UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Sumas torcidas de espacios de Banach

Clara Corbalán Mirete

Dirigido por

Antonio Avilés López

y

Gonzalo Martínez Cervantes

Curso 2017-18

Sumas torcidas de espacios de Banach

Clara Corbalán Mirete

Dirigido por

Antonio Avilés López
y
Gonzalo Martínez Cervantes

Declaración de originalidad

Clara Corbalán Mirete, autora del TFM *Sumas torcidas de espacios de Banach*, bajo la tutela del profesor Antonio Avilés López y de Gonzalo Martínez Cervantes, declara que este trabajo es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

Murcia, a 25 de junio de 2018.

Clara Corbalán Mirete

Agradecimientos

Quiero manifestar mi gratitud a todos los que han participado, de una manera u otra, en mi formación. En particular, a Víctor Montoya Suárez, mi profesor durante muchos años. A Antonio Avilés López y Gonzalo Martínez Cervantes, mis tutores, por su ayuda, paciencia y dedicación. A mi hermana Ana y a mi madre por su entera disposición. Y también a José Luis, mi amigo, por el apoyo prestado ahora y siempre.

Resumen

Un problema bastante relevante dentro de la teoría de los espacios de Banach es determinar, dados dos espacios de Banach Z e Y, la existencia y propiedades de espacios de Banach X que contengan a Z, de forma que sean suma torcida de Z e Y.
Una suma torcida de los espacios de Banach Z e Y es una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

donde X es un espacio de Banach y las aplicaciones entre los espacios son operadores lineales acotados. Existen dos tipos de sumas torcidas, las triviales y las no triviales.

Una suma torcida se dirá trivial si la sucesión exacta corta escinde, es decir, si la aplicación $Z \longrightarrow X$ admite una inversa por la izquierda. Equivalentemente, una suma torcida será trivial si la imagen de la aplicación $Z \longrightarrow X$ está complementada en X, teniéndose, en tal caso, que $X \cong Y \oplus Z$.

Por otra parte, una suma torcida se dirá no trivial si Z puede embeberse isomórficamente en X como un subespacio no complementado, de forma que X/Z sea isomorfo a Y.

Existen varios resultados clásicos que versan acerca de la complementabilidad de c_0 en diferentes superespacios. De esta forma, podremos determinar la trivialidad de algunas sumas torcidas en las que aparezca c_0.
Un ejemplo de esto es el teorema de Phillips-Sobczyk 1.3.13. En él se establece que c_0 no está complementado en ℓ_∞. Así, sabemos que la siguiente suma torcida es no trivial

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty/c_0 \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, el teorema de Sobczyk 1.3.16 asegura que toda copia isomorfa de c_0 está complementada en todo espacio separable. Por tanto, toda suma torcida de c_0 con un superespacio separable será trivial. En base a esto, si consideramos K un espacio compacto métrico, por el teorema 1.2.18 sabemos que $C(K)$ es separable, así que c_0 y $C(K)$ únicamente admitirán sumas torcidas triviales.

Se plantea así el que será el principal problema del trabajo y al que trataremos de dar respuesta:

Problema 1. *Dado un espacio compacto no metrizable K, ¿existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$?*

Existen, como veremos en el segundo capítulo, muchos ejemplos de compactos no metrizables para los cuales la respuesta es afirmativa. Sin embargo, y, como era de esperar, en el tercer capítulo daremos una respuesta negativa a este problema.

Deberemos plantearnos el problema desde una perspectiva axiomática diferente a la habitual, puesto que necesitaremos asumir el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo para tal fin. De este modo, es posible probar que toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial, tanto si K es el cubo de Cantor 2^{ω_1} como si es un espacio compacto disperso separable de altura

3 y peso ω_1. Aunque antes de esto deberemos exponer y desarrollar una serie de resultados que nos lo permitan y que se estructuran como sigue.

El primer capítulo comenzará describiendo el marco axiomático en el que nos encontramos puesto que, como ya hemos mencionado, además de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel, deberemos considerar MA y $\neg$CH. Asimismo, se incluyen en esta parte de la memoria unas nociones básicas sobre cardinalidad que resultan necesarias para poder enunciarlos.

El resto del capítulo está destinado a recopilar las herramientas básicas que nos permitirán desarrollar el contenido del trabajo. Se hará una pequeña introducción a la topología débil* y a los espacios de funciones $C(K)$ y $C(K)^*$, los cuales serán la base de la teoría que se desarrollará posteriormente.

Seguidamente, veremos la definición de subespacio complementado y estudiaremos algunas de sus propiedades. En particular, veremos el caso de c_0 y enunciaremos el teorema de Sobczyk 1.3.16, mencionado anteriormente, y que tendrá relevancia más adelante.

Tras esto, y para finalizar el primer capítulo, haremos una sucinta introducción a las álgebras de Boole, a algunas de sus propiedades, a sus elementos más destacables y al estudio de los espacios de Stone y la dualidad existente entre éstos y las álgebras booleanas. De esta sección cabe destacar la trascendencia que tendrán en el último capítulo el álgebra de los clopen sobre un espacio topológico X, a la que denotaremos como Clop$X$, y el espacio de los ultrafiltros sobre un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$, denotado como Ult$\mathfrak{B}$.

Hecho esto estaremos en disposición de centrarnos en nuestra verdadera meta, el estudio de las sumas torcidas de c_0 y $C(K)$. Así, el segundo capítulo se organiza del siguiente modo.

En primer lugar, se expondrán las condiciones bajo las que es sabido que existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$ y se enunciará una nueva para el caso de c_0 y X, haciendo uso de lo que se conoce como sistemas biortogonales en espacios de Banach -véase teorema 2.1.5- que Correa y Tausk proponen en [9]. Además, estudiaremos el caso particular en el que $X = C(K)$, probando que, si K contiene una copia homeomorfa de $[0,\omega] \times [0,\mathfrak{c}]$ o de $2^{\mathfrak{c}}$, entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$. Este hecho nos será de utilidad en el tercer capítulo, ya que gracias a él podremos determinar el carácter trivial o no de las sumas torcidas de c_0 y $C(2^{\omega_1})$ -uno de los dos contraejemplos que se han mencionado- dentro de la axiomática habitual.

Por otra parte, investigaremos las consecuencias de estos resultados para el caso en el que K es un compacto de Corson o de Valdivia, unas clases especiales de compactos y que no tienen por qué ser métricos.
Veremos que, bajo la Hipótesis del Continuo, todo compacto de Corson no metrizable, K, admite una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$, y que para el caso en el que K es un compacto de Valdivia no metrizable no hay una respuesta, puesto que esa es, a día de hoy, una pregunta abierta.

A continuación, se planteará el estudio de las compactificaciones del espacio discreto de los números naturales -que denotaremos como ω-. Estas compactificaciones, a las que llamaremos $\gamma\omega$, se pueden caracterizar en términos de la complementabilidad de c_0 en $C(\gamma\omega)$; así, diremos que una compactificación $\gamma\omega$ es mansa si la copia natural de c_0 en $C(\gamma\omega)$ está complementada e indómita en caso contrario. Esto nos permitirá más adelante establecer una relación con las sumas torcidas.

Tras esto se analizará el vínculo entre las compactificaciones mansas de ω, las extensiones discretas numerables de un espacio compacto K y la existencia de operadores de extensión entre espacios de funciones. Una extensión discreta numerable se define como un espacio compacto cualquiera consistente en un compacto K y una cantidad numerable de puntos aislados y se denotará como $CDE(K)$. Sabiendo esto, veremos que el que una compactificación sea mansa será equivalente a decir que $\gamma\omega \in CDE(K)$ y a que existe el correspondiente operador de extensión. Esto podrá usarse para determinar si una suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial o no.

Finalmente, y con vistas a desarrollar el tercer capítulo, indagaremos acerca de una construcción que nos permitirá manejar, para un K fijo, todas las sumas torcidas de c_0 y $C(K)$. Para ello denotaremos como L la bola unidad de $C(K)^*$ equipada con la topología débil*, de este modo $C(K)$ podrá embeberse en $C(L)$. Sea L' una extensión discreta numerable de L. Veremos que $C(L')$ contiene una suma torcida de c_0 y $C(K)$, lo que nos llevará a enunciar una propiedad acerca de K a la que llamaremos propiedad de extensión* y, bajo la cual, podremos garantizar que toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial.

El tercer y último capítulo del trabajo contiene los principales resultados del mismo y es en el que se demuestra que $K = 2^{\omega_1}$ es una respuesta negativa para el problema que habíamos planteado al principio.

En la primera sección consideraremos unas funciones sobre un álgebra de Boole $\mathfrak{A}$ y diremos que tal álgebra posee la propiedad de aproximación si toda sucesión de funciones que cumplen unas determinadas condiciones en $\mathfrak{A}$ puede aproximarse por una sucesión de medidas signadas finitamente aditivas en $\mathfrak{A}$ -véase definición 3.1.2-.
De este modo, y tras haber desarrollado las herramientas necesarias para ello, probaremos el teorema 3.1.11 dando así un gran paso hacia nuestra meta. Este teorema afirma que, bajo el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo, existen álgebras booleanas no numerables que poseen la propiedad de aproximación. Su demostración es un tanto enrevesada y se hará uso de unos resultados de [4] que se detallan en el Apéndice C.

En la que será la sección final del trabajo, se demostrará que un compacto cero-dimensional K tendrá la propiedad de extensión* siempre que el álgebra Clop$K$ posea la propiedad de aproximación. A partir de esto se concluye que, en particular, el espacio $K = 2^{\omega_1}$ resulta ser un contraejemplo relativamente consistente a la cuestión que se planteaba inicialmente pues, como ya hemos mencionado anteriormente, por un resultado que Correa y Tausk exponen en [9] es posible demostrar que el que c_0 y $C(2^{\omega_1})$ admitan una suma torcida no trivial resulta ser una cuestión indecidible dentro de los límites de la axiomática habitual.

Concluiremos este trabajo con algunas observaciones acerca de los recientes estudios que algunos de los investigadores que habremos mencionado a lo largo de toda memoria han llevado a cabo.

En los anexos se amplían los contenidos necesarios para el desarrollo y elaboración del trabajo. Así en en Anexo A se detallan los contenidos referentes a teoría de la medida y análisis funcional. En el Anexo B, los concernientes a topología. Y en el Anexo C, los relativos a extensiones comunes acotadas de medidas signadas finitamente aditivas y las consecuencias de uno de los resultados que Basile, Rao y Shortt exponen en [4].

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El primer capítulo comenzará describiendo el marco axiomático en el que nos encontramos, puesto que, además de los Axiomas de Zermelo-Fraenkel -los habituales de la teoría de conjuntos-, deberemos considerar el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis de Continuo. Asimismo se incluyen en esta parte de la memoria unas nociones básicas sobre cardinalidad que resultan necesarias para poder enunciarlos.

El resto del capítulo de tiene la finalidad de recopilar las herramientas básicas que necesitaremos para poder desarrollar todo el contenido del trabajo. Los temas que aquí se tratan están estructurados como sigue.

En primer lugar, haremos una introducción a la topología débil* y a los espacios de funciones $C(K)$ y $C(K)^*$, elementos sobre los que se cimentarán las bases de toda la teoría que más adelante desarrollemos. Comentaremos algunas de sus propiedades más destacadas y enunciaremos, sin demostración, algunos de los grandes teoremas que tendrán una aplicación ulterior. Este será el caso del teorema de Repesentación de Riesz 1.2.16, Stone-Weiestrass 1.2.17 o Banach-Alaoglu 1.2.10.

Seguidamente, veremos la definición de subespacio complementado y estudiaremos algunas de sus propiedades. En particular, veremos el caso de c_0, el espacio de las sucesiones convergentes a 0 y enunciaremos el teorema de Sobczyk 1.3.16, el cual resultará de gran relevancia más adelante.

Tras esto, y para finalizar el primer capítulo, haremos una pequeña introducción al las álgebras de Boole, a algunas de sus propiedades, a sus elementos más destacables y al estudio de los espacios de Stone y la dualidad existente entre éstos y las álgebras antes mencionadas.

Las principales fuentes de referencia para la redacción de este capítulo han sido [1], [13], [17], [12] y [14].

1.1. Axiomática

Antes de entrar en materia será conveniente describir el marco axiomático en el que vamos a desarrollar nuestra teoría. Así, comenzaremos exponiendo los Axiomas de Zermelo-Fraenkel, el Axioma de Elección y concluiremos con unas nociones básicas sobre cardinalidad que serán de utilidad para enunciar la Hipótesis del Continuo y el Axioma de Martin.

1.1.1. Axiomas de Zermelo-Fraenkel

La teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZF) parte de los conceptos de conjunto y pertenencia y consta de los axiomas siguientes:

1. **Axioma de extensionalidad**
   Dos conjuntos X e Y son iguales, $X = Y$, si y sólo si contienen los mismos elementos. Más formalmente

$$\forall a(a \in X \leftrightarrow a \in Y) \leftrightarrow X = Y$$

2. **Axioma del conjunto vacío**
   Existe un conjunto, representado por $\emptyset$ que no posee elementos, esto es

$$\exists\, \emptyset\ \forall a(a \notin \emptyset)$$

3. **Axioma de pares**
   Para todo x e y, existe un conjunto, representado por $\{x, y\}$, cuyos únicos elementos son x e y. Esto es,

$$\forall x, y\ \exists z\ \forall a(a \in z \leftrightarrow a = x \vee a = y)$$

4. **Axioma de la unión**
   Dada cualquier colección de conjuntos C, existe un conjunto, representado por $\cup C$ y llamado unión de C, que contiene todos los elementos de cada conjunto de C. Esto es,

$$\forall x\ \exists y\ \forall a(a \in y \leftrightarrow \exists z\ (z \in x \wedge a \in z))$$

5. **Axioma del conjunto potencia**
   Para cualquier conjunto x existe otro conjunto, representado por $\mathcal{P}(x)$, que contiene todos los subconjuntos de x. Formalmente sería así

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \forall a\ (a \in z \rightarrow a \in x)).$$

6. **Esquema axiomático de reemplazo**
   Sea una fórmula con al menos dos variables libres, $\varphi(x, y)$. La siguiente fórmula es un axioma:

$$(\forall x, y, z, \varphi(x, y) \wedge \varphi(x, z) \rightarrow y = z) \Rightarrow \forall A\ \exists B, \forall b(b \in B \leftrightarrow \exists a \in A : \varphi(a, b)).$$

7. **Axioma de infinitud**
   Existe un conjunto x tal que $\emptyset \in x$ y tal que si $y \in x$, entonces $y \cup \{y\} \in x$. Es decir,

$$\exists x\ (\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x)).$$

8. **Axioma de regularidad**
   Para todo conjunto no vacío x existe un conjunto $y \in x$ tal que $x \cap y = \emptyset$. En términos formales

$$\forall x\ (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y\ (y \in x \wedge \forall z(z \in y \rightarrow z \notin x))).$$

Curiosamente, los axiomas del conjunto vacío y de los pares se deducen del resto de axiomas de ZF, por lo que se pueden omitir.

1.1.2. El axioma de elección

Pasemos ahora a hablar del Axioma de Elección, el cual resulta clave en la teoría de conjuntos. En la primera axiomatización de ésta, también llevada a cabo por Zermelo, en 1908, éste aparecía dentro de los axiomas que postuló. Sin embargo, en el sistema ZF, formulado en 1930, fue excluido debido a las diferencias existentes entre el resto de axiomas y él.

Axioma de elección (AC). Toda familia de conjuntos no vacíos posee una función de elección.

Definición 1.1.1. *Si S es una familia de conjuntos no vacíos, una función de elección para S es una función $f : S \longrightarrow \cup S$ tal que*

$$f(X) \in X, \ \forall X \in S$$

Gracias a la investigación llevada a cabo por Gödel y Cohen se sabe que AC es lógicamente independiente del resto de axiomas de la teoría de conjuntos y muchos de los teoremas que hoy conocemos son indemostrables en ZF sin AC.

1.1.3. Cardinalidad

Los cardinales jugarán un papel importante a lo largo del trabajo, por ello conviene recordar algunos aspectos básicos en relación a ellos, sobre todo para poder enunciar la Hipótesis del Continuo.

Dados dos conjuntos X e Y diremos que tienen la misma cardinalidad, y lo denotaremos como

$$|X| = |Y|, \tag{1.1}$$

si existe una biyección entre ellos. Ésta es una relación de equivalencia, por tanto a cada conjunto X se le puede asignar su cardinal $|X|$ y a dos conjuntos se les asignará la misma cardinalidad únicamente en caso de que cumplan la condición 1.1.

Definición 1.1.2. *Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es inyectiva si en X no existen dos o más elementos a los que les corresponda la misma imagen en Y.*

Definición 1.1.3. *Diremos que una función $f : X \longrightarrow Y$ es suprayectiva si cada elemento de Y es imagen de al menos un elemento de X. En este caso diremos que la imagen de f coincide con Y, y lo denotaremos como $Im(f) = Y$.*

Definición 1.1.4. *Dados dos conjuntos X e Y diremos que el cardinal de X es menor o igual que el cardinal de Y, y escribiremos $|X| \leq |Y|$, si existe una función inyectiva $f : X \longrightarrow Y$.*

Teorema 1.1.5. *Si $f : X \longrightarrow Y$ es suprayectiva se cumple que $|X| \geq |Y|$.*

Demostración. Supongamos que tenemos $Im(f) = Y$, sabemos que para todo $y \in Y$ existe un conjunto no vacío de X, al que llamaremos preimagen de y y denotaremos como $f^{-1}(\{y\})$, tal que $f(x) = y$ para todo $x \in f^{-1}(\{y\})$.

Haciendo uso de AC podemos elegir un único elemento de $f^{-1}(\{y\})$ para asociarlo a cada $y \in Y$. De esta forma aseguramos la existencia de una función $g : Y \longrightarrow X$ inyectiva y por definición $|Y| \leq |X|$.

□

Teorema 1.1.6. (Cantor). *Para todo conjunto X se cumple que $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

Teorema 1.1.7. (Cantor-Bernstein). *Si $|X| \leq |Y|$ y $|Y| \leq |X|$ existe una biyección entre X e Y, i.e., $|X| = |Y|$.*

La aritmética con cardinales para $|A| = \kappa, |B| = \lambda$, con A, B disjuntos se define como sigue
- $\kappa + \lambda = |A \cup B|$
- $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$
- $\kappa^\lambda = |A^B|$

Evidentemente estas definiciones son válidas si y sólo si son independientes de la elección de A y B.

Lema 1.1.8. *Si* $|A| = \kappa$ *entonces* $|\mathcal{P}(A)| = 2^\kappa$.

Demostración. Para todo $B \subset A$, sea la función característica

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B \\ 0, & \text{si } x \in A - B \end{cases}$$

La aplicación $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \{0,1\}^A$ tal que $f(B) = \chi_B$ es una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{P}(A)$ y $\{0,1\}^A$.

□

Esto nos lleva a plantearnos que el teorema de Cantor 1.1.6 se puede formular del siguiente modo:

$$\kappa < 2^\kappa, \text{ para todo cardinal } \kappa.$$

1.1.4. La Hipótesis del Continuo

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es el único cuerpo en el que todo subconjunto no vacío posee una cota superior. La demostración del siguiente teorema marcó el inicio del desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor.

Teorema 1.1.9. (Teorema de Cantor). *El conjunto de todos los números reales es no numerable.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R}$ es numerable, y sea $c_0,\ c_1, ...,\ c_n, ...$ con $n \in \mathbb{N}$ una enumeración de $\mathbb{R}$. Debemos encontrar un número real diferente de cada c_n.

Sea $a_0 = c_0$ y $b_0 = c_{k_0}$ donde k_0 es el menor k tal que $a_0 < c_k$. Para cada n, sea $a_{n+1} = c_{i_n}$ donde i_n es el menor i tal que $a_n < c_i < b_n$, y $b_{n+1} = c_{k_n}$ donde k_n es el menor k tal que $a_{n+1} < c_k < b_n$. Si tomamos $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ se tiene que $a \neq c_k$ para todo k.

□

Cardinal $\mathfrak{c}$

Cantor demostró que hay una cantidad estrictamente mayor de números reales que de naturales. En este contexto comenzó a estudiar la existencia de algún conjunto con un número de elementos mayor que los números naturales pero menor que los reales. Esta investigación condujo a la formulación actual de la hipótesis del continuo.

Denotaremos como ω al primer ordinal infinito, como ω_1 al primer ordinal no numerable y como $\mathfrak{c}$ al cardinal de $\mathbb{R}$.

Dado que el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, todo número real r es igual a $\sup\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ y dado que $\mathbb{Q}$ es numerable se tiene que $\mathfrak{c} \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^\omega$.

Sea C el conjunto de Cantor de todos los reales de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$, donde cada $a_n = 0$ o 2. El conjunto C se obtiene eliminando del intervalo cerrado $[0,1]$ los intervalos abiertos $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}),\ (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}), (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}), ...$ Se tiene que existe una correspondencia biunívoca entre C y el conjunto de todas las ω-sucesiones de ceros y doses, de forma que $|C| = 2^\omega$.

Por tanto, se tiene que $\mathfrak{c} \geq 2^\omega$ y por el teorema de Cantor-Bernstein 1.1.7, se cumple que

$$\mathfrak{c} = 2^\omega$$

Por el Teorema de Cantor 1.1.9 sabemos que $\mathfrak{c} > \omega$. Cantor conjeturó que todo conjunto de números reales es a lo sumo numerable o tiene la cardinalidad del continuo. En ZFC se tiene que $2^\omega \geq \omega_1$.

Así, la conjetura de Cantor deriva en el siguiente enunciado:

Hipótesis del Continuo. *Para cualquier conjunto infinito $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que o bien $|A| = \omega$ o bien $|A| = \mathfrak{c}$, lo cual es equivalente a $\omega_1 = \mathfrak{c}$.*

Éste constituye el primer problema la lista de Hilbert. En 1883 Cantor demostró que los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$ poseían esta propiedad, de lo que se deduce que todo subconjunto cerrado no numerable de $\mathbb{R}$ tiene la misma cardinalidad que $\mathbb{R}$. Por tanto, CH se sostiene para subconjuntos cerrados.

Más de treinta años después Pavel Aleksandrov extendió el resultado para los conjuntos de Borel y Suslin a todos los conjuntos analíticos. Sin embargo, los esfuerzos para probar que los conjuntos coanalíticos satisfacían CH fueron en vano, pues es indemostrable bajo ZFC.

Teorema 1.1.10. (Teorema de Gödel). *Asumiendo que ZFC es consistente, entonces $ZFC + CH$ es consistente.*

Para demostrarlo, Gödel, aceptando que ZF es consistente, construyó un modelo de ZFC conocido como universo constructible, en donde CH se sostiene. Así, la prueba muestra que si ZF es consistente, también lo es junto con el Axioma de Elección (AC) y CH. Por lo tanto, asumiendo que ZF es consistente y dado que AC no puede ser refutado en ZF se tiene que CH no puede ser rechazado en ZFC.

Teorema 1.1.11. (Teorema de Cohen). *Asumiendo que ZFC es consistente, entonces $ZFC + \neg CH$ es consistente.*

Con este teorema, en 1963, Cohen probó la independencia de CH. Vemos así la indecidibilidad de este enunciado.

1.1.5. El Axioma de Martin

Este axioma fue enunciado por Martin y Solovay en 1970. Resulta ser independiente del resto de axiomas de ZFC y se sabe que CH implica $\mathsf{MA}(\kappa)$ siempre que $\kappa < \mathfrak{c}$. Sin embargo, es consistente con ZFC y la negación de CH.

Para poder enunciarlo debemos dar unas definiciones previas.

Definición 1.1.12. *Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado cuyos elementos llamaremos condiciones. Un conjunto $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{P}$ será denso si para toda $p \in \mathbb{P}$ existe un $d \in \mathbb{D}$ tal que $p \leq d$.*

Un conjunto $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{P}$ estará dirigido si para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{G}$ existe $p_3 \in \mathbb{G}$ tal que $p_1, p_2 \leq p_3$.

Definición 1.1.13. *Un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ satisfará ccc (countable chain condition) si todo $P \subseteq \mathbb{P}$ no numerable contiene dos condiciones diferentes p_1, p_2 tales que son comparables, es decir, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $p_1, p_2 \leq q$.*

Para un cardinal κ dado, el enunciado de $\mathsf{MA}(\kappa)$ es el que sigue:

Axioma de Martin. *Para todo conjunto ccc parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ y una familia $\{\mathbb{D}_\xi : |\mathbb{D}_\xi| = \xi < \kappa\}$ de sus subconjuntos densos existe un conjunto dirigido $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}_\xi \neq \emptyset$ para todo $\xi < \kappa$.*

Se tiene $\mathsf{MA}(\omega)$ es cierto, mientras que $\mathsf{MA}(\mathfrak{c})$ es falso y que $\mathsf{MA}(\omega_1)$ es relativamente consistente. A esto último es a lo que habitualmente se debe su uso.

1.2. La topología dêbil* y los espacios $C(K)$ y $C(K)^*$

Comenzaremos esta segunda sección exponiendo el concepto de topología débil* y algunos resultados sobre ella que nos resultarán de gran utilidad a medida que avancemos en nuestra pesquisa. Para introducirla daremos, en primer lugar, las definiciones de espacio normado, espacio de Banach y de topología débil.

Obsérvese que las definiciones y resultados referentes a teoría de la medida y análisis funcional de los que se hace uso en esta y en posteriores secciones del trabajo aparecen detallados en el Apéndice A. Del mismo modo, los concernientes a topología pueden encontrarse en el Apéndice B.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que la aplicación $||\cdot|| : X \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es una norma si cumple:*
i) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$, para todo $x, y \in X$.
ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y todo $x \in X$.
iii) $||x|| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Definición 1.2.2. *Si $||\cdot||$ es una norma en X, diremos que $(X, ||\cdot||)$ es un espacio normado. Un espacio métrico (X, d) es un espacio normado en el que se define una distancia como $d(x, y) = ||y - x||, \forall x, y \in X$.*

Definición 1.2.3. *Sea X un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Diremos que que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon$ tal que $\forall\ n, m \geq n_\varepsilon$ se cumple $||x_m - x_n|| \leq \varepsilon$.*

Definición 1.2.4. *Un espacio normado X diremos que es de Banach si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Al espacio dual de un espacio de Banach X lo denotaremos como X^* y consiste en el espacio de todos los operadores acotados en X, es decir, $X^* = \{x^* : X \longrightarrow \mathbb{R} : x^* \text{ es lineal y continuo}\}$. La norma de este espacio viene definida por $||x^*|| = \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\}$.

Definición 1.2.5. *Sea X un espacio normado. Llamaremos topología débil de X a la menor topología sobre X que hace continuas a las funciones $x^* \in X^*$.*

Dado $x_0 \in X$, una base de entornos de x_0 viene dada por los conjuntos de la forma

$$V_\varepsilon(x_0; x_1^*, ..., x_n^*) = \{x \in X : |x_i^*(x) - x_i^*(x_0)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\},$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \omega$ y $\{x_1^*, ..., x_n^*\}$ es un subconjunto finito de X^*.

Definición 1.2.6. *Para cada $x \in X$ definimos el funcional $j_x : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ como $j_x(x^*) = x^*(x)$ para todo $x^* \in X^*$. Llamaremos topología débil* de X^* a la menor topología sobre X^* que hace continuas a estos funcionales.*

Una base de entornos de $x_0^* \in X^*$ viene dada por los conjuntos de la forma

$$V_\varepsilon(x_0^*; x_1, ..., x_n) = \{x^* \in X^* : |x^*(x_i) - x_0^*(x_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., n\},$$

donde $\varepsilon > 0$, $n \in \omega$ y $\{x_1, ..., x_n\}$ es un subconjunto finito de X.

