UNIVERSIDAD DE MURCIA

Facultad de Matemáticas
Máster en Matemática Avanzada

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Desigualdades de tipo Brunn-Minkowski vía las medias de números reales

Miriam Tárraga Navarro

Curso 2016/2017

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Miriam Tárraga Navarro, autora del TFM titulado "*Desigualdades de tipo Brunn-Minkowski vía las medias de números reales*", bajo la tutela de los profesores **María de los Ángeles Hernández Cifre** y **Jesús Yepes Nicolás**,

DECLARA

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 5 de Julio de 2017

Fdo.: Miriam Tárraga Navarro

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha depositado una copia firmada de esta declaración.

Índice general

Introducción

Si se relaciona el volumen con la suma vectorial de cuerpos convexos (conjuntos convexos y compactos) nos tropezamos con la famosa *desigualdad de Brunn-Minkowski*. Una de sus muchas versiones nos dice que si K y L son cuerpos convexos del espacio euclídeo n-dimensional y $0 < \lambda < 1$, entonces

$$\mathrm{vol}(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geq \lambda \mathrm{vol}(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}(L)^{1/n},$$

dándose la igualdad si, y sólo si, K y L están en hiperplanos paralelos (si tienen dimensión menor que n) o son homotéticos (si tienen dimensión n ó uno de ellos es un conjunto unipuntual).

La desigualdad de Brunn-Minkowski es uno de los resultados fundamentales, no sólo en la Teoría de los Conjuntos Convexos, sino también en Análisis (en su versión funcional) y en otras disciplinas. De esta desigualdad pueden extraerse muchos resultados de gran importancia, por lo que ha sido durante muchos años, y aún sigue siendo, motivo de estudio e investigación.

La memoria tiene como principal objetivo el estudio de la citada desigualdad de Brunn-Minkowski, así como de sus distintas versiones geométricas (todas ellas equivalentes) y funcionales: *la desigualdad de Prékopa-Leindler* y *la desigualdad de Borell-Brascamp-Lieb*. Para ello, estructuramos la memoria en tres capítulos que detallamos a continuación.

El **capítulo 1** está dedicado fundamentalmente a estudiar la conocida *desigualdad aritmético-geométrica*, que será la piedra angular para llegar, en el último capítulo, a la desigualdad de Brunn-Minkowski. Comenzamos dando las definiciones de función convexa y función cóncava, y mostrando algunas propiedades básicas de las mismas. También probamos la desigualdad de Jensen, un resultado clásico que será de gran importancia en el desarrollo de la memoria, ya que interviene en muchas de las desigualdades que vamos a considerar. Seguidamente vemos la versión más básica de la desigualdad aritmético-geométrica, la cual afirma que *la media geométrica de dos números reales positivos nunca excede a su media aritmética*. Mostramos diferentes pruebas de este resultado, cada una de las cuales tiene su propio interés pues utiliza técnicas y propiedades diferentes.

A continuación planteamos una versión más poderosa de la desigualdad, en la que intervienen m números reales positivos y m pesos cuya suma debe ser uno, obteniéndose como corolario la desigualdad aritmético-geométrica clásica, que afirma que para m números positivos $x_1, \ldots, x_m$ se verifica que

$$\sqrt[m]{x_1 \cdots x_m} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}.$$

Esta última relación puede expresarse de varias formas, todas ellas equivalentes entre sí. También vemos algunas aplicaciones geométricas interesantes de dicha desigualdad, para lo cual necesitamos introducir una serie de definiciones y fórmulas conocidas para el área, como son las *fórmulas de Herón y de Brahmagupta*.

Finalizamos el primer capítulo con una extensión de la desigualdad aritmético-geométrica mediante una relación mucho más general entre cualesquiera dos medias distintas. Para ello, definimos la llamada *media de orden* t: si $x = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ es tal que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$, entonces para cada número real $t \neq 0$ se define la *media* $M_t(x, \alpha)$ *de orden* t como

$$M_t(x, \alpha) = (\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t)^{1/t}.$$

Se demuestra entonces la llamada *monotonía de las medias*: dados $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $p < q$,

$$M_p(x, \alpha) \leq M_q(x, \alpha),$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $x_1 = \cdots = x_m$.

En el **capítulo 2**, comenzamos estudiando la conocida desigualdad de Hölder, tanto para sumas como en su versión funcional. La primera de ellas establece que, dados $(x_1, \ldots x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$, si $p, q \geq 1$ satisfacen la condición $1/p + 1/q = 1$, entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q}.$$

Al igual que en el caso de la aritmético-geométrica, desarrollamos cuatro pruebas diferentes (entre las muchas existentes) de esta desigualdad, todas ellas de especial interés. A continuación estudiamos una versión más general de la desigualdad de Hölder, la cual nos llevará a demostrar la equivalencia existente entre dicha desigualdad y *la desigualdad de Cauchy*. Otro resultado de este tipo, de especial relevancia, es la *desigualdad de Minkowski*, a la que dedicamos también unas páginas de la memoria, dando varias pruebas de la misma. Además, vemos una serie de resultados, como *la desigualdad de Liapunov* o *la desigualdad de Radon*.

Las versiones integrales de las tres famosas desigualdades ya estudiadas de Jensen, Hölder y Minkowski se recogen en la penúltima sección del capítulo, finalizando el mismo con un último apartado en el que se definen las sumas de potencias y se demuestran una serie de resultados sobre ellas. Estas propiedades nos van a permitir probar una nueva versión de la desigualdad de Hölder en el caso de que $1/p + 1/q > 1$.

Por último, el **capítulo 3** es quizá el más importante de la memoria, estando dedicado a estudiar en profundidad una de las desigualdades más importantes de la Geometría Convexa: la desigualdad de Brunn-Minkowski. Ésta relaciona tres nociones fundamentales en Convexidad: el volumen, la suma de Minkowski y los cuerpos convexos. Es por ello que comenzamos el capítulo con una sección en la que introducimos los citados conceptos, además de algunos resultados que serán necesarios posteriormente (éstos sin demostración, ya que son propiedades que fueron estudiados durante el curso *Geometría Convexa y Discreta* del *Máster en Matemática Avanzada*).

Seguidamente, enunciamos la desigualdad de Brunn-Minkowski en la forma que hemos presentado al comienzo de esta introducción, pero de forma ligeramente más general: para conjuntos compactos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in (0,1)$,

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq \lambda \mathrm{vol}(A)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}(B)^{1/n};$$

también establecemos dos de sus principales versiones: la versión multiplicativa,

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mathrm{vol}(A)^{\lambda}\mathrm{vol}(B)^{1-\lambda},$$

y la versión minimal,

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \min\{\mathrm{vol}(A), \mathrm{vol}(B)\}.$$

Como ya se ha comentado, el objetivo final de este capítulo es demostrar las tres desigualdades anteriores de Brunn-Minkowski. Para ello, estudiamos la conocida como *versión funcional de Brunn-Minkowski*, que no es otra que la *desigualdad de Prékopa-Leindler*: si $\lambda \in (0,1)$ y $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones medibles no negativas tales que, para cualesquiera puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda},$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}x\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}.$$

De esta desigualdad se obtiene fácilmente la versión multiplicativa de Brunn-Minkowski.

Finalizamos el capítulo, y con ello la memoria, demostrando el teorema más importante del mismo, a partir del cual se deducen, tanto la desigualdad de Prékopa-Leindler, como las distintas versiones de la desigualdad de Brunn-Minkowski:

Teorema (Desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb). *Sean $\lambda \in (0,1)$, $p \geq -1/n$ y sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones medibles no negativas, donde f y g tienen integral no nula, tales que*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \big(\lambda f(x)^p + (1-\lambda) g(y)^p\big)^{1/p},$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ *con* $f(x), g(y) > 0$. *Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \,\mathrm{d}x \geq \left[\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}x\right)^q + (1-\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}x\right)^q\right]^{1/q},$$

siendo $q = p/(np+1) \in [-\infty, 1/n]$.

De hecho, el alcance de las desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb no queda ahí. Este teorema va a permitir "fabricar"desigualdades de tipo Brunn-Minkowski, para otras medidas distintas al volumen.

Capítulo 1

Las medias aritmética, geométrica y armónica

El principal objetivo de este primer capítulo es estudiar la desigualdad aritmético-geométrica clásica, así como algunas de sus aplicaciones geométricas. Veremos diversas pruebas de este resultado, cada una de las cuales tiene su propio interés pues utilizará técnicas y propiedades diferentes. A continuación se considerarán las medias armónica y cuadrática, así como su relación con la geométrica y la aritmética, concluyéndose con el estudio de la más general *media de orden* t. El contenido de este capítulo se ha extraído de las referencias [3] y [7].

1.1. Funciones convexas. La desigualdad de Jensen

Comenzamos el trabajo estudiando una de las desigualdades clásicas más importantes para funciones convexas, que será imprescindible en el desarrollo de la memoria: la desigualdad de Jensen; de hecho, muchas desigualdades conocidas son un caso particular de este famoso resultado. Antes de establecer su enunciado y demostración, recordemos lo que se entiende por función convexa.

Definición 1.1.1. *Una función* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida en un intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*, se dice* ***convexa*** *en* I*, si para cualesquiera* $x, y \in I$*, y para todo* λ*,* $0 \leq \lambda \leq 1$*,*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Además, se dice que f *es* ***estrictamente convexa*** *si*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

para cualesquiera $x, y \in I$*,* $x \neq y$*, y todo* $\lambda \in (0,1)$*. Finalmente, una función* f *es* ***cóncava*** *si* $-f$ *es convexa.*

Las siguientes propiedades de funciones convexas serán de utilidad en algunas de las pruebas contenidas en este trabajo. Las enunciamos sin demostración por tratarse de resultados básicos de análisis de una variable que se han estudiado en el primer curso del grado en matemáticas.

Lema 1.1.2. *Una función f es convexa en (a, b) si, y sólo si, para cada $x_0 \in (a, b)$, existe un m de forma que la función $S(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ verifica $S(x) \leq f(x)$, $a < x < b$.*

Proposición 1.1.3. *Si f y g son dos funciones convexas, crecientes (respectivamente decrecientes) y no negativas, entonces $f \cdot g$ también es una función convexa.*

Enunciamos y demostramos a continuación la ya anunciada desigualdad de Jensen.

Teorema 1.1.4 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función convexa. Sean $x_1, \ldots, x_m \in I$ y consideremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ tales que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. Entonces*

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_m f(x_m). \tag{1.1}$$

La igualdad se da, cuando f es estrictamente convexa, si y sólo si $x_1 = \cdots = x_m$.

Demostración. Lo probaremos por inducción sobre m. Para $m = 1$, la desigualdad es evidente. Supongamos que la desigualdad se verifica para $m \geq 1$, y demostraremos que también se cumple para $m + 1$. Definimos

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1} x_{m+1},$$

donde $x_1, \ldots x_{m+1} \in I$ y $\lambda_1, \ldots \lambda_{m+1} \geq 0$ con $\lambda_1 + \cdots + \lambda_{m+1} = 1$. Por tanto, al menos uno de ellos ha de ser menor que 1, digamos $\lambda_{m+1} < 1$. Sea

$$\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1 - \lambda_{m+1},$$

para el cual, claramente, se tiene $\lambda > 0$. Así, podemos definir

$$y = \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m,$$

donde $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda} = 1$ y entonces, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$f(y) = f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m\right) \leq \frac{\lambda_1}{\lambda} f(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda} f(x_m).$$

Por tanto, de la convexidad de f tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{m+1} x_{m+1}) = f(\lambda y + \lambda_{m+1} x_{m+1}) \\ &\leq \lambda f(y) + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_{m+1} f(x_{m+1}). \end{aligned}$$

Luego la desigualdad se verifica para $m + 1$, lo que completa la prueba por inducción. El caso de igualdad es evidente. $\square$

1.2. La desigualdad aritmético-geométrica (AG)

Comencemos recordando las definiciones clásicas de media aritmética y de media geométrica.

Definición 1.2.1. *Sean x_1 y x_2 dos números reales y positivos. Su* ***media aritmética*** *y* ***media geométrica****, se definen como $(x_1 + x_2)/2$ y $\sqrt{x_1 x_2}$, respectivamente.*

Un resultado conocido es que la media geométrica nunca excede a la media aritmética, es decir, $\sqrt{x_1 x_2} \leq (x_1 + x_2)/2$. A continuación, estudiaremos una serie de demostraciones de este resultado utilizando diferentes técnicas, todas ellas de especial interés.

Proposición 1.2.2. *Si x_1 y x_2 son números reales positivos, entonces*

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2},$$

con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2$.

Demostración. P1. La primera prueba del resultado se basa en la igualdad

$$(x_1 + x_2)^2 = 4x_1 x_2 + (x_1 - x_2)^2,$$

que se puede ilustrar mediante la siguiente figura para el caso $0 < x_1 < x_2$:

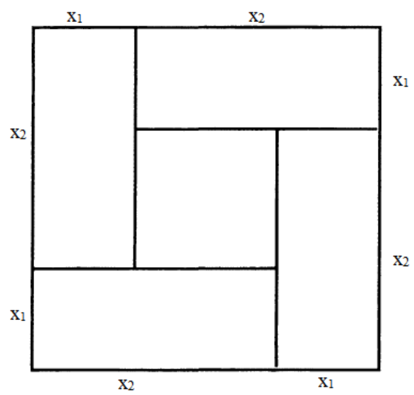

Figura 1.1: Una primera demostración de la desigualdad (AG)

De esta forma, tenemos

$$4x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2,$$

y así

$$\sqrt{x_1 x_2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

dándose la igualdad si y sólo si $x_1 - x_2 = 0$, es decir, si y sólo si $x_1 = x_2$.

P2. A continuación presentamos otra prueba inmediata. Para ello, observemos que

$$0 \leq (\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2},$$

de donde se deduce la desigualdad deseada. Claramente, la igualdad se obtiene si, y sólo si, $\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = 0$, es decir, $x_1 = x_2$.

P3. Veamos ahora una prueba geométrica del resultado. Para ello, tomamos un punto D en el diámetro $AB = x_1 + x_2$ del semicírculo de centro O de forma que se verifique la relación $x_1 = AD < x_2 = DB$, y construimos el triángulo rectángulo ODC (véase la figura 1.2). Entonces,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = AO = AD + DO = x_1 + DO,$$

y por tanto, $DO = (x_2 - x_1)/2$. Luego

$$CD = \sqrt{CO^2 - DO^2} = \sqrt{AO^2 - DO^2} = \sqrt{x_1 x_2},$$

y por consiguiente $\sqrt{x_1 x_2} = CD \leq CO = (x_1 + x_2)/2$. La igualdad se da si, y sólo si, $D \equiv O$, es decir, $x_1 = x_2$.

