



# Facultad de Matemáticas

MÁSTER DE MATEMÁTICA AVANZADA

---

Trabajo de Fin de Máster

## Cohomología de De Rham de Variedades

---

Realizado por **Miguel Ángel Navarro Pérez**  
bajo la dirección de **Ángel Ferrández Izquierdo**.

## DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Miguel Ángel Navarro Pérez, autor del TFM titulado *Cohomología de De Rham de variedades*, bajo la tutela del profesor Ángel Ferrández Izquierdo,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 5 de Julio de 2017.



Fdo.: Miguel Ángel Navarro Pérez

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha depositado una copia firmada de esta declaración.

# Índice general

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Álgebra tensorial</b>  | <b>9</b>  |
| 1.1. Tensores en $\mathbb{R}^n$  | 9         |
| 1.1.1. Componentes de un tensor  | 10        |
| 1.2. Variedades diferenciables   | 12        |
| 1.2.1. Espacios tangente y cotangente                                  | 13        |
| 1.3. Tensores en el espacio tangente                                   | 16        |
| 1.4. Formas diferenciales  | 17        |
| 1.5. La aplicación pullback  | 24        |
| 1.5.1. El pullback de una aplicación lineal entre espacios vectoriales | 24        |
| 1.5.2. El pullback de una aplicación diferenciable entre variedades    | 26        |
| <b>2. Cocadenas y cohomología</b>                                      | <b>29</b> |
| 2.1. Sucesiones exactas de complejos de cocadenas                      | 30        |
| 2.2. Algunos resultados interesantes                                   | 36        |
| <b>3. Cohomología de De Rham</b>                                       | <b>41</b> |
| 3.1. La sucesión de Mayer-Vietoris                                     | 44        |
| 3.2. Lema de Poincaré  | 49        |
| 3.3. Espacios de dimensión finita                                      | 53        |
| 3.3.1. Entornos normales y entornos convexos                           | 53        |
| 3.3.2. Buenos cubrimientos   | 56        |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>4. Ejemplos</b>   | <b>61</b> |
| 4.1. Cohomología de De Rham de las esferas . . . . .   | 61        |
| 4.2. Cohomología de De Rham de los espacios proyectivos reales . . . . .                         | 64        |
| 4.2.1. Resultados previos . . . . .  | 65        |
| 4.2.2. Cálculo de $H^k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n)$ . . . . .  | 69        |
| 4.3. Cohomología de De Rham de variedades producto, la fórmula de Künneth y los toros . . . . .  | 70        |
| 4.3.1. Fórmula de Künneth . . . . .  | 72        |
| 4.4. Cohomología de De Rham de $\mathbb{R}^n$ privado de una cantidad finita de puntos . . . . . | 77        |
| <b>5. Aplicaciones de la cohomología de De Rham</b>  | <b>81</b> |
| 5.1. Teoremas de punto fijo . . . . .  | 81        |
| 5.2. Teoremas de separación: Jordan-Brouwer . . . . .  | 85        |
| 5.3. Invariancia del dominio . . . . .   | 89        |

# Introducción

A lo largo de la formación de un estudiante de Matemáticas, éste debe aprender a utilizar herramientas algebraicas, geométricas, analíticas, estadísticas, etc. Todas ellas pueden combinarse de tantas formas como se pueda imaginar. De este modo, las distintas áreas se enriquecen y dan lugar a los resultados más bellos: aquéllos que pueden interpretarse desde distintos prismas.

Sin embargo, cuando entramos en los detalles técnicos de cada una de estas ramas, perdemos un poco la perspectiva del árbol completo. Para mí, las matemáticas son un gran árbol y cada nuevo concepto que surge es un nuevo “nutriente” que el matemático, que trabaja desde las raíces, ha sido capaz de captar, aprender y comprender. A veces, los nuevos descubrimientos alimentarán a todo el árbol. Otras, solo irán a parar a una rama específica de las matemáticas. Por último, hay ocasiones en las que este nuevo “nutriente” no será útil para ninguna parte del árbol. Este caso es el más especial: el nuevo concepto permanecerá latente hasta que sirva para desarrollar nuevas teorías, es decir, hasta que crezca un nuevo brote -una nueva línea de investigación- capaz de metabolizar los tesoros que la tierra le ofrece.

Puedo imaginar a los matemáticos de todos los tiempos trabajando desde sus despachos en lo más profundo de la tierra. Los imagino decidiendo a qué rama envían los nuevos descubrimientos, especificando a qué hojas debe ir exactamente la nueva herramienta que, con mucho trabajo y esfuerzo, ha sido desenterrada y formalizada. En una palabra: los imagino **clasificando**.

Sí, al matemático le gusta clasificar. Le gusta poner nombres. Necesita saber cuándo dos cosas son “la misma” o, mejor, saber cómo diferenciar dos objetos. En el caso de la Geometría, los objetos de estudio y clasificación son las variedades. En este marco se encuentra nuestro trabajo, titulado *Cohomología de De Rham de*

*variedades*, cuyo objetivo principal es presentar al lector los **espacios vectoriales de cohomología de De Rham**, cuyo nombre se debe al matemático suizo **Georges De Rham**. Estos espacios son cocientes de espacios vectoriales de **formas diferenciales**. Lo verdaderamente sorprendente de estos espacios es que, a pesar de estar definidos desde el punto de vista de la geometría diferencial, constituyen un invariante homotópico de variedades. Esto es, podemos obtener información topológica de una variedad a partir de un concepto puramente diferencial.

En ocasiones, la literatura hace referencia a estos espacios como **grupos** de cohomología, puesto que son los duales de los conocidos grupos de homología. Sin embargo, no utilizaremos esta nomenclatura, pues queremos tener siempre presente que, además de ser grupos abelianos para la suma, están dotados de estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Históricamente, el estudio global de las formas diferenciales de una variedad apareció por primera vez en 1895 en *Analysis situs* de **Henri Poincaré**. Desde entonces, no se conocen resultados al respecto hasta que el matemático **Élie Cartan**, en 1922, publicara su libro *Integral Invariants*. Durante ese tiempo sí se había investigado en el estudio de las formas diferenciales, pero siempre desde un punto de vista local.

Cartan advirtió que toda forma con derivada exterior nula (forma cerrada) sobre el espacio euclídeo podía expresarse como la derivada exterior de otra forma diferencial (forma exacta). Además, probó que esto no ocurre en cualquier espacio, dando como contraejemplo la 2-forma cerrada sobre  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

La pregunta natural y nada fácil de responder es: “¿qué condiciones son necesarias para que toda forma cerrada sobre una variedad sea exacta?”

Cartan siguió trabajando en esta línea, en la que el hilo conductor era la relación entre las formas diferenciales y la derivada exterior, cuya propiedad  $d^2 = 0$  le recordaba inevitablemente a la condición de complejo de cadenas.

En 1928, un joven De Rham, mientras trabajaba en su tesis, se encontró con una serie de conjeturas de Cartan. Sorprendentemente, De Rham fue capaz de probarlas. De este punto parte nuestro trabajo, cuya estructura es la siguiente.

En el primer capítulo presentamos los conceptos principales de la teoría de

De Rham: formas diferenciales, derivada exterior y producto exterior. Para ello, las primeras secciones introducen al lector en el lenguaje del álgebra tensorial-primero considerando tensores sobre espacios vectoriales en general y, después, considerando el caso particular de los espacios tangentes a variedades. Tras esto, estaríamos en condiciones de definir los espacios vectoriales de cohomología de De Rham. Sin embargo, esto no ocurrirá hasta el tercer capítulo, ya que antes (capítulo II) daremos las herramientas algebraicas que facilitarán la comprensión y las pruebas de los resultados posteriores.

En el capítulo IV se pone en práctica todo lo anterior y se calculan los espacios de cohomología de De Rham de algunas variedades. Por último, el quinto capítulo es una colección de resultados que pueden probarse a partir de la teoría de De Rham.





# Capítulo 1

## Álgebra tensorial

Para la redacción de este capítulo nos hemos basado en los apartados I y III de [2], II de [4], VII de [7] y los capítulos XVIII y XIX de la quinta parte de [8].

Este primer capítulo tiene la finalidad de presentar al lector el concepto de **forma diferencial**, el eje en torno al que gira toda la **Teoría de De Rham**. Esta noción no aparecerá hasta la sección 1.4. Hasta entonces, daremos las herramientas algebraicas y geométricas necesarias para poder desarrollar el trabajo de forma adecuada.

### 1.1. Tensores en $\mathbb{R}^n$

En esta sección, introduciremos algunos conceptos básicos de **álgebra tensorial**. Debemos pensar que ésta no es más que la extensión natural del álgebra lineal. Así, introduciremos la noción de **tensor** como la generalización de aplicación lineal.

**Definición 1.1.1** *Dados,  $V_1, \dots, V_n, W$   $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales, se dice que una aplicación  $f : V_1 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  es **multilineal** si, para cada  $1 \leq i \leq n$ , verifica:*

$$(i) \quad f(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n) = \lambda f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad f(v_1, \dots, v_i + v'_i, \dots, v_n) = f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + f(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n).$$

En lugar de considerar espacios vectoriales distintos, podemos tomar  $V_1 = \cdots = V_n = V$ . Si nos centramos en el caso en que el espacio de llegada es 1-dimensional; esto es,  $W = \mathbb{R}$ , salvo isomorfismo; tenemos la siguiente situación.

**Definición 1.1.2** Llamaremos *tensor  $n$  veces covariante* a toda aplicación multilíneal de la forma  $T : V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Esta primera versión de tensor será modificada a continuación. Recordemos que, dado un  $V$  un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$ , podemos considerar su espacio dual  $V^*$  definido como el  $K$ -espacio vectorial de las aplicaciones lineales de  $V$  en el cuerpo, es decir,  $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ . Además, estos espacios vectoriales son isomorfos. Por ello, podemos sustituir  $V$  por  $V^*$  en la definición anterior.

**Definición 1.1.3** Dado un espacio vectorial  $V$ , llamaremos *tensor  $n$  veces contravariante* a toda aplicación multilíneal  $T : V^* \times \cdots \times V^* \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Estas dos definiciones pueden recogerse en una más general.

**Definición 1.1.4** Dado  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y sea  $V^*$  su dual. Llamaremos *tensor  $r$  veces contravariante y  $s$  veces covariante* o simplemente *tensor de tipo  $(r, s)$*  a toda aplicación multilíneal de la forma  $T : V^* \times \cdots \times V^* \times V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Según esta definición, los tensores  $n$  veces covariantes son tensores de tipo  $(0, n)$  y los  $n$  veces contravariantes, de tipo  $(n, 0)$ .

### 1.1.1. Componentes de un tensor

Del mismo modo que una aplicación lineal puede darse mediante una matriz en una base prefijada, nos preguntamos si podemos conocer unívocamente un tensor si sabemos cómo actúa sobre ciertas bases de los espacios que intervienen. Surge así el concepto de componentes de un tensor que recogemos en la siguiente definición.

**Definición 1.1.5** Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial y  $V^*$  su dual. Consideremos una base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$  de  $V$  y sea  $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  su base dual. Llamaremos *componentes del tensor  $T$  de tipo  $(r, s)$*  a los números reales

$$T_{j_1 j_2 \dots j_s}^{i_1 i_2 \dots i_r} := T(\varphi^{i_1}, \varphi^{i_2}, \dots, \varphi^{i_r}, e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_s}).$$

**Observación 1.1.6** Recordemos que dada una base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$  de  $V$ , su dual es la única base  $\mathcal{B}^* = \{\varphi^1, \dots, \varphi^m\}$  de  $V^*$  que verifica:

$$\varphi^i(e_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

A partir de las componentes de un tensor  $T$  podemos extenderlo, vía multilinealidad, a todo su dominio. Así, las componentes de  $T$  juegan el papel de las entradas de una “matriz”  $n$ -dimensional.

Además, podemos considerar cada vector  $v \in V$  como un tensor de tipo  $(1, 0)$  que, a cada  $\varphi \in V^*$  le asigne  $\varphi(v) \in \mathbb{R}$ . Por otro lado, cada  $\varphi \in V^*$  puede verse como un tensor del tipo  $(0, 1)$ . Por todo lo anterior, el álgebra tensorial puede considerarse como una extensión natural del álgebra lineal.

Del mismo modo que podemos dotar de estructura de espacio vectorial a las aplicaciones lineales de  $V$  en  $\mathbb{R}$ , podemos hacerlo con los tensores de tipo  $(r, s)$ . Es evidente que podemos sumar y restar tensores del mismo tipo y que el producto por escalares reales está bien definido. Por ello, para cada par de enteros  $r, s$ , el conjunto de tensores de tipo  $(r, s)$  tiene estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial.

Además podemos definir una ley externa sobre el conjunto de tensores que, a cada par de tensores no necesariamente del mismo tipo, le asocie un nuevo tensor estrechamente relacionado con los dados.

**Definición 1.1.7** *Dados dos tensores  $T$  y  $S$  de tipo  $(r, s)$  y  $(u, v)$ , respectivamente; llamaremos **producto tensorial** de  $T$  y  $S$  al tensor  $T \otimes S$  de tipo  $(r + u, s + v)$  dado por:*

$$(T \otimes S)(\varphi^1, \dots, \varphi^{r+u}, v_1, \dots, v_{s+v}) := T(\varphi^1, \dots, \varphi^r, v_1, \dots, v_s) \cdot S(\varphi^{r+1}, \dots, \varphi^{r+u}, v_{s+1}, \dots, v_{s+v})$$

Es de esperar, según la definición, que las componentes del tensor producto tensorial puedan calcularse fácilmente en función de las componentes de cada factor. El siguiente ejemplo ilustra este hecho.

**Ejemplo 1.1.8** *Sean  $T$  y  $S$  dos tensores de tipo  $(1, 1)$  sobre un espacio vectorial 2-dimensional, cuyas únicas componentes no nulas son  $T_1^1 = 1$ ,  $T_2^2 = 2$  y  $S_2^1 = 3$ ,  $S_1^2 = 4$ . Según la definición de producto tensorial, las únicas componentes no nulas del tensor  $T \otimes S$  son:  $(T \otimes S)_{11}^{12} = 3$ ,  $(T \otimes S)_{12}^{11} = 4$ ,  $(T \otimes S)_{21}^{22} = 6$  y  $(T \otimes S)_{22}^{21} = 8$ .*

## 1.2. Variedades diferenciables

En esta sección recordaremos al lector algunos conceptos relacionados con variedades diferenciables. Intuitivamente, una variedad diferenciable  $n$ -dimensional, o  $n$ -variedad, es un espacio topológico Hausdorff que verifica el segundo axioma de numerabilidad (2AN) y que se puede cubrir por “parches” homeomorfos a abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . A continuación, formalizaremos este concepto.

**Definición 1.2.1** *Dado un espacio topológico  $M$  Hausdorff y 2AN, llamaremos **carta  $n$ -dimensional** de  $M$  a todo par  $(U, \phi)$ , donde*

- $U$  es un abierto de  $M$ ,
- $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  es un homeomorfismo en la imagen.

Si escribimos  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ , cada  $x^i$  recibe el nombre de  $i$ -ésima **función coordenada** de la carta  $(U, \phi)$ .

Ahora, nos proponemos cubrir el espacio topológico  $M$  por un conjunto de cartas que nos permitan “deformarlo” localmente en abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Cabe contemplar la posibilidad de que un punto  $p$  de  $M$  esté cubierto por varios abiertos. Por ello, debemos elegir las cartas con cierto criterio. La siguiente definición establece la condición que exigiremos a dos cartas para poder ser compatibles.

**Definición 1.2.2** *Diremos que dos cartas  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  son **compatibles** si las aplicaciones “cambio de carta”*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V), \quad \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$$

son funciones  $C^\infty$ .

En el caso de que dos cartas sean disjuntas, diremos que son vacíamente compatibles.

**Definición 1.2.3** *Dado un espacio topológico  $M$  Hausdorff y 2AN, llamaremos **atlas diferenciable  $n$ -dimensional** (o estructura diferencial  $n$ -dimensional) de  $M$  a todo conjunto maximal de cartas  $n$ -dimensionales  $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  compatibles, que cubran todo  $M$ .*

Tras esta definición, estamos en condiciones de presentar el concepto de **variedad diferenciable**.

**Definición 1.2.4** *Dado un espacio topológico  $M$  Hausdorff y  $2AN$ , diremos que es una variedad diferenciable  $n$ -dimensional si podemos dotarlo de una estructura diferenciable  $n$ -dimensional.*

La relación entre los abiertos de una variedad diferenciable y los abiertos de  $\mathbb{R}^n$  nos permitirá definir la noción de aplicación diferenciable entre variedades en términos de la diferenciable euclídea.

**Definición 1.2.5** *Dada una  $n$ -variedad diferenciable  $M$  y una aplicación  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  es diferenciable si, para cada carta  $(U, \phi)$ , la aplicación  $f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable en el sentido habitual.*

Se definen las **derivadas parciales** de  $f$  en un punto  $p \in U$  como

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p = D_i(f \circ \phi^{-1})(\phi(p)),$$

donde  $D_i$  denota la derivada parcial usual.

Del mismo modo, diremos que una aplicación definida entre dos variedades  $f : M \rightarrow N$  es diferenciable si, para cualquier par de cartas  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  de  $M$  y  $N$ , respectivamente; la aplicación

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

lo es en el sentido habitual.

### 1.2.1. Espacios tangente y cotangente

Dar una definición de **espacio tangente** es algo relativamente sencillo si consideramos la variedad como un subconjunto de algún  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, si estudiamos la variedad como un objeto matemático en sí mismo, sin importar dónde viva, la tarea se complica. A continuación daremos dos definiciones de espacio tangente a una variedad en un punto. La primera de ellas está relacionada con los vectores velocidad de curvas sobre la variedad. La segunda, trata los vectores tangentes como operadores lineales. Ambas definiciones tienen en común más de lo que pueda parecer.

**Definición 1.2.6 (Espacio tangente I).**

Dado un punto  $p$  en una  $n$ -variedad diferenciable  $M$ , consideremos el conjunto  $\mathcal{K}_p(M)$  de curvas  $c : (-\epsilon, \epsilon) \longleftarrow M$  tales que  $c(0) = p$ . Sobre este conjunto, consideremos la relación de equivalencia  $\sim$  dada por

$$c_1 \sim c_2 \iff (\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0),$$

para alguna carta  $(U, \phi)$  de  $M$  que contenga a  $p$ .

Llamaremos espacio tangente a  $M$  en  $p$ , y lo denotaremos por  $T_pM$ , al conjunto cociente

$$T_pM = \mathcal{K}_p(M) / \sim.$$

Sus elementos reciben el nombre de **vectores tangentes** a la variedad  $M$  en el punto  $p$ .

**Definición 1.2.7 (Espacio tangente II).**

Dada una variedad diferenciable  $M$  y sea  $p$  un punto de ésta. Denotaremos por  $\mathcal{E}_p(M)$  al anillo de funciones diferenciables de  $M$  en  $\mathbb{R}$  definidas en un entorno suficientemente pequeño de  $p$ . Con esta notación, llamaremos **vector tangente** a  $M$  en  $p$  a cualquier operador  $\mathbb{R}$ -lineal  $v : \mathcal{E}_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ , satisfaciendo

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{E}_p(M).$$

El conjunto de los operadores de este tipo se llama **espacio tangente** a  $M$  en  $p$ .

Notemos que, aunque *a priori* estas definiciones puedan parecer independientes, a cada curva  $c \in \mathcal{E}_p(M)$  podemos asignarle el operador  $v_c : \mathcal{E}_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ , dado por

$$v_c(f) := (f \circ c)'(0),$$

que satisface la segunda definición de vector tangente. Además, esta asignación es biyectiva, ya que si  $c_1$  y  $c_2$  son dos curvas tales que  $v_{c_1} = v_{c_2}$ , basta aplicar estos operadores sobre las funciones coordenadas para obtener que

$$(\phi \circ c_1)'(0) = (\phi \circ c_2)'(0).$$

En otras palabras, que  $c_1$  y  $c_2$  representan el mismo elemento de  $T_pM$ .

A continuación, dotaremos a  $T_pM$  de estructura de espacio vectorial de dimensión  $\dim M$ . La siguiente proposición recoge este resultado.

**Proposición 1.2.8** *Sea  $p$  un punto de una  $n$ -variedad diferenciable  $M$ . El espacio tangente  $T_pM$  es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial  $n$ -dimensional.*

Aunque no realizaremos la prueba de este resultado, ésta se basa en lo siguiente. En primer lugar, las operaciones suma y producto por escalares están bien definidas en  $T_pM$ . Para ver que la dimensión de  $T_pM$  es  $n$ , basta considerar las curvas

$$c_i(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + te_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

donde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . En esta situación, los vectores  $\{[c_i]\}_{i=1}^n$  son linealmente independientes y generan todo el espacio  $T_pM$ , es decir, forman una base del espacio tangente.

En general, utilizaremos la notación  $\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = [c_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Esta elección no es casual, pues con la segunda definición de vector tangente, el operador  $v_{c_i}$  asigna a cada aplicación diferenciable  $f$  su  $i$ -ésima derivada parcial en el punto  $p$ .

En ocasiones, por abreviar la notación y siempre que no dé lugar a confusión, escribiremos  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  para hacer referencia la base de  $T_pM$ .

La siguiente definición pone de manifiesto cómo podemos relacionar los espacios tangentes de dos variedades a partir de aplicaciones entre ellas.

**Definición 1.2.9** *Dadas dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$ , un punto  $p \in M$  y una aplicación diferenciable  $f : M \rightarrow N$ , llamaremos **aplicación tangente** de  $f$  en  $p$  (o diferencial de  $f$  en  $p$ ) a la aplicación lineal  $df_p$ , definida por*

$$\begin{aligned} df_p : T_pM &\longrightarrow T_{f(p)}N \\ v &\longmapsto df_p(v) : \mathcal{E}_{f(p)}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &g \longmapsto v(g \circ f) \end{aligned}$$

Prestaremos especial atención a las diferenciales de las funciones coordenadas. Sea  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  una carta conteniendo a un punto  $p$  de  $M$ . Consideremos cada función coordenada  $x^i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ . Su diferencial en  $p$  es una aplicación lineal de  $T_pM$  en  $T_{x^i(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$ , dada por

$$\begin{aligned} dx^i|_p : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto dx^i|_p(v) = v_i, \end{aligned}$$

donde  $v = (v_1, \dots, v_n)$  son las coordenadas del vector  $v$  en la base  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ .

En particular, si aplicamos  $dx^i|_p$  al vector tangente  $\partial_j|_p$ , obtenemos que

$$dx^i|_p \left( \partial_j|_p \right) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos que  $\{dx^1|_p, \dots, dx^n|_p\}$  es la base dual de  $\{\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p\}$ . En particular, es una base del espacio vectorial dual de  $T_pM$ , que denotaremos por  $T_p^*M$ . Nos referiremos a este espacio como **espacio cotangente** a  $M$  en  $p$  y a sus elementos como **covectores** o **1-formas**. Este concepto será retomado y generalizado en secciones posteriores.

