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{Q}} z^{-1} dz = 0.$$

□

2.2. Teorema de la aplicación de Riemann

Este resultado también dará cuenta de la utilidad del análisis complejo. Con él seremos capaces de dar un primer paso en nuestro propósito y establecer un homeomorfismo entre el disco unidad y el interior de una curva de Jordan.

2.2.1. Teorema de la aplicación de Riemann

Definición 2.4. Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, diremos que f es *conforme* si es analítica e inyectiva.

Teorema 2.5 (De [16], p. 9). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa con $G \neq \mathbb{C}$. Sea $a \in G$. Entonces existe una aplicación conforme y biyectiva $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.*

²Si el lector no está familiarizado con los grafos no dirigidos, puede consultar una breve demostración de este hecho en el anexo de este TFM.

Puede probarse, de hecho, que dicha aplicación es única, pero nosotros no lo necesitamos para nuestro propósito. Por otro lado, para la demostración de la existencia requeriremos de varios resultados. El siguiente es consecuencia directa del teorema 2.1.

Lema 2.6 (De [16], p. 10). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa. Si f es una función analítica que no se anula en G , existe una raíz cuadrada analítica de f en G .*

Demostración. Tomando g un logaritmo de f en G , tenemos que $h(z) := e^{\frac{1}{2}g(z)}$ es una raíz cuadrada de f en G . \square

Teorema 2.7 (De [14], p. 9). *Sea $G \subset \mathbb{C}$ una región y $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ analítica y no constante. Entonces f es abierta.*

Demostración. Sea $U \subset G$ y $w_0 \in f(U)$. Tomemos $z_0 \in U$ con $f(z_0) = w_0$ y definamos $g(z) := f(z) - w_0$ que es analítica y no constante. Si $1 \leq m < \infty$ es la multiplicidad de z_0 como cero de g , tenemos que existe h analítica, con $h(z_0) \neq 0$, tal que $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$. Tomemos $\delta > 0$ tal que z_0 es el único cero de g en $B(z_0, \delta)$, de modo que h no se anula en dicha bola. Debido a que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

si tomamos $0 < r < \delta$, como el segundo sumando tiene antiderivada, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{g'(z) dz}{g(z)} = \frac{m}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{dz}{z - z_0} = m.$$

Por otro lado, definiendo $F(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C(z_0, r)} \frac{f'(z) dz}{f(z) - w}$, se tiene que si $0 < \epsilon = \min_{z \in C(z_0, r)} |f(z) - w_0|$, entonces para cada w tal que $|w - w_0| < \frac{\epsilon}{2}$ se cumple que

$$\begin{aligned} |F(w_0) - F(w)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(z_0, r)} \left| \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} - \frac{f'(z)}{f(z) - w} \right| dz \leq \\ M \int_{C(z_0, r)} \frac{|w_0 - w|}{|f(z) - w_0| |f(z) - w|} dz &\leq M \int_{C(z_0, r)} \frac{2|w_0 - w|}{\epsilon^2} dz = \tilde{M} |w_0 - w|, \end{aligned}$$

deduciéndose que F es continua. De este modo, existe $0 < \tilde{\delta}$ tal que $F(w) > 0$ para todo $w \in B(w_0, \tilde{\delta})$, lo cual implica que $f(z) - w$ se anula en $B(z_0, r)$, ya que de lo contrario $F(w)$ sería igual a 0. Tenemos entonces que $B(w_0, \tilde{\delta}) \subset f(U)$, de donde concluimos que f es abierta. \square

El siguiente corolario no contribuye a la demostración del teorema de la aplicación de Riemann, sino a la del teorema de Caratheodory que se encuentra en el capítulo siguiente.

No obstante, dada la similitud entre los argumentos que emplearemos en ella y los del resultado anterior, nos ha parecido apropiado incluirla en este momento.

Corolario 2.8 (De [14], p. 10). *Si $G \subset \mathbb{C}$ es una región y $f : G \rightarrow G'$ es una biyección conforme, entonces f' no se anula en G y f^{-1} es también conforme.*

Demostración. Comencemos probando por reducción al absurdo el primer hecho:

Supongamos que existe $z_0 \in G$ tal que $f'(z_0) = 0$. Tomando de nuevo $g(z) = f(z) - w_0$, donde $w_0 = f(z_0)$, tenemos que existe h analítica con $h(z_0) \neq 0$ y $2 \leq m < \infty$ tales que $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$, con lo que, definiendo F como antes, se tiene $F(w_0) = m$.

Por tanto, al ser F continua, se tiene que para cada z suficientemente cerca de z_0 , $F(f(z)) > 1$, lo cual implica que $f'(z) = 0$ (de lo contrario $F(f(z)) \leq 1$), contradiciendo que f sea inyectiva.

Como f es abierta G' es una región y f^{-1} es también un homeomorfismo. Solo falta ver para la segunda parte que f^{-1} es holomorfa (y por tanto analítica). Como f' no se anula, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, su diferencial, df , tiene rango dos. Por tanto, tenemos que $d(f^{-1}) = (df)^{-1}$ que también satisface tales ecuaciones, de donde concluimos que f^{-1} es también analítica. \square

Tras esta proposición seguiremos nuestro camino hacia la aplicación de Riemann.

Lema 2.9 (De [16], pp. 10 y 11). *Si $G \subsetneq \mathbb{C}$, es una región simplemente conexa, entonces existe una aplicación conforme $f : G \rightarrow \mathbb{D}$ satisfaciendo:*

$$\begin{aligned} f(a) &= 0, \\ 0 < f'(a) &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demostración. Tomemos $b \notin G$. Como $h(z) := z - b$ no se anula en G admite una raíz cuadrada analítica en G . Llamando g a dicha función, cabe aclarar que debe ser inyectiva ya que

$$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow z_1 - b = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - b \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Al ser analítica, el teorema 2.7 nos dice que se trata de una aplicación abierta. De este modo $g(G)$ es también abierto.

Sea $w_0 \in g(G)$ y $r > 0$ tal que $B(w_0, r) \subset g(G)$. Se debe satisfacer que $B(-w_0, r) \cap g(G) = \emptyset$, ya que de lo contrario existirían $z_1, z_2 \in G$ con $g(z_1) = -g(z_2)$ y tendríamos que

$$\begin{aligned} g(z_1)^2 &= g(z_2)^2 \Rightarrow z_1 - b = z_2 - b \Rightarrow z_1 = z_2 \\ \Rightarrow g(z_1) &= 0 = g(z_1)^2 = z_1 - b \Rightarrow b \in G, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Podemos tomar la siguiente función $\tilde{f} : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\tilde{f}(z) := \frac{r}{3(g(z) + w_0)},$$

que es analítica ya que su denominador no se anula porque $|g(z) + w_0| \geq r$, con lo que además $|\tilde{f}| \leq \frac{1}{3}$. También cabe aclarar que es inyectiva al serlo g .

Por último hacemos

$$f(z) := \lambda \frac{\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a)}{1 - \overline{\tilde{f}(a)}\tilde{f}(z)},$$

con algún λ de módulo uno que consiga $f'(a) = \frac{\lambda \tilde{f}'(a)}{1 - |\tilde{f}(a)|^2} > 0$.

Notemos que f está bien definida y es analítica ya que su denominador no se anula. Claramente $f(a) = 0$ y

$$|f(z)| = \frac{|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a)|}{|1 - \overline{\tilde{f}(a)}\tilde{f}(z)|} \leq \frac{2}{3} < 1.$$

Por último observemos que f es inyectiva por serlo \tilde{f} y la transformación que le estamos aplicando. □

Mediante este lema, hemos construido una aplicación conforme entre G y el disco. Para lograr un homeomorfismo será preciso dotar de una cierta estructura al conjunto de funciones que cumple las propiedades de este lema y tomar la que tenga mayor derivada en a .

2.2.2. Familias normales

En Timoney (2005B) [15] se caracterizan las sucesiones de funciones holomorfas que admiten una subsucesión convergente. Como nuestra sucesión está uniformemente acotada en norma por uno, vamos a reforzar las hipótesis de estos resultados restringiéndonos a la suficiencia de los mismos, que es lo que nos interesará. Denotaremos como Ω a un conjunto abierto del plano complejo. Por otro lado, en las pruebas de Timoney serán precisos algunos resultados que extraeremos de De Amo (2008) [1].

Definición 2.10. Una familia de funciones holomorfas $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es *normal* si es relativamente compacta³.

Nuestro objetivo es ver que si tenemos una sucesión de funciones holomorfas $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $|f_n| \leq 1$, entonces esta sucesión es normal. Comencemos viendo que existe una subsucesión convergente en cada conjunto numerable:

Lema 2.11 (De [2], p. 3). *Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones de Ω a \mathbb{D} y $A \subset \Omega$ un conjunto numerable. Entonces existe una subsucesión $\{f_{\phi(n)}\}$ convergente en A .*

Demostración. En efecto, escribamos A como sucesión $A = \{a_n\}$. Como $|f_n(a)| < 1$, admite una sucesión de índices I_1 para los que $f_n(a_1)$ converge. Del mismo modo podemos tomar otro subconjunto de índices $I_2 \subset I_1$ para los que $f_n(a_2)$ converge. Procediendo iterativamente construimos una sucesión de subíndices encajados $I_1 \supset I_2 \dots$ tal que $\{f_n(a_j)\}_{n \in I_j}$ converge para cualquier j .

Finalmente, mediante un método diagonal tomamos $\phi(n) = I_n(n)$. Con la subsucesión así definida es claro que $\{f_{\phi(n)}(a_j)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente para cualquier j ya que esta sucesión, a partir del término j -ésimo, es una subsucesión de $\{f_n(a_j)\}_{n \in I_j}$. \square

En segundo lugar probaremos la equicontinuidad de toda sucesión que combinaremos con un argumento de densidad en la prueba final de esta sección.

Proposición 2.12 (De [15], p. 11). *Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ es una familia de funciones de Ω a \mathbb{D} , entonces \mathcal{F} es equicontinua.*

Demostración. Sea $a \in \Omega$, $R > 0$ tal que $B(a, R) \subset \Omega$, $z \in B(a, \frac{R}{2})$ y $f \in \mathcal{F}$. Por la fórmula de Cauchy:

$$\begin{aligned} |f(z) - f(a)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-a} dw \right| = \\ & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,R)} f(w) \frac{z-a}{(w-z)(w-a)} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{|z-a|}{\frac{R}{2}R} = k(a)|z-a|. \end{aligned}$$

\square

Lema 2.13 (De [2], p. 2). *Sea f_n una sucesión de funciones equicontinuas en Ω y convergente en $A \subset \Omega$ denso. Entonces f_n converge sobre los compactos de Ω .*

³Toda sucesión admite una sucesión que converge uniformemente sobre compactos de Ω .

Demostración. Sea K un compacto de Ω y $\epsilon > 0$. Como las f_n son equicontinuas, para cada $b \in K$ se tiene que

$$|b - z| < \delta(b) \Rightarrow |f_n(b) - f_n(z)| < \epsilon \quad \forall n.$$

Como $K \subset \bigcup_{b \in K} B(b, \delta(b))$, tenemos b_1, b_2, \dots, b_m tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^m B(b_i, \delta(b_i))$. Por tanto, si $z \in K$, existirá b_i con $z \in B(b_i, \delta(b_i))$ y en consecuencia, $|f_n(b_i) - f_n(z)| < \epsilon$ para cualquier n .

Por ser A denso, para todo $i = 1, \dots, m$ existen $a_i \in B(b_i, \delta(b_i))$, de modo que uno de ellos satisface $|f_n(a_i) - f_n(z)| < 2\epsilon$ para cualquier n .

Además, para cualquier $i = 1, \dots, m$ existe n_i a partir del que las $f_n(a_i)$ están suficientemente próximas (a una distancia menor que ϵ). Tomando n_0 el mayor de ellos, si $z \in K$ y $p, q > n_0$ se satisface que

$$|f_p(z) - f_q(z)| \leq |f_p(z) - f_p(a)| + |f_p(a) - f_q(a)| + |f_q(a) - f_q(z)| < 5\epsilon,$$

por lo que f_n converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$. \square

A continuación presentamos una versión adaptada para nuestro propósito (a fin de realizar un esfuerzo menor) de un teorema de Ascoli-Arzelá, cuya demostración queda como un corolario de los resultados anteriores.