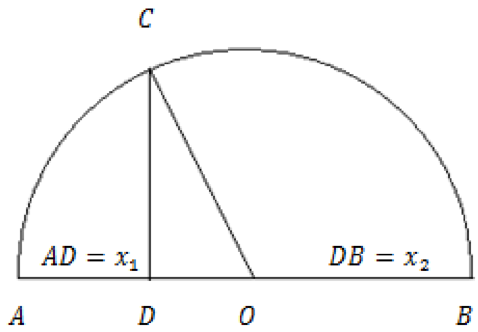

Figura 1.2: Prueba geométrica de la desigualdad (AG)

P4. Para la última prueba de este resultado, utilizaremos un argumento estándar de convexidad, basado en la desigualdad de Jensen (1.1). Para ello, como la función $f(x) = -\log x$ es estrictamente convexa en $(0, \infty)$, por (1.1) podemos asegurar que

$$-\log\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq -\left(\frac{1}{2}\log x_1 + \frac{1}{2}\log x_2\right)$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $x_1 = x_2$. Puesto que, además, f es una función estrictamente decreciente en el intervalo $(0, \infty)$, podemos concluir que

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2},$$

con igualdad si, y sólo si, $x_1 = x_2$. $\square$

Definición 1.2.3. *Sean x_1 y x_2 dos números reales positivos y sean α_1, $\alpha_2 > 0$ con $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Entonces los números*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \quad y \quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$$

se denominan, respectivamente, ***media aritmética con pesos*** *y* ***media geométrica con pesos****.*

Al igual que ocurría para el caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$, la media geométrica con pesos nunca excederá a la media aritmética con pesos. Antes de probar dicho resultado, del que estudiaremos también varias demostraciones, veamos un lema auxiliar.

Lema 1.2.4 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Si $x \geq -1$ y $0 < \alpha < 1$ entonces*

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, \tag{1.2}$$

con igualdad si y sólo si $x = 0$.

Demostración. Sea $f(x) = 1 + \alpha x - (1+x)^\alpha$, con $x \geq -1$. Entonces,

$$f'(x) = \alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1},$$

y así $f'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0$. Además

$$f''(x) = -\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},$$

y $f''(0) = -\alpha(\alpha - 1) > 0$, ya que $0 < \alpha < 1$. Luego f alcanza un mínimo global en $x = 0$, con $f(0) = 0$. Por tanto $f(x) \geq 0$, que es exactamente (1.2). El caso de igualdad es consecuencia de que dicho mínimo es estricto. □

Proposición 1.2.5. *Sean x_1 y x_2 números reales positivos y sean α_1, $\alpha_2 > 0$ tales que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Entonces*

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \tag{1.3}$$

dándose la igualdad si y sólo si $x_1 = x_2$.

Demostración. P1. Por hipótesis, $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$. Entonces la desigualdad (1.3) se puede escribir como

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{1-\alpha_1} \leq \alpha_1 x_1 + x_2 - \alpha_1 x_2,$$

y dividiendo ambos términos por x_2 se tiene

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\alpha_1} \leq 1 + \alpha_1 \left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right).$$

Tomando $x_1/x_2 = 1 + x$, la desigualdad anterior se traduce en

$$(1+x)^{\alpha_1} \leq 1 + \alpha_1 x,$$

donde $0 < \alpha_1 < 1$, que es cierta por la desigualdad de Bernoulli (1.2). Observemos que la igualdad en (1.2) se da si y sólo si $x = 0$, esto es, si y sólo si $x_1/x_2 = 1$ y, por tanto, cuando $x_1 = x_2$.

P2. De nuevo, usando la desigualdad de Jensen (1.1) para la función $f(x) = -\log x$ en $(0, \infty)$ podemos asegurar que

$$-\log(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq -(\alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2) = -\log(x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}),$$

y en consecuencia

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

dándose la igualdad si y sólo si $x_1 = x_2$.

P3. Consideramos ahora la función $f(x) = \alpha_1 x^{\alpha_2} + \alpha_2 x^{-\alpha_1}$, $x > 0$. Derivando,

$$f'(x) = \alpha_1 \alpha_2 x^{\alpha_2 - 1} - \alpha_1 \alpha_2 x^{-\alpha_1 - 1} = \alpha_1 \alpha_2 x^{-\alpha_1} - \alpha_1 \alpha_2 x^{-\alpha_1 - 1}.$$

Entonces, $f'(x) = 0$ si, y sólo si, $x = 1$. Además,

$$f''(x) = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - 1) x^{\alpha_2 - 2} - \alpha_1 \alpha_2 (-\alpha_1 - 1) x^{-\alpha_1 - 2},$$

y así, $f''(1) = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - 1 - (-\alpha_1 - 1)) = \alpha_1 \alpha_2 > 0$. Luego f alcanza un mínimo en $x = 1$, y por tanto $f(x) \geq f(1) = 1$. Tomando $x = x_1 / x_2$, se tiene que

$$f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \alpha_1 \frac{x_1^{\alpha_2}}{x_2^{\alpha_2}} + \alpha_2 \frac{x_2^{\alpha_1}}{x_1^{\alpha_1}} = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}} \geq 1,$$

que se traduce en la desigualdad (1.3). De nuevo, el caso de igualdad se desprende del hecho de que el mínimo es estricto. $\square$

En el caso más general de trabajar con m números positivos, $m \geq 2$, las medias aritmética y geométrica (con y sin pesos) se definen de forma análoga.

Definición 1.2.6. *Sean $x_1, \ldots, x_m$ números reales y positivos. Se definen la* ***media aritmética*** *y la* ***media geométrica*** *de tales números como*

$$\frac{1}{m}(x_1 + \cdots + x_m) \qquad y \qquad (x_1 \cdots x_m)^{1/m},$$

respectivamente. De forma general, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_m > 0$, con $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$, se definen la ***media aritmética con pesos*** *y la* ***media geométrica con pesos*** *de $x_1, \ldots, x_m$, respectivamente, como*

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m \qquad y \qquad x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}.$$

Al igual que antes, la media geométrica con pesos nunca excede a la media aritmética con pesos.

Teorema 1.2.7 (Desigualdad (AG) general)**.** *Sea $(x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ y sea además $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ tal que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. Entonces*

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m, \tag{1.4}$$

con igualdad si, y sólo si, $x_1 = \cdots = x_m$.

Demostración. Utilizando el mismo argumento que para $m = 2$, mediante la función $f(x) = -\log x$ definida en $(0, \infty)$, se tiene, por (1.1),

$$-\log(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m) \leq -(\alpha_1 \log x_1 + \cdots + \alpha_m \log x_m) = -\log(x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}),$$

obteniéndose

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \leq \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m.$$

La igualdad se da si y sólo si $x_1 = \cdots = x_m$. □

Corolario 1.2.8 (Desigualdad (AG))**.** *Sea* $(x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$*. Entonces*

$$(x_1 \cdots x_m)^{1/m} \leq \frac{1}{m}(x_1 + \cdots + x_m), \tag{1.5}$$

con igualdad si, y sólo si, $x_1 = \cdots = x_m$.

La desigualdad (AG) clásica (1.5) puede expresarse de varias formas todas ellas equivalentes entre sí.

Lema 1.2.9. *La desigualdad* (1.5) *es equivalente a cualquiera de los siguientes resultados:*

i) Si $(x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ *es tal que* $\prod_{i=1}^m x_i = 1$*, entonces* $\sum_{i=1}^m x_i \geq m$*, con igualdad si y sólo si* $x_1 = \cdots = x_m$.

ii) Si $(x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ *es tal que* $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ *entonces* $\prod_{i=1}^m x_i \leq (1/m)^m$*, con igualdad si y sólo si* $x_1 = \cdots = x_m$.

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que se verifica (1.5). Veamos i) y ii).

Sea $(x_1, \ldots, x_m)$ de forma que $\prod_{i=1}^m x_i = 1$. Por la desigualdad (1.5), se tiene que

$$1 = \left(\prod_{i=1}^m x_i \right)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^m x_i \geq m.$$

El caso de igualdad es consecuencia inmediata del correspondiente para (1.5). Para ii), supongamos que $(x_1, \ldots, x_m)$ es tal que $\sum_{i=1}^m x_i = 1$. Entonces por la desigualdad (1.5), se tiene que

$$1 = \sum_{i=1}^m x_i \geq m \left(\prod_{i=1}^m x_i \right)^{1/m}.$$

Luego
$$\prod_{i=1}^{m} x_i \leq (1/m)^m,$$
dándose la igualdad si y sólo si $x_1 = \cdots = x_m$.

Recíprocamente, supongamos que se verifica i). Definimos
$$y_i = \frac{x_i}{\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)^{1/m}}.$$
Claramente $\prod_{i=1}^{m} y_i = 1$, y por i), se tiene que $\sum_{i=1}^{m} y_i \geq m$, es decir,
$$m \leq \sum_{i=1}^{m} y_i = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)^{1/m}},$$
que es justo la desigualdad (1.5). El caso de igualdad es consecuencia inmediata del correspondiente para i).

Supongamos ahora, que se verifica ii) y definamos
$$z_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i}.$$
Claramente $\sum_{i=1}^{m} z_i = 1$, y por ii), se tiene que $\prod_{i=1}^{m} z_i \leq (1/m)^m$, es decir,
$$\left(\frac{1}{m}\right)^m \geq \frac{\prod_{i=1}^{m} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^m}.$$
Luego, obtenemos el resultado
$$\left(\prod_{i=1}^{m} x_i\right)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i,$$
dándose la igualdad si y sólo si $x_1 = \cdots = x_m$. □

Una aplicación geométrica muy interesante es el siguiente resultado, que puede verse como la solución al *problema isoperimétrico* restringido sobre las cajas rectangulares del espacio euclídeo.

Corolario 1.2.10. *1. De entre todas las n-cajas rectangulares de volumen dado, el n-cubo es la que tiene menor 1-perímetro, es decir, menor suma de longitudes de aristas.*

2. De entre todas las n-cajas rectangulares de 1-perímetro dado, el n-cubo es la que tiene mayor volumen.

1.3. Una nueva interpretación geométrica de la desigualdad (AG)

Hemos acabado la sección anterior con una aplicación geométrica (de tipo isoperimétrico) de la desigualdad (AG). A continuación, mostramos además que, en ciertos casos, dicha desigualdad es equivalente a ciertos problemas isoperimétricos sobre triángulos y cuadriláteros cíclicos. Veamos antes de nada qué se entiende por cuadrilátero cíclico, así como algunas fórmulas clásicas para el cómputo del área de ciertas figuras planas, como son la fórmula de Herón y la fórmula de Brahmagupta.

Definición 1.3.1. *Un* ***cuadrilátero cíclico*** *es aquél, cuyos vértices se encuentran en una misma circunferencia.*

Obsérvese que para un cuadrilátero cualquiera, una condición necesaria y suficiente para que sea cíclico es que sus parejas de ángulos opuestos sumen π radianes.

Para calcular el área A de un cuadrilátero cíclico se utiliza la **fórmula de Brahmagupta** (véase, por ejemplo, [3, p. 84]), la cual establece que, si a, b, c, d son los lados del cuadrilátero y $s = (a + b + c + d)/2$ es su semiperímetro, entonces

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \tag{1.6}$$

Finalmente, la **fórmula de Herón** afirma que el área A de un triángulo cualquiera es

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{1.7}$$

donde a, b, c son los lados del triángulo y, de nuevo, $s = (a+b+c)/2$ es su semiperímetro.

Ya estamos en disposición de enunciar y demostrar la anunciada interpretación geométrica de la desigualdad (AG).

Teorema 1.3.2. *i) Si $m = 3$, la desigualdad* (1.5) *es equivalente al siguiente resultado: entre todos los triángulos de perímetro dado, el triángulo equilátero es el que tiene mayor área.*

ii) Si $m = 4$, la desigualdad (1.5)*, en el caso en que la suma de cada tres de los números sea mayor que el cuarto, es equivalente al siguiente resultado: entre todos los cuadriláteros cíclicos de perímetro dado, el cuadrado es el que tiene mayor área.*

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que se verifica (1.5) para $m = 3$. Sean a, b, c los lados de un triángulo cualquiera y $s = (a + b + c)/2$ su semiperímetro. Entonces, por la fórmula de Herón (1.7), el área será

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

En el caso de un triángulo equilátero, los lados $a = b = c = 2s/3$ y, por tanto, el área será $A_0 = s^2/(3\sqrt{3})$. Por (1.5), para el caso $m = 3$,

$$A = \sqrt{s}\left(\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}\right)^{3/2} \leq \sqrt{s}\left(\frac{s-a+s-b+s-c}{3}\right)^{3/2}$$
$$= \sqrt{s}\left(s - \frac{a+b+c}{3}\right)^{3/2} = \sqrt{s}\left(\frac{s}{3}\right)^{3/2} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = A_0,$$

con igualdad si y sólo si $s - a = s - b = s - c$, es decir, $a = b = c$.

Recíprocamente, si a_1, a_2, a_3 son tres números positivos, definimos a, b y c como $a_1 = s - a$, $a_2 = s - b$ y $a_3 = s - c$, donde $s = (a + b + c)/2$. Haciendo cálculos sencillos, se tiene que $s = a_1 + a_2 + a_3$, por lo que $a = s - a_1 = a_2 + a_3$, $b = s - a_2 = a_1 + a_3$ y $c = s - a_3 = a_1 + a_2$ son números positivos. Además, $a + b - c = 2a_3$, $b + c - a = 2a_1$ y $c + a - b = 2a_2$ son también positivos, y por tanto a, b y c son los lados de un triángulo. Ahora, por hipótesis, tenemos que

$$(a_1a_2a_3)^{1/3} = \left(\frac{A}{\sqrt{s}}\right)^{2/3} \leq \left(\frac{A_0}{\sqrt{s}}\right)^{2/3} = \frac{s}{3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3},$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c$, es decir, si y sólo si $a_1 = a_2 = a_3$. Esto concluye la prueba de (1.5).

Para ver ii), en primer lugar, sean a, b, c, d los lados de un cuadrilátero cíclico y $s = (a + b + c + d)/2$ su semiperímetro. Entonces, por la fórmula de Brahmagupta (1.6), el área vendrá dada por

$$A = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Si el cuadrilátero es un cuadrado, entonces el área será $A_0 = s^2/4$. Observemos que los números $a_1 = s - a$, $a_2 = s - b$, $a_3 = s - c$ y $a_4 = s - d$ verifican la propiedad requerida en la hipótesis -la suma de tres de ellos es mayor que el cuarto-, y por (1.5) para $m = 4$ obtenemos

$$A = \left(\sqrt[4]{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right)^2$$
$$\leq \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)+(s-d)}{4}\right)^2$$
$$= \left(s - \frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 = \frac{s^2}{4} = A_0,$$

con igualdad si, y sólo si, $s - a = s - b = s - c$, es decir, $a = b = c$.

