



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Poliédrica en Optimización
Lineal y Entera

27 de junio de 2018

Autor:
Paula Segura Martínez

Director académico:
Alfredo Marín Pérez

Declaración de originalidad

Paula Segura Martínez, autora del TFM *Poliédrica en Optimización Lineal y Entera*, bajo la tutela del profesor Alfredo Marín Pérez, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

Murcia, 27 de Junio de 2018.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'Paula', with a stylized flourish above the name.

Paula Segura Martínez

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Conceptos básicos de teoría de grafos y poliédrica	4
2. Un contraejemplo a la conjetura de Hirsch	7
2.1. La conjetura de Hirsch y la programación lineal	8
2.2. La conjetura de los d pasos	9
2.3. El teorema generalizado de los d pasos	10
2.3.1. El teorema generalizado de los d pasos para prismatoides	13
2.4. El contraejemplo de Santos	18
3. Obtención de facetas para un problema de localización de concentradores	29
3.1. El problema de empaquetamiento	30
3.2. Modelo y formulación del problema	34
3.2.1. Formulación básica	35
3.2.2. Formulación como un problema de empaquetamiento	36
3.2.3. Reforzamiento de la formulación	37
3.3. Obtención de facetas clique	39
4. Comparativa de formulaciones para un problema de localización de plantas	55
4.1. El problema de localización de plantas simple en un grafo dirigido completo . . .	56
4.2. El problema de localización de plantas simple en un grafo dirigido no completo .	63
Referencias	67

Capítulo 1

Introducción

A lo largo de este trabajo, vamos a abordar algunas cuestiones relacionadas con la región poliédrica que genera el conjunto de soluciones factibles de un problema de optimización lineal. La optimización lineal es una rama de las matemáticas cuyo fin es el de maximizar o minimizar una función lineal, denominada función objetivo, y donde las variables de dicha función están sujetas a una serie de restricciones expresadas mediante un sistema de desigualdades también lineales. El conjunto de valores que pueden tomar estas variables para los que se satisfacen todas las restricciones del problema forman la región factible. Así, se dice que una solución es factible si pertenece a dicha región.

Entre los principales fundadores de esta técnica se encuentra George Dantzig, quien publicó en 1947 el conocido método *símplex*. Este algoritmo resolvía los problemas de optimización lineal de manera muy eficiente, como ilustró en [10] con la resolución de un problema de 70 variables. John von Neumann desarrolló ese mismo año la teoría de la dualidad en programas lineales, y Leonid Kantoróvich [14], un matemático ruso que ya antes de Dantzig utilizaba técnicas similares, recibió en 1975 el Premio Nobel de Economía.

En 1979, Leonid Khachiyan [16] diseñó el método del elipsoide, a través del cual demostró que el problema de la programación lineal es resoluble en tiempo polinómico, aunque nunca tuvo demasiadas implicaciones prácticas debido a su compleja implementación. Más tarde, en 1984, Narendra Karmarkar [15] introdujo el método de punto interior para resolver problemas de programación lineal, lo cual constituiría un gran avance en los principios teóricos y prácticos en el área. A pesar de que no se conoce si el método *símplex* es un algoritmo de complejidad polinómica, esto es, no sabemos si un problema de optimización lineal con un número d de variables y n restricciones lineales puede ser resuelto con este algoritmo en un tiempo que dependa polinómicamente de n y d , en la práctica es un método muy rápido.

En el segundo capítulo de este trabajo, vamos a estudiar una conjetura motivada originariamente por el análisis del método *símplex* en optimización lineal, y que a día de hoy ha conseguido atraer la atención de numerosos matemáticos, tanto puros como aplicados: la conjetura de Hirsch.

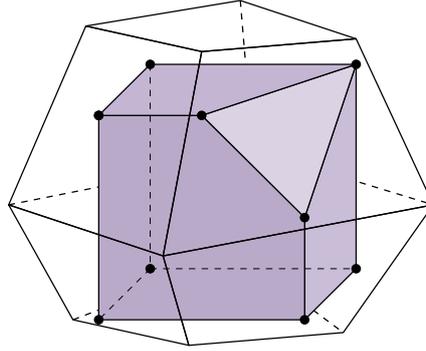


Figura 1.1: La envolvente convexa de los puntos enteros de una región poliédrica está contenida en el conjunto factible del problema relajado

La región factible de un problema de optimización lineal es un poliedro. La conjetura de Hirsch establece una cota superior polinómica del número de aristas que hay que recorrer necesariamente al conectar los dos puntos del poliedro más alejados entre sí. La prueba, o refutación, de este resultado ha sido motivo de estudio de muchos matemáticos durante los últimos 50 años. En 2010, Francisco Santos encuentra un politopo de dimensión 43 con 86 facetas que viola esta conjetura [29].

Para construir su contraejemplo a la conjetura, Santos utiliza una generalización del teorema de los d pasos de Klee y Walkup [20], y demuestra la existencia del contraejemplo aplicando 38 veces dicho teorema a un politopo de dimensión 5 con 48 facetas que viola cierta propiedad. A lo largo del capítulo, detallaremos el estudio que lleva a cabo Santos para aportar el contraejemplo, así como los resultados ya conocidos en la literatura relacionados con la conjetura de los que parte.

En el tercer y cuarto capítulo del trabajo, vamos a centrar nuestra atención en las regiones factibles de problemas de optimización lineal donde las variables sean enteras. Los problemas de optimización lineal entera son una extensión de los problemas de optimización lineal en los que algunas de las variables (o todas) toman valores enteros. Con frecuencia, estas variables enteras sólo van a tomar los valores cero o uno, lo que permite a las variables representar condiciones lógicas.

En un primer momento, podríamos pensar que resulta más fácil resolver problemas con restricciones de integridad, ya que transforman un problema continuo en un problema discreto. Sin embargo, los algoritmos que permiten resolver los problemas de optimización lineal entera requieren mucho más tiempo computacional.

Imponer la restricción de integridad a las variables agrega nuevas desigualdades al modelo lineal, lo que conlleva a una reducción del tamaño de la región factible (Figura 1.1). Así, en un problema en el que estemos maximizando (minimizando), las soluciones del problema relajado (esto es, sin restricciones de integridad) van a ser siempre cotas superiores (inferiores) de la solución óptima del problema entero.

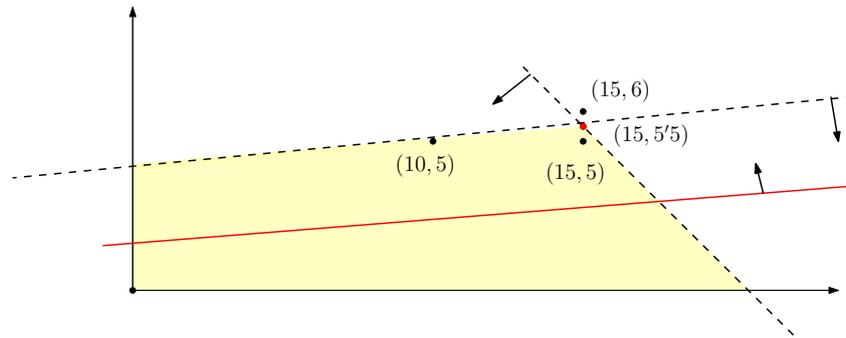


Figura 1.2: Región factible y candidatos a soluciones óptimas

La primera tentación a la hora de abordar la resolución de un problema de optimización lineal entera puede ser la de redondear la solución obtenida al relajar la condición de integridad. Sin embargo, éste no es un buen procedimiento, pues la mayoría de las veces no conduce a la solución óptima, e incluso puede que esta solución redondeada no se encuentre dentro del conjunto factible de soluciones del problema. Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema de optimización lineal entera:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & x_1 - 11x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -x_1 + 10x_2 \leq 40 \\ & 10x_1 + 10x_2 \leq 205 \\ & x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

La solución óptima de la relajación lineal del problema es $x_1 = 15, x_2 = 5.5$ (véase Figura 1.2). Si redondeamos x_2 al valor 6, el punto $(15, 6)$ queda fuera de la región factible del problema (zona sombreada en la figura). Si tomamos $x_2 = 5$, el valor de la función objetivo en dicho punto es de -40 . Sin embargo, la solución $x_1 = 10, x_2 = 5$ es también factible, y devuelve un valor de la función objetivo de -45 , que es más pequeño.

Para la resolución de los problemas de programación lineal entera existen diferentes métodos. Muchos de estos métodos parten de la resolución del problema lineal dejando a un lado las restricciones de integridad y buscando el mejor valor para las variables reales. Partiendo del supuesto de que la solución entera no debe estar muy lejos, se aplican diferentes técnicas que permiten llegar al óptimo entero.

Algunos de los procedimientos más utilizados son los métodos de hiperplanos de corte, que introducen nuevas restricciones al problema relajado, hasta lograr que la solución óptima del nuevo problema sea entera, o los métodos de ramificación y acotación, que dividen el problema en subproblemas menores, descartando algunos de ellos en los que se sepa que no va a estar el óptimo gracias a las cotas dadas por la relajación lineal.

Una manera de facilitar la obtención de las soluciones óptimas a estos métodos es conseguir generar una región factible del problema relajado lo más ajustada posible a la envolvente convexa de las soluciones enteras. Cuando tenemos un número elevado de variables, obtener de manera

explícita dicha envolvente convexa no resulta posible. Algo que sí podemos hacer es añadir a la formulación del problema nuevas desigualdades válidas que no puedan ser mejoradas y que delimiten parte de la envolvente convexa.

En el tercer capítulo, vamos a enfocar nuestro estudio en la obtención de nuevas desigualdades para un problema de localización en optimización lineal entera, el problema de localización de concentradores sin capacidades. En este capítulo, formularemos el problema de localización como un problema de empaquetamiento, el cual presenta una estructura que ha sido estudiada en la literatura y para el que, como detallaremos más adelante, se conocen algunos procedimientos para la obtención de facetas del poliedro asociado. Muchos de los resultados que obtengamos en este capítulo, en el que el estudio que llevemos a cabo será meramente teórico, fueron propuestos por Marín en [23]. En el cuarto capítulo, realizaremos un estudio computacional para ilustrar cómo afecta a la resolución de los problemas de optimización la inclusión de nuevas desigualdades a la formulación, considerando el problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido.

Antes de continuar, vamos a incluir en este capítulo algunas definiciones formales de conceptos que ya hemos introducido, así como una serie de nociones básicas que utilizaremos a lo largo del trabajo.

1.1. Conceptos básicos de teoría de grafos y poliédrica

Definición 1.1.1 Una colección finita de vectores $w^1, \dots, w^k \in \mathbb{R}^n$ es **linealmente independiente** si la única solución de $\sum_{i=1}^k \lambda_i w^i = 0$ es $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$. En otro caso, los vectores son **linealmente dependientes**.

Definición 1.1.2 Una colección finita de vectores $w^1, \dots, w^k \in \mathbb{R}^n$ es **afínmente independiente** si la única solución de $\sum_{i=1}^k \lambda_i w^i = 0$ con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ es $\lambda_i = 0, i = 1, \dots, k$.

Proposición 1.1.3 Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- w^1, \dots, w^k son afínmente independientes.
- $w^2 - w^1, \dots, w^k - w^1$ son linealmente independientes.
- $(w^1, 1), \dots, (w^k, 1)$ son linealmente independientes.

Definición 1.1.4 Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para todo $w, y \in S$ y para todo $\lambda \in [0, 1]$ se verifica que $\lambda w + (1 - \lambda)y \in S$.

Definición 1.1.5 Sean $w^1, \dots, w^k \in \mathbb{R}^n$, y $\lambda \in \mathbb{R}_+^k$ tal que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Entonces, el vector $\sum_{i=1}^k \lambda_i w^i$ se dice que es una **combinación convexa** de w^1, \dots, w^k .

Definición 1.1.6 El conjunto de todas las combinaciones convexas de los vectores w^1, \dots, w^k se denomina **envolvente convexa**, y se denota $\text{conv}(w^1, \dots, w^k)$.

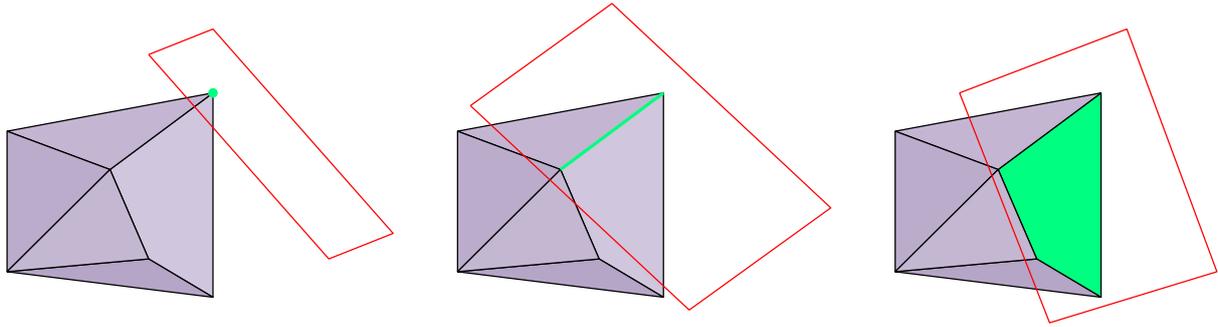


Figura 1.3: Vértice, cara (arista) y faceta de un politopo en \mathbb{R}^3

La envolvente convexa de dos puntos es un segmento. Un conjunto es convexo si, y sólo si, para cualquier par de puntos del conjunto, el segmento que los une yace íntegramente en el conjunto.

Definición 1.1.7 Un **poliedro** es un conjunto de la forma

$$\{w \in \mathbb{R}^n : Aw \leq b\} = \{w \in \mathbb{R}^n : a^i w \leq b^i, \forall i \in \{1, \dots, m\}\},$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$.

Si existe una constante C de manera que $|w_i| < C$ para todo $w \in P$ y para todo i , entonces el poliedro es acotado. A los poliedros acotados se les denomina **polítopos**.

Todo poliedro es un conjunto convexo.

Definición 1.1.8 Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ tiene **dimensión k** si el máximo número de puntos afínmente independientes en P es $k + 1$.

Definición 1.1.9 Una **desigualdad**

$$\pi w \leq \pi_0,$$

con $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi_0 \in \mathbb{R}$, se denomina **desigualdad válida** del poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$ si es satisfecha por todos los puntos de P .

Definición 1.1.10 Si $\pi w \leq \pi_0$ es una desigualdad válida del poliedro P , al conjunto

$$F = \{w \in P : \pi w = \pi_0\}$$

se le llama **cara** de P . Si $F \neq \emptyset$ y $F \neq P$, decimos que la cara es **propia**.

El número de caras distintas de un poliedro P es finito.

Definición 1.1.11 Una cara F del poliedro P es una **faceta** de P si $\dim(F) = \dim(P) - 1$. Abusando de notación, también se llama **faceta** a la desigualdad $\pi w \leq \pi_0$ que define a F .

Las caras de dimensión 0 se denominan vértices, y las de dimensión 1, aristas (Figura 1.3).

Definición 1.1.12 Un grafo simple no dirigido es un par (V, E) formado por un conjunto finito $V \neq \emptyset$, a cuyos elementos denominamos vértices o nodos, y un conjunto de aristas o pares no ordenados de nodos adyacentes, E .

Definición 1.1.13 Una arista $e \in E$ es incidente con un vértice $v \in V$ si v es uno de sus extremos. En ese caso, se dice que e incide en v .

Definición 1.1.14 Dado un grafo $G = (V, E)$, diremos que otro grafo $G' = (V', E')$ es subgrafo de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

Definición 1.1.15 Una cadena o camino es un grafo (V, E) definido por $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n)\}$, es decir, una sucesión alternante de vértices y aristas distintos que comienza en un vértice y termina en otro, tal que cada arista incide en el nodo anterior y posterior de la sucesión. Un camino con m aristas se dice que tiene longitud m .

Definición 1.1.16 Un grafo dirigido es un par (V, A) , donde V es el conjunto de vértices o nodos y A es un subconjunto de pares ordenados de $V \times V$, cuyos elementos se denominan arcos.

En un grafo no dirigido, las aristas se representan como líneas sin dirección, mientras que en un grafo dirigido, representaremos los arcos mediante flechas.

Capítulo 2

Un contraejemplo a la conjetura de Hirsch

En este capítulo, vamos a estudiar el origen de la conjetura de Hirsch sobre el posible diámetro del grafo de un politopo, y su relación con la programación lineal, en particular con el método simplex, así como las ideas y resultados principales que llevaron a Francisco Santos, catedrático de Geometría y Topología en la Universidad de Cantabria, a obtener en [29] un primer contraejemplo a esta conjetura.

Dado un politopo P , sus vértices y aristas forman un grafo finito no dirigido. Si V es el conjunto de vértices de dicho grafo, la distancia entre dos vértices $u, v \in V$, que denotaremos $\delta_P(u, v)$, es la longitud o número de aristas del camino más corto desde u hasta v . Se denomina diámetro combinatorio de un politopo P a la máxima distancia entre sus vértices:

$$\Delta(P) = \text{máx}\{\delta_P(u, v) : u, v \in V\}.$$

Denotaremos por $\Delta(n, d)$ al mayor diámetro combinatorio posible del grafo de un politopo de dimensión d definido por n desigualdades.

En 1957, Warren M. Hirsch formuló en una carta dirigida a George Dantzig, en relación con su reciente desarrollo del método simplex, la siguiente conjetura:

Conjetura de Hirsch (1957). *El diámetro (combinatorio) del grafo de un politopo de dimensión d con n facetas no puede ser mayor que $n - d$:*

$$\Delta(n, d) \leq n - d.$$

En otras palabras, esta conjetura establecía que cada par de vértices de un politopo de dimensión d definido por n desigualdades puede ser conectado por un camino de, como mucho, $n - d$ aristas. Originalmente, la conjetura no distinguía si las regiones factibles estaban acotadas o no, es decir, hacía referencia tanto a politopos (convexos) como a poliedros no acotados. Klee

y Walkup probaron en [20] que la conjetura no se cumplía en el caso no acotado para poliedros de dimensión mayor o igual a 4. Por tanto, a lo largo del capítulo vamos a considerar únicamente la versión acotada de la conjetura.

Diremos que un politopo P de dimensión d con n facetas es *de Hirsch* si verifica la conjetura, es decir, si $\Delta(P) \leq n - d$, y que no lo es en caso contrario. En las dos primeras secciones del capítulo, veremos la relación que tiene la Conjetura de Hirsch con la complejidad del método símplex en programación lineal, e ilustraremos algunos de los resultados que se han obtenido en el estudio de la conjetura y en el intento de acotar el diámetro de los politopos, antes de la aparición del primer contraejemplo. En las secciones 2.3 y 2.4, abordaremos el contraejemplo que aporta Santos en 2010. La obtención del contraejemplo tiene dos partes: por un lado, el teorema generalizado de los d pasos para unos politopos particulares, a los que Santos denomina husos, y que probaremos para sus correspondientes politopos duales, los prismatoides; por otro lado, en relación con dicho teorema, la construcción de un politopo de dimensión 43 con 86 facetas que no es *de Hirsch*.

2.1. La conjetura de Hirsch y la programación lineal

El método símplex, desarrollado por George Dantzig en 1947, ha sido considerado como uno de los algoritmos más influyentes del siglo XX. Durante más de 30 años, fue el único método aplicable para resolver problemas grandes de programación lineal.

Este algoritmo funciona en dos etapas. En primer lugar, el método símplex busca un vértice arbitrario del dominio o región factible que definen las restricciones del problema. Este dominio es un poliedro, que puede estar o no acotado. Una vez hecho esto, va moviéndose de un vértice a otro del poliedro recorriendo en cada paso una arista, y buscando siempre incrementar el valor de la función que queremos maximizar.

A la hora de escoger a qué vértice vecino se va a dirigir en cada iteración, hay diferentes criterios de elección o *reglas de pivote*. En el momento en que un nuevo paso no mejore el valor de la función objetivo, el algoritmo se detiene al haber alcanzado el máximo global.

A día de hoy, todavía no sabemos si el método símplex es un algoritmo de complejidad polinómica, es decir, no sabemos si es capaz de resolver un problema de programación lineal que tenga d variables y n restricciones en un tiempo que dependa de manera polinómica de esos parámetros n y d . Una de las razones principales de tal desconocimiento es que, dada una región poliédrica, no se puede afirmar que su diámetro, esto es, el máximo número de aristas que necesitamos recorrer para viajar desde un vértice a otro por el camino más corto, sea una función polinómica dependiente de n y d .

Para poder acotar la complejidad del método símplex necesitamos primero ser capaces de acotar el diámetro de los grafos de los politopos. Aquí entra en juego la conjetura de Hirsch. En

el peor de los casos, el diámetro de un politopo nos proporciona una cota inferior del número de pasos que necesitaremos dar en el método símplex. Si se demuestra que el diámetro de cualquier politopo es polinómico en n y d , cabe la posibilidad de que existan reglas de pivote que permitan al algoritmo alcanzar el óptimo en un tiempo polinómico. El desarrollo del algoritmo y su complejidad van a depender de la regla de pivote que elijamos.

Si por el contrario encontramos algún politopo cuyo diámetro dependa exponencialmente de los parámetros n y d , entonces la complejidad del método símplex será intrínsecamente exponencial.