### 1.3. Tensores en el espacio tangente

Dado un punto  $p$  de una variedad  $M$  podemos considerar los espacios vectoriales  $T_pM$  y  $T_p^*M$ . Fijado  $p$ , podemos definir tensores de tipo  $(r, s)$  sobre los espacios vectoriales  $V = T_pM$  y  $V^* = T_p^*M$ . La finalidad de este capítulo es ver de qué forma podemos asociar tensores a toda la variedad  $M$  conservando cierta suavidad.

**Definición 1.3.1** *Dada una variedad  $M$ . Llamaremos **campo de vectores**  $\mathcal{C}^\infty$  sobre  $M$  a toda aplicación*

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow T_pM \\ p &\longmapsto v \end{aligned}$$

que asigne a cada  $p \in M$  un vector en  $T_pM$  de forma diferenciable.

Localmente, si  $(U, \varphi)$  es una carta en  $p$ , el espacio tangente puede verse como  $T_pU = \langle \partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p \rangle$ . Así, un campo de vectores  $\mathcal{C}^\infty$  es una aplicación  $X : U \longrightarrow T_pU$  dada por  $X(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p) \partial_i|_p$ , con cada  $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$  funciones  $\mathcal{C}^\infty(U)$ .

De forma totalmente análoga, podemos definir campos de 1-formas. La siguiente definición engloba a éstas.

**Definición 1.3.2** *Campo tensorial (extensión de campo vectorial).*

Llamaremos campo tensorial de tipo  $(r, s)$  sobre una variedad  $M$  (o tensor de tipo  $(r, s)$  en  $M$ ) a toda aplicación diferenciable  $T$  que a cada punto  $p \in M$  le



asocie un tensor  $T(p) \equiv T_p$  de tipo  $(r, s)$

$$T_p : T_p^* M \times \overset{r}{\cdots} \times T_p^* M \times T_p M \times \overset{s}{\cdots} \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En cada carta  $(U, (x^1, \dots, x^n))$ , las componentes de un tensor  $T$  de tipo  $(r, s)$  sobre una variedad, definen funciones  $\mathcal{C}^\infty(U)$  dadas por:

$$p \longmapsto T(p)(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \partial_{j_1}|_p, \dots, \partial_{j_s}|_p).$$

Estas componentes no son independientes de las cartas elegidas, sin embargo, podemos calcular unas en función de las otras de forma sencilla. Dadas dos cartas  $(U, (x^1, \dots, x^n))$ ,  $(V, (y^1, \dots, y^n))$  tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ , puede comprobarse que, para cada  $p \in U \cap V$ ,

$$T_p(dy^{i_1}, \dots, dy^{i_r}, \frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{j_s}})$$

coincide con

$$\left( \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_r}}{\partial x^{i_r}} \right) \cdot \left( \frac{\partial x^{l_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial y^{j_s}} \right) \cdot T_p(dx^{k_1}, \dots, dx^{k_r}, \frac{\partial}{\partial x^{l_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{l_s}})$$

## 1.4. Formas diferenciales

En este capítulo presentaremos a las grandes protagonistas de la teoría de De Rham: las **formas diferenciales**. En secciones anteriores dimos la definición de 1-formas de una variedad; ahora, generalizaremos esta noción a la de  $k$ -forma y daremos un operador, introducido por É. Cartan, llamado **derivada exterior**, que jugará un papel crucial en el desarrollo de las secciones siguientes.

**Definición 1.4.1** *Dado un espacio vectorial  $V$ , diremos que un tensor  $T$  de tipo  $(0, k)$  es una  $k$ -forma alternada si es antisimétrico en cualquier par de variables. Esto es,*

$$T(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -T(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots).$$

Denotaremos por  $\text{Alt}^k(V)$  al conjunto de todas las  $k$ -formas alternadas sobre un espacio vectorial  $V$ .

El concepto de forma diferencial surge al tomar como espacio vectorial el espacio tangente de una variedad  $M$ .

**Definición 1.4.2** Dada  $M$  una variedad, llamaremos  $k$ -forma diferencial sobre  $M$  a todo campo de  $k$ -formas alternadas sobre  $M$ . El conjunto de  $k$ -formas diferenciales sobre la variedad  $M$  se denota por  $\Omega^k(M)$ .

Igual que convenimos para tensores,  $\text{Alt}^0(V)$  está formado por las constantes, es decir, es  $\mathbb{R}$ . El espacio  $\Omega^0(M)$  es el de las funciones  $\mathcal{C}^\infty(M)$ , pues cada 0-forma diferencial es una asignación diferenciable de 0-formas alternadas (constantes) a cada punto de la variedad.

En el caso  $k = 1$ , la definición de 1-forma alternada es la misma que la de tensor del tipo  $(0, 1)$ . Así, la noción de 1-forma diferencial coincide con la de 1-forma que conocemos.

Para valores de  $k$  mayores que la dimensión del espacio vectorial, toda  $k$ -forma alternada es nula, debido a la dependencia lineal que presentan sus argumentos. Como consecuencia  $\Omega^k(M) = 0$  para cualquier  $k > \dim(M)$ .

Notemos que para cualquier valor de  $k$ ,  $\text{Alt}^k(V)$  puede dotarse de estructura de  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con las operaciones suma y producto por un escalar. En el caso de  $\Omega^k(M)$ , los escalares dependerán del punto de la variedad sobre el que consideremos el espacio tangente, por lo tanto  $\Omega^k(M)$  tiene estructura de módulo sobre el anillo de funciones  $\mathcal{C}^\infty(M)$ . Sin embargo, localmente, cada espacio de  $k$ -formas puede tratarse como un espacio vectorial real.

Igual que definimos una ley externa para los tensores, podemos dar una operación de formas, que llamaremos **producto exterior**, que nos permite obtener formas de orden superior a partir de otras dadas.

**Definición 1.4.3** Sea  $V$  un espacio vectorial y tomemos  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^k \in V^* = \text{Alt}^1(V)$ . Definimos su producto exterior,  $\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^k$ , como la  $k$ -forma dada por:

$$(\varphi^1 \wedge \varphi^2 \wedge \dots \wedge \varphi^k)(v_1, v_2, \dots, v_k) = \det(\varphi^i(v_j))_{1 \leq i, j \leq k}$$

La siguiente proposición pone de manifiesto que esta operación permite describir unívocamente los espacios de  $k$  formas a partir de las 1-formas.

**Proposición 1.4.4** Sea  $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^k\}$  una base de  $V^* = \text{Alt}^1(V)$ . Entonces

$$\{\varphi^{i_1} \wedge \varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$$

es una base de  $\text{Alt}^k(V)$ .

*Demostración.*

Tomemos una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $V$  que tenga como dual  $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^k\}$  y consideremos una combinación lineal de los  $\varphi^{i_1} \wedge \varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k}$  :

$$T = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \wedge \varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k}.$$

Si  $T$  fuese el tensor 0, basta aplicarlo sobre cada  $k$ -upla  $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ , con  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ , para obtener que todos los coeficientes  $a_{i_1 \dots i_k}$  son nulos. Por lo tanto, los elementos del conjunto son linealmente independientes.

Por otra parte, si consideramos una  $k$ -forma,  $\omega \in \text{Alt}^k(V)$ , de componentes  $\omega_{i_1 i_2 \dots i_k}$  en la base  $\{e_1, \dots, e_n\}$ . Basta elegir  $T = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \varphi^{i_1} \wedge \varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k}$ , cuyas componentes coinciden, por construcción, con las de  $\omega$ . Se sigue, haciendo uso de la multilinealidad, que  $T = \omega$ . De la elección arbitraria de  $\omega$  se sigue que el conjunto dado es un sistema generador de  $\text{Alt}^k(V)$  y, por lo tanto, una base. ■

Como consecuencia de la proposición anterior, tenemos los siguientes resultados.

**Corolario 1.4.5** *Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ . Todo elemento de  $\Omega^k(M)$  puede escribirse de forma local como:*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

**Corolario 1.4.6** *Dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$  y sea  $0 \leq k \leq n$ . La dimensión de  $\Omega^k(M)$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial es  $\binom{n}{k}$ .*

Hasta ahora, solo ha aparecido el producto exterior de 1-formas. Sin embargo, podemos definir el producto exterior de formas de mayor orden. Dado un espacio vectorial  $V$  y sea  $\{\varphi^1, \dots, \varphi^n\}$  una base de su dual. Resulta natural definir

$$(\varphi^{i_1} \wedge \varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k}) \wedge (\varphi^{j_1} \wedge \varphi^{j_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{j_l}) := \varphi^{i_1} \wedge \varphi^{i_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{i_k} \wedge \varphi^{j_1} \wedge \varphi^{j_2} \wedge \dots \wedge \varphi^{j_l}.$$

Podemos extender esta definición haciendo uso de la distributividad respecto de la suma y obtener una operación, que también llamaremos producto exterior.

$$\wedge : \text{Alt}^k(V) \times \text{Alt}^l(V) \longrightarrow \text{Alt}^{k+l}(V).$$

Del mismo modo, si  $p$  es un punto de una variedad  $M$  y consideramos el espacio  $V = T_p M$ , el producto exterior de formas diferenciables es una operación

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \longrightarrow \Omega^{k+l}(M).$$

**Observación 1.4.7** *En el caso de 0-formas, el producto exterior coincide con el usual.*

De la definición de producto exterior como un determinante, se siguen las siguientes propiedades:

- Asociatividad.
- Anticonmutatividad:  $\omega \wedge \mu = (-1)^{kl} \mu \wedge \omega$ ,  $\forall \omega \in \Omega^k(M)$ ,  $\forall \mu \in \Omega^l(M)$ .

**Definición 1.4.8** *Dada  $\omega \in \Omega^k(M)$ , según los resultados anteriores, podemos expresarla como*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1, i_2, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

Llamaremos **derivada exterior** de la  $k$ -forma  $\omega$  a la  $(k+1)$ -forma  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$  dada por

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \frac{\partial f_{i_1, i_2, \dots, i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

**Observación 1.4.9** *En el caso  $k=0$ , toda 0-forma es una función  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  y su derivada exterior está dada por  $df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$ . En otras palabras, aplicada a funciones, la derivada exterior coincide con la diferencial.*

**Proposición 1.4.10** *Dadas  $\omega \in \Omega^k(M)$  y  $\eta \in \Omega^l(M)$ , se satisfacen las siguientes propiedades:*

- (i)  $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$
- (ii)  $d(d\omega) = 0$ .

*Demostración.*

(i) Por linealidad, podemos suponer que  $\omega$  y  $\eta$  son de la forma:

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{y} \quad \eta = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l},$$

para ciertas funciones diferenciables  $f, g$ .

Si calculamos  $d(\omega \wedge \eta)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}) \\ &= \sum_m \frac{\partial(fg)}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_m \left( \frac{\partial f}{\partial x^m} g + \frac{\partial g}{\partial x^m} f \right) dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_m \left( \frac{\partial f}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \wedge g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + \sum_m \left( \frac{\partial g}{\partial x^m} f dx^m \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \right) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \sum_m \frac{\partial g}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es consecuencia de la anticonmutatividad del producto exterior.

(ii) Dada una función diferenciable  $f$ , es fácil ver que:

$$d(df) = d\left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i\right) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^j \wedge dx^i = 0,$$

ya que  $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$  y las parciales cruzadas coinciden.

De (i) se deduce que  $d^2(\omega \wedge \eta) = d^2\omega \wedge \eta - \omega \wedge d^2\eta$ . A partir de esta fórmula, podemos probar que (ii) es cierto para el caso  $k = 1$ . Sea  $\omega$  una 1-forma. Por la linealidad, podemos suponer que  $\omega = f dx^i$  para alguna función diferenciable  $f$ . Si calculamos su segunda derivada exterior, tenemos:

$$d^2(\omega) = d^2(f dx^i) = d^2(f \wedge dx^i) = d^2(f) \wedge \omega - f \wedge d^2(dx^i) = -f d^2(dx^i).$$

Por otra parte,  $\omega$  también puede expresarse como  $dx^i \wedge f$ , de donde obtenemos que

$$d^2(\omega) = d^2(dx^i f) = d^2(dx^i \wedge f) = d^2(dx^i) \wedge f - \omega d^2(f) = f d^2(dx^i),$$

por lo tanto, si  $f$  no es la función constante cero, se sigue que  $d^2(\omega) = 0$ . En caso de que  $f \equiv 0$ , se tiene trivialmente el resultado.

De nuevo, utilizando la fórmula  $d^2(\omega \wedge \eta) = d^2\omega \wedge \eta - \omega \wedge d^2\eta$ , se prueba por inducción que el resultado es cierto para cualquier valor de  $k$ .

■

El siguiente resultado pone de manifiesto que la derivada exterior, tal y como la hemos definido, es única.

**Teorema 1.4.11** *Si  $d'$  es una derivación satisfaciendo:*

- (i)  $d'(\omega + \eta) = d'(\omega) + d'(\eta)$ ,
- (ii)  $d'(\omega \wedge \eta) = d'\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d'\eta$ ,
- (iii)  $d' \circ d' = 0$  y
- (iv)  $d'f$  coincide con la diferencial usual sobre funciones.

Entonces,  $d' = d$ .

*Demostración.* En primer lugar, veamos que si  $d'$  satisface las propiedades anteriores, verifica también la siguiente. Dada una variedad diferenciable  $M$  y sea  $p \in M$ , consideremos dos  $k$ -formas  $\omega$  y  $\eta$  que coincidan en un entorno abierto  $U$  de  $p$ . Veamos que, en tal caso,  $d'\omega = d'\eta$  en  $U$ . Equivalentemente, haciendo uso de la linealidad, si  $\omega$  es una  $k$ -forma que se anula en un entorno  $U$  de  $p$ , veamos que  $d'\omega = 0$  en  $U$ .

Para ello, consideremos una función *bump*  $\phi$ , que se anule en todo  $U$  y que tome valor constante 1 fuera de  $U$ . En esta situación, se tiene que  $\phi \cdot \omega = \omega$ . Si calculamos  $d'\omega$ :

$$d'\omega = d'(\phi \cdot \omega) \stackrel{(ii),(iv)}{=} \phi' \cdot \omega + \phi \cdot d'\omega.$$

Notemos que los dos sumandos se anulan en todo  $U$ , por lo tanto,  $d'\omega = 0$  en  $U$ .

Sean ahora  $p \in M$  y  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Si consideramos un entorno abierto  $U$  de  $p$  y expresamos  $\omega$  en las coordenadas  $(U; (x^1, \dots, x^n))$ , tenemos:

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k}.$$

Calculemos  $d'\omega$ :

$$\begin{aligned} d'\omega &= d' \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} f_{i_1 \dots i_k} d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k} \right) \\ &\stackrel{(i)}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d' (f_{i_1 \dots i_k} d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k}) \\ &\stackrel{(ii),(iv)}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (d'f_{i_1 \dots i_k} \wedge d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k} + f_{i_1 \dots i_k} d' (d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k})) \\ &\stackrel{(ii)}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left( d'f_{i_1 \dots i_k} \wedge d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k} \right. \\ &\quad \left. + f_{i_1 \dots i_k} \sum_{j=1}^k (-1)^j d' (d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d' (d'x^{i_j}) \wedge \dots \wedge d'x^{i_k}) \right) \\ &\stackrel{(iii)}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d'f_{i_1 \dots i_k} \wedge d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k} \\ &\stackrel{(iv)}{=} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i_1 \dots i_k}}{\partial x^j} d'x^j \right) \wedge d'x^{i_1} \wedge \dots \wedge d'x^{i_k}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, en  $U$ , cualquier derivación satisfaciendo (i), (ii), (iii) y (iv), coincide con la derivada exterior definida previamente.

Para ver que esto no depende de las coordenadas elegidas, consideremos otro entorno abierto  $V$  de  $p$  y las coordenadas  $(V; (y^1, \dots, y^n))$ . En  $V$ ,  $\omega$  adquiere la forma

$$\omega_V = \sum_{1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n} f_{l_1 \dots l_k} d'y^{l_1} \wedge \dots \wedge d'y^{l_k}.$$

Puesto que en el abierto  $U \cap V$ , las  $k$ -formas  $\omega_U$  y  $\omega_V$  coinciden, de las primeras líneas de la demostración tenemos que  $d'\omega_U = d'\omega_V$  en  $U \cap V$ . Esto es, la forma  $d'\omega$  no depende de la carta elegida. ■

## 1.5. La aplicación pullback

### 1.5.1. El pullback de una aplicación lineal entre espacios vectoriales

**Definición 1.5.1** Consideremos dos espacios vectoriales  $V, W$  y una aplicación lineal  $f : V \rightarrow W$ . Para cada valor natural de  $k$ , el **pullback** de  $f$  es la aplicación definida por:

$$\begin{aligned} f^* : \text{Alt}^k(W) &\longrightarrow \text{Alt}^k(V) \\ \omega &\longmapsto f^*\omega, \end{aligned}$$

donde  $f^*\omega$  es la  $k$ -forma alternada sobre  $V$  dada por:

$$(f^*\omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)).$$

**Proposición 1.5.2** El pullback de una aplicación lineal satisface las siguientes propiedades:

- (i) Si  $f$  es lineal  $\implies f^*$  también es lineal.
- (ii) Si  $f = id_V \implies f^* = id_{\text{Alt}^k(V)}$ .
- (iii) Si  $f : U \rightarrow V$  y  $g : V \rightarrow W \implies (g \circ f)^* = f^* \circ g^*$
- (iv) Si  $f$  es isomorfismo  $\implies f^*$  también lo es.

*Demostración.*

- (i) Sea  $f : V \rightarrow W$  una aplicación lineal y consideremos la aplicación  $f^*$ . Veamos que es lineal. Para ello, tomemos dos  $k$ -formas alternadas  $\omega_1, \omega_2 \in \text{Alt}(W)$ , un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  y vectores  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 + \omega_2)(v_1, \dots, v_k) &= (\omega_1 + \omega_2)(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= \omega_1(f(v_1), \dots, f(v_k)) + \omega_2(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= f^*\omega_1(v_1, \dots, v_k) + f^*\omega_2(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(\lambda\omega_1)(v_1, \dots, v_k) &= (\lambda\omega_1)(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= \lambda(\omega_1(f(v_1), \dots, f(v_k))) \\ &= \lambda f^*\omega_1(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$



(ii) Si  $f = id_V$  y tomamos  $\omega \in \text{Alt}^k(V)$ . La  $k$ -forma  $f^*\omega$  coincide con  $\omega$ . En efecto, si consideramos  $k$  vectores  $v_1, \dots, v_k$  de  $V$ :

$$f^*\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)) = \omega(v_1, \dots, v_k)$$

(iii) Consideremos las aplicaciones  $f^* : \text{Alt}^k(V) \rightarrow \text{Alt}^k(U)$ ,  $g^* : \text{Alt}^k(W) \rightarrow \text{Alt}^k(V)$ , y  $(g \circ f)^* : \text{Alt}^k(W) \rightarrow \text{Alt}^k(U)$ . Sea  $\omega$  una  $k$ -forma alternada sobre  $W$  y  $u_1, \dots, u_k$  vectores de  $U$ .

$$(g \circ f)^*(\omega)(u_1, \dots, u_k) = \omega((g \circ f)(u_1), \dots, (g \circ f)(u_k))$$

Por otra parte,  $g^*(\omega)$  es una  $k$ -forma sobre  $V$ . Si le aplicamos  $f^*$ , obtenemos

$$f^*(g^*(\omega))(u_1, \dots, u_k) = g^*(\omega)(f(u_1), \dots, f(u_k)) = \omega(g(f(u_1)), \dots, g(f(u_k))),$$

que coincide con la expresión de  $(g \circ f)^*(\omega)(u_1, \dots, u_k)$ .

(iv) Si  $f : V \rightarrow W$  es un isomorfismo, podemos considerar su inversa  $f^{-1} : W \rightarrow V$ . Estas aplicaciones satisfacen

$$f \circ f^{-1} = id_W \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = id_V.$$

En tal caso:

$$\begin{aligned} (f^{-1})^* \circ f^* &= (f \circ f^{-1})^* = id_W^* = id_{\text{Alt}^k(W)} \\ f^* \circ (f^{-1})^* &= (f^{-1} \circ f)^* = id_V^* = id_{\text{Alt}^k(V)}. \end{aligned}$$

De donde se deduce que  $f^*$  y  $(f^{-1})^*$  son isomorfismos de espacios vectoriales, inversos el uno del otro. ■

**Proposición 1.5.3** *El pullback de una aplicación lineal conmuta con el producto exterior.*

*Demostración.* Sea  $f$  una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales  $V$  y  $W$ . Consideremos  $\varphi^1, \dots, \varphi^k \in W^* = \text{Alt}^1(W)$ . Veamos que  $f^*(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^k) = f^*\varphi^1 \wedge \dots \wedge f^*\varphi^k$ .

Para ello, consideremos  $k$  vectores  $v_1, \dots, v_k$  de  $V$  y calculemos

$$\begin{aligned} f^*(\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^k)(v_1, \dots, v_k) &= (\varphi^1 \wedge \dots \wedge \varphi^k)(f(v_1), \dots, f(v_k)) \\ &= \det(\varphi^i(f(v_j)))_{1 \leq i, j \leq k} \\ &= \det(f^*(\varphi^i)(v_j))_{1 \leq i, j \leq k} \\ &= (f^*\varphi^1 \wedge \dots \wedge f^*\varphi^k)(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Luego, el resultado es cierto para 1-formas alternadas. Teniendo en cuenta que toda  $k$ -forma se expresa como combinación lineal de productos exteriores de  $k$  1-formas y que la aplicación  $f^*$  es lineal, se tiene el resultado general. ■

### 1.5.2. El pullback de una aplicación diferenciable entre variedades

Hemos visto cómo funciona el pullback de una aplicación lineal entre espacios vectoriales. Ahora queremos generalizar la noción de pullback a aplicaciones entre variedades.

Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables y sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre ellas. Sabemos que, para cada punto  $p \in M$ , la aplicación  $df_p$  es lineal entre los espacios vectoriales  $T_pM$  y  $T_{f(p)}N$ . Utilizaremos este hecho para definir el pullback de una aplicación diferenciable  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  de la siguiente forma.