Proposición 1.2.7. *Sea X un espacio normado y $f_1, f_2, f_3, ... \in X^*$, entonces $f_n \xrightarrow{\mathrm{w}^*} f$ si y sólo si $\lim_n f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración. Supongamos que $f_n \longrightarrow f$ puntualmente en X. Si $\mathcal{O}$ es un conjunto abierto en la topología débil* que contiene a f, existe un $\varepsilon > 0$ y $x_1, ..., x_m \in X$ tal que

$$\{g \in X^* : |(g - f)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, ..., m\} \subset \mathcal{O}.$$

Dado que $f_n(x_i) \longrightarrow f(x_i)$ para todo $i = 1, ..., m$, existe n_0 tal que $|(f_n - f)(x_i)| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$. Por tanto, f_n se mete en todos los conjuntos abiertos que contengan a f.

Por otra parte, sea $\lim_n f_n = f$ en la topología débil* y consideremos $x \in X$. Dado un $\varepsilon > 0$, el conjunto $A = \{g \in X^* : |(g - f)(x)| < \varepsilon\}$ es débil*-abierto y, por tanto, para un n suficientemente grande se tiene $f_n \in A$, lo cual implica que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

□

Definición 1.2.8. *Dado un operador entre espacios de Banach $T : X \longrightarrow Y$ se define el operador adjunto como $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ de forma que $(T^*y^*)(x) = y^*(Tx)$.*

La topología débil* cumple las siguientes propiedades, las cuales son sencillas de comprobar:

- Si $T : X \longrightarrow Y$ es una aplicación lineal norma-norma continua entonces su operador adjunto $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ es débil*-débil* continuo.
- Si $R : Y^* \longrightarrow X^*$ es una aplicación lineal débil*-débil* continua entonces existe una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ norma-norma continua tal que $T^* = R$.
- Todo operador débil*-débil* continuo es también norma-norma continuo.

Observación 1.2.9. *La topología débil* es Hausdorff.*
Dadas $f \neq g$ en X^*, existe $x \in X$ y un escalar α tal que $f(x) > \alpha > g(x)$. Los conjuntos débil-abiertos $\{h \in X^* : h(x) > \alpha\} = j_x^{-1}(\alpha, \infty)$ y $\{h \in X^* : h(x) < \alpha\} = j_x^{-1}(-\infty, \alpha)$ separan f y g.*

Teorema 1.2.10. (Teorema de Banach-Alaoglu). *Si X es un espacio métrico lineal normado entonces $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : ||x^*|| \leq 1\}$ es débil*-compacto.*

Corolario 1.2.11. *La bola cerrada B_{X^*} del espacio dual de un espacio normado X es la clausura débil* de la envolvente convexa del conjunto de sus puntos extremos:*

$$B_{X^*} = \overline{co}^{\mathrm{w}^*}(\partial_\varepsilon(B_{X^*})).$$

Teorema 1.2.12. (Teorema de Goldstine). *Sea X un espacio normado. Entonces B_X es débil* denso en $B_{X^{**}}$.*

Proposición 1.2.13. *Sea X un espacio de Banach separable. Entonces B_{X^*} es metrizable en la topología débil*.*

Ahora centraremos nuestra atención en los espacios de funciones continuas. Estudiaremos los espacios del tipo $C(K)$, ya que éstos son los que nos servirán para los capítulos posteriores. Estos espacios fueron los únicos espacios de Banach de los que se disponía antes del desarrollo de la medida de Lebesgue.

Definición 1.2.14. *Si K es un espacio compacto se define $C(K)$ como el espacio de Banach de las funciones reales y continuas en K, es decir,*

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\},$$

con la norma $||f||_\infty = \max\{|f(x)| : x \in K\}$.

Definición 1.2.15. *Si K es un espacio compacto se define $C(K)^*$ como el espacio de Banach de los operadores acotados en C(K), es decir,*

$$C(K)^* = \{T : C(K) \longrightarrow \mathbb{R} : T \text{ es lineal y continuo}\},$$

con la norma del supremo.

Teorema 1.2.16. (Teorema de Representación de Riesz). *Si K es un espacio topológico Hausdorff compacto, entonces $C(K)^*$ es isométricamente isomorfo al espacio $M(K)$ de las medidas de Borel signadas, regulares y finitas en K con la norma $||\mu|| = |\mu|(K)$. La dualidad está dada por*

$$\langle f, \mu \rangle = \int_K f d\mu.$$

Si K es metrizable entonces toda medida de Borel es regular y, por tanto, $M(K)$ coincide con el espacio de las medidas de Borel signadas y finitas.

El siguiente teorema tiene dos versiones, la real y la compleja. Enunciaremos únicamente la real puesto que es la que utilizaremos.

Teorema 1.2.17. (Teorema de Stone-Weiestrass). *Sean K un espacio topológico de Hausdorff compacto y $\mathcal{A}$ una subálgebra de $C(K)$ (i.e. $\mathcal{A}$ es un subespacio lineal de $C(K)$ cerrado bajo sumas, productos y productos por escalares) que contenga constantes. Si $\mathcal{A}$ separa los puntos de K (i.e. para todo $s_1, s_2 \in K$ con $s_1 \neq s_2$ existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(s_1) \neq f(s_2)$), entonces $\overline{\mathcal{A}} = C(K)$.*

Teorema 1.2.18. *Si K es un espacio de Hausdorff compacto, entonces $C(K)$ es separable si y sólo si K es metrizable.*

Demostración. Si $C(K)$ es separable, entonces $B_{C(K)^*}$ es metrizable en la topología débil* por la proposición 1.2.13. Consideremos $\delta : K \longrightarrow C(K)^*$ que lleva cada punto $x \in K$ al operador $\delta_x(f) = f(x)$, la cual claramente es inyectiva. Es fácil comprobar que δ es un homeomorfismo entre K y $\delta(K)$, dotado de la topología débil* de $B_{C(K)^*}$. Como $\delta(K) \subset (B_{C(K)^*}, w^*)$, la cual es metrizable por la proposición 1.2.13, también lo es K.

Supongamos ahora que K es un espacio métrico compacto, el cual sabemos que es separable por el teorema B.9. Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en K. Pongamos

$$f_{n,m}(x) = \begin{cases} \frac{1}{m} - \text{dist}(x, x_n), & \text{si dist}(x, x_n) \leq \frac{1}{m} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la familia $\{f_{n,m}\}$ junto con una función constante genera un álgebra que separa los puntos de K y, por tanto, su clausura es $C(K)$ por el teorema de Stone-Weierstrass 1.2.17.

□

Observación 1.2.19. *En general, K es homeomorfo a un subespacio de $B_{C(K)^*}$ con la topología débil*.*

Si X es un espacio de Banach es isomorfo a un subespacio de $C(B_{X^*})$ con la topología débil.*

Corolario 1.2.20. *El recíproco de la proposición 1.2.13 es cierto para espacios de Banach, es decir, si B_{X^*} es metrizable en la topología débil*, entonces X es separable.*

Teorema 1.2.21. (Teorema de Banach-Stone). *Supongamos que K y L son dos espacios de Hausdorff compactos tales que $C(K)$ y $C(L)$ son espacios de Banach isométricamente isomorfos, entonces K y L son homeomorfos.*

El teorema de Banach-Stone apareció por primera vez para K, L metrizables en la obra de Banach [3] en 1932. La generalización de este resultado la llevó a cabo M. H. Stone en 1937. Este periodo se corresponde con los inicios de la topología general y Banach se veía limitado debido a lo poco desarrollada que estaba la topología de los espacios no metrizables; así, por ejemplo, el teorema de Banach-Alaoglu no se enunció hasta 1941, puesto que requería del teorema de Tychonov 2.2.4.

1.3. Espacios complementados: la complementabilidad de c_0

El hecho de que una suma torcida sea trivial o no dependerá, como veremos más adelante, de que algunos de los espacios con los que trabajaremos estén complementados en otros. Por ello, en esta sección nos dedicaremos al estudio de la complementabilidad de los espacios de Banach y, en particular, a c_0 subespacio de ℓ_∞.

Antes de continuar recordemos algunas definiciones y propiedades acerca de los espacios de Banach:

Definición 1.3.1. *Sea $Y \subset X$ un subespacio del espacio X. Diremos que Y es cerrado si y sólo si todo punto que sea límite en X de una sucesión de elementos de Y pertenece a Y.*

Proposición 1.3.2. *Sea X un espacio normado. Si $(X, ||\cdot||)$ es de Banach e Y es un subespacio de X, entonces $(Y, ||\cdot||)$ es Banach si y sólo si Y es cerrado.*

Definición 1.3.3. *Sea $\ell^\infty = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \mathbb{K} : |x_n| \leq L,\ \forall n\}$, el espacio de las sucesiones en $\mathbb{K}$ acotadas.*
Sea $x \in \ell^\infty$, si consideramos la norma infinito $||x||_\infty = \sup_{n\geq 1} |x_n|$ se tiene que $(\ell^\infty, ||\cdot||_\infty)$ es un espacio normado.

Teorema 1.3.4. *$(\ell^\infty, ||\cdot||_\infty)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(x^k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞, debemos comprobar si es convergente.

Tenemos que $x^k = x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k, ... = (x_n^k)_{n=1}^\infty$. Demostremos que para un n_0 fijo $(x_{n_0}^k)_{k=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ para todo n.

Sea $\varepsilon > 0$, por ser $(x^k)_{k=1}^\infty$ una sucesión de Cauchy existe un k_ε tal que si $l \geq k \geq k_\varepsilon$ se cumple $||x^l - x^k||_\infty \leq \varepsilon$.

Lo que es equivalente a que $\sup_{n\geq 1} |x_n^l - x_n^k| \leq \varepsilon$ y para el caso particular de n_0 que $|x_{n_0}^k - x_{n_0}^l| \leq \varepsilon$. Por tanto, se tiene que $(x_{n_0}^k)_{k=1}^\infty$ es de Cauchy, y se cumple para todo n.

Como $\mathbb{K}$ es completo $(x_n^k)_{k=1}^\infty$ converge a x_n. Ahora podemos tomar la sucesión $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^\infty$ y debemos comprobar que $\mathbf{x}$ está acotada y que verdaderamente es el límite.

Dado que $(x^k)_{k=1}^\infty$ es de Cauchy sabemos que está acotada en ℓ^∞, por tanto existe M tal que

$$||x^k||_\infty \leq M\ \forall k \Rightarrow |x_n^k| \leq M\ \forall k, n \Rightarrow |x_n| \leq M\ \forall n$$

por tanto $\mathbf{x} \in \ell^\infty$.

Veamos ahora que dado un $\varepsilon > 0$ existe k_ε tal que si $k \geq k_\varepsilon$ se cumpla que $||x^k - \mathbf{x}|| \leq \varepsilon$, lo cual sabemos que es equivalente a que $\sup_{n\geq 1} |x_n^k - x_n^l| \leq \varepsilon$.

Tomando un n_0 fijo se tiene que $\sup_{n\geq 1} |x_{n_0}^k - x_{n_0}^l| \leq \varepsilon$. Ahora tomando límites con $l \longrightarrow \infty$ se tiene $|x_{n_0}^k - x_{n_0}| \leq \varepsilon$ para todo $k \geq k_\varepsilon$.

Como n_0 es arbitrario se da que $||x^k - \mathbf{x}||_\infty \leq \varepsilon$, $k \geq k_\varepsilon$.

□

Definición 1.3.5. *Denotaremos por c_0 al subespacio de ℓ^∞ de las sucesiones convergentes a 0.*

$$c_0 = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^\infty : \lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0\}.$$

Teorema 1.3.6. *c_0 es un subespacio cerrado de $(\ell^\infty, ||\cdot||_\infty)$.*

Demostración. Sea $(x^k)_{k=1}^\infty \in c_0$ una sucesión convergente a $\mathbf{x} \in \ell^\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ $||\mathbf{x} - x^k||_\infty \leq \varepsilon$, lo cual es equivalente a que $\sup_{n\geq 1} |\mathbf{x}_n - x_n^k| \leq \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$.

Como $(x^{k_0}) \in c_0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$, $|x_n^{k_0}| \leq \varepsilon$, entonces para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{x}_n - x_n^{k_0} + x_n^{k_0}| \leq |\mathbf{x}_n - x_n^{k_0}| + |x_n^{k_0}| \leq 2\varepsilon$$

Por tanto, $\mathbf{x}_n$ converge a 0 y $\mathbf{x} \in c_0$.

□

Teorema 1.3.7. $(c_0, ||\cdot||_\infty)$ *es un espacio de Banach.*

Demostración. Por la proposición 1.3.2 sabemos que un subespacio de un espacio de Banach es de Banach si y sólo si es cerrado. Hemos demostrado en el teorema anterior que c_0 es subespacio cerrado de $(\ell^\infty, ||\cdot||)$ el cual sabemos que es un espacio de Banach por el teorema 1.3.4.

□

Visto todo esto, ya estamos en condiciones de iniciarnos en el estudio de los espacios complementados. Comencemos definiéndolos:

Definición 1.3.8. *Sean X un espacio de Banach e Y un subespacio cerrado. Diremos que Y está complementado en X si existe un subespacio cerrado Z de X tal que $X = Y \oplus Z$.*

Esto es equivalente a decir que existe un operador lineal y acotado $P : X \longrightarrow X$ que sea una proyección, i.e. $P \circ P = P$ con $P(X) = Y$.

Cabe destacar que, a menos que X sea un espacio de Banach isomorfo a un espacio de Hilbert, existen muchos subespacios de X no complementados.

El espacio de Banach c_0 juega un papel especial cuando hablamos de complementabilidad: por el teorema de Sobczyk 1.3.16 sabemos que toda copia isomorfa de c_0 está complementada en todo superespacio separable.

Un espacio de Banach se dice que posee la propiedad de Sobczyk si todo subespacio isomorfo a c_0 está complementado en él. La complementabilidad de dicho espacio ha sido estudiada también para espacios no separables.
Algunos investigadores, entre los cuales están Correa y Tausk -autores de algunos de los artículos que aquí se referencian-, han probado que el espacio $C(K)$ tiene la propiedad de Sobczyk si K es una linea compacta. Empero, de momento, nos centraremos en los que sí son separables.

Consideremos X e Y dos espacios de Banach y $E \subset X$ un subespacio. Sea $T : E \longrightarrow Y$ un operador acotado, ¿es posible extender T a un operador acotado $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$? Si consideramos el caso en que $Y = E$ y T es la identidad sobre E nos estamos preguntando simplemente si E es la imagen de una proyección en X, es decir, si E está complementado en X.

Por el teorema de Hahn-Banach A.14 sabemos que si la dimensión de Y es 1 dicha extensión es posible y se preserva la norma. Sin embargo, en general dicha extensión no es posible. En esta sección veremos un ejemplo natural de ello.

Definición 1.3.9. *Un espacio de Banach Y se dice inyectivo si cuando X es Banach, E un subespacio cerrado de X y $T : E \longrightarrow Y$ un operador acotado existe un operador lineal acotado $\tilde{T} : X \longrightarrow Y$ tal que es una extensión de T. Y se dirá isométricamente inyectivo si $\tilde{T}$ cumple $||\tilde{T}|| = ||T||$.*

Proposición 1.3.10. *El espacio ℓ_∞ es isométricamente inyectivo. Por tanto, si un espacio de Banach tiene un subespacio E isomorfo a ℓ_∞, entonces E está complementado en X.*

Demostración. Supongamos que E es subespacio de X y $T : E \longrightarrow \ell_\infty$ es acotado. Consideremos $Te = (e_n^*(e))_{n=1}^\infty$ para alguna sucesión $(e_n^*(e))_{n=1}^\infty \in E^*$. Claramente, $||T|| = \sup_n ||e_n^*||$. Por el teorema de Hahn-Banach, escogemos extensiones $x_n^* \in X^*$ con $||x_n^*|| = ||e_n^*||$ para cada n. Tomando $\tilde{T}x = (x_n^*(x))_{n=1}^\infty$ se obtiene el resultado.

□

c_0 es subespacio de ℓ_∞, su bidual, y resulta sencillo comprobar que c_0 será inyectivo si y sólo si está complementado en ℓ_∞. Pero, ¿todo espacio de Banach está complementado en su bidual? Esto es verdad para cualquier espacio que sea el dual de otro, ya que para cualquier espacio de Banach X se tiene que el espacio X^* está complementado en su tridual, X^{***}.

Si X es isomorfo, no necesariamente isométrico, a un espacio dual, estará complementado en el bidual. Por ello también parece lógico preguntarse si c_0 es isomorfo a un espacio dual. Sin embargo, como veremos a continuación, c_0 no está complementado en ℓ_∞.

Lema 1.3.11. *Todo conjunto $\mathbb{S}$ infinito numerable tiene una familia no numerable de subconjuntos infinitos $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ tal que la intersección de dos elementos cualesquiera de la familia es finita.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos identificar $\mathbb{S}$ con el conjunto de los racionales, $\mathbb{Q}$. Para cada irracional θ consideraremos una sucesión de números racionales $(q_n^\theta)_{n=1}^\infty$ convergente a θ. Así, el conjunto de la forma $\mathbb{A}_\theta = \{q_n^\theta : n \in \omega\}$ verifica el lema.

□

Si $\mathbb{A}$ es cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ denotaremos por $\ell_\infty(\mathbb{A})$ al subespacio de ℓ_∞ dado por

$$\ell_\infty(\mathbb{A}) = \{\xi = (\xi(k))_{k=1}^\infty \in \ell_\infty : \xi(k) = 0 \text{ si } k \notin \mathbb{A}\}.$$

Teorema 1.3.12. *Sea $T : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$ un operador acotado tal que $T\xi = 0$ para todo $\xi \in c_0$. Entonces existe un subconjunto infinito $\mathbb{A}$ de $\mathbb{N}$ tal que $T\xi = 0$ para todo $\xi \in \ell_\infty(\mathbb{A})$.*

Demostración. Consideremos la familia $\{\mathbb{A}_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ dada en el lema 1.3.11. Supongamos que para cada $i \in I$ podemos encontrar un $\xi_i \in \ell_\infty(\mathbb{A}_i)$ tal que $T\xi_i \neq 0$. En particular, $\xi_i \notin c_0$. Podemos asumir que $||\xi_i||_\infty = 1, \forall i \in I$ habiendo normalizado.

Dado que I es no numerable, debe existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = \{i \in I : T\xi_i(n) \neq 0\}$ es no numerable. De manera similar, y dado que I_n es no numerable, existe k tal que $I_{n,k} = \{i \in I : |T\xi_i(n)| \geq k^{-1}\}$ es no numerable.

Fijemos n y k tales que $I_{n,k}$ sea no numerable y consideremos $\mathbb{J} \subset I_{n,k}$ finito. Pongamos $y = \sum_{j\in\mathbb{J}} sign(T\xi_j(n))\xi_j$. Nótese que $Ty(n) = \sum_{j\in\mathbb{J}} sign(T\xi_j(n))T\xi_j(n) \geq \frac{|\mathbb{J}|}{k}$ por la forma en la que hemos escogido y.

Dado que $\mathbb{A}_i \cap \mathbb{A}_j$ es finita para $i \neq j$ podemos poner $y = u + v$ con u siendo la restricción de y a aquellas coordenadas con más de un soporte y, por tanto, con soporte finito y $||v||_\infty \leq 1$ por ser la restricción de y a aquellas coordenadas con un solo soporte.

Así, $Ty = Tu + Tv = Tv$ por hipótesis de T y $||Ty||_\infty \leq ||T||\ ||v|| \leq ||T||$. Por tanto, se tendría que $|\mathbb{J}| \leq ||T||k$, lo cual supone una contradicción con el hecho de que $I_{n,k}$ sea no numerable.

□

Teorema 1.3.13. (Teorema de Phillips-Sobczyk). *No existe una proyección acotada de ℓ_∞ en c_0.*

Demostración. Sea P una proyección acotada $P : \ell_\infty \longrightarrow c_0$. Consideremos $T = I - P$, donde I es el operador identidad sobre ℓ_∞. Así tenemos que $T : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$ y $T\xi = 0$ para toda $\xi \in c_0$.

Por el teorema 1.3.12, sabemos que existe $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$ infinito tal que $T\xi = 0$ para todo $\xi \in \ell_\infty(\mathbb{A})$. Pero esto significaría que $P\xi = \xi$ para toda $\xi \in \ell_\infty(\mathbb{A})$, lo cual es absurdo puesto que $\mathbb{A}$ es infinito y no todas las sucesiones de $\ell_\infty(\mathbb{A})$ pertenecen a c_0.

□

Corolario 1.3.14. *c_0 no es isomorfo a un espacio dual.*

Demostración. Si c_0 fuese isomorfo a un espacio dual entonces, por los comentarios que siguen a la Proposición 1.3.10 c_0 debería estar complementado en c_0^{**}, lo cual supondría una contradicción con el teorema 1.3.13 puesto que $c_0^{**} = \ell_\infty$ y sabemos que c_0 no está complementado en ℓ_∞ porque no existe una proyección acotada.

□

Teorema 1.3.15. *Si X es un espacio de Banach separable entonces puede embeberse isométricamente en ℓ_∞.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión densa en X. Para cada n entero tomamos $x_n^* \in X^*$ tal que $||x_n^*|| = 1$ y $x_n^*(x_n) = ||x_n||$. La sucesión $(x_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ es 1-normante en X. Por lo tanto el operador $T : X \longrightarrow \ell_\infty$ definido $\forall x \in X$ por $T(x) = (x_n^*(x))_{n=1}^\infty$ es embebimiento isométrico buscado puesto que conserva la norma y es continuo e inyectivo.

□

Recordemos que el anulador de un subespacio E de X se define como el conjunto de los funcionales que se anulan para todos los elementos de E, es decir,

$$E^\perp = \{x^* \in X^* : x^*|_E \equiv 0\}.$$

Teorema 1.3.16. (Teorema de Sobczyk). *Sea X un espacio de Banach separable. Si E es un subespacio cerrado de X y $T : E \longrightarrow c_0$ un operador acotado entonces existe un operador $\tilde{T} : X \longrightarrow c_0$ tal que $\tilde{T}|_E = T$ y $||\tilde{T}|| \leq 2||T||$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $||T|| = 1$. El operador T deberá ser de la forma

$$Tx = (f_n^*(x))_{n=1}^\infty, \quad x \in E$$

donde $(f_n^*)_{n=1}^\infty \subset E^*$. Dado que $||T|| = 1$ se tiene que $||f_n^*|| \leq 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y, además, como $Tx = (f_n^*(x))_{n=1}^\infty \in c_0$ para todo $x \in E$, la sucesión $(f_n^*)_{n=1}^\infty$ converge a 0 en la topología débil* de E^* por la proposición 1.2.7. Por el teorema de Hahn-Banach sabemos que existen funcionales $(\varphi_n^*)_{n=1}^\infty \subset X^*$ con $||\varphi_n^*|| \leq 1$ y tal que $\varphi_n^*|_E = f_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por 1.2.13, dado que X es separable se tiene que (B_{X^*}, w^*) es metrizable. Sea ρ la métrica en B_{X^*} que induce la topología débil* en B_{X^*}. Veamos que se verifica que $\lim_n \rho(\varphi_n^*, B_{X^*} \cap E^\perp) = 0$. Por reducción al absurdo supongamos que el límite anterior no es cierto, por tanto existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(\varphi_{n_k}^*)_{k=1}^\infty$ de $(\varphi_n^*)_{k=1}^\infty$ verificando

$$\rho(\varphi_{n_k}^*, B_{X^*} \cap E^\perp) > \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por el teorema de Banach-Alaoglu 1.2.10 y la metrizabilidad de (B_{X^*}, w^*), existe $\varphi^* \in B_{X^*}$ y una subsucesión $(\varphi_{n_{k_j}}^*)_{j=1}^\infty$ de $(\varphi_{n_k}^*)_{k=1}^\infty$ tal que $\varphi_{n_{k_j}^*} \xrightarrow{\mathrm{w}^*} \varphi^*$.

Como
$$\varphi^*(e) = \lim_j \varphi^*_{n_{k_j}}(e) = \lim_j f^*_{n_{k_j}}(e) = 0, \quad \forall e \in E,$$
tenemos que $\varphi^* \in E^\perp \cap B_{x^*}$. Pero de la desigualdad $\rho(\varphi^*_{n_k}, B_{X^*} \cap E^\perp) > \varepsilon$ para cada $k \in \mathbb{N}$ se sigue que $\rho(\varphi^*_{n_{k_j}}, \varphi^*) > \varepsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$, lo cual contradice que $\varphi^*_{n_{k_j}} \xrightarrow{w^*} \varphi^*$.

Por tanto, $\lim_n \rho(\varphi^*_n, B_{X^*} \cap E^\perp) = 0$. Además, como $E^\perp$ es débil*-cerrado, el conjunto $B_{X^*} \cap E^\perp$ es débil*-compacto. Existe entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ un funcional $\nu^*_n \in B_{X^*} \cap E^\perp$ de forma que $\rho(\varphi^*_n, \nu^*_n) = \rho(\varphi^*_n, B_{X^*} \cap E^\perp)$.

Tomando $x^*_n := \varphi^*_n - \nu^*_n$ podemos definir el operador $\tilde{T}$ en X como $\tilde{T}(x) = (x^*_n(x))_{n=1}^\infty$ para cada $x \in X$. Nótese que $\tilde{T}(x) \in c_0, \ \forall x \in X$ porque $x^*_n = \varphi^*_n - \nu^*_n \xrightarrow{w^*} 0$ y también verifica
$$\tilde{T}(e) = (\varphi^*_n(e) - \nu^*_n(e))_{n=1}^\infty = (\varphi^*_n(e)_{n=1}^\infty = T(e), \quad \forall e \in E.$$
Además, para todo $x \in X$ se tiene
$$||\tilde{T}(x)|| = \sup_n |x^*_n(x)| = \sup_n |\varphi^*_n(x) - \nu^*_n(x)| \le \sup_n(||\varphi^*_n|| + ||\nu^*_n||)||x|| \le 2||x||,$$
luego $||\tilde{T}|| \le 2$. □

El siguiente corolario afirma que si E es un subespacio de un espacio de Banach separable X y E es isomorfo a c_0 entonces E está complementado en X.

Corolario 1.3.17. *Si E es un es un subespacio de un espacio de Banach separable X y E es isomorfo a c_0 entonces existe una proyección P de X en E.*

Demostración. Supongamos que $T : E \longrightarrow c_0$ es un isomorfismo y sea $\tilde{T} : X \longrightarrow c_0$ la extensión dada por el teorema anterior. Entonces $P = T^{-1}\tilde{T}$ es una proyección de X en E. □

1.4. Álgebras de Boole y la dualidad de Stone

La dualidad topológica de Stone tiene su origen en el comienzo de la teoría moderna de álgebras de Boole y los espacios de Hausdorff compactos cero-dimensionales -o espacios de Stone-; pues existe una correspondencia de homomorfismos entre álgebras de Boole y aplicaciones entre espacios de Stone. Como consecuencia, las cuestiones algebraicas en las álgebras de Boole se traducen en topológicas en los espacios de Stone y viceversa.

1.4.1. Álgebras de Boole

Las álgebras de Boole se definen a partir de una lista de axiomas algebraicos. Ahora nos dedicaremos a presentar las leyes aritméticas que se derivan de dichos axiomas y algunas nociones básicas acerca de estas estructuras y sobre algunos de sus subconjuntos.

Definición 1.4.1. *Un álgebra de Boole es un álgebra $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}})$ que satisface los siguientes axiomas para todo $x, y \in \mathcal{B}$:*

1. $x \vee y = y \vee x$ *y* $x \wedge y = y \wedge x$
2. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *y* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
3. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *y* $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
4. $x \vee \neg x = 1$ *y* $x \wedge \neg x = 0$
5. $x \vee 0 = x$ *y* $x \wedge 1 = x$

Un álgebra de Boole se dice **propia** si se cumple que $0^{\mathfrak{B}} \neq 1^{\mathfrak{B}}$; en otro caso diremos que es impropia.