Teorema 2.14 (Ascoli-Arzelá versión débil). *Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ una sucesión de funciones de Ω a \mathbb{D} , entonces \mathcal{F} es normal.*

Demostración. Tomemos una sucesión $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ y $A := (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \cap \Omega$, que es denso y numerable en Ω . Por el lema 2.11, existe una subsucesión $\{f_{\phi(n)}\}$ convergente en A y por la proposición 2.12 y el lema 2.13 dicha sucesión es convergente sobre los compactos de Ω con lo que \mathcal{F} es normal. \square

2.2.3. Prueba de la aplicación de Riemann

Como punto de partida para enlazar estos resultados con nuestra prueba tomaremos el siguiente resultado conocido como teorema de Weierstras, que puede obtenerse como consecuencia del teorema de Morera:

Teorema 2.15. *Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ converge uniformemente a f sobre los compactos de Ω , entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f'(z) = \lim_n f'_n(z)$ para cualquier $z \in \Omega$.*

Sabiendo que el límite de funciones analíticas es analítico, probaremos que el de funciones inyectivas es inyectivo o constante. Para ello, primeramente probaremos un teorema de Hurwitz que enuncia lo siguiente:

Teorema 2.16 (Hurwitz. De [1], p. 12). *Si $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ es una sucesión de funciones que no se anulan y convergen uniformemente sobre compactos de Ω a f no constante, entonces f tampoco se anula en Ω .*

Demostración. Al no ser f constante, sus ceros deben de ser aislados por lo que si existe $z_0 \in \Omega$ con $f(z_0) = 0$, existirá $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ si $0 < |z_0 - z| \leq r$. Como f no se anula en $C_r := C(z_0, r)$ y f_n y f'_n convergen uniformemente sobre $B[z_0, r]$ a f y f' tenemos que, dado $0 < \tilde{r} \leq r$, existen $M, \alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ (dependientes de \tilde{r}) tales que

$$\begin{aligned} |f(z)|, |f_n(z)| &> \alpha \quad \forall z \in C_{\tilde{r}}, n > n_0, \\ |f'(z)|, |f'_n(z)| &< M \quad \forall z \in C_{\tilde{r}}, n > n_0. \end{aligned}$$

Con estas cotas tenemos que $\frac{f'_n}{f_n}$ converge uniformemente a $\frac{f'}{f}$ en $C_{\tilde{r}}$ y por el teorema de la convergencia acotada se tiene que

$$0 = \lim_n \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\tilde{r}}} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\tilde{r}}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz, \quad \forall 0 < \tilde{r} \leq r.$$

No obstante, al ser f analítica, la multiplicidad de z_0 como cero de f es finita, pongamos m . De este modo, existe $g \in \mathcal{H}(B(z_0, r_1))$ tal que $g(z_0) \neq 0$ y $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$. Con esto, para $\tilde{r} < \min\{r_1, r\}$, la integral de la derecha queda

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\tilde{r}}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{m}{2\pi i} \int_{C_{\tilde{r}}} \frac{1}{z - z_0} dz = m \neq 0.$$

□

Proposición 2.17 (De [16], p. 2). *Sea G una región, si $\{f_n\} \subset \mathcal{H}(G)$ es una sucesión de funciones inyectivas convergente a f sobre compactos de G , entonces f es inyectiva o constante.*

Demostración. Supongamos que f no es ni inyectiva ni constante, con lo que existirán $a \neq b$ tales que $f(a) = f(b) = w$. Restando a w si fuese necesario, podemos suponer que $w = 0$. Por el principio de acumulación de ceros también debe existir $r < \frac{|a-b|}{2}$ tal que a y b son los únicos ceros de f en $B(a, r)$ y $B(b, r)$, respectivamente. Como las f_n son inyectivas podemos extraer una subsucesión que no se anule en un entorno de a o de b

que llamaremos V , lo cual contradice el teorema de Hurwitz 2.16 que nos dice que en tal caso f tampoco se anula en V como habíamos supuesto. \square

Demostración del teorema 2.5 (de [16], p. 11). Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(G)$ la familia de funciones inyectivas $f : G \rightarrow \mathbb{D}$, que cumplen $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$. Por el lema 2.9, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Supongamos que no se alcanza en \mathcal{F} el supremo $\alpha := \sup_{f \in \mathcal{F}} \{f'(a)\}$, y que existe por tanto f_n una sucesión tal que $f'_n(a)$ tiende a α . Por el Teorema de Ascoli-Arzelá 2.14, tenemos que existe una subsucesión convergente sobre compactos de G a $f \in \mathcal{H}(G)$. En primer lugar vemos que f satisface $f'(a) = \lim_n f'_n(a) > 0$ y $f(a) = 0$. Como $f'_n(a) \neq 0$, f no es constante, por lo que ha de ser inyectiva según la proposición 2.17. Además también se tiene que $|f(z)| \leq 1$ pero como por el teorema 2.7 $f(G)$ debe ser abierto, se tiene que $f(G) \subset \mathbb{D}$. En suma, concluimos que $f \in \mathcal{F}$.

Supondremos que esta última función no es suprayectiva y llegaremos a una contradicción ya que seremos capaces de construir otra función con una derivada en a mayor.

En efecto, sea $w \in \mathbb{D} \setminus f(G)$. Como toda función que no se anule admite una raíz cuadrada, existe $h \in \mathcal{H}(G)$ tal que

$$h^2(z) = \frac{f(z) - w}{1 - \bar{w}f(z)},$$

y sea g definida con $|\lambda| = 1$ que haga $g'(a) \geq 0$:

$$g(z) := \lambda \frac{h(z) - h(a)}{1 - \bar{h}(a)h(z)}.$$

Como es natural, lo primero que debemos ver es que g está bien definida. Con un sencillo ejercicio podemos probar que si $|z|, |w| < 1$ entonces

$$|z - w|^2 < |1 - \bar{w}z|^2,$$

de donde se deduce que

$$|h^2(z)| = \frac{|f(z) - w|}{|1 - \bar{w}f(z)|} < 1 \Rightarrow |h(z)| < 1.$$

De este hecho deducimos que g está bien definida y es analítica, y que además $g(G) \subset \mathbb{D}$. Asimismo, la transformación que estamos aplicando es inyectiva, con lo que si h es inyectiva también lo será g .

Supongamos que $h(z_1) = h(z_2)$, tendríamos que $h(z_1)^2 = h(z_2)^2$, pero como h^2 es inyectiva por serlo f , deducimos que $z_1 = z_2$.

En suma, concluimos que $g \in \mathcal{F}$. Dedicaremos lo que queda de demostración a calcular $g'(a)$ para ver que $g'(a) > f'(a)$ llegando a una contradicción:

En primer lugar notemos que $h(a)^2 = -w$, con lo que

$$\begin{aligned} g'(z) &= \lambda \frac{h'(z)(1 - \overline{h(a)}h(z)) + (h(z) - h(a))\overline{h(a)}h'(z)}{(1 - \overline{h(a)}h(z))^2} \\ \Rightarrow g'(a) &= \lambda \frac{h'(a)(1 - |h(a)|^2)}{(1 - |h(a)|^2)^2} = \lambda \frac{h'(a)}{1 - |w|}. \end{aligned}$$

Por otro lado, sabiendo que $f(a) = 0$:

$$\begin{aligned} 2h(z)h'(z) &= \frac{f'(z)(1 - \overline{w}f(z)) + (f(z) - w)\overline{w}f'(z)}{(1 - \overline{w}f(z))^2}, \\ 2h(a)h'(a) &= f'(a)(1 - |w|^2), \\ |h'(a)| &= |f'(a)| \frac{1 - |w|^2}{2\sqrt{|w|}}; \end{aligned}$$

Con lo que finalmente $|g'(a)| = |f'(a)| \frac{1 + |w|}{2\sqrt{|w|}} > |f'(a)|$, ya que $0 < |w| < 1$. \square

Para finalizar este apartado nos gustaría remarcar que si G es el interior de una curva de Jordan, entonces es simplemente conexo. Por tanto, el teorema de la aplicación de Riemann nos dice que existe una aplicación conforme (y biyectiva) entre ella y \mathbb{D} , por lo que en particular deducimos que el interior de una curva de Jordan es conformemente homeomorfo al disco unidad.

Capítulo 3

Teorema de Schoenflies

Este capítulo constituirá la parte central del trabajo. En él trataremos de construir un homeomorfismo entre una configuración de curvas de Jordan disjuntas y otra formada por circunferencias.

Para tal fin, extenderemos el homeomorfismo entre la frontera del disco unidad y una curva de Jordan a todo el espacio donde esta se encuentra contenida, para lo que requeriremos el uso de los teoremas de la curva de Jordan y de la aplicación de Riemann que probamos con anterioridad.

Teorema 3.1 (Teorema de Schönflies). *Dada una curva de Jordan $J \subset \overline{\mathbb{C}}$ (resp. $J \subset \mathbb{C}$) y un homeomorfismo $h : \partial\mathbb{D} \rightarrow J$, existe otro homeomorfismo $\hat{h} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ (resp. $\hat{h} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$) de modo que $\hat{h}|_{\partial\mathbb{D}} = h$.*

Este teorema nos llevará realizar otro pequeño viaje con paradas en la conexión local para probar el teorema de Carathéodory o la compactificación del plano complejo donde aprovecharemos que algunas funciones como $\frac{1}{z}$ resultan ser homeomorfismos.

3.1. Conexión local y el teorema de Carathéodory

El primer paso para facilitarnos la prueba del teorema de Schoenflies, al cual dedicaremos este apartado, será extender el homeomorfismo conforme (en lo que sigue entenderemos que las aplicaciones conformes son biyectivas) entre el interior de una curva de Jordan J y \mathbb{D} a sus fronteras. Para esto será necesario trabajar sobre propiedades como la conexión local, que nos ayudarán a caracterizar cuándo podemos realizar esta extensión.

Cabe destacar que en esta sección trabajaremos en \mathbb{C} . No obstante, como los resultados que obtendremos son topológicos, seremos capaces de extenderlos también a $\overline{\mathbb{C}}$.

Comencemos dando una posible definición de conexión local que luego refinaremos en conexión local uniforme:

Definición 3.2. Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice que es *localmente conexo* si para cualquier $a \in S$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta_{a,\epsilon} > 0$ de modo que cualquier punto $b \in B_S(a, \delta_{a,\epsilon})$ se pueda unir con a mediante un subconjunto conexo de S de diámetro menor que ϵ .

Hay otras posibles definiciones para esta conexión local. La siguiente proposición nos brinda otra:

Proposición 3.3 (De [12], p. 1). *Un subconjunto $S \subset \mathbb{C}$ es localmente conexo si y solo si tiene una base conexa para su topología de subespacio.*

Demostración. Asumamos que S es localmente conexo y consideremos $x \in S$. Efectivamente, los elementos de la forma $B_S(x, \frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}$ forman una base de entornos de x . Por tanto, fijado n será suficiente encontrar un entorno abierto conexo incluido en $B_S(x, \frac{1}{n})$. Para tal fin, tomemos C la componente conexa de x en $B_S(x, \frac{1}{n})$ y veamos que es abierta. Sea $y \in C$ y denotemos como $\epsilon := d(y, C(x, \frac{1}{n}))$. Como S es localmente conexo, tenemos que cualquier $z \in B_S(y, \delta_{y,\epsilon})$ se puede unir con y mediante un conexo deduciéndose que $B_S(y, \delta_{y,\epsilon}) \subset C$.

El recíproco resulta directo ya que fijada $B_S(a, \epsilon)$, podemos encontrar un entorno de a conexo de la base $A \subset B_S(a, \epsilon)$ que al mismo tiempo contendrá una bola $B_S(a, \delta)$ con lo que cualquier elemento de esta última bola se puede unir con a mediante A . \square

Para conjuntos compactos podemos obtener otra caracterización.

Proposición 3.4 (De [12], p. 2). *Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ es compacto y localmente conexo si y solo si, para cualquier $\epsilon > 0$, S se puede escribir como unión finita de conjuntos conexos y compactos cuyos diámetros no excedan a ϵ .*

Demostración. Dado que esta proposición es trivial si S es un conjunto unipuntual, supondremos que está formado por más puntos. Comenzaremos probando el recíproco de esta proposición donde evidentemente se da la compacidad de S con lo que solo nos restaría probar su conexión local.

Tomemos $\epsilon > 0$ y escribamos $S = \cup_{i=1}^n K_i$, donde los $K_i \subset \mathbb{C}$ son compactos, conexos y con $\text{diam}(K_i) < \epsilon$. Tomemos ahora $x \in S$ para el que si ocurre que $x \in K_i \forall i$ entonces se tendría que los propios K_i serían los conexos que unirían a x con cualquier otro punto

$y \in S$ a distancia ϵ de x . En caso contrario, tomando $\delta_{x,\epsilon} = d(x, \cup_{x \notin K_i} K_i)$ de nuevo algún K_i uniría a x con un punto que tomásemos a distancia menor que $\delta_{x,\epsilon}$ de x .

Para la implicación directa, sabiendo por la proposición anterior que existe una base de abiertos conexos, podremos escribir $S = \cup C_i$ como unión de abiertos (en la topología relativa) conexos con $\text{diam}(C_i) < \epsilon$ y extraer por su compacidad un recubrimiento finito, teniéndose que $S = \cup_{i=1}^n C_i$. Como S es cerrado, se tiene que $S = \cup_{i=1}^n \overline{C_i}$ siendo los $\overline{C_i}$ conexos, cerrados y de diámetro menor que ϵ y por tanto también compactos. \square

Corolario 3.5 (De [12], p. 2). *Si $S \subset \mathbb{C}$ es compacto, localmente conexo y $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, entonces $f(S)$ es localmente conexo.*

Demostración. Recordemos que $f(S)$ es compacto y f uniformemente continua por lo que fijado $\epsilon > 0$ encontramos δ de modo que al escribir $S = \cup_{i=1}^n K_i$ como unión finita de compactos conexos con $\text{diam}(K_i) < \delta$ se tenga que $\text{diam}(f(K_i)) < \epsilon$. De este modo, podemos escribir $f(S) = \cup_{i=1}^n f(K_i)$ como unión finita de compactos conexos de diámetros menores que ϵ concluyendo por la proposición anterior que $f(S)$ es en efecto localmente conexa. \square

A continuación vamos a refinar nuestra noción de conexión local a una conexión local uniforme en la que $\delta_{x,\epsilon}$ solo dependerá de ϵ .