2.2. La conjetura de los d pasos

A la hora de estudiar la conjetura de Hirsch, son varias las formulaciones equivalentes que se han dado para el problema. Una de ellas es la conjetura de los d pasos. Esta conjetura es un caso particular de la conjetura de Hirsch, en el que nos restringimos a politopos cuyo número de facetas es exactamente el doble que su dimensión:

Conjetura de los d pasos. *El diámetro (combinatorio) del grafo de un politopo de dimensión d con $2d$ facetas no puede ser mayor que su dimensión:*

$$\Delta(2d, d) \leq d.$$

Klee y Walkup demuestran en [20] que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\max_{d \in \mathbb{N}} \{\Delta(d + m, d)\} = \Delta(2m, m).$$

Esto equivale a decir que para cada diferencia fija $n - d$ entre el número de facetas y la dimensión del politopo, el máximo diámetro se va a alcanzar en un politopo que tenga dimensión $n - d$ y $2(n - d)$ facetas:

Lema 2.2.1 *Si $1 < d < n$, entonces $\Delta(n, d) \leq \Delta(2n - 2d, n - d)$.*

Como corolario de este resultado, Klee y Walkup obtienen la equivalencia entre ambas conjeturas [20, Teorema 2.5]:

Teorema 2.2.2 (Teorema de los d pasos) *Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\Delta(n, d) \leq n - d$ para todo n y d (Conjetura de Hirsch).
2. $\Delta(2d, d) \leq d$ para todo d (Conjetura de los d pasos).

Demostración. Si un politopo de dimensión d con n facetas verifica la conjetura de Hirsch, entonces $\Delta(n, d) \leq n - d$ para todo n y d , y en particular para $n = 2d$ se tiene que $\Delta(2d, d) \leq d$. Por otro lado, si un politopo de dimensión d con $2d$ facetas verifica la conjetura de los d pasos, sabemos por el Lema 2.2.1 que $\Delta(n, d) \leq \Delta(2n - 2d, n - d)$ y se tiene que $\Delta(n, d) \leq \Delta(2(n - d), n - d) \leq n - d$,

luego el politopo verifica también la conjetura de Hirsch. \square

--> El Teorema de los d pasos implica que para probar, o refutar, la conjetura de Hirsch, el estudio se reduce a considerar un politopo de dimensión d con $n = 2d$ facetas y ver si su diámetro está acotado por d .

Se han obtenido algunos resultados en la literatura a la hora de abordar la conjetura. La conjetura de Hirsch se cumple para $n - d \leq 6$. Klee y Walkup prueban en 1967 en [20] que $\Delta(9, 4) = \Delta(10, 5) = 5$, y con ello que la conjetura de los d pasos es cierta para $d \leq 5$. El caso $d = 6$ lo verifican más tarde Bremner y Schewe en [6]. También han sido probados algunos casos particulares. Goodey demuestra en 1972 en [11] que $\Delta(10, 4) = 5$ y $\Delta(11, 5) = 6$; Bremner y Schewe demuestran también en [6] que $\Delta(11, 4) = 6$, y Bremner et al. prueban en [5] que $\Delta(12, 4) = \Delta(12, 5) = 7$.

En cuanto a cotas superiores para $\Delta(n, d)$, no se conoce ninguna que sea polinómica en términos de n y d . Las mejores que se han encontrado hasta ahora son una cota casi-polinómica, presentada por Kalai y Kleitman en [13],

$$\Delta(n, d) \leq n^{\log(d)+2},$$

y mejorada en 2014 por Todd en [32],

$$\Delta(n, d) \leq (n - d)^{\log(d)},$$

y una cota lineal en dimensión fija probada por Barnette en [3], y mejorada por Larman y de nuevo por Barnette en [22] y [4],

$$\Delta(n, d) \leq \frac{2^{d-2}}{3}n.$$

2.3. El teorema generalizado de los d pasos

Como ya hemos visto, el Teorema de los d pasos reduce el estudio de la conjetura de Hirsch a considerar politopos con $n = 2d$. Otra reducción importante, obtenida por Klee en [17] y que probaremos más adelante, es que para cada n y d , el máximo valor de $\Delta(n, d)$ siempre se va a alcanzar en un politopo simple.

Definición 2.3.1 *Un politopo de dimensión d se dice que es **simple** si cada vértice pertenece exactamente a d facetas.*

Klee y Walkup muestran en [20] que el estudio de la conjetura de los d pasos nos conduce al estudio de unos politopos de dimensión d denominados *figuras de Dantzig*.

Definición 2.3.2 *Una **figura de Dantzig** (P, x, y) es un politopo simple P de dimensión d con $2d$ facetas de las cuales exactamente d son incidentes a un vértice x , y las otras d son incidentes a un vértice y .*

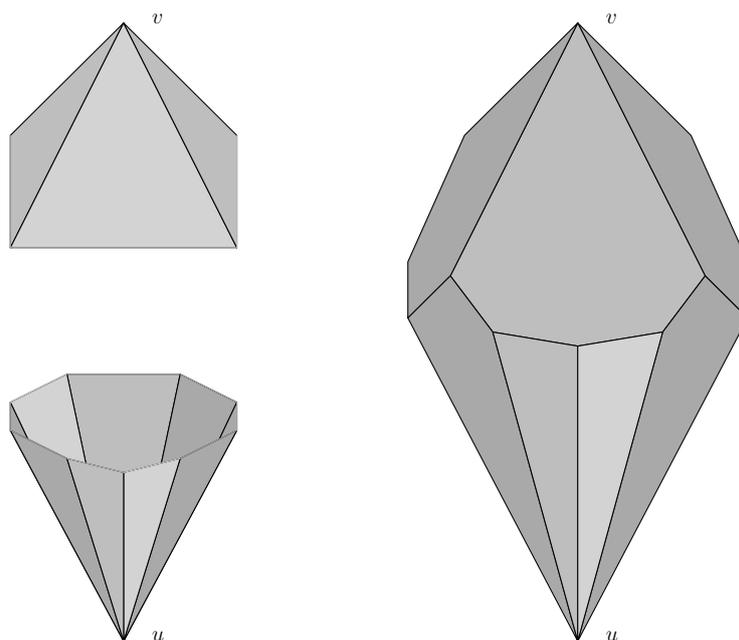


Figura 2.1: Huso obtenido al intersectar dos conos no acotados en \mathbb{R}^3

En el mismo artículo, Klee y Walkup prueban también que para cualquier politopo simple de dimensión d con $2d$ facetas, el máximo diámetro coincide con la distancia $\delta_P(x, y)$ entre dos vértices x e y que no residen en la misma faceta [20, Teorema 2.8]. Por tanto, que todas las figuras de Dantzig (P, x, y) de dimensión d verifiquen $\delta_P(x, y) \leq d$ es suficiente para que la conjetura de los d pasos sea cierta, o equivalentemente:

--> si encontramos una figura de Dantzig donde $\delta_P(x, y) > d$, entonces habremos probado que no se cumple la conjetura de los d pasos.

La primera idea que utiliza Santos para la construcción del contraejemplo es la observación de que si partimos de un politopo de dimensión d que no sea simple y tenga $n > 2d$ facetas, entonces vamos a poder obtener una figura de Dantzig simple de dimensión $n - d$ con $2n - 2d$ facetas cuyo diámetro sea mayor que su dimensión. A estos politopos de partida Santos los denomina **husos** (en inglés, *spindle*).

Definición 2.3.3 *Un huso es un politopo de dimensión d que posee dos vértices u y v con la propiedad de que toda faceta del politopo contiene exactamente a uno de ellos. A esos dos vértices los llamaremos los extremos del huso.*

Dicho de otra manera, un huso es el politopo que resulta de la intersección de dos conos poliédricos no acotados cuyos ápices son los extremos u y v (Figura 2.1) y que contiene al segmento uv . Llamaremos longitud del huso a la distancia en el grafo entre el vértice u y el vértice v , es decir, al número de pasos necesarios para ir de un extremo al otro.

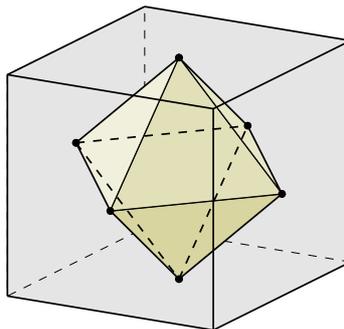


Figura 2.2: El politopo dual de un cubo es un huso de dimensión 3 con 8 facetas

Teorema 2.3.4 (Teorema generalizado de los d pasos para husos) Si P es un huso de dimensión d con $n > 2d$ facetas y longitud ℓ , entonces existe otro huso P' de dimensión $d + 1$, con $n + 1$ facetas y longitud al menos $\ell + 1$.

El modo de proceder ahora es el siguiente: vamos a ir, paso a paso, incrementando la dimensión, número de facetas y longitud de cada huso en una unidad, hasta que se alcance la igualdad $n = 2d$. Si aplicamos $n - 2d$ veces el Teorema 2.3.4, obtendremos un huso de dimensión $d + (n - 2d) = n - d$ con $2n - 2d$ facetas, cuya longitud resulta mayor o igual que $\ell + n - 2d$. Para este nuevo huso, su número de facetas duplica a su dimensión.

Si se da el caso de que el huso P de partida tiene una longitud $\ell > d$, entonces el huso P' va a tener una longitud $\ell + n - 2d > d + n - 2d = n - d$. Este huso P' viola la conjetura de los d pasos, y por tanto también la conjetura de Hirsch. Así, el Teorema 2.3.4, aplicado de manera reiterada hasta alcanzar la igualdad $n = 2d$, conduce al siguiente resultado:

Corolario 2.3.5 Si existe un huso P cuya longitud sea mayor que su dimensión, entonces existe otro huso P' que no verifica la conjetura de Hirsch.

Para probar todos estos resultados, Santos trabaja con la versión dual de la conjetura de Hirsch. En vez de ir desde un vértice del politopo hasta otro atravesando aristas, viajaremos de una faceta hacia otra cruzando caras de codimensión 2 (esto es, de dimensión $d - 2$), denominadas **crestas**.

Definición 2.3.6 Un politopo Q de dimensión d con n vértices es un politopo de Hirsch dual si bastan $n - d$ pasos duales para ir desde una faceta de Q hasta cualquier otra, donde un paso dual consiste en el movimiento desde una faceta F de Q a otra faceta adyacente F' . Estas dos facetas F y F' comparten una cresta de Q .

Q es un politopo de Hirsch dual si, y sólo si, su politopo polar es de Hirsch. El politopo dual (o polar) de un politopo dado es un politopo cuyo conjunto de vértices se corresponde con las facetas del politopo inicial (véase Figura 2.2). Hablaremos ahora de grafo dual, cuyos vértices van a ser las facetas del politopo y cuyas aristas van a ser las caras de dimensión $d - 2$ (crestas). Los husos utilizados en el teorema generalizado de los d pasos se convierten en **prismatoides** al dualizarlos.

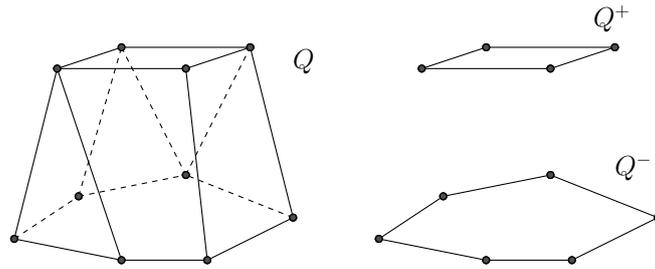


Figura 2.3: Un prismatoide

Definición 2.3.7 *Un prismatoide es un politopo Q que tiene dos facetas paralelas Q^+ y Q^- que contienen a todos los vértices, a las que llamaremos bases de Q . La anchura de un prismatoide es la distancia gráfica (dual) entre Q^+ y Q^- .*

Las facetas base de un prismatoide pueden no ser únicas. En la Figura 2.3 se muestra un prismatoide de dimensión 3.

2.3.1. El teorema generalizado de los d pasos para prismatoides

Para probar, o refutar, la conjetura (dual) de Hirsch, ahora basta con que centremos nuestra atención en politopos que tengan $2d$ vértices. Además, el máximo diámetro (dual) se va a alcanzar en los politopos duales de los politopos simples, los politopos **simpliciales**. En estos politopos, cada faceta está generada por exactamente d vértices. Para probar esta segunda reducción, necesitamos introducir una operación de empuje de vértices descrita por Klee en [18].

Definición 2.3.8 *Sea Q un politopo con conjunto de vértices V y sea $v \in V$ un vértice de Q . Diremos que un politopo Q' se obtiene a partir de otro Q empujando v si el conjunto de vértices de Q' es $(V \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$ para un cierto punto $v' \in Q$, y los únicos hiperplanos generados por vértices de Q que intersecan el segmento vv' son aquellos que contienen a v .*

Dicho de otra manera, esta operación empuja un vértice v a una nueva posición v' dentro del politopo Q (admitiendo también la frontera) pero suficientemente cerca de su posición original. Así, en caso de estar situado en la frontera, no se admite que v' se encuentre sobre una faceta de Q que no esté generada por el vértice v .

Teorema 2.3.9 (Klee, [17]) *El máximo diámetro (dual) del grafo de un politopo Q de dimensión d con n vértices se alcanza en un politopo simplicial.*

Demostración. Veamos que para cada politopo Q de dimensión d con n vértices, existe un politopo simplicial Q' con la misma dimensión y número de vértices, y cuyo máximo diámetro es, al menos, igual al máximo diámetro de Q . Utilizaremos el procedimiento de empuje de vértices que hemos descrito. Sea V el conjunto de vértices del politopo Q y supongamos que obtenemos V' a partir de V empujando un vértice $v \in V$ a una nueva posición v' . El conjunto de vértices de Q' viene

dado entonces por $V' = (V \setminus \{v\}) \cup \{v'\}$, donde v' es un punto de la envolvente convexa de V tal que el segmento vv' no interseca a ningún hiperplano generado por vértices de Q .

Supongamos ahora que S es el conjunto de vértices de una faceta del politopo $\text{conv}(V')$. Entonces, o bien $v' \notin S$ y S está contenido en el conjunto de todos los vértices de alguna faceta de Q , o bien $v' \in S$ y el conjunto $(S \setminus \{v'\}) \cup \{v\}$ está contenido en el conjunto de todos los vértices de alguna faceta de Q . Por tanto, el máximo diámetro de $\text{conv}(V')$ es mayor o igual que el máximo diámetro de $\text{conv}(V)$. Si tomamos $Q' = \text{conv}(V_0)$, donde V_0 se obtiene de V en n pasos empujando de manera sucesiva los n vértices de V , entonces Q' tiene n vértices, es simplicial, y el máximo diámetro de Q' es mayor o igual que el de Q . \square

Para probar el teorema generalizado de los d pasos para prismatoides, necesitamos establecer dos lemas previos.

Lema 2.3.10 *Sea Q' un politopo obtenido a partir de otro politopo Q tras empujar un vértice v .*

1. *Si F' es una faceta de Q' con conjunto de vértices S' y tomamos o bien $S = (S' \setminus \{v'\}) \cup \{v\}$ si $v' \in F'$, o bien $S = S'$ si $v' \notin F'$, entonces hay una única faceta $\phi(F')$ de Q que contiene al conjunto de vértices S .*
2. *La aplicación $F' \mapsto \phi(F')$ envía facetas adyacentes de Q' o bien a la misma o bien a facetas adyacentes de Q .*

Demostración. Supongamos que hemos obtenido el politopo Q' a partir de un politopo Q empujando el vértice v . Veamos qué ocurre cuando movemos de manera continua el nuevo vértice v' hacia su posición original v a través del segmento vv' . Denotaremos por $Q(t)$ al politopo que tenemos en un tiempo t , y por $F(t)$, $S(t)$ y $v(t)$ a la faceta, su conjunto de vértices y el vértice que estamos moviendo en dicho tiempo t . Así, con esta notación, $Q = Q(0)$, $Q' = Q(1)$, $v = v(0)$ y $v' = v(1)$. Como suponemos que ningún hiperplano generado por los vértices de Q interseca al segmento vv' a menos que contenga al vértice v , la combinatoria de $Q(t)$ es la misma en cada momento $t > 0$, y cambia únicamente para $t = 0$.

Cada hiperplano que define una faceta de $Q(t)$ va a tender a un hiperplano que define una faceta de $Q(0)$ (lo que prueba 1.) a menos que el conjunto de vértices $S(t)$ que genera la faceta $F(t)$ esté contenido en un plano de codimensión dos, es decir, a menos que $F(t)$ sea una pirámide con ápice en $v(t)$ sobre una cara de codimensión dos G' de Q' , con v en la envoltura afín de G' . Como suponemos que $v' \in Q$, esto no puede ocurrir, pues en dicha situación, el hiperplano H' generado por $F(t)$ no depende de t para $t > 0$ y contiene al segmento vv' . Si tomamos w el último punto donde el rayo de u a v' toca a Q , entonces w es una combinación convexa de vértices de Q distintos de v y además se encuentra en el hiperplano H' , por lo que también está en la faceta $F(t)$ para cada $t > 0$. Como w está más lejos de G' que $v(t)$, entonces $F(t)$ no puede ser una pirámide con ápice en $v(t)$ y base G' .

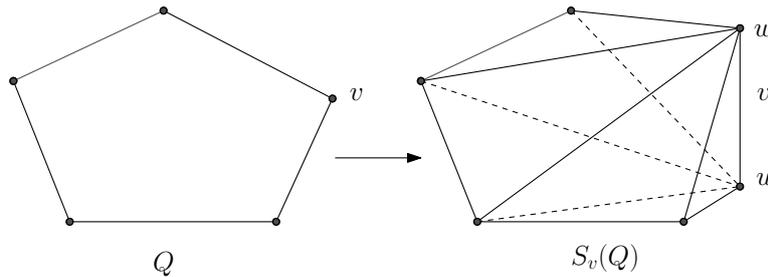


Figura 2.4: La suspensión de un punto de un pentágono en \mathbb{R}^2 es un politopo simplicial en \mathbb{R}^3 con 6 vértices y 8 facetas

Hemos visto que cuando t va desde 1 hasta 0 la combinatoria de Q' resulta ser la misma excepto en $t = 0$, donde algunas facetas de Q' se fusionan para formar una única faceta de Q . Por tanto, queda probada también la segunda parte. \square

Para el siguiente lema, y para la prueba del teorema generalizado de los d pasos, necesitamos introducir otra operación.

Definición 2.3.11 *Dado un vértice v de un politopo Q de dimensión d con n vértices, la suspensión de un punto $S_v(Q)$ se construye embebiendo el politopo Q en un hiperplano de \mathbb{R}^{d+1} y añadiendo dos nuevos vértices u y w , cada uno en un lado opuesto del hiperplano, de manera que el segmento uw contenga al vértice v .*

Con esta construcción, $S_v(Q)$ tiene una dimensión más que el politopo Q , y también un vértice más. Las facetas de $S_v(Q)$ van a ser de dos tipos:

- Para cada faceta F de Q que contenga al vértice v , tendremos en $S_v(Q)$ una faceta $S_v(F)$.
- Para cada faceta F de Q que no contenga al vértice v , tendremos en $S_v(Q)$ dos facetas $F * u$ y $F * w$, donde la expresión $F * v$ denota la pirámide sobre F con ápice en un vértice v .

En la Figura 2.4 se ilustra la construcción de estos dos tipos de facetas para un politopo de dimensión 2.

Lema 2.3.12 *Sean F_1 y F_2 dos facetas de un politopo Q y sea $\tilde{Q} := S_v(Q)$ la suspensión de algún vértice v . Para $i = 1, 2$, si \tilde{F}_i denota a la faceta $S_v(F_i)$ de \tilde{Q} o a una de las facetas $F_i * u$ o $F_i * w$, según v pertenezca o no a F_i , entonces la distancia entre \tilde{F}_1 y \tilde{F}_2 en el grafo dual de \tilde{Q} es mayor o igual que la distancia entre F_1 y F_2 en el grafo dual de Q .*

Demostración. El grafo dual de \tilde{Q} se proyecta sobre el de Q enviando cada faceta $S_v(Q)$, $F * u$ o $F * w$ a la faceta $F \leq Q$ de la que proviene. Esta proyección equivale a contraer todas las aristas duales (crestas) entre $F * u$ y $F * w$, para cada faceta F de Q que no contiene al vértice v . \square

Teorema 2.3.13 (Teorema generalizado de los d pasos para prismatoides) *Si Q es un prismaoide de dimensión d con n vértices y anchura ℓ , entonces existe otro prismaoide Q' de dimensión $n - d$, con $2n - 2d$ vértices y anchura al menos $\ell + n - 2d$. En particular, si $\ell > d$, entonces Q' no satisface la conjetura (dual) de los d pasos, y por tanto tampoco la conjetura (dual) de Hirsch.*

Demostración. Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que todas las facetas de Q , excepto Q^+ y Q^- , son símlices (esto es, generadas por exactamente d vértices). En efecto, si H^+ y H^- son los hiperplanos que contienen respectivamente a Q^+ y Q^- , y alguna de las facetas de Q distintas de Q^+ y Q^- no son símlices, entonces podemos mover ligeramente los vértices de Q , cada uno dentro del hiperplano H^+ o H^- que lo contiene, y denotar todavía por Q a la envolvente convexa de estos puntos perturbados. Cuando esta perturbación es suficientemente pequeña, no decrece la longitud de los caminos desde Q^+ hasta Q^- , por lo que el politopo perturbado es todavía un prismaoide con la misma dimensión y número de vértices que el original, y con anchura al menos ℓ .

Llamemos $s = n - 2d$ a la *asimplicialidad* de Q , y probemos el teorema por inducción en s . Sabemos que cada faceta de un politopo de dimensión d tiene al menos d vértices. Por tanto, como en un prismaoide todos los vértices están contenidos en dos facetas, sabemos que $n \geq 2d$, luego s es siempre no negativo. El caso $s = 0$ es tautológico: Q sería un politopo simplicial. Para el paso inductivo, veamos que si $s > 0$, en cada paso podemos construir a partir de Q un nuevo prismaoide tal que cada una de sus facetas va a ser un símlice (excepto quizá una de sus bases), va a tener una dimensión más y un vértice más que Q y su anchura va a ser al menos $\ell + 1$.