Si $a, b \in \mathfrak{B}$ decimos que $a \vee b$ es la unión o disyunción de a y b, que $a \wedge b$ es la intersección o conjunción de a y b, y que $\neg a$ es el complemento de a.

Definición 1.4.2. *Una estructura* $(\mathcal{A}, \vee^{\mathfrak{A}}, \wedge^{\mathfrak{A}}, \neg^{\mathfrak{A}}, 0^{\mathfrak{A}}, 1^{\mathfrak{A}})$ *es una subálgebra de un álgebra de Boole* $(\mathcal{B}, \vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}})$ *si* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $0_{\mathfrak{A}} = 0_{\mathfrak{B}}$, $1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{B}}$ *y las operaciones* $\vee^{\mathfrak{A}}, \wedge^{\mathfrak{A}}, \neg^{\mathfrak{A}}$ *son las restricciones de* $\vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}$ *a* $\mathcal{A}$.

Para todo conjunto A el **álgebra potencia** $P(A) = (P(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, donde para cada $X \subseteq A$, $\overline{X} = A \setminus X$, es un álgebra de Boole. $P(A)$ será propia si y sólo si $A \neq \emptyset$.

Más generalmente, dado un conjunto A, un **álgebra de conjuntos** sobre A es una subálgebra de $P(A)$. Así, una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de A es el universo de un álgebra de conjuntos sobre A si y sólo si $\emptyset, A$ son elementos de $\mathcal{B}$ y para todo $X, Y \in \mathcal{B}$ se cumple que $X \cup Y$, $X \cap Y$, $A \setminus X \in \mathcal{B}$.

Ejemplo 1.4.3. (Álgebras finitas/cofinitas). *Sea* X *un conjunto cualquiera. Un subconjunto* a *de* X *se dice cofinito en* X *si* $X \setminus a$ *es finito. Consideremos*

$$A = \{a \subseteq X : a \textit{ es finito o cofinito}\}.$$

Entonces, A *es un álgebra de conjuntos sobre* X*, el álgebra finita/cofinita sobre* X.

Si X tiene cardinalidad infinita κ, entonces tiene un álgebra finita/cofinita, puesto que X tiene exactamente κ subconjuntos finitos. Así, todo cardinal infinito se corresponde con la cardinalidad de un álgebra de Boole. Todo entero no negativo k, sin embargo, cumple esto si y sólo si $k = 2^n$ para algún $n \in \omega$.

Ejemplo 1.4.4. (Álgebra de los clopen). *Sea* X *un espacio topológico. Un subconjunto de* X *será un clopen si es abierto y cerrado. El conjunto de los subconjutos clopen,* $\mathrm{Clop}X$*, es un álgebra de conjuntos sobre* X*, el álgebra de los clopen sobre* X.

A continuación enunciaremos un principio general que, en lo que a computación se refiere, ahorra una gran cantidad de trabajo. Para el desarrollo del trabajo no será necesario enunciarlo ni demostrarlo en gran detalle.

Definición 1.4.5. *Si* E *es una expresión en un lenguaje cuyos únicos símbolos no lógicos son* $\vee, \wedge, \neg, 0, 1$*;* E'*, la expresión dual se obtiene a partir de* E *al reemplazar los símbolos* $\vee, \wedge, 0, 1$ *por* $\wedge, \vee, 1, 0$*, respectivamente, dejando fijo* $\neg$.

Obsérvese que $(E')'$ es E y que la expresión dual de cada uno de los axiomas anteriores es un axioma.

Notación. Si $\mathfrak{B} = (\mathcal{B}, \vee^{\mathfrak{B}}, \wedge^{\mathfrak{B}}, \neg^{\mathfrak{B}}, 0^{\mathfrak{B}}, 1^{\mathfrak{B}})$ es un álgebra de Boole denotaremos como $\mathfrak{B}'$ al **álgebra dual** de $\mathfrak{B}$, cuyo universo también es $\mathcal{B}$ pero tal que $\vee^{\mathfrak{B}'} = \wedge^{\mathfrak{B}}$, $\wedge^{\mathfrak{B}'} = \vee^{\mathfrak{B}}$, $\neg^{\mathfrak{B}'} = \neg^{\mathfrak{B}}$, $0^{\mathfrak{B}'} = 1^{\mathfrak{B}}$ y $1^{\mathfrak{B}'} = 0^{\mathfrak{B}}$.

Es claro que $(\mathfrak{B}')' = \mathfrak{B}$ y que todo enunciado E es verdadero en $\mathfrak{B}$ si y sólo si E' lo es en B'. En consecuencia, B' satisface los axiomas y es, por tanto, un álgebra de Boole. A partir de estas consideraciones podemos establecer el siguiente principio:

Proposición 1.4.6. (Principio de dualidad). *si* E *es un enunciado verdadero en toda álgebra de Boole, su dual* E' *también lo es.*

Demostración. Sea E tal enunciado y sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Boole. Veamos que E' es verdadero en $\mathfrak{B}$.

Dado que $\mathfrak{B}'$ es un álgebra de Boole se tiene que E es verdadero en $\mathfrak{B}'$. Por tanto, como sabemos que todo enunciado E es verdadero en $\mathfrak{B}$ si y sólo si E' lo es en B', se tiene que E' es verdadero en $(\mathfrak{B}')'$. Pero $(\mathfrak{B}')' = \mathfrak{B}$. Por tanto, se tiene que, tal y como queríamos probar, E' es verdadero en $\mathfrak{B}$.

$\square$

Lema 1.4.7. *En toda álgebra de Boole se cumple que*

$$x \wedge y = x \Longleftrightarrow x \vee y = y.$$

Definición 1.4.8. *Dada un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$, definimos el orden canónico de $\mathfrak{B}$, al que denotaremos como $\leq^{\mathfrak{B}}$ o simplemente $\leq$, por*

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x.$$

O, equivalentemente,

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y.$$

Lema 1.4.9. *En toda álgebra de Boole se cumple que*
i) $x \leq x$
ii) si $x \leq y$ *e* $y \leq x$, *entonces* $x = y$
iii) si $x \leq y$ *e* $y \leq z$, *entonces* $x \leq z$.
En otras palabras, el orden canónico de un álgebra de Boole es un orden parcial.

Proposición 1.4.10. *Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole,*
i) 1 es el elemento máximo y 0 el mínimo de $(\mathcal{B}, \leq)$
ii) $x \vee y$ es el supremo de $\{x, y\}$ y $x \wedge y$ el ínfimo en $(\mathcal{B}, \leq)$
iii) $\neg x$ es el único elemento $y \in \mathcal{B}$ tal que $x \wedge y = 0$ y $x \vee y = 1$.

Definición 1.4.11. *Un álgebra de Boole se dirá completa si todo conjunto tiene un supremo.*

Definición 1.4.12. *Un homomorfismo entre dos álgebras de Boole $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ es una aplicación $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ tal que para todo $x, y \in \mathcal{A}$*

$$\begin{aligned} &f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y), \\ &f(\neg x) = \neg f(x) \;\; y \\ &f(0) = 0, \; f(1) = 1. \end{aligned}$$

Un homomorfismo $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ entre dos álgebras de Boole es un monomorfismo o embebimiento si es inyectivo. Y diremos que es epimorfismo si es suprayectivo.

Definición 1.4.13. *Un isomorfismo $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ entre álgebras de Boole es un monomorfismo que además es epimorfismo.*

Proposición 1.4.14. *Supongamos que $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son dos álgebras de Boole y que f es una biyección entre ellas. Entonces f es un isomorfismo entre las álgebras $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ si y sólo si f es un isomorfismo entre los órdenes $(\mathcal{A}, \leq^{\mathfrak{A}})$ y $(\mathcal{B}, \leq^{\mathfrak{B}})$.*

1.4.2. Átomos, ultrafiltros y el teorema de Stone

Esta parte del capítulo está destinada a enunciar teorema de Stone, el cual tiene dos versiones. La versión conjuntista únicamente la enunciaremos, y la topológica cuya demostración veremos más adelante. Será esta en la que apoyaremos el desarrollo de uno de los resultados más relevantes del trabajo.

Observación 1.4.15. *Habitualmente se identifica* $\mathcal{B}$ *con* $\mathfrak{B}$*, por ello a partir de ahora escribiremos* $x \in \mathfrak{B}$ *cuando un elemento* x *pertenezca al álgebra.*

Definición 1.4.16. *Llamaremos átomo en un álgebra de Boole a todo elemento* $a \in \mathfrak{B}$ *distinto de* 0 *tal que* $\{b \in \mathfrak{B} : b \leq a\} = \{0, a\}$.

Diremos que $\mathfrak{B}$ *es un álgebra atómica si para todo elemento* $x \in \mathfrak{B}$ *distinto de 0, existe algún átomo* a *tal que* $a \leq x$.

Por ejemplo, un álgebra potencia $P(X)$ y el álgebra finita/cofinita sobre X son atómicas, siendo los átomos los conjuntos unipuntuales $\{x\}$, con $x \in X$.

Otro ejemplo de álgebra atómica es cualquier álgebra de Boole finita, dado que si $x > 0$ en un álgebra de Boole y no existiese ningún átomo por debajo de x, habría una sucesión infinita estrictamente decreciente.

Lema 1.4.17. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes para todo elemento* $a \in \mathfrak{B}$*:*

i) a *es un átomo de* $\mathfrak{B}$*,*

ii) para todo $x \in \mathfrak{B}$*, o bien* $a \leq x$ *o bien* $a \leq -x$*, pero no ambos,*

iii) $a > 0$ *y, para todo* $x, y \in \mathfrak{B}$*,* $a \leq x \vee y$ *si y sólo si* $a \leq x$ *o* $a \leq y$.

Proposición 1.4.18. *Para toda álgebra de Boole, la aplicación* $f : \mathfrak{B} \longrightarrow P(\mathrm{At}\mathfrak{B})$ *definida por* $f(x) = \{a \in \mathrm{At}\mathfrak{B} : a \leq x\}$ *es un homomorfismo.*

Será un embebimiento si $\mathfrak{B}$ *es atómica y un epimorfismo si es completa.*

Esta proposición no sólo es una versión más débil del teorema de Stone, sino que es una descripción de las álgebras de Boole atómicas completas.

Corolario 1.4.19. *Toda álgebra de Boole completa y atómica es isomorfa a un álgebra potencia.*

Pasemos ahora a ver algunas definiciones y propiedades referentes a los filtros y ultrafiltros en álgebras de Boole.
Los ultrafiltros son la principal herramienta en la prueba del teorema de Stone. Éstos surgen de manera natural a partir de los embebimientos de álgebras de Boole en álgebras potencia. Veamos, primeramente, una definición más sencilla de lo que es un ultrafiltro en un álgebra booleana.

Sea $e : \mathfrak{B} \longrightarrow P(X)$ un embebimiento o, para mayor generalidad, un homomorfismo. Entonces, para cualquier punto $x \in X$, el subconjunto

$$F = \{a \in \mathfrak{B} : x \in e(a)\}$$

de $\mathfrak{B}$ tiene las siguientes propiedades:

$1 \in F$, $0 \notin F$,

$a \wedge b \in F$ si y sólo si $a, b \in F$,

$a \vee b \in F$ si y sólo si $a \in F$ ó $b \in F$,

$\neg a \in F$ si y sólo si $a \notin F$.

Los subconjuntos de $\mathfrak{B}$ con estas propiedades son exactamente los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$. Pasemos ahora a la definición en base a los filtros del álgebra.

Definición 1.4.20. *Un ideal en un álgebra de Boole* $\mathfrak{B}$ *es un subconjunto no vacío,* I*, de* $\mathfrak{B}$ *tal que para todo* $a, b \in \mathfrak{B}$

i) $0 \in I$.

ii) si $a, b \in I$*, entonces* $a \vee b \in I$.

iii) si $a \in I$ *y* $b \leq a$*, entonces* $b \in I$.

Un ideal I será **propio** si y sólo si $I \neq \mathfrak{B}$. En otro caso se dirá impropio.

Definición 1.4.21. *Un filtro en un álgebra de Boole* $\mathfrak{B}$ *es un ideal en el álgebra dual* $\mathfrak{B}'$*. Así, un subconjunto* F *de* $\mathfrak{B}$ *es un filtro en* $\mathfrak{B}$ *si y sólo si* $F \neq \emptyset$ *y para todo* $a, b \in \mathfrak{B}$

i) $1 \in F$.

ii) si $a, b \in F$*, entonces* $a \wedge b \in F$.

iii) si $a \in F$ *y* $a \leq b$*, entonces* $b \in F$.

Un filtro F será **propio** si y sólo si $F \neq \mathfrak{B}$. En otro caso se dirá impropio.

Observación 1.4.22. *Para todo ideal* I *se cumple que* $0 \in I$ *y para todo filtro* F, $1 \in F$*. Además, un ideal será propio si y sólo si no contiene al* 1 *y un filtro lo será si y sólo si no contiene al* 0.

Lema 1.4.23. *Sea* $\mathfrak{B}$ *un álgebra de Boole. Si* $X \subset \mathcal{B}$*, entonces*

i) X *es ideal de* $\mathfrak{B}$ *si y sólo si* $\{\neg a : a \in X\}$ *es filtro en* $\mathfrak{B}$.

ii) X *es filtro de* $\mathfrak{B}$ *si y sólo si* $\{\neg a : a \in X\}$ *es ideal de* $\mathfrak{B}$.

Si $\mathfrak{B}$ es un álgebra de Boole, la intersección de todo conjunto de filtros en $\mathfrak{B}$ es también un filtro en $\mathfrak{B}$. Así, si X es un subconjunto de $\mathfrak{B}$, hay un menor filtro, $F(X)$, en $\mathfrak{B}$ que incluye a X, a saber, la intersección de todos los filtros en $\mathfrak{B}$ que incluyen a X. $F(X)$ es el **filtro generado** por X. Si X es vacío, $F(X) = \{1^{\mathfrak{B}}\}$; si X es no vacío, $F(X)$ es el conjunto de los elementos $b \in \mathfrak{B}$ tales que $x_1 \wedge ... \wedge x_n \leq b$ para $n \geq 1$ y $x_1, ..., x_n \in X$.

Del mismo modo, dado que la intersección de todo conjunto de ideales en $\mathfrak{B}$ es un ideal en $\mathfrak{B}$, si $X \subseteq \mathfrak{B}$ hay un menor ideal, $I(X)$, que incluye a X. $I(X)$ es el **ideal generado** por X. Si X es vacío, $I(X) = \{0\}$; si es no vacío, $I(X)$ es el conjunto de los elementos $b \in \mathfrak{B}$ tales que $b \leq x_1 \vee ... \vee x_n$ para $n \geq 1$ y $x_1, ..., x_n \in X$.

Definición 1.4.24. *Si* $\mathfrak{B}$ *es un álgebra de Boole, decimos que un subconjunto* $X \subseteq \mathfrak{B}$ *tiene la propiedad de la intersección finita (PIF) si y sólo si el ínfimo de todo subconjunto finito de* X *es distinto de* 0.

Decimos que X *tiene la propiedad de la unión finita (PUF) si y sólo si el supremo de todo subconjunto finito de* X *es distinto de* 1.

Definición 1.4.25. *Decimos que un ideal* I *en un álgebra de Boole* $\mathfrak{B}$ *es primo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) es propio

ii) para todo $a, b \in \mathfrak{B}$*, si* $a \wedge b \in I$ *se tiene que* $a \in I$ *o* $b \in I$.

Dualmente, un filtro F *en un álgebra* $\mathfrak{B}$ *es un ultrafiltro si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) es propio

ii) para todo $a, b \in \mathfrak{B}$*, si* $a \vee b \in F$ *se tiene que* $a \in F$ *o* $b \in F$.

Así, un ideal es primo si y sólo si su filtro dual es un ultrafiltro, y un filtro será un ultrafiltro si y sólo si su ideal dual es primo.

Observación 1.4.26. *Otra forma de definirlos y que resulta mucho más práctica a la hora de comprobar si un conjunto es un ultrafiltro es la siguiente:*
Un filtro F en $\mathfrak{B}$ es un ultrafiltro si para cada $x \in \mathfrak{B}$ se tiene que $x \in F$ o $\neg x \in F$, pero no ambos.

Definición 1.4.27. *Para un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$,*

$$\text{Ult } \mathfrak{B} = \{F \subseteq \mathfrak{B} : F \text{ es un ultrafiltro de } \mathfrak{B}\}$$

es el conjunto de los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$.

La aplicación $s : \mathfrak{B} \longrightarrow P(\text{Ult } \mathfrak{B})$ definida por

$$s(x) = \{F \in \text{Ult } \mathfrak{B} : x \in F\}$$

es la aplicación de Stone.

Teorema 1.4.28. (Teorema de representación de Stone, versión conjuntista). *Toda álgebra de Boole es isomorfa a un álgebra de conjuntos.*

1.4.3. Espacios de Stone

Este epígrafe establece la dualidad fundamental entre las álgebras de Boole y unos espacios topológicos especiales, los espacios de Stone. Así, el álgebra dual de un espacio de Stone X es $\text{Clop}(X)$, el álgebra de los subconjuntos clopen de X, y el espacio dual de un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es el conjunto $\text{Ult}\mathfrak{B}$ de los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$, equipado con la llamada topología de Stone. El resultado de toda esta teoría es que toda álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ es isomorfa a $\text{Clop}(\text{Ult}\mathfrak{B})$ -para ser exactos, la aplicación $s : \mathfrak{B} \longrightarrow P(\text{Ult } \mathfrak{B})$ definida en 1.4.27 es un isomorfismo entre $\mathfrak{B}$ y $\text{Clop}(\text{Ult}\mathfrak{B})$-. En particular, obtendremos una versión más fuerte del teorema de representación de Stone.

El álgebra $\text{Clop}(X)$ de los subespacios clopen de un espacio topológico arbitrario es uno de los ejemplos estándar de álgebra de conjuntos. Para un espacio conexo X, sin embargo, este álgebra se reduce a $\{\emptyset, X\}$.

Definición 1.4.29. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es cero-dimensional si* $\text{Clop}(X)$ *es una base de la topología de X.*

X será un espacio de Stone si es Hausdorff, compacto y cero-dimensional.

Que un espacio sea cero-dimensional es equivalente a que exista una base o subbase para X formada por conjuntos clopen. Por ejemplo, el espacio de los números irracionales con la topología heredada de $\mathbb{R}$ es cero-dimensional, teniendo los intervalos (a, b) con $a, b \in \mathbb{Q}$ como base de clopens.

Ejemplo 1.4.30. *i) Todo espacio finito y discreto es de Stone. En particular, denotaremos como 2 al espacio de Stone $2 = \{0, 1\}$ con la topología discreta.*

ii) El espacio producto de cualquier familia de espacios de Stone es de Stone. En particular, también lo es el espacio 2^I para cualquier conjunto de índices I, el cual es conocido como el espacio de Cantor de peso $|I|$, para un I infinito.

iii) Todo subespacio cerrado de un espacio de Stone es un espacio de Stone.

Definición 1.4.31. *Un espacio X diremos que es conexo si* $\text{Clop}(X)=\{\emptyset, X\}$*, es decir, si X no es la unión de dos subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos.*

Un espacio topológico X es totalmente disconexo si ningún subespacio con al menos dos elementos es conexo.

Teorema 1.4.32. *Un espacio de Hausdorff compacto es cero-dimensional, y por tanto de Stone, si y sólo si es totalmente disconexo.*

Demostración. Sea X un compacto Hausdorff. Si X es cero-dimensional e Y un subespacio de X con dos puntos distintos y e y', entonces existe un clopen, A tal que $y \in A$ e $y' \notin A$. Así que $Y \cap A$ es un subconjunto clopen propio no vacío de Y e Y no es conexo. Por consiguiente, X es totalmente disconexo.

Recíprocamente, supongamos que X es totalmente disconexo. Sean pues $x \in X$ y U un entorno abierto de x; debemos encontrar un clopen F de X tal que $x \in F \subseteq U$, probando así que $\mathrm{Clop}(X)$ es una base. Para ello definimos

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathrm{Clop}(X) : x \in F\}, \quad q = \bigcap \mathcal{F}.$$

Basta probar que $q \subseteq U$. Para ello, dado que X es compacto, U abierto y todo $F \in \mathcal{F}$ cerrado, para algún subconjunto finito F' de $\mathcal{F}$ se tiene que $\bigcap F' \subseteq U$ y podemos considerar $F = \bigcap F'$. Veamos que $q = \{x\}$, para ello supongamos que q tiene al menos dos puntos y que no es conexo. De este modo

$$q = q_1 \cup q_2,$$

donde q_1, q_2 son cerrados disjuntos no vacíos de q. Ahora tenemos que q es un subconjunto cerrado de X, por tanto cada q_i es cerrado en X. Por la compacidad y, por tanto, normalidad de X podemos escoger dos abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $q_i \subseteq U_i$. Entonces, $q \subseteq U_1 \cup U_2$ y, por un argumento sobre compacidad similar al anterior que $F \subseteq U_1 \cup U_2$ para algún $F \in \mathcal{F}$. De este modo, tanto $U_1 \cap F$ como $U_2 \cap F$ son clopen en F y, por tanto, también en X. Dado que $x \in F$, podemos asumir que $x \in U_1 \cap F$. Entonces $U_1 \cap F \in \mathcal{F}$ y $q \in U_1 \cap F$. Esto implica que $q_2 \subseteq q \subseteq U_1$, lo cual contradice que $q_2 \subseteq U_2$, que los U_i fuesen disjuntos y que q_i fuese no vacío. □

A esto se debe que, dado que todos los compactos que manejamos en el trabajo son Hausdorff, llamemos indistintamente compacto cero-dimensional o totalmente disconexo a este tipo de espacios.

Lema 1.4.33. *Sea X un espacio de Stone.*

i) Si $B \subseteq \mathrm{Clop}(X)$ es una base para X cerrada bajo uniones finitas, entonces $B = \mathrm{Clop}(X)$.

ii) Si Y es un subespacio cerrado de X, entonces $\mathrm{Clop}Y = \{a \cap Y : a \in \mathrm{Clop}X\}$.

iii) Si y, z son subconjuntos cerrados y disjuntos de X, existe un subconjunto clopen de X que separa a y y a z, i.e., tal que $y \subseteq a$ y $z \subseteq X \setminus a$.

Ahora estamos preparados para probar la versión topológica del teorema de representación de Stone.

Recordemos que $\mathrm{Ult}\mathfrak{B}$ es el conjunto de todos los ultrafiltros de un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$ y que la aplicación de Stone es un monomorfismo de álgebras de Boole. En particular, $s(\mathfrak{B})$ es una familia de subconjuntos de $\mathrm{Ult}\mathfrak{B}$ cerrada bajo intersecciones finitas y, por tanto, base de una topología.

Definición 1.4.34. *Para un álgebra de Boole $\mathfrak{B}$, la topología de Stone es la única topología en $\mathrm{Ult}\mathfrak{B}$ que tiene como base $s(\mathfrak{B})$.*

$\mathrm{Ult}(\mathfrak{B})$ *dotado de la topología de Stone, es el espacio de Stone o espacio dual o el espacio de los ultrafiltros de $\mathfrak{B}$.*

Teorema 1.4.35. (Teorema de representación de Stone, versión topológica). *Toda álgebra de Boole es isomorfa al álgebra de los clopen de un espacio de Stone. Más concretamente, el espacio dual* $\mathrm{Ult}\mathfrak{B}$ *de un álgebra de Boole* $\mathfrak{B}$ *es un espacio de Stone y la aplicación de Stone de* $\mathfrak{B}$ *es un isomorfismo entre* $\mathfrak{B}$ *y* $\mathrm{Clop}(\mathrm{Ult}\mathfrak{B})$.

Demostración. Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Boole y $X = \mathrm{Ult}\mathfrak{B}$ su espacio dual. X es cero-dimensional puesto que todos los elementos de la base $s(a)$ son clopen, por ser $X \setminus s(a) = s(\neg a)$. Además X es Hausdorff, pues si suponemos que F, G son dos ultrafiltros distintos de $\mathfrak{B}$, por la maximalidad de F podemos tomar $a \in F \setminus G$. Entonces $s(a)$ y $s(\neg a)$ son entornos disjuntos de F y G.

Veamos que X es compacto, para ello sea U un recubrimiento abierto de X. Bastará considerar el caso en el que todo elemento de U es un elemento básico, por ello consideremos $U = \{s(a) : a \in A\}$, con $A \subseteq \mathfrak{B}$. Supongamos que X no posee subrecubrimiento finito, entonces para $n \in \omega$ y $a_1, ..., a_n \in A$ se tiene

$$s(a_1) \cup ... \cup (a_n) \neq X = s(1),$$

por tanto $a_1 \vee ... \vee a_n \neq 1$ y $\neg a_1 \vee ... \vee \neg a_n \neq 0$. De esto, se sigue que el conjunto $\neg A = \{\neg a : a \in A\}$ tiene la PIF. Dado que un subconjunto de un álgebra booleana está en un ultrafiltro si y sólo si tiene la PIF, consideremos ahora F un ultrafiltro de $\mathfrak{B}$ que contiene a $\neg A$. Entonces, para cada $a \in A$ se tiene que $\neg a \in F$, $a \notin F$ y $F \notin s(a)$, lo cual contradice que U es un cubrimiento de X.

Por tanto, X es un espacio de Stone. Dado que la aplicación de Stone s es un monomorfismo entre $\mathfrak{B}$ y $\mathrm{Clop}X$ por el lema 1.4.33 *i)* se tiene que $\mathrm{Clop}X = s(\mathfrak{B})$ considerando $B = s(\mathfrak{B})$ la base de X.

$\square$

Capítulo 2

Sumas torcidas

Definición 2.1. *Una suma torcida de los espacios de Banach Z e Y es una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow Z \longrightarrow X \longrightarrow Y \longrightarrow 0,$$

donde X es un espacio de Banach y las aplicaciones son operadores lineales y acotados.

Definición 2.2. *Una suma torcida se dirá trivial si la sucesión exacta escinde, es decir, si la aplicación $Z \longrightarrow X$ admite inversa por la izquierda. Esto es equivalente a que la imagen de la aplicación $Z \longrightarrow X$ esté complementada en X; en este caso, $X \cong Y \oplus Z$.*

De manera informal podemos decir que X es una suma torcida no trivial de Z e Y si Z puede embeberse isomórficamente en X como un subespacio no complementado tal que X/Z sea isomorfo a Y.

Un ejemplo clásico de esto es consecuencia del teorema de Phillips-Sobczyk 1.3.13, que establece que c_0 no está complementado en ℓ_∞ y, por tanto, la siguiente suma torcida es no trivial:

$$0 \longrightarrow c_0 \longrightarrow \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty/c_0 \longrightarrow 0,$$

considerando la inclusión y la aplicación cociente.

Por otra parte, el teorema de Sobczyk 1.3.16 asegura que toda copia isomorfa de c_0 está complementada en todo superespacio separable. Por tanto, toda suma torcida de c_0 con un superespacio separable será trivial. En base a esto, si consideramos K un espacio compacto métrico, por el teorema 1.2.18 sabemos que $C(K)$ es separable, así que c_0 y $C(K)$ únicamente admitirán sumas torcidas triviales.

Llegados a este punto el al lector le puede surgir la siguiente duda:

Problema 1. *Dado K un espacio compacto no metrizable, ¿existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$?*

Este problema tiene su origen en los artículos [5] y [6] y diversos investigadores han estudiado las condiciones bajo las cuales no toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial, es decir, cuándo existe una suma torcida no trivial.

En [6], Castillo demuestra que bajo la Hipótesis del Continuo existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$ para K un compacto disperso Hausdorff no metrizable de altura finita.

Por su parte, Correa y Tausk en [9] presentan un amplio repertorio de espacios compactos Hausdorff K tales que existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$. Éstos serán los que presentemos a lo largo de este segundo capítulo, pues uno de sus resultados nos permitirá, más adelante, pronunciarnos acerca de la trivialidad de las sumas torcidas de c_0 y $C(2^{\omega_1})$.