Definición 3.6. Un conjunto $S \subset \mathbb{C}$ se dice que es *uniformemente localmente conexo* si para cualquier $\epsilon > 0$ existe $\delta_\epsilon > 0$ de modo que cualquier par de puntos $a, b \in S$ con $|a - b| < \delta_\epsilon$ se pueden unir mediante un subconjunto conexo de S de diámetro menor que ϵ .

Proposición 3.7 (De [12], p. 2). *Todo conjunto $S \subset \mathbb{C}$ compacto y localmente conexo es uniformemente localmente conexo.*

Demostración. En esta ocasión razonaremos por reducción al absurdo fijando $\epsilon > 0$ y suponiendo que para cada n podemos encontrar dos elementos $x_n, y_n \in S$ con $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ que no se pueden unir con un conexo de diámetro menor que ϵ . Dado que nos encontramos en un compacto, podremos extraer una subsucesión x_{n_k} convergente a un punto $p \in S$. Considerando los mismos índices en la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, de la subsucesión $\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ podemos extraer otra subsucesión que para simplificar notación denotaremos \bar{y}_n convergente también a p . De este modo obtenemos dos sucesiones \bar{x}_n, \bar{y}_n convergentes a p que han sido extraídas de las dos sucesiones originales con los mismos índices. Como S es localmente conexo, basta tomar $\bar{x}_{n_0}, \bar{y}_{n_0}$ que disten de p menos de $\delta_{p, \frac{\epsilon}{2}}$ para que existan dos conexos C_1 y C_2 con diámetro menor que $\frac{\epsilon}{2}$ que los unan con p . La unión de

C_1 y C_2 es un conexo que une \bar{x}_{n_0} con \bar{y}_{n_0} con diámetro menor que ϵ lo que contradice nuestra suposición. \square

A partir de este momento trabajaremos con aplicaciones conformes ya que, gracias a la aplicación de Riemann, sabemos que existe una aplicación conforme entre el interior del disco y el interior de una curva de Jordan. El hecho de trabajar con aplicaciones conformes en lugar de homeomorfismos cualquiera nos va a ayudar en lo que nos queda de capítulo ya que la demostración más sencilla que hemos encontrado aprovecha esa conformidad.

El primer paso será extender un homeomorfismo dado a la clausura de ambos conjuntos. A tal fin, daremos primeramente un lema que nos resultará útil para determinar cuándo se puede realizar esta extensión.

Lema 3.8 (De [12], p. 2). *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una aplicación conforme y $z_0 \in \mathbb{D}$. Denotamos como C_r a la curva $C(z_0, r) \cap \mathbb{D}$. Entonces para cualquier $\rho \in (0, 1)$ se satisface que*

$$\inf_{\rho < r < \sqrt{\rho}} \text{long}(f(C_r)) \leq 2 \sqrt{\frac{\pi \text{área}(\Omega)}{\log(\frac{1}{\rho})}}$$

Demostración. Comencemos aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz para obtener que

$$\begin{aligned} \text{long}(f(C_r)) &= \int_{C_r} |f'(z)| dz \leq \left(\int_{C_r} 1^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{C_r} |f'(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \text{long}(C_r)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{C_r} |f'(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

y como $\text{long}(C_r) < 2\pi r$ obtenemos que

$$\frac{\text{long}(f(C_r))^2}{r} \leq 2\pi \int_{C_r} |f'(z)|^2 dz. \quad (3.1)$$

A continuación usaremos que $1 = \frac{2}{\log(\frac{1}{\rho})} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho}} \frac{du}{u}$ con lo que:

$$\begin{aligned} \inf_{\rho < r < \sqrt{\rho}} \text{long}(f(C_r))^2 &= \frac{2}{\log(\frac{1}{\rho})} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho}} \inf_{\rho < r < \sqrt{\rho}} \text{long}(f(C_r))^2 \frac{du}{u} \leq \\ &= \frac{2}{\log(\frac{1}{\rho})} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho}} \frac{\text{long}(f(C_u))^2}{u} du, \end{aligned}$$

donde aplicando 3.1 resulta que

$$\inf_{\rho < r < \sqrt{\rho}} \text{long}(f(C_r))^2 \leq \frac{2}{\log(\frac{1}{\rho})} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho}} 2\pi \int_{C_u} |f'(z)|^2 dz du = \frac{4\pi}{\log(\frac{1}{\rho})} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho}} \int_{C_u} |f'(z)|^2 dz du.$$

Dado que f es analítica, cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann y su jacobiano es $J_f = |f'|^2$. Sustituyendo en el último miembro de la expresión anterior obtenemos

$$\frac{4\pi}{\log(\frac{1}{\rho})} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho}} \int_{C_u} J_f dz du = \frac{4\pi}{\log(\frac{1}{\rho})} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho}} \int_{f(C_u)} dz du \leq \frac{4\pi|\Omega|}{\log(\frac{1}{\rho})},$$

puesto que en el primer miembro de la desigualdad estaríamos integrando sobre un subconjunto de Ω . \square

De este lema lo que nos va a interesar es que la acotación realizada no depende de z_0 y que además tiende a cero con ρ si Ω es un conjunto acotado.

A continuación, dedicaremos un apartado a la prueba del teorema de Carathéodory que nos facilitará el camino para alcanzar nuestro anhelado teorema de Schoenflies.

3.1.1. Teorema de Carathéodory

Con propósito de simplificarnos la demostración de este teorema, comenzaremos por probar una versión más débil. Denotaremos como Ω a una región de \mathbb{C} .

Teorema 3.9 (De [12], p. 3). *Sea $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ una aplicación conforme. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f se extiende de manera continua a $\overline{\mathbb{D}}$,
2. $\partial\Omega$ es una curva cerrada (imagen continua de \mathbb{S}^1),
3. $\partial\Omega$ es uniformemente localmente conexa,
4. $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es uniformemente localmente conexo.

Demostración. Comencemos probando que (1) implica (2) viendo que $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\Omega$:

Por la continuidad de esta extensión se debe satisfacer que $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\Omega}$. De este modo tendríamos que $f(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\Omega$, porque de lo contrario existiría una sucesión $\{z_n\}$ en \mathbb{D}

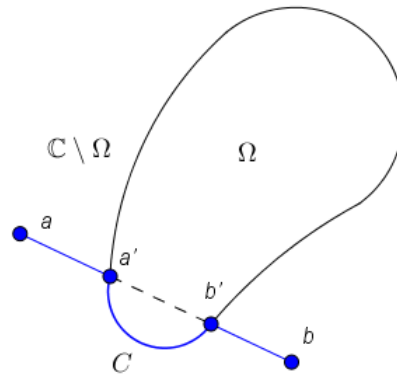


FIGURA 3.1: Ilustración de (3) implica (4).

convergente a $\bar{z} \in \partial\mathbb{D}$, tal que $f(\bar{z}) = f(z_0)$ con $z_0 \in \mathbb{D}$. Esto resulta imposible ya que al ser f un homeomorfismo se tendría que $\lim z_n = z_0$.

Para la otra inclusión, $\partial\Omega \subset f(\partial\mathbb{D})$, bastaría tomar una sucesión $\{w_n\} \subset \Omega$ convergente a $\bar{w} \in \partial\Omega$ y $z_n = f^{-1}(w_n) \in \mathbb{D}$. De la sucesión z_n podemos extraer una subsucesión z_{n_k} convergente a cierto $\bar{z} \in \bar{\mathbb{D}}$, que por la continuidad de f satisfaría que $f(\bar{z}) = \bar{w}$. Como f es un homeomorfismo entre los abiertos \mathbb{D} y Ω a la fuerza se debe dar que $\bar{z} \in \partial\mathbb{D}$.

De este modo, si $\partial\mathbb{D} = h(\mathbb{S}^1)$, con h una función continua, entonces $\partial\Omega = f \circ h(\mathbb{S}^1)$ y es por tanto una curva cerrada.

Para probar que (2) implica (3) simplemente hay que hacer uso del corolario 3.5 y de la proposición 3.7.

Si asumimos (3) para probar (4), fijado $\epsilon > 0$ vamos a ver que nos basta con tomar $\delta_{\frac{\epsilon}{3}} < \frac{\epsilon}{3}$ dado por la conexión local uniforme de $\partial\Omega$. Por un lado, dados dos puntos $a, b \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ con $|a - b| < \delta_{\frac{\epsilon}{3}}$ podría ocurrir que $[a, b] \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ y en tal caso $[a, b]$ sería un conjunto conexo de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que uniría a con b con $\text{diam}([a, b]) < \delta_{\frac{\epsilon}{3}} < \frac{\epsilon}{3}$. En el caso contrario, ilustrado en la figura 3.1, se tendría que $[a, b] \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ y, al ser esta intersección un compacto, podríamos considerar a', b' el primer y el último punto de corte de $[a, b]$ con $\partial\Omega$. Como $a', b' \in [a, b]$, se cumple que $|a' - b'| < \delta_{\frac{\epsilon}{3}}$ por lo que existe un conjunto conexo $C \subset \partial\Omega$ que los une de diámetro menor que $\frac{\epsilon}{3}$. Dado que Ω es abierto, $\partial\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ con lo que $[a, a'] \cup C \cup [b', b]$ constituye un conjunto conexo de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ que une a con b de diámetro menor que ϵ .

En último lugar, supondremos (4) para demostrar (1). Sabemos que si f fuese uniformemente continua, existiría tal extensión, por tanto, nos concentraremos en probar que f es uniformemente continua. De hecho es suficiente probar que lo es en $A := \{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$ ya que $\partial\mathbb{D} \subset \partial A$. En efecto, fijemos $\epsilon > 0$ y tomemos ρ_ϵ suficientemente pequeño para que se satisfagan las siguientes condiciones:

- La cota del lema 3.8 sea estrictamente menor que un cierto $\delta_{\frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2}$ proporcionado por la conexión local uniforme de $\mathbb{C} \setminus \Omega$;
- $\rho_\epsilon < \frac{1}{4}$ a fin de que se tenga que $d(0, A) > \sqrt{\rho_\epsilon}$.

Sin pérdida de generalidad asumiremos que $\frac{\epsilon}{2} < d(f(0), \partial\Omega)$ y, razonando por reducción al absurdo, que existen $z, z' \in \mathbb{D}$ con $|z - z'| < \rho_\epsilon$ y $|f(z) - f(z')| > \epsilon$.

Como la cota de nuestra primera condición es estrictamente menor que $\delta_{\frac{\epsilon}{2}}$, tomamos $C_r := C(z, r) \cap \mathbb{D}$ con $\rho_\epsilon < r < \sqrt{\rho_\epsilon}$ que satisfaga que $\text{long}(f(C_r)) < \delta_{\frac{\epsilon}{2}}$. Distinguiamos dos casos:

Si $B[z, r] \subset \mathbb{D}$, se tiene que $C_r = C(z, r)$. Dado que f se trata de un homeomorfismo, se tiene que $f(C_r) = \partial f(B(z, r))$. Resulta que $f(B[z, r])$ es un compacto, con lo que su diámetro se alcanza: $\text{diam}(f(B[z, r])) = |f(z_0) - f(z_1)|$. Para garantizar la maximalidad de esta distancia se debe cumplir que estos puntos no pertenezcan al interior de $f(B[z, r])$, con lo que $f(z_1), f(z_2) \in \partial f(B[z, r])$. En este punto llegamos a una contradicción ya que:

$$|f(z) - f(z')| \leq |f(z_0) - f(z_1)| < \text{long}(f(C_r)) < \delta_{\frac{\epsilon}{2}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

En otro caso, $B[z, r] \not\subset \mathbb{D}$, tendremos que C_r es un arco de circunferencia desprovisto de sus puntos extremos. Así mismo, podemos parametrizar su imagen mediante $\gamma : (0, 1) \rightarrow f(C_r)$. Como $\text{long}(f(C_r)) < \delta_{\frac{\epsilon}{2}} < \infty$, existen $\lim_{x \rightarrow 0} \gamma(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow 1} \gamma(x) = b$ (como la longitud es finita los puntos de acumulación son únicos) con lo que $\overline{f(C_r)} = C_r \cup \{a, b\}$. Se tiene por tanto, que los extremos de C_r pertenecen a $\partial\mathbb{D}$ y los puntos a y b a $\partial\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$.

En este punto notamos que $|a - b| \leq \text{long}(f(C_r)) < \delta_{\frac{\epsilon}{2}}$ de modo que si asumimos (4) debe existir un conexo $E \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ que contenga a $\{a, b\}$, con $\text{diam}(E) < \frac{\epsilon}{2}$ (supondremos que tal conjunto es cerrado tomando su clausura si fuera necesario). Como $f(C_r)$ es conexo y $\overline{f(C_r)} \cap E \neq \emptyset$, se tiene que $A_1 := E \cup \overline{f(C_r)}$ es también un conjunto conexo y cerrado, que además está contenido en $B(a, \frac{\epsilon}{2})$. Debido a esta última afirmación al menos uno de los puntos $f(z), f(z')$ debe quedar fuera de $B(a, \frac{\epsilon}{2})$. Supongamos sin pérdida de generalidad que dicho punto es $f(z)$.