Veamos primero que si $s > 0$, podemos construir a partir de Q un nuevo prismaoide de dimensión $d + 1$ y con un vértice más que Q . Como $s > 0$, al menos una de las facetas Q^+ y Q^- no es un símlice. Consideremos sin pérdida de generalidad que Q^+ no es un símlice (Q^- puede serlo o no). Sea v un vértice de Q^- y construyamos $S_v(Q)$ la suspensión de un punto de Q sobre el vértice v (véase Figura 2.5).

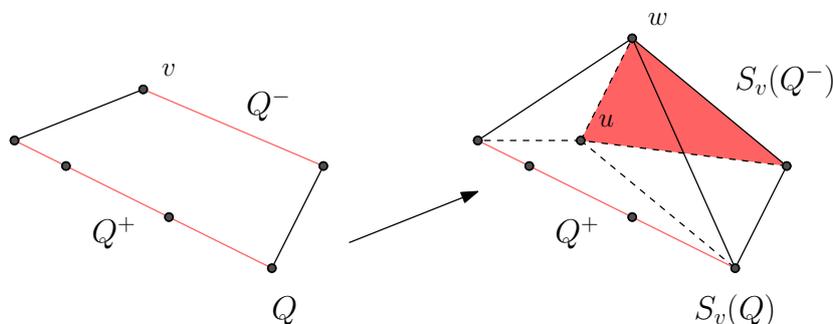


Figura 2.5: Obtención de $S_v(Q) \subset \mathbb{R}^3$ para un prismaoide $Q \subset \mathbb{R}^2$ cuya faceta Q^+ no es un símlice

En la Figura 2.5 aparecen varios puntos sobre la arista Q^+ para representar el hecho de que Q^+ no es un símlice. Debemos entender estos puntos como vértices de Q .

Denotaremos por $\tilde{Q}^- = S_v(Q^-)$ a la suspensión de un punto de Q^- , que es una faceta de $S_v(Q)$. Podemos observar que $S_v(Q)$ es casi un prismatoide: sus caras Q^+ y \tilde{Q}^- contienen todos los vértices de $S_v(Q)$ y además todos ellos residen en dos hiperplanos paralelos. El único problema es que Q^+ no es una faceta, sino una cresta. Como sabemos que Q^+ no es un símlice, podemos mover ligeramente alguno de sus vértices en la dirección del segmento uw creando así una nueva faceta \tilde{Q}^+ que es paralela a \tilde{Q}^- . Estas dos facetas contienen todos los vértices del nuevo politopo \tilde{Q} , que ya es entonces un prismatoide (véase Figura 2.6).

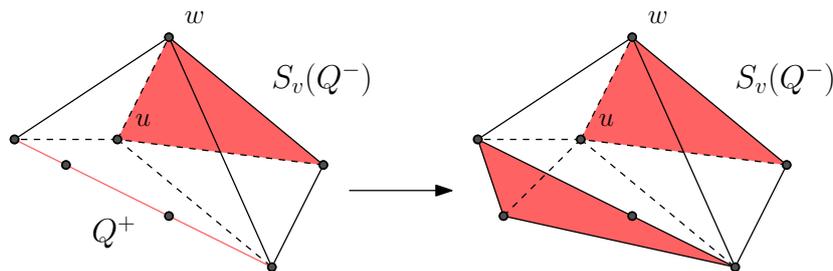


Figura 2.6: Perturbando algún vértice de Q^+ (no necesariamente todos) obtenemos un prismatoide en \mathbb{R}^3

Veamos ahora que este politopo \tilde{Q} que hemos obtenido tiene anchura mayor o igual que $\ell + 1$, siendo ℓ la anchura de Q . Por el Lema 2.3.12, sabemos que la distancia desde \tilde{Q}^- hasta una de las caras $Q^+ * u$ o $Q^+ * w$ en $S_v(Q)$ es, al menos, ℓ . Para asegurarnos de que la anchura de \tilde{Q} es al menos $\ell + 1$, haremos una perturbación de $S_v(Q)$ a \tilde{Q} de la siguiente manera: sea a un vértice de Q^+ y supongamos que las únicas facetas de $S_v(Q)$ que contienen a a que no son símlices son $Q^+ * u$ y $Q^+ * w$ (si esto no ocurre, basta empujar primero a a un punto dentro de Q^+ genérico, que sabemos por el Lema 2.3.10 que mantiene las propiedades que necesitamos y no disminuye las distancias duales). Podemos obtener \tilde{Q} si movemos solamente el vértice a hacia una posición a' en una dirección paralela a Q^- y alejándonos de Q^+ . Así, Q^+ pasará a ser una pirámide $\tilde{Q}^+ := \text{conv}(V_{Q^+} \setminus a) * a'$, donde V_{Q^+} es el conjunto de vértices de Q^+ .

Como el vértice a elegido es genérico, el único cambio que se produce en la estructura de $S_v(Q)$ (además de crear \tilde{Q}^+) es que las dos facetas $Q^+ * u$ y $Q^+ * w$ son refinadas (Q^- no es refinada, ya que no movemos los vértices que la forman). Por tanto, las facetas de \tilde{Q} son: \tilde{Q}^+ , \tilde{Q}^- , $S_v(F)$ para cada faceta F (de Q) distinta de Q^- con $v \in F$, $F * u$ y $F * w$ para cada faceta F (de Q) distinta de Q^+ con $v \notin F$, y $F * u$ y $F * w$ para cada faceta F de \tilde{Q}^+ .

Por construcción, \tilde{Q} es un prismatoide de dimensión $d + 1$ con $n + 1$ vértices, y por tanto de *asimplicialidad* $s - 1$. Para obtener su anchura, se puede observar que cualquier camino (dual) desde \tilde{Q}^+ hasta \tilde{Q}^- en \tilde{Q} proyecta a un camino (dual) desde Q^+ a Q^- en Q mediante la siguiente correspondencia entre facetas: $\tilde{Q}^+ \rightarrow Q^+$, $\tilde{Q}^- \rightarrow Q^-$, $S_v(F) \rightarrow F$ para cada faceta F de Q que

contiene a v , $F * u, F * v \rightarrow$ o bien a F si F es una faceta de Q distinta de Q^+ que no contiene a v o bien a Q^+ si F es una faceta de \tilde{Q}^+ . Como el paso inicial parte de \tilde{Q}^+ hacia una faceta $F * u$ o $F * v$, cada camino entre \tilde{Q}^+ y \tilde{Q}^- en \tilde{Q} tiene al menos un paso más que el camino proyectado en Q , por lo que la anchura de \tilde{Q} será, al menos, $\ell + 1$. \square

El teorema generalizado de los d pasos para prismatoides prueba, como hemos visto, que si existe un prismaoide cuya anchura ℓ sea mayor que su dimensión, entonces va a existir otro prismaoide que viola la conjetura (dual) de Hirsch. Equivalentemente, sabemos entonces que si existe un huso de dimensión d con n facetas cuya longitud supere su dimensión, podemos construir otro huso, aplicando $n - 2d$ veces el teorema generalizado de los d pasos para husos, que no va a ser de Hirsch.

En la Figura 2.7 se ilustra cada una de las implicaciones entre los resultados más importantes que hemos detallado en esta sección y que necesitamos para que, partiendo de un politopo que verifica cierta propiedad, obtengamos otro politopo que no verifica la conjetura de Hirsch.

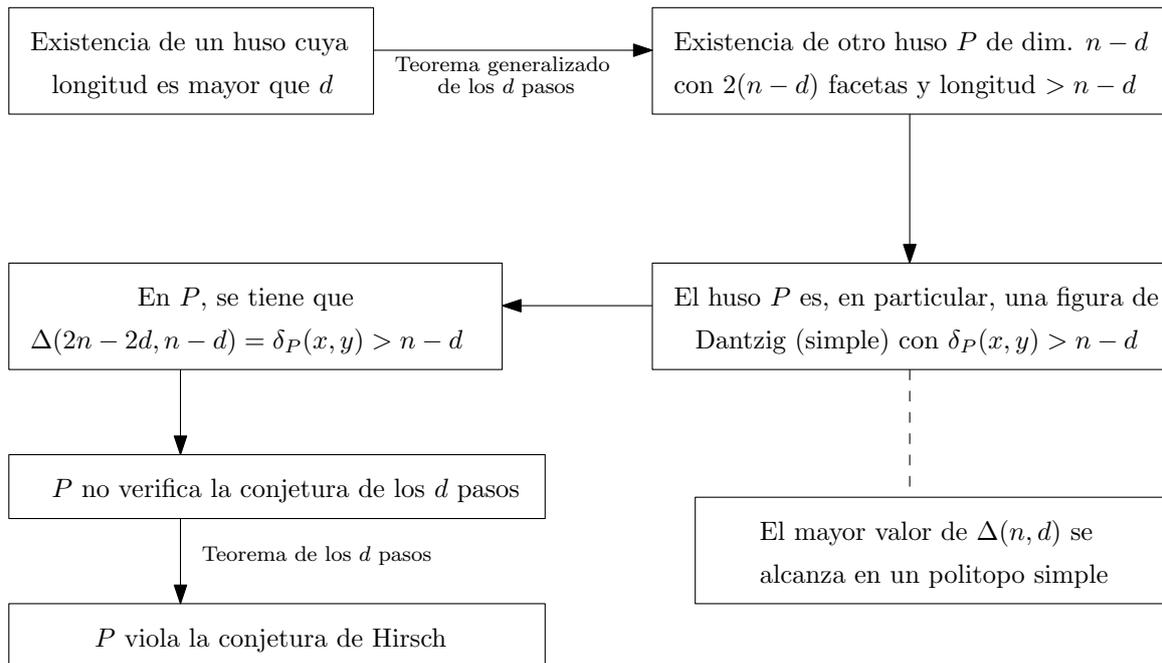


Figura 2.7: Relaciones entre resultados obtenidos en esta sección

2.4. El contraejemplo de Santos

A raíz del Teorema 2.3.13, sabemos que si existe un prismaoide cuya anchura sea mayor que su dimensión, entonces va a existir otro prismaoide que no verifique la conjetura (dual) de Hirsch. Diremos que un prismaoide tiene la propiedad de los d pasos si su anchura no excede

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1^+	18	0	0	0	1	1^-	0	0	0	18	-1
2^+	-18	0	0	0	1	2^-	0	0	0	-18	-1
3^+	0	18	0	0	1	3^-	0	0	18	0	-1
4^+	0	-18	0	0	1	4^-	0	0	-18	0	-1
5^+	0	0	45	0	1	5^-	45	0	0	0	-1
6^+	0	0	-45	0	1	6^-	-45	0	0	0	-1
7^+	0	0	0	45	1	7^-	0	45	0	0	-1
8^+	0	0	0	-45	1	8^-	0	-45	0	0	-1
9^+	15	15	0	0	1	9^-	0	0	15	15	-1
10^+	-15	15	0	0	1	10^-	0	0	15	-15	-1
11^+	15	-15	0	0	1	11^-	0	0	-15	15	-1
12^+	-15	-15	0	0	1	12^-	0	0	-15	-15	-1
13^+	0	0	30	30	1	13^-	30	30	0	0	-1
14^+	0	0	-30	30	1	14^-	-30	30	0	0	-1
15^+	0	0	30	-30	1	15^-	30	-30	0	0	-1
16^+	0	0	-30	-30	1	16^-	-30	-30	0	0	-1
17^+	0	10	40	0	1	17^-	40	0	10	0	-1
18^+	0	-10	40	0	1	18^-	40	0	-10	0	-1
19^+	0	10	-40	0	1	19^-	-40	0	10	0	-1
20^+	0	-10	-40	0	1	20^-	-40	0	-10	0	-1
21^+	10	0	0	40	1	21^-	0	40	0	10	-1
22^+	-10	0	0	40	1	22^-	0	40	0	-10	-1
23^+	10	0	0	-40	1	23^-	0	-40	0	10	-1
24^+	-10	0	0	-40	1	24^-	0	-40	0	-10	-1

Tabla 2.1: Los 48 vértices de un prismaoide \mathcal{Q} de dimensión 5 con anchura 6

a su dimensión. Resulta sencillo comprobar que los prismatoides de dimensión 3 verifican esta propiedad. Para los prismatoides de dimensión 4 también se verifica, como prueban Santos et al. en [30]. En dimensión 5, Santos aporta en [29] el siguiente resultado:

Teorema 2.4.1 *El prismaoide \mathcal{Q} de dimensión 5 cuyos vértices vienen dados por las 48 filas de las matrices de la Tabla 2.1 no verifica la propiedad de los d pasos.*

Este politopo de dimensión 5 no resulta excesivamente grande, por lo que el Teorema 2.4.1 ha sido verificado computacionalmente por Edward D. Kim y Julian Pfeifle (de manera independiente) utilizando el software `polymake`. Santos detalla en el artículo dos pruebas para el teorema. La primera de ellas se desarrolla describiendo las adyacencias entre órbitas de facetas de \mathcal{Q} , lo cual resulta posible gracias a la simetría del politopo en cuestión. En la segunda, reduce el estudio de la combinatoria de los prismatoides al estudio de los pares de geodésicas en la $(d-2)$ -esfera. En este trabajo, detallaremos únicamente la primera de ellas.

Veamos primero algunas propiedades de \mathcal{Q} que derivan directamente de su definición:

- Los primeros 24 vértices, etiquetados de 1^+ a 24^+ , generan una faceta de \mathcal{Q} que denotaremos \mathcal{Q}^+ , y los últimos 24 vértices, etiquetados de 1^- a 24^- , generan otra faceta de \mathcal{Q} que denotaremos \mathcal{Q}^- . Estas dos facetas residen en los hiperplanos $\{x_5 = +1\}$ y $\{x_5 = -1\}$, respectivamente. Por tanto, \mathcal{Q} es un prismaoide.

- La matriz de \mathcal{Q}^- (situada a la derecha en la Tabla 2.1) se obtiene a partir de la matriz de \mathcal{Q}^+ (situada a la izquierda en la misma figura) si multiplicamos ésta por la siguiente matriz ortogonal:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dicho de otra manera, \mathcal{Q} es simétrico bajo la transformación ortogonal

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mapsto (x_4, x_3, x_1, x_2, -x_5),$$

y esta simetría envía \mathcal{Q}^+ a \mathcal{Q}^- , con el vértice etiquetado por i^+ yendo al vértice etiquetado por i^- . Observemos que esta simetría no es una involución, es decir, al aplicar por segunda vez la transformación, no obtenemos el elemento de partida (por ejemplo, $x_1 \mapsto x_4$ pero $x_4 \mapsto x_2$).

Además, se puede comprobar fácilmente que cada una de las siguientes transformaciones ortogonales envían vértices de una de las facetas base de \mathcal{Q} hacia la otra (desde \mathcal{Q}^+ hasta \mathcal{Q}^- , y desde \mathcal{Q}^- hasta \mathcal{Q}^+):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- \mathcal{Q}^+ y \mathcal{Q}^- , y por tanto también \mathcal{Q} , son invariantes bajo cualquiera de las siguientes 32 transformaciones ortogonales:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto quiere decir que \mathcal{Q}^+ y \mathcal{Q}^- son simétricos a sí mismos si cambiamos el signo de cualquiera de sus primeras cuatro coordenadas, y también bajo las transformaciones simultáneas $x_1 \mapsto x_2$ y $x_3 \mapsto x_4$.

Para entender el desarrollo que llevaremos a cabo en esta de sección, necesitamos introducir primero algunas nociones de teoría de grupos.

Definición 2.4.2 Sea $(G, *)$ un grupo y X un conjunto no vacío. Decimos que G actúa sobre X si existe una aplicación $\psi : G \times X \rightarrow X$, que asocia a cada par $(a, x) \in G \times X$ un elemento $a(x) = ax$ (acción de a sobre x), y verifica

- A1. $a_1(a_2x) = (a_1 * a_2)x$ para todo $a_1, a_2 \in G$ y para todo $x \in X$,
- A2. $e(x) = x$ para todo $x \in X$, donde e es el elemento neutro de $(G, *)$.

Definición 2.4.3 Sea $(G, *)$ un grupo que actúa sobre un conjunto no vacío X . Definimos la siguiente relación binaria en X :

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow \text{existe } a \in G : x_2 = a(x_1).$$

Esta relación binaria es una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia se denominan órbitas. Así, para cada $x \in X$, $\mathcal{O}_x = \{a(x) : a \in G\}$. La unión de todas las órbitas forma una partición de X .

Siguiendo la notación que utiliza Santos, vamos a denotar por Σ el grupo de orden 64 de simetrías de \mathcal{Q} cuyos elementos son:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

y por Σ^+ el subgrupo de Σ de orden 32 que conserva \mathcal{Q}^+ y \mathcal{Q}^- . El conjunto sobre el que van a actuar estos grupos va a ser el conjunto de facetas del prismaoide \mathcal{Q} .

Teorema 2.4.4 Denominemos Σ -órbita a una órbita que genera Σ al actuar sobre un determinado conjunto de facetas de \mathcal{Q} , y Σ^+ -órbita a una órbita generada por Σ^+ .

1. Las $2 + (20 \times 16) = 322$ desigualdades de la Tabla 2.2 definen las facetas de \mathcal{Q} . A y L son las bases del prismaoide. En cuanto a las demás, cada una de las 32 desigualdades etiquetadas con la misma letra forman una Σ^+ -órbita. Hay seis Σ -órbitas, obtenidas como unión de Σ^+ -órbitas: $A \cup L$, $B \cup K$, $C \cup J$, $D \cup I$, $E \cup H$ y $F \cup G$.
2. Estas desigualdades son todas las facetas de \mathcal{Q} .
3. Las únicas adyacencias entre facetas de \mathcal{Q} en diferentes Σ^+ -órbitas de facetas de \mathcal{Q} son las que se muestran en Figura 2.8:

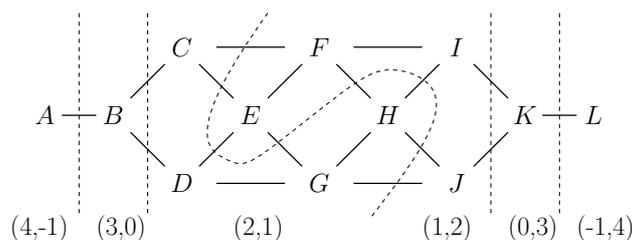


Figura 2.8: Adyacencia entre facetas de \mathcal{Q} pertenecientes a distintas Σ -órbitas

$A :$	1	$-x_5$	\geq	$0.$				
$B_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	$\frac{315}{2}$	$-\frac{135}{2}x_5$	\geq	$\pm 5x_1$	$\pm x_2$	$\pm 2x_3$	$\pm x_4$	
$B'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	$\frac{315}{2}$	$-\frac{135}{2}x_5$	\geq	$\pm 5x_2$	$\pm x_1$	$\pm 2x_4$	$\pm x_3$	
$C_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$-45x_5$	\geq	$\pm 4x_1$	$\pm 2x_2$	$\pm \frac{7}{4}x_3$	$\pm \frac{5}{4}x_4$	
$C'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$-45x_5$	\geq	$\pm 4x_2$	$\pm 2x_1$	$\pm \frac{7}{4}x_4$	$\pm \frac{5}{4}x_3$	
$D_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$-45x_5$	\geq	$\pm 4x_1$	$\pm x_2$	$\pm 2x_3$	$\pm x_4$	
$D'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$-45x_5$	\geq	$\pm 4x_2$	$\pm x_1$	$\pm 2x_4$	$\pm x_3$	
$E_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	105	$-30x_5$	\geq	$\pm 3x_1$	$\pm \frac{3}{2}x_2$	$\pm \frac{3}{2}x_3$	$\pm x_4$	
$E'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	105	$-30x_5$	\geq	$\pm 3x_2$	$\pm \frac{3}{2}x_1$	$\pm \frac{3}{2}x_4$	$\pm x_3$	
$F_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	75	$-15x_5$	\geq	$\pm 2x_1$	$\pm x_2$	$\pm x_3$	$\pm x_4$	
$F'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	75	$-15x_5$	\geq	$\pm 2x_2$	$\pm x_1$	$\pm x_4$	$\pm x_3$	
$G_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	75	$+15x_5$	\geq	$\pm 2x_4$	$\pm x_3$	$\pm x_1$	$\pm x_2$	
$G'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	75	$+15x_5$	\geq	$\pm 2x_3$	$\pm x_4$	$\pm x_2$	$\pm x_1$	
$H_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	105	$+30x_5$	\geq	$\pm 3x_4$	$\pm \frac{3}{2}x_3$	$\pm \frac{3}{2}x_1$	$\pm x_2$	
$H'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	105	$+30x_5$	\geq	$\pm 3x_3$	$\pm \frac{3}{2}x_4$	$\pm \frac{3}{2}x_2$	$\pm x_1$	
$I_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$+45x_5$	\geq	$\pm 4x_4$	$\pm x_3$	$\pm 2x_1$	$\pm x_2$	
$I'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$+45x_5$	\geq	$\pm 4x_3$	$\pm x_4$	$\pm 2x_2$	$\pm x_1$	
$J_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$+45x_5$	\geq	$\pm 4x_4$	$\pm 2x_3$	$\pm \frac{7}{4}x_1$	$\pm \frac{5}{4}x_2$	
$J'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	135	$+45x_5$	\geq	$\pm 4x_3$	$\pm 2x_4$	$\pm \frac{7}{4}x_2$	$\pm \frac{5}{4}x_1$	
$K_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	$\frac{315}{2}$	$+\frac{135}{2}x_5$	\geq	$\pm 5x_4$	$\pm x_3$	$\pm 2x_1$	$\pm x_2$	
$K'_{\pm, \pm, \pm, \pm} :$	$\frac{315}{2}$	$+\frac{135}{2}x_5$	\geq	$\pm 5x_3$	$\pm x_4$	$\pm 2x_2$	$\pm x_1$	
$L :$	1	$+x_5$	\geq	$0.$				

Tabla 2.2: Las 322 facetas de \mathcal{Q}

Las líneas discontinuas en la Figura 2.8 separan las facetas según su bidimensión. Decimos que una faceta tiene bidimensión (i, j) si es la envolvente convexa de una i -cara de \mathcal{Q}^+ y una j -cara de \mathcal{Q}^- (se considera que una cara vacía tiene dimensión -1).