Como vemos, existen muchos compactos no metrizables para los cuales la respuesta al Problema 1 es afirmativa, sin embargo nos centraremos en la negativa. Así, en el tercer capítulo, probaremos que bajo el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo existen espacios compactos no metrizables, K, tales que toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial.

Recordemos que las definiciones y resultados referentes a topología pueden encontrarse, sin demostración, en el Apéndice B al final del trabajo.

Las principales fuentes de referencia que se han utilizado para la elaboración este capítulo han sido [16], [11] y [9].

2.1. Sumas torcidas de c_0 y $C(K)$

Aclarados los conceptos de suma torcida trivial y no trivial comencemos exponiendo una serie de condiciones que garantizan que no toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial. Son las siguientes:

- K espacio compacto de Eberlein no metrizable.
- K espacio compacto de Valdivia que no satisface ccc.
- K con peso ω_1 y $C(K)$ no w*-separable.
- $C(K)$ contiene una copia isomorfa de ℓ_∞.

Además de esto, si existe una suma torcida no trivial de c_0 e Y y X contiene una copia isomorfa de Y, entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y X.

El objetivo de esta parte del trabajo será dar una condición para la que existe una suma torcida no trivial de c_0 y X haciendo uso de lo que se conoce como sistemas biortogonales en espacios de Banach. Además veremos sus implicaciones cuando $X = C(K)$ y que si K contiene una copia homeomorfa de $[0,\omega] \times [0,\mathfrak{c}]$ o de $2^{\mathfrak{c}}$, entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$.

Por otra parte, investigaremos las consecuencias de estos resultados, junto con CH, para compactos de Corson y de Valdivia. Recordemos, pues, el enunciado de CH.

Hipótesis del Continuo. *Para cualquier conjunto infinito $A \subset \mathbb{R}$ se tiene que o bien $|A| = \omega$ o bien $|A| = \mathfrak{c}$, lo cual es equivalente a $\omega_1 = \mathfrak{c}$.*

Definición 2.1.1. *Diremos que una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es casi disjunta si la intersección de dos subconjuntos distintos cualesquiera de ella $A_i \cap A_j$ es finita.*

Definición 2.1.2. *Diremos que un subconjunto A de un conjunto X es cofinito si su complementario $X \setminus A$ es finito.*

Lema 2.1.3. *Existe una familia casi disjunta $(A_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ de subconjuntos de ω que satisface la siguiente propiedad: para toda familia $(A'_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ con $A'_{n,\alpha} \subset A_{n,\alpha}$ cofinita en $A_{n,\alpha}$ se cumple que $\sup_{p\in\omega} |M_p| = +\infty$ donde*

$$M_p = \{n \in \omega : p \in \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{c}} A'_{n,\alpha}\}.$$

Demostración. Se puede consultar en [9]. □

Definición 2.1.4. *Sea X un espacio de Banach. Llamaremos sistema biortogonal en X a una familia $(x_i, \gamma_i)_{i\in I}$ con $x_i \in X$, $\gamma_i \in X^*$ tal que*

$$\gamma_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \textit{si } i = j \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

La cardinalidad de un sistema biortogonal $(x_i, \gamma_i)_{i\in I}$ viene dada por la cardinalidad de I.

Diremos que un sistema biortogonal $(x_i, \gamma_i)_{i\in I}$ está **acotado** si $\sup_{i\in I} ||x_i|| < +\infty$ y $\sup_{i\in I} ||\gamma_i|| < +\infty$ y que es **w*-nulo** si $(\gamma_i)_{i\in I}$ es una familia w*-nula, es decir, si $(\gamma_i(x))_{i\in I}$ está en $c_0(I)$, para todo $x \in X$, siendo

$$c_0(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \text{ el conjunto } \{a : |f(a)| > \varepsilon\} \text{ es finito}\}.$$

El siguiente teorema es sobre el que se vertebrará el resto de la sección. Para su demostración haremos uso del lema 2.1.3 que hemos enunciado anteriormente.

Teorema 2.1.5. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que existe un sistema biortogonal w*-nulo $(x_{n,\alpha}, \gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ en X y una constante $C \geq 0$ tal que*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i,\alpha_i}\right|\right| \leq C,$$

para todo $n_1, ..., n_k \in \omega$ distintos dos a dos, todo $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathfrak{c}$ y todo $k \geq 1$. Entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y X.

Demostración. Por la proposición 1.4.f de [8] sabemos que toda suma torcida de c_0 y X es trivial si y sólo si todo operador acotado $T : X \longrightarrow \ell_\infty/c_0$ admite un lifting, es decir, un operador acotado $\tilde{T} : X \longrightarrow \ell_\infty$ tal que $T(x) = \tilde{T}(x) + c_0$, para todo $x \in X$. Probemos pues, que existe un operador $T : X \longrightarrow \ell_\infty/c_0$ que no admite lifting.

Sea $(A_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ una familia casi disjunta como en el lema 2.1.3 y consideremos el único embebimiento isométrico $S : c_0(\omega\times\mathfrak{c}) \longrightarrow \ell_\infty/c_0$ tal que $S(e_{n,\alpha}) = \chi_{A_{n,\alpha}} + c_0$, donde $(e_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ denota la base canónica de $c_0(\omega \times \mathfrak{c})$.
Llamaremos $\Gamma : X \longrightarrow c_0(\omega \times \mathfrak{c})$ al operador acotado con coordenadas funcionales $(\gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ y pongamos $T = S \circ \Gamma : X \longrightarrow \ell_\infty/c_0$.
Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $\tilde{T}$ un lifting de T y sea $(\mu_p)_{p\in\omega}$ la sucesión de coordenadas funcionales de $\tilde{T}$. Tenemos entonces que el conjunto

$$A'_{n,\alpha} = \left\{p \in A_{n,\alpha} : \mu_p(x_{n,\alpha}) \geq \frac{1}{2}\right\}$$

es cofinito en $A_{n,\alpha}$. De esto se sigue que para todo $k \geq 1$ existe $p \in \omega$, $n_1, ..., n_k \in \omega$ distintos dos a dos, y $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathfrak{c}$ tal que $p \in A'_{n,\alpha}$ para $i = 1, ..., k$. De esta forma, se concluye que

$$\frac{k}{2} \leq \mu_p\left(\sum_{i=1}^{k} x_{n_i,\alpha_i}\right) \leq C||\tilde{T}||,$$

lo cual supone una contradicción ya que se cumple para todo $k \geq 1$.

$\square$

Corolario 2.1.6. *Sea K un espacio compacto Hausdorff. Supongamos que existe un sistema biortogonal acotado w*-nulo $(f_{n,\alpha}, \gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ en $C(K)$ tal que $f_{n,\alpha} f_{m,\beta} = 0$ para todo $n, m \in \omega$ con $n \neq m$ y todo $\alpha, \beta \in \mathfrak{c}$. Entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$.*

Definición 2.1.7. *Un espacio compacto Hausdorff K satisface la propiedad $(*)$ si existe una sucesión $(F_n)_{n\in\omega}$ de subespacios cerrados de K y un sistema biortogonal acotado w*-nulo $(f_{n,\alpha}, \gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ en $C(K)$ tal que*

$$F_n \cap \overline{\bigcup_{n\neq m} F_m} = \emptyset$$

y sop $f_{n,\alpha} \subset F_n$ para todo $n \in \omega$ y todo $\alpha \in \mathfrak{c}$; siendo sop $f_{n,\alpha}$el soporte de $f_{n,\alpha}$.

En lo que resta de sección denotaremos por $M(K)$ al espacio de las medidas finitas numerablemente aditivas de Borel regulares y signadas sobre K, dotado con la norma de la variación total.

Lema 2.1.8. *Sea K un espacio compacto Hausdorff y L un subespacio cerrado de K. Entonces si L satisface la propiedad $(*)$ también lo hace K.*

Demostración. Consideremos, como en la definición 2.1.7, una sucesión $(F_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos cerrados de L y un sistema biortogonal acotado w*-nulo $(f_{n,\alpha}, \gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ en $C(L)$.

Por recursión en n podemos obtener una sucesión $(U_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos abiertos disjuntos de K de manera que cada U_n contiene a F_n. Para ello procederemos del siguiente modo: por la proposición B.13 como el espacio K es compacto y Hausdorff sabemos es T_4. Por ello, se tiene que para todo par de cerrados disjuntos C, C' existen dos abiertos A, B tal que $C \subset A$, $C' \subset B$ y $A \cap B = \emptyset$. Sabiendo esto, sean

$$C_1 = \overline{\bigcup_{m=2}^{\infty} F_m} \text{ cerrado, } \; U_1 = A_1 \text{ y } B_1 \text{ abiertos}$$

tales que $F_1 \subset A_1$, $C_1 \subset B_1$ y $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.

Del mismo modo, definimos

$$C_2 = \overline{\bigcup_{m=3}^{\infty} F_m}, \; U_2 = A_2 \cap B_1 \text{ y } B_2 \text{ abiertos}$$

de modo que $F_2 \subset A_2$, $C_2 \subset B_2$ y $A_2 \cap B_2 = \emptyset$.

Así, de manera recursiva definimos

$$C_n = \overline{\bigcup_{m=n+1}^{\infty} F_m}, \; U_n = A_n \cap B_{n-1} \text{ y } B_n \text{ abiertos}$$

de modo que $F_n \subset A_n$, $C_n \subset B_n$ y $A_n \cap B_n = \emptyset$. De esta forma, obtenemos $(U_n)_{n\in\omega}$ la sucesión buscada.

Sea ahora V_n un abierto de K tal que $F_n \subset V_n \subset \overline{V_n} \subset U_n$, cosa que podemos hacer por ser K T_4. Aplicando ahora el teorema de extensión de Tietze B.14 y el lema de Urysohn B.15 podemos encontrar $\tilde{f}_{n,\alpha}$ una extensión continua de $f_{n,\alpha}$ a K con soporte contenido en $\overline{V_n}$ y con la misma norma que $f_{n,\alpha}$.

Para concluir esta prueba consideremos un $\tilde{\gamma}_{n,\alpha} \in M(K)$ la extensión de $\gamma_{n,\alpha} \in M(L)$ que se anula fuera de L. Se tiene así que $(\tilde{f}_{n,\alpha}, \tilde{\gamma}_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ es un sistema biortogonal acotado w*-nulo en $C(K)$, pues $\tilde{\gamma}_{n,\alpha}(\tilde{f}_{n,\alpha}) = \gamma_{n,\alpha}(f_{n,\alpha})$ para toda $f_{n,\alpha} \in C(L)$ y 0 para el resto. Además, como se conserva la norma en el caso de $\tilde{f}_{n,\alpha}$ y se anula fuera de L en el de $\tilde{\gamma}_{n,\alpha}$ se tiene que $\sup_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}} ||\tilde{f}_{n,\alpha}|| < +\infty$ y $\sup_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}} ||\tilde{\gamma}_{n,\alpha}|| < +\infty$ y es fácil comprobar que $(\tilde{f}_{n,\alpha}, \tilde{\gamma}_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}} \in c_0(\omega \times \mathfrak{c})$.

□

Como consecuencia de este lema y del corolario anterior se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 2.1.9. *Si L es un compacto Hausdorff que satisface $(*)$, entonces para todo compacto Hausdorff K que contenga una copia homeomorfa de L existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$.*

Ahora podemos establecer una serie de resultados que dan condiciones suficientes para que un espacio K satisfaga la propiedad $(*)$, pero antes deberemos dar la siguiente definición.

Definición 2.1.10. *Dado un subespacio cerrado F de un espacio compacto Hausdorff K, un operador de extensión de F a K es un operador acotado $E : C(F) \longrightarrow C(K)$ de forma que es la inversa por la derecha del operador restricción $R : C(K) \longrightarrow C(F)$ tal que $R(f) = f|_F$.*

Nótese que F admite un operador de extensión en K si y sólo si el núcleo

$$C(K|_F) = \{f \in C(K) : f|_F = 0\}$$

del operador restricción está complementado en $C(K)$.

Un punto x perteneciente a un espacio topológico X será un punto de acumulación de una sucesión $(S_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos de X si todo entorno de x tiene intersección no nula con S_n para infinitos $n \in \omega$.

Lema 2.1.11. *Sea K un espacio compacto de Hausdorff. Supongamos que existe una sucesión $(F_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos cerrados disjuntos dos a dos de K y un subespacio cerrado F de K que satisface las siguientes condiciones:*

(a) F admite un operador de extensión en K;

(b) todo punto de acumulación de $(F_n)_{n\in\omega}$ pertenece a F y $F_n \cap F = \emptyset$ para todo $n \in \omega$;

(c) existe una familia $(f_{n,\alpha}, \gamma_{n,\alpha})_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}}$ donde $(f_{n,\alpha}, \gamma_{n,\alpha})_{\alpha\in\mathfrak{c}}$ es un sistema biortogonal w-nulo en $C(F_n)$ para cada $n \in \omega$ y*

$$\sup_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}} ||f_{n,\alpha}|| < +\infty, \qquad \sup_{n\in\omega,\alpha\in\mathfrak{c}} ||\gamma_{n,\alpha}|| < +\infty.$$

Entonces K satisface la propiedad $(*)$.

Demostración. Se puede consultar en [9].

□

Corolario 2.1.12. *Sea K un espacio de Hausdorff compacto. Si $C(K)$ admite un sistema biortogonal acotado w*-nulo de cardinalidad $\mathfrak{c}$, entonces el espacio $[0,\omega]\times K$ satisface la propiedad $(*)$. En particular, $L \times K$ cumple la propiedad $(*)$ para todo espacio compacto Hausdorff L que contenga una sucesión convergente no trivial.*

Corolario 2.1.13. *Los espacios $[0,\omega] \times [0,\mathfrak{c}]$ y $2^{\mathfrak{c}}$ satisfacen la propiedad $(*)$. En particular, el producto de al menos $\mathfrak{c}$ espacios compactos Hausdorff con más de un punto cumplen la propiedad $(*)$.*

Demostración. La familia $(\chi_{[0,\alpha]}, \delta_\alpha - \delta_{\alpha+1})_{\alpha\in\mathfrak{c}}$ es un sistema biortogonal acotado y w*-nulo en $C([0,\mathfrak{c}])$, donde $\delta_\alpha \in M([0,\mathfrak{c}])$ denota la medida de probabilidad con soporte $\{\alpha\}$. Por el corolario anterior, se tiene que $[0,\omega] \times [0,\mathfrak{c}]$ satisface la propiedad $(*)$.

Para el caso de $2^{\mathfrak{c}}$ también se cumple, pues la aplicación $[0,\mathfrak{c}] \ni \alpha \longmapsto \chi_\alpha \in 2^{\mathfrak{c}}$ resulta ser un embebimiento de $[0,\mathfrak{c}]$ en $2^{\mathfrak{c}}$, por tanto $2^{\mathfrak{c}} \cong 2^\omega \times 2^{\mathfrak{c}}$ contiene una copia isomorfa de $[0,\omega] \times [0,\mathfrak{c}]$.

□

Éste es el resultado del que haremos uso al final del tercer capítulo para arrojar algo de luz sobre el carácter trivial o no de las sumas torcidas de c_0 y $C(2^{\omega_1})$.

2.2. Sumas torcidas no triviales para compactos de Corson y Valdivia

En esta sección estudiaremos las consecuencias de los resultados anteriores cuando nuestro espacio compacto K es un compacto de Corson o de Valdivia. Para introducir este tipo de espacios necesitaremos dar algunas nociones previas sobre espacios producto, ya que todos ellos son subconjuntos del espacio producto $[-1,1]^I$. Además de en esta parte del trabajo, se puede encontrar todo lo referente a topología en el Apéndice B.

Definición 2.2.1. *Si $\{X_i : i \in I\}$ es una familia de espacios topológicos, el espacio producto es el espacio $\Pi_{i\in I}X_i$ con la topología generada por los conjuntos de la forma $\Pi_{i\in I}U_i$ con*

(a) U_i abierto para todo i;

(b) $\{i \in I : U_i \neq X_i\}$ es finito.

Observación 2.2.2. *El producto numerable de abiertos será abierto si y sólo si una cantidad finita de ellos son distintos del total.*

Observación 2.2.3. *Para cada j la aplicación $\pi_j : \Pi_{i\in I}X_i \longrightarrow X_j$ que proyecta un elemento del espacio producto sobre una de sus coordenadas es continua. Y la menor topología que hace continuas a las proyecciones es la topología producto.*

Teorema 2.2.4. (Teorema de Tychonov). *Si cada X_i es compacto, entonces el espacio producto $\Pi_{i\in I}X_i$ también es compacto.*

Proposición 2.2.5. *Si cada X_i es un espacio Hausdorff, entonces el espacio producto $\Pi_{i\in I}X_i$ también es Hausdorff.*

Teorema 2.2.6. *Si K es compacto, entonces existe un conjunto I tal que K es homeomorfo a un subespacio cerrado de $[-1,1]^I$.*

Demostración. Sea $I = \{(x,y) \in K \times K : x \neq y\}$. Buscamos una aplicación $f : K \hookrightarrow [-1,1]^I$ de manera que $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$. Por el teorema de extensión de Tietze podemos encontrar $f : K \longrightarrow [-1,1]$ tal que $f_i(x) = 1$ y $f_i(y) = -1$. Deberemos comprobar ahora que es un homeomorfismo.

Sabemos que f es continua por serlo cada f_i, pues la antiimagen de un abierto básico de la topología producto resulta ser abierto

$$f^{-1}\left(\Pi_{i\in I}U_i\right) = \{x \in K : f(x) \in \Pi_{i\in I}U_i\} = \bigcap_{i\in I}\{x \in K : f_i(x) \in U_i\}$$

por ser una intersección en la que sólo una cantidad finita son distintos del total.

Resulta evidente que f es inyectiva y, por tanto, que $f : K \longrightarrow f(K)$ una biyección. Finalmente, se cumple que $f^{-1} : f(K) \longrightarrow K$ es continua y cerrada, puesto que K es compacto y $[-1,1]^I$ un espacio Hausdorff.

□

Observación 2.2.7. *Podemos denotar $[-1,1]^I$ como $\mathbb{R}^I$ puesto que $[-1,1]$ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$.*

En B.12 se define un espacio totalmente disconexo K como aquel en el que los conjuntos unipuntuales tienen una base de entornos de clopens. Esto es equivalente a decir que para todo $x, y \in K$ distintos existe $A \subset K$ clopen tal que $x \in A, y \notin A$.

Proposición 2.2.8. *Si $\{K_i\}_{i\in I}$ son espacios totalmente disconexos, entonces $\Pi_{i\in I}K_i$ es totalmente disconexo.*

Corolario 2.2.9. *Para I un conjunto cualquiera, $\{0,1\}^I = 2^I$ es un compacto totalmente disconexo.*

Para $I = \omega$ se tiene que 2^ω es homeomorfo al conjunto de Cantor clásico.

Hecho esto, estamos en condiciones de presentar los compactos de Corson y Valdivia. Este tipo de espacios se caracterizan, como ya hemos mencionado antes, por ser subconjuntos de $\mathbb{R}^I$ cuyas coordenadas se toman de una determinada manera. Dado que también se mencionan en el presente trabajo comenzaremos definiendo los compactos de Eberlein, una clase más restrictiva que las de Corson y Valdivia.

Definición 2.2.10. *Diremos que K un compacto es un compacto de Eberlein si se cumple que $K \subset c_0(I) \subset \mathbb{R}^I$, siendo $c_0(I) = \{x \in \mathbb{R}^I : \forall \varepsilon > 0, \{i : |x_i| > \varepsilon\} \text{ es finito}\}$.*

Definición 2.2.11. *Un espacio compacto K diremos que es de Corson si $K \subset \Sigma(I) \subset \mathbb{R}^I$, con $\Sigma(I) = \{x \in \mathbb{R}^I : \{i : |x_i| \neq 0\} \text{ es numerable}\}$, es decir, si únicamente existe una cantidad numerable de coordenadas no nulas para todos los elementos del compacto.*

Definición 2.2.12. *Un espacio compacto es de Valdivia si $K \subset \mathbb{R}^I$ tal que $\overline{K \cap \Sigma(I)} = K$, es decir, los elementos que tienen una cantidad numerable de coordenadas no nulas son densos en K.*

Existe una definición equivalente para estos compactos, la cual hace uso del siguiente tipo de subconjuntos:

Definición 2.2.13. *Dado un espacio compacto Hausdorff K, llamaremos a A Σ-subconjunto de K si existe I y una función inyectiva $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}^I$ tal que $A = \varphi^{-1}[\Sigma(I)]$.*

Un espacio compacto K será de Valdivia si admite un Σ-subconjunto denso y de Corson si K es un Σ-subconjunto en sí mismo.
Como vemos, la clase menos restrictiva es la de Valdivia, siendo esta la cadena de implicaciones:

$$\text{Métrico} \Rightarrow \text{Eberlein} \Rightarrow \text{Corson} \Rightarrow \text{Valdivia}$$

Algunos ejemplos de este tipo de compactos son los siguientes:

- El cubo $[0,1]^{\mathbb{R}}$ es un compacto de Valdivia pero no de Corson.
- La compactificación por un punto de Alexandroff de un espacio discreto no numerable Γ, $\Gamma \cup \{\infty\}$, es un compacto de Eberlein pero no es métrico.

Definición 2.2.14. *Un subconjunto cerrado de un espacio topológico X se dirá regular si es la clausura de un conjunto abierto o, equivalentemente, si es la clausura de su propio interior.*

Observación 2.2.15. *Resulta evidente que un subespacio cerrado de un espacio de Corson es Corson, y que un subespacio cerrado y regular de un espacio de Valdivia es, de nuevo, Valdivia.*

Definidos este tipo de espacios podemos dedicarnos ya al que será el objetivo principal de esta sección, demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.2.16. *Si K es un compacto de Corson con $w(K) \geq \mathfrak{c}$, entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$. En particular, bajo CH, se tiene que existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$ para todo espacio compacto no metrizable de Corson K.*

Lo que haremos para probarlo será utilizar el lema 2.1.11 para demostrar que si K es un compacto de Corson con peso mayor o igual que el continuo y que satisfaga ccc cumple la propiedad $(*)$. Comenzaremos demostrando un lema que nos será de gran utilidad para comprobar los supuestos del lema 2.1.11.

Lema 2.2.17. *Sea K espacio compacto Hausdorff y F un subespacio de K no abierto y G_δ. Entonces, existe una sucesión $(F_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos de K no vacíos, disjuntos dos a dos, cerrados y regulares tales que la condición (b) del enunciado del lema 2.1.11 es verdadera.*

Demostración. Dado que F es G_δ podemos poner $F = \bigcap_{n\in\omega} V_n$, donde cada V_n es un abierto en K tal que $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$.

Sea $U_n = V_n \setminus \overline{V_{n+1}}$, entonces tenemos una sucesión $(U_n)_{n\in\omega}$ cuyos puntos de acumulación está en F. Consideremos F_n un conjunto contenido en U_n cerrado no vacío y regular. De este modo, obtenemos una sucesión $(F_n)_{n\in\omega}$ cuyos puntos de acumulación están en F, y sólo falta comprobar que $F \cap F_n = \emptyset$, lo cual es sencillo de ver por reducción al absurdo.

Supongamos que dicha intersección es no vacía, por tanto existirá un $x \in F_n$, $x \in F$. Esto implica que para todo $n \in \omega$, $x \in V_n$. Sin embargo, $U_n = V_n \setminus \overline{V_{n+1}}$ y $F_n \subset U_n$, por lo que si x pertenece a F_n no puede estar en $\overline{V_{n+1}}$, pero por hipótesis $x \in V_{n+1} \subset \overline{V_{n+1}}$, dando lugar a una contradicción.

□

Antes de continuar con la demostración de que se verifican las condiciones del enunciado del lema 2.1.11 necesitamos asegurar que $w(F_n) \geq \mathfrak{c}$, para todo n. Para ello nos hará falta la siguiente definición:

Definición 2.2.18. *Dado un punto x de un espacio topológico X definiremos el peso de x en X como*

$$w(x, X) = \text{mín}\{w(V) : V \text{ entorno de } x \text{ en } X\}.$$

Corolario 2.2.19. *Sea K un compacto de Valdivia tal que $w(x, K) \geq \mathfrak{c}$, para todo $x \in K$. Supongamos que existe un subconjunto F que es G_δ, cerrado y no abierto que admite un operador de extensión en K. Entonces K satisface la propiedad $(*)$.*

Si suponemos que K cumple ccc, el siguiente lema nos permite reducir la prueba del teorema 2.2.16 al caso en el que $w(x, K) \geq \mathfrak{c}$ para todo $x \in K$.

Definición 2.2.20. *Una anticadena es un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado tal que cualesquiera dos elementos del subconjunto no son comparables.*

Una anticadena se dirá maximal si no es subconjunto propio de ninguna otra anticadena.

Lema 2.2.21. *Sea K un compacto de Valdivia que satisface ccc y el conjunto*

$$H = \{x \in K : w(x, K) \geq \mathfrak{c}\}.$$

Entonces

(a) $H \neq \emptyset$, si $w(K) \geq \mathfrak{c}$;
(b) $w(K \setminus \text{int}(H)) < \mathfrak{c}$, donde int$(H)$ denota el interior de H;
(c) H es un subconjunto cerrado regular de K;
(d) $w(x, K) \geq \mathfrak{c}$, para todo $x \in H$.

Demostración. Comencemos probando a), para ello supondremos que $H = \emptyset$. En este caso se tendría que K podría recubirse por una cantidad finita de abiertos cuyo peso fuese menor que $\mathfrak{c}$, lo cual supondría que $w(K) < \mathfrak{c}$.

Para probar b) consideraremos $(U_i)_{i\in I}$ maximal entre las anticadenas de abiertos de K con peso menor que $\mathfrak{c}$. Se tiene que I es numerable puesto que el peso de una anticadena maximal es al menos el peso del resto de anticadenas y éstas están formadas por abiertos con peso menor que $\mathfrak{c}$. Debido a esto y a que $\mathfrak{c}$ tiene cofinalidad no numerable tenemos que $U = \bigcup_{i\in i} U_i$ tiene peso menor que $\mathfrak{c}$. Por ser $(U_i)_{i\in I}$ maximal se tiene que $K \setminus H \subset \overline{U}$; entonces $K \setminus \text{int}(H) = \overline{K \setminus H} \subset \overline{U}$. Para terminar la prueba de b) debemos demostrar que $w(\overline{U}) < \mathfrak{c}$. Consideremos A un Σ-subconjunto denso en K, y pongamos D un subconjunto denso de $A \cap U$ con $|D| \leq w(U)$. Entonces, $\overline{D}$ es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}^{w(U)}$, por tanto $w(\overline{U}) = w(\overline{D}) \leq w(U) < \mathfrak{c}$.

Para demostrar c) debemos tener en cuenta que H es cerrado. Por b) sabemos que el abierto $K \setminus \overline{\mathrm{int}(H)}$ tiene peso menor que $\mathfrak{c}$ y, por consiguiente, $K \setminus \overline{\mathrm{int}(H)}$ está contenido en $K \setminus H$. Lo que prueba que H es regular.

Finalmente, para probar d) sea V un entorno cerrado en K para algún $x \in H$. Por b), se tiene que $w(V \setminus H) < \mathfrak{c}$. Es algo conocido que si un espacio compacto Hausdorff es la unión de no más de κ subconjuntos de peso menor que κ entonces, el peso del espacio es menor que κ. Como $w(V) \geq \mathfrak{c}$ se tiene que $w(V \cap H) \geq \mathfrak{c}$, concluyendo así la prueba.

□

Ahora ya estamos en disposición de demostrar el teorema 2.2.16. Recordemos su enunciado y veamos la pueba:

Teorema. (Teorema 2.2.16). *Si K es un compacto de Corson con $w(K) \geq \mathfrak{c}$, entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$. En particular, bajo CH, se tiene que existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$ para todo espacio compacto no metrizable de Corson K.*

Demostración. Por el lema anterior basta probar que si K es un espacio compacto no vacío de Corson tal que $w(x, K) \geq \mathfrak{c}$ para todo $x \in K$, entonces K satisface la propiedad $(*)$.