Recíprocamente, si a_1, a_2, a_3, a_4 son cuatro números positivos satisfaciendo la hipótesis de que la suma de cualesquiera tres de ellos es siempre mayor que el cuarto, definimos, al igual que antes, a, b, c, d como $a_1 = s - a$, $a_2 = s - b$, $a_3 = s - c$ y $a_4 = s - d$, donde $s = (a+b+c+d)/2$. Entonces, haciendo cálculos sencillos, se tiene que $2s = a_1+a_2+a_3+a_4$, por lo que $2a = 2s-2a_1 = a_2+a_3+a_4-a_1 > 0$, y de la misma forma, b, c y d son números positivos. Además, $a+b+c-d = 2a_4 > 0$, $b+c+d-a = 2a_1 > 0$, $c+d+a-b = 2a_2 > 0$ y $d+a+b-c = 2a_3 > 0$, por lo que a, b, c y d son los lados de un cuadrilátero cíclico. Ahora, por hipótesis, tenemos

$$(a_1a_2a_3a_4)^{1/4} = A^{1/2} \leq A_0^{1/2} = \frac{s}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4},$$

con igualdad si, y sólo si, $a = b = c = d$, es decir, si y sólo si $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. Esto nos da (1.5) para $m = 4$ en el caso en el que la suma de cualesquiera tres de los números considerados sea siempre mayor que el cuarto, concluyéndose así la prueba. □

1.4. La monotonía de las medias

En esta sección vamos a ver que la desigualdad (AG) general, (1.4), es un caso particular de una relación general entre cualesquiera dos medias distintas. Para ello, en primer lugar, vamos a definir otras dos medias, que complementarán a las ya estudiadas media aritmética y media geométrica: la media armónica y la media cuadrática.

Definición 1.4.1. *Sea $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$. Su **media armónica** se define como*

$$\frac{1}{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_m}\right)},$$

*y su **media cuadrática** como*

$$\sqrt{\left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_m^2}{m}\right)}.$$

Estas cuatro medias se relacionan mediante las siguientes desigualdades, que posteriormente se probarán:

$$\text{m. armónica} \leq \text{m. geométrica} \leq \text{m. aritmética} \leq \text{m. cuadrática.}$$

Al igual que hicimos con las otras dos medias, podemos generalizar las medias armónica y cuadrática añadiéndoles pesos.

Definición 1.4.2. *Sean $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ y $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ de forma que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. Entonces los números*

$$\frac{1}{\frac{\alpha_1}{x_1} + \cdots + \frac{\alpha_m}{x_m}} \qquad y \qquad \sqrt{(\alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_m x_m^2)}$$

*se llaman, respectivamente, **media armónica con pesos** y **media cuadrática con pesos** de $(x_1, \dots, x_m)$ con respecto a los pesos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$.*

Las cuatro medias que se han introducido son un caso particular de la *media de orden t*, que vamos a definir a continuación.

Definición 1.4.3. *Sean* $x = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ *y* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ *tal que* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. *Entonces para cada número real* $t \neq 0$ *se define la* ***media*** $M_t(x, \alpha)$ ***de orden t*** *como*

$$M_t(x, \alpha) = (\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t)^{1/t}.$$

Observemos que para los valores $t = -1$, 1 y 2 se obtienen, respectivamente, la media armónica con pesos, la media aritmética con pesos y la media cuadrática con pesos. Ahora bien, la media geométrica con pesos no se obtiene para ningún valor de $t \neq 0$, y por tanto parece no encajar en el caso general de las medias. Veamos, pues, qué ocurre al tomar el límite de $M_t(x, \alpha)$ cuando t tiende a cero. Por definición,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \log M_t(x, \alpha) &= \lim_{t\to 0} \frac{\log(\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t)}{t} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \log(\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t) = \log\left(x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}\right), \end{aligned}$$

y por tanto

$$\lim_{t\to 0} M_t(x, \alpha) = \lim_{t\to 0} e^{\log M_t(x,\alpha)} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}.$$

Luego $M_t(x, \alpha)$ tiende a la media geométrica con pesos, $x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$, cuando t tiende a cero. Así, podemos definir formalmente la **media de orden cero**, $M_0(x, \alpha)$, como $x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}$. Por tanto, la media de orden t, $M_t(x, \alpha)$, está definida para todo número real t y es continua en todo $\mathbb{R}$. Más aún, usando esta idea de extender el valor de M_t "por continuidad", podemos definir la media M_t para los valores $t = \pm\infty$ como sigue:

$$\begin{aligned} M_\infty(x, \alpha) &= \lim_{t\to\infty} M_t(x, \alpha) = \max_{i=1,\ldots,m} x_i, \\ M_{-\infty}(x, \alpha) &= \lim_{t\to -\infty} M_t(x, \alpha) = \min_{i=1,\ldots,m} x_i. \end{aligned}$$

Teorema 1.4.4. *Sean* $x = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ *y* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ *tal que* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. *Entonces* $M_t(x, \alpha)$ *es una función creciente en* $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Como x y α están fijos, vamos a escribir $M_t(x, \alpha) = M(t)$. Para probar que M es creciente en $\mathbb{R}$, al ser M continua en 0, basta ver que $M'(t) \geq 0$ para todo número real $t \neq 0$. Recordemos que

$$\log M(t) = \frac{\log(\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t)}{t},$$

teniéndose por consiguiente que

$$t \log M(t) = \log(\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t),$$

y así, derivando con respecto a t en ambas partes de la ecuación, obtenemos

$$t\frac{M'(t)}{M(t)} + \log M(t) = \frac{\alpha_1 x_1^t \log x_1 + \cdots + \alpha_m x_m^t \log x_m}{\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t}.$$

Multiplicando por $t \neq 0$ en ambos miembros tenemos

$$t^2\frac{M'(t)}{M(t)} + t\log M(t) = \frac{\alpha_1 x_1^t \log x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t \log x_m^t}{\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t},$$

y por tanto,

$$t^2\frac{M'(t)(\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t)}{M(t)} = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^t \log x_i^t - \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^t\right) \log \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^t\right).$$

Para ver que $M'(t) \geq 0$, puesto que t^2, $M(t)$ y $\alpha_1 x_1^t + \cdots + \alpha_m x_m^t$ son positivos, hay que ver que el segundo miembro de la ecuación anterior es no negativo, es decir, que

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^t \log x_i^t \geq \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^t\right) \log \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^t\right). \tag{1.8}$$

Si aplicamos la desigualdad de Jensen (1.1) a la función convexa $f(y) = y \log y$ definida en $(0, \infty)$ tenemos que, para cualesquiera $y_1, \ldots, y_m > 0$,

$$(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m) \log(\alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m) \leq \alpha_1 y_1 \log y_1 + \cdots + \alpha_m y_m \log y_m.$$

Escribiendo $y_i = x_i^t$ para $i = 1, \ldots, m$ en esta desigualdad, se tiene que $M'(t) \geq 0$ para $t \neq 0$, como queríamos ver. $\square$

Corolario 1.4.5 (Monotonía de las medias)**.** *Sean $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, con $p < q$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ tal que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. Entonces*

$$M_p(x, \alpha) \leq M_q(x, \alpha), \tag{1.9}$$

dándose la igualdad si, y sólo si, $x_1 = \cdots = x_m$.

En particular, se tiene la cadena de desigualdades antes anunciada:

$$M_{-1}(x, \alpha) \leq M_0(x, \alpha) \leq M_1(x, \alpha) \leq M_2(x, \alpha).$$

Demostración. La desigualdad (1.9) es consecuencia inmediata del teorema anterior, junto con el hecho de que las desigualdades se mantienen mediante paso al límite. El caso de igualdad se desprende de que, si $x_1, \ldots, x_m$ no son todos iguales, entonces hay desigualdad estricta en (1.8) y, por tanto, M_t es estrictamente creciente en $t \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. $\square$

Capítulo 2

Las desigualdades de Hölder y de Minkowski

En este capítulo vamos a estudiar en primer lugar la desigualdad de Hölder, en cada una de sus diferentes versiones, realizando además diversas pruebas que involucran distintas técnicas y que permiten relacionar algunos de los contenidos previamente estudiados con dicha desigualdad. Una de las versiones de este importante resultado nos será de utilidad para mostrar la equivalencia entre las desigualdades de Hölder y de Cauchy, resultado a priori sorprendente. Por otro lado, mostraremos la conocida desigualdad de Minkowski y estudiaremos las versiones integrales de dichas desigualdades, lo que nos llevará de forma natural al siguiente capítulo, en el que se van a demostrar distintas desigualdades integrales así como sus consecuencias geométricas. Finalizaremos el capítulo con un breve estudio de las sumas de potencias de números reales, lo que, en particular, nos permitirá obtener otra desigualdad de tipo Hölder.

Los resultados de este capítulo han sido estudiados en el libro [3].

2.1. La desigualdad de Hölder

La desigualdad de Hölder, llamada así debido a Otto Hölder, es una desigualdad fundamental entre distintas medias que resulta ser una herramienta crucial e indispensable para el estudio de los espacios l^p y L^p, de gran relevancia en el análisis matemático. A grosso modo, ésta nos dice que el producto escalar usual de dos vectores de $\mathbb{R}^n$ (análogamente para dos funciones medibles no negativas) queda mayorado por el producto de las normas p y q, respectivamente, de dichos vectores, donde $1 \leq p, q \leq +\infty$ verifican $1/p + 1/q = 1$. Comenzaremos esta sección demostrando una versión general de la citada desigualdad de Hölder, la cual puede obtenerse inmediatamente como consecuencia de la aritmético-geométrica (AG) recogida en el Teorema 1.2.7.

Teorema 2.1.1. *Sean* $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$, *con* $i = 1, \ldots, m$, *y* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$ *tal que* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$. *Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{ij}^{\alpha_i} \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{\alpha_i}, \tag{2.1}$$

dándose la igualdad si y sólo si los vectores $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$, *para* $i = 1, \ldots, m$, *son proporcionales.*

Demostración. Por la desigualdad (1.4) tenemos que, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{a_{1j}^{\alpha_1} \cdots a_{mj}^{\alpha_m}}{(a_{11} + \cdots + a_{1n})^{\alpha_1} \cdots (a_{m1} + \cdots + a_{mn})^{\alpha_m}} \leq \frac{\alpha_1 a_{1j}}{a_{11} + \cdots + a_{1n}} + \cdots + \frac{\alpha_m a_{mj}}{a_{m1} + \cdots + a_{mn}}.$$

Sumando en j, $1 \leq j \leq n$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_{1j}^{\alpha_1} \cdots a_{mj}^{\alpha_m}}{(a_{11} + \cdots + a_{1n})^{\alpha_1} \cdots (a_{m1} + \cdots + a_{mn})^{\alpha_m}} \leq \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1,$$

y por tanto

$$a_{11}^{\alpha_1} \cdots a_{m1}^{\alpha_m} + \cdots + a_{1n}^{\alpha_1} \cdots a_{mn}^{\alpha_m} \leq (a_{11} + \cdots + a_{1n})^{\alpha_1} \cdots (a_{m1} + \cdots + a_{mn})^{\alpha_m}.$$

El caso de igualdad se sigue inmediatamente del correspondiente para (1.4), esto es, se da la igualdad si y sólo si

$$\frac{a_{1j}}{a_{11} + \cdots + a_{1n}} = \cdots = \frac{a_{mj}}{a_{m1} + \cdots + a_{mn}}$$

para cada $j = 1, \ldots n$, concluyéndose así la prueba. □

Como consecuencia directa del resultado anterior, se puede obtener la siguiente desigualdad.

Corolario 2.1.2. *Sean* $(x_1, \ldots, x_m), (y_1, \ldots, y_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$. *Entonces*

$$(x_1 \cdots x_m)^{1/m} + (y_1 \cdots y_m)^{1/m} \leq (x_1 + y_1)^{1/m} \cdots (x_m + y_m)^{1/m}, \tag{2.2}$$

dándose la igualdad si y sólo si los vectores $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ *son proporcionales.*

Demostración. Basta aplicar (2.1) para $n = 2$, tomando además $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 1/m$, $a_{i1} = x_i$ y $a_{i2} = y_i$. □

A continuación, presentamos uno de los resultados principales del capítulo, la anunciada desigualdad de Hölder en su versión clásica para dos vectores. En lo que sigue, dados $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ y $p \in \mathbb{R}$, escribiremos x^p para denotar $(x_1^p, \ldots, x_n^p)$.

Teorema 2.1.3 (Desigualdad de Hölder). *Sean* $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. *Sean además* $p, q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $p, q \neq 0$, *verificando la condición* $1/p + 1/q = 1$. *Entonces, si* $p, q \geq 1$, *se tiene que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}. \tag{2.3}$$

Por el contrario, si $p, q \leq 1$, *entonces se verifica la desigualdad contraria:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}. \tag{2.4}$$

En ambos casos, si $p, q \neq \pm\infty$, *se da la igualdad si y sólo si* x^p *e* y^q *son proporcionales. Si* $p = \pm\infty$ *(respectivamente,* $q = \pm\infty$*) la igualdad se da si y sólo si* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ *(respectivamente,* $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$*).*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p \neq \pm\infty$ ya que, tanto para $p = +\infty$ como para $p = -\infty$ se obtiene $q = 1$, y la desigualdad (2.3) quedaría, en cada caso, de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \text{máx}\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \text{y}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geq \text{mín}\{x_i : 1 \leq i \leq n\} \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

respectivamente. Ambas desigualdades se verifican de forma clara y, en ambos casos, la igualdad se da si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

En todo lo que sigue supondremos por tanto que $p, q \neq \pm\infty$, y distinguiremos tres casos, en función del dominio de p (y por consiguiente de q).

Caso 1: $p > 1$. Vamos a ver varias pruebas de este primer caso:

P1. Utilizamos la desigualdad más general (2.1) con $m = 2$, $\alpha_1 = 1/p$, $\alpha_2 = 1/q$, $a_{1j} = x_j^p$ y $a_{2j} = y_j^q$, dándose la igualdad si y sólo si x^p e y^q son proporcionales.

P2. Obsérvese que la desigualdad de Hölder (2.3) se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{\sum_{j=1}^{n} x_j^p}\right)^{1/p} \left(\frac{y_i^q}{\sum_{j=1}^{n} y_j^q}\right)^{1/q} \leq 1.$$

Entonces, aplicando la desigualdad (1.3) al término de la izquierda se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^p}{\sum_{j=1}^{n} x_j^p}\right)^{1/p} \left(\frac{y_i^q}{\sum_{j=1}^{n} y_j^q}\right)^{1/q} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{p}\frac{x_i^p}{\sum_{j=1}^{n} x_j^p} + \frac{1}{q}\frac{y_i^q}{\sum_{j=1}^{n} y_j^q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

El caso de igualdad también se obtiene de (1.3), y se da si, y sólo si,

$$\frac{x_i^p}{\sum_{j=1}^n x_j^p} = \frac{y_i^q}{\sum_{j=1}^n y_j^q},$$

esto es, si y sólo si, x^p e y^q son proporcionales.