--> La parte 3. del Teorema 2.4.4 implica el Teorema 2.4.1. Como se observa en la Figura 2.8, para ir desde la faceta \mathcal{Q}^+ hasta la faceta \mathcal{Q}^- , etiquetadas respectivamente por A y L , son necesarios (y suficientes) seis pasos.

Demostración. Para la parte 1, la manera en la que vienen dadas las desigualdades describe la forma de las Σ y Σ^+ -órbitas de facetas de \mathcal{Q} . Para comprobar que las 322 desigualdades definen facetas de \mathcal{Q} , basta considerar una desigualdad representante de cada Σ -órbita. Para las facetas que forman las bases del prismatoide, A y L , está claro que se verifica la desigualdad. Para las

demás, elijamos las siguientes desigualdades como representantes de cada Σ -órbita:

$$\begin{aligned}
 B_{+,+,+,+} &: \frac{315}{2} - \frac{135}{2}x_5 \geq 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, \\
 C_{+,+,+,+} &: 135 - 45x_5 \geq 4x_1 + 2x_2 + \frac{7}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_4, \\
 D_{+,+,+,+} &: 135 - 45x_5 \geq 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, \\
 E_{+,+,+,+} &: 105 - 30x_5 \geq 3x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4, \\
 F_{+,+,+,+} &: 75 - 15x_5 \geq 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4.
 \end{aligned}$$

Los 48 vértices de \mathcal{Q} verifican estas cinco desigualdades. En la Tabla 2.3 se muestran los vértices que cumplen la igualdad para cada una de dichas facetas. Las cinco matrices obtenidas tienen rango igual a cinco, por lo que los vértices en cada una de ellas generan al menos un hiperplano afín. Por tanto, todas definen facetas de \mathcal{Q} .

Para las partes 2 y 3, observando las matrices de la Tabla 2.3 se puede ver que:

- Las facetas de tipo B son pirámides con ápice en Q^- sobre un prisma triangular en Q^+ . El único vértice que no reside en el hiperplano $\{x_5 = 1\}$ es el vértice 5^- . Los seis vértices que están en Q^+ forman un prisma triangular, ya que los rayos $\overrightarrow{v_{1^+}v_{5^+}}$, $\overrightarrow{v_{9^+}v_{17^+}}$ y $\overrightarrow{v_{21^+}v_{13^+}}$ se cortan en el punto $o = (-30, 0, 120, 0, 1)$, como se sigue de las siguientes igualdades y se ilustra en la Figura 2.9:

$$\frac{8}{3}v_{5^+} - \frac{5}{3}v_{1^+} = 3v_{17^+} - 2v_{9^+} = 4v_{13^+} - 3v_{21^+}.$$

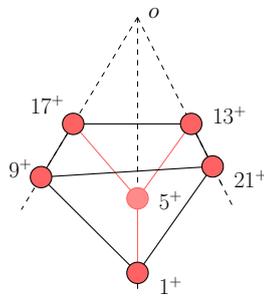


Figura 2.9: Prisma contenido en $B_{+,+,+,+}$

- Las facetas de tipo C son pirámides iteradas, con dos ápices en Q^- sobre un cuadrilátero en Q^+ . De hecho, los vértices 9^+ , 13^+ , 17^+ y 21^+ forman un cuadrilátero planar, ya que

$$2v_{9^+} + 4v_{13^+} = 3v_{17^+} + 3v_{21^+}.$$

- Las facetas de tipo D , E y F son símlices, ya que tienen cinco vértices: tres en Q^+ y dos en Q^- , o viceversa.

Con todo esto, podemos probar a la vez las partes 2 y 3 construyendo simplemente el grafo dual, esto es, fijándonos en las adyacencias entre las facetas. Las pirámides sobre un prisma

Faceta	Vértices
$B_{+,+,+,+}$:	$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 \\ 1^+ & 18 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5^+ & 0 & 0 & 45 & 0 & 1 \\ 9^+ & 15 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ 13^+ & 0 & 0 & 30 & 30 & 1 \\ 17^+ & 0 & 10 & 40 & 0 & 1 \\ 21^+ & 10 & 0 & 0 & 40 & 1 \\ 5^- & 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$C_{+,+,+,+}$:	$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 \\ 9^+ & 15 & 15 & 0 & 0 & 1 \\ 13^+ & 0 & 0 & 30 & 30 & 1 \\ 17^+ & 0 & 10 & 40 & 0 & 1 \\ 21^+ & 10 & 0 & 0 & 40 & 1 \\ 5^- & 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 13^- & 40 & 0 & 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$D_{+,+,+,+}$:	$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 \\ 5^+ & 0 & 0 & 45 & 0 & 1 \\ 13^+ & 0 & 0 & 30 & 30 & 1 \\ 17^+ & 0 & 10 & 40 & 0 & 1 \\ 5^- & 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 17^- & 40 & 0 & 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$E_{+,+,+,+}$:	$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 \\ 13^+ & 0 & 0 & 30 & 30 & 1 \\ 17^+ & 0 & 10 & 40 & 0 & 1 \\ 5^- & 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 13^- & 30 & 30 & 0 & 0 & -1 \\ 17^- & 40 & 0 & 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
$F_{+,+,+,+}$:	$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \mathbf{x}_4 & \mathbf{x}_5 \\ 13^+ & 0 & 0 & 30 & 30 & 1 \\ 21^+ & 10 & 0 & 0 & 40 & 1 \\ 5^- & 45 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 13^- & 30 & 30 & 0 & 0 & -1 \\ 17^- & 40 & 0 & 10 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Tabla 2.3: Incidencia vértice-faceta para las facetas representativas

triangular de tipo B necesitan tener seis facetas vecinas y las dobles pirámides de tipo C también necesitan seis, mientras que los símlices de tipo D , E y F sólo necesitan tener cinco. Por tanto, para justificar las adyacencias de la Figura 2.8 basta comprobar las adyacencias de las cinco

facetas representantes y considerar las permutaciones de facetas dentro de cada Σ -órbita inducida por las simetrías de \mathcal{Q} :

- Las siguientes facetas son adyacentes a $B_{+,+,+,+}$:

$$A, \quad B_{+,-,+,+}, \quad B_{+,+,-,+}, \quad B_{+,+,+,-}, \quad C_{+,+,+,+}, \quad D_{+,+,+,+}.$$

Está claro que A es adyacente a $B_{+,+,+,+}$, puesto que todos los vértices de $B_{+,+,+,+}$ que están en la base positiva del prismaoide forman una matriz de rango 4 y, por tanto, una cresta. La siguiente tabla muestra los vértices que forman cada una de las demás facetas adyacentes a $B_{+,+,+,+}$:

$B_{+,+,+,+}$	$1^+ \ 5^+ \ 9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 5^-$
$B_{+,-,+,+}$	$1^+ \ 5^+ \ 11^+ \ 13^+ \ 18^+ \ 21^+ \ 5^-$
$B_{+,+,-,+}$	$1^+ \ 6^+ \ 9^+ \ 14^+ \ 19^+ \ 21^+ \ 5^-$
$B_{+,+,+,-}$	$1^+ \ 5^+ \ 9^+ \ 15^+ \ 17^+ \ 23^+ \ 5^-$
$C_{+,+,+,+}$	$9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^-$
$D_{+,+,+,+}$	$5^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 5^- \ 17^-$

Los vértices de cada faceta que aparecen coloreados son vértices compartidos con $B_{+,+,+,+}$, y por tanto formarían una cresta. Se comprueba fácilmente que para cada faceta, la matriz generada por vértices coloreados tiene rango 4.

Utilizando el mismo razonamiento, se prueban los casos siguientes.

- Las siguientes facetas son adyacentes a $C_{+,+,+,+}$:

$$B_{+,+,+,+}, \quad C_{+,+,-,+}, \quad C_{+,+,+,-}, \quad C'_{+,+,+,+}, \quad E_{+,+,+,+}, \quad F_{+,+,+,+}.$$

Los vértices que forman cada una de las facetas adyacentes a $C_{+,+,+,+}$ vienen dados en la siguiente tabla:

$C_{+,+,+,+}$	$9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^-$
$B_{+,+,+,+}$	$1^+ \ 5^+ \ 9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 5^-$
$C_{+,+,-,+}$	$9^+ \ 14^+ \ 19^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^-$
$C_{+,+,+,-}$	$9^+ \ 15^+ \ 17^+ \ 23^+ \ 5^- \ 13^-$
$C'_{+,+,+,+}$	$9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 7^- \ 13^-$
$E_{+,+,+,+}$	$13^+ \ 17^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$
$F_{+,+,+,+}$	$13^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$

- Las siguientes facetas son adyacentes a $D_{+,+,+,+}$:

$$B_{+,+,+,+}, \quad D_{+,-,+,+}, \quad D_{+,+,+,-}, \quad E_{+,+,+,+}, \quad G'_{+,+,+,+}.$$

Los vértices que forman cada una de las facetas adyacentes a $D_{+,+,+,+}$ vienen dados en la siguiente tabla:

$D_{+,+,+,+}$	$5^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 5^- \ 17^-$
$B_{+,+,+,+}$	$1^+ \ 5^+ \ 9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 5^-$
$D_{+,-,+,+}$	$5^+ \ 13^+ \ 18^+ \ 5^- \ 17^-$
$D_{+,+,+,-}$	$5^+ \ 15^+ \ 17^+ \ 5^- \ 17^-$
$E_{+,+,+,+}$	$13^+ \ 17^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$
$G'_{+,+,+,+}$	$5^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 13^- \ 17^-$

► Las siguientes facetas son adyacentes a $E_{+,+,+,+}$:

$$C_{+,+,+,+}, \ D_{+,+,+,+}, \ E_{+,+,+,-}, \ F_{+,+,+,+}, \ G'_{+,+,+,+}.$$

Los vértices que forman cada una de las facetas adyacentes a $E_{+,+,+,+}$ vienen dados en la siguiente tabla:

$E_{+,+,+,+}$	$13^+ \ 17^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$
$C_{+,+,+,+}$	$9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^-$
$D_{+,+,+,+}$	$5^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 5^- \ 17^-$
$E_{+,+,+,-}$	$15^+ \ 17^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$
$F_{+,+,+,+}$	$13^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$
$G'_{+,+,+,+}$	$5^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 13^- \ 17^-$

► Las siguientes facetas son adyacentes a $F_{+,+,+,+}$:

$$C_{+,+,+,+}, \ E_{+,+,+,+}, \ F_{+,-,+,+}, \ H_{+,+,+,+}, \ I_{+,+,+,+}.$$

Los vértices que forman cada una de las facetas adyacentes a $F_{+,+,+,+}$ vienen dados en la siguiente tabla:

$F_{+,+,+,+}$	$13^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$
$C_{+,+,+,+}$	$9^+ \ 13^+ \ 17^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^-$
$E_{+,+,+,+}$	$13^+ \ 17^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$
$F_{+,-,+,+}$	$13^+ \ 21^+ \ 5^- \ 15^- \ 17^-$
$H_{+,+,+,+}$	$7^+ \ 13^+ \ 21^+ \ 13^- \ 17^-$
$I_{+,+,+,+}$	$7^+ \ 21^+ \ 5^- \ 13^- \ 17^-$

El grafo (dual) de \mathcal{Q} tiene, por tanto, la estructura (módulo simetrías) de la Figura 2.8, y queda así probado que su anchura es 6. \square

Una vez probado el Teorema 2.4.1, sabemos entonces que se verifica el siguiente resultado equivalente:

Teorema 2.4.5 *Existe un huso de dimensión 5 con 48 facetas y 322 vértices cuya longitud es 6.*

Si aplicamos $n - 2d$ veces el Teorema generalizado de los d pasos para husos, sabemos que existe un huso de dimensión $5 + (48 - 2 \cdot 5) = 43$ con $48 + (48 - 2 \cdot 5) = 86$ facetas en el que hacen falta $6 + (48 - 2 \cdot 5) > 5 + (48 - 2 \cdot 5) = 43$ pasos para ir de un extremo a otro. Es decir, hemos violado la conjetura de los d pasos y, con ello, la conjetura de Hirsch:

Corolario 2.4.6 *Existe un huso de dimensión 43 con 86 facetas que no es de Hirsch.*

Tras la aportación del primer contraejemplo por parte de Santos, seguimos sin conocer cómo de grande puede ser el diámetro de un politopo. No obstante, como afirman Klee y Kleinschmidt en [19], *encontrar un contraejemplo no será más que un pequeño primer paso en la línea de investigación de la conjetura.*

Santos no ha podido construir y verificar explícitamente que su politopo de dimensión 43 realmente viola la Conjetura de Hirsch. Sin embargo, en [24] construye un huso de dimensión 5 y anchura 6 con únicamente 25 facetas, de donde se tiene que existe un politopo que no es de Hirsch de dimensión 20 con 40 facetas y 36.442 vértices, cuyo diámetro es 21. El menor tamaño de este ejemplo sí ha permitido la obtención explícita de las coordenadas del politopo en cuestión.

Quizá más significativo que el contraejemplo en sí puede ser el Teorema generalizado de los d pasos, cuyas técnicas abren una nueva vía de ataque al estudio de la complejidad computacional del método símplex.

Capítulo 3

Obtención de facetas para un problema de localización de concentradores

Vamos a continuar trabajando en este capítulo con poliedros asociados al conjunto factible de problemas de optimización lineal. Esta vez, consideraremos dos poliedros diferentes, el primero de ellos lineal y el segundo, más pequeño, generado por la envolvente convexa de los puntos enteros del primer poliedro y que en general no podremos obtener de manera explícita. Este segundo poliedro va a estar asociado al conjunto factible de un problema de optimización lineal entera.

Nuestro objetivo en este capítulo va a ser la obtención de nuevas desigualdades válidas que, unidas a la formulación de un problema lineal entero, aproximen en la medida de lo posible la región factible del problema relajado a la envolvente convexa de las soluciones enteras. Este tipo de estudio no puede llevarse a cabo de manera global para todos los problemas de programación lineal entera, sino que ha de realizarse de manera individual para cada problema concreto. Nosotros vamos a considerar el problema de localización de concentradores (*hubs*, en inglés) sin capacidades con asignación sencilla.

Los problemas de localización discreta de *hubs* implican la ubicación de un conjunto de centros totalmente interconectados, denominados *hubs*, que sirven como puntos de transbordo para el transporte de productos (pasajeros, paquetes...) entre unos orígenes y destinos específicos.

Estos problemas de optimización lineal entera surgen en sistemas de transporte donde distintas ubicaciones envían y reciben mercancías, y el funcionamiento de dichos sistemas puede ser mejorado utilizando puntos de transbordo (*hubs*) donde las mercancías se reúnan para ser distribuidas. A cada par origen-destino se le asigna un flujo no negativo y un cierto atributo, como puede ser una distancia, un tiempo o un coste, asociado al movimiento. En nuestro caso, dicho atributo va a ser un coste, y el objetivo del problema va a ser el de minimizar el coste de transporte de enviar un determinado producto entre todos los pares de puntos.

Los problemas de localización de concentradores se pueden clasificar según la manera en que los puntos de demanda son asignados a los *hubs*. En caso de que cada punto de demanda pueda enviar y recibir mercancías a través de un único concentrador, hablaremos de asignación sencilla, mientras que si cada punto de demanda envía y recibe a través de más de un concentrador, hablaremos de asignación múltiple. En nuestro problema, como detallaremos más adelante, vamos a considerar movimientos origen-destino a través de uno o, como mucho, dos concentradores.

La primera formulación en programación lineal entera para el problema de localización de *hubs* sin capacidades con asignación múltiple fue dada por Campbell en 1994 en [7]. Más tarde, Klincewicz utiliza en [21] esta formulación para diseñar un algoritmo dual para el problema; Skorin-Kapov et al. modifican la formulación, reduciendo el número de restricciones [31]; y O’Kelly et al. reducen todavía más el número de variables [26]. En 2001, Hamacher et al. [12] y Cánovas et al. [8] comienzan a estudiar la estructura poliédrica del problema.

El poliedro generado por el conjunto factible del problema de localización de *hubs* relajado tiene puntos extremos que no son enteros. Con vista a facilitar la búsqueda de una solución óptima entera para el problema, se crea la necesidad de encontrar hiperplanos que, unidos a las restricciones del problema de programación lineal entera asociado, definan facetas de la envolvente convexa de soluciones enteras.

Un poliedro definido por la envolvente convexa de soluciones enteras que ha sido estudiado en la literatura es el poliedro asociado al problema de empaquetamiento. Padberg, Nemhauser y Trotter, entre otros, estudian en los 70’ la estructura facial y la complejidad del poliedro de empaquetamiento, e identifican distintos conjuntos de facetas para el poliedro [27, 28, 25]. En la primera sección de este capítulo, veremos en qué consiste el problema de empaquetamiento, definiremos el grafo intersección asociado al poliedro generado por las restricciones del problema y obtendremos algunas facetas para dicho poliedro.

Considerando que los costes de transporte entre *hubs* satisfacen la desigualdad triangular, Marín lleva a cabo en 2005 en [23] un análisis de los conjuntos de soluciones que no son candidatos a ser óptimos. Con ello, plantea una formulación del problema de localización de concentradores como problema de empaquetamiento, que queda reforzada gracias a la obtención de nuevas desigualdades válidas. Detallaremos estos resultados en la segunda sección, y analizando entonces el grafo intersección del problema de empaquetamiento asociado, obtendremos en la tercera sección nuevas facetas para el poliedro gracias a la construcción de subgrafos completos maximales del grafo intersección.

3.1. El problema de empaquetamiento

Un empaquetamiento de nodos en un grafo $G = (V, E)$ es un subconjunto $V' \subseteq V$ tal que toda arista de E incide, como mucho, en un nodo de V' .

El *problema de empaquetamiento* consiste en

$$\begin{aligned} \text{(PE)} \quad & \text{máx} \quad cx \\ & \text{s.a} \quad Ax \leq \mathbf{1}_m \\ & \quad x \in \{0,1\}^n, \end{aligned}$$

donde A es una matriz $m \times n$ de ceros y unos, $\mathbf{1}_m = (1, \dots, 1)^T$ es un vector de m unos y c es un vector de n componentes arbitrario.

De forma equivalente, se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \text{máx} \quad cx \\ & \text{s.a} \quad x_i + x_j \leq 1 \quad \text{para } (i, j) \in E \\ & \quad x \in \{0,1\}^n, \end{aligned}$$

llamado comúnmente *problema de empaquetamiento de nodos*.

El conjunto factible del problema de programación lineal asociado a (PE) define un poliedro que denotaremos por $P = P(A)$, y que viene dado por

$$P(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq \mathbf{1}_m, x \geq 0\}.$$

Llamaremos $P_I = P_I(A)$ a la envolvente convexa de los puntos enteros de P :

$$P_I(A) = \text{conv}(x \in P(A) : x \in \mathbb{Z}).$$

Sabemos que existe un sistema finito de desigualdades lineales cuyo conjunto de soluciones coincide con P_I , esto es,

$$P_I = \{x \in \mathbb{R}^n : Hx \leq h, x \geq 0\},$$

para una cierta matriz H y un vector h . Nuestro objetivo ahora es encontrar desigualdades que sean facetas del poliedro P_I .

Definición 3.1.1 *Decimos que una desigualdad $\pi x \leq \pi_0$ es una faceta de P_I si*

- i) $\pi x \leq \pi_0$ para todo $x \in P_I$,
- ii) existen n vértices x^i de P_I afínmente independientes tales que $\pi x^i = \pi_0$ para $i = 1, \dots, n$.

El grafo intersección

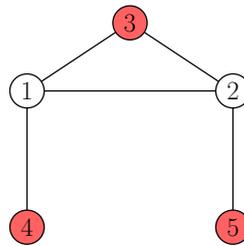
Una construcción que resulta muy útil a la hora de identificar facetas de P_I es el grafo intersección asociado a la matriz A de ceros y unos que define a P . Si denotamos por a_i a la i -ésima columna de dicha matriz $m \times n$, el **grafo intersección** $G = (V, E)$ de A tiene un nodo $i \in V$ por cada columna de A , y una arista para cada par de columnas no ortogonales de A , es decir, $(i, j) \in E$ si, y sólo si, $a_i^T a_j \geq 1$.

Dicho de otra manera, para generar el grafo intersección asociado a la formulación del problema, a cada variable x_i le asignaremos un nodo i , y existirá una arista (x_i, x_j) si, sólo si, las variables x_i y x_j son incompatibles. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1.2 *Supongamos que el conjunto factible de un problema de optimización lineal viene dado por el sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \leq 1 \\ x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_4 \leq 1 \\ x_2 + x_5 \leq 1 \end{cases}$$

Para construir el grafo intersección, consideraremos un nodo para cada variable y una arista entre cada par de variables que se encuentran en la misma restricción (incompatibles):



El empaquetamiento del grafo formado por el conjunto de nodos coloreados es una solución factible del problema.

Obtención de facetas del poliedro asociado al problema de empaquetamiento

Los $n + 1$ vectores

$$\begin{cases} \mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots, 0) \\ e^1 = (0, 1, 0, \dots, 0) \\ e^2 = (0, 0, 1, \dots, 0) \\ \vdots \\ e^n = (0, 0, 0, \dots, 1) \end{cases}$$

están en el poliedro y son afínmente independientes.

Una familia de facetas que siempre podemos obtener es

$$-x_j \leq 0$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Son desigualdades válidas, y hay n vectores afínmente independientes en el poliedro que cumplen la igualdad: todos los anteriores, excepto e^j . Estas facetas se denominan **facetas triviales**. Nos centraremos en lo que sigue en facetas no triviales.