Por el teorema 3.3 de [15] sabemos que dado que K es un compacto de Corson no vacío, éste admite un punto G_δ al que podemos llamar x. Por tanto, haciendo uso del corolario 2.2.19 con $F = \{x\}$ se obtiene el resultado. □

Observación 2.2.22. *En [2] se demuestra que bajo el axioma de Martin* (MA) *y la negación de CH, todo compacto de Corson que satisfaga ccc es metrizable. De este modo, el teorema 2.2.16 implica que existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$ para todo K espacio compacto de Corson no metrizable bajo* MA.

Ahora pasaremos a estudiar las sumas torcidas de c_0 y $C(K)$ para compactos de Valdivia y probaremos que existen sumas torcidas no triviales para ciertas clases de compactos no metrizables de Valdivia. Pero antes de comenzar enunciaremos algunos resultados que se obtienen como consecuencia inmediata de lo que hemos hecho hasta el momento.

Proposición 2.2.23. *Si K es un compacto de Valdivia con $w(K) \geq \mathfrak{c}$ y L un espacio compacto Hausdorff que contiene una sucesión convergente no trivial el espacio producto $L \times K$ satisface la propiedad $(*)$.*

Proposición 2.2.24. *Sea K un espacio compacto de Valdivia que admite un punto G_δ, x, con $w(x, K) \geq \mathfrak{c}$. Entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$ y si además K satisface ccc, entonces K cumple la propiedad $(*)$.*

Demostración. Cuando K no satisface ccc es un caso conocido y se sabe que existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$. Este resultado se puede encontrar en [7].

Si suponemos que K cumple ccc definiremos $H = \{x \in K : w(x, K) \geq \mathfrak{c}\}$ como en el lema 2.2.21 y, usando el corolario 2.2.19 con $F = \{x\}$ se demuestra que H satisface la propiedad $(*)$.

□

Corolario 2.2.25. *Sea K un espacio compacto de Valdivia con $w(K) \geq \mathfrak{c}$ y que admite un $\Sigma-$subconjunto A tal que $K \setminus A$ es de primera categoría. Entonces, existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$, y si K satisface ccc, entonces K satisface la propiedad $(*)$.*

Ahora veremos bajo qué condiciones un compacto de Valdivia K contiene una copia homeomorfa de $[0,\omega]\times[0,\mathfrak{c}]$.

Sea I un conjunto de índices y un subconjunto J de I, denotaremos como $r_J : \mathbb{R}^I \longrightarrow \mathbb{R}^I$ a la aplicación definida como sigue: $r_J(x)|_J = x|_J$ y $r_J(x)|_{I\setminus J} \equiv 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^I$.

Definición 2.2.26. *Dado un subconjunto K de $\mathbb{R}^I$ diremos que $J \subset I$ es K-bueno si $r_J[K] \subset K$.*

Se sabe que si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^I$ y $\Sigma(I)\cap K$ es denso en K entonces, todo subconjunto infinito J de I estará contenido en un conjunto J' que será K-*bueno* y tal que $|J| = |J'|$.

Proposición 2.2.27. *Sea K un espacio compacto de Valdivia que admite un Σ-subconjunto denso A tal que algún punto de $K\setminus A$ es el límite de una sucesión no trivial en K. Entonces K contiene una copia homeomorfa de $[0,\omega]\times[0,\omega_1]$. En particular, bajo CH, se tiene que K cumple la propiedad $(*)$.*

Demostración. Se puede encontrar en [9]. □

Observación 2.2.28. *El recíproco de la proposición anterior también es cierto: si K es un compacto de Valdivia que contiene una copia homeomorfa de $[0,\omega]\times[0,\omega_1]$, entonces $K\setminus A$ contiene una sucesión convergente no trivial, para cualquier $\Sigma-$subconjunto denso A de K.*

Observación 2.2.29. *Si un compacto de Valdivia K admite dos Σ-subconjuntos densos diferentes entonces se cumplen las hipótesis de la proposición anterior.*

Para finalizar, cabe destacar, que la veracidad del siguiente enunciado implicaría que, bajo CH, existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$ para todo espacio compacto no metrizable de Valdivia, K.

Conjetura. *Si K es un espacio compacto de Valdivia no vacío que satisface ccc, entonces o bien K tiene un punto G_δ o bien K admite una sucesión convergente no trivial en el complementario de un Σ-subconjunto denso.*

Que esta conjetura implica el resultado que anhelamos se puede demostrar usando el lema 2.2.21 y las proposiciones 2.2.24 y 2.2.27 teniendo en cuenta que un subconjunto cerrado y regular de un espacio ccc también cumple ccc. Sin embargo, la conjetura sigue, a día de hoy, abierta.

2.3. Compactificaciones de ω

En topología una compactificación es el proceso que transforma un espacio topológico en un espacio compacto. Existen, como veremos a continuación, varios procesos para llevar esto a cabo.

Tendrá para nosotros un cierto interés las compactificaciones del espacio discreto de los naturales y, entre ellas, la denominada compactificación de Čech-Stone, pues se puede definir a partir de los ultrafiltros, herramienta que ya hemos definido con anterioridad y de la cual haremos uso posteriormente.

Notación. *De ahora en adelante, K siempre denotará un espacio compacto Hausdorff, cuya definición podemos encontrar en el Apéndice B, y ω al espacio discreto de los números naturales o al cardinal de éste indistintamente.*

Definición 2.3.1. *Diremos que un espacio topológico (X,τ) es compacto si todo cubrimiento por abiertos de X tiene un subrecubrimiento finito.*

Un espacio X será localmente compacto si cada $x\in X$ posee una base de entornos compactos.

Definición 2.3.2. *Una compactificación de un espacio topológico* (X, τ) *es un par* $((\gamma X, \tau'), f)$ *donde:*

- $(\gamma X, \tau')$ *es un espacio compacto.*
- $f : (X, \tau) \longrightarrow (\gamma X, \tau')$ *es un embebimiento, es decir, una función continua e inyectiva tal que* $f|_{(f(X), \tau'|_{f(X)})}$ *es un homeomorfismo.*
- $f(X)$ *es denso en* γX.

Notación. *Llamaremos resto de una compactificación a* $\gamma X \setminus X$.

Proposición 2.3.3. *La compactificación de un espacio* X *será Hausdorff si* X *es Hausdorff.*

Los embebimientos en espacios de Hausdorff tienen un particular interés. Destacamos las compactificaciones de Alexandroff y de Čech-Stone por ser respectivamente la menor y la mayor compactificación Hausdorff de un espacio topológico.

Definición 2.3.4. (Compactificación por un punto de Alexandroff). *Si* X *es localmente compacto, su compactificación por un punto es el espacio topológico* $X \cup \{\infty\}$, *donde:*

- *Si* $x \in X$, *los entornos de* x *en* X *forman una base de entornos de* x *en* $X \cup \{\infty\}$.
- *Para* ∞, *una base de entornos es* $\{A \subset X \cup \{\infty\} : \infty \in A,\ X \setminus A \text{ es compacto}\}$.

Definición 2.3.5. (Compactificación de Čech-Stone). *Sea* X *un espacio topológico. Sea* K *un compacto y* $\iota : X \longrightarrow K$ *una aplicación continua. Diremos que* ι *es la compactificación de Čech-Stone de* X *si para toda* $f : X \longrightarrow [-1, 1]$ *continua existe una única función continua* $\hat{f} : K \longrightarrow [-1, 1]$ *tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\iota"'] & {[-1,1]} \\
K \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] &
\end{tikzcd}$$

A esta compactificación se la denota como βX, *existe siempre y además es única.*

Observación 2.3.6. *Para el caso en el que* X *es un conjunto discreto la compactificación de Čech-Stone tiene una forma alternativa que viene dada por*

$$\beta X = \{\mathfrak{U} : \mathfrak{U} \text{ es un ultrafiltro de } X\}.$$

Y coincide con la definición anterior.

De esta forma los puntos de βX, cuando X es discreto, son los ultrafiltros de X. Más adelante deberemos tener esto presente porque haremos uso de la compactificación de Čech-Stone del espacio discreto de los naturales, $\beta\omega$, el cual es el único espacio compacto de Hausdorff que contiene a ω como subespacio denso y, por tanto, toda función continua en ω puede extenderse a una función continua en $\beta\omega$.

Pasemos a estudiar la topología de βX, la cual, como probaremos es Hausdorff.
La topología de βX es aquella que tiene como abiertos básicos a los conjuntos de la forma

$$\langle A \rangle = \{\mathfrak{U} \in \beta X : A \in \mathfrak{U}\}, \text{ para } A \subseteq X.$$

En el caso de que A sea un conjunto unitario $\{x\}$, existe un único filtro que contiene a $\{x\}$ llamado ultrafiltro principal y que se denota como

$$\mathfrak{F}_x = \{B \subseteq X : x \in B\}$$

y, en tal caso, $\langle\{x\}\rangle = \{\mathfrak{F}_x\}$ es un conjunto unitario de βX.

Lema 2.3.7. *La aplicación $g : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(\beta X)$ tal que $g(A) = \langle A\rangle$ es un embebimiento de conjuntos parcialmente ordenados bajo $\subseteq$. En particular,*

- $\langle\emptyset\rangle = \emptyset$ *y* $\langle X\rangle = \beta X$.
- *Si* $A \subseteq B \subseteq X$ *entonces* $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$,
- $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle \cup \langle B\rangle$ *y* $\langle A \cap B\rangle = \langle A\rangle \cap \langle B\rangle$
- $\langle X \setminus A\rangle = \beta X \setminus \langle A\rangle$.
- *La aplicación g es inyectiva.*

Corolario 2.3.8. *Los conjuntos de la forma $\langle A\rangle \subseteq \beta X$ forman una base de la topología de βX.*

Teorema 2.3.9. *Para un espacio discreto X, el espacio βX es Hausdorff.*

Demostración. Consideremos $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}' \in \beta X$ dos elementos distintos, es decir, dos ultrafiltros distintos en X. Para algún subconjunto $A \subseteq X$ tendremos que $A \in \mathfrak{U}$ y $A \notin \mathfrak{U}'$, por tanto $A' = X \setminus A \in \mathfrak{U}'$. Entonces $\langle A\rangle$ y $\langle A'\rangle$ son entornos disjuntos de $\mathfrak{U}$ y $\mathfrak{U}'$ respectivamente, lo cual prueba que βX es Hausdorff.

□

Las compactificaciones del espacio discreto de los naturales, $\gamma\omega$, se pueden caracterizar en términos de la complementabilidad del espacio c_0 en $C(\gamma\omega)$, lo cual nos será de utilidad más adelante. De este modo tenemos lo siguiente:

Definición 2.3.10. *Diremos que una compactificación $\gamma\omega$ del espacio discreto ω es mansa si la copia natural de c_0 en $C(\gamma\omega)$, que contiene a las funciones que se anulan en $\gamma\omega \setminus \omega$, está complementada en $C(\gamma\omega)$.*

En caso contrario diremos que tal compactificación es indómita.

Nótese que toda compactificación metrizable $\gamma\omega$ es mansa puesto que $C(\gamma\omega)$ es separable y toda copia de c_0 está complementada en $C(\gamma\omega)$ por el teorema de Sobczyk 1.3.16.

Por otra parte, la compactificación maximal $\beta\omega$ no es mansa ya que $C(\beta\omega)$ es isométrico a ℓ_∞ y, por el teorema de Phillips 1.3.13, c_0 no está complementado en ℓ_∞.

A continuación presentamos una serie de resultados que nos serán de utilidad para caracterizar las compactificaciones de ω relacionándolas con sucesiones de medidas en K y la complementabilidad de c_0 en $C(K)$.

Notación. Por el teorema de Riesz 1.2.16 podemos identificar $C(K)^*$ con el espacio $M(K)$ de las medidas de Radon signadas con variación finita definidas sobre la σ-álgebra de Borel sobre K.

Denotaremos como $M_1(K)$ la bola unidad cerrada de $M(K)$, dotada de la topología débil* heredada de $C(K)^*$ y como $M_r(K)$ la bola de radio $r > 0$.

Con $P(K)$ denotaremos el subespacio de $M_1(K)$ consistente en todas las medidas de probabilidad; dado $x \in K$, $\delta_x \in P(K)$ será la medida de Dirac.

Lema 2.3.11. *Sea $T : c_0 \longrightarrow C(K)$ un embebimiento isomórfico y pongamos $Te_n = \varphi_n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $T[c_0]$ está complementado en $C(K)$.

(ii) Existen unas sucesiones acotadas $(\mu_n)_n$ y $(\nu_n)_n$ en $M(K)$ tales que

- *$\nu_n(\varphi_k) = 0$ para todo $n, k \in \omega$.*
- *$\mu_n(\varphi_k) = \delta(n, k)$ para todo $n, k \in \omega$, siendo $\delta(n, k)$ el símbolo de Kronecker.*
- *$\mu_n - \nu_n \longrightarrow 0$ en la topología débil*.*

Demostración. *(ii) $\Rightarrow$ (i)* Definimos $P : C(K) \longrightarrow C(K)$ como

$$Pf = \sum_{n\in\omega}(\mu_n - \nu_n)(f) \cdot \varphi_n.$$

Resulta sencillo comprobar que P así definida es una proyección acotada de $C(K)$ en $T[c_0]$. Evaluando vemos que $P^2 = P$ ya que $P(\varphi_k) = \sum_{n\in\omega}(\mu_n - \nu_n)(\varphi_k) \cdot \varphi_n = \varphi_k$. Además $T[c_0] = \overline{span}\{\varphi_k : k < \omega\}$ se tiene que $P|_{T[c_0]} = Id$ y como T conserva la norma, P está acotada. Falta comprobar que $Im(P) = c_0$, cosa que se cumple puesto que son las combinaciones lineales de los φ_n.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Consideremos el operador dual $T^* : M(K) \longrightarrow c_0^* = \ell_1$. Como T es un embebimiento isomórfico, y por tanto inyectiva, T^* es suyprayecitva así que para cada $e_n^* = e_n \in \ell_1$ existe una medida $\mu_n \in M(K)$ acotada en norma tal que $T^*\mu_n = e_n^*$. Tenemos pues que

$$T^*(\mu_n)(e_k) = e_n^*(e_k) = \delta(n, k)$$
$$T^*(\mu_n)(e_k) = \mu_n(Te_k) = \mu(\varphi_k),$$

de forma que $\mu_n(\varphi_k) = \delta(n, k)$.

Para todo n definimos una medida $\nu_n \in M(K)$ como $\nu_n(f) = \mu_n(f) - \mu_n(Pf)$ para $f \in C(K)$. De esta forma ν_n se anula en $P[C(K)]$ y para toda $f \in C(K)$, tomando $x \in c_0$ tal que $Tx = Pf$, tenemos que

$$\mu_n(f) - \nu_n(f) = \mu_n(Pf) = \mu_n(Tx) = e_n^*(x) \longrightarrow 0,$$

como queríamos.

□

Corolario 2.3.12. *Si K contiene una sucesión convergente no trivial, entonces $C(K)$ contiene una copia complementada de c_0.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en K convergente a $x \in K$ tal que $x_n \neq x$ para todo n. Podemos construir una familia de abiertos de K disjuntos dos a dos $\{U_n : n \in \omega\}$ tal que $x_n \in U_n$ para cada $n \in \omega$.

Para todo n podemos hallar $f_n : K \longrightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x_n) = 1$ y f_n se anule fuera de U_n. Definimos $T : c_0 \longrightarrow C(K)$ de modo que $Te_n = f_n$. Se tiene así que $T[c_0]$ está complementado en $C(K)$, pues estamos en condiciones de aplicar el lema 2.3.11 con $\mu_n = \delta_{x_n}$ y $\nu_n = \delta_x$ para todo n.

□

Corolario 2.3.13. *Una compactificación $\gamma\omega$ es mansa si y sólo si existe una sucesión acotada de medidas $(\nu_n)_n$ en $M(\gamma\omega)$ tal que $|\nu_n|(\omega) = 0$ para todo n y $\nu_n - \delta_n \longrightarrow 0$ en la topología débil*.*

Este corolario es bastante relevante ya que se puede aplicar a las compactificaciones de ω y lo utilizaremos para demostrar un resultado de la siguiente sección.

2.4. Operadores de extensión

Seguidamente, expondremos la relación entre las extensiones discretas numerables, o *countable discrete extensions*, de un determinado espacio compacto y la existencia de los operadores de extensión con el carácter manso de las compactificaciones de ω y la trivialidad de las sumas torcidas.

Definición 2.4.1. *Si L es un espacio compacto entonces un superespacio compacto $L' \supset L$ será una extensión discreta numerable de L si $L' \setminus L$ es numerable y discreto. En tal caso, escribiremos $L' \in CDE(L)$.*

Si $L' \setminus L$ es denso en L', L' es homeomorfo a una compactificación de ω, $\gamma\omega$, cuyo resto $\gamma\omega \setminus \omega$ es homeomorfo a L. A menos que se diga lo contrario, si $L' \in CDE(L)$ y $L' \setminus L$ es infinito, entonces podemos identificar $L' \setminus L$ con el conjunto de los números naturales ω.

A continuación exponemos algunas propiedades y observaciones acerca de las extensiones discretas numerables de compactos que nos resultarán útiles en el desarrollo del trabajo.

Lema 2.4.2. *Si $L' \in CDE(L)$ y h_1, $h_2 \in C(L')$ coinciden en L entonces* $\lim_n (h_1(n) - h_2(n)) = 0$.

Demostración. De no ser así se tendría que $|h_1(n) - h_2(n)| \geq \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$ y n de algún conjunto infinito $N \subseteq \omega$. Si consideramos un punto de acumulación x de $N \subseteq L'$ se tiene que $x \in L$, puesto que los puntos aislados no son de acumulación, y que $h_1(x) \neq h_2(x)$, lo cual supone una contradicción.

□

Lema 2.4.3. *Sea $L' \in CDE(L)$ y sean $f_1, ..., f_k \in C(L')$ para algún k. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe $x \in L$ tal que $|f_i(x) - f_i(n)| < \varepsilon$ para todo $i \leq k$.*

Demostración. Para todo $x \in L$ consideremos un entorno abierto $V_x \subseteq L'$ tal que $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in V_x$ e $i \leq k$. Dado que L' es compacto sabemos que todo cubrimiento por abiertos,

$$L' \subset \bigcup_{x \in L} V_x \cup \bigcup_{p \in L' \setminus L} \{p\},$$

tiene un subrecubrimiento finito

$$L' \subset \bigcup_{j \leq m} V_{x_j} \cup \bigcup_{j=1}^{n} \{p_j\}$$

de forma que $L \subseteq V = \bigcup_{j \leq m} V_{x_j}$ para algún m y $x_1, ..., x_m \in L$. Claramente $L' \setminus V$ es finito y se obtiene el resultado.

□

Observación 2.4.4. *Dados dos espacios compactos L, L' con $L \subseteq L'$, un operador de extensión $E : C(L) \longrightarrow C(L')$ puede interpretarse como un operador lineal acotado tal que $Eg|_L = g$ para toda $g \in C(L)$.*

Consideremos $L' = L \cup \omega \in CDE(L)$ y la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow c_0 \xrightarrow{i} C(L') \xrightarrow{R} C(L) \longrightarrow 0,$$

donde i es el embebimiento isométrico natural, el cual lleva el vector unitario $e_n \in c_0$ a la función característica $\chi_{\{n\}} \in C(L')$, y R es el operador de restricción. Si $E : C(L) \longrightarrow C(L')$ es un operador de extensión entonces E es la inversa por la derecha de R y, por tanto, la sucesión anterior escinde. Esto nos lleva a la siguiente observación.

Lema 2.4.5. *Para L y $L' \in CDE(L)$ espacios compactos las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) no existe un operador de extensión $E : C(L) \longrightarrow C(L')$;

(ii) $0 \longrightarrow c_0 \xrightarrow{i} C(L') \xrightarrow{R} C(L) \longrightarrow 0$ es una suma torcida no trivial de c_0 y $C(L)$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que la sucesión exacta corta escinde, es decir, existe $E : C(L) \longrightarrow C(L')$ tal que es la inversa por la derecha de R. Resulta inmediato comprobar que es operador de extensión.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supongamos que existe un operador de extensión $E : C(L) \longrightarrow C(L')$ tal que $Eg|_L = g$ para toda $g \in C(L)$. Es evidente que es el inverso por la derecha de R.

□

Observación 2.4.6. *Que una compactificación $\gamma\omega$ del espacio discreto ω sea mansa es, pues, equivalente a decir que $\gamma\omega \in CDE(K)$ y a que existe el correspondiente operador de extensión.*

Lema 2.4.7. *Una compactificación $\gamma\omega$ es mansa si y sólo si existe un operador de extensión $C(\gamma\omega \setminus \omega) \longrightarrow C(\gamma\omega)$.*

Demostración. Supongamos que $P : C(\gamma\omega) \longrightarrow c_0$ es una proyección acotada, donde c_0 se identifica con su copia natural en $C(\gamma\omega)$. Para $f \in C(\gamma\omega \setminus \omega)$ tomemos, por el teorema de extensión de Tietze B.14, una extensión cualquiera de f a una función $g \in C(\gamma\omega)$ y definamos $E(f) = g - Pg$. Nótese que $E(f)$ está bien definido ya que si consideramos $g' \in C(\gamma\omega)$ otra extensión de f entonces $g' - g$ se anula en el resto, de forma que $g' - g \in c_0$ y $P(g' - g) = g' - g$, es decir, $g' - Pg' = g - Pg$.

Supongamos ahora que $E : C(\gamma\omega \setminus \omega) \longrightarrow C(\gamma\omega)$ es un operador de extensión y consideremos f, g definidas como antes. Entonces $Pg = g - E(g|_{\gamma\omega\setminus\omega})$ define una proyección de $C(\gamma\omega)$ en c_0. □

Proposición 2.4.8. *Sea L un espacio compacto separable y $L' \in CDE(L)$ tal que no existe un operador de extensión $E : C(L) \longrightarrow C(L')$. Entonces existe una compactificación indómita $\gamma\omega$ cuyo resto $\gamma\omega \setminus \omega$ es homeomorfo a L.*

Demostración. Sea $\{d_n : n \in \omega\}$ un subconjunto denso y numerable de L. Consideremos el siguiente subconjunto del espacio producto $L' \times [0,1]$:

$$K = L' \times \{0\} \cup \left\{ \left(d_n, \frac{1}{n+k+1} \right) : k, n \in \omega \right\}.$$

Sea $C = (L' \setminus L) \times \{0\} \cup \{(d_n, 1/(n+k+1) : n, k \in \omega\}$, espacio discreto y numerable. Se tiene entonces que K es una compactificación de C con las propiedades requeridas:

K es compacto por ser cerrado en el espacio producto, $K \in CDE(L)$ ya que contiene a L y una cantidad numerable de puntos aislados, los cuales son densos en L porque se acumulan en los d_n y no existe un operador de extensión de $C(L)$ en $C(K)$ ya que por hipótesis no existe $E : C(L) \longrightarrow C(L')$.

□

El siguiente resultado reduce el problema de la definición de un operador de extensión para $L' \in CDE(L)$ a encontrar una sucesión de medidas adecuada.

Lema 2.4.9. *Sea $L' = L \cup \omega$ una extensión discreta numerable de un espacio compacto L. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) existe un operador de extensión $E : C(L) \longrightarrow C(L')$ con $||E|| \leq r$;

(ii) existe una aplicación continua $\varphi : L' \longrightarrow M_r(L)$ tal que $\varphi(x) = \delta_x$ para todo $x \in L$;

(iii) existe una sucesión $(\nu_n)_n$ en $M(L)$ tal que $||\nu_n|| \leq r$ para todo n y $\nu_n - \delta_n \longrightarrow 0$ en la topología débil de $M(L')$.*

Demostración. (i) ⇒ (ii)
Sea $\varphi(x) = E^*\delta_x$, para todo $x \in L'$. Se trata de una aplicación continua y que toma valores en $M_r(L)$. Veámoslo:

Sabemos que $||E|| \leq r$ y, por tanto, $||Ef|| \leq ||E||\ ||f|| \leq r||f||$, comprobemos que $||E^*|| \leq r$. Sean $f, g \in C(L)$ sabemos que $||(E^*g^*)(f)|| = ||g^*(Ef)|| \leq ||g^*||\ ||Ef|| \leq r||g^*||\ ||f||$. Consideremos $||E^*|| = \sup\{||g^*(Ef)|| : ||g^*||, ||f|| \leq 1\}$.

Supongamos que $||E^*|| = ||g^*(Ef)|| > r$. Si $||g^*|| = ||f|| = 1$ entonces $||E^*|| = ||g^*(Ef)|| > r = r||g^*||\ ||f|| = ||g^*(Ef)||$, lo cual supondría una contradicción. En el resto de casos se llega a una contradicción de igual modo. Por tanto, concluimos que $||E^*|| \leq r$.

Por otra parte φ es continua por serlo E^* y δ_x y se cumple que

$$||\varphi|| = \sup\{||E^*\delta_x(f)|| : f \in C(L),\ x \in L',\ ||f||, ||x|| \leq 1\} = ||E^*\delta_x(f)|| =$$

$$= ||Ef(x)|| \leq ||E||\ ||f(x)|| \leq r||f||\ ||x|| = r.$$

Finalmente, si $x \in L$ y para toda $f \in C(L)$ se tiene que $(E^*\delta_x)(f) = \delta_x(Ef) = Ef(x) = f(x)$, por tanto $\varphi(x) = \delta_x$.

(ii) ⇒ (iii)
Como $\varphi : L' \longrightarrow M_r(L)$ existe $\nu_n = \varphi(n)$ con $||\nu_n|| \leq r$. Resta ver que $\nu_n - \delta_n \xrightarrow{\text{w}^*} 0$.
Sean $f \in C(L')$ y $g = f|_L \in C(L)$. Se tiene

$$\nu_n(f) - \delta_n(f) = \nu_n(g) - \delta_n(f) = \nu_n(g) - f(n) = \varphi(n)(g) - f(n) \longrightarrow 0.$$

De hecho, si el conjunto $N = \{n \in \omega : |\varphi(n)(g) - f(n)| \geq \varepsilon\}$ fuese infinito para algún $\varepsilon > 0$ existiría un punto de acumulación $t \in L$ de forma que $|\varphi(t)(g) - f(t)| = |g(t) - f(t)| \geq \varepsilon$, ya que $t \in L$ y $g = f|_L$. Lo cual supone una contradicción.

(iii) ⇒ (i)
Podemos extender $g \in C(L)$ a $Eg \in C(L')$ estableciendo $Eg(n) = \nu_n(g)$ para $n \in \omega$. Sabemos que E es un operador acotado por serlo ν_n, debemos comprobar que Eg es continua.

Sabemos que $\nu_n - \delta_n \xrightarrow{\text{w}^*} 0$ si y sólo si para toda $g \in C(L)$ se tiene que $\nu_n(g) - \delta_n(g) \longrightarrow 0$, lo cual es equivalente a que para toda $g \in C(L)$ se cumpla que $\nu_n(g) - g(n) \longrightarrow 0$.

Eg será continua si para $I \subset \mathbb{R}$, abierto, se cumple que $Eg(I)^{-1}$ es abierto de L':
Sabemos que $Eg(I)^{-1}$ contiene puntos aislados de ω y puntos de L. Los puntos aislados son abiertos de L', por lo que nos centraremos en los de L, es decir, debemos ver que $Eg(I)^{-1}|_L = g(I)^{-1}$ es abierto en L', o lo que es lo mismo, que el complementario es cerrado. Para ello veremos que si tomamos un conjunto, $A \subset (g(I)^{-1})^c$, los puntos de acumulación no pertenecen a $g(I)^{-1}$.