Tomemos un punto  $p$  de  $M$  y calculemos su imagen por  $f$ . Consideremos un entorno  $U$  de  $f(p)$  en  $N$ . Si  $\omega$  es una  $k$ -forma sobre  $N$  y la escribimos en las coordenadas  $(U; (x^1, \dots, x^n))$  como  $\omega_{f(p)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} g_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Entonces  $f^*\omega$  es una  $k$ -forma definida en un entorno de  $p$  como  $(f^*\omega)_p := (df_p)^*\omega_{f(p)}$ , es decir:

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = \omega_{f(p)}(df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)), \quad \forall v_1, \dots, v_k \in T_pM.$$

Más concretamente,  $(f^*\omega)_p$  adquiere la siguiente forma:

$$(f^*\omega)_p = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} (g_{i_1 \dots i_k} \circ f) df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}.$$

**Observación 1.5.4** Debido a que hemos definido el pullback de una aplicación como el pullback de su diferencial que, localmente, es una aplicación lineal entre espacios vectoriales, sabemos que:

- $f^*$  es una aplicación lineal de  $\Omega^\bullet(N)$  en  $\Omega^\bullet(M)$ .
- $f^*$  conmuta con el producto exterior de  $k$ -formas diferenciales.
- $id_M^* = id_{\Omega^\bullet(M)}$ .
- $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ .
- El pullback de un difeomorfismo entre variedades es un isomorfismo entre los espacios de  $k$ -formas diferenciales.

Además de éstas, el pullback de una aplicación diferenciable verifica la siguiente propiedad, que será de gran utilidad en los capítulos posteriores.

**Proposición 1.5.5** El pullback de una aplicación diferenciable conmuta con la derivada exterior.

*Demostración.* Consideremos dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$  y sea  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre ellas. Sea  $\omega \in \Omega^k(N)$ , veamos que  $d^M(f^*\omega) = f^*(d^N\omega)$ ; donde  $d^M$  y  $d^N$  denotan la derivada exterior en las variedades  $M$  y  $N$ , respectivamente.

Notemos que, en virtud de la linealidad de  $f^*$  y de la derivada exterior, basta probar el resultado para  $k$ -formas del tipo

$$\omega = g_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

En tal caso,

$$d^N \omega = \sum_j \frac{\partial g}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad \text{y}$$

$$f^*(d^N \omega) = \sum_j \left( \frac{\partial g}{\partial x^j} \circ f \right) df^j \wedge df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}.$$

Por otra parte,

$$d^M(f^*\omega) = d^M((g \circ f)df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k}) = d(g \circ f) \wedge df^{i_1} \wedge \dots \wedge df^{i_k},$$

donde

$$d(g \circ f) = \sum_j \frac{\partial g \circ f}{\partial x^j} dx^j = \sum_j \left( \frac{\partial g}{\partial x^j} \circ f \right) df^j,$$

de donde se sigue la igualdad deseada. ■

## Capítulo 2

# Cocadenas y cohomología

Los resultados expuestos a continuación están basados principalmente en el capítulo IV de [6]. También, aunque en menor medida, en el apartado XI de [7].

En este capítulo, daremos las herramientas algebraicas necesarias para probar los resultados de la Teoría de De Rham. Para ello, nos alejaremos del lenguaje de las variedades y nos centraremos en resultados relativos a **cohomología**. En este desarrollo, aunque no lo digamos explícitamente, consideraremos siempre  $R$ -módulos sobre un anillo  $R$  conmutativo y unitario. En capítulos posteriores aplicaremos estos resultados al caso particular de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales.

**Definición 2.0.1** Diremos que una sucesión  $A_\bullet = \{A_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  de módulos  $\{A_i\}$  y homomorfismos  $\{d_i : A_i \rightarrow A_{i+1}\}$  es un **complejo de cocadenas** si  $d_{k+1} \circ d_k = 0$  para todo entero  $k$ .

En esta situación, tenemos que  $\text{Im}(d_k) \subset \ker(d_{k+1})$  y para cada valor de  $k$ , tiene sentido considerar el cociente

$$H^k(A_\bullet) = \frac{\ker(d_k)}{\text{Im}(d_{k-1})},$$

que llamaremos “ **$k$ -ésimo módulo de cohomología**” de la sucesión  $A_\bullet$ .

**Definición 2.0.2** Dado un complejo de cocadenas  $A_\bullet = \{A_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , llamaremos  **$k$ -cociclos** (o  **$k$ -cerrados**) a los elementos de  $\ker(d_k)$  y  **$k$ -cobordes** (o  **$k$ -exactos**) a los elementos de  $\text{Im}(d_{k-1})$ .

Con esta notación, el  $k$ -ésimo módulo de cohomología es

$$H^k(A_\bullet) = \frac{\{k - \text{cociclos}\}}{\{k - \text{cobordes}\}}.$$

**Observación 2.0.3** Si invertimos las flechas y consideramos que cada  $d_i$  es una aplicación  $d_i : A_i \rightarrow A_{i-1}$ , obtenemos lo que se conoce por **complejo de cadenas**. Cada uno de los cocientes  $H_k(A_\bullet) = \frac{\ker(d_k)}{\text{Im}(d_{k+1})}$  es conocido como  **$k$ -ésimo módulo de homología**.

A lo largo de este capítulo, puesto que queremos obtener resultados relativos a cohomología, trabajaremos siempre con complejos de cocadenas.

Las siguientes definiciones surgen al imponer que se dé la condición más fuerte  $\text{Im}(d_k) = \ker(d_{k+1})$  en cada paso.

**Definición 2.0.4** Diremos que una sucesión  $A_\bullet = \{A_i, d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  es **exacta** si se satisface que  $\text{Im}(d_k) = \ker(d_{k+1})$  para cualquier valor de  $k$ .

En este caso, cada módulo de cohomología es trivial. En cierto modo, los módulos de cohomología nos dan información de cuánto se diferencia un complejo de cocadenas de una sucesión exacta.

**Definición 2.0.5** Dados tres módulos  $A, B, C$ , llamaremos **sucesión exacta corta** a cualquier sucesión exacta del tipo

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0.$$

En cuyo caso, se verifica que  $\text{Im}(f) = \ker(g)$ ,  $f$  es inyectiva y  $g$  es suprayectiva.

## 2.1. Sucesiones exactas de complejos de cocadenas

**Definición 2.1.1** Dados dos complejos de cocadenas  $A_\bullet = (A_k, d_k^A)$  y  $B_\bullet = (B_k, d_k^B)$ , llamaremos **aplicación de cocadenas**  $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  a toda sucesión de homomorfismos de módulos  $f = \{f_k : A_k \rightarrow B_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , satisfaciendo

$$f_{k+1} \circ d_k^A = d_k^B \circ f_k,$$

para cada valor de  $k$ . En otras palabras, una aplicación de cocadenas es una colección de homomorfismos que hace conmutativos todos los diagramas del tipo

$$\begin{array}{ccc}
 A_k & \xrightarrow{d_k^A} & A_{k+1} \\
 f_k \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f_{k+1} \\
 B_k & \xrightarrow{d_k^B} & B_{k+1}
 \end{array}$$

**Lema 2.1.2** Dada una aplicación de cocadenas  $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ . Para cada valor de  $k \in \mathbb{Z}$ , la aplicación

$$\begin{aligned}
 f^* \equiv H^k(f) : H^k(A_\bullet) &\longrightarrow H^k(B_\bullet) \\
 [a] &\longmapsto [f_k(a)]
 \end{aligned}$$

es un homomorfismo de módulos.

*Demostración.* Notemos que  $H^k(f)$  es un homomorfismo de módulos por serlo cada  $f_k$ . La demostración se reduce a probar que dicha aplicación está bien definida en el nivel cohomológico.

Sea  $[a] \in H^k(A_\bullet)$ , es decir,  $a$  es un elemento cerrado de  $A_k$ . En otras palabras,  $d_k^A(a) = 0$ . Si calculamos  $d_k^B(f_k^A(a))$ , por definición de aplicación de cocadenas, tenemos que:

$$d_k^B(f_k^A(a)) = (d_k^B \circ f_k^A)(a) = (f_{k+1} \circ d_k^A)(a) = f_{k+1}(d_k^A(a)) = f_{k+1}(0) = 0,$$

es decir,  $f_k(a)$  es un elemento cerrado de  $B_k$  y tiene sentido tomar su clase en  $H^k(B_\bullet)$ .

Veamos que la aplicación  $H^k(f)$  no depende del representante elegido. Tomemos dos elementos  $a_1, a_2$  cerrados de  $A_k$  que definan el mismo elemento en el cociente  $H^k(A_\bullet)$ . En tal caso,  $a_1 - a_2 \in \text{Im}(d_{k-1}^A)$ . Luego, existe un elemento  $x \in A_{k-1}$  tal que  $a_1 - a_2 = d_{k-1}^A(x)$ . Aplicando  $f_k$  a esta igualdad, tenemos:

$$f_k(a_1) - f_k(a_2) = f_k(a_1 - a_2) = (f_k \circ d_{k-1}^A)(x) = (d_{k-1}^B \circ f_{k-1})(x) = d_{k-1}^B(f_{k-1}(x)).$$

Por lo tanto,  $f_k(a_1) - f_k(a_2)$  pertenece a  $\text{Im}(d_{k-1}^B)$  y se da la igualdad  $[f_k(a_1)] = [f_k(a_2)]$ . ■

**Definición 2.1.3** *Dados tres complejos de cocadenas  $A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet$  y dos aplicaciones de cocadenas  $f : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  y  $g : B_\bullet \rightarrow C_\bullet$ . Diremos que la sucesión*

$$0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \longrightarrow 0$$

*es una sucesión exacta corta de cocadenas si, para cada valor de  $k$ ,*

$$0 \longrightarrow A_k \xrightarrow{f_k} B_k \xrightarrow{g_k} C_k \longrightarrow 0$$

*es una sucesión exacta corta (de módulos).*

**Lema 2.1.4** *Sea  $0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \longrightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Entonces, para cada valor de  $k$ , la sucesión*

$$H^k(A_\bullet) \xrightarrow{f^*} H^k(B_\bullet) \xrightarrow{g^*} H^k(C_\bullet)$$

*es exacta.*

*Demostración.*

Por ser  $0 \longrightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \longrightarrow 0$  exacta, tenemos que  $\text{Im}(f_k) = \ker(g_k)$  para todo  $k$ . Si tomamos  $[a] \in H^k(A_\bullet)$ , se verifica

$$(g^* \circ f^*)([a]) = g^*([f_k(a)]) = [g_k(f_k(a))] = 0.$$

Por lo tanto,  $\text{Im}(f^*) \subset \ker(g^*)$ .

Sea ahora  $[b] \in \ker(g^*) \subset H^k(B_\bullet)$ . En tal caso,  $g^*([b]) = [g_k(b)] = 0$ , es decir,  $g_k(b)$  es un elemento de la imagen de  $d_{k-1}^C$ . Por lo tanto, existe un  $c \in C_{k-1}$  tal que  $g_k(b) = d_{k-1}^C(c)$ . Por ser  $g_{k-1}$  sobreyectiva, sabemos de la existencia de algún  $b_1 \in B_{k-1}$  satisfaciendo  $c = g_{k-1}(b_1)$ .

Entonces

$$\begin{aligned} g_k(b - d_{k-1}^B(b_1)) &= g_k(b) - (g_k \circ d_{k-1}^B)(b_1) \\ &= d_{k-1}^C(c) - (d_{k-1}^C \circ g_{k-1})(b_1) \\ &= d_{k-1}^C(c) - d_{k-1}^C(c) \\ &= 0, \end{aligned}$$

esto es,  $(b - d_{k-1}^B(b_1)) \in \ker(g_k) = \text{Im}(f_k)$ . Así, existe  $a \in A_k$  tal que  $f_k(a) = b - d_{k-1}^B(b_1)$ . Veamos que este  $a$  es cerrado, es decir, que  $d_k^A(a) = 0$ . Para ello, basta considerar que

$$(f_{k+1} \circ d_k^A)(a) = d_k^B(f_k(a)) = d_k^B(b - d_{k-1}^B(b_1)) = d_k^B(b) - (d_k^B \circ d_{k-1}^B)(b_1) = 0.$$



Notemos que la última igualdad es inmediata, teniendo en cuenta que  $b$  es un elemento  $k$ -cerrado y que  $(d_k^B \circ d_{k-1}^B) = 0$  por definición de complejo de cocadenas. De la inyectividad de  $f_k$  se sigue que  $d_k^A(a) = 0$ .

Luego, hemos encontrado un elemento  $[a] \in H^k(A_\bullet)$  satisfaciendo

$$f^*[a] = [f_k(a)] = [b - d_{k-1}^B(b_1)] = [b].$$

Lo que nos lleva a que  $\ker(g^*) = \text{Im}(f^*)$  y, por lo tanto, a que la sucesión

$$H^k(A_\bullet) \xrightarrow{f^*} H^k(B_\bullet) \xrightarrow{g^*} H^k(C_\bullet)$$

es exacta. ■

**Definición 2.1.5** Dada una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas  $0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \rightarrow 0$ , podemos definir un homomorfismo

$$\partial^* : H^k(C_\bullet) \rightarrow H^{k+1}(A_\bullet)$$

del siguiente modo:  $\partial^*([c]) := [f_{k+1}^{-1}(d_k^B((g_k^{-1})(c)))]$ .

A continuación, veremos que esta aplicación está bien definida. Para ello, nos apoyaremos en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A_{k-1} & \xrightarrow{f_{k-1}} & B_{k-1} & \xrightarrow{g_{k-1}} & C_{k-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_{k-1}^A & & \downarrow d_{k-1}^B & & \downarrow d_{k-1}^C \\
 0 & \longrightarrow & A_k & \xrightarrow{f_k} & B_k & \xrightarrow{g_k} & C_k \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow d_k^A & & \downarrow d_k^B & & \downarrow d_k^C \\
 0 & \longrightarrow & A_{k+1} & \xrightarrow{f_{k+1}} & B_{k+1} & \xrightarrow{g_{k+1}} & C_{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

En primer lugar, dado  $[c] \in H^k(C_\bullet)$ , en virtud de la sobreyectividad de cada  $g_k$ , sabemos que existe algún  $b \in B_k$  tal que  $g_k(b) = c$ . En tal caso, se satisface

$$g_{k+1}(d_k^B(b)) = d_k^C(d_k(b)) = d_k^C(c) = 0,$$

es decir,  $d_k^B(b) \in \ker(g_{k+1}) = \text{Im}(f_{k+1})$ . Por lo tanto, existe algún  $a \in A_{k+1}$  cumpliendo  $f_{k+1}(a) = d_k^B(b)$ .

Veamos que este  $a$  es un elemento cerrado. Para ello, basta considerar que

$$(f_{k+2} \circ d_{k+1}^A)(a) = (d_{k+1}^B \circ f_{k+1})(a) = d_{k+1}^B(d_k^B(b)) = 0.$$

De la inyectividad de  $f_{k+2}$ , tenemos que  $d_{k+1}^A(a) = 0$ . Por lo tanto, para cada  $[c] \in H^k(C_\bullet)$ , podemos encontrar un  $\partial^*([c]) = [a] \in H^{k+1}(A_\bullet)$ .

Ahora, veamos que  $\partial^*$  está bien definida. Para ello, consideremos dos elementos  $b_1 \neq b_2 \in g_k^{-1}\{c\}$ . El razonamiento utilizado anteriormente nos lleva a la existencia de elementos  $a_1, a_2 \in A_{k+1}$  tales que  $f_{k+1}(a_i) = d_k^B(b_i)$ , con  $i = 1, 2$ . Queremos ver que éstos representan la misma clase en  $H^{k+1}(A_\bullet)$ . Razonamos del siguiente modo:

$$g_k(b_1 - b_2) = g_k(b_1) - g_k(b_2) = c - c = 0,$$

luego,  $(b_1 - b_2) \in \ker(g_k) = \text{Im}(f_k)$ . Así, existe  $a \in A_k$  tal que  $b_1 - b_2 = f_k(a)$ . Componiendo con  $d_k^B$ , tenemos:

$$d_k^B(b_1) - d_k^B(b_2) = d_k^B(b_1 - b_2) = d_k^B(f_k(a)) = f_{k+1}(d_k^A(a)).$$

Si sustituimos  $d_k^B(b_i)$  por  $f_{k+1}(a_i)$ , tenemos

$$f_{k+1}(a_1) - f_{k+1}(a_2) = f_{k+1}(d_k^A(a))$$

y, en virtud de la inyectividad de  $f_{k+1}$ , tenemos que  $a_1 - a_2 = d_k^A(a)$ , es decir,  $[a_1] = [a_2]$  en  $H^{k+1}(A_\bullet)$ .

**Lema 2.1.6** Si  $0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Entonces, la sucesión  $H^k(B_\bullet) \xrightarrow{g^*} H^k(C_\bullet) \xrightarrow{\partial^*} H^{k+1}(A_\bullet)$  es exacta.

*Demostración.* Debemos probar que  $\text{Im}(g^*) = \ker(\partial^*)$ .

$\square$  Sea  $[b] \in H^k(B_\bullet)$  y consideremos el elemento  $g^*([b]) \in \text{Im}(g^*)$ . Veamos que  $\partial^*(g^*([b])) = 0$ . En efecto, por ser  $b$  un elemento  $k$ -cerrado y  $f_{k+1}$  inyectiva, tenemos que

$$\partial^*(g^*([b])) = \partial^*([g_k(b)]) = [f_{k+1}^{-1}(d_k^B(b))] = [f_{k+1}^{-1}(0)] = 0.$$

⊇ Tomemos  $[c] \in \ker(\partial^*)$ , es decir,  $f_{k+1}^{-1}(d_k^B((g_k^{-1})(c)))$  es un elemento  $k$ -exacto. Lo que es lo mismo: existe un  $a \in A_k$  que verifica que

$$f_{k+1}^{-1}(d_k^B((g_k^{-1})(c))) = d_k^A(a).$$

Si elegimos un  $b \in B_k$  tal que  $g_k(b) = c$ , se tiene que  $d_k^B(b) = f_{k+1}(d_k^A(a)) = d_k^B(f_k(a))$ , de donde deducimos que el elemento  $b - f_k(a)$  es un  $k$ -cerrado de  $B_k$  que satisface  $g^*([b - f_k(a)]) = [g_k(b) - g_k(f_k(a))] = [g_k(b)] = [c]$ . Luego,  $[c] \in \text{Im}(g^*)$ . ■

**Lema 2.1.7** Si  $0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Entonces, la sucesión  $H^k(C_\bullet) \xrightarrow{\partial^*} H^{k+1}(A_\bullet) \xrightarrow{f^*} H^{k+1}(B_\bullet)$  es exacta.

*Demostración.* De nuevo, debemos probar que  $\text{Im}(\partial^*) = \ker(f^*)$ .

⊆ Consideremos un elemento de  $\text{Im}(\partial^*)$ , pongamos  $\partial^*([c])$ , para algún  $[c] \in H^k(C_\bullet)$ . Por la definición de  $\partial^*$  y la suprayectividad de  $g_k$ , tenemos que  $\partial^*([c]) = [f_{k+1}^{-1}(d_k^B(b))]$ , para algún elemento  $b \in B_k$ , tal que  $g_k(b) = c$ .

Si componemos con  $f^*$ , tenemos que

$$f^*(\partial^*([c])) = f^*[f_{k+1}^{-1}(d_k^B(b))] := [f_{k+1}(f_{k+1}^{-1}(d_k^B(b)))] = [d_k^B(b)] = 0, \text{ en } H^{k+1}(B_\bullet).$$

Por lo tanto, cada elemento de  $\text{Im}(\partial^*)$  es del núcleo de  $f^*$ .

⊇ Recíprocamente, consideremos un elemento  $[a] \in \ker(f^*)$ . Equivalentemente,  $f_{k+1}(a) = d_k^B(b)$ , para algún  $b \in B_k$ . Si consideramos la siguiente cadena de igualdades:

$$(d_k^C \circ g_k)(b) = (g_{k+1} \circ d_k^B)(b) = g_{k+1}(f_{k+1}(a)) = 0,$$

tenemos que el elemento  $g_k(b)$  es  $k$ -cerrado y podemos considerar su clase en  $H^k(C_\bullet)$ . Si aplicamos  $\partial^*$  a dicho elemento, obtenemos:

$$\partial^*([g_k(b)]) = [f_{k+1}^{-1}(d_k^B(g_k^{-1}(g_k(b))))] = [a]$$

y, por lo tanto,  $[a]$  es un elemento de la imagen de  $\partial^*$ .



El siguiente resultado es consecuencia directa de los lemas anteriores y resultará clave en los capítulos posteriores.

**Teorema 2.1.8** *Si  $0 \rightarrow A_\bullet \xrightarrow{f} B_\bullet \xrightarrow{g} C_\bullet \rightarrow 0$  es una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas. Entonces, la sucesión de cohomologías*

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & H^k(A_\bullet) & \xrightarrow{f^*} & H^k(B_\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^k(C_\bullet) & \xrightarrow{\partial^*} & \\ & & \xrightarrow{\partial^*} & H^{k+1}(A_\bullet) & \xrightarrow{f^*} & H^{k+1}(B_\bullet) & \xrightarrow{g^*} & H^{k+1}(C_\bullet) & \xrightarrow{\partial^*} \\ & & \xrightarrow{\partial^*} & H^{k+2}(A_\bullet) & \xrightarrow{f^*} & \dots & & & \end{array}$$

es exacta.

## 2.2. Algunos resultados interesantes

Este apartado es un compendio de resultados necesarios para el correcto desarrollo del trabajo. Quizá, el lector no imagina (todavía) cómo conectarlos. Siga leyendo, prometo que todo cobrará sentido.

**Definición 2.2.1** *Dadas dos aplicaciones de cocadenas  $f, g : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$ , diremos que son **homotópicas** (como aplicaciones de cocadenas) si existen homomorfismos  $s_k : A_k \rightarrow B_{k-1}$  satisfaciendo:*

$$d_{k-1}^B \circ s_k + s_{k+1} \circ d_k^A = f_k - g_k : A_k \rightarrow B_k,$$

para todo valor de  $k$ . En otras palabras:

$$d^B \circ s + s \circ d^A = f - g : A \rightarrow B,$$

Llamaremos **homotopía de cocadenas** (entre  $f$  y  $g$ ) a toda familia  $s = \{s_k : k \in \mathbb{Z}\}$  de homomorfismos de módulos, satisfaciendo la condición anterior.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{k-1} & \longrightarrow & A_k & \longrightarrow & A_{k+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \swarrow s_k & \downarrow f_k - g_k & \swarrow s_{k+1} & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & B_{k-1} & \longrightarrow & B_k & \longrightarrow & B_{k+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

**Observación 2.2.2** *No debemos confundir este concepto con el de **homotopía** entre aplicaciones diferenciables de la definición 3.2, aunque más adelante veremos que estos dos términos están estrechamente relacionados. Concretamente, en la prueba de la proposición 3.2.5 se pone de manifiesto dicha relación.*

**Proposición 2.2.3** *Dadas dos aplicaciones de cocadenas  $f, g : A_\bullet \rightarrow B_\bullet$  homotópicas. Para cada valor de  $k$ , las aplicaciones  $f^* \equiv H^k(f)$  y  $g^* \equiv H^k(g)$ , definidas sobre los módulos de cohomología, coinciden.*

*Demostración.* Basta considerar un elemento  $[a] \in H^k(A_\bullet)$  y calcular

$$(f^* - g^*)([a]) = [f_k(a) - g_k(a)] = [d_{k-1}^B(s_k(a)) + s_{k+1}(d_k(a))] = [d_{k-1}^B(s_k(a))] + [s_{k+1}(d_k(a))],$$

donde  $s$  es una homotopía de cocadenas entre  $f$  y  $g$ .