Supongamos facetas de la forma

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b.$$

Como $\mathbf{0}$ está en el poliedro, al ser ésta una desigualdad válida debe cumplirse que $0 \leq b$.

Para cada $j = 1, \dots, n$ ha de existir un punto del poliedro con $x_j > 0$ que cumpla

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j = b.$$

De no ser así, todos los puntos de la faceta verificarían $x_j = 0$. Como la faceta $-x_j \leq 0$ no puede estar dominada, ambas coincidirían, pero esto no puede ocurrir porque estamos considerando facetas no triviales.

Si $a_j < 0$, entonces cambiando la coordenada j -ésima del punto descrito anteriormente por $x_j = 0$ se tiene que dicho punto pertenece entonces al poliedro, pero no cumple la desigualdad de la faceta, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe ser $a_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$.

No puede ocurrir que todos los a_j sean nulos, luego existe algún $a_j > 0$. Como el vector e^j está en el poliedro, se ha de verificar que $a_j \leq b$, luego b tiene que ser estrictamente positivo.

Por tanto, todas las **facetas no triviales** son de la forma

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b$$

con $a_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, n$ y $b > 0$.

Podemos identificar un conjunto de facetas para (PE) a través de los cliques de G .

Definición 3.1.3 *Se dice que un grafo $G = (V, E)$ es completo si cada par de vértices de V son extremos de una misma arista. Un **clique** en un grafo G es un subgrafo completo maximal de G .*

Teorema 3.1.4 (Padberg, 1973 [27]) *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. La desigualdad*

$$\sum_{k \in K} x_k \leq 1$$

con $K \subseteq V$ es una faceta de P_I si, y sólo si, K induce un clique de G .

Demostración. Consideremos sin pérdida de generalidad que $K = \{1, \dots, q\}$. Supongamos en primer lugar que K es el conjunto de nodos de un clique en el grafo G . Entonces, todos sus nodos están conectados entre sí, son adyacentes dos a dos, y se verifica

$$\sum_{k \in K} x_k \leq 1.$$

Por tanto, tenemos una desigualdad válida. Veamos ahora que esta desigualdad es una faceta de P_I . Para ello, basta encontrar n puntos afínmente independientes del poliedro que cumplan la

igualdad (como $\mathbf{0}$ no está en la faceta, el número de puntos afinmente independientes coincide con el número de puntos linealmente independientes). Tomamos los q puntos

$$\begin{aligned} &(1, 0, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0) \\ &(0, 1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0) \\ &\quad \vdots \\ &(0, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Para cada $j = 1, \dots, n - q$ existe alguna solución factible que verifica

$$x_{q+1} = 0, \dots, x_{q+j-1} = 0, x_{q+j} = 1, x_{q+j+1} = 0, \dots, x_n = 0$$

y tiene un único 1 entre los q primeros lugares, pues de no ser así, el nodo $q + j$ formaría parte del clique. Estos $n - q$ vectores son linealmente independientes entre sí y también lo son respecto de los q anteriores. Por tanto, tenemos n puntos que verifican la igualdad, y la desigualdad es faceta de P_I .

Supongamos ahora que $\sum_{k \in K} x_k \leq 1$ es una faceta de P_I .

Si el subgrafo inducido por K no fuese completo, entonces existiría un par de nodos de K que no estarían conectados entre sí. Tomando un empaquetamiento de nodos que contuviera a ambos nodos, no se cumpliría la desigualdad. Por tanto, el subgrafo inducido por K es completo.

Si el subgrafo inducido por K no fuese maximal, entonces podríamos añadir un nuevo nodo x_ℓ y generar un subgrafo completo inducido por $K \cup \{x_\ell\}$. Así obtendríamos una desigualdad válida $\sum_{k \in K} x_k + x_\ell \leq 1$ que dominaría a la que tenemos, lo cual es una contradicción. \square

A las facetas obtenidas en virtud de este resultado las denominaremos **facetas clique**.

3.2. Modelo y formulación del problema

Consideremos $N = \{1, \dots, n\}$ el conjunto de ubicaciones o puntos que reciben un producto desde todos los demás puntos, y envían a su vez el producto al resto de puntos. Sea W_{ij} la cantidad de producto que se desea enviar desde el i -ésimo punto hasta el j -ésimo punto, para todo $i, j \in N$ (se considera también el caso $i = j$).

Consideremos además un conjunto $M = \{1, \dots, q\}$ de localizaciones que pueden utilizarse como concentradores o *hubs* pagando un coste fijo que denotaremos por $F_k \geq 0, k \in M$. Estos costes pueden ser diferentes para cada k . Una vez determinado el conjunto de concentradores, el flujo de producto desde cualquier punto i hasta el punto j debe atravesar, al menos, uno de ellos.

Supongamos también que asociado a cada par de concentradores $k, m \in M$ tenemos un coste de transportar cada unidad de producto desde k hasta m , al que llamaremos $c_{km} \geq 0$,

y que asociado a cada par de puntos $i \in N$, $k \in M$, tenemos los costes $b_{ik} \geq 0$ y $d_{ki} \geq 0$ de transportar una unidad de producto desde i hasta el punto de transbordo k , y desde k hasta i , respectivamente. Un ejemplo de costes de transporte entre dos nodos se refleja en la Figura 3.1 para una red donde N tiene 6 nodos, representados por círculos, y M tiene 5 nodos, representados por rectángulos de color magenta.

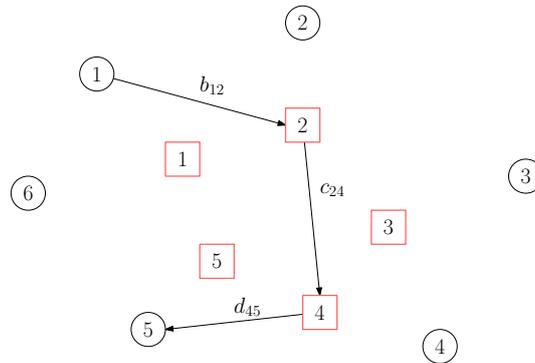


Figura 3.1: Costes de transporte del modelo para $n = 6$ y $q = 5$

Vamos a suponer que los costes c_{km} satisfacen la desigualdad triangular, esto es, que

$$c_{km} + c_{m\ell} \geq c_{k\ell} \quad \forall k, m, \ell \in M.$$

Esto implica que el producto enviado desde un punto $i \in N$ hasta otro punto $j \in N$ tiene que atravesar uno o, como mucho, dos *hubs*.

Llamaremos PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN DE CONCENTRADORES EUCLÍDEO SIN CAPACIDADES al problema de encontrar un conjunto de puntos que actúen como puntos de transbordo o concentradores, así como de asignar cuáles de estos concentradores se van a utilizar en la ruta asociada a cada par origen-destino, de manera que se minimice el coste total de transporte. Para abreviar, nos referiremos a él como PLC.

3.2.1. Formulación básica

Son varias las formulaciones que se han dado en la literatura para el problema de localización de *hubs* sin capacidades. Introduciremos una muy similar a la dada por Campbell en [7]. Consideremos las variables binarias x_{ijkm} , que toman el valor 1 si se envía desde i hasta j una cantidad W_{ij} pasando primero por el concentrador k y después por el m , y las variables binarias y_k , que toman el valor 1 si, y sólo si, se ubica un concentrador en el punto k . La formulación básica para PLC viene dada en la Figura 3.2.

Los coeficientes C_{ijkm} son iguales a $b_{ik} + c_{km} + d_{mj}$. Las restricciones (3.2) garantizan que en cada ruta sólo se atraviesan dos concentradores (o uno en caso de darse el par (k,k)), y las restricciones (3.3) y (3.4), que se paga el coste asociado a un concentrador en caso de que éste se utilice.

$$\begin{aligned}
(\text{FB}) \quad \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q W_{ij} C_{ijkm} x_{ijkm} + \sum_{k=1}^q F_k y_k \quad (3.1) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q x_{ijkm} = 1 \quad \forall i, j \in N \quad (3.2) \\
& x_{ijkm} \leq y_k \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M \quad (3.3) \\
& x_{ijkm} \leq y_m \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M \quad (3.4) \\
& y_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in M \\
& x_{ijkm} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M
\end{aligned}$$

Figura 3.2: Formulación básica para PLC

Veamos cómo podemos modificar esta formulación para PLC de manera que tengamos un problema de empaquetamiento.

3.2.2. Formulación como un problema de empaquetamiento

Para formular PLC como un problema de empaquetamiento, Marín sigue en [23] un razonamiento similar al presentado por Cho en 1983 en [9] para el problema de localización de plantas simple.

Tomamos las variables binarias $y'_k = 1 - y_k \quad \forall k$, y una cantidad M suficientemente grande. Consideramos entonces el valor $M \sum_i \sum_j W_{ij}$ y lo reescribimos, utilizando (3.2), como

$$\sum_i \sum_j \left(\sum_k \sum_m M W_{ij} x_{ijkm} \right).$$

Si restamos este valor a la función objetivo (3.1), y reemplazamos las variables y_k por las nuevas y'_k , tenemos el problema de minimizar la función

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q W_{ij} C_{ijkm} x_{ijkm} + \sum_{k=1}^q F_k (1 - y'_k) - \sum_i \sum_j \sum_k \sum_m M W_{ij} x_{ijkm},$$

o equivalentemente,

$$\sum_{k=1}^q F_k - \sum_{k=1}^q F_k y'_k - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q W_{ij} (M - C_{ijkm}) x_{ijkm}.$$

Eliminando de esta función la constante $\sum_k F_k$ y llamando $C'_{ijkm} = M - C_{ijkm} > 0 \quad \forall i, j, k, m$, reformulamos el problema como un problema de maximización donde la función objetivo a maximizar ahora es

$$\sum_{k=1}^q F_k y'_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q W_{ij} (M - C_{ijkm}) x_{ijkm}.$$

En la Figura 3.3 se ilustra la formulación de PLC como un problema de empaquetamiento.

$$\begin{aligned}
 \text{(FPE)} \quad \max \quad & \sum_{k=1}^q F_k y'_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q W_{ij} C'_{ijkm} x_{ijkm} \quad (3.5) \\
 \text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q x_{ijkm} \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad (3.6) \\
 & x_{ijkm} + y'_k \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M \quad (3.7) \\
 & x_{ijkm} + y'_m \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M \quad (3.8) \\
 & y'_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in M \quad (3.9) \\
 & x_{ijkm} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Figura 3.3: Formulación como un problema de empaquetamiento

En la nueva formulación (FPE) para PLC, las igualdades (3.2) han sido reemplazadas por las desigualdades (3.6) para que la formulación se ajuste a la estructura de un problema de empaquetamiento. Esta modificación es posible en virtud del siguiente resultado.

Proposición 3.2.1 *Toda solución óptima de (FPE) satisface todas las desigualdades (3.6) en forma de igualdad.*

Demostración. Consideremos una solución factible que no satisfaga todas las restricciones de (3.6) con igualdad. Esto implica que para algún i_1 y algún j_1 se verifica que

$$\sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q x_{i_1 j_1 k m} = 0.$$

Si modificamos esta solución y hacemos $x_{i_1 j_1 11} = 1$, $y'_1 = 0$, obtenemos una nueva solución factible. En el peor caso, si y'_1 tomara el valor 1 en la solución óptima que hemos considerado inicialmente, el incremento en el valor de la función objetivo sería

$$C'_{i_1 j_1 11} - F_1 = M - C_{i_1 j_1 11} - F_1 > 0,$$

pues M es suficientemente grande. Por tanto, la primera solución no podía ser óptima. \square

3.2.3. Reforzamiento de la formulación

Los dos resultados que vamos a ver en el último apartado de esta sección van a tener una gran importancia a la hora de la obtención de facetas del poliedro de empaquetamiento. Estos dos teoremas, dados por Marín, tienen en cuenta la estructura de cualquier solución óptima de PLC para eliminar parte de las soluciones factibles que no son candidatas a óptimas.

Teorema 3.2.2 (FPE) *tiene siempre una solución óptima que satisface*

$$x_{ijkm} = 1 \Rightarrow x_{ij'k'm} = 0 \quad \text{para todo } i, j, j', m, \text{ y todo } k \neq k' \quad (3.11)$$

$$x_{ijkm} = 1 \Rightarrow x_{i'jkm'} = 0 \quad \text{para todo } i, i', j, k, \text{ y todo } m \neq m' \quad (3.12)$$

Demostración. Consideremos en primer lugar una solución óptima de (FPE) que verifica que $x_{ijkm} = 1 = x_{ij'k'm}$ para ciertos i, j, j', m y $k \neq k'$. Por (3.7) y (3.8), sabemos que para esta solución $y'_k = y'_m = y'_{k'} = 0$.

Uno de los costes asociados a las rutas $i \rightarrow k \rightarrow m$, $i \rightarrow k' \rightarrow m$ debe ser mayor o igual que el otro. Supongamos, por ejemplo, que $b_{ik'} + c_{k'm} \geq b_{ik} + c_{km}$. Entonces,

$$C'_{ij'km} = M - C_{ij'km} = M - (b_{ik} + c_{km}) - d_{mj'} \geq M - (b_{ik'} + c_{k'm}) - d_{mj'} = C'_{ij'k'm},$$

luego el coeficiente $C'_{ij'km}$ asociado con la variable $x_{ij'km}$ es mayor o igual que el coeficiente $C'_{ij'k'm}$ asociado a $x_{ij'k'm}$.

Como en la primera solución que hemos considerado se tiene $y'_k = y'_m = 0$, si realizamos el cambio $x_{ij'k'm} = 0$ y $x_{ij'km} = 1$ obtenemos una nueva solución factible cuyo coste no es menor. Por tanto, también es óptima. Repitiendo este proceso, la última solución óptima que se obtiene satisface (3.11). Por simetría, se verifica también (3.12). \square

Según este resultado, una solución óptima nunca incluye dos rutas desde el mismo origen i atravesando un primer *hub* diferente para ir al mismo segundo *hub*, ni tampoco dos rutas que pasen por el mismo primer *hub* y lleguen a un destino j atravesando dos segundos *hubs* diferentes.

Teorema 3.2.3 (FPE) *tiene siempre una solución óptima que satisface*

$$x_{ijkm} = 1 \Rightarrow x_{ij'\ell k} = 0 \quad \text{para todo } i, j, j', m, \text{ y todo } k \neq \ell \quad (3.13)$$

$$x_{ijkm} = 1 \Rightarrow x_{i'jml} = 0 \quad \text{para todo } i, i', j, k, \text{ y todo } m \neq \ell \quad (3.14)$$

Demostración. Consideremos en primer lugar una solución óptima de (FPE) que verifica que $x_{ijkm} = 1 = x_{ij'\ell k}$ para ciertos i, j, j', m y $k \neq \ell$. Por (3.6), (3.7) y (3.8), sabemos que para esta solución $x_{ij'kk} = y'_k = y'_m = y'_\ell = 0$.

Como en esta solución óptima $x_{ij'kk} = 0$ y $x_{ij'\ell k} = 1$, entonces el coste $b_{i\ell} + c_{\ell k}$ debe ser menor o igual que el coste b_{ik} . Por tanto, tenemos que

$$b_{i\ell} + c_{\ell k} + c_{km} + d_{mj} \leq b_{ik} + c_{km} + d_{mj}.$$

Como los costes verifican la desigualdad triangular,

$$C'_{ijml} = b_{i\ell} + c_{\ell m} + d_{mj} \leq b_{i\ell} + c_{\ell k} + c_{km} + d_{mj} \leq b_{ik} + c_{km} + d_{mj} = C'_{ijkm}.$$

En la primera solución que hemos considerado se tiene $y'_\ell = y'_m = 0$. Si realizamos el cambio $x_{ijkm} = 0$ y $x_{ijlm} = 1$ obtenemos una nueva solución factible cuyo coste no es menor. Por tanto,

también es óptima. Repitiendo este proceso, la última solución óptima que se obtiene satisface (3.13). Por simetría, se verifica también (3.14). \square

El Teorema 3.2.2 asegura que si en una solución óptima existe una ruta que va directamente desde un punto i hacia un concentrador dado, entonces no existe otra ruta óptima que atraviese un concentrador distinto previo al dado, y de manera simétrica, si existe una solución óptima que vaya directamente de un concentrador a un destino j , entonces no hay ningún camino desde dicho concentrador hacia el destino que atraviese un concentrador diferente.

$$x_{ijkm} + x_{ij'k'm} \leq 1 \quad \forall i, j, j', m, k \neq k' \quad (3.15)$$

$$x_{ijkm} + x_{i'jkm'} \leq 1 \quad \forall i, i', j, k, m \neq m' \quad (3.16)$$

$$x_{ijkm} + x_{ij'\ell k} \leq 1 \quad \forall i, j, j', m, k \neq \ell \quad (3.17)$$

$$x_{ijkm} + x_{i'jml} \leq 1 \quad \forall i, i', j, k, m \neq \ell \quad (3.18)$$

Figura 3.4: Desigualdades obtenidas para PLH

Estos dos resultados generan las restricciones ilustradas en la Figura 3.4. Añadiendo estas desigualdades a la formulación de empaquetamiento de PLC, obtenemos una nueva formulación reforzada que continúa siendo un problema de empaquetamiento válido para nuestro problema. Llamaremos (PLC) a esta última formulación, detallada en la Figura 3.5.

3.3. Obtención de facetas clique

Dado un grafo $G = (V, E)$, definimos el *vector de incidencia* de un subconjunto $V' \subset V$ como el vector de dimensión $|V|$ cuyas componentes son ceros y unos, de forma que la componente i -ésima es igual a 1 si, y sólo si, el i -ésimo nodo de V pertenece a V' .

Denotemos $P(G)$ al conjunto de vectores de incidencia de todos los empaquetamientos de un grafo G , y $P_I(G)$ a su envolvente convexa. Así, si G es el grafo asociado a un problema de empaquetamiento, el conjunto factible de dicho problema es $P(G)$ y las soluciones óptimas se pueden obtener resolviendo el problema de optimización lineal de maximizar ct con $t \in P_I(G)$.

A lo largo de esta sección, llamaremos $G(n, q)$ al grafo intersección asociado a la nueva formulación obtenida para (PLC), y por $P^{nq} := P(G(n, q))$ a la envolvente convexa de los nodos de $G(n, q)$, esto es, a la envolvente convexa de las soluciones factibles de (PLC). Este poliedro P^{nq} obtenido está generado por el conjunto de vectores de incidencia de todos los empaquetamientos de $G(n, q)$.

$$\begin{aligned}
(\text{PLC}) \quad \text{máx} \quad & \sum_{k=1}^q F_k y'_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q W_{ij} C'_{ijkm} x_{ijkm} & (3.5) \\
\text{s.a} \quad & \sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q x_{ijkm} \leq 1 \quad \forall i, j \in N & (3.6) \\
& x_{ijkm} + y'_k \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M & (3.7) \\
& x_{ijkm} + y'_m \leq 1 \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M & (3.8) \\
& x_{ijkm} + x_{ij'k'm} \leq 1 \quad \forall i, j, j', m, k \neq k' & (3.15) \\
& x_{ijkm} + x_{i'jkm'} \leq 1 \quad \forall i, i', j, k, m \neq m' & (3.16) \\
& x_{ijkm} + x_{ij'lk} \leq 1 \quad \forall i, j, j', m, k \neq l & (3.17) \\
& x_{ijkm} + x_{i'jml} \leq 1 \quad \forall i, i', j, k, m \neq l & (3.18) \\
& y'_k \in \{0, 1\} \quad \forall k \in M & (3.9) \\
& x_{ijkm} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad \forall k, m \in M & (3.10)
\end{aligned}$$

Figura 3.5: Formulación como problema de empaquetamiento reforzada para PLH

Para ilustrar las incompatibilidades de las variables en el grafo intersección, vamos a considerar bloques de $n \times n$ cajas, donde cada caja contiene $q \times q$ rectángulos. Cada uno de los nodos asociados a las variables x , que denominaremos nodos x , va a estar representado por uno de esos rectángulos. Denotaremos nodo y' a cada uno de los nodos asociados a una variable y'_k , el cual va a estar representado por el k -ésimo círculo. Supondremos que $n, q \geq 3$. Así, en el grafo intersección, la caja situada en la primera fila de cajas y la segunda columna de cajas está asociada con las variables x_{12km} para todo k y $m \in M$. Dicha caja presenta a su vez la misma estructura, con k filas correspondientes a cada k -ésimo primer *hub* y k columnas correspondientes a los segundos *hubs* de las rutas.