Como habíamos tomado ϵ suficientemente pequeño para que $\frac{\epsilon}{2} < d(f(0), \partial\Omega)$, tenemos que $f(0) \notin B(a, \frac{\epsilon}{2})$. Por tanto, A_1 no separa $f(0)$ y $f(z)$ en $\overline{\mathbb{C}}$. Como Ω es conexo, es obvio que $A_2 := \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ tampoco separa estos puntos, así que, al ser estos dos conjuntos cerrados, conexos y de intersección conexa ($A_1 \cap A_2 = E$), por el teorema de Janiszewski $A_1 \cup A_2$ tampoco los separa en $\overline{\mathbb{C}}$. Esto significa que existe un arco α en $\Omega \setminus f(C_r)$ que une $f(0)$ y $f(z)$, el cual compuesto con f^{-1} constituiría un camino en $\mathbb{D} \setminus C_r$ entre 0 y

z . Esto es imposible ya que al pertenecer z a $B(z, r)$, dicho camino habría de atravesar $C(z, r) \cap \mathbb{D} = C_r$. \square

No obstante, con este teorema no podemos asegurar que la extensión sea homeomorfa. El problema es que no se tiene garantía de inyectividad. En el trabajo que estamos siguiendo, Soto (2011) [12] p. 4, se ejemplifica esta problemática considerando una aplicación conforme h entre \mathbb{D} y $(-1, 1)^2 \setminus (-1, 0]$. Según el teorema anterior podemos extenderla a la frontera de estos conjuntos ya que la frontera de este conjunto es uniformemente localmente conexa. Sin embargo, cada punto del intervalo $(-1, 0)$ debe tener al menos dos antiimágenes en $\partial\mathbb{D}$. Para lograr esta inyectividad, seguiremos una prueba de Rudin (1970) [11] a la que hemos añadido algunas modificaciones con el fin de completar algunas cuestiones que en nuestra opinión no quedaban del todo claras.

Definición 3.10. Un *punto de corte* en un conjunto A en un punto $a \in A$ tal que $A \setminus \{a\}$ no es conexo.

Proposición 3.11 (De [11], p. 280). *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ es una aplicación conforme y Ω el interior de una curva de Jordan, entonces f se extiende a un homeomorfismo entre $\overline{\mathbb{D}}$ y $\overline{\Omega}$.*

Demostración. Como sabemos que f se extiende continuamente a la clausura de ambos conjuntos y se tiene que $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\Omega$, dada la compacidad de $\overline{\mathbb{D}}$ solo falta ver que esta extensión es inyectiva.

Razonando por reducción al absurdo supongamos que existe $a \in \partial\Omega$ tal que $\{f^{-1}(a)\}$ no es un conjunto unipuntual. Sean $\beta_1 \neq \beta_2$ dos antiimágenes de a (recordemos que $\beta_i \in \partial\mathbb{D}$). Para $k = 1, 2$, tomamos la función $\gamma_k(t) := t\beta_k$, que une 0 y β_k en $\overline{\mathbb{D}}$ y definimos $\Gamma_k := f \circ \gamma_k$, $J_k = \Gamma_k([0, 1])$. Como estos dos arcos solo se intersecan en sus extremos, la unión de ambos define una curva de Jordan $J := J_1 \cup J_2$ que separa el plano en dos regiones.

El conjunto $\partial\Omega \setminus \{a\}$ es conexo ($\partial\Omega$ no tiene puntos de corte) por lo que debe estar contenido en la región interior o en la exterior de $\mathbb{C} \setminus J$. La región exterior a $\overline{\Omega}$ debe estar contenida en la exterior a J porque es una región no acotada que no contiene puntos de J . Por tanto, si $\partial\Omega \setminus \{a\}$ está contenido en el interior de J tomando un punto $p \in \partial\Omega \setminus \{a\}$ tenemos que cualquier entorno de p interseca tanto al exterior de Ω y, como acabamos de ver, al exterior de J , lo cual es imposible porque dijimos que estaba en el interior. Deducimos que el interior de J no contiene puntos de $\partial\Omega$.

Definimos $g := f^{-1}$, que es conforme en Ω por el corolario 2.8. Como γ_k tiende a β_k , existe $\delta > 0$ tal que si $w_k = \Gamma_k(t_k) \in B(a, \delta)$ con $k = 1, 2$ y $w_1, w_2 \neq a$; entonces

$$\frac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2| < |\gamma_1(t_1) - \gamma_2(t_2)| = |g(w_1) - g(w_2)|.$$

A continuación vamos a intentar parametrizar una región de $B(a, \delta)$ en coordenadas polares para poder integrar sobre ella. El problema (que no se considera en nuestra referencia y que he arreglado gracias a mi tutor) es que el radio de Γ_i no tiene por qué ser inyectivo. No obstante, como veremos a continuación, se trata de una función analítica y las imágenes de los ceros de su derivada no se acumulan en Ω . Probaremos únicamente que no se acumulan a lo largo de J_1 ya que para J_2 se probaría igual.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $a = 0$ y consideremos para cada $w \in \Omega$ la función $r(w)$ que le asocia su radio en coordenadas polares. Supongamos que también existen $w_0 = \Gamma_1(t_0) \in \Omega$ y una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, 1)$ tal que $\Gamma_1(t_n)$ tiende a w_0 con $(r \circ \Gamma_1)'(t_n) = 0$ para todo n (notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0$). Consideremos $h(z) := f((z + t_0)\beta_1)$ definida en un entorno de 0. Al ser f analítica, h también lo es, con lo que en un entorno de 0 se tiene

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Además tenemos que $h(t) = f((t + t_0)\beta_1) = \Gamma_1(t + t_0)$, con lo que

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n + i \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n = h_1(t) + i h_2(t), \quad x_n, y_n \in \mathbb{R},$$

donde h_1 y h_2 son dos funciones reales analíticas que satisfacen

$$r^2 \circ \Gamma_1(t + t_0) = (r(h(t)))^2 = h_1(t)^2 + h_2(t)^2.$$

Como la suma y el producto de funciones analíticas es analítica, la función $r^2 \circ \Gamma_1(t)$ es también analítica en un entorno de t_0 . De este modo, si el conjunto de ceros de la derivada de $r \circ \Gamma_1$ se acumula en t_0 , también lo hace el de $r^2 \circ \Gamma_1$, deduciéndose de su analiticidad que se trata de una función constante. Al ser esto último imposible, tenemos que el conjunto de ceros de la derivada de nuestro radio no se acumula en ningún $t \in [0, 1)$ y que por tanto hay una cantidad finita o a lo sumo numerable t_n de ellos, de modo que si se tratara se un conjunto numerable $t = 1$ sería su único punto de acumulación.

Evidentemente este hecho no garantiza la inyectividad necesaria para nuestra ansiada parametrización, pero sí que vamos a ser capaces de construir una nueva región que estará delimitada por arcos de ambas curvas y que podremos parametrizar con coordenadas polares. Un ejemplo de lo que pretendemos hacer se muestra en la figura 3.2.

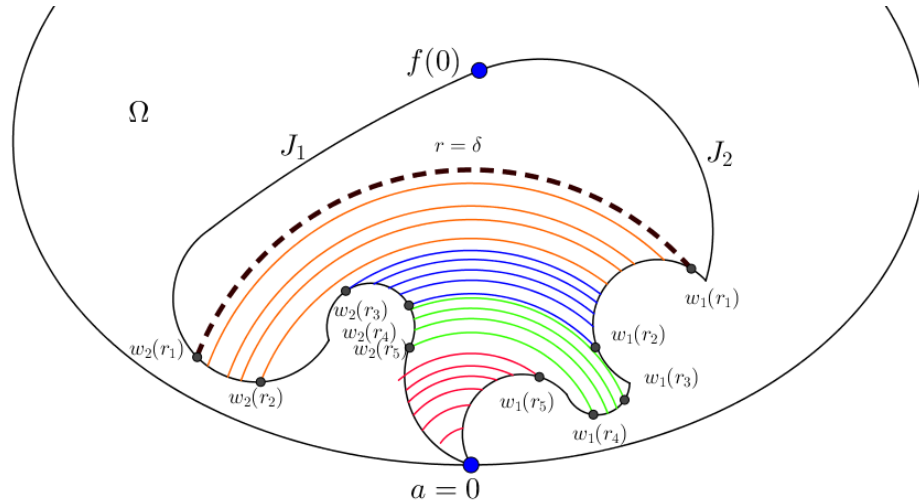


FIGURA 3.2: Obtención de regiones en las que el radio es inyectivo.

Consideremos $E_1 := \{w = \Gamma_1(t) : (r \circ \Gamma_1)'(t) = 0\}$, $E_2 := \{w = \Gamma_2(t) : (r \circ \Gamma_2)'(t) = 0\}$ y $E = (E_1 \cup E_2) \cap B(a, \delta)$. Se deduce que E es un conjunto finito o numerable con a lo sumo un punto de acumulación en $w = 0$. Por tanto, para cualquier $r > 0$ el conjunto $\{w \in E : |w| \geq r\}$ es finito. A partir de esta última afirmación deducimos que $J_k \cap C(0, r)$ es también finito ya que si fuera infinito habría infinitos puntos en $\{w \in E : |w| \geq r\}$ ¹.

Tomemos $r_0 e^{i\theta} \in E$ y sean $r_1 := \max\{r : r e^{i\theta} \in E, r < r_0\}$ ², $r_2 := \min\{r : r e^{i\theta} \in E, r > r_0\}$ ³. En la situación en la que nos encontramos, si $\Gamma_k(t) \in C(a, r_0)$, entonces en un intervalo de la forma (t, t') la función $r \circ \Gamma_k$ es monótona y $\Gamma_k|_{[t, t']}$ une un punto a distancia r_0 de a con otro a distancia r_1 ó r_2 . De este modo, tenemos que cada corona circular de radios r_0 y r_1 está dividida por los arcos de J_1 y J_2 que la cruzan. Como $\Gamma_k(t)$ tiende a a , estas curvas deben cruzar cada una de estas coronas circulares un número impar de veces, dividiéndola en un número par de regiones disjuntas (véase la figura 3.3). Estas regiones están delimitadas por dos arcos de circunferencia (ocasionalmente uno de ellos puede ser un punto) y por dos arcos de la misma curva o de curvas distintas.

En tal situación, dos arcos de curva *vecinos*⁴ que crucen la corona forman una curva de Jordan junto con los arcos de circunferencia de radios r_0 y r_1 que unen sus extremos, delimitando en su interior una región. En este punto es preciso aclarar que el interior de dichas regiones no interseca a J , ya que de hacerlo, por la monotonía del radio en esta región, un arco cruzaría la corona entre dichos segmentos y no serían *vecinos*. Concluimos que estas regiones se encuentran en el exterior o en el interior de J .

¹Si $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable y existe $c \in (a, b)$ tal que $r(a) = r(b) = r(c)$ entonces existe $d \in [a, b]$ tal que $r'(d) = 0$ y $r(d) \geq r(a)$.

²Haremos $r_1 = 0$ si este conjunto fuese vacío.

³Haremos $r_2 = \delta$ si este conjunto fuese vacío.

⁴No daremos una definición rigurosa, pero entiéndase como el arco más próximo en sentido horario o antihorario.

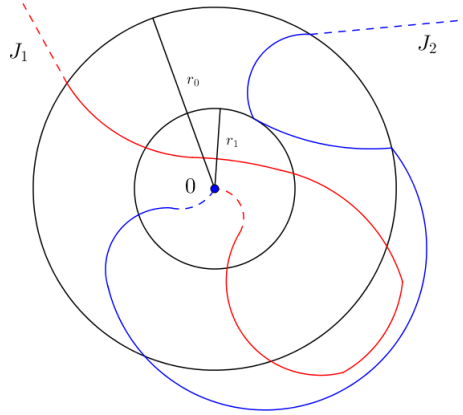


FIGURA 3.3: Γ_1 y Γ_2 dividen la corona circular en regiones disjuntas.

Con todo esto, para enlazar con la demostración expuesta en Rudin (1970) [11], solo nos falta ver que alguna de las regiones en las que hemos dividido la corona circular esté delimitada por arcos de curvas distintas y se encuentre contenida en el interior de J .

Como hay al menos un segmento de cada J_k , existen al menos dos regiones delimitadas por segmentos de curvas distintas. Sabemos que J es la frontera de las regiones que delimita, con lo que cualquier entorno de un punto de los arcos contenidos en nuestra corona circular debe contener puntos tanto del exterior como del interior a J . Por tanto, regiones adyacentes en la división realizada, deben pertenecer a regiones distintas, es decir, una al exterior de Γ y otra al interior. Si suponemos que todas las regiones delimitadas por segmentos de curvas diferentes están contenidas en el exterior llegamos a una contradicción:

Si recorremos la corona circular en sentido horario comenzando en una región exterior delimitada por dos curvas distintas, entre esta región y la siguiente con las mismas características debe haber un número de segmentos par de la misma J_k y ninguno de la otra. De este modo, si recorriésemos la corona hasta volver a la región inicial, notaríamos que hay un número par de segmentos de ambas curvas, lo cual es imposible como aclaramos con anterioridad.

En suma, tenemos una sucesión (o conjunto finito) de radios $\delta > r_1 > r_2 > \dots > 0$ en la que para cada radio r_n existe una región incluida en el interior de Γ que es exactamente $\{re^{i\theta} : r_n > r > r_{n+1}, \theta_i(r) < \theta < \theta_j(r), i \neq j\}$ donde $\theta_k(r)$ denota el argumento de el único punto de $\{J_k \cap C(0, r)\} = \{w_k(r)\}$.

Con toda la estructura que hemos construido, ya podemos enlazar con la prueba de Rudin como habíamos enunciado que haríamos.