Por ser  $[a]$  un elemento de  $H^k(A_\bullet)$ , tenemos que  $d_k(a) = 0$ . Además,  $d_{k-1}^B(s_k(a))$  es un elemento  $k$ -exacto y, por lo tanto, su clase en  $H^k(B_\bullet)$  es el cero. Teniendo en cuenta estas observaciones, se sigue que  $(f^* - g^*)([a]) = 0$ , es decir,  $f^*([a]) = g^*([a])$ . ■

**Proposición 2.2.4** *Dados dos complejos de cocadenas  $A_\bullet, B_\bullet$ , se verifica*

$$H^k(A_\bullet \oplus B_\bullet) = H^k(A_\bullet) \oplus H^k(B_\bullet).$$

*Demostración.* Si consideramos el complejo de cocadenas  $A_\bullet \oplus B_\bullet = \{A_i \oplus B_i, d_i^{A \oplus B}\}_{i \in \mathbb{Z}}$ , donde  $d_i^{A \oplus B} = (d_i^A, d_i^B)$ . Se satisface

$$\ker(d_k^{A \oplus B}) = \ker(d_k^A) \oplus \ker(d_k^B) \quad \text{e} \quad \text{Im}(d_{k-1}^{A \oplus B}) = \text{Im}(d_{k-1}^A) \oplus \text{Im}(d_{k-1}^B).$$

Por lo tanto,

$$H^k(A_\bullet \oplus B_\bullet) = \frac{\ker(d_k^{A \oplus B})}{\text{Im}(d_{k-1}^{A \oplus B})} \cong \frac{\ker(d_k^A)}{\text{Im}(d_{k-1}^A)} \oplus \frac{\ker(d_k^B)}{\text{Im}(d_{k-1}^B)} = H^k(A_\bullet) \oplus H^k(B_\bullet). \quad \blacksquare$$

**Definición 2.2.5** *Diremos que una sucesión exacta corta de módulos  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  es **escindida** (o **escinde**) si  $B \cong A \oplus C$  y las aplicaciones  $f$  y  $g$  son la inclusión y proyección canónicas, respectivamente.*

El siguiente resultado caracteriza las sucesiones escindidas.

**Lema 2.2.6 (Lema de escisión.)** *Dada un sucesión exacta corta de módulos*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0.$$

*Son equivalentes:*

(i) *La sucesión escinde.*

(ii) *Existe un homomorfismo de módulos  $f' : B \longrightarrow A$  tal que la composición  $f' \circ f$  es la identidad en  $A$ .*

(iii) *Existe un homomorfismo de módulos  $g' : C \longrightarrow B$  tal que la composición  $g \circ g'$  es la identidad en  $C$ .*

*Demostración.*

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii), (iii)}$  Basta tomar los homomorfismos de módulos siguientes:

$$\begin{array}{ccc} f' : B \cong A \oplus C & \longrightarrow & A \\ (a, c) & \longmapsto & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g' : C & \longrightarrow & B \cong A \oplus C \\ c & \longmapsto & (0, c) \end{array}$$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$  Dado  $b \in B$ , podemos escribirlo como  $b = ff'(b) + b - ff'(b)$ . Notemos que  $b - ff'(b)$  es un elemento en  $\ker(f')$ , ya que

$$f'(b - ff'(b)) = f'(b) - (f'f)(f(b)) = f(b) - f(b) = 0.$$

Se sigue que  $B = \text{Im}(f) + \ker(f')$ . Veamos que esta suma es directa. Para ello, consideremos un elemento  $b$  en la intersección de  $\text{Im}(f)$  y  $\ker(f')$ . Debe existir un  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ , satisfaciendo

$$0 = f'(b) = f'(f(a)) = (f'f)(a) = a$$

y, por lo tanto,  $b = 0$  y  $B$  se descompone como suma directa  $B = \text{Im}(f) \oplus \ker(f')$ .

A continuación veremos que estos sumandos directos son isomorfos a  $C$  y  $A$ , respectivamente. En primer lugar, por ser  $g$  suprayectiva, dado  $c \in C$  podemos expresarlo como

$$c = g(b) = g(f(a) + k) = g(k), \text{ para cierto } k \in \ker(f'),$$

esto es,  $C = g(\ker(f'))$ . Además, si  $k$  es un elemento de  $\ker(f')$  tal que  $g(k) = 0$ , tenemos que

$$k \in \ker(f') \cap \ker(g) = \ker(f') \cap \text{Im}(f) = 0,$$

de donde se deduce que  $g$  es un isomorfismo entre  $\ker(f')$  y  $C$ .

Por otra parte, por ser  $f$  inyectiva, tenemos que  $A \cong \text{Im}(f)$ . Por lo tanto:

$$B = \text{Im}(f) \oplus \ker(f') \cong A \oplus C.$$

(iii)  $\Rightarrow$  (i) De forma análoga, se prueba que  $B = \ker(g) \oplus \text{Im}(g')$ . De la inyectividad de  $f$ , tenemos que  $A \cong \text{Im}(f) = \ker(g)$ . Por otra parte, puesto que  $g \circ g' = id_C$  es un isomorfismo,  $g'$  ha de ser inyectiva. Se concluye que  $C \cong \text{Im}(g')$  y, por lo tanto,  $B = A \oplus C$ .

■

**Lema 2.2.7 (Lema de los cinco.)** Sea

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{a} & A_2 & \xrightarrow{b} & A_3 & \xrightarrow{c} & A_4 & \xrightarrow{d} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{e} & B_2 & \xrightarrow{g} & B_3 & \xrightarrow{h} & B_4 & \xrightarrow{i} & B_5 \end{array}$$

un diagrama conmutativo en el que las filas son sucesiones exactas de módulos. Si las aplicaciones  $f_1, f_2, f_3, f_4$  son isomorfismos, entonces  $f_3$  también lo es.

*Demostración.* La biyectividad de  $f_3$  se prueba por caza de diagramas:

- Veamos que  $f_3$  es inyectiva. Para ello, tomemos un elemento  $x \in A_3$  tal que  $f_3(x) = 0$  y veamos que  $x$  es necesariamente 0. Por ser  $f_4$  un isomorfismo y el diagrama conmutativo, se sigue que  $c(x) = 0$ . Así,  $x \in \ker(c) = \text{Im}(b)$ ; es decir,  $x = b(y)$  para cierto  $y \in A_2$ . Si calculamos

$$g(f_2(y)) = f_3(b(y)) = f_3(x) = 0,$$

se tiene que  $f_2(y) \in \ker(g) = \text{Im}(e)$ . Por lo tanto, podemos escribir  $f_2(y) = e(z)$ , para cierto  $z \in B_1$ .

Por ser  $f_1$  un isomorfismo de módulos, existe un único  $u \in A_1$  verificando  $f_1(u) = z$ . Este  $u$  satisface:

$$f_2(a(u)) = e(f_1(u)) = e(z) = f_2(y)$$

y, por ser  $f_2$  un isomorfismo tenemos que  $y = a(u)$ . Por lo tanto

$$x = b(y) = b(a(u)) = 0,$$

por la exactitud de la primera sucesión.

- Falta probar que  $f_3$  es también suprayectiva. Para ello, tomemos un elemento  $x \in B_3$ . Veamos que  $x$  es imagen por  $f_3$  de algún elemento de  $A_3$ .

En primer lugar, de la exactitud de la segunda sucesión, tenemos que  $i(h(x)) = 0$ . Por otra parte, consideremos el único  $y$  de  $A_4$  que satisface  $f_4(y) = h(x)$ . En tal caso,

$$f_5(d(y)) = i(f_4(y)) = i(h(x)) = 0,$$

de donde se sigue que  $d(y) = 0$ . Por lo tanto,  $y \in \ker(d) = \text{Im}(c)$  y podemos escribir  $y = c(z)$  para algún  $z \in A_3$ . Para este  $z$  se cumple que

$$h(f_3(z)) = f_4(c(z)) = f_4(y) = h(x).$$

En otras palabras,  $(f_3(z) - x) \in \ker(h) = \text{Im}(g)$ . Escribamos  $f_3(z) - x = g(u)$  con  $u \in B_2$  y consideremos el único  $v \in A_2$  que satisface  $f_2(v) = u$ . En estas condiciones

$$f_3(b(v)) = g(f_2(v)) = g(u) = f_3(z) - x,$$

de donde obtenemos que  $x$  es la imagen de  $z - b(v)$  por  $f_3$ .

■



## Capítulo 3

# Cohomología de De Rham

Para la redacción de las primeras secciones de este capítulo, nos hemos basado en resultados que pueden encontrarse en [6]. Concretamente en los capítulos III y V. Además, hemos hecho uso de los capítulos XXIII y XXV de la séptima parte de [8], así como del capítulo XI de [7].

Por otra parte, 3.3 utiliza resultados de las secciones §3 y §4 del tercer capítulo de [3] y del apartado §15 del capítulo III de [9].

En capítulos anteriores, vimos que la derivada exterior es un operador  $d : \Omega^\bullet \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}$ , con la propiedad de que  $d \circ d = 0$ . Por lo que, dada una variedad diferenciable  $M$ , la sucesión

$$\dots \xrightarrow{d} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \dots$$

es un complejo de cocadenas de  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales. En esta situación, tiene sentido estudiar sus **espacios vectoriales** de cohomología. En este caso particular, en el que los espacios vectoriales que intervienen son los espacios de  $k$ -formas de la variedad  $M$ , los llamaremos **espacios vectoriales de cohomología de De Rham de  $M$** .

**Definición 3.0.1** *Dada una variedad  $M$ , definimos su  $k$ -ésimo espacio vectorial de cohomología de De Rham como el cociente*

$$H^k(M) = \frac{\ker(d : \Omega^k \longrightarrow \Omega^{k+1})}{\operatorname{Im}(d : \Omega^{k-1} \longrightarrow \Omega^k)}.$$

**Definición 3.0.2** Sea  $M$  una variedad diferenciable y  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Diremos que una  $k$ -forma  $\omega$  es **cerrada** si  $d\omega = 0$ . Por otra parte, diremos que  $\omega$  es **exacta** si existe  $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$  que satisface  $d\eta = \omega$ .

Observemos que toda forma exacta es cerrada. Basta considerar una forma exacta  $\omega$  y escribir  $d\omega = d(d\eta) = 0$ , ya que  $d^2 = 0$ . Con esta notación, tenemos que

$$H^k(M) = \frac{\{k\text{-formas cerradas sobre } M\}}{\{k\text{-formas exactas sobre } M\}}.$$

Por lo tanto, los elementos de  $H^k(M)$  son de la forma

$$[\omega] = \{\omega + d\eta, \eta \in \Omega^{k-1}(M)\},$$

donde  $\omega$  es una  $k$ -forma cerrada.

Estos espacios, o mejor dicho, sus dimensiones, nos ayudarán a “medir” cuántas  $k$ -formas cerradas no son exactas sobre una variedad diferenciable dada. Más adelante veremos cómo podemos clasificar variedades utilizando estos espacios.

**Observación 3.0.3** Para valores de  $k$  mayores que  $n = \dim(M)$ ,  $\Omega^k(M) = 0$  y, por lo tanto,  $H^k(M) = 0$ . Por otra parte,  $\Omega^{-1}(M) = 0$ , de donde se deduce que  $H^0(M) = \{f \in C^\infty(M) : df = 0\}$ .

En capítulos anteriores, vimos que el pullback de una aplicación diferenciable entre variedades nos permite relacionar sus respectivos espacios de formas. Parece natural pensar que tomando clases módulo formas exactas, podemos establecer aplicaciones entre los espacios de cohomología de De Rham. El siguiente resultado formaliza esta idea.

**Proposición 3.0.4** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables y  $f : M \rightarrow N$  una aplicación diferenciable entre ellas. Entonces la aplicación **pullback** de  $f$  define una aplicación entre los espacios de cohomología de De Rham  $H^k(f) : H^k(N) \rightarrow H^k(M)$ , dada por  $H^k(f)([\omega]) = [f^*\omega]$ . Generalmente, escribiremos  $f^*$  para referirnos a esta aplicación.

*Demostración.* Basta ver que  $f^*$  lleva  $k$ -formas cerradas (exactas) sobre  $N$  en  $k$ -formas cerradas (exactas) sobre  $M$ . Esto es inmediato, teniendo en cuenta que el pullback de una aplicación conmuta con la derivada exterior. Tomemos  $\omega \in \Omega^k(N)$  cerrada, es decir,  $d\omega = 0$ . En tal caso, se satisface

$$d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = f^*0 = 0,$$

es decir,  $f^*\omega$  también es cerrada.

Por otra parte, si consideramos una  $k$ -forma exacta sobre  $N$ , pongamos  $\eta$ , y sea  $\mu$  una  $(k-1)$ -forma satisfaciendo  $\eta = d\mu$ , se verifica que  $f^*\eta = d(f^*\mu)$ , donde  $f^*\mu$  es una  $(k-1)$ -forma sobre  $M$ . ■

De nuevo, haciendo uso de la conmutatividad entre la derivada exterior y el pullback de aplicaciones diferenciables entre variedades, basta tomar clases módulo formas exactas en las propiedades de la observación 1.5.4 para probar los siguientes resultados.

**Proposición 3.0.5** *Dadas tres variedades diferenciables  $M, M', M''$  y aplicaciones diferenciables  $f : M \rightarrow M', g : M' \rightarrow M''$ . Entonces  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : H^k(M'') \rightarrow H^k(M)$ .*

**Proposición 3.0.6** *Sea  $M$  una variedad diferenciable y denotemos por  $id_M$  la aplicación identidad sobre  $M$ . Entonces  $(id_M)^* = id_{H^k(M)}$ .*

**Corolario 3.0.7** *Los espacios de cohomología de De Rham son invariantes por difeomorfismos.*

*Demostración.* Sean  $M, N$  dos variedades difeomorfas y tomemos un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  entre ellas. Por ser  $f$  un difeomorfismo, podemos considerar su inversa  $f^{-1}$ , que también es diferenciable. Por las proposiciones anteriores, tenemos que:

$$\begin{aligned} (f^{-1})^* \circ f^* &= (f \circ f^{-1})^* = (id_M)^* = id_{H^k(M)} \quad \text{y} \\ f^* \circ (f^{-1})^* &= (f^{-1} \circ f)^* = (id_N)^* = id_{H^k(N)}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $f^*$  y  $(f^{-1})^*$  son isomorfismos inversos el uno del otro. ■

Este resultado, nos permitirá clasificar variedades en el sentido de que si somos capaces de encontrar un valor de  $k$  satisfaciendo que  $H^k(M)$  y  $H^k(N)$  no son isomorfos, podremos asegurar que las variedades  $M$  y  $N$  no son difeomorfas. En secciones posteriores veremos resultados de clasificación más potentes, así como herramientas para calcular los espacios de cohomología de De Rham.

De los resultados anteriores, se deduce también el comportamiento funtorial del operador  $H^k(\cdot)$ .

**Corolario 3.0.8** *El operador  $H^k(\cdot)$  es un funtor contravariante entre las categorías  $\mathbf{Man}$  (categoría de variedades diferenciables) y  $\mathbb{R}\text{-Mod}$  (categoría de  $\mathbb{R}$ -espacios*

vectoriales).

Del mismo modo que hemos definido el pullback de una aplicación sobre los espacios de cohomología de De Rham, el producto exterior de formas diferenciales puede extenderse de forma natural al nivel cohomológico del siguiente modo:

**Proposición 3.0.9** *Dada una variedad diferenciable  $M$ . La aplicación  $\wedge : H^k(M) \times H^l(M) \longrightarrow H^{k+l}(M)$ , dada por*

$$[\omega] \wedge [\eta] = [\omega \wedge \eta]$$

*es una aplicación bilineal bien definida sobre los espacios de cohomología de De Rham.*

*Demostración.* Veamos, en primer lugar, que la imagen por  $\wedge(\cdot, \cdot)$  no depende del representante elegido en cualquiera de los dos argumentos. Para ello, consideremos  $k$ -formas cerradas  $\omega, \omega'$  satisfaciendo  $\omega' - \omega = d\alpha$ , para alguna  $(k-1)$ -forma y  $l$ -formas cerradas  $\eta, \eta'$  tales que  $\eta' - \eta = d\beta$ , con  $\beta \in \Omega^{l-1}(M)$ . En tal caso, tenemos que

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \eta) &= d\alpha \wedge \eta + (-1)^l \alpha \wedge d\eta = d\alpha \wedge \eta \quad \text{y} \\ d(\omega \wedge \beta) &= d\omega \wedge \beta + (-1)^k \omega \wedge d\beta = (-1)^k \omega \wedge d\beta, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} \omega' \wedge \eta' &= (\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) \\ &= \omega \wedge \eta + \omega \wedge d\beta + d\alpha \wedge \eta + d\alpha \wedge d\beta \\ &= \omega \wedge \eta + (-1)^k d(\omega \wedge \beta) + d(\alpha \wedge \eta) + d(\alpha \wedge d\beta) \\ &= \omega \wedge \eta + d((-1)^k \omega \wedge \beta + \alpha \wedge \eta + \alpha \wedge d\beta), \end{aligned}$$

donde  $(-1)^k \omega \wedge \beta + \alpha \wedge \eta + \alpha \wedge d\beta$  es una  $(k+l-1)$ -forma sobre  $M$ . Por lo tanto, tomando clases en  $H^{k+l}(M)$ , tenemos que  $[\omega' \wedge \eta'] = [\omega \wedge \eta]$ .

La bilinealidad es consecuencia directa de las propiedades del producto exterior de formas diferenciables y la estructura de espacio cociente. ■

### 3.1. La sucesión de Mayer-Vietoris

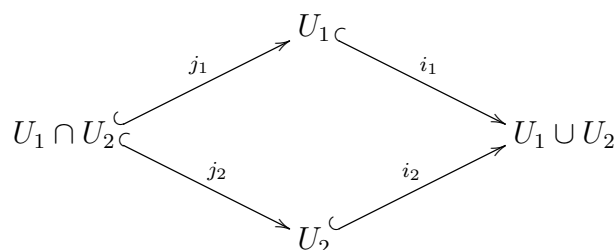
El objetivo de esta sección es dar herramientas operativas para el cálculo de los espacios vectoriales de cohomología de De Rham de variedades. La estrategia

en la que se basan estos resultados es la de “divide y vencerás”, es decir, dada una variedad diferenciable  $M$ , buscaremos abiertos  $U_1, U_2$  de  $M$  que verifiquen:

- $M = U_1 \cup U_2$
- $H^k(U_i)$  sean “fáciles” de calcular.

A partir de los espacios de cohomología  $H^k(U_i)$ , seremos capaces de calcular  $H^k(M)$ .

**Teorema 3.1.1** *Dados dos abiertos  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $U = U_1 \cup U_2$ . Consideremos las siguientes inclusiones:*



Para cada valor de  $k$ , la sucesión  $0 \rightarrow \Omega^k(U) \xrightarrow{I^k} \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{J^k} \Omega^k(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0$  es exacta, donde  $I^k(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$  y  $J^k(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$ .

*Demostración.* En general, dados dos abiertos  $V, W$ , una aplicación diferenciable  $\phi : V \rightarrow W$  y  $\omega \in \Omega^k(W)$ . Si escribimos  $\omega$  en coordenadas, adquiere la forma

$$\omega = \sum f_{l_1 \dots l_k} dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k}.$$

Si calculamos el pullback de  $\omega$  por  $\phi$ , obtenemos la  $k$ -forma de  $V$  dada por

$$\phi^*(\omega) = \sum (f_{l_1 \dots l_k} \circ \phi) d\phi^{l_1} \wedge \dots \wedge d\phi^{l_k}.$$

En el caso particular de que la aplicación  $\phi$  sea una inclusión de abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , tenemos  $\phi^l(x) = x^l$  y, por lo tanto,  $i_\alpha^*(\omega) = \sum (f_{l_1 \dots l_k} \circ i_\alpha) dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k}$ , con  $\alpha = 1, 2$ .

Veamos que  $I^k$  es inyectiva. Para ello, supongamos que  $I^k(\omega) = (0, 0)$  para cierta  $\omega \in \Omega^k(U)$ . Si escribimos  $\omega = \sum f_L dx^L$ , donde  $L$  es un multi-índice  $L = (l_1, \dots, l_k)$ , con  $1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq n$  y  $dx^L = dx^{l_1} \wedge \dots \wedge dx^{l_k}$ . Debe satisfacerse  $i_1^*(\omega) = i_2^*(\omega) = 0$ , es decir,  $f_L \circ i_1 = f_L \circ i_2 = 0$ . Basta tener en cuenta que



- $\text{sop}(\rho_\alpha) \subseteq U_\alpha$ , con  $\alpha = 1, 2$ .
- $\rho_1(x) + \rho_2(x) = 1$ , para cada  $x \in U$ .

En tal caso, dado que  $\text{sop}(\rho_i) \cap U_j \subset U_1 \cap U_2$  con  $i, j = 1, 2$ ,  $i \neq j$ , podemos definir nuevas aplicaciones diferenciables  $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $\alpha = 1, 2$ , definidas del siguiente modo:

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x)\rho_2(x) & \text{si } x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & \text{si } x \in U_1 \setminus \text{sop}(\rho_2) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(x)\rho_1(x) & \text{si } x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & \text{si } x \in U_2 \setminus \text{sop}(\rho_1) \end{cases}$$

En esta situación, dado  $x \in U_1 \cap U_2$ , se verifica

$$f(x) = f(x)(\rho_1(x) + \rho_2(x)) = (f_1 - f_2)(x).$$

En otras palabras, podemos encontrar funciones  $f_1, f_2$  tales que su diferencia  $f_1 - f_2$  extiende la función dada.