La Figura 3.6 ilustra en el grafo $G(3, 4)$ los nodos incompatibles con x_{1223} (a la izquierda) y los nodos incompatibles con x_{1233} (a la derecha) en el grafo intersección. En la parte izquierda de la figura, el rectángulo coloreado de magenta está asociado al nodo x_{1223} , y los nodos del grafo con el que no es compatible dicho nodo, están recuadrados en el mismo color. En virtud de (3.7) y (3.8), sabemos que x_{1223} es incompatible con los nodos y'_2 e y'_3 . Las desigualdades (3.6) implican la incompatibilidad entre todos los nodos de la misma caja. Por (3.15) y (3.16), sabemos que el nodo x_{1223} es incompatible con nodos de otras cajas de la primera fila de cajas que se encuentran en la misma columna $m = 3$ pero en una fila $k \neq 2$, y también con nodos de otras cajas de la segunda columna de cajas situados en la misma fila $k = 2$ pero columna $m \neq 3$. Las desigualdades (3.17) generan las siguientes incompatibilidades con nodos de otras cajas situadas en la primera fila de cajas: los nodos situados en la segunda columna y en una

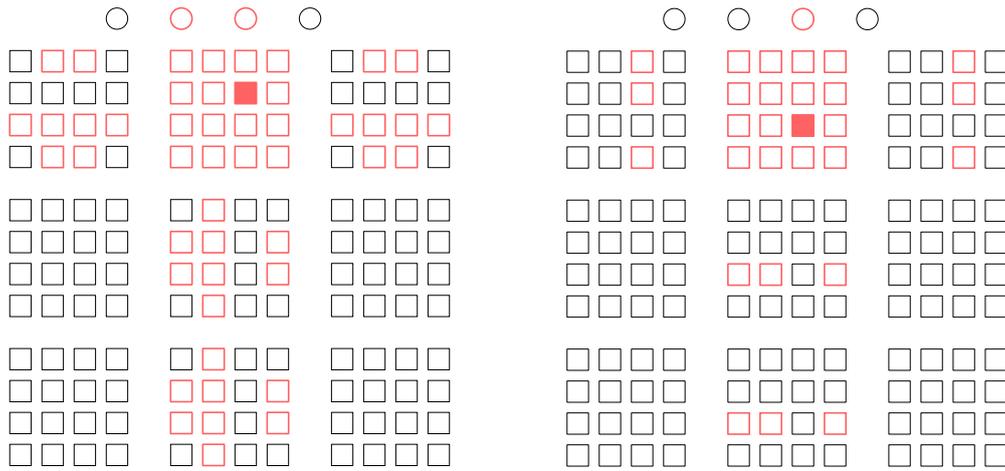


Figura 3.6: Representación del grafo intersección $G(3,4)$ de (PLH)

fila distinta de la de x_{1223} , y los nodos situados en la fila tercera. El resto de incompatibilidades vienen dadas análogamente por (3.18).

Un conjunto de facetas para el poliedro asociado a (PLH) son las desigualdades que tienen coeficientes binarios y lado derecho igual a 1. Para obtener nuevas facetas del poliedro, Marín utiliza el resultado de Padberg demostrado en la primera sección (Teorema 3.1.4) e identifica los cliques del grafo intersección $G(n, q)$, obteniendo así las facetas clique que demostraremos en los teoremas 3.3.1-3.3.5. Buscaremos, por tanto, subgrafos maximales y completos del grafo intersección que van a definir facetas clique de P^{nq} . Conocer el conjunto de hiperplanos que caracterizan a P^{nq} nos permitiría resolver el problema maximizando la función objetivo en dichas desigualdades lineales, sin restricciones de integridad, pero esto en general no es posible. Sin embargo, con un conocimiento parcial de tal conjunto de hiperplanos, se pueden resolver también instancias bastante grandes con la combinación de técnicas de ramificación y una nueva formulación reforzada.

Como se observa en la formulación del problema, los nodos y' no están conectados entre sí. Por tanto, un clique en el grafo intersección $G(n, q)$ contendrá solamente un nodo y' , o ninguno.

Teorema 3.3.1 *Las únicas facetas clique de P^{nq} que contienen un nodo y' son las desigualdades*

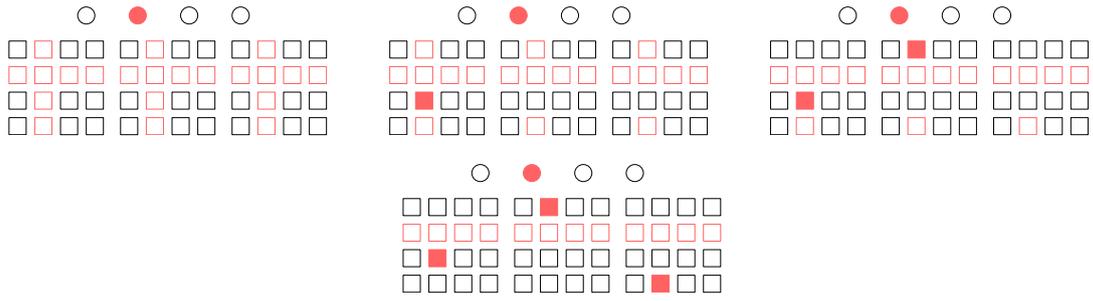
$$y'_a + \sum_{k=1}^q x_{ij(a)ak} + \sum_{k \neq a} x_{ij(k)ka} \leq 1 \tag{3.19}$$

con $a \in M, i \in N, j(k)$ un índice en N asociado a cada $k \in M$, y

$$y'_a + \sum_{k=1}^q x_{i(a)jka} + \sum_{k \neq a} x_{i(k)jak} \leq 1 \tag{3.20}$$

con $a \in M, j \in N, i(k)$ un índice en N asociado a cada $k \in M$.

Demostración. Sabemos que los cliques que contienen un nodo y' no pueden contener más nodos y' . Si un nodo x pertenece al clique, entonces otros nodos con el mismo primer índice, es decir, situados en la misma columna pero en fila diferente, pueden pertenecer al clique.



Además, se debe añadir una fila completa en una de las cajas asociadas con el primer índice para que el subgrafo de $G(n, q)$ obtenido sea completo y maximal. Se obtiene así la desigualdad (3.19).

Por otro lado, si un nodo x pertenece al clique, entonces otros nodos con el mismo segundo índice, es decir, situados en la misma fila pero en columnas diferentes, pueden también pertenecer al clique. Para que el subgrafo obtenido en este caso sea completo maximal, se tiene que añadir una columna completa en una de las cajas asociadas con el segundo índice. Se generan así las desigualdades (3.20). □

Teorema 3.3.2 *Las únicas facetas clique de P^{nq} que no contienen nodos y' y que contienen todos los nodos x en la misma caja son las desigualdades*

$$\sum_{k=1}^q \sum_{m=1}^q x_{ijkm} \leq 1 \quad i, j \in N. \tag{3.21}$$

Demostración. Este resultado es evidente, puesto que todos los nodos x situados en la misma caja son adyacentes en el grafo intersección. □

Todas las facetas clique que obtengamos en los siguientes resultados no van a contener ningún nodo y' , y van a contener nodos x en más de una caja. Además, las desigualdades que obtengamos van a ser simétricas por parejas, diferenciándose según fijemos el nodo i de salida o el nodo j de llegada. Aunque las especifiquemos todas, nos limitaremos a demostrar una desigualdad de cada par de desigualdades simétricas.

Teorema 3.3.3 *Las únicas facetas clique de P^{nq} que no contienen nodos y' y que contienen nodos x en la diagonal de una caja, así como en alguna otra caja, son las desigualdades*

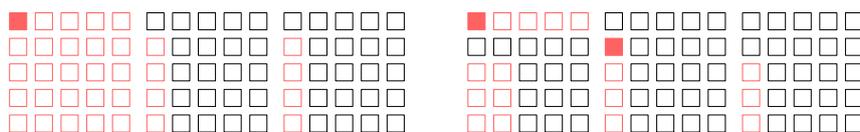
$$\sum_{m=1}^q x_{ij_1am} + \sum_{k \neq a,b} x_{ij_1ka} + \sum_{k \neq a,b} x_{ij_1kb} + x_{ij_2ba} \leq 1 \tag{3.22}$$

con $i, j_1, j_2 \in N, j_1 \neq j_2, a, b \in M, a \neq b, y$

$$\sum_{k=1}^q x_{ij_1ka} + \sum_{m \neq a,b} x_{ij_1am} + \sum_{m \neq a,b} x_{ij_1bm} + x_{ij_2jab} \leq 1 \tag{3.23}$$

con $i_1, i_2, j \in N, i_1 \neq i_2, a, b \in M, a \neq b$.

Demostración. Consideremos un primer nodo situado en la diagonal de una caja j_1 , x_{ij_1aa} , y un segundo nodo en una caja diferente j_2 asociado con el mismo origen i y adyacente a x_{ij_1aa} , x_{ij_2ba} , con b distinto de a .



Como y_a no pertenece al clique, necesitamos incluir en el clique otro nodo x en la caja j_1 , y añadiendo los nodos vecinos de estos tres nodos x se obtiene la desigualdad (3.22).

$$\tag{3.22}$$

□

Para facilitar el seguimiento de los dos últimos resultados de esta sección, acompañaremos cada paso de la demostración con una ilustración del estado en que se encuentra el subgrafo que estamos completando. Recuadrar un nodo en color magenta indica que este nodo es incompatible con los ya incluidos en el subgrafo, por lo que necesitaremos o bien incluir dicho nodo para alcanzar la maximalidad, o bien incluir cualquier otro que no sea adyacente para que el nodo recuadrado no pueda formar parte del clique.

Colorear un nodo va a representar que ya hemos incluido en el subgrafo dicho nodo: así, todos los nodos coloreados serán adyacentes (el subgrafo que vamos construyendo siempre es completo). Distinguiremos con colores los nodos que se introducen en el subgrafo en función del subapartado en que se encuentren. Además, los nodos recuadrados en colores distintos al magenta serán nodos cuya inclusión en el clique intentemos evitar para no obtener de nuevo facetas ya obtenidas en casos anteriores. Los puntos suspensivos entre gráficos indican que en dicho paso, se incluye más de un nodo hasta completar la faceta.

Teorema 3.3.4 *Las únicas facetas clique de P^{nq} que no contienen nodos y' ni nodos x en la diagonal de ninguna caja, y que contienen nodos x en al menos tres cajas diferentes, son las desigualdades*

$$\sum_{k \neq a,c} x_{ij_1ka} + x_{ij_1bc} + x_{ij_2ab} + x_{ij_2ac} + x_{ij_3ca} \leq 1, \tag{3.24}$$

$$\sum_{k \neq a,b} x_{ij_1ka} + \sum_{k \neq a,b} x_{ij_1kb} + x_{ij_2ab} + x_{ij_3ba} \leq 1, \tag{3.25}$$

$$x_{ij_1ab} + x_{ij_1ac} + x_{ij_2ba} + x_{ij_2bc} + x_{ij_3ca} + x_{ij_3cb} \leq 1, \tag{3.26}$$

con $a, b, c \in M, a \neq b \neq c \neq a, i, j_1, j_2, j_3 \in N, j_1 \neq j_2 \neq j_3 \neq j_1$, y

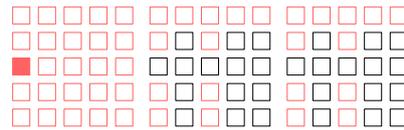
$$\sum_{m \neq a,c} x_{i_1jam} + x_{i_1jcb} + x_{i_2jba} + x_{i_2jca} + x_{i_3jac} \leq 1, \tag{3.27}$$

$$\sum_{m \neq a,b} x_{i_1jam} + \sum_{m \neq a,b} x_{i_1jbm} + x_{i_2jba} + x_{i_3jab} \leq 1, \tag{3.28}$$

$$x_{i_1jba} + x_{i_1jca} + x_{i_2jab} + x_{i_2jcb} + x_{i_3jac} + x_{i_3jbc} \leq 1, \tag{3.29}$$

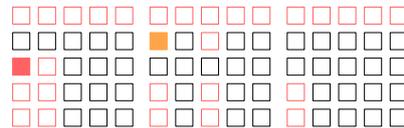
con $a, b, c \in M, a \neq b \neq c \neq a, i_1, i_2, i_3, j \in N, i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq i_1$.

Demostración. Consideremos un primer nodo x_{ij_1ca} , con c distinto de a ,



y un segundo nodo situado en una caja diferente pero con el mismo origen i . Según las incompatibilidades dadas por las restricciones (3.15) y (3.17), pueden darse tres casos:

- (1) El segundo nodo se encuentra también en la columna a , x_{ij_2ba} , con b distinto de a y c .



En este caso, tanto x_{ij_1ca} como x_{ij_2ba} , así como los nodos de una tercera caja que podríamos incluir en la misma faceta, son vecinos del nodo y'_a , luego necesitamos añadir un nodo en una de las dos primeras cajas que no lo sea para evitar que y'_a forme parte del clique. Tenemos dos posibilidades no simétricas:

- a) Añadir un nodo en la primera caja situado en la columna b y en una fila d , x_{ij_1db} , con d distinto de a , b y c . Entonces, el nodo que añadamos en la tercera caja tiene que ser



uno de los siguientes:

- i) x_{ij_3ab} . Añadiendo uno de los nodos x_{ij_2bc} o x_{ij_3ad} , y completando la maximalidad del clique, se obtienen desigualdades de la forma de (3.24).

(3.24)

Si ninguno de estos dos nodos es añadido, todos los nodos incompatibles que quedan en la primera caja forman parte del clique, y se obtiene (3.25).

(3.25)

ii) x_{ij_3ad} . Añadiendo los restantes nodos incompatibles al clique se obtiene una faceta de la forma de (3.24).

(3.24)

b) Añadir en la primera caja el nodo x_{ij_1cb} , situado también en la columna b pero en la misma fila c del nodo que ya tenemos.

En este caso, podemos añadir en la tercera caja uno de los siguientes nodos:

i) x_{ij_3ab} . Si añadimos ahora nodos en las dos cajas j_2 y j_3 , obtenemos la desigualdad (3.26); si añadimos nodos sólo en una de las cajas segunda y tercera, obtenemos facetas de la forma de (3.24); y si únicamente añadimos nodos en la caja j_1 , se obtiene la faceta (3.25).

(3.26)

(3.24)

(3.24)

(3.25)

ii) x_{ij_3ac} . Si no añadimos x_{ij_3ab} , obtenemos facetas de la forma de (3.24) añadiendo el resto de nodos para completar el clique o bien en la primera caja o bien en la segunda.

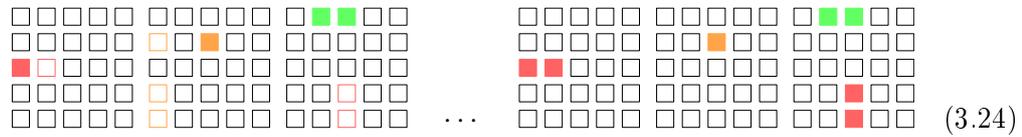
(3.24)

(3.24)

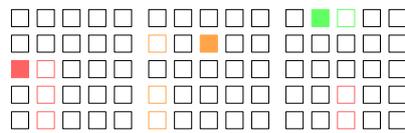
(2) El segundo nodo se encuentra en la columna c , x_{ij_2bc} , con b distinto de a y c , y ningún nodo en la columna a se añade a la faceta.

Podemos ahora añadir en una tercera caja alguno de los nodos x_{ij_3ab} , x_{ij_3ac} o x_{ij_3dc} , con d distinto de a, b y c , para formar el clique:

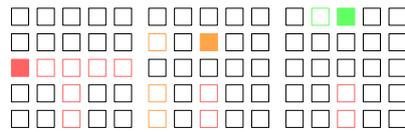
- a) Si añadimos el nodo x_{ij_3ab} y también el nodo x_{ij_3ac} , obtenemos una faceta de la forma de (3.24).



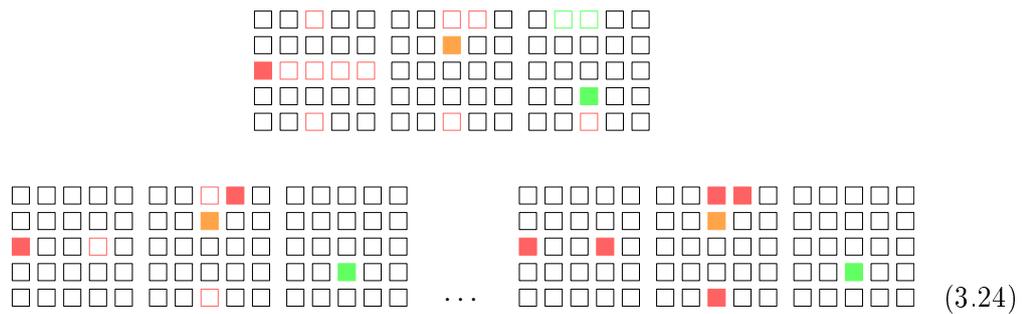
- b) Si añadimos el nodo x_{ij_3ab} pero no añadimos el nodo x_{ij_3ac} , entonces se obtiene la faceta (3.24) completando el clique con nodos considerados en casos anteriores.



- c) Si añadimos el nodo x_{ij_3ac} pero no añadimos el nodo x_{ij_3ab} , entonces todos los nodos que nos quedan son adyacentes a y'_c y no se puede obtener una faceta que no contenga nodos y' .



- d) Si añadimos el nodo x_{ij_3dc} , con d distinto de a, b y c , y no añadimos los nodos x_{ij_3ab} y x_{ij_3ac} , la única manera de evitar que el nodo y'_c forme parte del clique es añadir a la faceta el nodo x_{ij_2ad} . Completando el subgrafo se obtiene la desigualdad (3.24).



- (3) El segundo nodo se encuentra en la fila a , x_{ij_2ab} , con b distinto de a y c .



Entonces, para evitar que y'_a forme parte del clique podemos añadir el nodo x_{ij_3bc} en la tercera caja y obtener una faceta de la forma de (3.24), o añadir en la primera caja el nodo x_{ij_1cb} y no añadir el nodo x_{ij_3bc} , obteniendo así la desigualdad (3.25).

$$(3.24)$$

$$(3.25)$$

Si tomamos el segundo nodo en una caja asociada al mismo destino j , se obtienen las facetas simétricas (3.27) - (3.29). \square

Teorema 3.3.5 *Las únicas facetas clique de P^{nq} que no contienen nodos y' ni nodos x en la diagonal de ninguna caja, y que contienen nodos x en exactamente dos cajas diferentes, son las desigualdades*

$$\sum_{k \neq a} x_{ij_1ka} + x_{ij_1bc} + x_{ij_1cb} + x_{ij_2ab} + x_{ij_2ac} \leq 1, \quad (3.30)$$

$$\sum_{k \neq a,b} x_{ij_1ka} + x_{ij_1cb} + x_{ij_2ab} + x_{ij_2ac} + x_{ij_2ba} \leq 1, \quad (3.31)$$

$$x_{ij_1ac} + x_{ij_1bd} + x_{ij_2dc} + x_{ij_2da} + x_{ij_2cd} + x_{ij_2cb} \leq 1, \quad (3.32)$$

$$\sum_{k \neq a,b} x_{ij_1ka} + \sum_{k \neq a,b} x_{ij_1kb} + x_{ij_2ab} + x_{ij_2ba} \leq 1, \quad (3.33)$$

con $i, j_1, j_2 \in N, j_1 \neq j_2, a, b, c, d \in M$ diferentes, y

$$\sum_{m \neq a} x_{i_1jam} + x_{i_1jcb} + x_{i_1jbc} + x_{i_2jba} + x_{i_2jca} \leq 1, \quad (3.34)$$

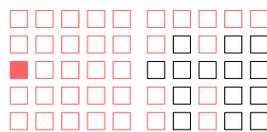
$$\sum_{m \neq a,b} x_{i_1jam} + x_{i_1jbc} + x_{i_2jba} + x_{i_2jca} + x_{i_2jab} \leq 1, \quad (3.35)$$

$$x_{i_1jca} + x_{i_1jdb} + x_{i_2jcd} + x_{i_2jad} + x_{i_2jdc} + x_{i_2jbc} \leq 1, \quad (3.36)$$

$$\sum_{m \neq a,b} x_{i_1jam} + \sum_{m \neq a,b} x_{i_1jbm} + x_{i_2jba} + x_{i_2jab} \leq 1, \quad (3.37)$$

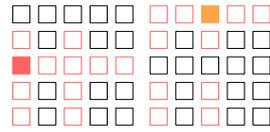
con $i_1, i_2, j \in N, i_1 \neq i_2, a, b, c, d \in M$ diferentes.

Demostración. Consideremos un primer nodo x_{ij_1ca} , con c distinto de a ,



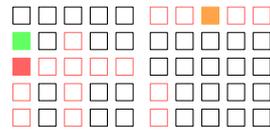
y un segundo nodo situado en una caja diferente pero con el mismo origen i . Pueden darse cuatro casos:

- (1) El segundo nodo se encuentra en la fila a y columna c , x_{ij_2ac} .



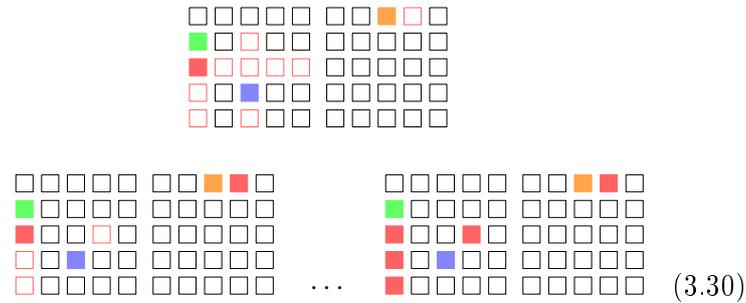
En este caso, tanto x_{ij_1ca} como x_{ij_2ac} son vecinos de y'_a y y'_c , luego debemos añadir a la faceta algún nodo que no lo sea. Veamos las tres posibilidades, no simétricas, que pueden darse si evitamos primero que y'_c pertenezca al clique:

- a) Añadir un nodo en la primera caja situado en la columna a , x_{ij_1ba} , con b distinto de a y c .

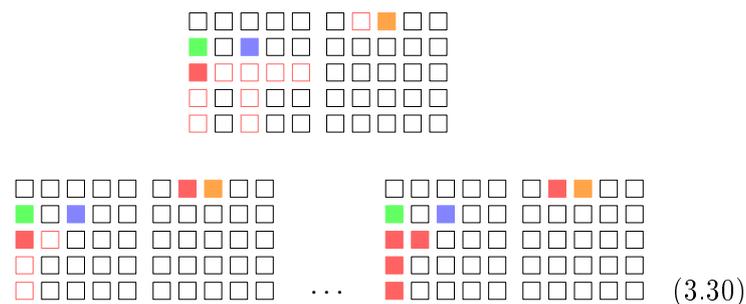


Para evitar ahora que y'_a esté en la faceta tenemos tres opciones:

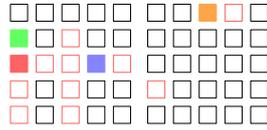
- i) Añadir en la primera caja el nodo x_{ij_1dc} . Entonces, en la segunda caja únicamente podemos incluir el nodo x_{ij_2ad} para evitar que un nodo en la diagonal de j_1 esté en el clique, y completando la faceta con los nodos incompatibles que quedan en la primera caja se obtiene la desigualdad (3.30).