P3. Sea $h : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cóncava, sean c_i, d_i números positivos para cada $i = 1, \ldots, n$, y denotemos por $C_n = \sum_{i=1}^n c_i$ y $D_n = \sum_{i=1}^n d_i$. Entonces, aplicando la desigualdad de Jensen (1.1), donde ahora h es cóncava (y por tanto la desigualdad tiene sentido contrario), tenemos que

$$h\left(\frac{1}{D_n}\sum_{i=1}^n d_i\left(\frac{c_i}{d_i}\right)\right) \geq \frac{1}{D_n}\sum_{i=1}^n d_i h\left(\frac{c_i}{d_i}\right);$$

es decir,

$$h\left(\frac{C_n}{D_n}\right) \geq \frac{1}{D_n}\sum_{i=1}^n d_i h\left(\frac{c_i}{d_i}\right).$$

Tomando $h(t) = t^{1/p}$, $p > 1$ (obsérvese que en tal caso h es estrictamente cóncava), se tiene que

$$h\left(\frac{C_n}{D_n}\right) = \left(\frac{C_n}{D_n}\right)^{1/p} = C_n^{1/p} D_n^{-1/p} = C_n^{1/p} D_n^{1/q} D_n^{-1},$$

y en consecuencia, la desigualdad anterior equivale a

$$C_n^{1/p} D_n^{1/q} \geq \sum_{i=1}^n c_i^{1/p} d_i^{1/q},$$

donde la igualdad se da si y sólo si $c_1/d_1 = c_2/d_2 = \cdots = c_n/d_n$. Ahora, realizando el cambio de variable $c_i = x_i^p$ y $d_i = y_i^q$, obtenemos

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q} \geq \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

dándose la igualdad si y sólo si x^p e y^q son proporcionales.

P4. La cuarta y última prueba que presentamos de la desigualdad de Hölder necesita de la siguiente conocida propiedad de sencilla verificación: dados $I \subset \mathbb{R}$ y $f_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, si $F(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)$, entonces

$$\sum_{i=1}^n \inf_{t\in I} f_i(t) \leq \inf_{\in I} F(t). \tag{2.5}$$

Concretamente, vamos a aplicar este hecho a las funciones $f_i(t) = x_i^p t^{1/q} + y_i^q t^{-1/p}$, $t \in I = \mathbb{R}_{>0}$, $1 \leq i \leq n$, para lo que debemos calcular las dos expresiones que aparecen en la desigualdad (2.5). A tal fin, primero derivamos f_i e igualamos a 0, obteniendo

$$f_i'(t) = \frac{1}{q} x_i^p t^{1/q-1} - \frac{1}{p} y_i^q t^{-1/p-1} = 0,$$

lo cual es equivalente a que

$$\frac{q}{p} x_i^{-p} y_i^q = t.$$

Además, estudiando el signo de f_i', podemos asegurar que f_i alcanza el ínfimo en dicho valor de t. Entonces,

$$\begin{aligned}
\inf_{t\in I} f_i(t) &= x_i^p \left(\frac{q}{p} x_i^{-p} y_i^q\right)^{1/q} + y_i^q \left(\frac{q}{p} x_i^{-p} y_i^q\right)^{-1/p} \\
&= x_i^p \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} x_i^{-p/q} y_i + y_i^q \left(\frac{p}{q}\right)^{1/p} y_i^{-q/p} x_i \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} x_i^{p-p/q} y_i + \left(\frac{p}{q}\right)^{1/p} y_i^{q-q/p} x_i = \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} x_i y_i + \left(\frac{p}{q}\right)^{1/p} x_i y_i \\
&= \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} + \left(\frac{p}{q}\right)^{1/p}\right] x_i y_i.
\end{aligned}$$

Llamando $K = (q/p)^{1/q} + (p/q)^{1/p}$, podemos concluir que

$$\sum_{i=1}^n \inf_{t\in I} f_i(t) = K \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Por otro lado,

$$F(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right) t^{1/q} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right) t^{-1/p}.$$

Si, por brevedad, denotamos por $A = \sum_{i=1}^n x_i^p$ y $B = \sum_{i=1}^n y_i^q$, para calcular el valor de $\inf_{t\in I} F(t)$ basta ver cuándo

$$F'(t) = \frac{1}{q} A t^{1/q-1} - \frac{1}{p} B t^{-1/p-1} = 0,$$

lo cual ocurre si, y sólo si,

$$t = \frac{q}{p} \frac{B}{A}.$$

Así, es en dicho valor de t donde se alcanza el ínfimo de F. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\inf_{t\in I} F(t) &= A\left(\frac{q}{p}\frac{B}{A}\right)^{1/q} + B\left(\frac{q}{p}\frac{B}{A}\right)^{-1/p} = A\left(\frac{q}{p}\right)^{1/q}\frac{B^{1/q}}{A^{1/q}} + B\left(\frac{p}{q}\right)^{1/p}\frac{A^{1/p}}{B^{1/p}} \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} A^{1-1/q}B^{1/q} + \left(\frac{p}{q}\right)^{1/p} A^{1/p}B^{1-1/p} \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} A^{1/p}B^{1/q} + \left(\frac{p}{q}\right)^{1/p} A^{1/p}B^{1/q} = \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{1/q} + \left(\frac{p}{q}\right)^{1/p}\right] A^{1/p}B^{1/q} \\
&= K\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Finalmente, aplicando (2.5), obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q}.$$

Para el caso de igualdad, obsérvese que, como las funciones f_i tienen un mínimo estricto, habrá igualdad en (2.5) si y sólo si los ínfimos de cada f_i se alcanzan en el mismo valor t que para la función F, lo cual se da si y sólo si

$$x_i^{-p} y_i^q = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^q}{\sum_{i=1}^n x_i^p}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$; esto es, si y sólo si los vectores x^p e y^q son proporcionales.

Caso 2: $p < 0$**.** En este caso, de la igualdad $1/p + 1/q = 1$ obtenemos que $0 < q < 1$. Tomemos ahora $r = -p/q$ y $s = 1/q$. Por consiguiente, $s > 1$ y $1/r + 1/s = 1$ (y por tanto $r > 1$). Sean $a_i = x_i^{-q}$ y $b_i = x_i^q y_i^q$. Entonces, por el **Caso 1**, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^r\right)^{1/r}\left(\sum_{i=1}^n b_i^s\right)^{1/s},$$

y deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n y_i^q\right)^{1/q},$$

con igualdad si y sólo si los vectores a^r y b^s son proporcionales, es decir, si y sólo si x^p e y^q son proporcionales.

Caso 3: $0 < p < 1$**.** En estas condiciones, $q < 0$, y por tanto podemos aplicar el **Caso 2** anterior intercambiando los papeles de p y q, concluyéndose así la prueba. $\square$

Observación 2.1. *Si w es cualquier n-upla de números no negativos, podemos escribir $w_i = w_i^{1/p} w_i^{1/q}$. Entonces la desigualdad de Hölder (2.3) se puede expresar de la forma*

$$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i y_i^q \right)^{1/q}, \tag{2.6}$$

con igualdad (para $p, q \neq \pm\infty$) si y sólo si x^p e y^q son proporcionales.

Como se ha visto, la desigualdad de Hölder (2.3) es un caso particular de (2.1). Ahora mostraremos que esta última también puede obtenerse como consecuencia de (2.3). De hecho, vamos a probar una versión ligeramente más general que, además, nos será de utilidad más adelante.

Corolario 2.1.4. *Sean $(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$, $i = 1, \ldots, m$, y $r = (r_1, \ldots, r_m) \in (\mathbb{R}_{>0})^m$, y consideremos $1/\rho_m = \sum_{i=1}^{m} 1/r_i$. Entonces*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{m} a_{ij} \right)^{\rho_m} \right)^{1/\rho_m} \leq \prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_i} \right)^{1/r_i}, \tag{2.7}$$

dándose la igualdad si y sólo si los vectores $(a_{i1}^{r_i}, \ldots, a_{in}^{r_i})$, $i = 1, \ldots, m$, son proporcionales.

Demostración. Razonaremos por inducción doble en n y m. Los casos $n = 1$ y $m = 1$ son inmediatos, por lo que podemos suponer $n, m \geq 2$.

- Si $n = 2$, $m = 2$, entonces la desigualdad (2.7) se reduce a la desigualdad de Hölder

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \leq (x_1^p + x_2^p)^{1/p} (y_1^q + y_2^q)^{1/q}, \tag{2.8}$$

  con $1/p + 1/q = 1$, donde la igualdad se da si y sólo si x^p e y^q son proporcionales.

- Supongamos que (2.7) ha sido probada para $m = 2$ y todo número natural menor que n, y sean $p > 0$ y $q > 0$ con $1/p + 1/q = 1/r$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_j^r y_j^r &= x_n^r y_n^r + \sum_{j=1}^{n-1} x_j^r y_j^r \\
&\leq x_n^r y_n^r + \left(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^p \right)^{r/p} \left(\sum_{j=1}^{n-1} y_j^q \right)^{r/q} \qquad \text{(por hipótesis de inducción)} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^p \right)^{r/p} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^q \right)^{r/q} \qquad \text{(por (2.8))}.
\end{aligned}$$

  Esto demuestra (2.7) para $m = 2$ y cualquier n. Obsérvese que dicha desigualdad se cumple con igualdad si, y sólo si, (utilizando la hipótesis de inducción y (2.8)) se verifica que las parejas de vectores $(x_1^p, \ldots, x_{n-1}^p)$, $(y_1^q, \ldots, y_{n-1}^q)$ y $(x_n^p, \sum_{j=1}^{n-1} x_j^p)$, $(y_n^q, \sum_{j=1}^{n-1} y_j^q)$ son proporcionales, es decir, si y sólo si x^p e y^q son proporcionales.

- Supongamos ahora que (2.7) es cierta para todo n y todo m, con $2 \leq m < k$, y veámoslo para $m = k$. Entonces, aplicando en primer lugar el caso $m = 2$ de (2.7) y, a continuación, la hipótesis de inducción, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k} a_{ij}\right)^{\rho_k}\right)^{1/\rho_k} &= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{\rho_k}\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{ij}\right)^{\rho_k}\right)^{1/\rho_k} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{r_k}\right)^{1/r_k}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k-1} a_{ij}\right)^{\rho_{k-1}}\right)^{1/\rho_{k-1}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj}^{r_k}\right)^{1/r_k}\prod_{i=1}^{k-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i} = \prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i}.\end{aligned}$$

El caso de igualdad se obtiene argumentando como en el caso anterior. □

Utilizando el corolario 2.1.4, podemos afirmar lo siguiente:

Observación 2.2. *Si $m = 2$, entonces* (2.7) *puede escribirse como*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r y_i^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}, \tag{2.9}$$

donde $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$ es tal que $1/p + 1/q = 1/r$. La igualdad se da si y sólo si x^p e y^q son proporcionales.

A continuación, mostramos otra forma equivalente de presentar la desigualdad de Hölder (2.3), frecuentemente usada en la literatura.

Teorema 2.1.5. *Sean $a = (a_1, \ldots, x_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ y $0 < s < 1$. Entonces la desigualdad de Hölder* (2.3) *es equivalente a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^s b_i^{1-s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-s}, \tag{2.10}$$

con igualdad si y sólo si a y b son proporcionales.

Demostración. Supongamos en primer lugar que se verifica (2.3). Tomamos $p = 1/s > 1$ y $q = 1/(1-s)$, para los cuales $1/p + 1/q = 1$. Sean $x_i = a_i^s$ e $y_i = b_i^{1-s}$. Entonces, por (2.3),

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^s b_i^{1-s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{s}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{1-s},$$

con igualdad, por la correspondiente en (2.3), si y sólo si a y b son proporcionales.

Recíprocamente, si (2.10) es válida, tomando $s = 1/p$ (y así $1 - s = 1 - 1/p = 1/q$) y $a_i = x_i^p$, $b_i = y_i^q$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q \right)^{1/q},$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si x^p e y^q son proporcionales. $\square$

El siguiente resultado, que recogemos sin demostración, presenta de manera implícita otra versión de la desigualdad de Hölder, que resulta ser una forma muy útil de considerar dicha desigualdad, y es la base del método conocido como **quasi-linealización**.

Teorema 2.1.6. *Sea* $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ *y sea* $p > 1$. *Entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} = \sup_{y} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{2.11}$$

donde el sup *se toma sobre cualquier vector* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *tal que* $\sum_{i=1}^{n} y_i^q = 1$.

Como caso particular de cualquiera de las versiones anteriores de la desigualdad de Hölder, obtenemos la conocida **desigualdad de Cauchy-Schwarz**.

Corolario 2.1.7 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sean* $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. *Entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)^{1/2}, \tag{2.12}$$

dándose la igualdad si y sólo si x *e* y *son proporcionales.*

Concluimos esta sección demostrando un resultado a priori poco intuitivo: la desigualdad de Hölder también se puede deducir a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Teorema 2.1.8. *Las desigualdades de Hölder* (2.3) *y de Cauchy-Schwarz* (2.12) *son equivalentes.*

Demostración. El hecho de que (2.3) implica (2.12) es evidente, pues basta con tomar $p = q = 2$ (obsérvese que el caso de igualdad aquí también se desprende del correspondiente para (2.3), pues la condición de que x^2 e y^2 sean proporcionales es equivalente a que x e y también lo sean).

Vamos ahora a probar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz (2.12) implica la desigualdad de Hölder (2.3). Para ello, distinguimos varios casos.

i) Trivialmente, si $p = q = 2$ entonces la desigualdad (2.3) es justamente (2.12).

ii) Demostramos a continuación un caso particular de la versión (2.7) de la desigualdad de Hölder: para $m = 2^\mu$, $\mu \in \mathbb{N}_{>0}$ y $r_1 = \cdots = r_{2^\mu} = 2^\mu$,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{m} a_{ij}\right) \leq \prod_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{r_i}\right)^{1/r_i}.$$

Para ello, razonaremos por inducción sobre μ. Si $\mu = 1$, obtenemos de nuevo la desigualdad (2.12). Supongamos entonces que el resultado es cierto para $\mu - 1$ y veamos que es cierto para μ:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^\mu} a_{ij} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{2^{\mu-1}} a_{ij}\right)\left(\prod_{i=2^{\mu-1}+1}^{2^\mu} a_{ij}\right) \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{2^{\mu-1}} a_{ij}^2\right)\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=2^{\mu-1}+1}^{2^\mu} a_{ij}^2\right)\right)^{1/2} \qquad \text{(por (2.12))} \\
&\leq \prod_{i=1}^{2^{\mu-1}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2\cdot 2^{\mu-1}}\right)^{1/(2\cdot 2^{\mu-1})} \prod_{i=2^{\mu-1}+1}^{2^\mu}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2\cdot 2^{\mu-1}}\right)^{1/(2\cdot 2^{\mu-1})} \qquad \text{(inducción)} \\
&= \prod_{i=1}^{2^{\mu-1}}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2^\mu}\right)^{1/2^\mu} \prod_{i=2^{\mu-1}+1}^{2^\mu}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2^\mu}\right)^{1/2^\mu} = \prod_{i=1}^{2^\mu}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2^\mu}\right)^{1/2^\mu}.
\end{aligned}$$

iii) Ahora probamos (2.3) para $p, q \in \mathbb{Q}$, $p, q > 1$, que sean de la forma $p = 2^\mu/b$ y $q = 2^\mu/c$ con $b, c \in \mathbb{N}$, y tales que $1/p + 1/q = 1$ (por tanto $b + c = 2^\mu$).