El conjunto A se puede dividir entre los puntos que pertenecen a ω y los que pertenecen a $L \setminus g(I)^{-1}$, el cual sabemos que es cerrado en L. Consideremos una sucesión de puntos aislados $k_1, k_2, ... \in A$ tal que se acumula en un punto x. Se deberá cumplir que $x \notin g(I)^{-1}$.

Por el teorema de extensión de Tietze B.14, existe $\tilde{g}$ una extensión continua. Supongamos que $x \in g(I)^{-1}$, como $k_n \longrightarrow x$ por ser $\tilde{g}$ continua se tiene que $\tilde{g}(k_n) \longrightarrow \tilde{g}(x) = g(x)$. Por *(iii)* se tiene que $\nu_{k_n}(\tilde{g}) - \tilde{g}(k_n) \longrightarrow 0$. Tenemos así dos sucesiones de números cuya diferencia tiende a 0 por tanto, los puntos de acumulación son los mismos.

Como $\tilde{g}(k_n) \longrightarrow g(x)$ se tiene que $\nu_{k_n}(\tilde{g}) \longrightarrow g(x)$. Por otra parte, $\nu_{k_n}(\tilde{g}) = \nu_{k_n}(g)$ por lo que se cumple que $\nu_{k_n}(g) \longrightarrow g(x)$. Se concluye así que $\nu_{k_n}(g) \notin I$ ya que por hipótesis $k_n \notin g(I)^{-1}$. Por tanto $g(x) \notin I$ y $x \notin g(I)^{-1}$, como queríamos demostrar.

□

El siguiente resultado es esencialmente obra de Kubiś; recordemos que un espacio L soporta una medida estrictamente positiva si existe $\mu \in P(L)$ tal que $\mu(U) > 0$ para todo abierto no vacío $U \subseteq L$. Para su demostración necesitaremos hacer uso del teorema de Parovičenko, cuyo enunciado podemos ver a continuación.

Teorema 2.4.10. (Teorema de Parovičenko). *Si K tiene peso menor o igual que ω_1, existe una función $f : \beta\omega \setminus \omega \longrightarrow K$ continua y suprayectiva.*

Teorema 2.4.11. *(a) Si $\gamma\omega$ es una compactificación de ω entonces el resto $\gamma\omega \setminus \omega$ soporta una medida estrictamente positiva.*
(b) Sea K un espacio compacto de peso ω_1 tal que no soporta una medida. Entonces existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$.

Demostración. Sea una sucesión $(\nu_n)_n$ como en el corolario 2.3.13 y consideremos $\mu = \sum_n 2^{-n}|\nu_n|$. Es fácil comprobar que μ es una medida finita no negativa en $\gamma\omega$ y que $\mu(\omega) = 0$, pues ν_n son medidas de Radon signadas con variación finita y cumplen que $|\nu_n|(\omega) = 0$.

Sea $U \in \gamma\omega$ un abierto tal que $U \cap (\gamma\omega \setminus \omega) \neq \emptyset$. Consideremos $g : \gamma\omega \longrightarrow [0, 1]$ tal que se anula fuera de U y $g(x_0) = 1$ para algún $x_0 \in U \setminus \omega$.
El conjunto $V = \{g > 1/2\}$ contiene infinitos $n \in \omega$, pues de no ser así existiría un n_0 tal que $g(n) \leq 1/2, \forall n \geq n_0$. En ese caso, y dado que g es continua, se tendría que $g|_{\overline{\{n:n\geq n_o\}}} \leq 1/2$, pero $\overline{\{n : n \geq n_o\}} = \gamma\omega \setminus \{0, 1, ..., n_0 - 1\} \ni x_0$ lo cual contradice que $g(x_0) = 1$.

Como $\nu_n(g) - g(n) \longrightarrow 0$ concluimos que $\nu_n(g) > 0$ para algún n y como $0 \leq g \leq \chi_U$ se tiene que

$$\mu(U) \geq \mu(g) \geq 2^{-n}|v_n|(g) > 0$$

por tanto la medida μ es positiva en todo subconjunto no vacío de $\gamma\omega \setminus \omega$.

Estudiemos ahora la segunda afirmación. Por el teorema de Parovičenko, si K satisface las condiciones de (b) entonces es imagen continua por f de $\beta\omega \setminus \omega$, por tanto existe una compactificación $\gamma\omega$ cuyo resto es homeomorfo a K. Veámoslo:

Sea $g : \beta\omega \longrightarrow K \cup \omega$ una aplicación suprayectiva tal que $g|_{\beta\omega\setminus\omega} = f$ y $g|_\omega = 1_\omega$. Definamos una topología sobre $K \cup \omega$; para ello consideraremos $U \subset K \cup \omega$ y lo declararemos abierto si y sólo si cumple que $g^{-1}((U \cap K) \cup (U \cap \omega))$ es abierto en $\beta\omega$. Es sencillo comprobar que de esta forma efectivamente se define una topología en $K \cup \omega$, a la cual denotaremos como τ.

Sabemos que la imagen continua de todo compacto es compacta, por ello se tiene que, como por definición g es continua, $(K \cup \omega, \tau)$ es compacto por serlo $\beta\omega$.

Además, es Hausdorff, pues si suponemos que existen $x, y \in K \cup \omega$ tales que para todo par de entornos U, V se tiene que no son disjuntos rápidamente se llega a una contradicción, dado que $\beta\omega$ es Hausdorff.

Resta comprobar que los puntos de ω son aislados y densos en $K \cup \omega$. Consideremos $U = \{n\}$, $n \in \omega$, el cual será un punto aislado si es abierto. Esto es cierto puesto que $g^{-1}((U \cap K) \cup (U \cap \omega)) = g^{-1}(\{n\}) = 1_\omega^{-1}(\{n\}) = \{n\} \in \beta\omega$, abierto por definición de $\beta\omega$.
Para comprobar que efectivamente ω es denso en $K \cup \omega$ supondremos, por reducción al absurdo, que existe $U \subset K \cup \omega$ abierto no vacío tal que $U \cap \omega = \emptyset$. Como por hipótesis es abierto, se deberá cumplir que $g^{-1}((U \cap K) \cup (U \cap \omega)) = g^{-1}(U \cap K) = f^{-1}(U) \subset \beta\omega \setminus \omega$ sea abierto de $\beta\omega$, pero esto no sucede por definición de abierto básico de $\beta\omega$.

De esta forma concluimos que $\gamma\omega = K \cup \omega$ es una compactificación de ω cuyo resto es homeomorfo a K, tal y como queríamos comprobar.

Se sigue de *(a)* que la compactificación $\gamma\omega$ es indómita, puesto que por hipótesis K no soportaba una medida. Así pues, por el lema 2.4.5, concluimos que $C(\gamma\omega)$ es una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$.

□

2.5. Sumas torcidas y operadores de extensión

A continuación mostraremos una serie de resultados que prueban que la trivialidad de una suma torcida de c_0 y $C(K)$ puede, de alguna manera, expresarse en términos de la existencia de operadores de extensión.

Definición 2.5.1. *Diremos que un espacio compacto K tiene la propiedad de extensión* si si para todo $L' \in CDE(M_1(K))$ existe un operador acotado $E : C(K) \longrightarrow C(L')$ tal que $Eg(\nu) = \nu(g)$ para toda $g \in C(K)$ y $\nu \in M_1(K)$.*

Observación 2.5.2. *Hemos de señalar que $C(K)$ puede ser visto como un subespacio de $C(M(K))$ por la identificación de un elemento de un espacio de Banach con el correspondiente elemento de su bidual.*

Al operador E de la definición anterior lo llamaremos operador de extensión y extenderá las funciones $g \in C(K)$, vistas como un elemento de $C(M(K))$, a una función continua en L'.*

Lema 2.5.3. *Dados K y $L' = M_1(K) \cup \omega \in CDE(M_1(K))$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Existe un operador de extensión $E : C(K) \longrightarrow C(L')$.*

(ii) Existe una sucesión acotada $(\nu_n)_n$ en $M(K)$ tal que para toda $g \in C(K)$, si $\tilde{g} \in C(L')$ es una función que extiende a g, vista como función de $M_1(K)$, entonces

$$\lim_n(\nu_n(g) - \tilde{g}(n)) = 0.$$

Demostración. (i) ⇒ (ii)
Consideremos un operador de extensión*, $E : C(K) \longrightarrow C(L')$ y el operador conjugado $E^* : M(L') \longrightarrow M(K)$. Sea $\nu_n = E^*\delta_n$ para $n \in \omega \subseteq L'$; entonces $(\nu_n)_n$ será una sucesión acotada en $M(K)$.

Tomemos $g \in C(K)$ y su extensión $\tilde{g} \in C(L')$. Sabemos que $\nu_n(g) = (E^*\delta_n)(g) = \delta_n(Eg) = Eg(n)$, así que

$$\nu_n(g) - \tilde{g}(n) = Eg(n) - \tilde{g}(n) \longrightarrow 0$$

por el lema 2.4.2, puesto que Eg y $\tilde{g}$ son dos extensiones continuas de la misma función que coinciden en $M_1(K)$ y $Eg, g \in C(M_1(K))$.

(ii) ⇒ (i)
Sea $g \in C(K)$, pongamos $Eg(\nu) = \nu(g)$, para $\nu \in M_1(K)$, y definamos $Eg(n) = \nu_n(g)$, para $n \in \omega$. De esta forma se tiene que Eg es continua en L', veámoslo:

Sabemos por *(ii)* que existe $(\nu_n)_n \in M(K)$ tal que $\nu_n(g) - \tilde{g}(n) = Eg(n) - \tilde{g}(n) \longrightarrow 0$. Se tiene que Eg será continua si para todo intervalo abierto de $\mathbb{R}$ su antiimagen es abierta en L'. En $Eg(I)^{-1}$ tenemos puntos de $M_1(K)$ y puntos aislados, los cuales ya sabemos que son abiertos en L'. Debemos comprobar simplemente que $Eg(I)^{-1}|_{M_1(K)} = g(I)^{-1}$ es abierto de L'. Para ello veremos que $(g(I)^{-1})^c$ es cerrado tomando un conjunto A contenido en él y comprobando que los puntos de acumulación no pertenecen a $g(I)^{-1}$.

Dicho conjunto se puede dividir entre los puntos que pertenecen a ω y los que están en $M_1(K) \setminus g(I)^{-1}$, el cual es cerrado. Consideremos una sucesión de puntos aislados $(k_n)_n \in A$ tal que se acumula en un punto $x \in M_1(K)$. Deberá cumplirse que $x \notin g(I)^{-1}$.

Supongamos que $x \in g(I)^{-1}$. Por hipótesis tenemos $\tilde{g}$ una extensión continua de g, entonces si $k_n \longrightarrow x$ se cumplirá que $\tilde{g}(k_n) \longrightarrow \tilde{g}(x) = g(x)$. Sabemos que $\nu_n(g) - \tilde{g}(k_n) = Eg(k_n) - \tilde{g}(k_n) \longrightarrow 0$, teniendo así dos sucesiones en $\mathbb{R}$ cuyas diferencias tienden a cero. Concluimos pues, que sus puntos de acumulación coinciden.

Como $\tilde{g}(k_n) \longrightarrow \tilde{g}(x) = g(x)$ se cumple que $\nu_{k_n}(g) = Eg(k_n) \longrightarrow g(x)$. Por tanto, $\nu_{k_n}(g) \notin I$ y $x \notin g(I)^{-1}$. Probando así la continuidad de Eg.

□

Lema 2.5.4. *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal, acotado y suprayectivo entre espacios de Banach. Entonces*

$$T^*[Y^*] = \ker(T)^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*|_{\ker(T)} \equiv 0\}.$$

Demostración. Para probar el primer contenido consideraremos $x^* = T^*(y^*) \in T^*[Y^*]$ y $x \in \ker(T)$, entonces se cumple que $Tx = 0$. Evaluando ahora tenemos que $x^*(x) = T^*(y^*)(x) = y^*(Tx) = y^*(0) = 0$. Por tanto, se tiene que $x^* \in \{x^* \in X^* : x^*|_{\ker(T)} \equiv 0\}$ y se da el contenido.

Supongamos ahora que $x^*|_{\ker(T)} \equiv 0$. Se tiene que el operador T y x^* factorizan a través del cociente $X/\ker(T)$. Por el teorema de la aplicación abierta A.18, dado que T es suprayectiva, se tiene que $X/\ker(T) \simeq Y$ y que, por tanto, existe $\tilde{T}^{-1}$. Tomando $y^* = x^* \circ \tilde{T}^{-1}$ se obtiene el resultado.

□

Pasamos ahora a probar el resultado principal de esta sección. En él veremos que la trivialidad de toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ depende de la existencia de operadores de extensión.

Teorema 2.5.5. *Si un espacio compacto K posee la propiedad de extensión*, entonces toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial.*

Demostración. Consideremos la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow c_0 \xrightarrow{\;i\;} X \xrightarrow{\;T\;} C(K) \longrightarrow 0.$$

Sea $Z = i(c_0)$. Sea e_n el n-ésimo vector unitario en c_0 y $e_n^* \in \ell_1 = (c_0)^*$ el correspondiente funcional dual. Pongamos $x_n = i(e_n) \in X$ para todo n, entonces, por el teorema de Hahn-Banach A.14, existe una sucesión acotada en norma $(x_n^*)_n \in X^*$ tal que $i^* x_n^* = e_n^*$. Veámoslo:

Sabemos que el operador i es un isomorfismo sobre su imagen, la cual es subespacio de X. Llamemos $\tilde{i} : c_0 \longrightarrow Z$ a dicho isomorfismo, cuya inversa existe, y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} c_0 \arrow[r, "\tilde{i}"] \arrow[d, "e_n^*"'] & i(c_0) \arrow[r] \arrow[dl, "e_n^*\tilde{i}^{-1}"] & X \arrow[dll, bend left, "x_n^*"] \\ \mathbb{R} & & \end{tikzcd}$$

Dado que e_n^* son operadores acotados podemos aplicar el teorema de Hanh-Banach A.14. Así vemos que $||x_n^*|| = ||e_n^* \tilde{i}^{-1}|| \leq ||\tilde{i}^{-1}||$ para todo n. Pongamos $r_0 = ||\tilde{i}^{-1}||$, así $||x_n^*|| \leq r_0$.

Nótese que el conjunto $\{x_n^* : n \in \omega\}$ es débil*-discreto. Veámoslo:

Dado un $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n \in X$, $x_n^* \in X^*$ y siendo $e_{x_i}(x_n^*) = x_n^*(x_i)$ las evaluaciones, el conjunto

$$V = \bigcap_{n=1}^{\infty} e_{x_i}^{-1} \left(e_{x_i}(x_n^*) - \varepsilon, e_{x_i}(x_n^*) + \varepsilon\right)$$

es un entorno de x_n^*. Sabemos que el conjunto $\{x_n^* : n \in \omega\} \subset X^*$ será discreto si para todo $x_n^* \in \{x_n^* : n \in \omega\}$ existe un abierto U de X^* tal que $U \cap \{x_n^* : n \in \omega\} = \{x_n^*\}$.

Supongamos que para todo U entorno de x_n^* se cumple que $U \cap \{x_n^* : n \in \omega\} = \{x_n^*, y_n^*\}$. Entonces se cumple que

$$x_n^*, y_n^* \in \bigcap_{i=1}^{n} e_{x_i}^{-1}\left(e_{x_i}(x_n^*) - \varepsilon, e_{x_i}(x_n^*) + \varepsilon\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_n^*, y_n^* \in e_{x_i}^{-1}\left(e_{x_i}(x_n^*) - \varepsilon, e_{x_i}(x_n^*) + \varepsilon\right), \forall i = 1, ..., n$$

$$\Leftrightarrow e_{x_i}(x_n^*), e_{x_i}(y_n^*) \in \left(e_{x_i}(x_n^*) - \varepsilon, e_{x_i}(x_n^*) + \varepsilon\right), \forall i = 1, ..., n$$

$$\Leftrightarrow x_n^*(x_i), y_n^*(x_i) \in \left(x_n^*(x_i) - \varepsilon, x_n^*(x_i) + \varepsilon\right), \forall i = 1, ..., n$$

Pero esto se da para todo entorno de x_n^*, es decir, para todo $\varepsilon > 0$, por tanto, $x_n^* = y_n^*$.

Pongamos

$$L = T^*[M_r(K)] \subseteq X^*,$$

donde $r > 0$ será lo suficientemente grande como para que L contenga a $\{x^* \in Z^\perp : ||x^*|| \le r_0\}$. Ahora podemos considerar $L' = L \cup \{x_n^* : n \in \omega\}$ equipado con la topología débil*, el cual es Hausdorff por la observación 1.2.9.

Afirmamos que L' es una extensión discreta numerable de L.

Para verlo, es suficiente probar que si x^* es un punto de acumulación de $\{x_n^* : n \in \omega\}$ entonces $x^* \in Z^\perp$, pues habíamos tomado L de forma que contuviese a $\{x^* \in Z^\perp : ||x^*|| \le r_0\}$, lo cual se sigue de que para todo $n > k$

$$x_n^*(i(e_k)) = i^* x_n^*(e_k) = e_n^*(e_k) = 0.$$

Así estaríamos probando que L' es compacto, ya que ya habíamos comprobado que $\{x_n^* : n \in \omega\}$ es débil*-discreto.

Sea ahora $L'' = M_1(K) \cup \omega$. Definimos una topología en L'' del siguiente modo:
Consideremos la aplicación

$$h : L'' \longrightarrow L' = T^*[M_r(K)] \cup \{x_n^* : n \in \omega\},$$

definida por $h(\nu) = T^*(r\nu)$ para $\nu \in M_1(K)$ y $h(n) = x_n^*$ para $n \in \omega$. Entonces, dado que T^* es inyectiva, por ser T suprayectiva, y como $x_n^* \neq x_k^*$ para $n \neq k$ se tiene que h es biyectiva.

Dotando ahora a L'' de una topología, es decir, definiendo sus abiertos como las imágenes inversas por h de los abiertos de L', se tiene que h es un homomorfismo, pues es continua y biyectiva entre un espacio compacto y uno Hausdorff; claramente $M_1(K)$ cuenta con la topología débil* cuando se ve como subespacio de L''.

Dado que K posee la propiedad de extensión*, por el lema 2.5.3 aplicado a L'', existe una sucesión acotada $(\nu_n)_n \in M(K)$ que satisface 2.5.3*(ii)*, es decir, para toda $g \in C(K)$, siendo $\tilde{g} \in C(L'')$ una extensión de g, vista como función de $M_1(K)$ se cumple que $\lim_n(\nu_n(g) - \tilde{g}(n)) = 0$. Sea $z_n^* = T^*(r\nu_n)$ para $n \in \omega$. Entonces $(z_n^*)_n$ es una sucesión acotada en X^* y se cumple lo se cumple.

Afirmamos que $z_n^* - x_n^* \longrightarrow 0$ en la topología débil* de X^*.

Sea $x \in X$, entonces si lo vemos como un elemento de X^{**} se tiene que $x \circ h \in C(L'')$ y

$$x \circ h(\nu) = T^*(r\nu)(x) = \nu(rTx),$$

para $\nu \in M_1(K)$. Esto conlleva que $x \circ h$ es una extensión de $rTx \in C(K)$ vista como función en $M_1(K)$. Por tanto,

$$z_n^*(x) - x_n^*(x) = r\nu_n(Tx) - h(n)(x) = \nu_n(x \circ h) - x \circ h(n) \longrightarrow 0,$$

como queríamos.

Faltaría comprobar que existe una proyección. Definamos $P : X \longrightarrow X$ tal que

$$Px = \sum_n (x_n^*(x) - z_n^*(x)) \cdot x_n.$$

Nótese que

$$Px_k = \sum_n (x_n^*(x_k) - z_n^*(x_k)) \cdot x_n = \begin{cases} x_n = x_k & \text{si } n = k \\ \quad 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

ya que $x_n^*(x_k^*) = 1$ para $n = k$, 0 si $n \neq k$ y $z_n^*(x) = 0$ en cualquier caso.

Haciendo uso ahora de la afirmación anterior se puede demostrar que P es una proyección de X en Z, lo cual concluye la prueba.

$\square$

Observación 2.5.6. *Utilizando esta misma construcción es posible probar que si X es una suma torcida de c_0 y $C(K)$, entonces X es isomorfo a un subespacio de $C(L')$, donde L' es una extensión discreta numerable de $M_1(K)$.*

Capítulo 3

Sumas torcidas, álgebras de Boole y espacios de Stone

Este tercer y último capítulo tiene como objetivo dar a conocer el principal resultado del trabajo. Éste resulta ser uno de los dos contraejemplos, relativamente consistentes, para el problema que Marciszewski y Plebanek exponen en [16] y cuyo enunciado es el siguiente.

Problema. *Dado un espacio compacto no metrizable K, ¿existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$?*

Los autores demostraron en este artículo que, bajo el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo, es posible encontrar espacios compactos que proporcionan una respuesta negativa, de hecho proporcionan dos contraejemplos: $K = 2^{\omega_1}$ y K un espacio compacto disperso y separable de altura 3 y peso ω_1.

Nuestro objetivo ahora será el estudio de uno de estos contraejemplos. Veremos el caso en el que K es el cubo de Cantor 2^{ω_1}. Para poder demostrar que efectivamente toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial deberemos hacer uso de las álgebras de Boole y los espacios de Stone que presentamos en la sección final del primer capítulo.

En la primera sección de este capítulo consideraremos unas funciones sobre un álgebra de Boole $\mathfrak{A}$ y diremos que tal álgebra posee la propiedad de aproximación si toda sucesión de funciones con unas determinadas características en $\mathfrak{A}$ puede aproximarse por una sucesión de medidas signadas finitamente aditivas en $\mathfrak{A}$.

De este modo, y tras haber desarrollado las herramientas necesarias para ello, probaremos el teorema 3.1.11, el cual afirma que bajo el Axioma de Martin y la negación de la Hipóteisis del Continuo existen álgebras booleanas no numerables que poseen la propiedad de aproximación.

Para concluir probaremos que un compacto cero-dimensional K tendrá la propiedad de extensión* siempre que el álgebra de los clopen de K posea la propiedad de aproximación, lo cual nos permitirá demostrar que, efectivamente, el cubo de Cantor proporciona una respuesta negativa a nuestro interrogante.

Recordemos que los resultados en relación a extensiones comunes acotadas de medidas compatibles pueden encontrarse en el Apéndice C.

Las principales fuentes de referencia para la realización de este capítulo han sido [16], [13] y [17].

3.1. Medidas asintóticas en álgebras de Boole

Esta penúltima sección, como ya hemos mencionado, está dedicada a analizar una propiedad de las álgebras de Boole que está, como veremos, estrechamente relacionada con la existencia de sumas torcidas de c_0 y $C(K)$.

Notación. Consideremos $\mathfrak{A}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto X. De ahora en adelante, $\mathfrak{B}$ siempre denotará una subálgebra finita de $\mathfrak{A}$.

El espacio de las medidas signadas finitamente aditivas con variación finita $\mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *se denota como* $M(\mathfrak{A})$.

Definición 3.1.1. *Dadas dos funciones parciales reales cualesquiera* φ, ψ *en* $\mathfrak{A}$ *y un álgebra* $\mathfrak{B}$ *contenida en su dominio definimos*

$$\operatorname{dist}_{\mathfrak{B}}(\varphi, \psi) = \sup_{B \in \mathfrak{B}} |\varphi(B) - \psi(B)|.$$

Definición 3.1.2. *Diremos que un álgebra de Boole* $\mathfrak{A}$ *posee la propiedad de aproximación si para toda sucesión de funciones arbitrarias* $\varphi_n : \mathfrak{A} \longrightarrow [-1, 1]$ *que satisfagan*

$$\inf_{\mu \in M_1(\mathfrak{A})} \operatorname{dist}_{\mathfrak{B}}(\mu, \varphi_n) \longrightarrow 0$$

para toda álgebra finita $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$*, existe una sucesión acotada* $(\nu_n) \in M(\mathfrak{A})$ *tal que*

$$\varphi_n(a) - \nu_n(a) \longrightarrow 0, \text{ para todo } a \in \mathfrak{A}.$$

Es decir, que φ_n *es asintóticamente una medida de norma* ≤ 1 *en el álgebra finta* $\mathfrak{B}$.

Mediante un argumento diagonal estándar es posible demostrar que toda álgebra numerable $\mathfrak{A}$ posee la propiedad de aproximación. Más adelante probaremos que para algunas álgebras no numerables también es cierta.

Notación. Fijemos ahora una sucesión $(\varphi_n)_n$ de funciones $\varphi_n : \mathfrak{A} \longrightarrow [-1, 1]$ en el álgebra $\mathfrak{A}$.

Escribiremos $M^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$, o $M^{\mathbb{Q}}_r(\mathfrak{B})$, para el conjunto de las medidas signadas que toman valores racionales, y con norma $\leq r$ respectivamente.

Definición 3.1.3. *Para toda* $\mathfrak{B}$ *y* n *definimos*

$$o_n(\mathfrak{B}) = \inf\{\operatorname{dist}_{\mathfrak{B}}(\nu, \varphi_n) : \nu \in M^{\mathbb{Q}}_1(\mathfrak{B})\}.$$

Por supuesto, para calcular el valor de $o_n(\mathfrak{B})$ se puede reemplazar $M^{\mathbb{Q}}_1(\mathfrak{B})$ por $M_1(\mathfrak{B})$, pero en lo que resta consideraremos medidas que únicamente tomen valores racionales.

Definición 3.1.4. *Dadas dos subálgebras* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{A}$ *y* $\nu_i \in M(\mathfrak{B}_i)$ *para* $i = 1, 2$*, decimos que* ν_1, ν_2 *son compatibles si* $\nu_1(B) = \nu_2(B)$ *para todo* $B \in \mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$.

Definición 3.1.5. *Fijemos* $r > 1$*. Se define* $O_n(\mathfrak{B})$ *(real positivo ó* $+\infty$*), para* $n \in \omega$ *y* $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ *finita, por inducción en* $|\mathfrak{B}|$*. Pongamos* $O_n(\mathfrak{C}) = 1/(n+1)$ *para toda* n *en el caso de que* $\mathfrak{C}$ *sea un álgebra trivial. Supongamos que* $O_n(\mathfrak{C})$ *se define para toda subálgebra propia* $\mathfrak{C}$ *de* $\mathfrak{B}$*, entonces*

$$O_n(\mathfrak{B}) = C_0 + o_n(\mathfrak{B}) + 1/(n+1),$$

donde C_0 *es el ínfimo de* $C > 0$ *tal que*

(i) siempre que $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{C}$ *sean subálgebras propias y dadas dos medidas compatibles* $\nu_i \in M^{\mathbb{Q}}_r(\mathfrak{B}_i)$ *que satisfagan* $\operatorname{dist}_{\mathfrak{B}_i}(\nu_i, \varphi_n) < O_n(\mathfrak{B}_i)$ *para* $i = 1, 2$*, existe* $\mu \in M^{\mathbb{Q}}_r(\mathfrak{B})$ *tal que* μ *es una extensión común de* ν_1 *y* ν_2 *y* $\operatorname{dist}_{\mathfrak{B}}(\mu, \varphi_n) \leq C$*;*

(ii) para toda subálgebra propia $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ *y* $\nu \in M^{\mathbb{Q}}_r(\mathfrak{C})$ *una medida con* $\operatorname{dist}_{\mathfrak{C}}(\nu, \varphi_n) < O_n(\mathfrak{C})$ *existe una extensión de* ν *a* $\mu \in M^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ *tal que* $||\mu|| \leq \max(||\nu||, 1)$ *y* $\operatorname{dist}_{\mathfrak{B}}(\mu, \varphi_n) \leq C$.