Consideremos ahora una  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(U_1 \cap U_2)$ . Si escribimos  $\omega$  en coordenadas, adquiere la forma

$$\omega = \sum f_L dx^L,$$

con  $f_L : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Por lo anterior, podemos encontrar funciones  $f_{L,\alpha} : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\alpha = 1, 2$ , verificando:

$$f_L = f_{L,1} - f_{L,2}.$$

Basta considerar las  $k$ -formas dadas por

$$\omega_\alpha = \sum f_{L,\alpha} dx^L \in \Omega^k(U_\alpha); \quad \alpha = 1, 2,$$

que satisfacen:

$$J^k(\omega_1, \omega_2) = \omega,$$

es decir, la aplicación  $J^k$  es sobreyectiva y la sucesión es exacta. ■

**Observación 3.1.2** Para cada valor de  $k$ , los siguientes cuadrados son conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^k(U) & \xrightarrow{I^k} & \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) & \xrightarrow{J^k} & \Omega^k(U_1 \cap U_2) \\
 \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 \Omega^{k+1}(U) & \xrightarrow{I^{k+1}} & \Omega^{k+1}(U_1) \oplus \Omega^{k+1}(U_2) & \xrightarrow{J^{k+1}} & \Omega^{k+1}(U_1 \cap U_2),
 \end{array}$$

donde  $d$  representa la derivada exterior sobre el espacio de  $k$ -formas en cuestión.

En otras palabras, las familias  $I = \{I^k : k \in \mathbb{N}\}$  y  $J = \{J^k : k \in \mathbb{N}\}$  son aplicaciones de cocadenas.

Como consecuencia del teorema y de la observación anteriores tenemos una sucesión exacta corta de complejos de cocadenas

$$0 \longrightarrow \Omega^\bullet(U) \xrightarrow{I} \Omega^\bullet(U_1) \oplus \Omega^\bullet(U_2) \xrightarrow{J} \Omega^\bullet(U_1 \cap U_2) \longrightarrow 0$$

y, en virtud del teorema 2.1.8 y de la proposición 2.2.4, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.3 (Mayer-Vietoris).** Dados  $U_1, U_2$  dos abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $U = U_1 \cup U_2$ . La sucesión

$$\dots \longrightarrow H^k(U) \xrightarrow{I^*} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \xrightarrow{J^*} H^k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{k+1}(U) \longrightarrow \dots,$$

que llamaremos **sucesión de Mayer-Vietoris de  $U$** , es exacta; donde las aplicaciones  $I^*$  y  $J^*$  están dadas por las siguientes expresiones:

$$I^*([\omega]) = (i_1^*[\omega], i_2^*[\omega]), \quad J^*([\omega_1], [\omega_2]) = j_1^*[\omega_1] - j_2^*[\omega_2]$$

y  $\partial^*$  es la aplicación dada en la definición 2.1.5.

**Corolario 3.1.4** Dados  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$  con intersección  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Entonces,  $H^k(U_1 \cup U_2)$  y  $H^k(U_1) \oplus H^k(U_2)$  son isomorfos para todo valor de  $k$ .

*Demostración.* Basta considerar la sucesión de Mayer-Vietoris de  $U = U_1 \cup U_2$  que, en el caso de que  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , se reduce a

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H^0(U) & \longrightarrow & H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & & H^1(U_1) \oplus H^1(U_2) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & & \vdots & \longrightarrow & 0 \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & & H^n(U_1) \oplus H^n(U_2) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0.
 \end{array}$$



De esta forma, obtenemos  $n + 1$  sucesiones exactas del tipo

$$0 \longrightarrow H^k(U) \xrightarrow{I^*} H^k(U_1) \oplus H^k(U_2) \longrightarrow 0,$$

de donde se deduce que  $I^*$  es un isomorfismo para cada valor de  $k$ , lo que concluye la prueba. ■

En el caso de considerar variedades con un número finito de componentes conexas, es inmediata la generalización siguiente:

**Corolario 3.1.5** *Dada una variedad diferenciable  $M$  con un número finito  $c$  de componentes conexas  $M_1, \dots, M_c$ . Entonces, para cada valor de  $k$ :*

$$H^k(M) \cong H^k(M_1) \oplus \dots \oplus H^k(M_c).$$

A continuación, daremos una serie de resultados que nos permitirán reducir la dificultad en el cálculo de los espacios de cohomología de De Rham de una variedad dada.

**Proposición 3.1.6** *Dada una variedad diferenciable  $M$  conexa. Entonces  $H^0(M) \cong \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* De la observación 3.0.3 se deduce que  $H^0(M)$  puede identificarse con el espacio de funciones constantes en  $M$ . A su vez, este espacio puede identificarse con la recta real. ■

**Corolario 3.1.7** *Si  $M$  es una variedad con un número finito de componentes conexas, pongamos  $c$ . Entonces  $H^0(M) \cong \mathbb{R}^c$ .*

En otras palabras, para cualquier variedad diferenciable  $M$ , la dimensión de  $H^0(M)$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial coincide con el número de componentes conexas de la variedad.

## 3.2. Lema de Poincaré

Vimos que los espacios de cohomología de De Rham constituyen un invariante diferencial de variedades. En esta sección veremos un resultado más fuerte: es también un invariante homotópico. A lo largo de esta sección daremos resultados que relacionan los espacios de cohomología de De Rham con conceptos homotópicos.

En primer lugar, recordamos al lector algunas definiciones básicas sobre homotopía.

**Definición 3.2.1** *Dadas dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$  y dos aplicaciones diferenciables  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$  entre ellas. Llamaremos **homotopía** entre  $f_0$  y  $f_1$  a toda aplicación diferenciable  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$ , que verifique:*

- $F(\cdot, t)$  es una aplicación diferenciable entre  $M$  y  $N$  para cada valor de  $t$ ,
- $F(\cdot, 0) = f_0(\cdot)$ ,
- $F(\cdot, 1) = f_1(\cdot)$ .

**Definición 3.2.2** *Dadas dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$ , diremos que dos aplicaciones diferenciables  $f, g : M \rightarrow N$  son homótopas (u homotópicamente equivalentes) si existe una homotopía entre ellas.*

La relación “ser homótopas” así definida es una relación de equivalencia, que llamaremos relación de **homotopía** (sobre aplicaciones).

**Definición 3.2.3** *Diremos que dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$  son homótopas (u homotópicamente equivalentes) si existen aplicaciones diferenciables  $f : M \rightarrow N$  y  $g : N \rightarrow M$  tales que las composiciones  $(f \circ g)$  y  $(g \circ f)$  son homótopas a las correspondientes identidades.*

**Definición 3.2.4** *Diremos que una variedad diferenciable  $M$  es contráctil (o contractible) si es homotópicamente equivalente a un punto.*

Tras estas definiciones previas, estamos en condiciones de enunciar y probar los siguientes resultados.

**Proposición 3.2.5** *Sean  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables y consideremos dos aplicaciones diferenciables  $f_0, f_1 : M \rightarrow N$ . Si  $f_0$  y  $f_1$  son homótopas, para cada valor de  $k$ , las aplicaciones  $f_0^*$  y  $f_1^*$ , definidas de  $H^k(N)$  en  $H^k(M)$ , coinciden.*

*Demostración.* Supongamos que  $f_0^*$  y  $f_1^*$  son homótopas y sea  $F : M \times [0, 1] \rightarrow M$  una homotopía entre ellos, tal que  $F(m, t = i) = f_i(m)$ , para  $i = 0, 1$ .

Nuestro objetivo es probar que las aplicaciones  $f_0^*$  y  $f_1^*$  coinciden sobre  $H^k(N)$  o, equivalentemente, su diferencia es una  $k$ -forma exacta sobre  $N$ . A partir de ahora, intentaremos construir un operador lineal  $H : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  satisfaciendo

$$d \circ H + H \circ d = f_0^* - f_1^* \tag{3.1}$$

En tal caso, las aplicaciones  $f_0^*, f_1^*$  serán homótopas como aplicaciones de cocadenas y, haciendo uso de la proposición 2.2.3, tendremos el resultado.

Consideremos la variedad producto  $M \times [0, 1]$ . Si  $\sigma$  es una  $k$ -forma sobre  $M \times [0, 1]$ , podemos expresarla de forma única como  $\sigma = \sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)}$ , donde  $\sigma_t^{(0)}$  y  $\sigma_t^{(1)}$  son  $k$  y  $(k-1)$ -formas sobre  $M$ , respectivamente, que dependen del parámetro  $t$ . Esto puede probarse tomando coordenadas en  $M$ . Tras esta aclaración definamos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} K : \Omega^k(M \times [0, 1]) &\longrightarrow \Omega^{k-1}(M) \\ \sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)} &\longmapsto \int_0^1 \sigma_t^{(1)} dt, \end{aligned}$$

donde la integración se realiza sobre el parámetro  $t$ .

Veamos que la aplicación  $H := K \circ F^*$  satisface la condición (3.1). Para ello, dado que  $F^*$  conmuta con la derivada exterior, basta ver cómo actúa  $d \circ K + K \circ d$  sobre  $k$ -formas sobre  $M \times [0, 1]$ .

En primer lugar, tomemos una  $k$ -forma  $\sigma = \sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)}$  en  $\Omega^k(M \times [0, 1])$  y calculemos  $d\sigma$ .

$$\begin{aligned} d\sigma &= d(\sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)}) \\ &= d^M \sigma_t^{(0)} + dt \wedge \frac{\partial \sigma_t^{(0)}}{\partial t} \\ &\quad + \left( d^M(dt) + \frac{\partial 1}{\partial t} dt \wedge dt \right) \wedge \sigma_t^{(1)} + (-1)^1 dt \wedge \left( d^M \sigma_t^{(1)} + dt \wedge \frac{\partial \sigma_t^{(1)}}{\partial t} \right) \\ &= d^M \sigma_t^{(0)} - dt \wedge \left( d^M \sigma_t^{(1)} + \frac{\partial \sigma_t^{(0)}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

donde  $d^M$  denota la derivada exterior en  $M$ .

Entonces,

$$K(d\sigma) = \int_0^1 - \left( d^M \sigma_t^{(1)} + \frac{\partial \sigma_t^{(0)}}{\partial t} \right) dt = - \int_0^1 \left( d^M \sigma_t^{(1)} \right) dt + \sigma_{t=1}^{(0)} - \sigma_{t=0}^{(0)}.$$

Por otra parte,

$$d(K\sigma) = d \int_0^1 (\sigma_t^{(1)}) dt = \int_0^1 (d^M \sigma_t^{(1)}) dt.$$

Por lo tanto, para cualquier  $k$ -forma  $\sigma = \sigma_t^{(0)} + dt \wedge \sigma_t^{(1)}$  sobre  $M \times [0, 1]$ , se verifica:

$$(K \circ d + d \circ K)(\sigma) = \sigma_{t=1}^{(0)} - \sigma_{t=0}^{(0)}.$$

Si tomamos  $\omega \in \Omega^k(N)$  y consideramos la  $k$ -forma  $F^*\omega \in \Omega^k(M \times [0, 1])$ , obtenemos que  $(K \circ d + d \circ K)(F^*\omega) = (F^*\omega)_{t=1}^{(0)} - (F^*\omega)_{t=0}^{(0)} = f_1^*\omega - f_0^*\omega$ .

De modo que si  $\omega$  es una  $k$ -forma sobre  $N$ , se tiene que

$$\begin{aligned} (H \circ d + d \circ H)(\omega) &= (K \circ F^* \circ d + d \circ K \circ F^*)(\omega) \\ &= (K \circ d \circ F^* + d \circ K \circ F^*)(\omega) \\ &= (K \circ d + d \circ K)(F^*\omega) \\ &= f_1^*\omega - f_0^*\omega, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

**Teorema 3.2.6** *Dadas dos variedades diferenciables homótopas  $M$  y  $N$ . Para cada valor de  $k$ , los espacios de cohomología de De Rham  $H^k(M)$  y  $H^k(N)$  son isomorfos. En otras palabras, los espacios de cohomología de De Rham son un **invariante homotópico** de variedades,*

*Demostración.* Supongamos que las variedades  $M$  y  $N$  son homótopas. En tal caso existen aplicaciones diferenciables  $f : M \rightarrow N$ ,  $g : N \rightarrow M$  tales que

$$\begin{aligned} f \circ g &\sim id_N \\ g \circ f &\sim id_M. \end{aligned}$$

Atendiendo al resultado anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} g^* \circ f^* &= (f \circ g)^* = id_N^* = id_{H^k(N)} \\ f^* \circ g^* &= (g \circ f)^* = id_M^* = id_{H^k(M)}, \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $f^*$  y  $g^*$  son isomorfismos inversos el uno del otro. ■

**Corolario 3.2.7 (Lema de Poincaré)** *Si  $M$  es una variedad contráctil, entonces:*

$$H^k(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $M$  una variedad contráctil y  $p$  un punto de  $M$ . En virtud del teorema anterior, sabemos que  $H^k(M) \cong H^k(\{p\})$  para cada valor de  $k$ .

En tal caso, puesto que la dimensión de  $\{p\}$  como variedad diferenciable es cero, para cada  $k > 0$  tenemos que  $H^k(\{p\})$  es trivial. Por último, por ser  $\{p\}$  una variedad conexa,  $H^0(\{p\}) \cong \mathbb{R}$ . ■

### 3.3. Espacios de dimensión finita

#### 3.3.1. Entornos normales y entornos convexos

**Definición 3.3.1** Sea  $p$  un punto de una variedad riemanniana  $M$ . Para cada vector tangente  $v \in T_pM$ , denotaremos por  $\gamma_v$  a la única geodésica que satisface:

$$\gamma_v(0) = p \quad \text{y} \quad \gamma'_v(0) = v.$$

Con esta notación, definimos la aplicación **exponencial** en  $p$  como

$$\begin{aligned} \exp_p : U \subset T_pM &\longrightarrow M \\ v &\longmapsto \gamma_v(1), \end{aligned}$$

donde  $U$  es el mayor entorno abierto del origen de  $T_pM$  para el que la aplicación está bien definida.

**Proposición 3.3.2** Identificando el espacio  $T_0(T_pM) \cong T_pM$ , tenemos que la aplicación  $d(\exp_p)|_0$  es la identidad en  $T_pM$ .

*Demostración.* Para cada vector  $v \in T_pM$ , podemos considerar la curva  $c(t) = tv$ . Ésta verifica que

$$c(0) = 0 \quad \text{y} \quad c'(0) = v.$$

Utilizaremos esto para ver cómo actúa  $d(\exp_p)|_0$  sobre el vector  $v$ :

$$\begin{aligned} d(\exp_p)|_0(v) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_p(c(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_p(tv) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \gamma_v(t) = \gamma'_v(0) = v. \end{aligned}$$

■

El teorema de la función inversa establece que  $\exp_p$  es un difeomorfismo local entre un entorno abierto  $U_p$  de  $p$  y el entorno abierto  $\exp_p^{-1}(U_p)$  del origen de  $T_pM$ .

**Definición 3.3.3** *Dado un entorno  $V$  del origen de  $T_pM$ , diremos que  $U = \exp_p(V)$  es un **entorno normal** de  $p$  si  $\exp_p$  es un difeomorfismo sobre  $V$ . Si tomamos un valor  $r > 0$  tal que la bola  $\mathbb{B}_n(0, r)$  esté íntegramente contenida en  $V$ , diremos que su imagen*

$$\mathcal{B}(p, r) = \exp_p(\mathbb{B}_n(0, r)),$$

*es una **bola normal** o **bola geodésica** de radio  $r$  centrada en  $p$ , cuya frontera  $\mathcal{S}(p, r)$  recibe el nombre de **esfera normal** o **esfera geodésica**.*

Notemos que si  $q$  es un punto en un entorno normal de  $p$ , existe una única geodésica que los conecta. Ésta está unívocamente determinada por el segmento de recta entre el origen de  $T_pM$  y  $\exp_p^{-1}(q)$ .

Una de las principales propiedades de la aplicación  $\exp_p$  está recogida en el siguiente resultado, cuya prueba puede encontrarse en [3].

**Lema 3.3.4 (Gauss).** *Dado un punto  $p$  de una variedad riemanniana  $M$  y sean  $v$  y  $w$  vectores de  $T_pM$ . Entonces,*

$$\langle d(\exp_p)|_v(v), d(\exp_p)|_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Como consecuencia de este resultado, tenemos que las esferas normales centradas en  $p$  son hipersuperficies de  $M$  ortogonales a las geodésicas que pasan por  $p$ .

A continuación, daremos dos resultados técnicos, cuyas pruebas no reproduciremos. El lector puede encontrarlas en las secciones §3 y §4 del tercer capítulo de [3].

**Lema 3.3.5** *Para cada  $p$  de  $M$ , podemos encontrar un entorno abierto  $W$  de  $p$  y un valor  $\delta > 0$  que hacen que:*

- *la aplicación  $\exp_q$  sea un difeomorfismo en  $\mathbb{B}(0, \delta) \subset T_qM$ , para todo  $q \in W$  y*
- *$W \subset \exp_q(\mathbb{B}(0, \delta)) = \mathcal{B}(q, \delta)$ .*

*En otras palabras,  $W$  es un entorno normal de **todos sus puntos**. En esta situación, diremos que  $W$  es un entorno **totalmente normal** de  $p$ .*

**Lema 3.3.6** *Para cada punto  $p$  de  $M$ , existe un valor  $c > 0$  tal que si  $r < c$  y  $\gamma$  es una geodésica tangente a la esfera normal  $\mathcal{S}(p, r)$  en un punto  $q$ , dicha geodésica permanece fuera de  $\mathcal{B}(p, r)$  (cerca de  $q$ ).*

**Definición 3.3.7** *Diremos que un subconjunto  $U$  de una variedad riemanniana  $M$  es **fuertemente convexo** si dados dos puntos  $p, q \in \bar{U}$ , podemos encontrar una única geodésica minimizante  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tal que*

- $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$  y
- $\gamma(]0, 1[) \subset U$ .

Aplicaremos los dos lemas anteriores para probar el siguiente resultado.

**Teorema 3.3.8** *Para cada punto  $p$  de una variedad riemanniana, existe un valor  $r_p > 0$  tal que la bola normal  $\mathcal{B}(p, r_p)$  es fuertemente convexa.*

*Demostración.* Dado un punto  $p$  de  $M$ , consideremos el valor  $c$  del lema 3.3.6 y tomemos un  $\delta > 0$  y un entorno  $W$  de  $p$  satisfaciendo las condiciones del lema 3.3.5, de modo que  $\delta < \frac{c}{2}$ . Fijemos también  $r_p < \delta$  suficientemente pequeño para que  $\mathcal{B}(p, r_p) \subset W$ . Veamos que en esta situación, la bola normal  $\mathcal{B}(p, r_p)$  es fuertemente geodésica.

Para ello, tomemos dos puntos  $q_1, q_2 \in \bar{\mathcal{B}}(p, r_p)$ , de la normalidad de  $W$  se deduce que existe una única geodésica minimizante que conecta dichos puntos. Dado que cada  $q_i$  dista de  $p$ , a lo sumo, una distancia  $r_p$ , se deduce que la longitud de  $\gamma$  debe estar acotada por

$$l(\gamma) < 2r_p < 2\delta < c.$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que  $\gamma$  sale de  $\mathcal{B}(p, r_p)$ . En otras palabras, que existe algún punto  $m$  de  $\gamma$  tal que la distancia  $d = d(m, p) > r_p$ . Además, supongamos que en este  $m$  se alcanza el máximo de la función distancia entre  $p$  y los puntos de  $\gamma$ . En tal caso, la geodésica  $\gamma$  es tangente a la esfera normal  $\mathcal{S}(p, d)$  en el punto  $m$ . Si aplicamos el lema 3.3.5 a esta situación, obtenemos que  $\gamma$  debe permanecer fuera de la bola normal  $\mathcal{B}(p, d)$  en un entorno suficientemente pequeño de  $m$ , lo que contradice la maximalidad de la distancia entre  $p$  y  $m$ .

Se concluye que la geodésica  $\gamma$  está íntegramente contenida (salvo, a lo sumo, sus extremos) en la bola normal centrada en  $p$  y de radio  $r_p$ . ■

Como consecuencia de este resultado, toda variedad riemanniana puede cubrirse por entornos abiertos fuertemente convexos. Basta considerar el cubrimiento  $\{\mathcal{B}(p, r_p)\}_{p \in M}$ , con  $r_p > 0$  del teorema anterior.

### 3.3.2. Buenos cubrimientos

**Definición 3.3.9** Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  un cubrimiento de  $M$  por abiertos. Diremos que  $\mathcal{U}$  es un **buen cubrimiento** de  $M$  si cada intersección no vacía de un número finito de elementos de  $\mathcal{U}$  es contráctil.

**Teorema 3.3.10** Toda variedad diferenciable admite un buen cubrimiento. En particular, si la variedad es compacta, admite un buen cubrimiento finito.

*Demostración.* Sea  $M$  una variedad diferenciable. Dotemos a  $M$  de una métrica riemanniana y tomemos un cubrimiento abierto  $\{\mathcal{B}(p, r_p)\}_{p \in M}$  de  $M$ , donde cada  $r_p$  hace que la bola geodésica  $\mathcal{B}(p, r_p)$  sea fuertemente convexa.

En primer lugar, veamos que la intersección de un número finito de bolas normales fuertemente convexas es, de nuevo, un conjunto fuertemente convexo. Para ello, consideremos dos bolas fuertemente convexas  $B_1 = \mathcal{B}(p_1, r_{p_1})$  y  $B_2 = \mathcal{B}(p_2, r_{p_2})$  no disjuntas y tomemos dos puntos  $q_1, q_2 \in \overline{B_1 \cap B_2} \subset \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$ . Si consideramos los puntos  $q_1, q_2$  como elementos de  $\overline{B_1}$ , podemos encontrar una geodésica minimizante  $\gamma_1$  que los conecta sin salir de  $B_1$ . De la normalidad de  $B_1$  se sigue que  $\gamma_1$  está unívocamente determinada por el segmento de recta que va del origen de coordenadas de  $T_{q_1}M$  a  $\exp^{-1}(q_2)$ . Este mismo razonamiento es válido si pensamos en  $q_1, q_2$  como puntos de  $\overline{B_2}$ . Se concluye que la única geodésica minimizante que une  $q_1$  y  $q_2$  está íntegramente contenida en  $B_1 \cap B_2$  y, por lo tanto, esta intersección es fuertemente convexa.

Además, los conjuntos fuertemente convexos son contráctiles. Para probarlo, fijemos un punto  $p$  de un abierto fuertemente convexo  $U$ . Para cada  $q \in U$ , podemos considerar la única geodésica minimizante  $\gamma_p^q$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\gamma(1) = q$ . En esta situación, la aplicación

$$\begin{aligned} H : U \times [0, 1] &\longrightarrow U \\ (q, t) &\longmapsto H(q, t) := \gamma_p^q(t), \end{aligned}$$

que satisface:



- $H(q, t)$  es una aplicación diferenciable para cada valor de  $t$ ,
- $H(q, 0) = \gamma_p^q(0) = p$ ,
- $H(q, 1) = \gamma_p^q(1) = q = id_U(q)$ ,

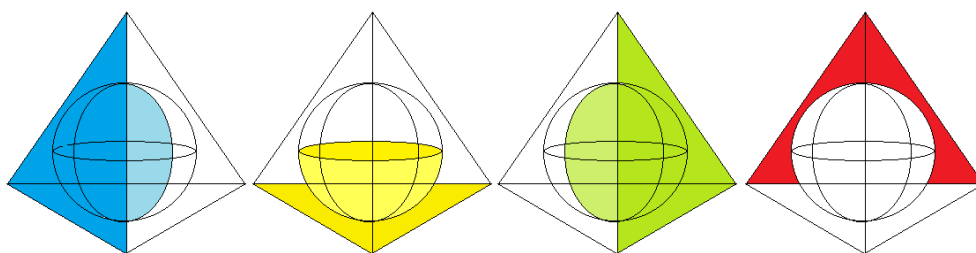
es una homotopía entre la identidad y la aplicación constante  $p$ , de donde se obtiene la contractibilidad de  $U$ .

