



UNIVERSIDAD DE MURCIA

FACULTAD DE MATEMÁTICAS

MÁSTER EN MATEMÁTICA AVANZADA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

**ESTUDIO DE REDUNDANCIAS EN
SISTEMAS COHERENTES**

Autor:

D. José Antonio Camacho Díaz

Directores:

D. Félix Luis Belzunce Torregrosa

D. José María Ruiz Gómez

Curso:

2017/2018



Quiero agradecer a José María y Félix el haberme dado la oportunidad de hacer el trabajo con ellos y su gran dedicación a la hora de su realización y revisión. A mi madre, hermanos y amigos agradecer su gran paciencia, apoyo incondicional y ánimos recibidos.

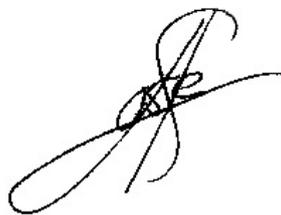
Declaración de originalidad

D. José Antonio Camacho Díaz autor del Trabajo Fin de Máster titulado: *Estudio de redundancias en sistemas coherentes*, bajo la tutela de **D. Félix Luis Belzunce Torregrosa** y **D. José María Ruiz Gómez**,

DECLARA,

que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 8 de febrero de 2018.

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke extending to the right.

Fdo.: José Antonio Camacho Díaz.

Índice general

Introducción	1
1. Comparación de distribuciones, sistemas y fiabilidad de sistemas	3
1.1. Introducción	3
1.2. Criterios para la comparación de variables aleatorias	6
1.2.1. Orden estocástico	6
1.2.2. Orden razón de fallo y razón de fallo inverso	7
1.2.3. Orden cociente de verosimilitudes	8
1.2.4. Orden en preferencia	9
1.3. Sistemas y fiabilidad de sistemas	10
1.3.1. Sistemas	10
1.3.2. Fiabilidad de sistemas	14
2. Redundancia en componentes para la mejora de sistemas	15
2.1. Introducción	15
2.2. Orden estocástico en sistemas con una redundancia	20
2.2.1. Redundancia activa	20
2.2.2. Redundancia en espera	28
2.3. Orden en preferencia en sistemas con una redundancia	34
2.3.1. Redundancia activa	35
2.3.2. Redundancia en espera	44
2.4. Orden razón de fallo en sistemas con una redundancia	46
2.4.1. Redundancia activa	46
2.4.2. Redundancia en espera	57
2.5. Orden razón de fallo inverso en sistemas con una redundancia	58
2.6. Orden cociente de verosimilitud en sistemas con una redundancia	60
3. Uso de dos redundancias activas en sistemas k-out of-n	65
3.1. Introducción	65
3.2. Orden estocástico y en preferencia para sistemas con dos o más redundancias activas	67
3.3. Orden razón de fallo y razón de fallo inverso en sistemas con dos redundancias	76
4. Conclusiones	85

Apéndice A	95
Implementación en R	95
Notación de sistemas	122
Índice alfabético	122
Bibliografía	125

Índice de figuras

1.1.	Representación gráfica de sistema en serie de n componentes.	11
1.2.	Representación gráfica de sistema en paralelo de n componentes.	12
1.3.	Representación gráfica de sistema 2-out of-4.	12
1.4.	Representación gráfica de los sistemas $\phi(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, \max\{x_2, x_3\}\}$ y $\phi(x_1, x_2, x_3) = \min\{\max\{x_1, x_3\}, x_2\}$	13
2.1.	Sistemas de lámparas compuestas por bombillas. A la izquierda de diferentes tipos, a la derecha del mismo tipo. Imagen obtenida de internet.	17
2.2.	Representación gráfica de los sistemas U_1 y U_2	19
2.3.	Diferencia para supervivencias de sistemas 2-out of-3 con redundancia común uno a uno en la primera y segunda componente.	24
2.4.	Representación de la diferencia entre las funciones de distribución de los sistemas U'_{V_1} y U'_{V_2} con componentes Gamma.	33
2.5.	Representación de la diferencia entre las funciones de supervivencia de los sistemas U'_{\wedge_1} y U'_{\wedge_2} con componentes Gamma de distinto parámetro de forma y de igual parámetro de escala.	33
2.6.	Representación de la diferencia entre las funciones de supervivencia de los sistemas U'_{\wedge_1} y U'_{\wedge_2} con componentes Gamma de igual parámetro de forma y distinto parámetro de escala.	34
2.7.	Representación de funciones de supervivencia para distintos valores de los parámetros en distribuciones Weibull y exponencial.	42
2.8.	Representación de la diferencia $P(W_1 > W_2) - P(W_2 > W_1)$ para componentes con distribución Weibull y exponencial y distintos valores del parámetro de forma.	43
2.9.	Representación de las funciones de razón de fallo de sistemas en serie con dos componentes exponenciales (de parámetros $\lambda_1 = 1/10$ y $\lambda_2 = 3/10$) y redundancia activa común exponencial (de parámetro $\lambda = 1/2$).	47
2.10.	Representación de las funciones de razón de fallo de sistemas en serie con dos componentes exponenciales (de parámetros $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = 3/10$) y redundancia activa común exponencial (de parámetro $\lambda = 1/10$).	48
2.11.	Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 100t + 10$ y $r_2(t) = 58t + 3$	55
2.12.	Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 5t + 10$ y $r_2(t) = 3t + 3$	56