Observación 3.1.6. *La definición de O_n depende de la elección del parámetro r y es evidente que $o_n(\mathfrak{B}) \leq O_n(\mathfrak{B})$ para todo n y $\mathfrak{B}$.*

Obsérvese que en el caso (ii) anterior el conjunto que contiene a tales μ es siempre no vacío por el lema C.2. Sin embargo, no puede existir una extensión común de ν_1, ν_2 considerada en (i) que satisfaga $||\mu|| \leq r$; en tal caso se tendrá que $O_n(\mathfrak{B}) = +\infty$.

Lema 3.1.7. *Si $\lim_n o_n(\mathfrak{B}) = 0$ para toda álgebra finta $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, se tiene que $\lim_n O_n(\mathfrak{B}) = 0$ para cualquier $\mathfrak{B}$.*

Demostración. Procederemos por inducción en $|\mathfrak{B}|$.
Si $\mathfrak{B}$ es trivial entonces $O_n(\mathfrak{B}) = 1/(n+1)$. Evidentemente se cumple el teorema.
Supongamos que $\mathfrak{B}$ no es trivial y $\lim_n O_n(\mathfrak{C}) = 0$ para toda subálgebra propia $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{B}$. Sea $N \geq 2$ el número de átomos de $\mathfrak{B}$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta > 0$ tal que

$$4N\delta < r - 1 \text{ y } (4N+1)\delta < \varepsilon.$$

Por la hipótesis de inducción y como $\lim_n o_n(\mathfrak{B}) = 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $o_n(\mathfrak{B}) < \delta$ y $O_n(\mathfrak{C}) < \delta$ para toda subálgebra propia $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{B}$. Debemos comprobar que entonces $O_n(\mathfrak{B}) \leq \varepsilon$ cuando $n \geq n_0$, es decir, debemos verificar que $C = \varepsilon$ satisface las condiciones (i-ii) de la definición 3.1.5.

Consideremos un par de subálgebras propias $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{B}$ y un par de medidas compatibles $\nu_i \in M_r^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}_i)$ como en la definición 3.1.5(i). Como $o_n(\mathfrak{B}) < \delta$ por hipótesis debe existir una medida $\lambda \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ cuya distancia a φ_n sea menor que δ, pues

$$o_n(\mathfrak{B}) = \inf\{\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda, \varphi_n) : \lambda \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})\} < \delta.$$

Entonces, para $i = 1, 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}_i}(\nu_i, \lambda) = \sup_{B \in \mathfrak{B}_i} |\nu_i(B) - \lambda(B)| = \sup_{B \in \mathfrak{B}_i} |\nu_i(B) - \varphi_n(B) + \varphi_n(B) - \lambda(B)| \leq \\
&\leq \sup_{B \in \mathfrak{B}_i} |\nu_i(B) - \varphi_n(B)| + \sup_{B \in \mathfrak{B}_i} |\varphi_n(B) - \lambda(B)| = \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}_i}(\nu_i, \varphi_n) + \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}_i}(\varphi_n, \lambda) \leq \\
&\leq O_n(B_i) + \delta
\end{aligned}$$

y como $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ son álgebras propias se cumple que $O_n(B_i) < \delta$ para $i = 1, 2$. Por consiguiente, se cumple que

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}_i}(\nu_i, \lambda) < 2\delta.$$

Aplicando ahora el lema C.1 sabemos que existe una extensión común de ν_1, ν_2 a una medida $\lambda' \in M^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ tal que $||\lambda - \lambda'|| \leq 4N\delta$. Esto conlleva que

$$\begin{aligned}
&||\lambda'|| \leq ||\lambda|| + 4N\delta \leq 1 + r - 1 = r; \\
&\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda', \varphi_n) \leq \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda', \lambda) + \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda, \varphi_n) < 4N\delta + \delta < \varepsilon,
\end{aligned}$$

como se quería.

Considérese ahora $\mathfrak{C}$ y $\nu \in M_r^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{C})$ como en el apartado (ii) de la definición 3.1.5.

Sea, de nuevo, $\lambda \in M_1^{\mathbb{Q}}$ atestiguando que $o_n(\mathfrak{B}) = \inf\{\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda, \varphi_n) : \lambda \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})\} < \delta$. Al igual que antes, se tiene que $\mathrm{dist}_{\mathfrak{C}}(\nu, \lambda) < 2\delta$, así que por el lema C.2 existe una medida $\lambda' \in M^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ que extiende a ν de modo que $||\lambda'|| \leq \max(||\nu||, 1)$ y tal que $\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda', \lambda) \leq 6\delta$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda', \varphi_n) = \sup_{B \in \mathfrak{B}} |\lambda'(B) - \varphi_n(B)| = \sup_{B \in \mathfrak{B}} |\lambda'(B) - \lambda(B) + \lambda(B) - \varphi_n(B)| \leq \\
&\leq \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda', \lambda) + \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\lambda, \varphi_n) < 7\delta < (4N+1)\delta < \varepsilon,
\end{aligned}$$

concluyendo así la prueba. □

Por la observación 3.1.6 sabemos que hay problemas a la hora de controlar la norma de una extensión común de dos medidas compatibles. Para poder abordar este problema necesitaremos introducir una nueva propiedad para un álgebra $\mathfrak{A}$.

Definición 3.1.8. *Diremos que un álgebra $\mathfrak{A}$ posee la propiedad de extensión local, y lo denotaremos como $LEP(r)$, para algún $r > 1$ si existe una familia $\mathbb{B}$ de subálgebras finitas de $\mathfrak{A}$ tales que*

i) para toda álgebra finita $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ existe $\mathfrak{B} \in \mathbb{B}$ con $\mathfrak{B} \supseteq \mathfrak{C}$;

ii) siempre que $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B}$ sea no numerable existen distintas $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathbb{B}'$ tales que cualquier par de medidas $\nu_i \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}_i)$ admite una extensión común a una medida $\nu \in M_r^{\mathbb{Q}}(\langle \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \rangle)$.

Llegamos ahora a uno de los principales resultados de nuestro trabajo, pero antes de abordarlo debemos recordar el Axioma de Martin (MA) y algunos conceptos que ya habíamos definido con anterioridad.

Definición 3.1.9. *Sea $(\mathbb{P}, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado cuyos elementos llamaremos condiciones. Un conjunto $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{P}$ será denso si para toda $p \in \mathbb{P}$ existe un $d \in \mathbb{D}$ tal que $p \leq d$.*

Un conjunto $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{P}$ estará dirigido si para todo $p_1, p_2 \in \mathbb{G}$ existe $p_3 \in \mathbb{G}$ tal que $p_1, p_2 \leq p_3$.

Definición 3.1.10. *Un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ satisfará ccc (countable chain condition) si todo $P \subseteq \mathbb{P}$ no numerable contiene dos condiciones diferentes p_1, p_2 tales que son comparables, es decir, existe $q \in \mathbb{P}$ tal que $p_1, p_2 \leq q$.*

Para un cardinal κ dado, el enunciado de $\mathsf{MA}(\kappa)$ es el que sigue:

Axioma de Martin. *Para todo conjunto ccc parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ y una familia $\{\mathbb{D}_\xi : |\mathbb{D}_\xi| = \xi < \kappa\}$ de sus subconjuntos densos existe un conjunto dirigido $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}_\xi \neq \emptyset$ para todo $\xi < \kappa$.*

Teorema 3.1.11. *Supongamos que $\mathfrak{A}$ es un álgebra con $|\mathfrak{A}| = \kappa$. Supongamos además que $\mathfrak{A}$ tiene la $LEP(r)$ para algún $r > 1$ y que $\mathrm{Ult}\,\mathfrak{A}$ es separable.*

Entonces, bajo $\mathsf{MA}(\kappa)$, el álgebra $\mathfrak{A}$ posee la propiedad de aproximación.

Demostración. Fijamos una sucesión $\varphi_n : \mathfrak{A} \longrightarrow [-1, 1]$ de funciones como las de la definición 3.1.2, es decir, que satisfagan que si

$$\inf_{\mu \in M_1(\mathfrak{A})} \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\mu, \varphi_n) \longrightarrow 0$$

para toda álgebra finita $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, entonces existe una sucesión acotada $(\nu_n) \in M(\mathfrak{A})$ tal que

$$\varphi_n(a) - \nu_n(a) \longrightarrow 0, \text{ para todo } a \in \mathfrak{A}.$$

Debemos, pues, construir una sucesión acotada que cumpla esta condición. Obsérvese que $\lim_n o_n(\mathfrak{B}) = 0$ para toda subálgebra finita $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$.

Sea $\mathbb{B}$ una familia de subálgebras cuya existencia tenemos garantizada por la $LEP(r)$ que $\mathfrak{A}$ cumple por hipótesis. Consideremos un conjunto parcialmente ordenado $\mathbb{P}$ de condiciones

$$p = (\mathfrak{B}, n, (\nu_i)_{i \leq n}, k), \text{ donde}$$

i) $\mathfrak{B} \in \mathbb{B}$ y $n, k \in \mathbb{Z}^+$;

ii) $\nu_i \in M_r^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$, para todo $i \leq n$;

iii) $\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\nu_i, \varphi_i) < O_i(\mathfrak{B})$, para todo $i \leq n$;

iv) $O_m(\mathfrak{B}) < 1/k$ para todo $m \geq n$.

Consideremos las dos condiciones siguientes

$$p = (\mathfrak{B}, n, (\nu_i)_{i \leq n}, k), \;\; p' = (\mathfrak{B}', n', (\nu'_i)_{i \leq n'}, k') \in \mathbb{P}.$$

Diremos que p' es una extensión simple de p si $k' \geq k$ y
- o bien $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, $n' \geq n$ y $\nu'_i = \nu_i$ para $i \leq n$,
- o bien $n' = n$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$ y ν'_i es una extensión de ν_i para todo $i \leq n$.

Definimos un orden parcial en $\mathbb{P}$ declarando $p \leq p'$ si existen $s \in \omega$ y una sucesión $(p_j)_{j=0}^{s} \in \mathbb{P}$ tal que $p_0 = p$, $p_s = p'$ y p_{j+1} sea una extensión simple de p_j para todo $j < s$.

Afirmación A. Sea $A \in \mathfrak{B}$ y consideremos $p, p' \in \mathbb{P}$ como antes. Si $p \leq p'$, entonces

$$|\nu'_i(A) - \varphi_i(A)| < 1/k, \text{ para } n \leq i \leq n'.$$

Veámoslo:

Si p' es una extensión simple de p del primer tipo, entonces $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}'$, $n' \geq n$ y $\nu'_i = \nu_i$, para $i = 1, ..., n$. Por lo tanto, para $n \leq i \leq n'$ se tiene que $|\nu'_i(A) - \varphi_i(A)| < O_i(\mathfrak{B}') = O_i(\mathfrak{B}) < 1/k$.

Si p' es una extensión simple del segundo tipo, entonces $n' = n$, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}'$ y ν'_i extiende a ν_i para $i \leq n$. Como $n = n'$ se cumple que $\nu'_i = \nu_i$ para $i = 1, ..., n$. Por tanto, $|\nu'_i(A) - \varphi_i(A)| = |\nu'_i(A) - \varphi_i(A)| < O_i(\mathfrak{B}) < 1/k$.

Veamos ahora que si esto se cumple para $p \leq p'$ y $p' \leq p''$, entonces también se cumple para $p \leq p''$: Por ser $p \leq p'$ se cumple que $k \leq k'$ y como $p' \leq p''$ se tiene que $k' \leq k''$, por tanto se verifica que

$$|\nu''_i(A) - \varphi_i(A)| \leq \tfrac{1}{k''} \leq \tfrac{1}{k'} \leq \tfrac{1}{k}.$$

Esto prueba que la afirmación anterior se sigue por inducción en el número de extensiones simples que conducen desde p hasta p'.

Afirmación B. $\mathbb{P}$ es ccc.

Consideremos una familia no numerable $P \subseteq \mathbb{P}$ de condiciones

$$p = (\mathfrak{B}^p, n^p, (\nu_i^p)_{i \leq n^p}, k^p).$$

Reduciendo $\mathbb{P}$ si fuese necesario, podemos asumir que $n^p = n$ y $k^p = k$ son constantes para $p \in P$.

Sea S un subconjunto denso y numerable de Ult $\mathfrak{A}$. Todo $x \in S$ define una medida de probabilidad $\delta_x \in M(\mathfrak{A})$, donde $\delta_x(B) = 1$ si y sólo si $B \in x$ y 0 en otro caso.

Sea M^S la familia numerable de todas las medidas sobre $\mathfrak{A}$ que son combinaciones lineales racionales de δ_x con $x \in S$. Adviértase que toda medida $\nu \in M^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ para $\mathfrak{B}$ un álgebra finita puede representarse como restricción de alguna $\tilde{\nu} \in M^S$ a $\mathfrak{B}$, donde $||\tilde{\nu}|| = ||\nu||$.

Basándonos en esto y considerando de nuevo P, podemos asumir que para todo $i \leq n$ existe $\tilde{\nu}_i \in M^S$ tal que $\nu_i^p = \tilde{\nu}_i|_{B^p}$ y $||\nu_i^p|| = ||\tilde{\nu}_i|_{B^p}||$, para todo $p \in P$.

Aplicando ahora $LEP(r)$, que por hipótesis cumple $\mathfrak{A}$, escogemos $p, q \in \mathbb{P}$ tales que $\mathfrak{B}^p$ y $\mathfrak{B}^q$ poseen la propiedad garantizada por la definición 3.1.8 ii), es decir, que todo par de medidas compatibles $\nu_p \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}^p)$ y $\nu_q \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}^q)$ admite una extensión común a una medida $\nu \in M_r^{\mathbb{Q}}(\langle \mathfrak{B}^p \cup \mathfrak{B}^q \rangle)$.

Sea $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}^p \cap \mathfrak{B}^q$ y, aplicando 3.1.8 i) escogemos $\mathfrak{B} \in \mathbb{B}$ que contenga a $\mathfrak{B}^p \cup \mathfrak{B}^q$. Por el lema 3.1.7 existe un $n_1 \geq n$ tal que $O_m(\mathfrak{B}) < 1/k$ para todo $m \geq n_1$. Debemos comprobar que p, q tienen una extensión común en $\mathbb{P}$.

Para todo i tal que $n < i \leq n_1$ escogemos una medida $\pi_i \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}_0)$ tal que

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}_0}(\pi_i, \varphi_i) < o_i(\mathfrak{B}_0) + \tfrac{1}{i+1} \leq O_i(\mathfrak{B}_0),$$

y entonces por la parte ii) de la definición 3.1.5 podemos extender π_i a unas medidas

$$\nu_i^p \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}^p) \ \text{ y } \ \nu_i^q \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}^q) \text{ tales que}$$

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}^p}(\nu_i^p, \varphi_i) < O_i(\mathfrak{B}^p) \ \text{ y } \ \mathrm{dist}_{\mathfrak{B}^q}(\nu_i^q, \varphi_i) < O_i(\mathfrak{B}^q).$$

Entonces existe $\nu_i \in M_r^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ que es extensión común de ν_i^p, ν_i^q y tal que

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\nu_i, \varphi_i) < O_i(\mathfrak{B}), \text{ pues}$$

- si $O_i(\mathfrak{B}) < +\infty$ se sigue de la definición 3.1.5 i);
- y si $O_i(\mathfrak{B}) = +\infty$, podemos tomar cualquier extensión a $\mathfrak{B}$ que preserve la norma, cuya existencia está garantizada por 3.1.5 ii) y por cómo hemos escogido $\mathfrak{B}^p$ y $\mathfrak{B}^q$.

Para $i \leq n$, escogemos $\nu_i \in M_r^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ aplicando la definición 3.1.5 al par ν_i^p, ν_i^q. En el caso de que $O_i(\mathfrak{B}) = +\infty$ se tiene que ν_i^p y ν_i^q están representadas por la misma medida $\tilde{\nu}_i \in M^S$, con $\tilde{\nu}_i|_{\mathfrak{B}}$ su extensión común a $\mathfrak{B}$ con norma $\leq r$.

Así, obtenemos las extensiones simples

$$p_1 = (\mathfrak{B}^p, n_1, (\nu_i^p)_{i \leq n_1}, k) \ \text{ y } \ q_1 = (\mathfrak{B}^q, n_1, (\nu_i^q)_{i \leq n_1}, k)$$

de p y q respectivamente. Sea pues

$$s = (\mathfrak{B}, n_1, (\nu_i)_{i \leq n_1}, k) \in \mathbb{P},$$

la cual satisface $p_1, q_1 \leq s$. Lo cual demuestra que $\mathbb{P}$ es ccc.

Afirmación C. Para todo $k_0, n_0 \in \omega$ y $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ finita, el conjunto

$$\mathbb{D}(\mathfrak{B}_0, n_0, k_0) = \{p = (\mathfrak{B}^p, n^p, (\nu_i^p)_{i \leq n^p}, k^p) \in \mathbb{P} : \mathfrak{B}^p \supseteq \mathfrak{B}_0, n^p \geq n_0, k^p \geq k_0\},$$

es denso en $\mathbb{P}$.

Sea $p = (\mathfrak{B}^p, n^p, (\nu_i^p)_{i \leq n^p}, k^p) \in \mathbb{P}$ y consideremos la terna $\mathfrak{B}_0, n_0, k_0$; podemos asumir que $k_0 \geq k^p$ y $n_0 \geq n^p$.

Sea $\mathfrak{B} \in \mathbb{B}$ conteniendo a $\mathfrak{B}^p \cup \mathfrak{B}_0$ y $n_1 \geq n_0$ tal que $O_m(\mathfrak{B}) < 1/k_0$, para todo $m \geq n_1$. Entonces, mediante un razonamiento similar al que hemos desarrollado en la Afirmación B, podemos definir adecuadamente unas medidas ν_i y ν_i' tales que

$$p \leq (\mathfrak{B}^p, n_1, (\nu_i)_{i \leq n_1}, k_0).$$

Efectivamente, para $n^p < i \leq n_1$ tomamos una medida $\nu_i \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}^p)$ tal que

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}^p}(\nu_i, \varphi_i) < o_i(\mathfrak{B}^p) + \tfrac{1}{i+1} \leq O_i(\mathfrak{B}^p)$$

y, aplicando ahora la parte ii) de la definición 3.1.5 extendemos ν_i a una medida $\nu_i \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$ tal que

$$\mathrm{dist}_{\mathfrak{B}}(\nu_i', \varphi_i) < O_i(\mathfrak{B}).$$

Por tanto, para $i \leq n$ extendemos adecuadamente ν_i a $\nu_i' \in M_r^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})$, lo cual prueba que $\mathbb{D}(\mathfrak{B}_0, n_0, k_0)$ es denso en $\mathbb{P}$.

Una vez probadas las afirmaciones anteriores podemos hacer uso de ellas para finalizar la demostración del teorema. Así, considerando las Afirmaciones B y C, podemos aplicar ahora $\mathsf{MA}(\kappa)$ para obtener un conjunto dirigido $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{P}$ tal que $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}(\mathfrak{B}_0, n_0, k_0) \neq \emptyset$ para toda $\mathfrak{B}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ finita y n_0, k_0 enteros positivos.

Consideremos las condiciones

$$p = (\mathfrak{B}^p, n^p, (\nu_i)_{i \leq n^p}, k^p) \in \mathbb{G}.$$

Dado $i \in \omega$, la familia $\mathbb{G}_i = \{p \in \mathbb{G} : i \leq n^p\}$ define una familia $\{\nu_i^p : p \in \mathbb{G}_i\}$ de medidas compatibles con variación menor o igual que r y cuyos dominios cubren a todo $\mathfrak{A}$. Por tanto, todas ellas se extienden de manera única a una medida $\mu \in M_r(\mathfrak{A})$.

Para todo $A \in \mathfrak{A}$ existe $\mathfrak{B}_0 \in \mathbb{B}$ tal que $A \in \mathfrak{B}_0$. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos k_0 tal que $1/k_0 < \varepsilon$ y

$$p = (\mathfrak{B}, n, (\nu_i)_{i \leq n}, k) \in \mathbb{G} \cap \mathbb{D}(\mathfrak{B}_0, 1, k_0).$$

Entonces $\mu_n(A) = \nu_n(A)$, así que

$$|\nu_n(A) - \varphi_n(A)| < O_n(\mathfrak{B}) < 1/k \leq 1/k_0 < \varepsilon.$$

Para todo $m > n$ existe $p' = (\mathfrak{B}', n', (\nu_i')_{i \leq n'}, k') \in \mathbb{G}$ tal que $p \leq p'$ y $m \leq n'$. Por lo tanto, se tiene que $\mu_m(A) = \nu_m'(A)$ y $|\nu_m(A) - \varphi_m(A)| < 1/k_0$ por la Afirmación A, probando así que

$$\mu_n(A) - \varphi_n(A) \longrightarrow 0,$$

lo cual demuestra que $\mathfrak{A}$ posee la propiedad de aproximación y completa la prueba.

$\square$

Antes de poder hacer uso de este teorema necesitamos demostrar el siguiente resultado referente a la separabilidad del espacio producto $2^{\mathfrak{c}}$.

Lema 3.1.12. *El espacio producto* $2^{\mathfrak{c}}$ *es separable.*

Demostración. Podemos poner $2^{\mathfrak{c}} = \{0,1\}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}\}$ y considerar la topología discreta en $\{0,1\}$. Antes de nada definiremos una base para la topología producto:

$$\begin{aligned} \mathscr{B} = \{\theta \in \{0,1\}^{\mathbb{R}} : \exists F \subseteq \mathbb{R}, F \text{ finito tal que} \\ \exists f_F : F \longrightarrow \{0,1\} \text{ tal que } \forall g \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}, g \in \theta \leftrightarrow g|_F = f_F\}. \end{aligned}$$

Consideremos $\mathbb{R} = (0,1) \setminus \mathbb{Q}$, pues únicamente vamos a tener en cuenta la cardinalidad y, al quitar un conjunto numerable, ésta no se ve afectada. Por simplicidad, a partir de ahora pondremos $(0,1) = (0,1) \setminus \mathbb{Q}$ y $\{0,1\}^{\mathbb{R}} = \{f : (0,1) \longrightarrow \{0,1\}\}$.
Lo que haremos será particionar el intervalo $(0,1)$ y generar funciones constantes en las particiones que no estarán definidas en los racionales.

Sea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$, donde $D_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_{n,m}$, siendo

$$F_{n,m} = \left\{ f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}} : \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{k}{n^m}, \frac{k+1}{n^m}\right) \subset (0,1) \text{ y } f\left(\frac{k}{n^m}, \frac{k+1}{n^m}\right) = \text{cte} \right\}.$$

Se tiene que para cada n, m el conjunto $F_{n,m}$ es finito, por tanto D_n es numerable, al ser unión numerable de elementos finitos y D también. Veamos ahora que es denso:

Sea $U \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ un abierto básico, entonces existe $F \subseteq (0,1)$ finito tal que existe $f_F : F \longrightarrow \{0,1\}$ tal que para toda $g \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ se tiene que si $g|_F = f_F$, entonces $g \in U$.

Sea $|F| = n$. Por ser finito existe $\min\{d(p,q) : p,q \in F\} > 0$, dado que $p \neq q$. Además, existe m con $\frac{1}{n^m} < \min\{d(p,q) : p,q \in F\}$. Luego hay una $f \in F_{n,m}$ de forma que $f|_F = f_F$ y, por tanto, $F_{n,m} \cap U \neq \emptyset$. Como esto ocurre para todo abierto básico U se tiene que D es denso.

□

Proposición 3.1.13. *Para todo cardinal κ, el álgebra $\mathfrak{A} = \mathrm{Clop}(2^\kappa)$ tiene $LEP(2)$.*

En consecuencia, si aceptamos $\mathsf{MA}(\kappa)$ para algún $\kappa < \mathfrak{c}$, entonces el álgebra $\mathrm{Clop}(2^\kappa)$ posee la propiedad de aproximación.

Demostración. Comencemos probando que $\mathfrak{A} = \mathrm{Clop}(2^\kappa)$ posee $LEP(2)$. Para cualquier conjunto finito $F \subseteq \kappa$ sea $\mathfrak{B}_F$ el subálgebra finita de $\mathfrak{A}$ de todos los conjuntos determinados por las coordenadas en F; así, $\mathfrak{B}_F$ estará generada por los átomos A de la forma

$$A = \{t \in 2^\kappa : t|F = \tau|F\},$$

para alguna función $\tau : F \longrightarrow 2$. Es claro que la familia $\mathbb{B}$ de todas las $\mathfrak{B}_F$ es cofinal en $\mathfrak{A}$, por lo que bastará comprobar que todo par $\mathfrak{B}_{F_1}, \mathfrak{B}_{F_2}$ satisface el apartado *ii*) de la definición 3.1.8.

Consideremos $\nu_i \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}_{F_i})$, $i = 1,2$ y supongamos que ν_1 y ν_2 coinciden sobre $\mathfrak{B}_{F_1} \cap \mathfrak{B}_{F_2}$ al cual denotaremos como $\mathfrak{B}_H$, siendo $H = F_1 \cap F_2$.
Sea A_i, $i \leq 2^{F_1 \setminus H}$, el conjunto de todos los átomos de $\mathfrak{B}_{F_1 \setminus H}$ y, análogamente, B_j el de todos los átomos de $\mathfrak{B}_{F_2 \setminus H}$.
Sea C un átomo fijo de $\mathfrak{B}_H$, entonces podemos aplicar el lema C.3 para $a_i = \nu_1(A_i \cap C)$ y $b_j = \nu_2(B_j \cap C)$, pues

$$\sum_i a_i = \nu_1(C) = \nu_2(C) = \sum_j b_j$$

cumpliéndose así las hipótesis del lema. Esto nos permite definir $\bar{\nu}$ para todo $A \in \mathfrak{B}_F$ contenido en C, y tal que

$$|\bar{\nu}|(C) \leq \max\left(|\nu_1|(C), |\nu_2|(C)\right) \leq |\nu_1|(C) + |\nu_2|(C),$$

lo cual implica que $||\bar{\nu}|| \leq 2$, tal y como queríamos.

La segunda parte del enunciado se sigue del teorema 3.1.11, pues $\mathfrak{A}$ tiene $LEP(r)$ para algún $r > 1$ y $\mathrm{Ult}(\mathrm{Clop}(2^\kappa))$ es separable por ser homeomofo a 2^κ, espacio topológico totalmente disconexo separable por el lema anterior.

□

Para la siguiente proposición haremos uso de $\mathcal{A}$, una familia casi disjunta de subconjuntos de ω; lo cual significa que la intersección de dos subconjuntos cualesquiera de $\mathcal{A}$ es finita.

Proposición 3.1.14. *Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra de conjuntos de ω generada por una familia casi disjunta $\mathcal{A}$ y todos los subconjuntos finitos de ω. Entonces el álgebra $\mathfrak{A}$ tiene $LEP(3)$.*

De esta forma, si $|\mathfrak{A}| = \kappa < \mathfrak{c}$ y aceptamos $\mathsf{MA}(\kappa)$, entonces el álgebra $\mathfrak{A}$ tendrá la propiedad de aproximación.

Demostración. Sea $\mathbb{B}$ una familia de subálgebras finitas de $\mathfrak{A}$, donde cada $\mathfrak{B} = \langle n, A_1, ..., A_k \rangle \in \mathbb{B}$ es un álgebra generada por todos los subconjuntos de $n = \{0,1,...,n-1\}$ y $A_i \in \mathcal{A}$ tal que $A_i \cap A_j \subseteq n$ para $i \neq j$.

Es evidente que $\mathbb{B}$ es cofinal en $\mathfrak{A}$, por tanto debemos comprobar que se verifica la parte *ii*) de la definición 3.1.8 para $r = 3$.