Para $1 \leq j \leq n$ y $1 \leq i \leq 2^\mu$ sean

$$a_{ij} = \begin{cases} x_j^{1/b}, & \text{si } 1 \leq i \leq b, 1 \leq j \leq n, \\ y_j^{1/c}, & \text{si } b+1 \leq i \leq 2^\mu = b + c, 1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

De esta forma,

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^\mu} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{b} a_{ij}\prod_{i=b+1}^{b+c} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Por otro lado, usando el caso ii), ya probado, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2^\mu} a_{ij} &\leq \prod_{i=1}^{2^\mu}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2^\mu}\right)^{1/2^\mu} = \prod_{i=1}^{b}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2^\mu}\right)^{1/2^\mu}\prod_{i=b+1}^{b+c}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{2^\mu}\right)^{1/2^\mu} \\
&= \prod_{i=1}^{b}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2^\mu/b}\right)^{1/2^\mu}\prod_{i=b+1}^{b+c}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{2^\mu/c}\right)^{1/2^\mu} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{2^\mu/b}\right)^{b/2^\mu}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{2^\mu/c}\right)^{c/2^\mu} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{p}\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{q}\right)^{1/q},
\end{aligned}$$

como queríamos ver.

iv) Por último, sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1/p + 1/q = 1$, $p, q > 1$. Claramente, el conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{m}{2^n} : 1 \leq m < 2^n,\ m \in \mathbb{Z} \right\}$$

es denso en $(0, 1)$, luego existe una sucesión $(r_n)_n \subset A$ tal que $\lim_n r_n = 1/p$ y, en consecuencia, verificando que $\lim_n (1 - r_n) = 1/q$. Entonces, aplicando la desigualdad demostrada en el caso iii) con $p_n = 1/r_n$ y $q_n = 1/(1 - r_n)$, y mediante un paso al límite a ambos lados de la desigualdad (las desigualdades se mantienen mediante paso al límite) se obtiene el resultado, ya que todas las funciones ahí involucradas son continuas (productos, sumas, potencias...). Además, nótese que mediante el mismo argumento de paso al límite, una vez obtenida (2.3) para el caso general $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q > 1$, podemos deducir adicionalmente el caso $p = 1$, $q = +\infty$. Esto concluye la prueba de (2.3). $\square$

2.2. La desigualdad de Minkowski

La desigualdad de Minkowski, que abordamos a continuación, no es más que la desigualdad triangular para la aplicación $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},\ p \geq 1,$$

es decir,

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \tag{2.13}$$

lo cual implica que $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{R}^n$.

Del mismo modo, definiendo la función $\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$, $p \geq 1$, entonces se verifica la desigualdad triangular,

$$\rho_p(x, y) \leq \rho_p(x, z) + \rho_p(y, z),$$

y por consiguiente se tiene que ρ_p es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

Comenzamos la sección demostrando dicho resultado. Una vez más, presentaremos diversas pruebas del mismo, involucrando distintas técnicas y herramientas.

Teorema 2.2.1 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sean $1 \leq p \leq +\infty$ y $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. Entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p \right)^{1/p}. \tag{2.14}$$

Si $-\infty \leq p < 1$, $p \neq 0$, entonces se tiene la desigualdad contraria. En ambos casos, si $p \neq \pm\infty$ y $p \neq 1$, se da la igualdad si y sólo si los vectores x e y son proporcionales.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $p \neq \pm\infty$ pues, claramente,

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} &= \max\{x_i+y_i : 1\le i\le n\}\\
&\le \max\{x_i : 1\le i\le n\}+\max\{y_i : 1\le i\le n\}\\
&= \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p},\\
\lim_{p\to-\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} &= \min\{x_i+y_i : 1\le i\le n\}\\
&\ge \min\{x_i : 1\le i\le n\}+\min\{y_i : 1\le i\le n\}\\
&= \lim_{p\to-\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\lim_{p\to-\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, a partir de ahora supondremos que $p \neq \pm\infty$, y además, omitiremos el caso trivial $p \neq 1$.

P1. Sean $a = (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{1/p}$ y $b = (\sum_{i=1}^{n} y_i^p)^{1/p}$. Si $p > 1$, la función $f(x) = x^p$ es convexa en $(0, \infty)$ y así, por definición, se tiene que

$$\left(\frac{x_i+y_i}{a+b}\right)^p = \left(\frac{a}{a+b}\left(\frac{x_i}{a}\right)+\frac{b}{a+b}\left(\frac{y_i}{b}\right)\right)^p \le \frac{a}{a+b}\left(\frac{x_i}{a}\right)^p+\frac{b}{a+b}\left(\frac{y_i}{b}\right)^p$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Sumando ahora a ambos lados en i, $i = 1, \ldots, n$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+y_i}{a+b}\right)^p \le \frac{a}{a+b}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^p}{a^p}\right)+\frac{b}{a+b}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^p}{b^p}\right)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \le (a+b)^p = \left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\right]^p,$$

y elevando ambos términos a $1/p$ (obsérvese que estamos en el caso $p > 1$), se obtiene el resultado.

Por otro lado, si $p < 1$, $p \neq 0$, debemos distinguir dos casos. Si $0 < p < 1$, entonces la función $f(x) = x^p$ es cóncava y siguiendo los mismos pasos que antes, obtendríamos la desigualdad contraria. Si $p < 0$, entonces la función $f(x) = x^p$ es convexa y, al igual que en el caso $p \geq 1$, se deduce la desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p \le (a+b)^p = \left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}\right]^p.$$

Pero ahora, al elevar ambos términos a $1/p$ obtenemos la desigualdad contraria:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}.$$

El caso de igualdad se desprende del hecho de que f es estrictamente convexa si $p > 1$ o $p < 0$ y estrictamente cóncava si $0 < p < 1$, teniéndose por tanto que x e y son proporcionales.

P2. Aplicando (2.3) para $p > 1$ al término de la izquierda en (2.14), obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p &= \sum_{i=1}^{n} x_i\,(x_i+y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i\,(x_i+y_i)^{p-1}\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{(p-1)/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{(p-1)/p}\\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\right]\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

que es justamente (2.14). Por (2.3), la igualdad se da si, y sólo si, las parejas de vectores x^p, $(x+y)^p$ e y^p, $(x+y)^p$ son proporcionales, lo que equivale a que x e y también lo sean. Si $p < 1$, $p \neq 0$, entonces usando (2.3) en dicho caso, se obtiene la desigualdad contraria.

P3. Consideremos ahora la función $f(t) = t^{1-p}r^p + (1-t)^{1-p}r^p$, con $p > 1$, $0 < t < 1$ y $r, s > 0$, cuya derivada es $f'(t) = (1-p)(t^{-p}r^p - (1-t)^{-p}s^p)$. Igualando la expresión anterior a 0, es fácil ver que f tiene un extremo relativo en $t = r/(r+s)$. Derivando por segunda vez la función f y evaluándola en $t = r/(r+s)$ resulta

$$f''\left(\frac{r}{r+s}\right) = p(p-1)\left[\left(\frac{r+s}{r}\right)^{p+1} r^p + \left(\frac{r+s}{r}\right)^{p+1} s^p\right] > 0,$$

pues $p > 1$ y $r, s > 0$. Luego f presenta un mínimo estricto en $t = r/(r+s)$, y así, $f(t) \geq f(r/(r+s))$, con igualdad si y sólo si $t = r/(r+s)$, esto es,

$$(r+s)^p \leq t^{1-p}r^p + (1-t)^{1-p}s^p, \tag{2.15}$$

dándose la igualdad si y sólo si $t = r/(r+s)$.

Ahora, usando (2.15), obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p &\leq \sum_{i=1}^{n}\left(t^{1-p}x_i^p + (1-t)^{1-p}y_i^p\right)\\ &= t^{1-p}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}\right]^p + (1-t)^{1-p}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}\right]^p\\ &= t^{1-p}A^p + (1-t)^{1-p}B^p,\end{aligned}$$

siendo

$$A = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} \text{ y } B = \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}.$$

Así, la desigualdad se mantiene al considerar el mínimo del término de la derecha, que se alcanza, por (2.15), en $t = A/(A+B)$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p &\le \left(\frac{A}{A+B} \right)^{1-p} A^p + \left(\frac{B}{A+B} \right)^{1-p} B^p \\ &= (A+B)^p = \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p} \right]^p. \end{aligned}$$

Por último, elevando ambos términos a $1/p$, se obtiene (2.14). Para el caso de igualdad, obsérvese que ésta se dará (por el correspondiente caso en (2.15)) si y sólo si

$$\frac{x_i}{x_i + y_i} = \frac{A}{A+B}$$

para todo $i = 1, \ldots, n$, lo cual es equivalente a que x e y sean proporcionales.

Por otro lado, si $p < 1$, $p \neq 0$, distinguiremos de nuevo dos casos. Primero, si $0 < p < 1$ entonces $f''(r/(r+s)) < 0$ y, por tanto, f presentará un máximo estricto en $t = r/(r+s)$. Así, $f(t) \le f(r/(r+s))$ con igualdad si y sólo si $t = r/(r+s)$, obteniéndose, de la misma manera, la desigualdad contraria.

En el caso $p < 0$, f presentará un mínimo en $t = r/(r+s)$. Entonces, $f(t) \ge f(r/(r+s))$ con igualdad si y sólo si $t = r/(r+s)$. Pero ahora, al elevar a $1/p$ en ambos lados de la desigualdad obtenida, invertimos el sentido de la misma. Finalmente, argumentando como en el caso $p > 1$, se caracteriza la igualdad de dicha desigualdad inversa, dándose ésta si y sólo si x e y son proporcionales. Esto finaliza la prueba.

P4. Daremos una última prueba de este resultado, como aplicación directa de la quasilinealización (véase el teorema 2.1.6). El único inconveniente de esta sencilla demostración es que, en principio, no permite caracterizar el caso de igualdad; por ello, nos centraremos aquí sólo en la obtención de la desigualdad.

Supongamos que $p > 1$ (el otro caso se puede demostrar de forma totalmente similar). Entonces, si $L = \{z = (z_1, \ldots, z_n) : \sum_{i=1}^n z_i^q = 1\}$, por (2.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} &= \sup_{z \in L} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i \le \sup_{z \in L} \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sup_{z \in L} \sum_{i=1}^n y_i z_i \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

□

Observación 2.3. *La desigualdad de Minkowski* (2.14) *fue probada primero en la forma* (2.13) *por F. Riesz, y por esta razón, la desigualdad de Minkowski es conocida a veces como* ***desigualdad de Minkowski-Riesz****. Por el mismo motivo, la desigualdad de Hölder se llama desigualdad de Hölder-Riesz cuando se escribe de la forma*

$$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Concluimos la sección demostrando otras relaciones entre medias que, a su vez, se pueden obtener como consecuencia de la desigualdad de Hölder.

Teorema 2.2.2 (Desigualdad de Liapunov)**.** *Sean* $a = (a_1, \ldots, a_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ *y sean* $0 < t < s < r < +\infty$*. Entonces*

$$\left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^s\right)^{r-t} \leq \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^t\right)^{r-s} \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^r\right)^{s-t},$$

dándose la igualdad si y sólo si $a_1 = \cdots = a_n$ *(para cualquier* w*).*

Demostración. Tomamos en la desigualdad (2.6) $x_i^p = a_i^t$, $y_i^q = a_i^r$, $p = (r-t)/(r-s)$ y $q = (r-t)/(s-t)$, de forma que $1/p + 1/q = 1$. Entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^n w_i a_i^{t/p} a_i^{r/q} \leq \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^t\right)^{(r-s)/(r-t)} \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^r\right)^{(s-t)/(r-t)},$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^n w_i a_i^{t(r-s)/(r-t)} a_i^{r(s-t)/(r-t)} \leq \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^t\right)^{(r-s)/(r-t)} \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^r\right)^{(s-t)/(r-t)}.$$

Luego

$$\sum_{i=1}^n w_i a_i^s \leq \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^t\right)^{(r-s)/(r-t)} \left(\sum_{i=1}^n w_i a_i^r\right)^{(s-t)/(r-t)},$$

y elevando ambos términos a $r - t > 0$ se obtiene el resultado. El caso de igualdad es consecuencia inmediata del correspondiente para (2.6). En efecto, habría igualdad si y sólo si los vectores a^t y a^r son proporcionales, lo que equivale a que $a_1 = \cdots = a_n$. □

Concluimos la sección con la que ha venido a denominarse en la literatura como desigualdad de Radon.

Teorema 2.2.3 (Desigualdad de Radon). *Sean* $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ *y sea* $1 < p < +\infty$*. Entonces*

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^p}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{p-1}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}},$$

con igualdad si y sólo si los vectores a *y* b *son proporcionales.*

Demostración. Usamos (2.3) para $x_i = a_i/b_i^{1/q}$ e $y_i = b_i^{1/q}$, donde q ha de satisfacer la condición $1/p + 1/q = 1$, es decir, $q = p/(p-1)$. Entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{b_i^{1/q}} b_i^{1/q} \le \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{b_i^{1/q}}\right)^p\right]^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{1/q}.$$

Operando en ambos términos se obtiene

$$\sum_{i=1}^n a_i \le \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p/q}}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{(p-1)/p},$$

que es equivalente a la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n a_i \le \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{(p-1)/p}.$$

Entonces,

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)^{(p-1)/p}} \le \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i^p}{b_i^{p-1}}\right)^{1/p},$$

y elevando a $p > 1$ en ambos términos de la desigualdad, se obtiene el resultado deseado.

El caso de igualdad se desprende también de (2.3), y se da si y sólo si el vector de componentes $\left(a_i/b_i^{1/q}\right)^p$, $i = 1, \dots, n$, es proporcional a b, lo que equivale a que a y b sean proporcionales. □

2.3. Versiones integrales de las desigualdades de Hölder y de Minkowski

Extender el concepto de una media de números reales a funciones, por medio de integrales, es un paso natural. En muchos textos, al valor $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ se le denomina media aritmética de f en el intervalo $[a, b]$. Esto se justifica por el hecho de que la aproximación por sumas de Riemann de esta cantidad se corresponde con las medias aritméticas de valores de f en puntos distribuidos en el intervalo $[a, b]$.

Comenzamos la sección demostrando la versión integral de la desigualdad de Jensen (1.1). A grosso modo, la combinación convexa de números en el caso discreto se traduce, para el caso funcional, en la integral de la función sobre un espacio de medida uno.

Teorema 2.3.1 (Desigualdad de Jensen)**.** *Sea Ω un conjunto no vacío y sea μ una medida finita sobre Ω. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable (respecto de μ) y sea $\phi : I = (a, b) \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(\Omega) \subset I$, una función convexa. Entonces*

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right) \le \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega (\phi \circ f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x). \tag{2.16}$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, trabajando con $\bar{\mu} = \mu/\mu(\Omega)$ si fuera necesario, podemos suponer que $\mu(\Omega) = 1$ (en otras palabras, suponemos que μ es una medida de probabilidad).