Por todo lo anterior,  $\{\mathcal{B}(p, r_p)\}_{p \in M}$  es un buen cubrimiento de  $M$ . Además, si  $M$  es compacta, admitirá un subcubrimiento finito de  $\{\mathcal{B}(p, r_p)\}_{p \in M}$ , lo que concluye la prueba. ■

### Ejemplo 3.3.11 La esfera $\mathbb{S}^2$

El cubrimiento de la esfera dado por los abiertos  $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ ,  $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$  no es un buen cubrimiento, ya que la intersección  $U \cap V$  es homotópicamente equivalente a una circunferencia. Sin embargo, sabemos que  $\mathbb{S}^2$  admite un buen cubrimiento. De hecho, un buen cubrimiento finito.

Un buen cubrimiento de  $\mathbb{S}^2$  es el siguiente. Consideremos un tetraedro en el que inscribimos la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Si proyectamos las caras del tetraedro sobre la esfera, obtenemos cuatro subconjuntos de ésta, satisfaciendo la condición de la definición anterior. La siguiente figura ilustra este hecho.



El siguiente resultado pone de manifiesto la relación entre los buenos cubrimientos y los espacios de cohomología de De Rham.

**Proposición 3.3.12** *Sea  $M$  una variedad diferenciable. Si  $M$  admite un buen cubrimiento finito, entonces los espacios de cohomología de De Rham de  $M$  son de dimensión finita.*

*Demostración.* Lo probaremos por inducción finita sobre el número de elementos  $n$  del buen cubrimiento de  $M$ .

- $n = 1$  En tal caso,  $M$  es contráctil y, por lo tanto, sabemos que  $H^0(M) = \mathbb{R}$  y  $H^k(M) = 0$ .
- Hipótesis de inducción: Supongamos que el resultado es cierto para variedades que admiten buenos cubrimientos finitos de, a lo sumo,  $n - 1$  abiertos. Supongamos que  $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$  es un buen cubrimiento de  $M$  y consideremos los conjuntos  $U = U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$  y  $V = U_n$ . Notemos que  $\{U_1 \cap V, \dots, U_{n-1} \cap V\}$  es un buen cubrimiento de  $U \cap V$ . La hipótesis de inducción nos dice que los espacios de cohomología de  $U, V$  y  $U \cap V$  son finito-dimensionales.

Como consecuencia del teorema 3.1.3, la sucesión

$$0 \longrightarrow \text{Im} \partial^* \xrightarrow{\iota} H^k(M) \xrightarrow{I^*} \text{Im} I^* \longrightarrow 0$$

es exacta corta. Además, podemos considerar la aplicación lineal  $\text{pr} : H^k(M) \longrightarrow \text{Im} \partial^*$ , dada por

$$\text{pr}([\omega]) = \begin{cases} [\omega] & \text{si } [\omega] \in \text{Im} \partial^* \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que satisface  $\text{pr} \circ \iota = id_{\text{Im} \partial^*}$ . Del lema 2.2.6 se sigue que

$$H^k(M) \cong \text{Im}(\partial^*) \oplus \text{Im}(I^*)$$

y, por lo tanto, su dimensión es finita. ■

En el caso de que los espacios de cohomología de De Rham de una variedad diferenciable sean finito-dimensionales, podemos calcular sus dimensiones a partir de la fórmula que nos proporciona el teorema siguiente.

**Teorema 3.3.13 (Fórmula de las dimensiones)** Dada una sucesión exacta de espacios vectoriales finito-dimensionales

$$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0,$$

entonces la suma alternada de sus dimensiones es nula.

*Demostración.* Lo probaremos por inducción sobre el número de espacios vectoriales que intervienen en la sucesión exacta.

El caso  $n = 1$  es trivial, ya que si  $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow 0$  es exacta,  $V_1$  es necesariamente el espacio vectorial trivial.

$n = 2$  Si la sucesión  $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f} V_2 \longrightarrow 0$  es exacta, necesariamente  $f$  es un isomorfismo de espacios vectoriales y, por lo tanto,  $\dim(V_1) = \dim(V_2)$ .

$n = 3$  Si tenemos una sucesión exacta corta  $0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \longrightarrow 0$ , sabemos que  $f_1$  es inyectiva,  $f_2$  es sobreyectiva y que  $\text{Im}(f_1) = \ker(f_2)$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \dim(\ker(f_1)) &= 0 \\ \dim(\text{Im}(f_1)) &= \dim(\ker(f_2)) \\ \dim(\text{Im}(f_2)) &= \dim(V_3). \end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta que  $\dim(V_i) = \dim(\ker(f_i)) + \dim(\text{Im}(f_i))$  para  $i = 1, 2$ , se sigue que:

$$\begin{aligned} \dim(V_1) &= \dim(\text{Im}(f_1)) \\ \dim(V_2) &= \dim(\text{Im}(f_1)) + \dim(V_3). \end{aligned}$$

De modo que la suma alternada  $-\dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_3)$  es nula.

- Supongamos que el resultado es cierto para sucesiones exactas de espacios vectoriales de longitud menor o igual que cierto  $n - 1$ . Veamos qué ocurre para  $n$ . Para ello, consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \longrightarrow 0.$$

Notemos que podemos dividirla en dos sucesiones

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \text{Im}(f_2) \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow \text{Im}(f_2) = \ker(f_3) \hookrightarrow V_3 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

que también son exactas y de longitud menor que  $n$ . Por hipótesis de inducción, tenemos que

$$-\dim(V_1) + \dim(V_2) = \dim(\text{Im}(f_2)) \quad \text{y} \quad \sum_{i=3}^n (-1)^i \dim(V_i) = -\dim(\text{Im}(f_2)).$$

Se tiene, por lo tanto, que  $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim(V_i) = 0$ , como queríamos probar.

■

# Capítulo 4

## Ejemplos

Dada una variedad diferenciable  $M$  de dimensión  $n$ . Si somos capaces de expresarla como unión de subconjuntos abiertos  $U, V \subset M$ , podremos construir la sucesión de Mayer-Vietoris de  $M$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(M) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & H^1(U \cap V) \longrightarrow \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \longrightarrow & & H^n(U) \oplus H^n(V) & \longrightarrow & H^n(U \cap V) \longrightarrow 0, \end{array}$$

que es exacta. En el caso de que todos los espacios vectoriales que intervienen sean de dimensión finita, haciendo uso de la **fórmula de las dimensiones** del teorema 3.3.13 y de los resultados anteriores, podremos calcular de una forma más o menos sencilla los espacios de cohomología de De Rham de  $M$ .

### 4.1. Cohomología de De Rham de las esferas

Empezaremos calculando los espacios de cohomología de De Rham de  $\mathbb{S}^1$ . Para ello, consideremos el recubrimiento de  $\mathbb{S}^1$  por los abiertos  $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, 1)\}$  y  $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, -1)\}$ . Notemos que  $U$  y  $V$  son contráctiles, por lo tanto:

$$\begin{aligned} H^0(U) &= H^0(V) = \mathbb{R} \\ H^1(U) &= H^1(V) = 0. \end{aligned}$$

Por otra parte,  $U \cap V = \mathbb{S}^1 \setminus \{(0, 1), (0, -1)\}$  consta de dos componentes conexas contráctiles, de modo que:

$$\begin{aligned} H^0(U \cap V) &= \mathbb{R}^2 \\ H^1(U \cap V) &= 0. \end{aligned}$$

La sucesión de Mayer-Vietoris de  $\mathbb{S}^1$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & H^1(U \cap V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

adquiere la forma siguiente:

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0.$$

Si aplicamos la fórmula de las dimensiones, tenemos que  $0 = -1 + 2 - 2 + \dim(H^1(\mathbb{S}^1))$ , de donde se deduce que la dimensión de  $H^1(\mathbb{S}^1)$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial es 1, es decir,  $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$ .

Utilizaremos este primer ejemplo para la prueba del siguiente teorema.

**Teorema 4.1.1** *Los espacios de cohomología de la esfera  $n$ -dimensional son*

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Sean  $N = (0, \dots, 0, 1)$  y  $S = (0, \dots, 0, -1)$  los polos norte y sur de  $\mathbb{S}^n$ , respectivamente, y consideremos los abiertos  $U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$  y  $V = \mathbb{S}^n \setminus \{S\}$  cuya unión es la  $n$ -esfera completa.

Realizaremos la prueba por inducción sobre la dimensión. El caso  $n = 1$  es cierto, según el ejemplo anterior. Supongamos ahora que el resultado se verifica para esferas de dimensión  $n - 1$ . Veamos qué ocurre para  $\mathbb{S}^n$ .

Por ser  $U$  y  $V$  contráctiles, sus espacios de cohomología están determinados por

$$\begin{aligned} H^0(U) &= H^0(V) = \mathbb{R} \\ H^k(U) &= H^k(V) = 0 \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

Por otra parte,  $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{N, S\}$  puede retraerse a su ecuador, es decir,  $U \cap V$  es homotópicamente equivalente a una esfera  $(n - 1)$ -dimensional. Por lo tanto,

$$H^k(U \cap V) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Por hipótesis de inducción tenemos que

$$H^k(U \cap V) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n-1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si consideramos la sucesión de Mayer-Vietoris de  $\mathbb{S}^n$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) & \longrightarrow & \\ & & \longrightarrow & & H^1(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H^1(U) \oplus H^1(V) & \longrightarrow & H^1(U \cap V) & \longrightarrow \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & \longrightarrow & & H^{n-1}(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H^{n-1}(U) \oplus H^{n-1}(V) & \longrightarrow & H^{n-1}(U \cap V) & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^n(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H^n(U) \oplus H^n(V) & \longrightarrow & H^n(U \cap V) & \longrightarrow 0, \end{array}$$

y tenemos en cuenta las observaciones anteriores, obtenemos la siguiente sucesión exacta.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \\ & & \longrightarrow & & H^1(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^2(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & \longrightarrow & & H^{n-1}(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & & H^n(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0, \end{array}$$

En particular, el inicio

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

es exacto y, por aplicación de la fórmula de las dimensiones, tenemos que

$$0 = -1 + 2 - 1 + \dim(H^1(\mathbb{S}^n)) = \dim(H^1(\mathbb{S}^n)),$$

es decir,  $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$ .

De la exactitud de las sucesiones

$$0 \longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0 \quad \text{y}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

se sigue el resultado. ■

Si tenemos que en cuenta que  $\mathbb{S}^{n-1}$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , obtenemos que para valores de  $n \geq 2$ :

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^k(\mathbb{S}^{n-1}) \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n-1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

lo que nos permite probar el siguiente resultado.

**Corolario 4.1.2** *Los espacios  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  son homeomorfos si, y solo si,  $m = n$ .*

*Demostración.*

$\Rightarrow$  Supongamos que  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  son homeomorfos y sea  $f$  un homeomorfismo entre ellos. En tal caso, los espacios  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$  también lo son.

- Si  $n = 1$ ,  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tiene dos componentes conexas. Mientras que  $\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$  es conexo para todo valor de  $m \geq 2$ . Luego,  $m$  necesariamente coincide con  $n = 1$ .
- Si  $n \geq 2$ , tenemos que

$$\mathbb{R} = H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = H^{n-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n-1 = 0, m-1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Puesto que  $n-1 > 0$ , se sigue que  $n-1 = m-1$ , es decir, que  $n = m$ , como queríamos probar.

$\Leftarrow$  El recíproco es trivial. ■

## 4.2. Cohomología de De Rham de los espacios proyectivos reales

En esta sección utilizaremos los resultados acerca de los espacios de cohomología de De Rham de las esferas para calcular los de los espacios proyectivos reales. Antes de dar el resultado central de la sección, veremos una serie de resultados, cuya finalidad es dar una expresión cerrada para el pullback de la aplicación antipodal  $A : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ , dada por  $A(x) = -x$ . Esto facilitará el cálculo de los espacios de cohomología de De Rham de  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ .



### 4.2.1. Resultados previos

**Teorema 4.2.1** *Sea  $A$  un subconjunto cerrado propio de  $\mathbb{R}^n$ . Si realizamos la siguiente identificación*

$$A \subsetneq \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

los espacios de cohomología de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$  están dados por la expresión

$$H^k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = \begin{cases} H^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) & \text{si } k > 1, \\ H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1 & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{R} & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

*Demostración.* Consideremos los siguientes abiertos de  $\mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} U &= \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, +\infty) \\ V &= \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-\infty, 1), \end{aligned}$$

que satisfacen:

$$\begin{aligned} U \cup V &= \mathbb{R}^{n+1} \setminus A, \\ U \cap V &= (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1). \end{aligned}$$

Veamos que  $U$  y  $V$  son contráctiles:

En primer lugar, definamos la aplicación  $\phi : U \rightarrow U$  dada por

$$\phi(u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1} + 1).$$

Notemos que, para cada  $u \in U$ , el segmento de recta  $[u, \phi(u)]$  está contenido en  $U$ . Por lo tanto, podemos definir la homotopía  $F(u, t) = (1-t)\phi(u) + tu$  entre las aplicaciones  $id_U$  y  $\phi$ .

Por otra parte, si fijamos un punto  $p \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ , para cada  $u$  de  $U$ , el segmento  $[\phi(u), p]$  también está íntegramente contenido en  $U$ . Del mismo modo, podemos establecer una homotopía entre  $\phi$  y la función constante  $p$ .

Por la transitividad de la relación de equivalencia homotópica, se sigue que  $id_U$  es homótopa a la función constante  $p$ . En otras palabras,  $U$  es contráctil. De forma análoga se prueba que  $V$  también lo es. Por lo tanto, sus espacios de cohomología son triviales, excepto

$$H^0(U) = H^0(V) = \mathbb{R}.$$

Por otra parte  $U \cap V$  puede retraerse a  $(\mathbb{R}^n \setminus A) \times \{0\}$ , que puede identificarse con  $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ . Por lo tanto, los espacios de cohomología de De Rham de  $U \cap V$  son isomorfos a los de  $(\mathbb{R}^n \setminus A)$ .

Con todo lo anterior, la sucesión de Mayer-Vietoris de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$  queda reducida a

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) & \longrightarrow \\
& & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^1(\mathbb{R}^n \setminus A) & \longrightarrow \\
& & \longrightarrow & H^2(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^2(\mathbb{R}^n \setminus A) & \longrightarrow \\
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& & \longrightarrow & H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^n(\mathbb{R}^n \setminus A) & \longrightarrow \\
& & \longrightarrow & H^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

De la exactitud de esta sucesión se deduce que la aplicación

$$\partial^* : H^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) \longrightarrow H^k(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales para cada  $k > 1$ .

Falta calcular los casos  $k = 0, 1$ . Basta tener en cuenta que la sucesión

$$0 \longrightarrow H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \xrightarrow{I^*} H^0(U) \oplus H^0(V) = \mathbb{R}^2 \xrightarrow{J^*} H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde  $I^*, J^*, \partial^*$  son las aplicaciones definidas en el teorema 3.1.3. Si tenemos en cuenta que los elementos de  $H^0(U) \oplus H^0(V)$  son pares de funciones constantes  $(f_1, f_2)$  en  $U$  y  $V$ , respectivamente y recordamos la definición de  $J^*$ , tenemos que  $J^*(f_1, f_2)$  es la función constante  $f_1 - f_2$  en  $U \cap V$ . Se sigue que  $\ker(\partial^*) = \text{Im}(J^*) = \mathbb{R}$ . Por lo tanto, tenemos la siguiente relación de isomorfía:

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = \text{Im}(\partial^*) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R}.$$

Por último, de la inyectividad de  $I^*$ , se tiene que

$$\dim(H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)) = \dim(\text{Im}(I^*)) = \dim(\ker(J^*)) = 2 - \dim(\text{Im}(J^*)) = 1.$$

Esto es,  $H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = \mathbb{R}$ . ■

**Teorema 4.2.2** *Sea  $A$  un subconjunto cerrado y propio de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $R$  es el difeomorfismo*

$$\begin{array}{ccc}
R : & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \\
& (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}),
\end{array}$$

entonces, para cada valor de  $k \geq 0$ , el isomorfismo

$$R^* : H^{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$$

está dado por multiplicación por  $-1$ .

*Demostración.* Consideremos los subconjuntos  $U, V$  definidos en la prueba del teorema anterior anterior y sean

$$\begin{aligned} R_0 : U \cap V &\longrightarrow U \cap V \\ R_1 : U &\longrightarrow V \\ R_2 : V &\longrightarrow U \end{aligned}$$

las restricciones de  $R$  a los respectivos subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ .

Consideremos también los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus A & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \\ \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 \\ U & \xrightarrow{R_1} & V \\ \uparrow j_1 & & \uparrow j_2 \\ U \cap V & \xrightarrow{R_0} & U \cap V \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus A & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \\ \uparrow i_2 & & \uparrow i_1 \\ V & \xrightarrow{R_2} & U \\ \uparrow j_2 & & \uparrow j_1 \\ U \cap V & \xrightarrow{R_0} & U \cap V \end{array}$$

En la prueba del teorema anterior hemos visto que la aplicación  $\partial^* : H^k(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$  es un isomorfismo para los valores de  $k \geq 1$  y es suprayectiva para  $k = 0$ . En cualquier caso, tenemos que  $H^{k+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) = \partial^*(H^k(U \cap V))$ . Por lo tanto, la prueba del teorema se reduce a probar que

$$R^*(\partial^*[\omega]) = -\partial^*[\omega], \quad \forall [\omega] \in H^k(U \cap V).$$

Consideremos una  $k$ -forma  $\omega$  cerrada sobre  $U \cap V$ . Sabemos que ésta puede escribirse como  $\omega = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$ , para ciertas  $k$ -formas  $\omega_1, \omega_2$  sobre  $U$  y  $V$ , respectivamente. Por otra parte, sea  $[\eta] = \partial^*[\omega]$ . Recordemos que  $\eta$  es la  $(k+1)$ -forma cerrada sobre  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ , determinada por  $i_\alpha^*(\eta) = d\omega_\alpha$ , con  $\alpha = 1, 2$ . De todo lo anterior se sigue que:

$$\begin{aligned} -R_0^*\omega &= (R_0^* \circ j_2^*)(\omega_2) - (R_0^* \circ j_1^*)(\omega_1) = j_1^*(R_1^*\omega_2) - j_2^*(R_2^*\omega_1) \\ i_1^*(R^*\eta) &= R_1^*(i_2^*\eta) = R_1^*(d\omega_2) = d(R_1^*\omega_2) \\ i_2^*(R^*\eta) &= R_2^*(i_1^*\eta) = R_2^*(d\omega_1) = d(R_2^*\omega_1), \end{aligned}$$

de donde se deduce que  $-\partial^*([R_0^*\omega]) = [R^*\eta] = (R^* \circ \partial^*)[\omega]$ . La arbitrariedad de la elección de  $\omega$  nos lleva a que

$$-\partial^* \circ R_0^* = R^* \circ \partial^*. \quad (4.1)$$

Veamos que  $R_0^*$  es la identidad sobre los espacios de cohomología de De Rham de  $U \cap V$ . Para ello, basta tener en cuenta que  $\text{pr} \circ R_0 = \text{pr}$ , donde  $\text{pr}$  es la proyección canónica de  $U \cap V$  sobre  $\mathbb{R}^n \setminus A$ . Notemos que  $\text{pr}^*$  es un isomorfismo, con inversa el pullback de la inclusión

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^n \setminus A &\longrightarrow U \cap V \\ x &\longmapsto (x, 0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$R_0^* = R_0^* \circ (\text{pr}^* \circ i^*) = (R_0^* \circ \text{pr}^*) \circ i^* = \text{pr}^* \circ i^* = id_{H^k(U \cap V)}$$

y la igualdad (4.1) se reduce a

$$-\partial^* = R^* \circ \partial^*,$$

lo que concluye a prueba. ■

**Corolario 4.2.3** *Sea  $A$  una matriz invertible  $n \times n$  y sea  $f_A$  el difeomorfismo lineal de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  en sí mismo dado por  $f(x) = Ax^t$ . El isomorfismo  $f_A^* : H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \longrightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  opera por multiplicación por el factor  $\frac{\det(A)}{|\det(A)|}$ .*

*Demostración.* Dada una matriz invertible  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , denotemos por  $F_i$  la  $i$ -ésima fila de  $A$ , con  $i = 1, \dots, n$ . Consideremos otra matriz  $B$ , que resulta de sustituir en  $A$  la fila  $F_r$  por  $F_r + cF_s$ , para cierto  $c$  real y  $r \neq s$ . Podemos expresar  $B$  como  $B = (I_n + cE_{rs})A$ , donde  $I_n$  representa la matriz identidad de orden  $n$  y  $E_{rs} = [e_{ij}]$  está dada por

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = r, j = s \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En primer lugar, notemos que  $\det(B) = \det(I_n + cE_{rs})\det(A) = \det(A)$ . Por lo tanto,  $B$  es invertible y podemos considerar el difeomorfismo  $f_B$ . Por otra parte, notemos que las matrices  $M(t) = (I_n + ctE_{rs})A$  son todas invertibles y los

difeomorfismos  $f_{M(t)}$  con  $0 \leq t \leq 1$  nos dan una homotopía entre  $f_A$  y  $f_B$ . Es por ello que  $f_A^* = f_B^*$ . De esta forma, podemos hacer ceros en la matriz  $A$  hasta conseguir una matriz diagonal, sin alterar la aplicación  $f_A^*$ . Por ello, a partir de ahora, supondremos que la matriz  $A$  es diagonal. Además, podemos suponer que  $A = \text{diag}(1, \dots, 1, d)$ , con  $d = \det(A)$ .

Por otra parte, haciendo variar  $0 \leq t \leq 1$  en la matriz  $\text{diag}(1, \dots, 1, \frac{|d|^t d}{|d|})$  obtenemos una homotopía entre  $A$  y la matriz  $\text{diag}(1, \dots, \pm 1)$ . Por lo tanto, la prueba se reduce a dos casos.

- $A = I_n$  y, por lo tanto,  $f_A = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$  y  $f_A^* = \text{id}_{H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$ .
- $A = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$  y  $f_A = R$  del teorema anterior, que queda determinada por multiplicación por  $-1$ .