2.13. Cociente de verosimilitudes para los sistemas W_1 y W_2 con componentes exponenciales y distintos valores de sus parámetros. Imagen obtenida de Zhao et al. [37].	61
2.14. Cociente de verosimilitudes para los sistemas $W'_{\wedge 1}$ y $W'_{\wedge 2}$ con componentes exponenciales y distintos valores de sus parámetros. Imagen obtenida de Zhao et al. [37].	62
2.15. Cociente de supervivencias para sistemas W_1 y W_2 con redundancia en espera con componentes Weibull con mismo parámetro de forma. Imagen obtenida de You y Li [35].	63
3.1. Representación gráfica de los sistemas $V_1 = \wedge(\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2))$ y $V_2 = \wedge(\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1))$	66
3.2. Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 5t + 2$ y $r_2(t) = 4t + 1$	80
3.3. Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 100t + 10$ y $r_2(t) = 58t + 3$ en comparación con la función $g(t) = \frac{1+F_2(t)}{1+F_1(t)} = \frac{2-\bar{F}_2(t)}{2-\bar{F}_1(t)}$	81

Índice de tablas

2.1. Estructura de presentación de los contenidos.	20
4.1. Cuadro resumen de resultados.	92

Introducción

Un sistema puede ser considerado como una colección de dos o más componentes en el que para su funcionamiento es necesario que funcione al menos una de ellas. La Teoría de Fiabilidad de Sistemas estudia las probabilidades asociadas a la supervivencia del sistema, siendo uno de los principales problemas en fiabilidad el estudio del comportamiento del sistema a través del comportamiento de sus componentes, en distintos sentidos.

En general, las componentes del sistema están sujetas a un deterioro gradual de sus características de funcionamiento perfecto, y por tanto, a un aumento creciente de la probabilidad de fallo de las mismas. Este comportamiento matemáticamente se modeliza, introduciendo diferentes medidas de fiabilidad para la ordenación de distribuciones, que viene siendo una herramienta fundamental de la Teoría de Fiabilidad de Sistemas. La ordenación de distribuciones permite comparar componentes o sistemas, para seleccionar aquellas con un mayor tiempo de funcionamiento en algún sentido probabilístico.

En el estudio de tiempos de vida de sistemas es de interés, también, estudiar dónde situar una componente redundante con el fin de mejorar lo más posible el tiempo de vida del sistema. Por redundancia de una componente se entiende el colocar una componente adicional junto a ésta para prolongar el tiempo de vida del sistema. Principalmente existen dos formas de redundancia: la activa, en la que la componente redundante funciona en paralelo al mismo tiempo que la componente del sistema; o en espera, si falla la componente del sistema se sustituye por una nueva, es decir, se hace una convolución de los dos tiempos de vida.

El objetivo de esta memoria es estudiar dónde colocar una o dos redundancias, en forma activa o en espera, para conseguir prolongar un mayor tiempo de vida del sistema. Estudiaremos, para poder comparar los tiempos de vida de los sistemas a los que se les aplican las redundancias, las cinco ordenaciones estocásticas más frecuentes: orden estocástico, razón de fallo, razón de fallo inverso, cociente de verosimilitud y en preferencia. Los sistemas considerados serán los sistemas en serie, que funcionan si lo hacen todas sus componentes, sistemas en paralelo, que funcionan si lo hace al menos una componente, y sistemas k -out of- n , que funcionan si lo hacen al menos k de sus n componentes.