Escribiendo $A = \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, observamos que $A \in I$, ya que $a < f(x) < b$ para todo $x \in \Omega$ y, así,

$$a = \int_\Omega a\,\mathrm{d}\mu(x) < \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) < \int_\Omega b\,\mathrm{d}\mu(x) = b.$$

Además, observemos que $\phi \circ f$ es medible al ser composición de funciones medibles. Entonces, por el lema 1.1.2 se tiene que

$$\phi(A) + m(\bar{x} - A) \leq \phi(\bar{x}), \quad \text{para todo } \bar{x} \in (a, b).$$

Tomando ahora $\bar{x} = f(x)$ obtenemos

$$\phi(A) + m(f(x) - A) \leq (\phi \circ f)(x),$$

e integrando concluimos que

$$\phi(A) + m\left(\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) - A\right) \leq \int_\Omega (\phi \circ f)(x)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

donde, sustituyendo A por su valor, llegamos a (2.16). □

A continuación presentamos la versión integral de la desigualdad de Hölder. Este resultado nos hará de nexo natural con el siguiente capítulo, ya que uno de los objetivos principales de éste será obtener la denominada desigualdad de Prékopa-Leindler, desigualdad opuesta a la versión integral de Hölder.

Teorema 2.3.2 (Desigualdad de Hölder). *Sea Ω un conjunto no vacío y sea μ una medida sobre Ω. Sean $1 \leq p, q \leq +\infty$ para los cuales se verifica la relación $1/p + 1/q = 1$. Si $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ son funciones medibles con integral no nula entonces*

$$\int_\Omega (fg)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leq \left(\int_\Omega f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \left(\int_\Omega g^q(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}, \tag{2.17}$$

dándose la igualdad, para $p, q \neq +\infty$, y con f^p, g^q integrables, si y sólo si f^p y g^q son proporcionales para casi todo punto.

Demostración. El caso $p = +\infty$ es inmediato, entendiéndose, como es habitual, que

$$\left[\int_\Omega f^\infty(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right]^{1/\infty} = \sup_{x \in \Omega} f(x),$$

por lo que asumiremos que $1 < p, q < +\infty$. Podemos suponer además, sin pérdida de generalidad, que las funciones f^p y g^q son ambas integrables, ya que si alguna de ellas no lo fuera, el resultado sería inmediato.

De esta forma, por (1.4), se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x)}{\left(\int_\Omega f^p(x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_\Omega g^q(x)\ \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}} &= \left(\frac{f^p(x)}{\int_\Omega f^p(x)\ \mathrm{d}\mu(x)}\right)^{1/p}\left(\frac{g^q(x)}{\int_\Omega g^q(x)\ \mathrm{d}\mu(x)}\right)^{1/q}\\ &\leq \frac{1}{p}\left(\frac{f^p(x)}{\int_\Omega f^p(x)\ \mathrm{d}\mu(x)}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{g^q(x)}{\int_\Omega g^q(x)\ \mathrm{d}\mu(x)}\right).\end{aligned}$$

La prueba concluye integrando ambos lados y aplicando el caso de igualdad en (1.4). □

Obsérvese en primer lugar que, en particular, del resultado anterior se desprende que si f^p y g^q son ambas integrables, entonces el producto fg también lo es. Por otro lado, si $-\infty \leq p, q \leq 1$, se verifica la desigualdad contraria a la anterior, al igual que ocurría en el caso discreto (2.4); el mismo argumento que se utilizó allí sigue siendo válido para probar la correspondiente versión integral.

Finalizamos la sección demostrando la versión integral de la desigualdad de Minkowski.

Teorema 2.3.3 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Sean Ω un conjunto no vacío y μ una medida sobre Ω. Sea $1 \leq p \leq +\infty$ y sean $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones medibles. Entonces*

$$\left(\int_\Omega (f+g)^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega g^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}, \qquad (2.18)$$

con igualdad, para $p \neq +\infty$, y con f^p, g^p integrables, si y sólo si f y g son proporcionales para casi todo punto.

Demostración. El caso $p = +\infty$ es de nuevo inmediato y, además, podemos suponer que f y g tienen integral no nula. Más aún, de la convexidad de la función $\varphi(t) = t^p$, $t \geq 0$, se tiene que $(f+g)^p \leq 2^{p-1}(f^p + g^p)$, y así, podemos suponer que f^p y g^p son integrables, implicando esto que $(f+g)^p$ también lo es. Ahora, siguiendo el mismo razonamiento que el llevado a cabo en la segunda prueba de (2.14), y utilizando (2.17), se tiene

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+g)^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x) &= \int_\Omega \big(f(f+g)^{p-1}\big)(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_\Omega \big(g(f+g)^{p-1}\big)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\leq \left(\int_\Omega f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_\Omega (f+g)^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{(p-1)/p}\\ &\quad + \left(\int_\Omega g^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\left(\int_\Omega (f+g)^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{(p-1)/p}\\ &= \left[\left(\int_\Omega f^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega g^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}\right]\left(\int_\Omega (f+g)^p(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right)^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

lo que prueba (2.18). El caso de igualdad es una consecuencia inmediata del correspondiente caso de igualdad en (2.17). □

Obsérvese que si $p < 1$, $p \neq 0$, la desigualdad de Minkowski tiene sentido contrario, como ocurría en el caso discreto.

2.4. Sumas de potencias

Concluimos el capítulo haciendo un breve estudio de la monotonía de la suma de potencias de números reales, lo que también nos permitirá obtener otra desigualdad de tipo Hölder. Para ello, comenzamos dando la siguiente definición.

Definición 2.4.1. *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$. *Entonces, se define*

$$\mathcal{S}_n(r, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r, \ r \in \mathbb{R},$$
$$\mathcal{R}_n(r, x) = \mathcal{S}_n^{1/r}(r, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{1/r}, \ r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Salvo que haya confusión, omitiremos n y x, y escribiremos las sumas anteriores como $\mathcal{S}(r)$ y $\mathcal{R}(r)$, respectivamente. En primer lugar, estudiamos la monotonía de $\mathcal{R}$.

Proposición 2.4.2. *La función $\mathcal{R}$ es estrictamente decreciente sobre la semirrecta real positiva y sobre la semirrecta real negativa; esto es, si $r < s$ tienen igual signo, entonces*

$$\mathcal{R}(s) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^s\right)^{1/s} < \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{1/r} = \mathcal{R}(r). \tag{2.19}$$

Demostración. Supongamos que $r < s$ y que $\mathcal{S}(s) = \sum_{i=1}^{n} x_i^s = 1$. Como $x_i > 0$ entonces $x_i^s < 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Distinguimos dos casos:

- $s > r > 0$. En este caso, como $x_i^s < 1$ y $s > 0$, entonces $x_i < 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y, por tanto, al ser $r < s$, se tiene que $x_i^r > x_i^s$. Así, $\mathcal{S}(r) > \mathcal{S}(s) = 1$, y de nuevo por ser $r > 0$ se tiene que $\mathcal{R}(r) > 1 = \mathcal{R}(s)$.
- $r < s < 0$. Como $x_i^s < 1$ y $s < 0$, entonces $x_i > 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$ y, por tanto, al ser $r < s$, se tiene que $x_i^r < x_i^s$. Así, $\mathcal{S}(r) < \mathcal{S}(s) = 1$, y como $r < 0$, se tiene que $\mathcal{R}(r) > 1 = \mathcal{R}(s)$.

Esto completa la prueba para el caso especial $\mathcal{S}(s) = 1$. Ahora supongamos que $\mathcal{S}(s) = \sigma$ y pongamos, para cada $i = 1, \ldots, n$, $y_i = x_i/\sigma^{1/s} = y_i/\mathcal{R}(s)$. Entonces

$$\mathcal{S}(s, y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^s = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\mathcal{R}(s)}\right)^s = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^s}{\mathcal{S}(s)} = 1$$

y, por el caso anterior, $\mathcal{R}(s, y) > 1$, lo que implica que $\mathcal{R}(r)/\mathcal{R}(s) > 1$. □

Como consecuencia de este resultado obtenemos la siguiente desigualdad tipo Hölder.

Corolario 2.4.3. *Si* $p, q \in \mathbb{R}_{>0}$ *y* $1/p + 1/q > 1$ *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i < \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}.$$

Demostración. Sean $\lambda = 1/p + 1/q > 1$, $r = \lambda p > p$ y $r' = \lambda q > q$. Entonces,

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{1 + \frac{p}{q}} + \frac{1}{1 + \frac{q}{p}} = \frac{2 + \frac{p}{q} + \frac{q}{p}}{\left(1 + \frac{p}{q}\right)\left(1 + \frac{q}{p}\right)} = 1,$$

y así, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{1/r} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^{r'}\right)^{1/r'} && \text{(por (2.3))} \\ &= \mathcal{R}(r)\mathcal{R}(r') < \mathcal{R}(p)\mathcal{R}(q), && \text{(por (2.19))}, \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

□

Finalizamos la sección, y con ello el capítulo, demostrando la log-convexidad de las funciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$:

Proposición 2.4.4. *$\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son funciones log-convexas. En otras palabras, si* $0 \leq \lambda \leq 1$, *entonces*

$$\mathcal{S}\big((1-\lambda)r + \lambda s\big) \leq \mathcal{S}^{1-\lambda}(r)\mathcal{S}^{\lambda}(s)$$

para todo $r, s \in \mathbb{R}$*; del mismo modo, si* $r, s > 0$, *entonces*

$$\mathcal{R}\big((1-\lambda)r + \lambda s\big) \leq \mathcal{R}^{1-\lambda}(r)\mathcal{R}^{\lambda}(s).$$

Demostración. Primero consideraremos $\mathcal{S}$. Para dicha función, usando (2.10), se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{S}((1-\lambda)r + \lambda s) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^{(1-\lambda)r+\lambda s} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^r\right)^{1-\lambda} \left(x_i^s\right)^{\lambda} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^r\right)^{1-\lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^s\right)^{\lambda} = \mathcal{S}^{1-\lambda}(r)\mathcal{S}^{\lambda}(s). \end{aligned}$$

Por tanto $\mathcal{S}$ es log-convexa. Ahora estudiemos $\mathcal{R}$, para lo cual distinguimos dos casos:

- Si $\mathcal{R}(r) > 1$ entonces, al ser $r > 0$, $\mathcal{S}(r) > 1$ y, así,

  $$\log \mathcal{R}(r) = \frac{1}{r} \log \mathcal{S}(r) = f(r)g(r),$$

  donde $f(r) = 1/r$ y $g(r) = \log \mathcal{S}(r)$ son funciones convexas y monótonas. Usando la proposición 1.1.3 se deduce que $\log \mathcal{R} = fg$ también es una función convexa.

- Si $\mathcal{R}(r) = \rho < 1$, elegimos $\rho' \in (0, \rho)$ y escribimos $x_i' = x_i/\rho'$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Entonces se tiene que

$$\mathcal{R}(x', r) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i')^r \right)^{1/r} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^r}{(\rho')^r} \right)^{1/r} = \frac{1}{\rho'} \mathcal{R}(r) = \frac{\rho}{\rho'} > 1,$$

y en consecuencia, por el caso anterior, $\mathcal{R}(x', r)$ es log-convexa. Por otro lado,

$$\log \mathcal{R}(x', r) = \log \frac{\mathcal{R}(r)}{\rho'} = \log \mathcal{R}(r) - \log \rho',$$

lo que implica que $\log \mathcal{R}$ es convexa. Esto finaliza la prueba. $\square$

Capítulo 3

Las desigualdades de Brunn-Minkowski y sus versiones funcionales

La desigualdad de Brunn-Minkowski es uno de los resultados fundamentales en Convexidad, y proporciona una estimación del volumen de la suma de dos cuerpos convexos. Fue demostrada primero por Brunn mediante un argumento ingenioso, aunque algo impreciso, siendo Minkowski quien proporcionó una demostración correcta y completa del resultado, incluyendo la caracterización del caso de igualdad. La desigualdad de Brunn-Minkowski estuvo inspirada en el problema isoperimétrico, y durante muchos años se consideró que la desigualdad "pertenecía" a la Geometría, donde su importancia ha sido ampliamente reconocida. Por ejemplo, esta desigualdad implica el hecho, intuitivamente evidente, pero nada sencillo de demostrar, de que la función que da el valor del volumen $(n-1)$-dimensional de secciones por hiperplanos paralelos de un cuerpo convexo verifica que, dadas tres secciones paralelas, la intermedia no puede tener volumen más pequeño que las otras dos. Sin embargo, alrededor de la mitad del siglo XX, diversos matemáticos (Lusternik, Hadwiger, Ohmann...) extendieron este resultado a contextos mucho más generales, incluyendo la clase de los conjuntos medibles Lebesgue, comenzando entonces la desigualdad a moverse en los dominios del Análisis.

En este capítulo estudiaremos diversas versiones (todas equivalentes) de la desigualdad de Brunn-Minkowski. En particular, veremos su versión funcional, la desigualdad de Prékopa-Leindler, y generalizaremos este resultado obteniendo las denominadas desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb. Veremos finalmente cómo, a partir de estas desigualdades funcionales, es posible obtener las diferentes versiones de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Los conceptos y resultados que hemos incluido en este capítulo han sido estudiados originalmente en los artículos [1], [2], [4] y [5].

3.1. Preliminares

Comenzamos este capítulo con una breve sección dedicada a introducir la notación, definiciones y resultados básicos que necesitaremos para poder abordar el estudio de las distintas versiones de la desigualdad de Brunn-Minkowski. Ésta es una importante desigualdad geométrica que relaciona tres conceptos fundamentales en convexidad: el volumen, los cuerpos convexos y la suma de Minkowski. Estudiamos a continuación, brevemente, cada uno de ellos.

Definición 3.1.1. *Se dice que un conjunto K de $\mathbb{R}^n$ es **convexo** si, dados dos puntos cualesquiera de K, el segmento que los une está totalmente contenido en el conjunto, es decir, si la combinación convexa $(1-\lambda)x + \lambda y \in K$ para $x, y \in K$ y $0 \leq \lambda \leq 1$.*

A partir de ahora, cuando se hable de un **cuerpo convexo** nos estaremos refiriendo a un conjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^n$ no vacío. Se representará por $\mathcal{K}^n$ al conjunto de todos los cuerpos convexos del espacio euclídeo n-dimensional.

La suma de Minkowski no es más que la suma vectorial de conjuntos, y es la forma más sencilla de operar con conjuntos convexos en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.1.2. *La **suma de Minkowski** de dos conjuntos cualesquiera A y B de $\mathbb{R}^n$ se define como*

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

Si $A = \{x\}$ es un conjunto unipuntual, escribiremos simplemente $x + B$ para representar $\{x\} + B$. Además, como es habitual, el producto de conjuntos por escalares (no negativos) se denotará por $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$, para $\lambda \geq 0$.

Es fácil ver que la suma de Minkowski conserva la convexidad y la compacidad. Además, si $A, B, C, D \subset \mathbb{R}^n$ con $A \subset C$ y $B \subset D$, entonces $(A + B) \subset (C + D)$. Otra propiedad interesante en la que juega un papel fundamental la convexidad es la siguiente: si $K \in \mathcal{K}^n$ y $\lambda, \mu > 0$, entonces $\lambda K + \mu K = (\lambda + \mu)K$.

Pasamos finalmente a estudiar el volumen y sus principales propiedades.