Consideremos $0 < r_{n+1} < r < r_n < \delta$. Al ser g analítica se tiene lo siguiente:

$$g(w_2(r)) - g(w_1(r)) = \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} g'(re^{i\theta})ire^{i\theta} d\theta \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}|\beta_1 - \beta_2| \leq |g(w_2(r)) - g(w_1(r))| \leq \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r|g'(re^{i\theta})|d\theta.$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\frac{1}{4}|\beta_1 - \beta_2|^2 \leq \left| \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r|g'(re^{i\theta})|d\theta \right|^2 \leq \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r^2 d\theta \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta =$$

$$|\theta_2(r) - \theta_1(r)| \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r^2 |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq 2\pi \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r^2 |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

de modo que tomando N como el cardinal de la sucesión de radios r_n :

$$\frac{1}{8\pi r} |\beta_1 - \beta_2|^2 \leq \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^N \int_{r_{n+1}}^{r_n} \frac{1}{8\pi r} |\beta_1 - \beta_2|^2 dr \leq \sum_{n=1}^N \int_{r_{n+1}}^{r_n} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta dr \Rightarrow$$

$$\infty = \int_0^\delta \frac{1}{8\pi r} |\beta_1 - \beta_2|^2 dr \leq \sum_{n=1}^N \int_{r_{n+1}}^{r_n} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta dr. \quad (3.2)$$

Sin embargo, en el lado derecho de 3.2 se está integrando el jacobiano de g expresado en polares. Por tanto, cada $\int_{r_{n+1}}^{r_n} \int_{\theta_1(r)}^{\theta_2(r)} r |g'(re^{i\theta})|^2 d\theta dr$ se corresponde con el área de una región de \mathbb{D} disjunta del resto por ser g un homeomorfismo. La suma de estas áreas equivale al área de la unión de las regiones, que es un subconjunto medible de \mathbb{D} que no puede tener en ningún caso área infinita como hemos obtenido.

□

Gracias a esta última proposición el siguiente teorema queda como un mero corolario.

Teorema 3.12 (Carathéodory. De [12], p. 5). *Sea f una aplicación conforme de \mathbb{D} a una región simplemente conexa y acotada Ω . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. f se extiende a un homeomorfismo de $\bar{\mathbb{D}}$ a $\bar{\Omega}$,
2. $\partial\Omega$ es una curva de Jordan.

Demostración. Como vimos en el teorema 3.9 $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\Omega$, de donde deducimos a partir de (1) que $\partial\Omega$ es una curva de Jordan.

Para ver la otra implicación basta aplicar la última proposición. \square

Solo nos falta ver cómo extender estos homeomorfismos en la región exterior de las curvas de Jordan.

3.2. Teorema de Schoenflies

La prueba constará de dos pasos. Partiendo de que sabemos extender la aplicación conforme proporcionada por la aplicación de Riemann a un homeomorfismo entre las clausuras, en primer lugar extenderemos este último a la región exterior. En segundo lugar, modificaremos este homeomorfismo para que coincida con otro prefijado sobre la frontera de nuestra curva.

Para llevar a cabo nuestro propósito, cabe advertir que trabajaremos en $\overline{\mathbb{C}}$, ya que nos será más fácil, para más tarde deducir nuestro resultado en \mathbb{C} .

El siguiente resultado junto con su prueba ha sido extraído de Soto (2011) [12]. No obstante hemos retocado ligeramente la demostración consiguiendo que la extensión obtenida satisfaga $f(\infty) = \infty$, lo cual nos permitirá restringir los homeomorfismos en $\overline{\mathbb{C}}$ a homeomorfismos en \mathbb{C} .

Corolario 3.13 (De [12], p. 6). *Sea f una aplicación conforme de \mathbb{D} , a la región interior de una curva de Jordan, $\Omega \subset \mathbb{C}$. Entonces f se puede extender a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$ a sí mismo, que satisface $f(\infty) = \infty$.*

Demostración. Primeramente construiremos un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}^*} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$ a $\overline{\Omega^*} := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$.

Por el teorema de Carathéodory 3.12 f se extiende a un homeomorfismo en el que $f(\partial\mathbb{D}) = \partial\Omega$ es una curva de Jordan. Por tanto, el conjunto $C := \left\{ \frac{1}{f(e^{i\theta}) - f(0)} : 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$ es también una curva de Jordan en \mathbb{C} . Esta curva divide a $\overline{\mathbb{C}}$ en dos conjuntos conexos disjuntos A y B que tienen por frontera a C . Denotaremos como A al no acotado ($\infty \in A$). Observemos que la aplicación $h(z) = \frac{1}{z - f(0)}$ es un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$ que satisface $h(\Omega) = A$ y $h(\Omega^*) = B$. En particular, $h(\infty) = 0 \in B$.

Por otro lado, gracias al teorema de la aplicación de Riemann 2.5, existe una aplicación conforme $\phi : \mathbb{D} \rightarrow B$ que cumple $\phi(0) = 0$, y que también se extiende a un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}}$ a \overline{B} . Definimos ahora la aplicación $f^* : \overline{\mathbb{D}^*} \rightarrow \overline{\Omega^*}$ como:

$$f^*(z) := \frac{1}{\phi\left(\frac{1}{z}\right)} + f(0).$$

Esta aplicación está bien definida ya que $\left\{\frac{1}{z} : z \in \overline{\mathbb{D}^*}\right\} = \overline{\mathbb{D}}$, $\phi(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{B}$ y $h^{-1}(\overline{B}) = \overline{\Omega^*}$, con $h^{-1}(w) = \frac{1}{w} + f(0)$. De este modo f^* es un homeomorfismo al ser composición de tres homeomorfismos y satisface $f^*(\infty) = \infty$.

Ahora tomando el homeomorfismo $\psi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \partial\mathbb{D}$, $\psi := (f^*)^{-1} \circ f$, podemos extender f a todo $\overline{\mathbb{C}}$ haciendo

$$f(z) := \begin{cases} f^*\left(|z|\psi\left(\frac{z}{|z|}\right)\right) & \text{si } \infty > |z| \geq 1, \\ \infty & \text{si } z = \infty. \end{cases}$$

Con esta fórmula, que coincide con nuestra f inicial en $\partial\mathbb{D}$, obtenemos una extensión de f a $\overline{\mathbb{C}}$. Si $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión que tiende a ∞ , entonces para todo $z_n \neq \infty$ se tiene que $\psi\left(\frac{z_n}{|z_n|}\right) \neq 0$, por lo que $|z_n|\psi\left(\frac{z_n}{|z_n|}\right) \rightarrow \infty$. Al ser f^* continua, tenemos que $f(z_n) \rightarrow f^*(\infty) = \infty$, deduciéndose la continuidad de f en ∞ . Tenemos entonces que f es continua en \mathbb{D} y en $\overline{\mathbb{D}^*}$ y por tanto en todo $\overline{\mathbb{C}}$.

Para ver que es inyectiva recordemos que f constituye un homeomorfismo entre $\overline{\mathbb{D}}$ y $\overline{\Omega}$. Por otro lado, la aplicación $g(z) := |z|\psi\left(\frac{z}{|z|}\right)$ completada con $g(\infty) = \infty$ se trata de un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{D}^*}$ a $\overline{\mathbb{D}^*}$ por lo que $f|_{\overline{\mathbb{D}^*}}$ es un homeomorfismo. Finalmente, vemos que esta extensión coincide con la original en $\partial\mathbb{D}$ con lo que la función resultante es un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$. \square

Como dijimos, el siguiente paso será modificar el homeomorfismo proporcionado por el resultado anterior para que coincida en la frontera de \mathbb{D} con uno prefijado. Comencemos haciendo esto en $\overline{\mathbb{C}}$.

Demostración del teorema de Schoenflies 3.1 en $\overline{\mathbb{C}}$. De [12], p. 6. Primero supondremos que $\infty \notin J$. Sea $\phi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ la aplicación conforme entre el disco y el interior de J que podemos extender homeomórficamente a todo $\overline{\mathbb{C}}$ por el resultado anterior. La aplicación $f := \phi^{-1} \circ \psi$ constituye un homeomorfismo en $\partial\mathbb{D}$ que puede extenderse haciendo

$$f(z) := \begin{cases} |z|f\left(\frac{z}{|z|}\right) & \text{si } \infty > |z| > 0, \\ z & \text{si } z \in \{\infty, 0\}. \end{cases}$$

Finalmente, para obtener un homeomorfismo que coincida con ψ en $\partial\mathbb{D}$, basta considerar $\phi \circ f$.

Si por el contrario $\infty \in J$, bastaría realizar en $\overline{\mathbb{C}}$ una rotación g que consiga que $\infty \notin g(J)$ y componer g^{-1} con el homeomorfismo del caso anterior. \square

Ahora basándonos en el caso de $\overline{\mathbb{C}}$ obtenemos como corolario el de \mathbb{C} :

Demostración del teorema de Schoenflies 3.1 en \mathbb{C} . Basta observar que en el homeomorfismo del primer caso del resultado anterior ∞ es un punto fijo, por lo que basta restringirlo a \mathbb{C} . \square

Finalmente incluiremos los siguientes corolarios, de los que el primero es una versión más general del teorema de Schoenflies:

Corolario 3.14 (De [12], p. 6). *Un homeomorfismo $\psi : J_1 \rightarrow J_2$ entre dos curvas de Jordan de $\overline{\mathbb{C}}$ (resp. \mathbb{C}) puede ser extendido a un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$ (resp. \mathbb{C}).*

Demostración. Si ψ_i es el homeomorfismo brindado por el teorema de Schoenflies 3.1 (en la versión correspondiente) que lleva $\partial\mathbb{D}$ a J_i , entonces el homeomorfismo buscado es $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}$. \square

Ahora introduciremos un corolario que se tomará como base para la inducción que pretendemos realizar:

Corolario 3.15. *Un homeomorfismo $\psi : \overline{D_1} \rightarrow \overline{D_2}$ entre la clausura de dos regiones delimitadas por curvas de Jordan de $\overline{\mathbb{C}}$ puede ser extendido a un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que ∞ no pertenece a ninguna de las clausuras, es decir, pertenece a las regiones $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_i}$. Aplicando el corolario 3.13 a una aplicación conforme entre D_1 y \mathbb{D} , obtenemos un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$, ϕ , tal que $\phi(\overline{D_i}) = \overline{\mathbb{D}}$.

Extendemos $\psi|_{\partial D_1}$, mediante el corolario anterior, a un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$, $\tilde{\psi}$. Si $\tilde{\psi}(D_1^c) = D_2^c$, entonces al pegar ψ con $\tilde{\psi}$ obtenemos una extensión de ψ ya que ambas coinciden en ∂D_1 . En caso contrario, componemos esta función con $\bar{\phi} := \phi^{-1} \circ r_{-1} \circ \phi$, donde r_{-1} es el homeomorfismo que invierte el radio en polares de cada punto de $\overline{\mathbb{C}}$ e intercambia los puntos 0 e ∞ , con lo que $\bar{\phi}$ intercambia las dos regiones de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \partial D_1$ y deja ∂D_1 fija, de modo que reducimos este caso al anterior. \square

3.3. Induzcamos el Teorema de Schoenflies

En esta sección trataremos de abordar el caso en que tengamos varias curvas de Jordan disjuntas.

El texto seguido será Kuratowski (1968) [5] cuya estrategia se basa en la inducción. No obstante, en este último trabajo no se contempla que haya curvas contenidas en el interior de otras, por lo que más adelante añadiremos una breve sección que abarque también este caso.

Siguiendo la notación de nuestra referencia, llamaremos disco a todo subconjunto de $\overline{\mathbb{C}}$ homeomorfo a \mathbb{D} cuya frontera sea una curva de Jordan. De este modo, ya sabemos que todo homeomorfismo entre la frontera de dos discos se puede extender a todo el espacio.

Con todo el trabajo realizado hasta ahora ya hemos visto que el homeomorfismo entre la clausura de dos discos se puede extender a todo el espacio.

3.3.1. Discos disjuntos

Este caso será probado primeramente en $\overline{\mathbb{C}}$ de donde lo trasladaremos a \mathbb{C} . Comenzaremos probando el siguiente resultado conocido como el teorema de la curva Theta:

Teorema 3.16 (Curva θ . De [5] p. 511). *Si $C \subset \overline{\mathbb{C}}$ es un conjunto compuesto por tres arcos L_0, L_1 y L_2 que solo tienen en común sus extremos a y b , entonces*

$$\overline{\mathbb{C}} \setminus C = D_0 \cup D_1 \cup D_2$$

donde los D_i son tres discos.

Demostración. Ya sabíamos que cada curva de Jordan divide a $\overline{\mathbb{C}}$ en dos regiones, pero por el corolario 3.13, además sabemos que el interior es homeomorfo a \mathbb{D} y el exterior a $\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}$. Por ser este último conjunto homeomorfo a \mathbb{D} tenemos que el exterior de una curva de Jordan en $\overline{\mathbb{C}}$ es también homeomorfo a \mathbb{D} . En suma, una curva de Jordan divide a $\overline{\mathbb{C}}$ en dos discos.

Tomando índices modulo 3, tenemos que $J_j := L_j \cup L_{j+1}$ es una curva de Jordan. Como L_{j+2} sin sus extremos es conexo, debe estar contenido en el interior o el exterior a J_j . Llamemos D_j a tal región.

Notemos que cada D_j es una componente de $\overline{\mathbb{C}} \setminus C$ ya que son abiertos conexos cuya frontera está contenida en C . Además son disjuntos ya que al ser componentes conexas,

si se intersecan coinciden, lo cual es imposible ya que las fronteras son distintas. Con todo esto, solo resta ver que $\overline{C} = C \cup D_0 \cup D_1 \cup D_2$.