Hasta el momento, el problema de colocación de una o dos componentes redundantes activas o en espera ha sido considerado en el caso en que las componentes son independientes en Boland et al. [8, 9, 10], Singh y Misra [31], Valdés y Zequeira [33, 34], Romera et al. [27],

Valdés et al. [32], Misra et al. [23, 24], Brito et al. [13], Zhao et al. [37, 36], You y Li [35] y Zhao et al. [38], entre otros. Por otro lado, otras investigaciones relacionadas con este objetivo son, por ejemplo, la consideración de un número m de redundancias (véase Hu y Wang [19], Ding y Li [15], Zhao et al. [37], Zhuang y Li [39]), la dependencia entre las componentes (véase Belzunce et al. [4, 5], Fang y Li [16], Jeddi y Doostparast [20]), la ordenación estocástica en los sistemas con redundancia a nivel de componente o sistema (véase Brito et al. [13], Hazra y Nanda [18]) o la consideración de otras ordenaciones estocásticas (véase Li y Hu [22], Ding y Li [15], Misra et al. [24], You y Li [35]).

Esta memoria consta de cuatro capítulos y un apéndice en los que se han recopilado gran parte de los trabajos citados con anterioridad. Algunas demostraciones han sido modificadas para dar al presente trabajo una mayor coherencia y claridad. Además en los capítulos 2 y 3 se aportan dos resultados que no hemos encontrado en la literatura y que hemos demostrado. La casuística de colocación de una o dos redundancias en un sistema es amplia, por ello consideramos los resultados en primer lugar para la ordenación de los sistemas y posteriormente para el caso de los distintos tipos de redundancia.

En el primer capítulo, se introducen los conceptos y propiedades fundamentales que se manejan a lo largo de la memoria, como son distintas medidas de fiabilidad, ordenación de distribuciones y el concepto de sistema coherente. También se demuestran resultados relativos a caracterizaciones necesarias de las ordenaciones de tiempos de vida y cálculo de medidas de fiabilidad de los sistemas en serie, paralelo y k -out of- n .

En el segundo capítulo se estudian las ordenaciones estocásticas de los sistemas con una redundancia. Organizaremos el capítulo en cinco secciones donde se estudian, en este orden, los órdenes estocástico, en preferencia, razón de fallo, razón de fallo inverso y orden cociente de verosimilitudes estos sistemas.

En el tercer capítulo continuamos el estudio de los órdenes anteriores para sistemas donde se consideran dos redundancias, colocadas, una a una, en dos componentes. En este capítulo para simplificar el estudio lo haremos con redundancias que tienen iguales distribuciones a las componentes y solo para sistemas en serie, siendo éste modelo el que hemos encontrado, por lo general, en la bibliografía consultada.

En el cuarto y último capítulo presentamos unas conclusiones y breve reflexión final a modo de resumen de todos los resultados estudiados a lo largo del trabajo, presentándolos en una tabla. También, incluimos líneas para continuar con la investigación sobre estos nuevos resultados.

Se completa la memoria con un apéndice en el cual exponemos, en primer lugar, los archivos de R realizados para la obtención de las gráficas utilizadas en los diversos ejemplos del trabajo; en segundo lugar, exponemos dos simulaciones de tiempos de vida de sistemas realizadas a partir de componentes con distribuciones exponenciales y por último incluimos un resumen de las notaciones de los sistemas estudiados.

Capítulo 1

Comparación de distribuciones, sistemas y fiabilidad de sistemas

1.1. Introducción

En este primer capítulo comenzamos con las definiciones de las funciones esenciales para el estudio y comparación de variables aleatorias. Posteriormente, se definen los distintos órdenes de comparación de variables aleatorias que utilizaremos en los capítulos siguientes. Para esta tarea nos hemos centrado en el libro Shaked y Shanthikumar [29] que describe, entre otros, los cuatro órdenes esenciales que estudiaremos durante todo el trabajo: el orden estocástico, razón de fallo, razón de fallo inverso y cociente de verosimilitud, por último definimos el orden en preferencia para dos variables aleatorias.