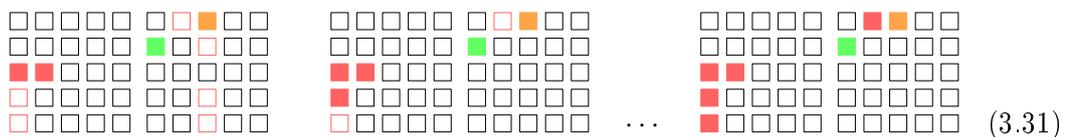
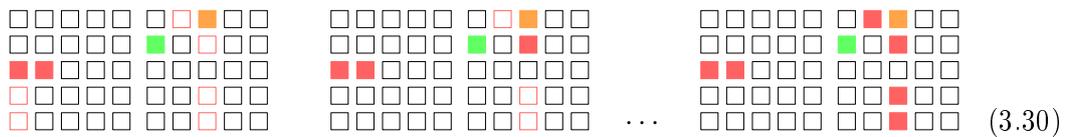
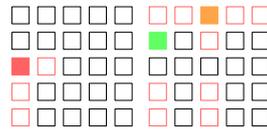
- ii) Añadir en la primera caja el nodo x_{ij_1bc} o el nodo x_{ij_1cb} . Entonces, en la segunda caja únicamente podemos incluir el nodo x_{ij_2ab} , y de nuevo obtenemos una faceta de la forma de (3.30).



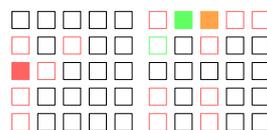
iii) Añadir en la primera caja el nodo x_{ij_1cd} . Entonces, en la segunda caja únicamente podemos incluir los nodos x_{ij_2ad} y x_{ij_2da} . Si añadimos solamente x_{ij_2ad} , obtenemos la desigualdad (3.30), y si incluimos también x_{ij_2da} , obtenemos una faceta de la forma de (3.31).



b) Añadir en la segunda caja el nodo x_{ij_2ba} situado en la columna a . En este caso, para sea adyacente al nodo y'_a , el único nodo que podemos añadir en la primera caja es x_{ij_1cb} . Completando el clique con los nodos de la segunda caja se obtiene de nuevo la desigualdad (3.30), mientras que si lo completamos con nodos de la primera, tenemos facetas de la forma de (3.31).

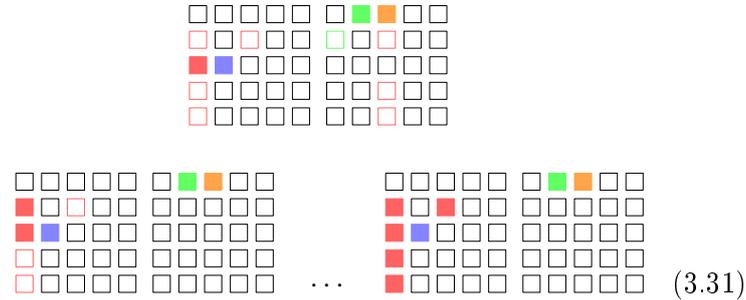


c) Añadir en la segunda caja el nodo x_{ij_2ab} situado en la fila a , y no añadir el nodo x_{ij_2ba} .

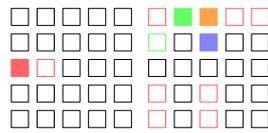


Para evitar que y'_a pueda formar parte de la faceta, tenemos ahora dos opciones en la primera caja:

i) Añadir x_{ij_1cb} , obteniendo la desigualdad (3.31).

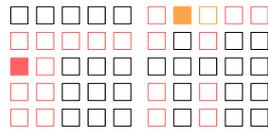


ii) Añadir x_{ij_2bc} en la segunda caja.



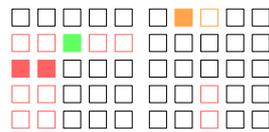
En este caso, no podemos obtener un subgrafo maximal completo al prescindir del nodo x_{ij_2ba} .

(2) El segundo nodo se encuentra en la columna a , x_{ij_2ab} , con b distinto de a y c , y el nodo x_{ij_2ac} no se añade a la faceta.

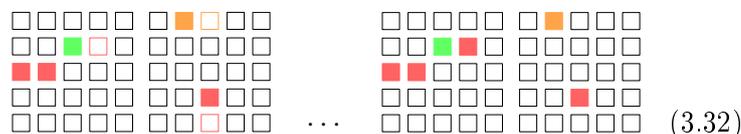


Hay cuatro formas de evitar que los nodos ya incluidos sean adyacentes a y'_a añadiendo nodos en la primera caja, de manera que en ambas cajas haya más de un nodo formando parte del clique:

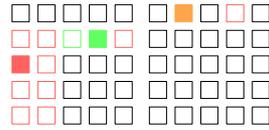
a) Añadir el nodo x_{ij_1bc} . Así, todos los nodos que quedan en la segunda caja son vecinos de x_{ij_1cb} , luego lo añadimos también al clique.



Necesitamos añadir un nodo x_{ij_2dc} a la faceta, con d distinto de a , b y c . Para evitar que sea vecino de x_{ij_2ac} en el subgrafo, añadimos en la primera caja el nodo x_{ij_1bd} , y se obtiene una desigualdad de la forma de (3.32).



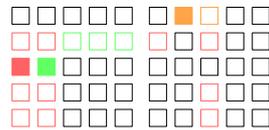
- b) Añadir el nodo x_{ij_1bd} , con d distinto de a, b y c , y no incluir en el clique el nodo x_{ij_1bc} .



Para evitar que el nodo x_{ij_1bc} sea adyacente a los que nodos del clique, añadimos ahora en la segunda caja x_{ij_2ad} , obteniéndose una faceta de la forma de (3.30).

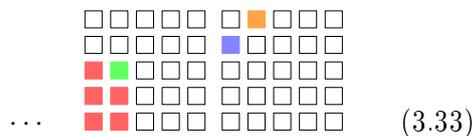
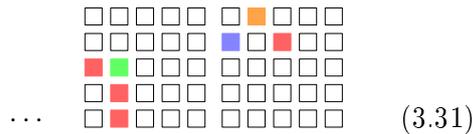
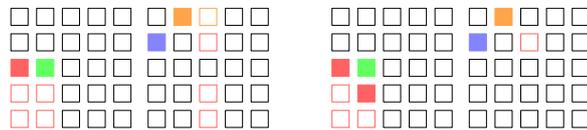


- c) Añadir el nodo x_{ij_1cb} , y no añadir ningún nodo en la fila b de la primera caja.



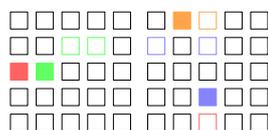
Tenemos entonces tres opciones en la segunda caja:

- i) Añadir el nodo x_{ij_2ba} , obteniendo las desigualdades (3.31) y (3.33).

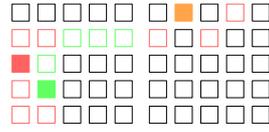


- ii) Añadir el nodo x_{ij_2bc} . Entonces necesariamente para obtener un subgrafo completo maximal se necesita añadir también x_{ij_2ba} , y se obtiene de nuevo la desigualdad (3.31).

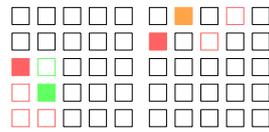
- iii) Añadir el nodo x_{ij_2dc} , entonces no se obtiene ninguna faceta que no contenga alguno de los nodos excluidos por haber sido estudiados en casos anteriores.



- d) Añadir el nodo x_{ij_1db} , con d distinto de a, b y c , y no añadir nodos en la fila b de la primera caja ni tampoco el nodo x_{ij_1cb} .



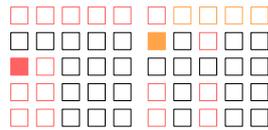
Entonces, se tiene que añadir en la segunda caja el nodo x_{ij_2ba} , y obtenemos facetas de la forma de (3.32) y (3.31), según x_{ij_2bc} pertenezca o no al clique.



(3.32)

(3.31)

- (3) El segundo nodo se encuentra en la columna a de j_2 , y no añadimos ningún nodo en la fila a de la segunda caja.



Para evitar que y'_a forme parte del clique, tenemos dos opciones no simétricas fijando el nodo x_{ij_2ba} :

- a) Añadir el nodo x_{ij_2cb} . Entonces, si añadimos en la segunda caja x_{ij_2bc} , obtenemos facetas de la forma de (3.30) y (3.31) en función de que incluyamos también o no el nodo x_{ij_2dc} . Si añadimos en la segunda caja el nodo x_{ij_2dc} pero no el x_{ij_2bc} , entonces se obtiene la desigualdad (3.32).
- b) Añadir en la primera caja el nodo x_{ij_1db} , con d distinto de a, b y c , y no añadir el nodo x_{ij_2cb} . En este caso, no podemos obtener ningún subgrafo maximal completo.
- (4) El segundo nodo se encuentra en la columna c de la caja j_2 , y ningún nodo de las filas y columnas a de j_2 forman parte del clique. Entonces, no podemos evitar que y'_c esté en el clique, pues todos los nodos restantes están situados en alguna fila o columna c .

Si tomamos el segundo nodo en una caja asociada al mismo destino j , se obtienen las facetas simétricas (3.34) - (3.37). \square

La inclusión de algunas de estas nuevas desigualdades en la formulación resulta muy eficiente en [23] para mejorar los resultados computacionales que había hasta el momento para el problema de localización de concentradores, ya que consigue reducir el tamaño del árbol de ramificación y el tiempo computacional.

Además de las facetas clique que hemos estudiado a lo largo del capítulo, existen otros tipos facetas que podemos obtener para los problemas de empaquetamiento, como son aquellas generadas por el levantamiento de agujeros impares. Un agujero en el grafo intersección es un ciclo del grafo de longitud superior a tres y sin cuerdas, esto es, sin aristas que unan dos nodos no adyacentes del ciclo. Sin embargo, la inclusión de este tipo de facetas no devuelven tan buenos resultados computacionales.

En el siguiente capítulo del trabajo, vamos a incluir un análisis semejante al de este capítulo que hemos realizado nosotros para otro problema de localización discreta. Además de generar nuevas desigualdades válidas para la formulación del problema, analizaremos la eficiencia de estas desigualdades mediante la obtención de resultados computacionales.

Capítulo 4

Comparativa de formulaciones para un problema de localización de plantas

En este último capítulo del trabajo, hemos realizado nosotros un estudio en la línea del capítulo anterior para otro problema de optimización entera, el problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido, obteniendo nuevas desigualdades válidas y llevando a cabo una comparativa computacional entre distintas formulaciones para el problema.

El problema de localización de plantas simple sobre un grafo con conjunto de nodos V tiene como objetivo escoger un subconjunto de nodos de V que vayan a ser utilizados como plantas, y asignar cada uno de los demás nodos a una de dichas plantas, de manera que se minimice el coste total. Este coste total va a depender tanto del coste de apertura de cada una de las plantas elegidas como del coste generado por la asignación de cada nodo a una planta, y depende de cada grafo.

En la Figura 4.1 se ilustra el esquema de una solución factible para un problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido completo (a la izquierda) y sobre otro no completo (a la derecha) de 5 nodos. En la solución para el grafo completo, dos de los nodos del grafo, el nodo 2 y el nodo 5, son elegidos plantas, y los nodos 1, 3 y 4 son asignados a una de estas plantas. En la solución del grafo no completo, en cambio, se han elegido tres plantas, los nodos 2, 3 y 5. El coste total para cada una de estas soluciones vendrá dado, tal y como formalizaremos más adelante, por la suma de los costes de instalación de cada planta y de los costes asociados a cada uno de los arcos del grafo solución, que aparecen remarcados.

Un problema similar al problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido que podemos encontrar en la literatura es el de la p -mediana, cuyas propiedades poliédricas y algunas familias de desigualdades válidas han sido estudiadas en Avella et al. [1], y para el que posteriormente se llevó a cabo un estudio computacional en [2]. A diferencia del problema que estamos considerando en este capítulo, el problema de la p -mediana en un grafo establece como una restricción más del problema el número de nodos mediana que deben ser asignados.

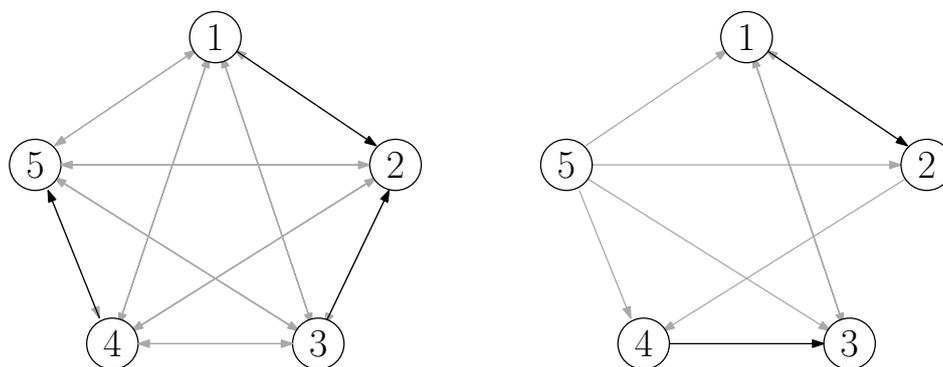


Figura 4.1: Solución factible para el problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido completo (izquierda) y sobre otro grafo no completo (derecha), ambos de 5 nodos

En la primera sección de este capítulo, introduciremos formalmente el modelo y aportaremos una formulación básica para el problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido completo. Esta formulación va a tener la estructura de un problema de empaquetamiento de nodos, y a partir de la construcción del grafo intersección asociado, obtendremos una formulación alternativa para el problema con nuevas desigualdades (algunas de ellas más fuertes que las de la primera formulación). Una vez hecho esto, llevaremos a cabo una comparativa computacional entre ambas formulaciones, y analizaremos el efecto de estas nuevas desigualdades en el tiempo de resolución y en la cota dada por la relajación lineal del problema. En la segunda sección del capítulo, consideraremos el problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido que no es completo, obteniendo de nuevo resultados para la comparativa de las formulaciones resultantes.

4.1. El problema de localización de plantas simple en un grafo dirigido completo

Consideremos un grafo completo con conjunto de nodos V . Para cada par de nodos $i, j \in V$ vamos a definir la variable binaria x_{ij} , que toma el valor 1 si el nodo i es asignado a la planta j , y 0 en otro caso. Dado $j \in V$, si $x_{jj} = 1$, entonces el nodo j se asigna a sí mismo y es, por tanto, una planta.

Vamos a denotar por $f_j > 0$ al coste asociado a la instalación de una planta en el nodo j , y por $c_{ij} \geq 0$ al coste de servir al nodo i desde la planta j , o equivalentemente, al peso asociado al arco del grafo que sale del nodo i y entra en el nodo j . Supondremos $c_{jj} = 0$ para todo $j \in V$. El objetivo del problema es, por tanto, el de minimizar la siguiente función:

$$\sum_{j \in V} f_j x_{jj} + \sum_{j \in V} \sum_{i \in V} c_{ij} x_{ij}.$$

$$(A) \quad \min \quad \sum_{j \in V} f_j + \sum_{j \in V} \sum_{i \neq j} (c_{ij} - f_j) x_{ij} \quad (4.1)$$

$$\text{s.a.} \quad x_{ij} + x_{ik} \leq 1 \quad \forall i, j, k \in V, i \neq j \neq k \quad (4.2)$$

$$x_{ij} + x_{jk} \leq 1 \quad \forall i, j, k \in V, i \neq j, j \neq k \quad (4.3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j$$

Figura 4.2: Formulación básica (A) para PLPS

Para asociar cada una de las variables binarias a un arco del grafo, vamos a eliminar de la función objetivo las variables x_{jj} despejándolas de la relación

$$\sum_{j \in V} x_{ij} = 1 \quad \text{para cada } i,$$

que se verifica puesto que cada nodo i ha de ser asignado a una planta, quedando entonces como función a minimizar

$$\sum_{j \in V} f_j \left(1 - \sum_{i \neq j} x_{ij} \right) + \sum_{j \in V} \sum_{i \neq j} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j \in V} f_j + \sum_{j \in V} \sum_{i \neq j} (c_{ij} - f_j) x_{ij}.$$

En la Figura 4.2 se muestra la formulación básica del problema de localización de plantas simple, que abreviaremos como PLPS. En dicha formulación, las desigualdades (4.2) garantizan que en una solución factible, si el nodo i es servido desde una planta j , entonces no puede ser servido desde otra planta k , o dicho de otra manera, no puede haber ningún nodo del grafo solución del que partan dos aristas. Las desigualdades (4.3) indican que si el nodo j se asigna a una planta k , entonces no puede haber un nodo i asignado a j , pues j no es planta, y también que si un nodo i se asigna a otro nodo j , entonces j va a ser una planta y no va a poder salir de él una arista en el grafo solución hacia ningún nodo k distinto de j .

Si nos fijamos en (4.1), la función objetivo de nuestro problema está formada por una suma de constantes positivas y por otra suma de variables x_{ij} con coeficientes las diferencias $c_{ij} - f_j$. Si estas diferencias son siempre positivas, el valor mínimo se alcanza cuando tomamos todas las variables x_{ij} iguales a cero. En esta solución, todos los nodos son elegidos como nodos planta. Si queremos obtener una solución diferente a ésta, con un valor de la función objetivo menor y que sea una solución válida para el problema de localización de plantas simple en un grafo, tomaremos $f_j > c_{ij}$ para cada j y cada i . De esta manera, la función objetivo forzaría a que el máximo número de arcos del grafo estén en la solución del problema (que los x_{ij} con $i \neq j$ sean igual a 1), mientras que las restricciones (4.2) y (4.3) van a controlar que se asigne cada nodo exactamente a una planta y la solución tenga, en definitiva, la estructura que buscamos.

Como se puede observar, no hemos considerado en la formulación del problema las variables x_{jj} para $j \in V$. Esta formulación para PLPS sigue la estructura de un problema de empaqueta-

miento de nodos. Analicemos las incompatibilidades de las variables dadas por las restricciones (4.2) y (4.3) para construir el grafo intersección asociado y determinar en él sus cliques.

Para la construcción del grafo intersección, vamos a considerar una caja de $n \times n$ nodos, con n el cardinal de V , donde cada nodo situado en la i -ésima fila y la j -ésima columna esté asociado a una variable x_{ij} . Tomemos la variable x_{23} . En virtud de la desigualdad (4.2), sabemos que x_{23} es incompatible con toda variable x_{2k} , con $k \neq 2, 3$. Así, en el grafo intersección, el nodo asociado a x_{23} será adyacente a todos los nodos situados en la fila 2 y en una columna k distinta de 2 y 3.

La desigualdad (4.3) genera dos tipos de incompatibilidades entre nodos del grafo intersección. Por un lado, sabemos que x_{23} es incompatible con toda variable x_{3k} , con $k \neq 3$; por otro lado, también será incompatible con toda variable x_{i2} , con $i \neq 2$.

En definitiva, un nodo x_{ij} del grafo intersección será incompatible con los nodos situados en su misma fila, con los nodos situados en la fila j -ésima y con los nodos situados en la columna i -ésima (exceptuando nodos x_{kk} , que no pertenecen al grafo intersección). En la Figura 4.3 se ilustran recuadrados en color magenta los nodos adyacentes al nodo asociado a la variable x_{23} .

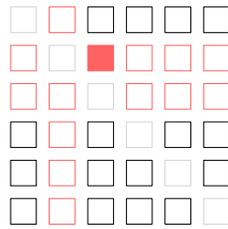


Figura 4.3: Representación en el grafo intersección de los nodos incompatibles con x_{23}

Una vez dadas las incompatibilidades en el conjunto de nodos del grafo intersección, vamos a buscar subgrafos completos maximales de dicho conjunto.

Proposición 4.1.1 *Las únicas facetas clique de la envolvente convexa de los vectores de incidencia del grafo intersección son las desigualdades*

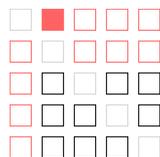
$$x_{ba} + \sum_{k \neq a} x_{ak} \leq 1, \tag{4.4}$$

con $a, b \in V, a \neq b$,

$$x_{ab} + x_{bc} + x_{ca} \leq 1, \tag{4.5}$$

con $a, b, c \in V, a \neq b \neq c \neq a$.

Demostración. Consideremos un primer nodo x_{ab} , con b distinto de a .



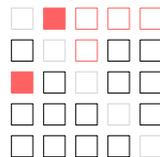
Tenemos entonces dos posibilidades que no conducen a situaciones simétricas:

- a) Añadir el nodo x_{ba} a la faceta. Las únicas opciones que nos quedan ahora son o bien añadir al clique el nodo x_{ac} o bien añadir el nodo x_{bc} , obteniendo en ambos casos una desigualdad de la forma de (4.4).

(4.4)

(4.4)

- b) Añadir el nodo x_{ca} a la faceta.



Las únicas opciones ahora son o bien añadir el nodo x_{ac} , obteniendo así una desigualdad de la forma de (4.4), o bien añadir el nodo x_{bc} , obteniendo entonces la desigualdad (4.5).