En efecto, tenemos que $\overline{D_0} \cap \overline{D_1} = (L_0 \cup L_1) \cap (L_1 \cup L_2) = L_1$, que es conexo. Como $\overline{C} \setminus \overline{D_0}$ y $\overline{C} \setminus \overline{D_1}$ son conexos, por el teorema de Janiszewski 2.3 tenemos que

$$A := \overline{C} \setminus (\overline{D_0} \cup \overline{D_1}) = \overline{C} \setminus (C \cup D_0 \cup D_1)$$

es también conexo.

Ahora bien, Ω_2 es una componente conexa de $\overline{C} \setminus C$ que está contenida en A , que es también un subconjunto conexo de $\overline{C} \setminus C$, por tanto, deducimos que $A = D_2$. \square

En las demostraciones venideras será necesario comprimir un disco en un punto. Si nuestra curva fuera un subconjunto de \mathbb{C} , esta compresión consistirá en el paso al espacio cociente \mathbb{C}/\overline{D} en el que, tomando ϕ el homeomorfismo en \mathbb{C} que lleva D a \mathbb{D} , la aplicación $h : \mathbb{C}/\overline{D} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como sigue:

$$h(z) := \begin{cases} (|\phi(z)| - 1)\phi(z) & \text{si } z \notin \overline{D}, \\ 0 & \text{si } z \in \overline{D}; \end{cases}$$

constituye un homeomorfismo entre nuestro espacio cociente y el plano complejo.

Por otro lado, si nuestro disco D es un subconjunto de \overline{C} e $\infty \notin D$, podemos aplicar el caso de \mathbb{C} obviando ∞ , ya que $\phi(\infty) = \infty$, y definir después $h(\infty) = \infty$ con lo que obtendríamos también un homeomorfismo $h : \overline{C}/\overline{D} \rightarrow \overline{C}$. Por último, si $\infty \in J$, bastaría realizar una rotación que nos lleve al caso anterior.

Realizada esta observación, probemos el caso de dos discos disjuntos:

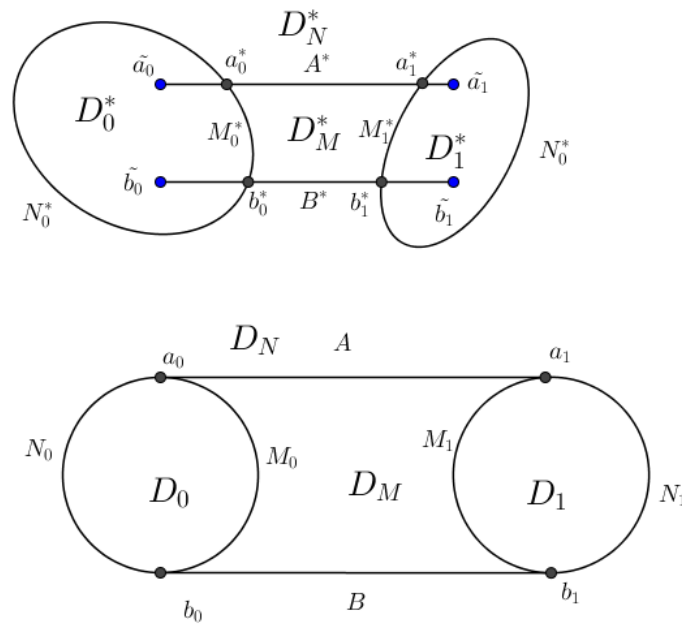
Teorema 3.17 (De [5] p. 536). Sean D_0, D_1 y D_0^*, D_1^* dos parejas de discos de \overline{C} tales que

$$\overline{D_0} \cap \overline{D_1} = \emptyset = \overline{D_0^*} \cap \overline{D_1^*}.$$

Entonces cada homeomorfismo $h : \overline{D_0} \rightarrow \overline{D_0^*}$ se extiende a un homeomorfismo en \overline{C} tal que $h(\overline{D_1}) = \overline{D_1^*}$.

Demostración. Comencemos probando el caso en el que D_0 y D_1 son dos círculos con el mismo radio, del que después deduciremos el caso general.

Tomemos dos puntos $\tilde{a}_i \in D_i^*$ y otros dos $\tilde{b}_i \in D_i^*$ situados debajo de estos y suficientemente cerca, de modo que los segmentos $[\tilde{a}_0, \tilde{a}_1]$ y $[\tilde{b}_0, \tilde{b}_1]$ sean paralelos (véase la figura

FIGURA 3.4: Representación de θ y θ^* .

3.4). Llamemos $A^* = [a_0^*, b_0^*]$ y $B^* = [a_1^*, b_1^*]$ a los segmentos que se obtienen al restringirlos entre el último punto que toca a $\overline{D_0^*}$ y el primero que toca a $\overline{D_1^*}$. Consideremos los puntos $a_0 := h^{-1}(a_0^*) \in \partial D_0$ y $b_0 := h^{-1}(b_0^*) \in \partial D_0$, y dos puntos distintos $a_1, b_1 \in \partial D_1$ fijados a placer. Unamos a_0 con a_1 y b_0 con b_1 a través de dos arcos en el exterior de ambas circunferencias que llamaremos A y B (para hacer esto fácilmente es por lo que hemos empezado suponiendo que D_i son circunferencias).

Tomando los conjuntos resultantes, $\theta := \partial D_0 \cup A \cup B \cup \partial D_1$ y $\theta^* := \partial D_0^* \cup A^* \cup B^* \cup \partial D_1^*$, vamos a comenzar viendo que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \theta$ y $\overline{\mathbb{C}} \setminus \theta^*$ tienen el mismo número de componentes conexas. Como nuestros razonamientos serán también aplicables a θ , veamos que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \theta^*$ tiene cuatro componentes:

Cuando realizamos el paso al cociente $\overline{\mathbb{C}}/\overline{D_i^*}$ el conjunto θ^* se convierte en una unión de tres arcos a los que les podemos aplicar el teorema de la curva Theta 3.16. De este modo, tomando p_i la proyección al cociente que constituye un homeomorfismo entre $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D_i^*}$ y $(\overline{\mathbb{C}}/\overline{D_i^*}) \setminus \{\overline{D_i^*}\}$, tenemos que $(\overline{\mathbb{C}}/\overline{D_i^*}) \setminus p_i(\theta^*)$ está compuesto por tres regiones. Dado el carácter homeomórfico de p_i , si $j \neq i$, resulta que $p_i(D_j^*)$ es la región de que no contiene a $p(A^*) \cup \{\overline{D_i^*}\} \cup p(B^*)$. Por tanto las otras dos regiones, R_1 y R_2 , sí que contienen a este arco en su frontera y a uno de los dos arcos de $p(\partial D_j)$ que unen $p(a_1^*)$ y $p(b_1^*)$ (cada una a uno distinto). Además p_i^{-1} conserva conjuntos conexos de $(\overline{\mathbb{C}}/\overline{D_i^*})$, con lo que $p^{-1}(R_k)$ es conexo y abierto, para $k = 1, 2$. En efecto son componentes conexas, ya que si pudiésemos conectar un punto de $p_i^{-1}(R_k)$ con otro fuera de ella mediante un arco J que no corte a θ^* , llegaríamos a una contradicción con el hecho de que $p_i(J)$ abandonaría R_k sin cortar a $p_i(\theta^*)$.

Con esto deducimos que $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\overline{D_i^*} \cup \theta)$ está compuesto por tres regiones y que los arcos A^* , B^* y los dos de ∂D_j^* forman parte de la frontera de dos de ellas. Realizando este razonamiento para $i = 0$ e $i = 1$, como las regiones distintas a D_0^* y D_1^* deben coincidir dos a dos, concluimos que $\overline{\mathbb{C}} \setminus \theta^*$ está compuesto por cuatro regiones y que cada arco de θ^* que une dos puntos de $\{a_0^*, b_0^*, a_1^*, b_1^*\}$ sin pasar por otro, está incluido en la frontera de dos de estas regiones. Recordemos antes de continuar que lo que hemos concluido en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \theta^*$ también se cumple en $\overline{\mathbb{C}} \setminus \theta$.

Partimos de un homeomorfismo $h : \overline{D_0} \rightarrow \overline{D_0^*}$. Denotando como M_0 y N_0 a los dos arcos de ∂D_0 que unen a_0 con b_0 , haremos $M_0^* := h(M_0)$ y $N_0^* := h(N_0)$, y llamaremos D_M , D_N a las regiones distintas de D_0 que los contienen en su frontera (resp. D_M^* , D_N^*). Ahora llamamos M_1 al arco de ∂D_1 que está contenido en la frontera de D_M y N_1 al que lo está en la de D_N . Procedemos con analogía con M_1^* y N_1^* .

En este punto extendemos h a θ de modo que a cada arco de este conjunto, le corresponda su homónimo con asterisco (*), es decir $h(M_i) = M_i^*$ y lo mismo con N_i , A y B . De este modo, conseguimos que $h(\partial D_i) = \partial D_i^*$ para $i = 0, 1, M, N$. Por tanto, aplicando el teorema de Schoenflies para $i = 1, N, M$ podemos extender el homeomorfismo $h : \partial D_i \rightarrow \partial D_i^*$ a un homeomorfismo h_i en $\overline{\mathbb{C}}$. Restringiendo cada h_i a $\overline{D_i}$, como coinciden con h sobre θ , podemos pegarlos obteniendo un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$ que respeta nuestro h original.

Para el caso general, tomemos ϕ un homeomorfismo proporcionado por el caso anterior que convierta nuestra primera pareja de discos en \mathbb{D} y otro círculo \mathbb{D}_1 . Si \tilde{h} es el homeomorfismo que se obtiene al extender $h \circ \phi_{\mathbb{D}}^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow D_0^*$, habiendo tomado como discos nuestra pareja de círculos y los D_i^* , se tiene que $\tilde{h} \circ \phi$ es el homeomorfismo buscado. \square

El siguiente paso será probar el resultado anterior pero para n discos disjuntos. A tal fin, hemos extraído algunas ideas de la segunda parte de la prueba expuesta en nuestra referencia, aunque la hemos modificado para facilitarla.

Teorema 3.18 (De [5] p. 536). Sean D_0, \dots, D_n y D_0^*, \dots, D_n^* dos colecciones de $n + 1$ discos de $\overline{\mathbb{C}}$, tales que $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset$ y $\overline{D_i^*} \cap \overline{D_j^*} = \emptyset \forall i \neq j$. Entonces cada homeomorfismo $h : \overline{D_0} \rightarrow \overline{D_0^*}$ se extiende a un homeomorfismo en $\overline{\mathbb{C}}$ tal que $h(\overline{D_i}) = \overline{D_i^*}$.

Demostración. Si $n = 1$ basta aplicar el resultado anterior 3.17. Procediendo por inducción, supongamos que el resultado es cierto para n ciclos y tratemos de ampliarlo para $n + 1$. Además, sin pérdida de generalidad, supondremos que ∞ no pertenece a la clausura de ninguno de los discos, realizando una rotación en $\overline{\mathbb{C}}$ si fuera necesario.

Con nuestra hipótesis de inducción podemos tomar un homeomorfismo arbitrario ϕ que transforme los n primeros D_i en n círculos disjuntos. También con nuestra hipótesis de inducción podemos obtener otro homeomorfismo ϕ^* que extienda a $\phi \circ h^{-1}$ y que transforme los n primeros discos D_i^* en los círculos $\phi(D_i)$. Con esto buscaremos dos homeomorfismos g y g^* que transformen $\phi(D_n)$ y $\phi^*(D_n^*)$ en el mismo círculo D , distinto de los demás, manteniendo fijos los n primeros $\phi(D_i)$, de modo que $(\phi^*)^{-1} \circ (g^*)^{-1} \circ g \circ \phi$ sería el homeomorfismo que buscamos ya que $(g^*)^{-1} \circ g|_{\phi(D_0)}$ coincidiría con la identidad.

Hecha esta observación, dado $i = 0, \dots, n-1$ supondremos que $D_i = D_i^*$ y que es un círculo y que h es la identidad sobre D_0 . Lo primero que veremos es que podemos separar D_n y D_n^* del resto de círculos. Lo haremos solo para D_n puesto que para D_n^* el procedimiento es el mismo:

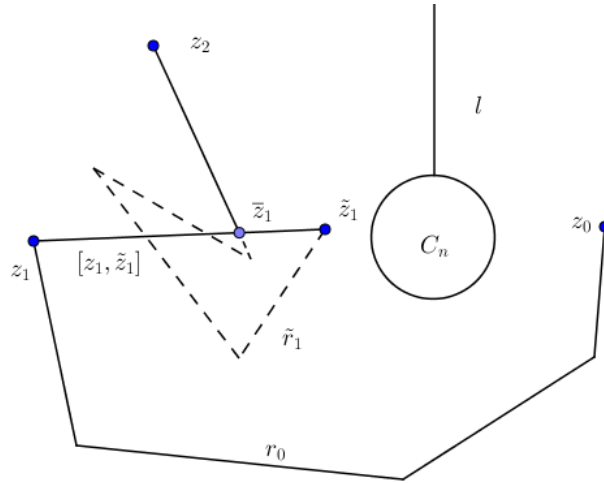
Sea p la composición de las n proyecciones sobre los primeros D_i , con la que obtenemos un espacio homeomorfo a $\overline{\mathbb{C}}$, en el que $p(\partial D_n)$ sigue siendo una curva de Jordan y el resto de círculos se comprimen en puntos en su exterior. Tomemos h_n un homeomorfismo que convierta $p(D_n)$ en un círculo C_n y que fije ∞ . Consideremos asimismo, una semirrecta l que una un punto de C_n con el infinito y no pase por ningún $z_i := h_n(p(\overline{D}_i))$. Veremos a continuación que podemos separar con una curva de Jordan nuestros n puntos de C_n .