Definición 3.1.3. *El **volumen n-dimensional** de un cuerpo convexo K de $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{vol}(K)$, es la medida de Lebesgue del conjunto en $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 3.1.4. *i)* $\mathrm{vol}(K)$ *se mantiene inalterado bajo movimientos rígidos de K.*

ii) El volumen es homogéneo de grado n, i.e., $\mathrm{vol}(\mu K) = \mu^n \mathrm{vol}(K)$*, para $\mu \geq 0$.*

iii) $\mathrm{vol}(K) = 0$ *si, y sólo si, K tiene dimensión menor o igual que $n - 1$.*

iv) Si $K \subset K'$, entonces $\mathrm{vol}(K) \leq \mathrm{vol}(K')$*, dándose la igualdad si y sólo si* $\mathrm{vol}(K') = 0$ *o K y K' coinciden.*

Además, si $K \in \mathcal{K}^n$ es un cuerpo convexo de $\mathbb{R}^n$ con dimensión $\dim K = i$, representaremos por $\mathrm{vol}_i(K)$ el volumen i-dimensional de K medido en $\mathbb{R}^i \equiv \operatorname{aff} K$, donde $\operatorname{aff} K$ denota la envoltura afín de K (esto es, el menor subespacio afín que lo contiene). Recordemos que la dimensión de K no es más que la dimensión de su envoltura afín.

En alguna ocasión, trataremos conjuntos A no necesariamente convexos ni compactos, con los que pretenderemos extender algún resultado relativo al volumen. Así pues, definiremos también el volumen de un conjunto medible (Lebesgue) $A \subset \mathbb{R}^n$ como la medida de Lebesgue del conjunto en $\mathbb{R}^n$, y lo denotaremos también por $\mathrm{vol}(A)$. Una propiedad interesante de la medida de Lebesgue que nos será de utilidad es la siguiente:

Proposición 3.1.5. *La medida de Lebesgue es* ***regular****, es decir, si A es medible Lebesgue,*

$$\mathrm{vol}(A) = \sup\bigl\{\mathrm{vol}(F) : F \subset A,\ F \ \textit{compacto}\bigr\} = \inf\bigl\{\mathrm{vol}(G) : G \supset A,\ G \ \textit{abierto}\bigr\}.$$

Un teorema del que haremos uso continuamente es la siguiente versión del **teorema de Fubini**:

Teorema 3.1.6 (Teorema de Fubini)**.** *Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función medible no negativa, con $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Por tanto, para cualquier función medible no negativa $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, se verifica

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}\bigl(\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) \geq t\}\bigr)\,\mathrm{d}t,$$

relación que se conoce como el **principio de Cavalieri**.

3.2. La desigualdad de Brunn-Minkowski (BM)

La desigualdad de Brunn-Minkowski es uno de los resultados fundamentales en la Teoría de los Conjuntos Convexos. De esta desigualdad pueden extraerse muchos resultados de gran importancia, por lo que ha sido durante muchos años, y aún sigue siendo, motivo de estudio e investigación.

Teorema 3.2.1 (Desigualdad de Brunn-Minkowski)**.** *Sean K y L dos cuerpos convexos de $\mathbb{R}^n$, y sea $\lambda \in (0,1)$. Entonces*

$$\mathrm{vol}(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geq \lambda \mathrm{vol}(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}(L)^{1/n},$$

dándose la igualdad si, y sólo si, K y L están en hiperplanos paralelos (si tienen dimensión menor que n) o son homotéticos (si tienen dimensión n ó uno de ellos es un conjunto unipuntual).

La convexidad, en el resultado anterior, juega un papel relevante a la hora de caracterizar el caso de igualdad. En este capítulo, nos centraremos en el estudio de la desigualdad mediante el uso de técnicas analíticas que involucran la manipulación de medias de números reales, en el espíritu de lo estudiado en los capítulos precedentes.

La desigualdad de Brunn-Minkowski se presenta a menudo en el contexto de conjuntos compactos: si A, $B \subset \mathbb{R}^n$ son conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, y $\lambda \in (0,1)$, entonces

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq \lambda \mathrm{vol}(A)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}(B)^{1/n}. \tag{3.1}$$

La desigualdad anterior se introduce a veces en una forma (en principio) más débil, a menudo referida como su **versión multiplicativa** o versión libre de dimensión:

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mathrm{vol}(A)^{\lambda}\mathrm{vol}(B)^{1-\lambda}. \tag{3.2}$$

Otra versión equivalente de la desigualdad de Brunn-Minkowski que aparece en la literatura es la siguiente:

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mathrm{mín}\{\mathrm{vol}(A), \mathrm{vol}(B)\}. \tag{3.3}$$

De la monotonía de las medias, (1.9), para los valores $1/n$, 0 y $-\infty$, está claro que (3.1) implica (3.2), y esta última a su vez implica (3.3). Sin embargo, todas ellas son equivalentes entre sí a causa de la homogeneidad del volumen.

Observación 3.1. *Antes de proseguir, veamos cómo se puede obtener la desigualdad de Brunn-Minkowski* (3.1) *para el caso más general de conjuntos medibles A, B tales que $\lambda A + (1-\lambda)B$ es también medible para $\lambda \in (0,1)$ fijado. En efecto, dados cualesquiera $K \subset A$, $L \subset B$ compactos, y aplicando el resultado precedente, se tiene que*

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq \mathrm{vol}(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geq \lambda \mathrm{vol}(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}(L)^{1/n}.$$

El resultado se deduce ahora teniendo en cuenta la regularidad de la medida de Lebesgue (proposición 3.1.5) y tomando supremos (sobre $K \subset A$, $L \subset B$) en ambos términos de la desigualdad. El mismo razonamiento funciona para las versiones equivalentes (3.2) *y* (3.3)*, por lo que, de ahora en adelante, cada vez que demos una prueba de la desigualdad de Brunn-Minkowski (en cualquiera de sus formas), nos restringiremos, por simplicidad (y sin pérdida de generalidad) al caso compacto.*

Nuestro objetivo final en este capítulo va a ser demostrar las desigualdades (3.1), (3.2) y (3.3) como consecuencias de las desigualdades funcionales de Prékopa-Leindler y de Borell-Brascamp-Lieb. Para ello, comenzamos probando la versión unidimensional de la desigualdad de Brunn-Minkowski, necesaria para el desarrollo de los resultados que presentaremos a continuación.

Lema 3.2.2 (Versión unidimensional de la desigualdad de Brunn-Minkowski)**.** *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}$. Entonces*

$$\mathrm{vol}(A + B) \geq \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B).$$

Demostración. Sean $a := \max A \in A$, $b := \min B \in B$. Como el volumen es invariante por traslaciones, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $a = b = 0$, y por tanto se tiene que $A \cap B = \{0\}$. De esta forma,

$$\mathrm{vol}(A + B) \geq \mathrm{vol}(A \cup B) = \mathrm{vol}(A) + \mathrm{vol}(B),$$

donde la desigualdad se debe a que $A = A + 0 \subset A + B$ y $B = 0 + B \subset A + B$, y la igualdad se da ya que $A \cap B = \{0\}$ tiene medida nula. □

La versión integral de la desigualdad de Brunn-Minkowski se conoce como la desigualdad de Prékopa-Leindler, inversa de la desigualdad de Hölder (2.17). Este resultado tiene un gran interés en sí mismo y nos va a servir para dar una demostración de la desigualdad de Brunn-Minkowski (en su versión multiplicativa).

Antes de estudiar esta desigualdad, probaremos el siguiente resultado auxiliar, que será de utilidad en las demostraciones posteriores.

Lema 3.2.3. *Sea $\lambda \in (0, 1)$ y sean $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones medibles verificando*

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), g(y)\}, \tag{3.4}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$. Además, supondremos que f y g son acotadas y que $\sup f = \sup g$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}x + (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}x.$$

Demostración. Sea $C = \sup f = \sup g$. Entonces, para todo $0 \leq t < C$ los conjuntos $\{x : f(x) \geq t\}$, $\{y : g(y) \geq t\} \neq \emptyset$ y, además, por (3.4),

$$\{z : h(z) \geq t\} \supset \lambda\{x : f(x) \geq t\} + (1 - \lambda)\{y : g(y) \geq t\}.$$

Sin pérdida de generalidad, por la regularidad del volumen, podemos suponer que la suma $\lambda\{x : f(x) \geq t\} + (1 - \lambda)\{y : g(y) \geq t\}$ es medible y así, por el lema 3.2.2, válido para conjuntos medibles, obtenemos

$$\mathrm{vol}_1(\{z : h(z) \geq t\}) \geq \lambda \mathrm{vol}_1(\{x : f(x) \geq t\}) + (1 - \lambda)\mathrm{vol}_1(\{y : g(y) \geq t\}).$$

Por tanto, por el Teorema de Fubini (teorema 3.1.6), tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \mathrm{vol}_1(\{z \in \mathbb{R} : h(z) \geq t\}) \,\mathrm{d}t \\ &\geq \lambda \int_0^C \mathrm{vol}_1(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq t\}) \,\mathrm{d}t + (1 - \lambda) \int_0^C \mathrm{vol}_1(\{y \in \mathbb{R} : g(y) \geq t\}) \,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}x + (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

concluyéndose así la prueba. □

Teorema 3.2.4 (Desigualdad de Prékopa-Leindler (PL))**.** *Sea* $\lambda \in (0,1)$ *y sean* $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ *funciones medibles no negativas tales que, para cualesquiera puntos* $x, y \in \mathbb{R}^n$*,*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}. \tag{3.5}$$

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \, \mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}x \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \, \mathrm{d}x \right)^{1-\lambda}. \tag{3.6}$$

Demostración. En primer lugar, podemos suponer que f y g son funciones acotadas, puesto que si no lo fueran, aplicando la definición de integral de Lebesgue para funciones no negativas, a saber

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}x = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} s \, \mathrm{d}x : 0 \leq s \leq f, \ s \text{ función simple} \right\}, \tag{3.7}$$

podemos obtener la desigualdad para funciones no necesariamente acotadas a partir del resultado para funciones acotadas. Veamos cómo.

Supongamos que f y g son funciones no negativas y que el resultado es cierto para funciones acotadas. De esta forma, si s_1, s_2 son funciones simples tales que $0 \leq s_1 \leq f$, $0 \leq s_2 \leq g$, entonces, para cualesquiera x, $y \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda} \geq s_1(x)^\lambda s_2(y)^{1-\lambda},$$

y como toda función simple es acotada,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \, \mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} s_1 \, \mathrm{d}x \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} s_2 \, \mathrm{d}x \right)^{1-\lambda}.$$

Ahora, como dicha desigualdad es cierta para todo par de funciones simples s_1, s_2 en las condiciones anteriores, por (3.7) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \, \mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}x \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \, \mathrm{d}x \right)^{1-\lambda}.$$

Así pues, supongamos que f y g son funciones acotadas, y procedamos a probar el resultado por inducción en la dimensión n del espacio euclídeo.

- $n = 1$: Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $\sup f = \sup g = 1$. En efecto, si $\sup f = c > 0$ y $\sup g = d > 0$, entonces $\sup(f/c) = \sup(g/d) = 1$ y, como por hipótesis,

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{c} \right)^\lambda \left(\frac{g(x)}{d} \right)^{1-\lambda} &= \frac{1}{c^\lambda d^{1-\lambda}} f(x)^\lambda g(x)^{1-\lambda} \\ &\leq \frac{1}{c^\lambda d^{1-\lambda}} h(\lambda x + (1-\lambda)y), \end{aligned}$$

entonces se tendría que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{h}{c^\lambda d^{1-\lambda}}\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f}{c}\,\mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{g}{d}\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda},$$

de donde se concluiría la desigualdad (3.6) para el caso $n = 1$. Obsérvese que si c fuese cero (respectivamente $d = 0$), entonces $f \equiv 0$ (respectivamente $g \equiv 0$) y, en consecuencia, la desigualdad sería trivial.

Por tanto, podemos suponer que $\sup f = \sup g = 1$. Entonces, aplicando el lema 3.2.3 (nótese que se cumple (3.4) debido a la hipótesis (3.5) y a la monotonía de las medias (1.9)) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} h\,\mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}x + (1-\lambda)\int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}x. \tag{3.8}$$

Aplicando la desigualdad (AG) (véase (1.4)) en la parte derecha de (3.8) concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}} h\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda},$$

lo que completa la prueba para el caso $n = 1$.

- Supongamos ahora que el resultado es cierto para n y veamos que se verifica también para $n+1$. Sean $f, g, h : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ en las condiciones del teorema. Fijamos t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ y sea $t_3 = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$. Definimos las funciones $f_{t_1}, g_{t_2}, h_{t_3} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f_{t_1}(x) &= f(t_1, x),\\ g_{t_2}(y) &= g(t_2, y),\\ h_{t_3}(z) &= h(t_3, z). \end{aligned}$$

Como las nuevas funciones consisten en fijar la primera coordenada en las funciones originales f, g y h, entonces éstas satisfacen la hipótesis del teorema y, por hipótesis de inducción, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_{t_3}\,\mathrm{d}x \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{t_1}\,\mathrm{d}x\right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{t_2}\,\mathrm{d}x\right)^{1-\lambda}. \tag{3.9}$$

Además, nótese que esta desigualdad se verifica para cualesquiera t_1, t_2, t_3 tales que $t_3 = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$.

Definimos ahora las funciones $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,\mathrm{d}x,\\ \tilde{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} g_t(x)\,\mathrm{d}x,\\ \tilde{h}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} h_t(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Observemos que, por (3.9), las funciones $\tilde{f}, \tilde{g}$ y $\tilde{h}$ están en las condiciones del caso $n = 1$ que hemos probado anteriormente, y por tanto

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(teorema de Fubini)}\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} h_{t_3}(z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}t_3 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(t_3)\,\mathrm{d}t_3 \quad \text{((PL) para } n = 1)\\
&\qquad \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t_1)\,\mathrm{d}t_1 \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t_2)\,\mathrm{d}t_2 \right)^{1-\lambda}\\
&\qquad = \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} f_{t_1}(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t_1 \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} g_{t_2}(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t_2 \right)^{1-\lambda} \quad \text{(teorema de Fubini)}\\
&\qquad = \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(u)\,\mathrm{d}u \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(u)\,\mathrm{d}u \right)^{1-\lambda},
\end{aligned}$$

lo que completa la inducción. □

Ahora vamos a ver cómo, a partir de la desigualdad de Prékopa-Leindler, se obtiene fácilmente la desigualdad (3.2) de Brunn-Minkowski en su versión multiplicativa.

Corolario 3.2.5 (Desigualdad de Brunn-Minkowski (versión multiplicativa))**.** *Sean A, $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, y sea $\lambda \in (0, 1)$. Entonces*

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mathrm{vol}(A)^{\lambda}\mathrm{vol}(B)^{1-\lambda}.$$

Demostración. Consideramos las funciones característica de los conjuntos A, B y $\lambda A + (1 - \lambda)B$, que denotamos, como es usual, por χ_A, χ_B y $\chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}$. Si x, $y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\chi_A(x)^{\lambda}\chi_B(y)^{1-\lambda} = 1 > 0, \text{ si y sólo si, } \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 1.$$

Por tanto, se verifica la hipótesis (3.5) para las funciones $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ y $h = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}$, y así, usando la desigualdad de Prékopa-Leindler obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\lambda A + (1 - \lambda)B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}(x)\,\mathrm{d}x\\
&\geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A\,\mathrm{d}x \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_B\,\mathrm{d}x \right)^{1-\lambda} = \mathrm{vol}(A)^{\lambda}\mathrm{vol}(B)^{1-\lambda},
\end{aligned}$$

lo que finaliza la prueba. □

3.3. Una generalización de (PL): las desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb

Como hemos visto en la sección anterior, la versión funcional de la desigualdad de Brunn-Minkowski, la desigualdad de Prékopa-Leindler, se basa en una relación (la hipótesis (3.5)) que involucra la media geométrica $M_0\big((f(x),g(y)),(\lambda,1-\lambda)\big)$, lo que permite obtener una desigualdad "similar" en aspecto, (3.6), pero esta vez para las integrales de las respectivas funciones. En este punto, cabe preguntarse si un resultado análogo podría obtenerse intercambiando el papel de M_0 por el de otras medias M_p (con $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$). La respuesta a esta cuestión vendrá dada por las denominadas desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb (teorema 3.3.2). De nuevo, comenzamos viendo el caso unidimensional.