(4.4)

(4.5)

□

La Proposición 4.1.1 nos proporciona nuevas desigualdades que podemos añadir a la formulación (A) para PLPS. Como se puede observar, las desigualdades de la forma de (4.4) son más

$$\begin{aligned}
\text{(B)} \quad \min \quad & \sum_{j \in V} f_j + \sum_{j \in V} \sum_{i \neq j} (c_{ij} - f_j) x_{ij} \\
\text{s.a} \quad & x_{ki} + \sum_{j \neq i} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i, k \in V, i \neq k
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 1 \quad \forall i, j, k \in V, i \neq j \neq k \neq i \tag{4.7}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j$$

Figura 4.4: Formulación (B) para PLPS

fuerzas que las dadas por (4.2) y (4.3), ya que cualquier solución que satisfaga las desigualdades (4.4) va a cumplir también las restricciones (4.2) y (4.3). Por tanto, al añadir a la formulación (A) las nuevas desigualdades obtenidas, podemos prescindir de las que ya teníamos y seguimos teniendo una formulación válida. La Figura 4.4 ilustra la nueva formulación (B) para el problema de localización de plantas simple tras incluir las facetas clique obtenidas en esta sección.

Comparativa entre distintas formulaciones del problema. Resultados computacionales

Una vez obtenidas las formulaciones (A) y (B) para el problema de localización de plantas simple en un grafo completo, vamos a ilustrar y comentar en esta sección los resultados que hemos obtenido al compararlas, y también al comparar (B) con una formulación que denotaremos (C), obtenida al eliminar de (B) las restricciones (4.7). Todas estas formulaciones han sido implementadas en el programa de optimización Xpress y ejecutadas en un procesador Inter(R) Xeon(R) CPU E31270 3.40 GHz con 16 GB de memoria RAM. Para la obtención de los resultados, hemos indicado al programa los parámetros que desactivan durante el proceso de ramificación la generación automática de cortes y preprocesamiento.

En primer lugar, hemos realizado una comparativa entre la formulación (A) y la formulación (B) para PLPS generando instancias aleatorias de grafos completos con 5, 10, 14, 15, 16 y 17 nodos sobre la región $[0, 10] \times [0, 10]$ del plano, considerando como costes de asignación las distancias euclídeas entre ellos y que el coste de abrir cada planta j es superior (en una constante positiva aleatoria inferior a 1) al máximo en i de los costes c_{ij} . Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.1. Para cada tamaño del grafo, hemos generado 5 instancias distintas. En la tabla se muestra el valor óptimo de cada una de ellas, indicando entre corchetes el número de plantas abiertas en la solución; los valores de la relajación lineal para cada formulación, indicando entre paréntesis el número de iteraciones que realiza el algoritmo simplex; y el tiempo en segundos que tarda cada formulación en resolver cada una de las instancias. Un guión en la columna de tiempo para la formulación (A) indica que la instancia a la que pertenece no ha sido resuelta en un tiempo que hemos fijado como máximo (600 segundos).

Número de nodos del grafo	Valor óptimo del problema	Valor óptimo de RL para (A)	Valor óptimo de RL para (B)	Tiempo (seg.) para (A)	Tiempo (seg.) para (B)
5	15.90 [2]	14.61 (8)	15.90 (2)	0.0	0.0
5	13.14 [1]	13.03 (12)	13.14 (6)	0.0	0.0
5	19.03 [2]	18.47 (7)	19.03 (3)	0.0	0.0
5	12.69 [2]	12.69 (7)	12.69 (3)	0.0	0.0
5	16.22 [2]	15.33 (6)	16.22 (6)	0.0	0.0
10	36.57 [3]	11.46 (43)	36.57 (24)	0.1	0.0
10	25.53 [3]	-3.13 (56)	25.53 (23)	0.2	0.0
10	31.09 [3]	14.51 (46)	31.09 (20)	0.1	0.0
10	30.04 [3]	14.22 (51)	30.04 (27)	0.1	0.0
10	25.37 [2]	-1.58 (42)	25.37 (18)	0.1	0.0
14	34.77 [5]	-9.35 (101)	34.77 (36)	4.9	0.0
14	28.74 [3]	-11.76 (116)	28.74 (51)	20.5	0.0
14	37.31 [4]	-10.05 (88)	37.31 (42)	2.4	0.0
14	36.50 [4]	-2.13 (93)	36.50 (40)	2.6	0.0
14	39.72 [3]	-16.73 (87)	39.72 (36)	2.8	0.0
15	41.53 [4]	-21.04 (111)	41.53 (60)	79.1	0.1
15	30.36 [4]	-12.66 (113)	30.36 (52)	23.6	0.1
15	37.61 [3]	-27.82 (106)	37.61 (47)	17.9	0.1
15	46.05 [4]	-15.94 (102)	46.05 (39)	31.9	0.1
15	41.63 [3]	-14.41 (109)	41.63 (52)	63.6	0.1
16	43.15 [4]	-34.47 (113)	43.15 (46)	302.7	0.1
16	40.88 [4]	-18.90 (129)	40.88 (63)	153.4	0.1
16	35.36 [3]	-24.69 (138)	35.36 (59)	-	0.1
16	44.51 [4]	-16.38 (128)	44.51 (48)	204.3	0.1
16	41.41 [5]	-20.29 (130)	41.41 (45)	544.8	0.1
17	44.03 [4]	-29.32 (224)	44.03 (48)	306.4	0.1
17	48.93 [4]	-55.09 (201)	48.93 (63)	-	0.1
17	45.40 [5]	-36.72 (214)	45.40 (50)	-	0.1
17	44.42 [4]	-41.04 (235)	44.42 (64)	-	0.1
17	43.43 [4]	-34.40 (237)	43.43 (56)	-	0.1

Tabla 4.1: Resultados obtenidos para la comparativa entre las formulaciones (A) y (B)

Número de nodos del grafo	Tiempo medio para (A)	Tiempo medio para (B)
14	0.93	0.0
15	43.28	0.1
16	301.30	0.1

Tabla 4.2: Comparativa entre la formulación (A) y la formulación (B) en un grafo completo

Se puede observar en la Tabla 4.1 que el valor que devuelve la relajación lineal del problema para la formulación (B) siempre coincide con el valor óptimo del problema entero. Para la formulación (A), en cambio, a medida que aumentamos el tamaño del grafo, la diferencia entre esos dos valores crece notablemente.

En la Tabla 4.2 hemos indicado el tiempo medio que tardan las instancias de 14, 15 y 16 nodos en ser resueltas con cada una de las formulaciones (A) y (B). Mientras que la formulación

(B) resuelve todas estas instancias en un tiempo insignificante, la formulación (A) necesita de mucho más tiempo a medida que aumentamos el tamaño del grafo. Podemos afirmar entonces que la nueva formulación (B) que hemos obtenido funciona mucho mejor que la formulación básica del problema. Veamos ahora los resultados que obtenemos para nuestra formulación (B) si consideramos instancias de grafos mucho más grandes. Compararemos estos resultados con los obtenidos por la formulación dada en la Figura 4.5, generada al incluir como restricciones del problema únicamente las dadas por las desigualdades (4.6), para ver así el efecto de los cliques (4.7) en (B). Esta formulación es válida para el problema ya que, como hemos comentado tras demostrar la Proposición 4.1.1, contiene restricciones más fuertes que engloban las dadas en la formulación (A).

$$\begin{aligned}
 \text{(C)} \quad & \text{mín} \quad \sum_{j \in V} f_j + \sum_{j \in V} \sum_{i \neq j} (c_{ij} - f_j) x_{ij} \\
 & \text{s.a} \quad x_{ki} + \sum_{j \neq i} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i, k \in V, i \neq k \\
 & \quad \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in V, i \neq j
 \end{aligned}$$

Figura 4.5: Formulación (C) para PLPS

Para esta nueva comparativa, hemos considerado instancias aleatorias de 50, 100 y 150 nodos, generando cinco diferentes de cada tamaño. El tiempo medio de resolución, en segundos, para cada una de las formulaciones (B) y (C) se muestra en la Tabla 4.3. Como podemos observar en dicha tabla, ambas formulaciones resuelven cada una las instancias en poco más de un minuto, como mucho. Para todas ellas, además, el valor de la relajación lineal del problema coincide con el valor óptimo con restricciones de integridad. Sin embargo, la formulación (C) que hemos considerado tras eliminar de (B) algunas de sus desigualdades obtiene dichos óptimos en aproximadamente la mitad de tiempo.

Número de nodos del grafo	Tiempo medio para (B)	Tiempo medio para (C)
50	0.92	0.54
100	12.60	5.82
150	68.22	35.30

Tabla 4.3: Comparativa entre la formulación (B) y la formulación (C) en un grafo completo

Cuando tratamos de delimitar de la manera más precisa posible la envolvente convexa de soluciones enteras del problema, incurrimos por lo general en un incremento en el número de desigualdades de la formulación de nuestro problema. Este aumento puede ocasionar que el procedimiento de resolución sea más lento, al tener que manejar más información. Para evitar esta situación, se tiende a buscar un equilibrio entre ambos aspectos. En particular, para nuestro

estudio, puesto que ambas formulaciones, (B) y (C), devuelven como valor óptimo de la relajación lineal el óptimo del problema entero, funciona mucho mejor (C) al contener un número mucho menor de restricciones lineales.

4.2. El problema de localización de plantas simple en un grafo dirigido no completo

Por último, vamos a suponer en esta sección que el grafo sobre el que se lleva a cabo el problema de localización de plantas no es completo, sino que sólo van a ser posibles las asignaciones de un nodo a una planta cuando exista un arco que salga de dicho nodo y entre en la planta.

Consideremos un grafo dirigido no completo con conjunto de nodos V y conjunto de arcos A . Para cada par de nodos $i, j \in V$ vamos a definir de manera análoga al caso completo la variable binaria x_{ij} , que toma el valor 1 si el nodo i es asignado a la planta j , y 0 en otro caso. Vamos a denotar también por $f_j > 0$ al coste asociado a la instalación de una planta en el nodo j , y por $c_{ij} \geq 0$ al coste de servir al nodo i desde la planta j . Las formulaciones (B) y (C) dadas en la sección anterior para grafos dirigidos completos se transforman ahora, respectivamente, en las formulaciones (B') y (C'), dadas en las Figuras 4.6 y 4.7.

$$\begin{aligned}
 \text{(B')} \quad \text{mín} \quad & \sum_{j \in V} f_j + \sum_{j \in V} \sum_{i \neq j} (c_{ij} - f_j) x_{ij} \\
 \text{s.a} \quad & x_{ki} + \sum_{j \neq i} x_{ij} \leq 1, \quad (k, i), (i, j) \in A \\
 & x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} \leq 1, \quad (i, j), (j, k), (k, i) \in A \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in A
 \end{aligned}$$

Figura 4.6: Formulación (B') para PLPS

$$\begin{aligned}
 \text{(C')} \quad \text{mín} \quad & \sum_{j \in V} f_j + \sum_{j \in V} \sum_{i \neq j} (c_{ij} - f_j) x_{ij} \\
 \text{s.a} \quad & x_{ki} + \sum_{j \neq i} x_{ij} \leq 1, \quad (k, i), (i, j) \in A \\
 & x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (i, j) \in A
 \end{aligned}$$

Figura 4.7: Formulación (C') para PLPS

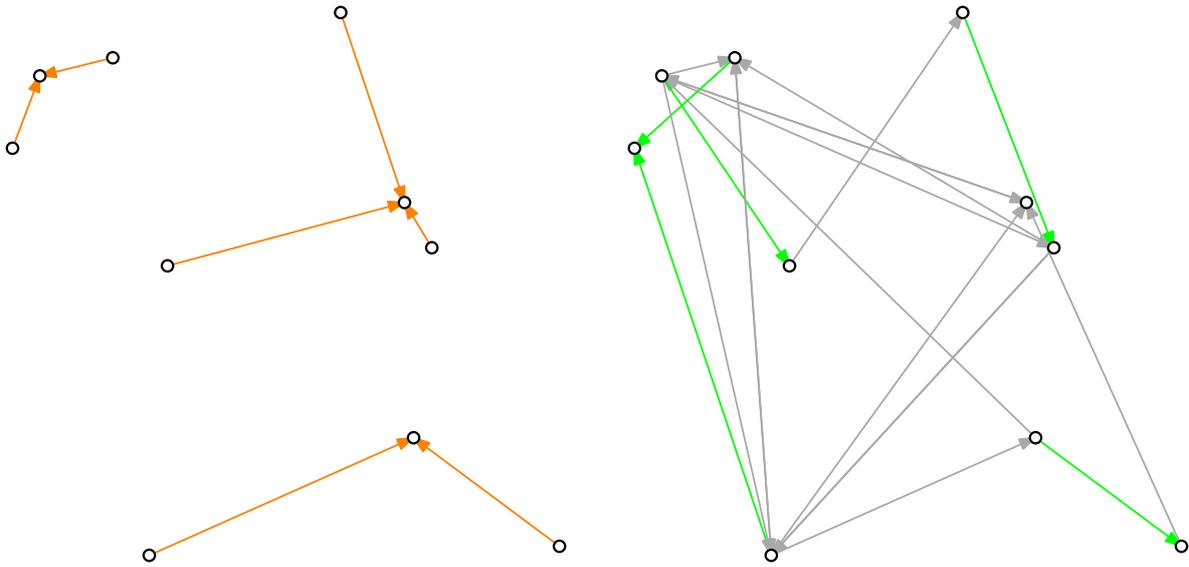


Figura 4.8: Soluciones para un mismo grafo de 10 nodos, completo (izquierda) y no completo (derecha)

En la Figura 4.8 se ilustran dos soluciones óptimas que hemos obtenido para un mismo problema, sobre un grafo con 10 nodos: a la izquierda, la obtenida sobre el grafo completo, y a la derecha, sobre el grafo dirigido no completo.

Para terminar, hemos realizado de nuevo en Xpress una comparativa sobre las mismas instancias de nodos consideradas en la Tabla 4.3 para las formulaciones (B') y (C'), que resultan de considerar grafos dirigidos no completos. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.4.

Para el tiempo medio de (B') en grafos de 150 nodos, sólo 3 de las 5 instancias generadas han sido resueltas en el tiempo fijado; el tiempo medio reflejado en la tabla ha sido obtenido únicamente a partir de las resueltas. Si comparamos estos resultados con los de la Tabla 4.3, se observa que para el caso del PLPS sobre un grafo dirigido no completo, la formulación (B') tarda más en encontrar el valor óptimo, mientras que la formulación (C') lo alcanza todavía más rápido que en el caso completo.

Número de nodos del grafo	Tiempo medio para (B')	Tiempo medio para (C')
50	1.74	0.28
100	42.50	2.34
150	279.05	20.63

Tabla 4.4: Comparativa entre el modelo (B') y el modelo (C') en un grafo dirigido no completo

Conclusiones

A lo largo de toda la memoria, hemos trabajado con poliedros asociados a conjuntos factibles de distintos problemas de programación lineal. Por un lado, hemos visto que a día de hoy, todavía no se conoce si el método símplex, uno de los más utilizados para resolver problemas de optimización lineal, es un algoritmo de complejidad polinómica para alguna regla de pivote. Como sabemos, este método va saltando en cada iteración de un vértice del poliedro a otro adyacente buscando optimizar la función objetivo del problema. La aportación del contraejemplo de Santos a la conjetura de Hirsch no niega la posibilidad de que la complejidad del símplex dependa de manera polinómica de la dimensión del poliedro y de su número de facetas, sino que constituye un paso más en el estudio de tal cuestión. Si bien sabemos que el diámetro de los politopos no siempre está acotado por $n - d$, queda abierta la pregunta de si existirá alguna cota superior polinómica para dicho diámetro. Las técnicas que Santos utiliza en el teorema generalizado de los d pasos pueden permitir abrir nuevas vías de ataque al estudio de la complejidad computacional del método símplex.

Por otro lado, mientras que para el segundo capítulo trabajábamos con un poliedro lineal, en los capítulos tercero y cuarto hemos trabajado con dos poliedros distintos, uno lineal y otro generado por la envolvente convexa de puntos enteros, pero que es desconocido. Este último está asociado al conjunto factible de un problema de optimización lineal entera. Para resolver problemas con restricciones de integridad en las variables de manera exacta, se utilizan métodos como ramificación y acotación, o hiperplanos de corte. En el tercer capítulo, hemos desarrollado una técnica para obtener nuevas desigualdades válidas que, incluidas en la formulación de problemas de empaquetamiento, facilitan a estos métodos la obtención de soluciones óptimas, ya que aproximan en la medida de lo posible la región factible del problema relajado a la envolvente convexa de las soluciones enteras. Este tipo de estudio no puede hacerse para los problemas de programación lineal de una forma generalizada, sino que ha de llevarse a cabo de manera individual para cada problema. Nosotros hemos elegido el problema de localización de concentradores sin capacidades, que ya había sido estudiado en la literatura. Con esta misma técnica, hemos llevado a cabo en el capítulo cuarto un estudio para el problema de localización de plantas simple sobre un grafo dirigido, obteniendo resultados computacionales para diversas formulaciones que hemos dado del problema. A raíz de estos resultados, hemos observado cómo la inclusión de nuevas desigualdades a la formulación agiliza notablemente el tiempo de resolución del problema, aunque añadir una gran cantidad de ellas genera también una sobrecarga para el procedimiento. En esta línea, se podría desarrollar un algoritmo de separación que permitiese a nuestro programa añadir o sustraer desigualdades de la formulación durante el proceso de resolución del problema.

Bibliografía

- [1] P. Avella y A. Sassano. On the p-median polytope. *Mathematical Programming*. **89** (2001), 395–411.
- [2] P. Avella, A. Sassano y I. Vasil'ev. Computational study of large-scale p-median problems. Technical report, departamento de informatica e sistemistica, Università di Roma 'La Sapienza'. (2003).
- [3] D. Barnette. W_v paths on 3-polytopes. *Journal of Combinatorial Theory*. **7** (1969), 62–70.
- [4] D. Barnette. An upper bound for the diameter of a polytope. *Discrete Mathematics*. **10** (1973), 9–13.
- [5] D. Bremner, A. Deza, W. Hua y L. Schewe. More bounds on the diameter of convex polytopes. *Optimization Methods and Software*. **28:3** (2013), 442–450.
- [6] D. Bremner y L. Schewe. Edge-graph diameter bounds for convex polytopes with few facets. *Experimental Mathematics*. **20:3** (2011), 229–237.
- [7] J. F. Campbell. Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European Journal of Operational Research*. **72** (1994), 387–405.
- [8] L. Cánovas, M. Landete y A. Marín. Improved formulations for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *European Journal of Operational Research*. **179:3** (2007), 990–1007.
- [9] D. C. Cho, E. L. Johnson, E. L. Padberg y M. R. Rao. On the uncapacitated Plant Location Problem I: valid inequalities and facets. *Mathematics of Operations Research*. **8:4** (1983), 579–589.
- [10] G. Dantzig. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. *Activity Analysis of Production and Allocation*. (1951), pp. 339–347.
- [11] P. R. Goodey. Some upper bounds for the diameters of convex polytopes. *Israel Journal of Mathematics*. **11** (1972), 380–385.

- [12] H. W. Hamacher, M. Labbé, S. Nickel y T. Sonneborn. Polyedral properties of the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Working Paper, ITWM, Kaiserslautern, Germany*
- [13] G. Kalai y D. J. Kleitman. A quasi-polynomial bound for the diameter of graphs of polyhedra. *Bulletin of the American Mathematical Society*. **26** (1992), 315–316.
- [14] L. V. Kantorovitch. A new method of solving of some classes of extremal problems. *Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciencies URSS*. **28** (1940), 211–214.
- [15] N. Karmarkar. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*. **4**(4) (1984), 373–395.
- [16] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. **244**(5) (1979), 1093–1096.
- [17] V. Klee. Diameters of polyhedral graphs. *Canadian Journal of Mathematics*. **16** (1964), 602–614.
- [18] V. Klee. On the number of vertices of a convex polytope. *Canadian Journal of Mathematics*. **16** (1964), 701–720.
- [19] V. Klee y P. Kleinschmidt. The d -step conjecture and its relatives. *Mathematics of Operations Research*. **12**(4) (1987), 718–755.
- [20] V. Klee y D. W. Walkup. The d -step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$. *Acta Mathematica*. **133** (1967), 53–78.
- [21] J. G. Klincewicz. A dual algorithm for the uncapacitated hub location problem. *Location Science*. **4** (1996), 173–184.
- [22] D. G. Larman. Paths on polytopes. *Proceedings of the London Mathematical Society*. **20**:3 (1970), 161–178.
- [23] A. Marín. Uncapacitated euclidean hub location: strengthened formulation, new facets and a relax-and-cut algorithm. *Journal of Global Optimization*. **33** (2005), 393–422.
- [24] B. Matschke, F. Santos y C. Weibel. The width of 5-prismatoids. *Proceedings of the London Mathematical Society*. **110**(3) (2015), 647–672.
- [25] G. L. Nemhauser, Jr. Trotter y L.E. Properties of vertex packing and independence system polyhedra. *Mathematical Programming*. **6** (1974), 48–61.
- [26] M. E. O’Kelly, D. Bryan, D. Skorin-Kapov y J. Skorin-Kapov. Hub network design with single and multiple allocation: a computational study. *Location Science*. **4** (1996), 125–138.

-
- [27] W. Padberg. On the facial structure of set packing polyedra. *Annals of Discrete Mathematics*. **1** (1973), 199–215.
- [28] W. Padberg. On the complexity of set packing polyedra. *Annals of Discrete Mathematics*. **1** (1977), 421–434.
- [29] F. Santos. A counterexample to the Hirsch Conjecture. *Annals of Mathematics*. **176**(1) (2012), 383–412.
- [30] F. Santos, T. Stephen y H. Thomas. Embedding a pair of graphs in a surface, and the width of 4-dimensional prismetoids. *Discrete and Computational Geometry*. **47**(3) (2012), 569–576.
- [31] D. Skorin-Kapov, J. Skorin-Kapov y M. O’Kelly. Tight linear programming relaxations of uncapacitated p -hub median problems. *European Journal of Operational Research*. **94** (1996), 582–593.
- [32] M. Todd. An improved Kalai-Kleitman bound for the diameter of a polyhedron. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*. **28** (2014), 1944–1947.