Si $\mathbb{B}' \subseteq \mathbb{B}$ es no numerable, entonces existen dos subálgebras en $\mathbb{B}'$ de la forma

$$\mathfrak{B}_1 = \langle n, A_1, ..., A_m, B_1, ..., B_k\rangle, \quad \mathfrak{B}_2 = \langle n, A_1, ..., A_m, C_1, ..., C_k\rangle$$

donde $B_i, C_j \in \mathcal{A}$ siendo todos diferentes. Pongamos

$$X = n \cup \bigcup_{i\leq m} A_i \cup \bigcup_{i,j\leq k} B_i \cap C_j;$$

de forma que $B_i \setminus X$ y $C_i \setminus X$ son infinitos para $i \leq k$.

Sean $\nu_1 \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}_1)$ y $\nu_2 \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B}_2)$ tales que coinciden en $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2 = \langle n, A_1, ..., A_m\rangle$. Podemos representarlas como las restricciones de

$$\nu_1 = \nu_0 + \sum_{i\leq k} b_i\delta_{x_i} + b\delta_x, \quad \nu_2 = \nu_0 + \sum_{i\leq k} c_i\delta_{y_i} + c\delta_x, \text{ donde}$$
$$x_i \in B_i \setminus X, y_i \in C_i \setminus X, x \in \omega \setminus (X \cup \bigcup_{i\leq k}(B_i \cup C_i)).$$

Aquí, ν_0 se define como $\nu_0(A) = \nu_1(A \cap X) = \nu_2(A \cap X)$. Definamos $\overline{b} = \sum_{i\leq k} b_i$ y $\overline{c} = \sum_{i\leq k} c_i$, y consideremos la medida

$$\nu = \nu_0 + \sum_{i\leq k} b_i\delta_{x_i} + \sum_{i\leq k} c_i\delta_{y_i} + (b - \overline{c})\delta_x.$$

Entonces, como $\nu_0(\omega) = \nu_1(\omega \cap X) = \nu_1(X) = \nu_0(X) + \sum_{i\leq k} b_i\delta_{x_i}(X) + b\delta_x(X) = \nu_0(X)$ se tiene que

$$\nu(\omega) = \nu_0(X) + \overline{b} + \overline{c} + b - \overline{c} = \nu_1(\omega) = \nu_2(\omega).$$

Además, $\nu(B_i) = \nu_0(B_i \cap n) + b_i = \nu_i(B_i)$ y, de forma similar, se tiene para ν_2 y C_i. De esto se sigue que ν es una extensión común de ν_1, ν_2. Claramente, $||\nu|| \leq 3$, lo cual concluye la primera afirmación.

La segunda se sigue del teorema 3.1.11 puesto que $\mathfrak{A}$ tiene $LEP(3)$ y $\mathrm{Ult}(\mathfrak{A})$ es separable por ser $\mathfrak{A}$ es un álgebra atómica cuyos átomos se corresponden con los puntos de ω, los cuales son densos.

$\square$

3.2. Sumas torcidas triviales de c_0 y $C(K)$

En esta última sección presentamos las conclusiones del trabajo y demostramos que, bajo el Axioma de Martin y la negación de la Hipótesis del Continuo, toda suma torcida de c_0 y $C(2^{\omega_1})$ es trivial.

Concluiremos la misma con algunas observaciones acerca de las recientes investigaciones que diversos autores han llevado a cabo en relación a este tema.

Teorema 3.2.1. *Sea K un compacto cero-dimensional tal que $\mathfrak{A}$=*Clop*(K) tenga la propiedad de aproximación. Entonces K tiene la propiedad de extensión*.*

Demostración. Sea $L = M_1(K)$, fijemos $L' \in CDE(L)$ e identifiquemos $L' \setminus L$ con ω.

Para todo $A \in \mathfrak{A}$, la función $M_1(K) \ni \nu \longrightarrow \nu(A)$ es continua en $M_1(K)$. Sea θ_A una extensión a una función continua $L' \longrightarrow [-1, 1]$. Definamos las funciones φ_n en $\mathfrak{A}$ como $\varphi_n(A) = \theta_A(n)$ para todo n y $A \in \mathfrak{A}$.

Recordemos que $o_n(\mathfrak{B})$ se define como $o_n(\mathfrak{B}) = \text{ínf}\{\text{dist}_{\mathfrak{B}}(\nu, \varphi) : \nu \in M_1^{\mathbb{Q}}(\mathfrak{B})\}$ y, además, se tiene que $\text{lím}_n\, o_n(\mathfrak{B}) = 0$ para toda subálgebra finita $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ por el lema 2.4.3 aplicado a la familia finita $\{\theta_B : B \in \mathfrak{B}\}$.

La propiedad de aproximación garantiza que existe un $r > 0$ y una sucesión $\mu_n \in M_r(\mathfrak{A})$ tal que

$$\text{lím}_n(\theta_A(n) - \mu_n(A)) = \text{lím}_n(\varphi_n(A) - \mu_n(A)) = 0,$$

para todo $A \in \mathfrak{A}$. Toda medida μ_n se extiende de forma única a una medida de Radon en K que se denota del mismo modo.

Sea $\mathcal{G}$ la familia de las $g \in C(K)$ de modo que siempre que $\tilde{g} \in C(L')$ extienda a g como una función en $M_1(K)$ se tenga que $\mu_n(g) - \tilde{g}(n) \longrightarrow 0$.

Como vemos, por el lema 2.4.2, para todo $A \in \mathfrak{A}$ se tiene que $\chi_A \in \mathcal{G}$. Utilizando ese mismo lema es posible probar fácilmente que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo combinaciones lineales finitas y, por tanto, toda función continua simple está en $\mathcal{G}$.

Si $g, h \in C(K)$ y $||g-h|| < \varepsilon$ par algún $\varepsilon > 0$, entonces tomando cualesquiera dos extensiones $\tilde{g}, \tilde{h}$ de g, h, respectivamente, se tiene $|\tilde{g}(n) - \tilde{h}(n)| < \varepsilon$, para casi todo $n \in \omega$. Esto implica que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo límites uniformes y, por tanto, $\mathcal{G} = C(K)$. Finalmente, por el lema 2.5.3 K tiene la propiedad de extensión*, lo cual concluye la prueba.

$\square$

Hecho esto, podemos hacer uso de las proposiciones 3.1.13 y 3.1.14 para obtener los siguientes resultados.

Corolario 3.2.2. *Supongamos que $\kappa < \mathfrak{c}$ es un cardinal tal que aceptamos $\mathsf{MA}(\kappa)$. Entonces 2^κ tiene la propiedad de extensión* y, por el teorema 2.5.5, toda suma torcida de c_0 y $C(2^\kappa)$ es trivial.*

Demostración. Por la proposición 3.1.13 sabemos que $\mathfrak{A} = \text{Clop}(2^\kappa)$ tiene $LEP(2)$. Si asumimos $\mathsf{MA}(\kappa)$ para $\kappa < \mathfrak{c}$ se tiene que $\mathfrak{A}$ posee la propiedad de aproximación. Haciendo ahora uso del teorema 3.2.1 sabemos que 2^κ tiene la propiedad de estensión* y, por el teorema 2.5.5 que toda suma torcida de c_0 y $C(2^\kappa)$ es trivial.

$\square$

Corolario 3.2.3. *Supongamos que $\kappa < \mathfrak{c}$ es un cardinal tal que aceptamos $\mathsf{MA}(\kappa)$. Sea $\mathcal{A}$ una familia casi disjunta de subconjuntos de ω tal que $|\mathcal{A}| = \kappa$. Sea $K = \text{Ult}(\mathfrak{A})$ con $\mathfrak{A}$ un álgebra de subconjuntos de ω generada por $\mathcal{A}$ y todos los subconjuntos finitos de ω. Entonces K tiene la propiedad de extensión* y, por el teorema 2.5.5, toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial.*

Demostración. Por la proposición 3.1.14 sabemos que $\mathfrak{A}$ tiene $LEP(3)$ y que, si asumimos $\mathsf{MA}(\kappa)$ para $\kappa < \mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$ posee la propiedad de aproximación. Empleando ahora el teorema 3.2.1 sabemos que $K = \text{Ult}(\mathfrak{A})$ tiene la propiedad de extensión* y, aplicando ahora el teorema 2.5.5, se deduce que toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial.

$\square$

Estos resultados proporcionan los primeros ejemplos consistentes de espacios compactos no metrizables K para los cuales toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial.

Como vimos en el capítulo anterior, Correa y Tausk probaron en [9] que $C(2^{\mathfrak{c}})$ admite una suma torcida no trivial con c_0. Por tanto, la cuestión acerca de la no trivialidad de las sumas de c_0 y $C(2^{\omega_1})$ es indecidible bajo la axiomática habitual.

Además de éste, Marciszewski y Plebanek presentan en [16] otro ejemplo de compacto no metrizable para el cual existe una suma torcida no trivial de c_0 y $C(K)$, como ya hemos señalado al comienzo del capítulo. Se trata de K un espacio compacto separable disperso de altura 3 y peso ω_1.

En [10], Correa y Tausk introducen una nueva técnica para el estudio de la propiedad de extesión local (LEP) en álgebras de Boole que puede utilizarse para probar que el álgebra de los clopen de todo espacio compacto de Hausdorff K de altura finita tiene LEP. Esto implica que, bajo las condiciones adecuadas para K y el Axioma de Martin, toda suma torcida de c_0 y $C(K)$ es trivial, generalizando así el resultado de Marciszewski y Plebanek.

Apéndices

Apéndice A

Medida y análisis funcional

Este apéndice recoge algunas definiciones y resultados, sin demostración, de teoría de la medida y análisis funcional que necesitaremos para el desarrollo del trabajo.

Comenzaremos con la exposición de conceptos referentes a la teoría de la medida.

Definición A.1. *Dado un conjunto* Ω *y una* σ*-álgebra* $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$*, una medida signada será una función* $\mu : \Sigma \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *tal que*

- $\mu(\emptyset) = 0.$
- μ *es* σ*-aditiva, es decir, para cualquier colección* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos disjuntos de* Σ *se verifica*

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

- μ *sólo toma uno de los dos valores,* ∞ *ó* $-\infty$*.*

Para evitar casos triviales supondremos que siempre existe $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \infty$.

Llamaremos espacio de medida a una terna (Ω, Σ, μ), donde Σ es una σ-álgebra sobre Ω y μ es una medida signada sobre la σ-álgebra.

Diremos que μ es una medida positiva si es una medida signada que toma valores en $[0, \infty]$.

Una medida signada μ en Ω será finita si $\mu(\Omega) < \infty$ y localmente finita si todo punto del espacio de medida existe un entorno de medida finta.

Teorema A.2. (Teorema de descomposición de Hahn) *Si* $\mu : \Sigma \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *es una medida, entonces existen* $\Omega_1, \Omega_2 \in \Sigma$ *con* $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$*,* $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *tales que*

- $\mu(A) \geq 0, \forall A \subseteq \Omega_1$
- $\mu(A) \leq 0, \forall A \subseteq \Omega_2.$

Observación A.3. *La descomposición de* Ω *en parte positiva y parte negativa es esencialmente única.*

Dada una medida μ *y su descomposición de Hahn* $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ *podemos considerar dos medidas no negativas* $\mu_1, \mu_2 : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ *definidas por*

$$\mu_+(A) = \mu(A \cap \Omega_1)$$
$$\mu_-(A) = -\mu(A \cap \Omega_2)$$

que cumplen $\mu = \mu_+ - \mu_-$*.*

Definición A.4. *Si* $\mu : \Sigma \longrightarrow [-\infty, \infty]$ *es una medida y* $A \in \Sigma$ *llamamos variación de* μ *en* A *a*

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(B_n)| : B_1, B_2, ... \in \Sigma,\ B_i \in A,\ B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j \right\}$$

Además, se cumple que si $\mu = \mu_+ - \mu_-$ es la descomposición de Hahn de μ y $A \in \Sigma$ entonces $|\mu|(A) = \mu_+(A) - \mu_-(A)$.

Definición A.5. *Se denomina medida de Borel en* Ω *a toda medida signada sobre la* σ*-álgebra de todos los conjuntos de Borel de un espacio compacto Hausdorff* Ω.

Definición A.6. *Un conjunto de Borel* E *se dirá regular exteriormente si* $\mu(E) = \text{ínf}\{(\mu(V) : E \subset V, V \text{ abierto}\}$ *y regular interiormente si* $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compacto}\}$.

Si todo conjunto medible de Ω *es simultáneamente regular interior y exteriormente, se dirá que* μ *es una medida regular.*

Definición A.7. *Una medida de Borel* μ *se dirá que es una medida de Radon si es regular y localmente finita.*

Definición A.8. *Llamaremos espacio medible a* (Ω, Σ)*, donde* Ω *es un conjunto y* Σ *la* σ*-álgebra de subconjuntos de* Ω.

Definición A.9. *Si* (Ω, Σ) *y* (Ω', Σ') *son espacios medibles diremos que* $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ *es medible si para todo* $A \in \Sigma'$ *se cumple que* $f^{-1}(A) \in \Sigma$.

Veamos ahora algunas definiciones y resultados de análisis funcional que necesitaremos.

Porposición A.10. *Sea* $T : X \longrightarrow Y$ *un operador lineal entre espacios de Banach. Se tiene que* T *es continuo si y sólo si existe una constante* $M \geq 0$ *tal que*

$$||Tx|| \leq M||x|| \; \forall x \in X.$$

La condición anterior es equivalente a que T esté acotado en la bola unidad B_X, por esta razón a los operadores lineales y continuos entre espacios de Banach se les denomina **operadores acotados**.

Por otra parte, si el espacio de llegada es un cuerpo, en nuestro caso $\mathbb{R}$, se le denomina **funcional** para diferenciarlo.

Definición A.11. *Sea* $(X, ||\cdot||)$ *un espacio normado. Llamaremos espacio dual, y lo denotaremos por* X^**, al espacio vectorial de todos los funcionales lineales y continuos en* X*, dotado con la norma dual* $||f||^* = \sup_{x \in B_X} |f(x)|$.

Definición A.12. *Dada una sucesión* (x_n^*) *en el dual, podemos definir una seminorma en* X *como* $N(x) = \sup\{|x_n^*(x)| : n \in \omega\}$*. Cuando esta seminorma coincide con la norma original* $N(x) = ||x||$ *decimos que la sucesión es 1-normante. Cuando* $N(x)$ *es una norma equivalente a* $||x||$*, es normante.*

Porposición A.13. X^* *es un espacio de Banach para todo espacio normado* X.

El teorema de Hahn-Banach tiene distintas versiones. La forma que usaremos en este trabajo es la siguiente versión analítica:

Teorema A.14. (Teorema de Hahn-Banach). *Sea Y un subespacio de un espacio normado X. Si $T \in Y^*$, entonces existe $\tilde{T} \in X^*$ tal que $\tilde{T}|_Y = T$ y $||T|| = ||\tilde{T}||$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "T"'] & X \arrow[dl, dashed, "\tilde{T}"] \\ \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

Porposición A.15. *Sea X un espacio de Banach. Si X^* es separable, entonces X es separable.*

Porposición A.16. *$c_0^* = \ell_1$, en el sentido de que para toda $f \in c_0^*$ existe una única $(a_i) \in \ell_1$ tal que $f(x) = \sum a_i x_i$ para todo $x = (x_i) \in c_0$, y la aplicación $f \mapsto (a_i)$ es una isometría lineal de c_0^* en ℓ_1.*

Porposición A.17. *$\ell_1^* = \ell_\infty$, en el sentido de que para toda $f \in \ell_1^*$ existe una única $(a_i) \in \ell_\infty$ tal que $f(x) = \sum a_i x_i$ para todo $x = (x_i) \in \ell_1$, y la aplicación $f \mapsto (a_i)$ es una isometría lineal de ℓ_1^* en ℓ_∞.*

Teorema A.18. (Teorema de la aplicación abierta). *Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador acotado. Entonces son equivalentes:*

(i) T es suprayectiva.

(ii) T es abierta.

Apéndice B

Topología

Este apéndice está destinado a la recopilación de nociones, conceptos básicos y resultados, sin demostración, de topología que nos resultarán de utilidad a lo largo del desarrollo del trabajo.

Definición B.1. *Diremos que β es una base de la topología τ si y sólo si para todo punto p contenido en un abierto U existe $B \in \beta$ tal que $p \in B \subset U$.*

Definición B.2. *Dados un espacio topológico y un punto $p \in X$, una base de entornos de p es una familia $\beta(p)$ de subconjuntos de X tal que para todo entorno V de p existe $U \in \beta(p)$ tal que $U \subseteq V$.*

Definición B.3. *Dado un espacio topológico X la clausura de un subconjunto S, denotada como $\overline{S}$, es el menor conjunto cerrado que contienen a S. En otras palabras, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a S.*

El interior de S lo representaremos como $int(S)$ y es el mayor abierto contenido en S, o dicho de otra forma, la unión de todos los abiertos contenidos en S.

Definición B.4. *Un espacio métrico X es precompacto si para todo $\varepsilon > 0$ existe una cantidad finita de puntos $x_1, ..., x_n$ tales que $X = \bigcup\{B_\varepsilon(x_i) : 1 \leq i \leq n\}$.*

Definición B.5. *Un espacio topológico K será compacto si todo cubrimiento por abiertos de K admite un subrecubrimiento finito.*

Definición B.6. *Un conjunto $D \subseteq X$ de un espacio topológico se dice denso si $\overline{D} = X$.*

Definición B.7. *Un espacio topológico se dirá separable si tiene un subconjunto denso y numerable.*

Teorema B.8. *Todo espacio métrico compacto es precompacto.*

Teorema B.9. *Todo espacio métrico precompacto es separable. En particular, todo espacio métrico compacto es separable.*

Definición B.10. *Dados un espacio topológico X y un subconjunto $S \subseteq X$, un punto $p \in X$ será un punto de acumulación de S si cualquier entorno U de p contiene puntos de S distintos a p, es decir, $(U \setminus \{p\}) \cap S \neq \emptyset$.*

Un punto $p \in S$ se dirá aislado si existe un entorno U de p tal que $U \cap S = \{p\}$.

Definición B.11. *Una separación de un espacio topológico X es un par U, V de subconjuntos abiertos y disjuntos de X cuya unión sea X.*

Definición B.12. *En base a esto, diremos que un espacio X es conexo si no existe ninguna separación, es decir, si y sólo si los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados en X -o clopen- son el vacío y el propio X.*

Por otra parte, un espacio será totalmente disconexo si los conjuntos unipuntuales son los únicos subconjuntos conexos, lo cual es equivalente a decir que cada punto de X tiene una base de entornos que son abiertos y cerrados en X. El conjunto de Cantor 2^ω es un ejemplo.

Ahora introduciremos lo que se conoce como **axiomas de separación** en topología. Un espacio topológico X se dice

- T_0 si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existe un abierto U tal que o bien $x \in U$ e $y \notin U$ o bien $x \notin U$ e $y \in U$.
- T_1 si para todo $x, y \in X$, $x \neq y$, existe un abierto U tal que $x \in U$ e $y \notin U$.
- T_2 o Hasudorff si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen U, V abiertos tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- regular si para todo $x \in X$ y para cualquier cerrado C de X que no contenga al punto x, existen abiertos U, V tales que $x \in U$, $C \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- T_3 si X es regular y T_2.
- normal si para todo par de cerrados disjuntos $C, C' \subset X$, existen U, V abiertos disjuntos tales que $C \subset U$, $C' \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.
- T_4 si es normal y T_2.

La jerarquía de estos axiomas es la que sigue

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Porposición B.13. *Si K es compacto y T_2, entonces K es T_4.*

Teorema B.14. (Teorema de extensión de Tietze). *Sea K compacto y $L \subset K$ cerrado. Para toda función continua $f : L \longrightarrow [a, b]$ existe una función continua $g : K \longrightarrow [a, b]$ tal que $g|_L = f$.*

Lema B.15. (Lema de Urysohn). *Dos subconjuntos A, B de un espacio topológico normal X estarán separados por una función si existe una función continua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(a) = 0$ para todo $a \in A$ y $f(b) = 1$ para todo $b \in B$.*

Dos subconjuntos A, B de un espacio topológico X se dice que están separados por entornos si existen U, V entornos de A, B respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$.

Definición B.16. *Se define el peso de un espacio topológico X como la menor cardinalidad de una base de la topología.*

Definición B.17. *La densidad de un espacio topológico X es la menor cardinalidad de un conjunto denso.*

Así, si X es separable su densidad será numerable.

Definición B.18. *Dado un espacio topológico X se define la derivada de Cantor-Bendixson de X como $X' = X \setminus \{\text{puntos aislados de } X\}$.*

Se cumple que $X'' = X^{(2)} = X' \setminus \{\text{puntos aislados de } X\}$ y, en general, la derivada de Cantor-Bendixon n-ésima $X^{(n)}$ se define de manera análoga.

Un compacto se dirá de altura finita si existe un n tal que $X^{(n)} = \emptyset$; y se llamará altura de X al $\text{mín}\{n : X^{(n)} = \emptyset\}$.

Definición B.19. *Diremos que un espacio topológico X es disperso o scattered si cumple que todo subconjunto no vacío contiene un punto aislado.*

Definición B.20. *Un conjunto será F_σ si es la unión numerable de conjuntos cerrados.*

Un conjunto será G_δ si es la intersección numerable de conjuntos abiertos.

Definición B.21. *Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) dos espacios topológicos. Una función $f : X \longrightarrow Y$ será continua si para todo abierto U de Y su antiimagen por f, $f(U)^{-1}$ es abierto en Y.*

Definición B.22. *Sean X, Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$; f será un homeomorfismo si se cumple que*

- *f es biyectiva,*
- *f es continua y*
- *la inversa de f es continua.*

Definición B.23. *Llamaremos espacio metrizable a un espacio topológico homeomorfo a un espacio métrico.*

Apéndice C

Extensiones comunes acotadas

En este apéndice enunciaremos algunas consecuencias de un resultado de Basile, Rao y Shortt [4] acerca de extensiones comunes de medidas signadas finitamente aditivas.

Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra de Boole de conjuntos de X y $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{B}$ dos subálgebras. Consideremos $\nu_i \in M(\mathfrak{B}_i), i = 1, 2$, donde las medidas ν_1, ν_2 son compatibles, es decir, para todo $B \in \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ se cumple $\nu_1(B) = \nu_2(B)$.

Sea η una función definida en $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ por $\eta(B) = \nu_1(B)$ para $B \in \mathfrak{B}_1$ y $\eta(B) = \nu_2(B)$ para $B \in \mathfrak{B}_2$.
Definimos

$$SC(\nu_1, \nu_2) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{n} |\eta(B_{i+1}) - \eta(B_i)| \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todo $n \geq 0$ y todas las cadenas ascendentes $\emptyset = B_0 \subseteq B_1 \subseteq ... \subseteq B_{n+1} = X$ de $\mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$.

Por el teorema 1.5 de [4] sabemos que existe una extensión común de ν_1, ν_2 a una medida $\lambda \in M(\langle \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2 \rangle)$ tal que $||\lambda|| = SC(\nu_1, \nu_2)$. Claramente, podemos extender λ a $\mathfrak{B}$ preservando su norma.

Lema C.1. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra finita que contenga N átomos. Supongamos que $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \subseteq \mathfrak{B}$ son subálgebras y sean $\nu_i \in M(\mathfrak{B}_i)$, $i = 1, 2$ dos medidas consistentes y $\delta > 0$.*

a) Si $|\nu_i(B)| < \delta$ para $B \in \mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2$, entonces existe una extensión común de ν_1, ν_2 a $\lambda \in M(\mathfrak{B})$ tal que $||\lambda|| \leq 2N\delta$.

b) Si $\lambda \in M(\mathfrak{B})$ es una medida tal que $|\lambda(B) - \nu_i(B)| < \delta$ para $B \in \mathfrak{B}_i$, $i = 1, 2$, entonces existe una extensión común de ν_1, ν_2 a $\lambda' \in M(\mathfrak{B})$ tal que $||\lambda - \lambda'|| \leq 2N\delta$.

c) Bajo las condiciones de b), si además ν_1, ν_2 y λ toman valores racionales existe dicha λ' e igualmente toma valores racionales únicamente.

Lema C.2. *Sea $\mathfrak{B}$ un álgebra finita. Para toda subálgebra $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ y una medida $\nu \in M(\mathfrak{C})$, si para todo $\delta > 0$ existe $\lambda \in M_1(\mathfrak{B})$ tal que $|\lambda(C) - \nu(C)| < \delta$ para $C \in \mathfrak{C}$, entonces existe una extensión de ν a $\mu \in M(\mathfrak{B})$ tal que $||\mu|| \leq \max(1, ||\nu||)$ y $|\mu(B) - \lambda(B)| \leq 3\delta$ para todo $B \in \mathfrak{B}$.*

Si además ν y λ toman valores racionales, entonces existe tal μ tomando valores racionales.

Consideremos el siguiente conjunto en un espacio euclídeo:

$$T(a,b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n : \sum_{j \leq n} x_{ij} = a_i \text{ para } i \leq m, \sum_{i \leq m} x_{ij} = b_j \text{ para } j \leq n \right\}.$$

Lema C.3. *Para $a \in \mathbb{R}^m$ y $b \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum_{i \leq m} a_i = \sum_{j \leq n} b_j$ existe $x \in T(a,b)$ satisfaciendo*

$$\sum_{i,j} |x_{ij}| \leq \text{máx}(\sum_{i \leq m} |a_i|, \sum_{j \leq n} |b_j|).$$

Bibliografía

[1] Albiac, F., & Kalton, N. J. (2016). *Topics in Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 233. Springer.

[2] Argyros, S., Mercourakis, S., & Negrepontis, S. (1982). *Analytic properties of Corson-compact spaces.* Proc. Fifth Prague Topological Symposium, Heldermann Verlag, Berlin, 12-23.

[3] Banach, S. (1932). *Théorie des opérations linéaires.* Monografie Matematyczne 1.

[4] Basile, A., Bhaskara Rao, K. P. S., & Shortt, R. M. (1994). *Bounded common extensions of charges.* Proceedings of the American Mathematical Society, 121, 137-143.

[5] Cabello, F., Castillo, J., Kalton, N., & Yost, D. (2003). *Twisted sums with C(K) spaces.* Transactions of the American Mathematical Society, 355, 4523-4541.

[6] Cabello, F., & Castillo, J. M. F. & Yost, D. (2000). *Sobczyk's theorems from A to B.* Extracta mathematicae, 15, 391-420.

[7] Castillo, J. M. (2016). *Nonseparable C(K)-spaces can be twisted when K is a finite height compact.* Topology and its Applications, 198, 107-116.

[8] Castillo, J. M., & González, M. (1997). *Three-space Problems in Banach Space Theory.* Lecture Notes in Mathematics, 1667. Springer-Verlag, Berlin.

[9] Correa, C., & Tausk, D. V. (2016). *Nontrivial twisted sums of c_0 and $C(K)$.* Journal of Functional Analysis, 270, 842-853.

[10] Correa, C., & Tausk, D. V. (2018). *Local extension property for finite height spaces.* arXiv preprint arXiv:1801.08619.

[11] Drygier, P., & Plebanek, G. (2017). *Compactifications of ω and the Banach space c_0.* Fundamenta Mathematicae 237, 165-186.

[12] Fabian, M., Habala, P., Hájek, P., Santalucía, V. M., Pelant, J., & Zizler, V. (2001). *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* CMS Books in Mathematics 8. Springer.

[13] Jané, I. (1989). *Álgebras de Boole y lógica* (Vol. 5). Edicions Universitat Barcelona.

[14] Jech, T. (2003). *Set theory.* The third millennium edition, revised and expanded. Springer Monographs in Mathematics. Springer.

[15] Kalenda, O. F. (2000). *Valdivia Compact Spaces in topology and Banach Space Theory.* Extracta mathematicae, 15, 1-86.

[16] Marciszewski, W., & Plebanek, G. (2018). *Extension operators and twisted sums of* c_0 *and* $C(K)$ *spaces.* Journal of Functional Analysis 274, no. 5, 1491–1529.

[17] Monk, J. D., & Bonnet, R. (1989). *Handbook of Boolean algebras* (Vol. 1). North Holland

Índice alfabético