Como ni l ni C_n separan nuestros puntos, por el teorema de Janiszewski, $l \cup C_n$ tampoco los separa. De este modo, podemos concluir que existe una poligonal r_0 que une z_0 y z_1 y no interseca ni a $l \cup C_n$, ni a ningún otro punto⁵. Como r_0 es una poligonal, podemos tomar otro punto \tilde{z}_1 suficientemente cerca de z_1 para que $[z_1, \tilde{z}_1]$ una estos puntos sin intersecar en su interior a r_0 , ni a $l \cup C_n$ o al resto de puntos. De nuevo por Janiszewski, tenemos otra poligonal \tilde{r}_1 que une \tilde{z}_1 con z_2 . Esta poligonal yuxtapuesta con r_0 y $[z_1, \tilde{z}_1]$ supondrá una nueva poligonal que atravesará nuestros tres primeros puntos y no tendrá autointersecciones, a menos que interseque a (r_1, \tilde{r}_1) . En este caso, realizaremos la yuxtaposición de r_0 , $[z_1, \overline{z}_1]$ y $\tilde{r}_1|_{[\overline{z}_1, z_2]}$, donde \overline{z}_1 es el último punto de intersección de (r_1, \tilde{r}_1) con \tilde{r}_1 como se muestra en la figura 3.5.

Mediante argumentos análogos al anterior, podemos construir una poligonal r simple y cerrada que atraviese todos nuestros puntos una única vez y no corte a $C_n \cup l$, que al ser un conjunto conexo y no acotado debe estar incluido en la componente conexa no acotada delimitada por r .

Por el teorema anterior, podemos transformar la región interior de nuestro polígono en un círculo C sin alterar C_n mediante un homeomorfismo $\tilde{\phi}$. Ampliando un poco el radio de este último círculo obtenemos otro círculo, llamémoslo \tilde{C} , que lo contiene. Resulta entonces que al realizar la inversa de la transformación que hemos realizado,

⁵Recordemos que todo abierto conexo por arcos es conexo por poligonales.

FIGURA 3.5: Construcción de una poligonal que aísla a C_n .

$p^{-1}(h_n^{-1}(\tilde{\phi}^{-1}(\partial\tilde{C})))$ se transforma en otra curva de Jordan J que alberga a los n círculos en su disco interior, $D := p^{-1}(h_n^{-1}(\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{C})))$, separándolos de D_n , con $\infty \notin D$.

Realicemos el mismo procedimiento con D_n^* y llamemos D^* al disco obtenido.

En este punto podemos aplicar el resultado anterior que nos brinda un homeomorfismo g (resp. g^*) que mantiene \bar{D} fijo y transforma D_n en cualquier otro disco \tilde{D}_n contenido en el exterior de \bar{D} (resp. $(*)$). Como podemos tomar como \tilde{D}_n a placer en el exterior de D , tomémoslo también en el exterior a D^* (por ejemplo centrándolo en ∞ y tomándolo suficientemente pequeño), de modo que g y g^* transformen D_n y D_n^* , respectivamente, en el mismo disco con lo que finalizamos la demostración. \square

Ahora que hemos probado este caso en $\bar{\mathbb{C}}$, lo adaptaremos a \mathbb{C} .

Corolario 3.19. Sean D_0, \dots, D_n y D_0^*, \dots, D_n^* dos colecciones de $n+1$ discos de \mathbb{C} , tales que $\bar{D}_i \cap \bar{D}_j = \emptyset$ y $\bar{D}_i^* \cap \bar{D}_j^* = \emptyset \forall i \neq j$. Entonces cada homeomorfismo $h: \bar{D}_0 \rightarrow \bar{D}_0^*$ se extiende a un homeomorfismo en \mathbb{C} tal que $h(\bar{D}_i) = \bar{D}_i^*$.

Demostración. Tomamos R suficientemente grande para que todos nuestros discos estén contenidos en la bola $B(0, R)$ y consideramos el disco $D_{n+1} = D_{n+1}^* := \bar{\mathbb{C}} \setminus B[0, R]$.

Aplicamos a estas familias de discos topológicos el resultado para la esfera obteniendo un homeomorfismo $g: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ que satisface $g(D_i) = D_i^*$ para cada i y que, por tanto, lleva $B[0, R]$ a ella misma. Restringiendo g a $B[0, R]$ podemos extenderlo a \mathbb{C} haciendo

$$g(z) := \frac{|z|}{R} g\left(z \frac{R}{|z|}\right), \quad \forall |z| \geq R.$$

□

Una vez que hemos trasladado este resultado a \mathbb{C} , nos estableceremos en este espacio para realizar el trabajo restante, aunque ocasionalmente retornaremos a $\overline{\mathbb{C}}$ para ayudarnos a probar el caso general que abordaremos en la siguiente sección.

3.4. Generalización de Schoenflies

En el apartado anterior extendimos el teorema de Schoenflies al caso de n discos disjuntos. En esta sección abordaremos un caso más general en el que incluimos el caso de que nuestros discos puedan estar contenidos unos en otros. Con el fin de presentar esta extensión, que solo estudiaremos en \mathbb{C} que es el caso que nos interesa, introduciremos los siguientes conceptos:

Definición 3.20. Sea V un conjunto finito, no vacío de vectores cuyas coordenadas sean enteros positivos. Decimos que V es *factible* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $v = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k) \in V$, entonces $(i_1, \dots, i_{k-1}, j) \in V$ para todo $1 \leq j \leq i_k$.
2. Si $v = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k) \in V$, entonces $(i_1, \dots, i_r) \in V$ para todo $1 \leq r \leq k$.

Definición 3.21. Dados un conjunto factible V y una configuración de curvas de Jordan disjuntas $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$, decimos que V *etiqueta* a \mathcal{C} si existe una biyección $\psi : V \rightarrow \mathcal{C}$ que satisface que $\psi(v)$ está contenida en el interior de $\psi(v')$ si y solo si $v = (i_1, \dots, i_k)$ y $v' = (i_1, \dots, i_r)$ con $k < r$. Al par (V, ψ) lo llamaremos *etiquetado* de \mathcal{C} .

Es fácil de ver que para cada configuración \mathcal{C} , podemos construir un conjunto factible de vectores V que lo etiquete que, en general, no será único. Para esto consideremos la relación de orden parcial en \mathcal{C} : $C_i < C_j$ si C_i está contenida en el interior a C_j . Con esta relación, llamaremos *primer nivel*, \mathcal{C}_1 , a las n_1 curvas de \mathcal{C} que no estén contenidas en el interior de ninguna otra y, en general, *nivel k -ésimo*, \mathcal{C}_k , a las n_k curvas que estén contenidas exactamente en el interior de $k - 1$ curvas. Siguiendo esta notación, etiquetamos a las curvas del primer nivel en cualquier orden con vectores de longitud uno. Proseguimos inductivamente, con las de \mathcal{C}_k tomando para cada $C_i \in \mathcal{C}_{k-1}$ las curvas de \mathcal{C}_k contenidas en el interior de C_i y añadiendo a su etiquetado un entero positivo escogido en cualquier orden para cada curva de \mathcal{C}_k .

De manera recíproca, dado un conjunto factible de vectores V , podemos construir una configuración de círculos \mathcal{C} de manera que V etiquete a \mathcal{C} . Probablemente la mayoría de los lectores estén convencidos de este hecho. No obstante, para satisfacer a aquellos que,

como nosotros, sean amantes del escepticismo requerido en el buen hacer matemático, presentamos un algoritmo explícito que construya tal configuración:

Tomemos los n_0 vectores de V de longitud uno y m_0 el entero no negativo tal que $2^{m_0-1} < n_0 \leq 2^{m_0}$. Fijemos $c_0 = 0$, $r_0 = 3$ y las circunferencias

$$\left\{ C \left(c_0 + \frac{r_0}{3} e^{\frac{2k\pi i}{2^{m_0}}}, \frac{r_0}{3(2^{m_0})} \right) \right\}_{k=1}^{m_0}.$$

Notemos que para cualquier $m_0 \geq 1$ estas circunferencias no se intersecan ya que la distancia entre sus centros es mayor o igual que $\frac{4r_0}{3(2^{m_0})}$ que es mayor que el doble de sus radios. De estas m_0 circunferencias elegimos las n_0 primeras y se las asignamos a nuestros vectores. Procediendo por inducción, tomamos v de longitud $k-1$ y realizamos el mismo proceso con los n_v vectores de V de longitud k cuyas primeras $k-1$ entradas coinciden con las de v , cambiando el conjunto de circunferencias por

$$\left\{ C \left(c_v + \frac{r_v}{3} e^{\frac{2k\pi i}{2^{m_v}}}, \frac{r_v}{3(2^{m_v})} \right) \right\}_{k=1}^{m_v},$$

donde c_v y r_v son el centro y el radio de la circunferencia $\psi(v)$. Estas circunferencias son disjuntas por el mismo argumento que antes y además tampoco intersecan a $\psi(v)$ ya que sus centros están a distancia $\frac{2r_v}{3}$ de ella.

En este punto, presentamos el resultado central de esta sección:

Proposición 3.22. *Dadas dos configuraciones de curvas de Jordan disjuntas $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ que admitan etiquetados $(V, \psi), (V, \psi')$ sobre el mismo conjunto de vectores factible, existe un homeomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(C) = (\psi')^{-1}(\psi(C))$ para toda $C \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Para realizar esta prueba, vamos a aplicar la extensión que realizamos del teorema de Schoenflies en \mathbb{C} para cualquier conjunto de discos disjuntos.

En efecto, tomemos los discos delimitados por curvas del primer nivel \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}'_1 y obtengamos un primer homeomorfismo, $h_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, que lleve cada disco \bar{D} delimitado por una curva $C \in \mathcal{C}_1$ al delimitado por $\tilde{\psi}(C) := (\psi')^{-1}(\psi(C))$. Ahora procediendo por inducción, lo que haremos será obtener un homeomorfismo que haga lo mismo con las curvas del nivel k -ésimo en el interior de las del nivel anterior.

Supongamos que tenemos nuestro homeomorfismo h definido en el exterior a las curvas del nivel $(k-1)$ y en dichas curvas (o equivalentemente el complementario de la unión de sus interiores), que cumple $h(C) = \tilde{\psi}(C)$, para toda $C \in \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{C}_i$. Tomemos $C_0 \in$

\mathcal{C}_{k-1} , $C_0^* := h(C) \in \mathcal{C}'_{k-1}$ y las n_0 curvas de \mathcal{C}_k contenidas en el interior de C_0 , que denotaremos como C_1, \dots, C_{n_0} . Análogamente denotaremos como $C_1^*, \dots, C_{n_0}^*$ a las n_0 curvas de \mathcal{C}'_k contenidas en C_0^* . Considerando que estas curvas se encuentran en $\overline{\mathbb{C}}$, denotamos como D_0 la región exterior a C_0 (que contiene a ∞) y como D_1, \dots, D_{n_0} a las regiones interiores a las C_i . Procediendo con analogía con $D_0^*, D_1^*, \dots, D_{n_0}^*$, se tiene que $h|_{\partial D_0} : \partial D_0 \rightarrow \partial D_0^*$ es un homeomorfismo que admite, por el corolario 3.15 del teorema de Schoenflies, una extensión $\bar{h} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ que lleva D_0 a D_0^* , por ser ∞ un punto fijo de en el teorema de Schoenflies. Aplicando ahora el teorema 3.18, podemos extender el homeomorfismo $\bar{h}|_{D_0} : D_0 \rightarrow D_0^*$ a un homeomorfismo \hat{h} en $\overline{\mathbb{C}}$, que satisfaga $\hat{h}(D_i) = D_i^*$ para cada $i = 0, \dots, n_0$, y que cumple $\hat{h}|_{\partial D_0} = \bar{h}|_{\partial D_0} = h|_{\partial D_0}$. Además, como \hat{h} le hace corresponder al interior de C_0 el interior de C_0^* porque $\hat{h}(\overline{D_0}) = \overline{D_0^*}$, $\hat{h}|_{D_0^c}$ se pega bien con nuestro h y nos permite extenderlo al interior de C_0 llevando las n_0 curvas de \mathcal{C}_k en su interior a las n_0 del interior de C_0^* de \mathcal{C}'_k .

Repetiendo este proceso para cada $C \in \mathcal{C}_{k-1}$, completariamos nuestra prueba por inducción al conseguir extender el homeomorfismo hasta el nivel k -ésimo. \square

Finalmente concluimos que podemos pasar cualquier configuración \mathcal{C} de curvas de Jordan disjuntas a una formada por circunferencias.