■

**Corolario 4.2.4** *Si  $A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  es la aplicación antipodal dada por  $A(x) = -x$ , se tiene que  $A^* = (-1)^n \text{id}_{H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}$ .*

Dado que  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  y  $\mathbb{S}^{n-1}$  son homotópicamente equivalentes, la aplicación  $(A|_{\mathbb{S}^{n-1}})^*$  está dada por

$$A^* = (-1)^n \text{id}_{H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Utilizaremos esta expresión en la prueba del teorema siguiente. También jugará un papel importante a la hora de demostrar el teorema 5.1.3 del siguiente capítulo.

#### 4.2.2. Cálculo de $H^k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n)$

**Teorema 4.2.5** *Los espacios de cohomología de los espacios proyectivos reales son*

$$H^k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } k = n \text{ y } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Sea  $A : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$  la aplicación antipodal  $A(x) = -x$ . Consideremos el espacio proyectivo real  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n = \mathbb{S}^n / \{\pm 1\}$ , donde  $\{\pm 1\}$  denota el pegado antipodal sobre la esfera.

De la definición de  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  se sigue que toda  $k$ -forma  $\omega \in \Omega^k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n)$  puede verse como una  $k$ -forma sobre  $\mathbb{S}^n$  que respeta la identificación antipodal. Esto es:

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \omega(A(v_1), \dots, A(v_k)) = (A^*\omega)(v_1, \dots, v_k).$$

En otras palabras, el espacio de  $k$ -formas diferenciales definidas sobre  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  puede identificarse con el subespacio de  $H^k(\mathbb{S}^n)$  asociado al autovalor 1 de  $A^*$ , que denotaremos por  $H^k(\mathbb{S}^n)_+$ . Por lo tanto, podemos considerar que los espacios de cohomología de De Rham de  $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$  “son” subespacios de los respectivos espacios de cohomología de De Rham de  $\mathbb{S}^n$ . Tras esta observación, se sigue que

$$H^k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Para el caso  $k = n$ , basta tener en cuenta que  $A^* = (-1)^{n+1}id_{H^n(\mathbb{S}^n)}$ . Así, cuando  $n$  es par, el único autovalor de  $A^*$  es  $-1$  y, por lo tanto,  $H^k(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) \cong H^k(\mathbb{S}^n)_+$  es trivial. Por otra parte, cuando  $n$  es impar,  $A^*$  es la identidad sobre  $H^n(\mathbb{S}^n)$  y el autoespacio asociado al autovalor 1 es el total. Es decir,  $H^n(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) \cong H^n(\mathbb{S}^n)_+ = H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R}$ .

Por último,  $H^0(\mathbb{P}\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$  por conexión, lo que concluye la prueba. ■

### 4.3. Cohomología de De Rham de variedades producto, la fórmula de Künneth y los toros

Empezaremos esta sección, calculando los espacios de cohomología de De Rham del toro  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Para ello, tomemos un punto  $p \in \mathbb{T}^2$  y consideremos la siguiente descomposición de  $\mathbb{T}^2 = U \cup V$  por abiertos, siendo  $U = \mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$  y  $V$  un parche homeomorfo a un disco que contenga al punto  $p$ .

- En primer lugar, calculemos  $H^k(U)$ .

Sean  $\alpha$  y  $\beta$  los únicos paralelo y meridiano, respectivamente, de  $\mathbb{T}^2$  que pasan por  $p$ . En tal caso,  $U$  puede escribirse como la unión de los abiertos

$$U = (\mathbb{T}^2 \setminus \alpha) \cup (\mathbb{T}^2 \setminus \beta).$$

Notemos que  $\mathbb{T}^2 \setminus \alpha$  y  $\mathbb{T}^2 \setminus \beta$  pueden retraerse a un paralelo y un meridiano de  $\mathbb{T}^2$ , respectivamente; es decir, son homotópicamente equivalentes a circunferencias. Así,

$$H^k(\mathbb{T}^2 \setminus \alpha) = H^k(\mathbb{T}^2 \setminus \beta) = H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

Por otra parte,  $(\mathbb{T}^2 \setminus \alpha) \cap (\mathbb{T}^2 \setminus \beta)$  es homeomorfo a un rectángulo y, por lo tanto, contráctil. Se sigue que

$$H^0((\mathbb{T}^2 \setminus \alpha) \cap (\mathbb{T}^2 \setminus \beta)) = \mathbb{R} \quad \text{y} \quad H^k((\mathbb{T}^2 \setminus \alpha) \cap (\mathbb{T}^2 \setminus \beta)) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Con todo lo anterior, la sucesión de Mayer-Vietoris de  $U$  es

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H^1(U) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow 0 \longrightarrow H^2(U) \longrightarrow 0.$$

De la exactitud en el paso  $0 \longrightarrow H^2(U) \longrightarrow 0$ , se deduce que  $H^2(U)$  es trivial y, aplicando la fórmula de las dimensiones, obtenemos que  $H^1(U) = \mathbb{R}^2$ .

- Por su parte,  $V$  es contráctil. Luego,

$$\begin{aligned} H^0(V) &= \mathbb{R} \\ H^k(V) &= 0 \quad \text{si } k = 1, 2 \end{aligned}$$

- Por último,  $U \cap V = V \setminus \{p\}$  es homotópicamente equivalente a  $\mathbb{S}^1$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H^k(U \cap V) &= \mathbb{R} \quad \text{si } k = 0, 1 \\ H^2(U \cap V) &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la sucesión de Mayer-Vietoris de  $\mathbb{T}^2$  es

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & H^1(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \xrightarrow{f} \\ & & \xrightarrow{f} & H^2(\mathbb{T}^2) & \longrightarrow & 0. & & \end{array}$$

Dado que la aplicación  $f$  es suprayectiva, sabemos que  $\dim(H^2(\mathbb{T}))$  es, como mucho, 1. Por otra parte, aplicando la fórmula de las dimensiones, obtenemos que

$$0 = -1 + 2 - 1 + \dim(H^1(\mathbb{T}^2)) - 2 + 1 - \dim(H^2(\mathbb{T}^2)).$$

Por lo tanto, debe verificarse

$$\dim(H^1(\mathbb{T}^2)) = 2 \quad \text{y} \quad \dim(H^2(\mathbb{T}^2)) = 1,$$

o bien,

$$\dim(H^1(\mathbb{T}^2)) = 1 \quad \text{y} \quad \dim(H^2(\mathbb{T}^2)) = 0.$$

Sin embargo, ninguno de los dos casos nos lleva a contradicción, es por ello que debemos introducir nuevas técnicas, que nos permitan calcular los espacios de cohomología de De Rham de variedades como los toros. En general, de variedades producto.

### 4.3.1. Fórmula de Künneth

Esta sección recoge resultados que pueden encontrarse en el capítulo V de [1].

**Teorema 4.3.1 (Künneth)** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y supongamos que  $M$  admite un buen cubrimiento finito. Entonces:

$$H^k(M \times N) \cong \bigoplus_{l=0}^k H^l(M) \otimes H^{k-l}(N),$$

para cada valor  $0 \leq k \leq \dim(M) + \dim(N)$ .

*Demostración.* Consideremos las proyecciones canónicas  $\pi : M \times N \longrightarrow M$  y  $\rho : M \times N \longrightarrow N$ . A partir de estas aplicaciones, podemos definir un homomorfismo

$$\begin{aligned} \Psi : \Omega^k(M) \otimes \Omega^l(N) &\longrightarrow \Omega^{k+l}(M \times N) \\ \omega \otimes \eta &\longmapsto \pi^*\omega \wedge \rho^*\eta. \end{aligned}$$

En caso de aplicar  $\Psi$  sobre formas  $\omega, \eta$  cerradas, es evidente que  $d(\pi^*\omega \wedge \rho^*\eta) = 0$ . Por otra parte, si calculamos  $\Psi((\omega + d\alpha) \otimes (\eta + d\beta))$ , con  $\alpha \in \Omega^{k-1}(M)$  y  $\beta \in \Omega^{l-1}(N)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi((\omega + d\alpha) \otimes (\eta + d\beta)) &= \Psi(\omega \otimes \eta + d\alpha \otimes \eta + \omega \otimes d\beta + d\alpha \otimes d\beta) \\ &= \pi^*\omega \wedge \rho^*\eta + \pi^*d\alpha \wedge \rho^*\eta + \pi^*\omega \wedge \rho^*d\beta + \pi^*d\alpha \wedge \rho^*d\beta \\ &= \pi^*\omega \wedge \rho^*\eta + d(\pi^*\alpha) \wedge \rho^*\eta + \pi^*\omega \wedge d(\rho^*\beta) + d(\pi^*\alpha) \wedge d(\rho^*\beta). \end{aligned}$$

Notemos que



- El primer sumando se corresponde con  $\Psi(\omega \otimes \eta)$ .

El resto de sumandos son  $(k + l - 1)$ -exactos. Basta considerar:

- $d(\pi^*\alpha) \wedge \rho^*\eta = d(\pi^*\alpha \wedge \rho^*\eta)$ ,
- $\pi^*\omega \wedge d(\rho^*\beta) = (-1)^k d(\pi^*\omega \wedge \rho^*\beta)$ ,
- $d(\pi^*\alpha) \wedge d(\rho^*\beta) = d(\pi^*\alpha \wedge d(\rho^*\beta))$ .

Como consecuencia,  $\Psi$  está bien definida a nivel cohomológico.

$$\begin{aligned} \Psi : H^k(M) \otimes H^l(N) &\longrightarrow H^{k+l}(M \times N) \\ [\omega] \otimes [\eta] &\longmapsto [\pi^*\omega \wedge \rho^*\eta]. \end{aligned}$$

Veamos que dicha aplicación es un isomorfismo. Lo haremos por inducción finita sobre el número de abiertos  $n$  del buen cubrimiento de  $M$ .

Caso  $n=1$ : en esta situación,  $M$  es contráctil y, por lo tanto,  $M \times N$  es homotópicamente equivalente a  $N$ . Se sigue que

$$H^k(M \times N) \cong H^k(N) \cong H^0(M) \otimes H^k(N) \oplus H^1(M) \otimes H^{k-1}(N) \oplus \dots \oplus H^k(M) \otimes H^0(N),$$

ya que  $H^0(M) = \mathbb{R}$  y el resto son triviales.

Hipótesis de inducción: supongamos que  $\Psi$  es un isomorfismo, siempre que  $M$  admita un buen cubrimiento finito con menos de  $n$  abiertos.

Si consideramos un buen cubrimiento  $\{U_1, \dots, U_n\}$  de  $M$  y sean  $U := U_1 \cup \dots \cup U_{n-1}$ ,  $V := U_n$ , por hipótesis de inducción, la fórmula de Künneth se satisface para  $U \times N$ ,  $V \times N$  y  $(U \cap V) \times N$ ; siendo  $\Psi$  un isomorfismo entre los espacios que intervienen.

Consideremos las sucesiones de Mayer-Vietoris siguientes (en vertical):

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{l=0}^k H^l(M) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k(M \times N) \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
 \bigoplus_{l=0}^k H^l(U) \otimes H^{k-l}(N) \oplus H^l(V) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k(U \times N) \oplus H^k(V \times N) \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
 \bigoplus_{l=0}^k H^l(U \cap V) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k((U \cap V) \times N) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{l=0}^k H^{l+1}(M) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^{k+1}(M \times N).
 \end{array}$$

Notemos que los dos primeros cuadrados son conmutativos pues las aplicaciones que intervienen no son más que los pullbacks de las inclusiones correspondientes en cada caso. El tercer cuadrado también es conmutativo. Veámoslo:

$$\begin{array}{ccc}
 \bigoplus_{l=0}^k H^l(U \cap V) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k((U \cap V) \times N) \\
 \downarrow \partial^* & & \downarrow \partial^* \\
 \bigoplus_{l=0}^k H^{l+1}(M) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^{k+1}(M \times N).
 \end{array}$$

Según la notación del teorema 3.1.3,  $\partial^*(\omega) = I^{-1}(dJ^{-1}(\omega))$ . Si consideramos  $\omega \in H^l(U \cap V)$ ;  $\partial^*\omega$  no es más que

$$\partial^*\omega = \begin{cases} d(\rho_V \omega) & \text{en } U \\ -d(\rho_U \omega) & \text{en } V, \end{cases}$$

donde  $\{\rho_U, \rho_V\}$  es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento  $\{U, V\}$  de  $M$ . (**Nota:** esta expresión de  $\partial^*$  se deduce de la prueba del teorema 3.1.1).

Del mismo modo, las aplicaciones  $\{\pi^*\rho_U, \pi^*\rho_V\}$  definen una partición de la unidad sobre  $M \times N$ , subordinada a  $\{U \times N, V \times N\}$ . Así,  $\partial^*$ , sobre elementos de

$H^k(U \cap V \times N)$ , actúa, según la expresión anterior:

$$\partial^* \omega = \begin{cases} d(\pi^* \rho_V \omega) & \text{en } U \times N \\ -d(\pi^* \rho_U \omega) & \text{en } V \times N \end{cases}$$

Se tiene, entonces:

$$\begin{aligned} (\partial^* \circ \Psi)(\omega \otimes \eta) &= \partial^*(\pi^* \omega \wedge \rho^* \eta) \\ &= d(\pi^* \rho_U \pi^* \omega \wedge \rho^* \eta) \\ &= \pi^* d(\rho_U \pi^* \omega) \wedge \rho^* \eta + 0 \\ &= \pi^* \partial^* \omega \wedge \rho^* \eta \\ &= (\Psi \circ \partial^*)(\omega \otimes \eta). \end{aligned}$$

En otras palabras, el tercer cuadrado es conmutativo para todo valor de  $k$ .

Para terminar, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{l=0}^k H^l(U) \otimes H^{k-l}(N) \oplus H^l(V) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k(U \times N) \oplus H^k(V \times N) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \bigoplus_{l=0}^k H^l(U \cap V) \otimes H^{k-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k((U \cap V) \times N) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \bigoplus_{l=0}^{k+1} H^l(M) \otimes H^{k+1-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^{k+1}(M \times N) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \bigoplus_{l=0}^{k+1} H^l(U) \otimes H^{k+1-l}(N) \oplus H^l(V) \otimes H^{k+1-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k(U \times N) \oplus H^k(V \times N) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \bigoplus_{l=0}^{k+1} H^l(U \cap V) \otimes H^{k+1-l}(N) & \xrightarrow{\Psi} & H^k((U \cap V) \times N). \end{array}$$

en el que las columnas son sucesiones exactas (son las sucesiones de Mayer-Vietoris). Por hipótesis de inducción, sabemos que  $\Psi$  es un isomorfismo cuando aparece de color rojo y el lema 2.2.7 concluye la prueba. ■

Estamos ahora en condiciones de calcular los espacios de cohomología del toro  $\mathbb{T}^2$ . Basta escribir,  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Puesto que  $\mathbb{S}^n$  admite un buen cubrimiento, según la fórmula de Künneth, se tiene que

$$H^1(\mathbb{T}^2) = H^0(\mathbb{S}^1) \otimes H^0(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^0(\mathbb{S}^1) = (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} H^2(\mathbb{T}^2) &= H^0(\mathbb{S}^1) \otimes H^2(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^2(\mathbb{S}^1) \oplus H^2(\mathbb{S}^1) \otimes H^0(\mathbb{S}^1) \\ &= (\mathbb{R} \otimes 0) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}) \oplus (0 \otimes \mathbb{R}) \\ &\cong \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Definición 4.3.2** Dada una variedad diferenciable  $M$  y sea  $b_k(M) = \dim(H^k(M))$  el  $k$ -ésimo número de Betti asociado a  $M$ , se define el **polinomio de Poincaré** de  $M$  como:

$$P_M(t) = \sum_{k=0}^n b_k(M)t^k,$$

donde  $n$  es la dimensión de  $M$ .

**Observación 4.3.3** Notemos que el polinomio de Poincaré es un invariante de homotopía, pues solo depende de las dimensiones de  $\{H^k(\cdot)\}_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Corolario 4.3.4** Dadas dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$ , el polinomio de Poincaré de la variedad producto satisface

$$P_{M \times N}(t) = P_M(t) \cdot P_N(t).$$

*Demostración.* Por aplicación de la fórmula de Künneth, tenemos que

$$\begin{aligned} b_k(M \times N) = \dim(H^k(M \times N)) &= \dim\left(\bigoplus_{l=0}^k H^l(M) \otimes H^{k-l}(N)\right) \\ &= \sum_{l=0}^k \dim(H^l(M) \otimes H^{k-l}(N)) \\ &= \sum_{l=0}^k \dim(H^l(M)) \dim(H^{k-l}(N)) \\ &= \sum_{l=0}^k b_l(M) b_{k-l}(N). \end{aligned}$$

Basta considerar el producto

$$\begin{aligned}
 P_M(t) \cdot P_N(t) &= \left( \sum_{k=0}^m b_k(M)t^k \right) \left( \sum_{j=0}^n b_j(N)t^j \right) \\
 &= \sum_{l=0}^{m+n} \left( \sum_{k+j=l} b_k(M)b_j(N) \right) t^l \\
 &= \sum_{l=0}^{m+n} b_l(M \times N)t^l \\
 &= P_{M \times N}(t),
 \end{aligned}$$

donde  $m = \dim(M)$ ,  $n = \dim(N)$  y  $m + n = \dim(M \times N)$ . ■

**Ejemplo 4.3.5** Utilizaremos los polinomios de Poincaré para calcular los espacios de cohomología de los  $n$ -toros,  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ .

En primer lugar, sabemos que  $H^0(\mathbb{S}^1) = H^1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{R}$ . Por ello, el polinomio de Poincaré de  $\mathbb{S}^1$  es  $P_{\mathbb{S}^1}(t) = 1 + t$ . En virtud del corolario anterior,

$$P_{\mathbb{T}^n} = (1 + t)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k,$$

de donde se deduce que  $b_k(\mathbb{T}^n) = \binom{n}{k}$ . En otras palabras, los espacios de cohomología del toro  $\mathbb{T}^n$  vienen dados por la expresión

$$H^k(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

## 4.4. Cohomología de De Rham de $\mathbb{R}^n$ privado de una cantidad finita de puntos

Hemos visto que los espacios de cohomología de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  satisfacen

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, n - 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

El siguiente resultado es una generalización de esta expresión. Privemos al espacio  $\mathbb{R}^n$  de más de un punto y veamos cómo interviene el número de puntos en los espacios de cohomología de la variedad resultante.

**Teorema 4.4.1** Sea  $n \geq 2$  y consideremos  $m$  puntos distintos  $p_1, \dots, p_m$  de  $\mathbb{R}^n$ . En tal caso, los espacios de cohomología de De Rham de  $\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$  son:

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_m\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R}^m & \text{si } k = n - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

*Demostración.* Denotemos por  $M_m$  a la variedad que resulta de privar a  $\mathbb{R}^n$  de  $m$  puntos distintos. Notemos que  $M_m$  es conexa, por lo que  $H^0(M_m) \cong \mathbb{R}$  para cualquier valor natural de  $m$ . Probaremos resto del resultado por inducción sobre el número de puntos  $m$ .

$m = 1$  En este caso,  $M_1 = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1\}$  es homotópicamente equivalente a la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Por lo tanto, sabemos que

$$H^k(M_1) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } k = n - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$m = 2$  Sea  $M_2 = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, p_2\}$  y consideremos los abiertos  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1\}$  y  $V = \mathbb{R}^n \setminus \{p_2\}$ , que satisfacen

$$U \cup V = \mathbb{R}^n \quad \text{y} \quad U \cap V = M_2.$$

Notemos que  $U$  y  $V$  son homotópicamente equivalentes a  $\mathbb{S}^{n-1}$  y, por lo tanto:

$$H^k(U) = H^k(V) = H^k(\mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \mathbb{R} & \text{si } k = n - 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además, los espacios de cohomología de De Rham de  $\mathbb{R}^n$  son triviales, salvo  $H^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$ . Con todo eso, consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris de  $\mathbb{R}^n$  con el cubrimiento abierto  $\{U, V\}$ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^1(M_2) & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^2(M_2) & \longrightarrow \\ & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^{n-2}(M_2) & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & H^{n-1}(M_2) & \longrightarrow \\ & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^n(M_2) & \longrightarrow 0. \end{array}$$

De la exactitud de la sucesión se obtiene que  $H^k(M_2) = 0$  para todo valor de  $k = 1, \dots, n-2$  y  $k = n$  y que  $H^{n-1}(M_2) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ .

Hipótesis de inducción: supongamos que el resultado es cierto para  $M_j$  siempre que  $j \leq m-1$ . Veamos qué ocurre en el caso de  $m$  puntos.

Consideremos los abiertos  $U = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_{m-1}\}$  y  $V = \mathbb{R}^n \setminus \{p_m\}$ , cuya unión es todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  y su intersección es precisamente  $M_m$ . Notemos que los espacios de cohomología de De Rham de  $U$  y  $V$  están perfectamente determinados por la hipótesis de inducción. Consideremos la sucesión de Mayer-Vietoris de  $\mathbb{R}^n$  respecto del cubrimiento  $\{U, V\}$ :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^1(M_m) & \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^2(M_m) & \longrightarrow \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^{n-2}(M_m) & \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m-1} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & H^{n-1}(M_m) & \longrightarrow \\
 & & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H^n(M_m) & \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

De nuevo, puesto que la sucesión es exacta, tenemos que  $H^k(M_m)$  es trivial para cada valor de  $k \neq 0, n-1$  y  $H^{n-1}(M_m) \cong \mathbb{R}^m$ , como queríamos probar.

■





# Capítulo 5

## Aplicaciones de la cohomología de De Rham

Los resultados expuestos a lo largo de este capítulo pueden encontrarse en [6, VII].

En este último capítulo, veremos cómo los resultados expuestos a lo largo del trabajo nos dan información sobre determinadas variedades y las aplicaciones diferenciables que se pueden establecer entre ellas.