Teorema 3.3.1. *Sean $\lambda \in (0,1)$, $p \geq -1$ y sean $f,g,h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones medibles no negativas, donde f y g tienen integral no nula, tales que*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \big(\lambda f(x)^p + (1-\lambda)g(y)^p\big)^{1/p}, \tag{3.10}$$

para cualesquiera $x,y \in \mathbb{R}$ con $f(x), g(y) > 0$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}x \geq \left[\lambda\left(\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}x\right)^q + (1-\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}x\right)^q\right]^{1/q},$$

siendo $q = p/(p+1) \in [-\infty, 1]$.

Demostración. El caso $p = 0$ es la ya probada desigualdad de Prékopa-Leindler, así que en lo que sigue consideraremos $p \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, usando un razonamiento anterior, podemos suponer que f y g son funciones acotadas. Así, podemos definir las funciones $F, G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dadas por

$$F(x) = \frac{f(x)}{\sup f}, \quad G(x) = \frac{g(x)}{\sup g},$$

y definamos $C_p = \big(\lambda(\sup f)^p + (1-\lambda)(\sup g)^p\big)^{1/p}$. Obsérvese que F, G y C_p están bien definidos ya que f y g tienen integral no nula. Entonces, si $p \neq +\infty$, a partir de (3.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
h(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \big(\lambda f(x)^p + (1-\lambda)g(y)^p\big)^{1/p} \\
&= \big(\lambda(\sup f)^p F(x)^p + (1-\lambda)(\sup g)^p G(y)^p\big)^{1/p} \\
&= C_p\left(\frac{\lambda(\sup f)^p F(x)^p + (1-\lambda)(\sup g)^p G(y)^p}{C_p^p}\right)^{1/p} \\
&= C_p\big(\theta F(x)^p + (1-\theta)G(y)^p\big)^{1/p} \geq C_p \,\text{mín}\{F(x), G(y)\},
\end{aligned}$$

siendo

$$\theta = \frac{\lambda(\sup f)^p}{C_p^p} \in (0,1).$$

Por otro lado, para $p = +\infty$, de nuevo por (3.10) se tiene que

$$\begin{aligned}
h(\lambda x + (1-\lambda)y) &\geq \text{máx}\{f(x), g(y)\} = \text{máx}\big\{(\sup f)F(x), (\sup g)G(y)\big\} \\
&\geq C_{+\infty} \,\text{mín}\{F(x), G(y)\}.
\end{aligned}$$

Por tanto, si definimos $H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por $H(z) = h(z)/C_p$, hemos probado que

$$H(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \text{mín}\{F(x), G(y)\}$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$ (y para cualquier $p \geq -1$). Así, por el lema 3.2.3 obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} H \,\mathrm{d}x \geq \lambda \int_{\mathbb{R}} F \,\mathrm{d}x + (1-\lambda) \int_{\mathbb{R}} G \,\mathrm{d}x$$

o, equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}x \geq C_p \left[\lambda \frac{1}{\sup f} \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}x + (1-\lambda) \frac{1}{\sup g} \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}x \right]. \tag{3.11}$$

Ahora, si $p \neq +\infty$, por la desigualdad de Hölder (2.4) con respecto a los parámetros $-p \leq 1$ y $q = p/(p+1)$, aplicada a los números $a_1 = 1/\sup f$, $a_2 = 1/\sup g$, $b_1 = \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}x$ y $b_2 = \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}x$, obtenemos

$$\lambda a_1 b_1 + (1-\lambda) a_2 b_2 \geq \left(\lambda a_1^{-p} + (1-\lambda) a_2^{-p}\right)^{-1/p} \left(\lambda b_1^q + (1-\lambda) b_2^q\right)^{1/q},$$

es decir,

$$C_p \left[\lambda \frac{1}{\sup f} \int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}x + (1-\lambda) \frac{1}{\sup g} \int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}x \right] \geq \left[\lambda \left(\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}x \right)^q + (1-\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}} g \,\mathrm{d}x \right)^q \right]^{1/q},$$

finalizándose así la prueba para el caso $p \neq +\infty$.

Finalmente, observemos que para $p = +\infty$ (y por tanto $q = 1$) el resultado se desprende inmediatamente de (3.11). □

Demostramos finalmente el teorema más importante de este capítulo, a partir del cual pueden deducirse todos los anteriores (así como las diversas versiones de la desigualdad de Brunn-Minkowski).

Teorema 3.3.2 (Desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb)**.** *Sean $\lambda \in (0,1)$, $p \geq -1/n$ y sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ funciones medibles no negativas, donde f y g tienen integral no nula, tales que*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \left(\lambda f(x)^p + (1-\lambda) g(y)^p\right)^{1/p}, \tag{3.12}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $f(x), g(y) > 0$. Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \,\mathrm{d}x \geq \left[\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}x \right)^q + (1-\lambda) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}x \right)^q \right]^{1/q},$$

siendo $q = p/(np+1) \in [-\infty, 1/n]$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre n.

El caso $n = 1$ es el teorema 3.3.1. Supongamos por tanto que el resultado es cierto para $n \geq 1$, y veámoslo para $n+1$.

Sean $f, g, h : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ en las condiciones del teorema. Definimos de nuevo las funciones $f_{t_1}, g_{t_2}, h_{t_3} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ como sigue:

$$\begin{aligned} f_{t_1}(x) &= f(t_1, x), \\ g_{t_2}(y) &= g(t_2, y), \\ h_{t_3}(z) &= h(t_3, z), \end{aligned}$$

para $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ fijos tales que $\int_{\mathbb{R}^n} f_{t_1}(x)\,\mathrm{d}x, \int_{\mathbb{R}^n} g_{t_2}(x)\,\mathrm{d}x > 0$, y siendo $t_3 = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$. Estas nuevas funciones satisfacen las condiciones del teorema con $p \geq -1/(n+1) \geq -1/n$, y por tanto, por hipótesis de inducción se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_{t_3}\,\mathrm{d}x \geq \left[\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_{t_1}\,\mathrm{d}x\right)^q + (1-\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g_{t_2}\,\mathrm{d}x\right)^q\right]^{1/q}, \tag{3.13}$$

donde $q = p/(np+1)$. Ahora, consideramos las funciones $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)\,\mathrm{d}x, \\ \tilde{g}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} g_t(x)\,\mathrm{d}x, \\ \tilde{h}(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} h_t(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Entonces, (3.13) se traduce en

$$\tilde{h}(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \geq \left(\lambda \tilde{f}(t_1)^q + (1-\lambda)\tilde{g}(t_2)^q\right)^{1/q},$$

para cualesquiera $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ con $\tilde{f}(t_1), \tilde{g}(t_2) > 0$. Así, las funciones $\tilde{f}, \tilde{g}$ y $\tilde{h}$ están en las condiciones del teorema 3.3.1 ya que, puesto que $p \geq -1/(n+1)$, se tiene que $q = p/(np+1) \geq -1$. De esta forma, por (3.10),

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{h}\,\mathrm{d}x \geq \left[\lambda\left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\,\mathrm{d}x\right)^s + (1-\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}\,\mathrm{d}x\right)^s\right]^{1/s}$$

siendo

$$s = \frac{q}{q+1} = \frac{p/(np+1)}{p/(np+1)+1} = \frac{p}{(n+1)p+1}.$$

Esto finaliza la prueba pues, por el teorema de Fubini 3.1.6, podemos asegurar que

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{h}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h_t(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h(t,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(y)\,\mathrm{d}y,$$

y de la misma forma $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} f(y)\,\mathrm{d}y$ y $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} g(y)\,\mathrm{d}y$. $\square$

Ahora sí, estamos en disposición de probar la desigualdad de Brunn-Minkowski (3.1) como consecuencia del teorema de Borell-Brascamp-Lieb.

Corolario 3.3.3 (Desigualdad de Brunn-Minkowski)**.** *Sean A, $B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, y sea $\lambda \in (0,1)$. Entonces*

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq \lambda \mathrm{vol}(A)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}(B)^{1/n}.$$

Demostración. Como el volumen es invariante por traslaciones, la desigualdad se verifica inmediatamente si (al menos) uno de los conjuntos tiene medida nula. En efecto, si, por ejemplo, B tiene medida nula, entonces tomando $b \in B$ se tendría que

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq \mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)b)^{1/n} = \mathrm{vol}(\lambda A)^{1/n} = \lambda \mathrm{vol}(A)^{1/n}.$$

Así, sin pérdida de generalidad, supondremos que $\mathrm{vol}(A)\mathrm{vol}(B) > 0$.

Consideremos ahora las funciones características de A, B y $\lambda A+(1-\lambda)B$, y apliquemos el teorema 3.3.2 a las funciones $f = \chi_A$, $g = \chi_B$ y $h = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}$. Para ello, basta centrarse en los puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$ para los que $f(x), g(y) > 0$, lo que equivale a que $x \in A$ e $y \in B$. De esta forma, $\lambda x + (1-\lambda)y \in \lambda A + (1-\lambda)B$ y así, se verifica (3.12) para cualquier $p \geq -1/n$. Entonces, el teorema 3.3.2 nos asegura que

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \left(\lambda \mathrm{vol}(A)^q + (1-\lambda)\mathrm{vol}(B)^q\right)^{1/q}, \tag{3.14}$$

siendo $q = p/(np+1) \in [-\infty, 1/n]$. En particular, tomando $p = +\infty$ se tiene que $q = 1/n$ y, de esta manera,

$$\mathrm{vol}(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \left(\lambda \mathrm{vol}(A)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}(B)^{1/n}\right)^n,$$

como se quería demostrar. □

Este corolario nos da ciertas muestras del alcance de las desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb, pues permiten obtener de forma directa y simple (cada una de) las distintas versiones equivalentes de la desigualdad de Brunn-Minkowski. En efecto, (3.14), para $p = +\infty$ da la versión $(1/n)$-cóncava de dicha desigualdad, a saber, (3.1), mientras que $p = 0$ (y por tanto $q = 0$) y $p = -1/n$ ($q = -\infty$) convierte (3.14) en, respectivamente, las versiones multiplicativa, (3.2), y minimal, (3.3), de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

Pero la potencia de las desigualdades de Borell-Brascamp-Lieb no queda ahí, como mostraremos a continuación. A tal efecto, si uno examina las distintas pruebas conocidas de la desigualdad de Brunn-Minkowski, se cerciorará de que en la mayoría de ellas se explota el hecho de que el volumen es invariante por traslaciones, así como homogéneo de grado n. Esto hace que, en principio, tales demostraciones no puedan extrapolarse a otras medidas sobre $\mathbb{R}^n$. De esta forma, cabe preguntarse si, además de para el volumen, la desigualdad de Brunn-Minkowski se verificará (en alguna de sus formas) para otras medidas. La respuesta es afirmativa, y para probar dicho resultado volveremos a hacer uso del teorema 3.3.2, que nos va a permitir "fabricar" desigualdades de tipo Brunn-Minkowski. Antes de enunciar el resultado, necesitamos definir qué es una función p-cóncava.

Definición 3.3.4. *Una función no negativa $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dirá que es p-**cóncava**, $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, si para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $\phi(x), \phi(y) > 0$, y para todo $\lambda \in (0,1)$, se tiene*

$$\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \big(\lambda\phi(x)^p + (1-\lambda)\phi(y)^p\big)^{1/p}.$$

Corolario 3.3.5 (Desigualdad de Brunn-Minkowski para medidas con densidades p-cóncavas)**.** *Sea $p \geq -1/n$ y sea $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función p-cóncava. Sea μ la medida absolutamente continua sobre $\mathbb{R}^n$ con función de densidad ϕ, es decir,*

$$\mu(M) = \int_M \phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

para todo conjunto medible $M \subset \mathbb{R}^n$. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$ con $\mu(A)\mu(B) > 0$, y sea $\lambda \in (0,1)$. Entonces

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \big(\lambda\mu(A)^q + (1-\lambda)\mu(B)^q\big)^{1/q},$$

donde $q = p/(np+1)$.

Demostración. Análogamente a la prueba anterior, aplicamos el teorema 3.3.2 a las funciones $f = \chi_{A}\phi$, $g = \chi_{B}\phi$ y $h = \chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}\phi$, las cuales verifican las hipótesis de dicho resultado. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) &= \int_{\lambda A+(1-\lambda)B} \phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_{\lambda A+(1-\lambda)B}\phi\right)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} h\,\mathrm{d}x \geq \left[\lambda\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}x\right)^q + (1-\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}^n} g\,\mathrm{d}x\right)^q\right]^{1/q} \\
&= \big(\lambda\mu(A)^q + (1-\lambda)\mu(B)^q\big)^{1/q},
\end{aligned}$$

lo que concluye la prueba. □

En particular, un espacio relevante donde se da una desigualdad de tipo Brunn-Minkowski es el denominado **espacio de Gauss**: $\mathbb{R}^n$ dotado de la medida Gaussiana n-dimensional estándar, dada por

$$\gamma_n(M) = \int_M \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{\frac{-|x|^2}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

En efecto, como $1/(2\pi)^{n/2}\, e^{\frac{-|x|^2}{2}}$ es 0-cóncava (lo que suele denominarse en la literatura como **log-cóncava**), γ_n satisface

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \gamma_n(A)^{\lambda}\, \gamma_n(B)^{1-\lambda},$$

para todo $\lambda \in (0,1)$ y cualesquiera $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compactos no vacíos.

Bibliografía

[1] C. Borell: Convex set functions in d-space, *Period. Math. Hungar.* **6** (1975), 111–136.

[2] H. J. Brascamp, E. H. Lieb: On extensions of the Brunn-Minkowski and Prékopa-Leindler theorems, including inequalities for log concave functions and with an application to the diffusion equation, *J. Functional Analysis* **22** (4) (1976), 366–389.

[3] P. S. Bullen: *Handbook of means and their inequalities.* Mathematics and its Applications 560. Kluwer Academic Publishers, Vancouver, 2003.

[4] L. Leindler: On certain converse of Hölder's inequality II, *Acta Math. Sci. (Szeged)* **33** (1972), 217–223.

[5] A. Prékopa: Logarithmic concave measures with application to stochastic programming, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **32** (1971), 301–315.

[6] R. Schneider: *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.* Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[7] R. Webster, *Convexity.* Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1994.