Corolario 3.23. *Dada una configuración \mathcal{C} de curvas de Jordan disjuntas, existe otra \mathcal{C}' de circunferencias y un homeomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $h(C) \in \mathcal{C}'$ para cada $C \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Tomando (V, ψ) un etiquetado de \mathcal{C} , construimos una configuración de circunferencias \mathcal{C}' que sea etiquetada por un etiquetado (V, ψ') . Aplicando ahora el resultado anterior obtenemos el homeomorfismo buscado. \square

Capítulo 4

El recíproco del teorema de Dulac

4.1. Situación

En esta sección abordaremos el problema de obtener un sistema de ecuaciones diferenciales polinomial en el plano como el siguiente, cuyos ciclos límites sean homeomorfos a otros dados:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y).$$

Así mismo, siguiendo la dinámica de trabajo del artículo seguido en este capítulo, Peralta-Salas (2005) [9], comenzaremos con algunas definiciones para comprender mejor nuestra tarea a realizar:

Definición 4.1. Una configuración de ciclos es un conjunto finito $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ de curvas de Jordan tales que $C_i \cap C_j = \emptyset$.

Definición 4.2. Dos configuraciones \mathcal{C} y \mathcal{D} son equivalentes si existe un homeomorfismo $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que $H(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

En cuanto a notación relativa a conceptos básicos, cabe aclarar que dado $p \in \mathbb{C}$, I_p denotará el intervalo maximal de definición de la solución a nuestro sistema $\varphi_p : I_p \rightarrow \mathbb{C}$, que satisface $\varphi_p(0) = p$. Tomaremos asimismo, $O(p) := |\varphi_p(I_p)|$ y $O^+(p) := |\varphi_p(I_p) \cap [0, +\infty)|$. A las $O(p)$ se les suele llamar *órbitas*. Un *ciclo límite* es una órbita periódica aislada topológicamente del resto de órbitas periódicas de nuestro sistema. Finalmente, si b_p es el extremo superior de I_p (puede ser ∞), $\omega(p) := \{q : \exists t_n \rightarrow b_p \text{ con } \varphi(t_n) \rightarrow q\}$.

Definición 4.3. Diremos que el campo de vectores X realiza \mathcal{C} si su conjunto de ciclos límite es equivalente a \mathcal{C} .

Cabe destacar que con esta última definición estamos permitiendo que haya más puntos críticos en el sistema. De hecho, cada ciclo límite debe encerrar al menos un punto crítico que podría ser atractor.

4.2. Teorema de realizabilidad

En esta ocasión alcanzaremos nuestro propósito mediante un teorema cuya demostración, al ser constructiva, nos brinda un método para realizar los ciclos límites deseados.

Como advertimos, en esta prueba haremos uso del resultado final de los tres primeros capítulos, el corolario 3.23, que nos permite reducir el problema al caso en que nuestra configuración \mathcal{C} esté compuesta por circunferencias:

Teorema 4.4 (Recíproco del teorema de Dulac. De Peralta-Salas (2005) [9]). *Sea \mathcal{C} una configuración de n circunferencias. Entonces \mathcal{C} es realizable por un campo de vectores polinomial de grado $\leq 4n - 1$.*

Demostración. Tenemos que \mathcal{C} está compuesto por circunferencias de centro (x_i, y_i) y radio r_i . Definimos

$$f(x, y) := \prod_{i=1}^n f_i(x, y); f_i := (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2$$

con lo que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{C} : f(x, y) = 0\}$ es exactamente \mathcal{C} . Su gradiente es el vector de coordenadas

$$\nabla f(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n 2(x - x_i) \prod_{i \neq j} f_j(x, y), \sum_{i=1}^n 2(y - y_i) \prod_{i \neq j} f_j(x, y) \right), \quad (4.1)$$

de modo que $\nabla f|_{\mathcal{C}} \neq 0$ al no intersectarse las circunferencias y al no anularse en ningún punto $(x, y) \in C_i$ simultáneamente $x - x_i$ e $y - y_i$.

A continuación vamos a definir un campo que por un lado pretende ser tangente a nuestras circunferencias para que estas sean ciclos límites, y por otro, tener una cierta componente normal a nuestras circunferencias que sea proporcional a f para conseguir las condiciones de atracción deseadas:

$$X = (-f_y - f f_x) \delta_x + (f_x - f f_y) \delta_y. \quad (4.2)$$

Lo primero que cabe observar es que $X|_{\mathcal{C}} \neq 0$ dado que $\nabla f|_{\mathcal{C}} \neq 0$. Además resulta que f^2 es una función de Lyapunov como veremos a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{f}^2 &= \nabla f^2(-f_y - ff_x, f_x - ff_y) = (2ff_x, 2ff_y)(-f_y - ff_x, f_x - ff_y) \\ &= 2(-ff_xf_y - f^2f_x^2 + f f_yf_x - f^2f_y^2) = -2f^2(f_x^2 + f_y^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Como $\nabla f|_{\mathcal{C}} \neq 0$ y $\{f = 0\}$ coincide con \mathcal{C} que está formado por un conjunto finito de compactos disjuntos, existe un entorno acotado U_i de cada circunferencia en el que $\dot{f}^2 < 0$ en $U_i \setminus C_i$ que satisface $\overline{U_i} \cap \mathcal{C} = C_i$. Así mismo, para comprobar la estabilidad de \mathcal{C} , tomemos U_0 otro entorno cualquiera de C_i . Resulta que $\partial(U \cap U_0)$ es un compacto que no corta a \mathcal{C} y por tanto $f^2|_{\partial(U \cap U_0)} \geq \delta > 0$. Dado que f^2 es continua, podemos tomar otro entorno $V_1 \subset U_i \cap U_0$ en el que $f^2|_{V_1} < \delta$ por lo que las órbitas que comiencen en este último entorno no podrán salir de U_0 ya que si atraviesan su frontera en algún momento incumplirán $\dot{f}^2 \leq 0$.

Para comprobar la atracción tomemos $p \in V_1$. Tal y como acabamos de ver $O^+(p)$ está contenida en un compacto y por tanto $\omega(p) \neq \emptyset$. Tomando $q \in \omega(p)$, tenemos que $O(q) \subset \omega(p)$. Si $q \notin C_i$, como $\dot{f}^2(q) < 0$ podemos encontrar $q' \in O^+(q)$ con $f^2(q') < f^2(q)$ y dos sucesiones $(t_n), (t'_n)$ con límite infinito cuyas imágenes por la solución φ_p tiendan a q y q' respectivamente. Esto no puede ser ya que en tal caso existirían $t_k > t'_l$ con $f^2(\varphi_p(t_k)) < f^2(\varphi_p(t'_l))$ contradiciendo que $\dot{f}^2(q) \leq 0$, con lo que concluimos que $\omega(p) \subset C_i$.

Por otro lado, para cualquier $p \in C_i$ se tiene que $O(p) = C_i$, ya que si $q \in C_i$, al ser $\dot{f}^2 \leq 0$ tenemos que $O^+(q) \subset C_i$ donde no hay puntos críticos, deduciéndose que $\varphi_p(t)$ recorre periódicamente C_i . Resulta entonces que los C_i son atractores estables.

Ahora solo resta ver que no hay más órbitas periódicas en el sistema. Para ello, comencemos observando que si $\nabla f(x, y) = 0$ entonces (x, y) es un punto crítico. Por tanto, si existe otra órbita periódica Γ , para no contener puntos críticos se debe satisfacer que $\nabla f|_{\Gamma} \neq 0$. Esto junto con el hecho de que $\Gamma \cap \mathcal{C} = \emptyset$ nos permitiría deducir que $\dot{f}^2|_{\Gamma} < 0$ lo que contradiría la periodicidad de Γ . \square

Anexo: Grafos dirigidos

En este anexo probaremos un resultado relativo a los grafos dirigidos usado en la demostración del teorema de Janiszewski 2.3. Este resultado no es muy complicado, pero como en las fuentes que hemos consultado se deja como ejercicio y como la teoría de grafos dirigidos no suele impartirse en el grado, hemos decidido incluir este breve anexo.

Definimos a continuación los conceptos básicos de esta teoría:

Definición 4.5. Un *grafo dirigido* $G = (V, A)$ es un par formado por un conjunto no vacío y finito V al que llamaremos *nodos* y por $A \subset V \times V$ un subconjunto de pares ordenados (v_i, v_j) de elementos distintos al que llamaremos *arcos*. Dados dos grafos dirigidos G', G decimos que $G' = (V', A')$ es un *subgrafo* de $G = (V, A)$ o $G' \subset G$ si $V' \subset V$ y $A' \subset A$.

Definición 4.6. El *grado de salida* de un nodo v de G es $o^+(v) := |\{(v, v_i) \in A\}|$, y análogamente el *grado de entrada* es $o^-(v) := |\{(v_i, v) \in A\}|$.

Definición 4.7. Un *camino* de $G = (V, A)$ es una secuencia finita de arcos de A que no se repiten, en la que el segundo nodo de cada arco coincide con el final del siguiente y que contiene a lo sumo un arco de entrada y de salida de cada nodo. Un *circuito* de G es un camino en el que el segundo nodo del último arco coincide con el primer nodo del primer arco.

Proposición 4.8. Dado un grafo dirigido $G = (V, A)$, A es unión de circuitos disjuntos si y solo si $o^+(v) = o^-(v)$ para todo $v \in V$.

Demostración. Como cada circuito aporta el mismo número de arcos de entrada que de salida a cada nodo, la implicación directa es inmediata.

De manera recíproca, supongamos que $A \neq \emptyset$ y tomemos $(v_1, v_2) \in A$. Como $o^+(v_2) = o^-(v_2)$, debe existir otro arco de A de la forma (v_2, v_3) . Del mismo modo, al ser $o^+(v_3) = o^-(v_3)$, o bien $v_3 = v_1$, o bien existe otro arco distinto de los anteriores de la forma (v_3, v_4) . Tomando $m = \min\{|A|, |V|\}$, deducimos que repitiendo este razonamiento a lo sumo m veces debemos volver a algún nodo v_i para el que ya hayamos escogido un arco

de salida a . Resulta entonces que los arcos que escogimos a partir de dicho a constituyen un circuito C_1 .

Haciendo $A_1 := A \setminus C_1$ y considerando $G_1 = (V, A_1)$ tenemos que este grafo también satisface nuestra hipótesis, de modo que por el razonamiento anterior, o bien A_1 es vacío y hemos terminado, o bien existe un circuito C_2 disjunto a C_1 .

De nuevo de la finitud de A deducimos que podemos escribir este conjunto como un número finito de circuitos disjuntos C_1, \dots, C_k , donde $k \leq \frac{|A|}{2}$. \square

Bibliografía

- [1] DE AMO, E. (2008A). *Tema 7.3: Principio del argumento. Teoremas de Rouché y Hurwitz*, notas de clase, Universidad de Almería. https://w3.ual.es/~edeamo/capitulo7_ac/vc0703.pdf
- [2] DE AMO, E. (2008B). *Tema 8.1: Familias normales de funciones holomorfas. Teoremas de Montel y Vitali*, notas de clase, Universidad de Almería. https://w3.ual.es/~edeamo/capitulo8_ac/vc0801.pdf
- [3] HAN, M. Y LI, J. (2012). *Lower bounds for the Hilbert number of polynomial systems*, Journal of Differential Equations 252 pp. 3272-3304.
- [4] ILYASHENKO, Y. (2002). *Centennial history of the Hilbert's 16th problem*, Bulletin of the American Mathematical Society 39 pp. 301-354.
- [5] KURATOWSKI, K. (1968). *Topology*, volumen II. Polish Scientific Publishers PWN, Varsovia, Polonia.
- [6] LLIBRE, J. (2015). *Sobre el problema 16 de Hilbert*, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 16 pp. 543-554.
- [7] LLIBRE, J. Y RODRÍGUEZ, G. (2004). *Configurations of limit cycles and planar polynomial vector fields*, Journal of Differential Equations 198 pp. 374-380.
- [8] LUISTO, R. (2011). *Proof of the Jordan Curve Theorem*, notas de clase, Universidad de Helsinki. https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/59053299/jordancurvethm_ft3.pdf?version=1&modificationDate=1297006799189&api=v2
- [9] PERALTA-SALAS, D. (2005). *Note on a paper of J. Llibre and G. Rodríguez concerning algebraic limit cycles*, Journal of Differential Equations 217 pp. 249-256.
- [10] POMMERENKE, C. (1975). *Univalent Functions*. Vandenhoeck & Ruprecht, Gottinga, Alemania.

-
- [11] RUDIN, W. (1970). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Liubliana, Yugoslavia (actual Eslovenia).
- [12] SOTO, T. (2011). *Local connection and Carathéodory's theorem*, notas de clase, Universidad de Helsinki. https://wiki.helsinki.fi/download/attachments/59053299/ft3_schoenfliess%28soto%29.pdf?version=1&modificationDate=1290032574318&api=v2
- [13] TIMONEY, R. (2005A). *Chapter 2: Logarithms and simple connectedness*, notas de clase, Trinity College Dublin. <https://www.maths.tcd.ie/~richardt/414/414-ch2.pdf>
- [14] TIMONEY, R. (2005B). *Chapter 4: Open mapping theorem, removable singularities*, notas de clase, Trinity College Dublin. <https://www.maths.tcd.ie/~richardt/414/414-ch4.pdf>
- [15] TIMONEY, R. (2005C). *Chapter 5: The metric space $\mathcal{H}(G)$* , notas de clase, Trinity College Dublin. <https://www.maths.tcd.ie/~richardt/414/414-ch5.pdf>
- [16] TIMONEY, R. (2005D). *Chapter 7: Riemann Mapping Theorem*, notas de clase, Trinity College Dublin. <https://www.maths.tcd.ie/~richardt/414/414-ch7.pdf>