**Observación 5.0.1** *A lo largo de este capítulo, escribiremos  $\mathbb{B}_n(p; r)$  para hacer referencia a la  $n$ -bola abierta con centro en  $p$  y radio  $r > 0$ . En el caso concreto en que  $p = 0_n$  y  $r = 1$ , escribiremos  $\mathbb{B}_n$ . Para referirnos a la bola cerrada, así como a la clausura de cualquier conjunto, escribiremos una barra sobre el conjunto en cuestión.*

### 5.1. Teoremas de punto fijo

**Lema 5.1.1** *No hay aplicaciones diferenciables  $g : \bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  que dejen fijos todos los puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

*Demostración.* En el caso de dimensión 1 es inmediato, ya que  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$  no es conexo. Sea  $n \geq 2$  y supongamos, por reducción al absurdo, que  $g$  es una aplicación diferenciable de  $\bar{\mathbb{B}}_n$  en  $\mathbb{S}^{n-1}$  que deja fijos todos los puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Si consideramos

la inclusión  $i : \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \bar{\mathbb{B}}_n$ , se tiene que

$$g \circ i = id_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

y, por lo tanto, el pullback de  $g \circ i$  es la identidad sobre los espacios de cohomología de  $\mathbb{S}^{n-1}$ . En particular,  $i^* \circ g^*$  es la identidad en  $H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R}$ . Sin embargo,  $g^*$  es la aplicación constantemente nula (pues el espacio de llegada  $H^{n-1}(\bar{\mathbb{B}}_n)$  es trivial). Luego, no puede existir tal aplicación  $g$ . ■

**Teorema 5.1.2 (Teorema del punto fijo de Brouwer).** *Toda aplicación continua de la bola unidad en sí misma deja algún punto fijo.*

*Demostración.* Supongamos que  $f : \bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}_n$  no tiene puntos fijos, es decir,  $f(x) \neq x$  para todo  $x$  en la bola  $\bar{\mathbb{B}}_n$ . En tal caso, para cada punto  $x$  podemos considerar la única semirrecta  $r_x$  que parte de  $f(x)$  y pasa por  $x$ . Sea  $g : \bar{\mathbb{B}}_n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  la aplicación dada por  $g(x) := r_x \cap \mathbb{S}^{n-1}$ . Veamos que  $g$  es diferenciable; para ello, calcularemos explícitamente su expresión.

En primer lugar, denotemos por  $u(x)$  al vector unitario en la dirección de  $r_x$ , esto es,  $u(x) = \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}$ . En tal caso,

$$g(x) = x + t(x)u(x),$$

donde  $t$  es una función real, que calcularemos a continuación. Notemos que  $g(x)$  debe ser un punto en  $\mathbb{S}^{n-1}$ , es decir,  $|g(x)| = 1$ . Equivalentemente,  $|g(x)|^2 = 1$ . Si desarrollamos esta expresión:

$$1 = |g(x)|^2 = \langle x + tu, x + tu \rangle = |x|^2 + 2t \langle x, u \rangle + t^2 |u|^2.$$

Teniendo en cuenta que  $u$  es unitario, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado en  $t$ :

$$t^2 + 2 \langle x, u \rangle t + (|x|^2 - 1) = 0,$$

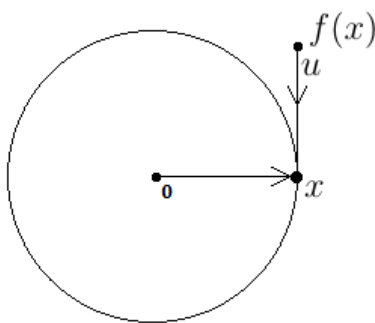
que tiene como raíces

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2 \langle x, u \rangle \pm \sqrt{4 \langle x, u \rangle^2 - 4(|x|^2 - 1)}}{2} \\ &= -\langle x, u \rangle \pm \sqrt{\langle x, u \rangle^2 - |x|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Si desarrollamos el radicando de la expresión anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \langle x, u \rangle^2 - |x|^2 + 1 &= |x|^2 |u|^2 \cos^2(\angle(x, u)) - |x|^2 + 1 \\ &= |x|^2 (\cos^2(\angle(x, u)) - 1) + 1 \\ &= -|x|^2 \sin^2(\angle(x, u)) + 1. \end{aligned}$$

En primer lugar, notemos que esta cantidad es siempre no negativa, ya que  $|x|^2 \sin^2(\angle(x, u))$



toma valores entre 0 y 1. Además, solo se anula cuando  $|x|^2 \sin^2(\angle(x, u)) = 1$ . Esto es, cuando  $x$  es un punto de  $\mathbb{S}^{n-1}$  ortogonal a  $u(x)$ , pero esto solo ocurre en la situación que ilustra la figura de la izquierda. En cuyo caso,  $f(x)$  debe salir de  $\mathbb{B}_n$ . Se concluye que el radicando es siempre positivo y, por lo tanto, siempre existen dos valores posibles para  $t(x)$ , uno por cada punto de intersección de la recta determinada por los puntos  $x$  y  $f(x)$  con  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Por otra parte, puesto que  $|x|^2 \leq 1$ , notemos que:

$$\sqrt{\langle x, u \rangle^2 - |x|^2 + 1} \geq \sqrt{\langle x, u \rangle^2} = |\langle x, u \rangle|.$$

Por lo tanto, tomaremos  $t(x) = -\langle x, u \rangle + \sqrt{\langle x, u \rangle^2 - |x|^2 + 1}$ , que es siempre positiva.

En esta situación, la aplicación  $g$  es diferenciable y deja fijos todos los puntos de  $\mathbb{S}^{n-1}$ , lo que contradice el lema anterior. Se concluye que  $f$  debe dejar fijo algún punto. ■

**Teorema 5.1.3 (Teorema de la Bola Peluda.)** *Sobre la esfera  $\mathbb{S}^n$  podemos definir un campo tangente  $V$  que no se anule en ningún punto si, y solo si,  $n$  es impar.*

*Demostración.*

⇒ Supongamos que  $V$  es un campo definido sobre  $\mathbb{S}^n$  que no se anula en ningún punto. En tal caso, podemos extender  $V$  a un nuevo campo  $W$  definido sobre

$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  que tampoco se anule, mediante la siguiente expresión:

$$W(x) = V\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Notemos que

$$\langle x, W(x) \rangle = |x| \left\langle \frac{x}{|x|}, V\left(\frac{x}{|x|}\right) \right\rangle = 0, \quad (5.1)$$

ya que  $V$  es tangente a la esfera y el vector de posición  $\frac{x}{|x|}$  es normal a ésta. En esta situación, podemos definir la siguiente aplicación.

$$\begin{aligned} F : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)W(x) \end{aligned}$$

En primer lugar, notemos que la  $F$  está bien definida, puesto que  $\cos(\pi t)$  y  $\sin(\pi t)$  no se anulan simultáneamente y los vectores  $x$ ,  $W(x)$  son linealmente independientes por (5.1). Por lo tanto,  $F(x, t)$  es un punto no nulo del espacio  $(n+1)$ -dimensional.

Además,  $F$  define una homotopía entre la identidad y la aplicación antipodal  $A$ , definidas sobre  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Se sigue que sus respectivos pullback coinciden sobre los espacios de cohomología. En particular, coinciden sobre  $H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ . Teniendo en cuenta la expresión del corolario 4.2.4, obtenemos que

$$id_{H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})} = id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}^* = A^* = (-1)^{n+1} id_{H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})}.$$

Se sigue que  $n$  debe ser impar.

◁ Sea  $n = 2m - 1$ . Basta considerar el campo  $V$  dado por

$$V(x_1, \dots, x_{2m}) := (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1}),$$

que satisface:

- Es una asignación diferenciable de vectores sobre la esfera.
- Es tangente a la esfera, pues  $\langle x, V(x) \rangle = 0$  para todo  $x \in \mathbb{S}^{2m-1}$ .
- No se anula en  $\mathbb{S}^{2m-1}$ .

■

## 5.2. Teoremas de separación: Jordan-Brouwer

**Lema 5.2.1 (Urysohn-Tietze).** Si  $A$  es un cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , toda aplicación continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  puede extenderse a otra aplicación continua  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

*Demostración.* Dado un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  y sea  $d(x, \cdot)$  la distancia euclídea al punto  $x$ . Para cada  $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ , podemos considerar el entorno abierto  $U_p \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ , dado por

$$U_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, p) < \frac{1}{2}d(x, A) \right\}.$$

Si consideramos el cubrimiento por abiertos  $\{U_p\}_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A}$  de  $\mathbb{R}^n \setminus A$  y construimos una partición de la unidad  $\{\phi_p\}$  subordinada a  $\{U_p\}$ , podemos definir la siguiente aplicación:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p(x) f(a(p)) & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus A, \end{cases}$$

donde  $a(p)$  es un elemento de  $A$  que satisface  $d(p, a(p)) < 2d(p, A)$ .

Notemos que la suma que define  $g(x)$  contiene un número finito de sumandos para cada  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ , por lo tanto,  $g$  es una aplicación continua sobre  $\mathbb{R}^n \setminus A$  y también sobre  $\text{int}(A)$ . Falta probar la continuidad de  $g$  en la frontera de  $A$ . Para ello, tomemos un punto  $x_0 \in \text{bd}(A)$ . Para cada  $x \in U_p$ , se verifica

$$d(x_0, p) \leq d(x_0, x) + d(x, p) < d(x_0, x) + \frac{1}{2}d(p, A) \leq d(x_0, x) + \frac{1}{2}d(p, x_0).$$

Equivalentemente, se tiene que  $d(x_0, p) < 2d(x_0, x)$ , para cada  $x \in U_p$ . Por otra parte,

$$d(x_0, a(p)) \leq d(x_0, p) + d(p, a(p)) < d(x_0, p) + 2d(p, A) \leq 3d(x_0, p) < 6d(x_0, x).$$

Si tenemos en cuenta que  $g(x) - g(x_0) = \sum_{p : x \in U_p} \phi_p(x)(f(a(p)) - f(x_0))$  y tomamos normas, obtenemos que

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \sum_{p : x \in U_p} \phi_p(x) |f(a(p)) - f(x_0)|.$$

En tal caso, por ser  $f$  continua, para cada  $\epsilon > 0$  podemos encontrar un  $\delta > 0$  que verifique

$$|f(y) - f(x_0)| < \epsilon, \quad \forall y \in A \text{ tal que } d(x_0, y) < 6\delta.$$

Si elegimos  $\delta > d(x, x_0)$ , se tiene que  $d(x_0, a(p)) < 6d(x_0, x) < 6\delta$  y, por lo tanto,

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \sum_{p: x \in U_p} \phi_p(x) |f(a(p)) - f(x_0)| < \sum_{p: x \in U_p} \phi_p(x) \epsilon = \epsilon,$$

es decir,  $g$  es continua en el punto  $x_0$  elegido arbitrariamente en la frontera de  $A$ , lo que concluye la prueba. ■

**Lema 5.2.2** Sean  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $B \subseteq \mathbb{R}^m$  dos cerrados homeomorfos y  $\phi : A \rightarrow B$  un homeomorfismo entre ellos. Entonces, podemos encontrar un homeomorfismo  $h$  de  $\mathbb{R}^{n+m}$  en sí mismo, verificando:

$$h(x, 0_m) = (0_n, \phi(x)), \quad \forall x \in A.$$

*Demostración.* Por ser  $\phi$  un homeomorfismo, podemos considerar la aplicación continua  $\phi^{-1}$ . En virtud del lema anterior, podemos encontrar aplicaciones continuas

$$f_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad f_2 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

que extienden a  $\phi$  y  $\phi^{-1}$ , respectivamente. Consideremos los siguientes homeomorfismos:

$$\begin{aligned} h_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto (x, y + f_1(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ (x, y) &\longmapsto (x + f_2(y), y). \end{aligned}$$

En tal caso, la composición  $h = h_2^{-1} \circ h_1$  es de nuevo un homeomorfismo que, para cada  $x \in A$ , satisface

$$h(x, 0_m) = h_2^{-1}(x, f_1(x)) = h_2^{-1}(x, \phi(x)) = (x - f_2(\phi(x)), \phi(x)) = (0_n, \phi(x)).$$

■

**Corolario 5.2.3** Dados dos cerrados homeomorfos  $A, B$  de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $\phi$  un homeomorfismo entre ellos. Si identificamos  $\mathbb{R}^n$  con el subespacio  $\mathbb{R}^n \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ , podemos encontrar un homeomorfismo  $\phi'$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  en sí mismo que extienda a  $\phi$ .

*Demostración.* Como consecuencia del lema anterior, podemos construir un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  que verifique

$$h(x, 0_n) = (0_n, \phi(x)), \quad \forall x \in A.$$

Por otra parte, sea  $f$  el homeomorfismo de  $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  en sí mismo, dado por  $f(x, y) = (y, x)$ . La composición  $\phi' := f \circ h$  es el homeomorfismo deseado. ■

**Observación 5.2.4** *Notemos que la restricción de  $\phi'$  a  $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$  nos da un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$  y  $\mathbb{R}^{2n} \setminus B$ . Por lo tanto, sus espacios de cohomología de De Rham coinciden.*

El siguiente resultado es aun más fuerte. A pesar de que  $\mathbb{R}^n \setminus A$  y  $\mathbb{R}^n \setminus B$  no son necesariamente homeomorfos, sus espacios de cohomología de De Rham también coinciden.

**Teorema 5.2.5** *Dados dos subconjuntos cerrados  $A, B \subsetneq \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  y  $B$  son homeomorfos, se tiene que*

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^k(\mathbb{R}^n \setminus B), \quad \forall k \geq 0.$$

*Demostración.* Por aplicación sucesiva del teorema 4.2.1, para cada valor de  $l \geq 1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} H^{k+l}(\mathbb{R}^{n+l} \setminus A) &\cong H^k(\mathbb{R}^n \setminus A) && \text{si } k \geq 1 \\ H^l(\mathbb{R}^{n+l} \setminus A) &\cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1 \end{aligned}$$

Esto mismo ocurre para  $B$ . Prestemos especial atención al caso  $l = n$ :

$$H^k(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^{k+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^k(\mathbb{R}^n \setminus B) \quad k \geq 1 \quad \text{y}$$

$$H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1 \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus B)/\mathbb{R} \cdot 1,$$

de donde se sigue que  $H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus B)$ . ■

**Corolario 5.2.6** *En la situación del teorema anterior, los conjuntos  $\mathbb{R}^n \setminus A$  y  $\mathbb{R}^n \setminus B$  tienen el mismo número de componentes conexas.*

**Teorema 5.2.7 (Teorema de separación de Jordan-Brouwer).** Si  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  es una variedad homeomorfa a  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Entonces:

- (i)  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$  tiene exactamente dos componentes conexas abiertas  $U_1$  y  $U_2$ , una de ellas acotada y la otra no acotada.
- (ii)  $\Sigma$  es la frontera de  $U_1$  y  $U_2$ .

*Demostración.*

(i) Por ser  $\Sigma$  homeomorfa a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , del corolario 5.2.6 se sigue que el número de componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$  es 2. Las llamaremos  $U_1$  y  $U_2$ . Además, por ser  $\Sigma$  compacta en  $\mathbb{R}^n$ , tenemos que es cerrada y, por lo tanto,  $U_1$  y  $U_2$  son abiertos.

Por otra parte, consideremos el conjunto conexo  $V = \mathbb{R}^n \setminus \bar{\mathbb{B}}_n(0; r)$ , donde  $r = \max_{x \in \Sigma} |x|$ . Notemos que  $V \cap \Sigma = \emptyset$ , por lo tanto,  $V$  debe estar íntegramente contenido en una componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ , pongamos en  $U_2$ . En tal caso,  $U_2$  es no acotada.

Por último,  $U_1$  debe estar contenida en  $\bar{\mathbb{B}}_n(0; r)$ , de donde se sigue que es acotada.

(ii) En primer lugar, veamos que  $\text{bd}(U_i) \subseteq \Sigma$ . Lo probaremos para el abierto  $U_1$ , cuya clausura se descompone como la unión disjunta  $\bar{U}_1 = U_1 \cup \text{bd}(U_1)$ . Puesto que  $U_1$  está contenido en el cerrado  $U_1 \cup \Sigma = \mathbb{R}^n \setminus U_2$ , se tiene la inclusión  $\bar{U}_1 \subseteq U_1 \cup \Sigma$ , de donde se deduce que  $\text{bd}(U_1) \subseteq \Sigma$ . Análogamente, se prueba que  $\text{bd}(U_2) \subseteq \Sigma$ .

Para probar la igualdad, tomemos un punto  $p \in \Sigma$  y veamos que está en las fronteras de  $U_1$  y  $U_2$ . Para ello, consideremos un entorno abierto  $W$  de  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ . Probaremos que las intersecciones  $U_i \cap W$  son no vacías.

Consideremos el cerrado  $A = \Sigma \setminus (\Sigma \cap W)$  de  $\Sigma$  y sea  $B$  el correspondiente cerrado de  $\mathbb{S}^{n-1}$  homeomorfo a  $A$ . Se sigue, en virtud del corolario 5.2.6, que  $\mathbb{R}^n \setminus A$  es conexo y, por lo tanto, conexo por caminos. Así, dados puntos  $p_i \in U_i$ ,  $i = 1, 2$ , podemos encontrar una curva

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A,$$



satisfaciendo  $\gamma(0) = p_1$  y  $\gamma(1) = p_2$ . Puesto que  $U_1$  y  $U_2$  son disjuntos, la curva  $\gamma$  debe pasar por  $\Sigma$  y, por lo tanto, el conjunto  $\gamma^{-1}(\Sigma)$  es un cerrado no vacío de  $[0, 1]$ . Consideremos los elementos

$$\begin{aligned} c_1 &= \min \gamma^{-1}(\Sigma) \\ c_2 &= \max \gamma^{-1}(\Sigma). \end{aligned}$$

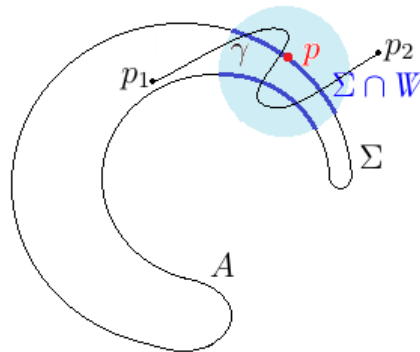
Debe ocurrir que

$$\begin{aligned} \gamma([0, c_1)) &\subset U_1 \\ \gamma((c_2, 1]) &\subset U_2, \end{aligned}$$

ya que cualquier otra situación entra en contradicción con la minimalidad de  $c_1$  y la maximalidad de  $c_2$ .

De la definición de  $\gamma$ , se tiene que  $\gamma(c_1)$  y  $\gamma(c_2)$  son puntos de  $W \cap \Sigma$  y, por ser  $W$  abierto, podemos encontrar elementos  $t_1 \in [0, c_1)$  y  $t_2 \in (c_2, 1]$  tales que  $\gamma(t_i) \in U_i \cap W$  para cada  $i = 1, 2$ , lo que concluye la prueba.

■



### 5.3. Invariancia del dominio

**Teorema 5.3.1 (Invariancia del dominio de Brouwer).** *Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : U \rightarrow V$  una aplicación continua e inyectiva. Entonces,  $f(U)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $f$  restringida a su imagen es un homeomorfismo.*

*Demostración.* Por hipótesis,  $f$  es inyectiva y, por lo tanto, la restricción a su imagen es una biyección. Veamos que la aplicación  $f : U \rightarrow f(U)$  es abierta. Esto probaría que  $f(U)$  es abierto y la continuidad de la aplicación inversa  $f^{-1}$ . En otras palabras, que  $f$  es un homeomorfismo entre  $U$  y  $f(U)$ . Para ello, fijemos un punto  $x_0 \in U$  y denotemos por  $B$  a la bola abierta centrada en  $x_0$  de radio  $\delta$ , elegido para satisfacer que su clausura  $\bar{B}$  esté contenida en  $U$ . Sea  $S$  la frontera de  $B$ . Veamos que  $f(B)$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

En el caso  $n = 1$ ,  $f(B)$  es un intervalo abierto. En adelante, supongamos que

$n \geq 2$ . Por ser  $f$  inyectiva y  $S$  un compacto de  $\mathbb{R}^n$ , la restricción  $f|_S : S \rightarrow f(S)$  es un homeomorfismo. En tal caso, el teorema 5.2.7 asegura que  $\mathbb{R}^n \setminus f(S)$  tiene dos componentes conexas abiertas, que llamaremos  $V_1$  y  $V_2$ ; la primera de ellas acotada y la segunda no, con frontera  $\text{bd}(V_1) = \text{bd}(V_2) = f(S)$ .

De nuevo, de la compacidad de  $\bar{B}$ , tenemos que  $f|_{\bar{B}} : \bar{B} \rightarrow f(\bar{B})$  es un homeomorfismo y, por aplicación del corolario 5.2.6,  $\mathbb{R}^n \setminus f(\bar{B})$  es conexo. Además, este conjunto es no acotado y no corta a  $f(S)$ . Se sigue que  $\mathbb{R}^n \setminus f(\bar{B}) \subset V_2$ . Tomando complementarios y teniendo en cuenta que  $f(\bar{B})$  se escribe como la unión disjunta  $f(B) \cup f(S)$ , obtenemos que

$$V_1 \cup f(S) \subset f(\bar{B}) = f(B) \cup f(S),$$

es decir,  $V_1 \subset f(B)$ . Veamos que se da la igualdad. Para ello, basta considerar que  $f(B)$  es conexo. Además, puesto que  $f(B)$  no corta a  $f(S)$ , debe estar íntegramente contenido en uno de los abiertos  $V_1$  o  $V_2$  y, dado que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , se sigue que  $f(B) \subset V_1$ ; de donde se obtiene la igualdad deseada.

Hemos probado que las imágenes por  $f$  de bolas abiertas son abiertos. Basta tener en cuenta que cualquier abierto de  $\mathbb{R}^n$  puede expresarse como una unión numerable de bolas abiertas para concluir la prueba. ■

**Corolario 5.3.2 (Invariancia de la dimensión).** *Consideremos dos abiertos  $U$  y  $V$  de  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Si  $U$  y  $V$  son homeomorfos, necesariamente  $m = n$ .*

*Demostración.* Supongamos, por reducción al absurdo que  $m \neq n$  y, sin pérdida de generalidad, pensemos que  $m < n$ . Consideremos la inclusión natural

$$\begin{aligned} i : \mathbb{R}^m &\hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (x, 0_{n-m}), \end{aligned}$$

que es inyectiva y continua. La invariancia del dominio nos dice que  $i(U)$  es homeomorfo  $V$  y, por lo tanto, es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo,  $i(U)$  coincide con su frontera en  $\mathbb{R}^n$ .

En el caso de que  $n < m$ , obtenemos una contradicción análoga. Luego, debe darse la igualdad  $n = m$ . ■

# Bibliografía

- [1] RAOUL BOTT y LORING W. TU. *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1982.
- [2] MANFREDO P. DO CARMO. *Differential Forms and Applications*. Universitexts, Springer, 1994.
- [3] MANFREDO P. DO CARMO. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [4] HENRI CARTAN. *Differential Forms*. Dover Publications, 2006.
- [5] JEAN DIEUDONNÉ. *A History os Algebraic and Differential Topology, 1900-1960*. Birkhäuser, 1989.
- [6] IB MADSEN y JORGEN THORNEHAVE. *From Calculus to Cohomology*. Cambridge University Press, 1998.
- [7] MICHAEL SPIVAK. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Volumen I, 2ª edición. Publish or Perish Inc., 1979.
- [8] LORING W. TU. *An Introduction to Manifolds*. Universitexts. Springer. 2008.
- [9] LORING W. TU. *Differential Geometry: Connections, Curvature and Characteristic Classes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer. 2017.