A lo largo de esta memoria, utilizaremos la siguiente nomenclatura, representaremos por X una variable aleatoria continua con función de distribución $F(t) = P(X \leq t)$ y función de densidad $f(t)$, cuyo soporte es el intervalo $[0, b)$ donde b puede ser finito o infinito. Diremos que la variable aleatoria X es no negativa y dentro del contexto de modelización de tiempos de vida de sistemas (o componentes) serán las variables que consideraremos.

Entre las funciones asociadas a una variable aleatoria tenemos la función de supervivencia o fiabilidad, véase Lai y Xie [21], que pasamos a definir.

Definición 1.1.1. *Llamaremos **función de supervivencia** o **fiabilidad** a la función definida por*

$$\bar{F}(t) = P(X > t) = 1 - F(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Para una variable aleatoria que representa el tiempo de vida de un sistema la función de supervivencia indica la probabilidad de que el sistema (o componente) siga funcionando después de un tiempo t . Sus propiedades se derivan de la propia definición:

1. $\bar{F}(0) = 1$.
2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{F}(t) = 0$.

CAPÍTULO 1. COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES, SISTEMAS Y FIABILIDAD DE SISTEMAS

3. $\bar{F}(t)$ es no creciente.

Esta función puede ayudar a proporcionar un método a la hora de comparar patrones de supervivencia o fiabilidad para dos sistemas o componentes. Por ejemplo, sea un mecanismo que puede ser fabricado de dos formas distintas, A o B, con costes similares y tiempos de vida X_A y X_B , respectivamente, y sus supervivencias verifican $\bar{F}_A(t) \leq \bar{F}_B(t)$ para cada momento t . Entonces, elegiremos el método de fabricación B, ya que con éste aseguramos que el producto tiene mayor probabilidad para superar un tiempo de funcionamiento t que el fabricado por el método A.

Veamos ahora dos funciones asociadas a variables aleatorias truncadas, la razón de fallo y la razón de fallo inversa, véase Block et al. [6] y Finkelstein [17], que se usan frecuentemente en el estudio de supervivencia y fiabilidad de sistemas.

Definición 1.1.2. Sea X una variable aleatoria continua y no negativa. Se llama **razón de fallo** a la función

$$r(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)},$$

para todo $t \geq 0$ tal que $\bar{F}(t) > 0$.

También podemos expresar la función razón de fallo como

$$r(t) = -\frac{d}{dt}(\log(\bar{F}(t))). \quad (1.1)$$

Veamos cómo se interpreta esta medida en teoría de fiabilidad. Supongamos que X representa el tiempo de funcionamiento de un determinado sistema. La probabilidad de que un sistema que funciona en el instante t deje de hacerlo en las siguientes k unidades de tiempo puede ser expresada mediante la probabilidad condicionada

$$F_k(t) = P(t \leq X \leq t+k | X > t) = \frac{F(t+k) - F(t)}{\bar{F}(t)}.$$

Si calculamos el promedio, dividiendo por la longitud del intervalo, y hacemos que k tienda a cero se obtiene que,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{F_k(t)}{k} = \frac{1}{\bar{F}(t)} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{F(t+k) - F(t)}{k} = \frac{1}{\bar{F}(t)} \cdot f(t) = r(t).$$

Por lo que $r(t)$ puede ser considerada como la “probabilidad” instantánea de fallo en el instante t . Esta función permite comparar dos tiempos de vida. En el ejemplo anterior, si para las formas de fabricación A y B se cumple que $r_B(t) \leq r_A(t)$ para cada momento t , entonces elegiríamos la línea de producción B. Esto es porque para los productos de A y B, una vez superado el tiempo t , la probabilidad de que falle el producto de B es menor que la probabilidad de que falle el producto de A en una variación pequeña de tiempo.

1.1. INTRODUCCIÓN

Para variables aleatorias continuas la razón de fallo caracteriza la función de distribución de la que procede de forma biyectiva ya que a partir de ella se puede recuperar la función de distribución (y en definitiva su función de supervivencia y densidad), resultado que expresamos en el siguiente teorema.

Teorema 1.1.3. *Sea X una variable aleatoria, continua y no negativa, con razón de fallo $r(t)$. Entonces,*

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t r(x)dx} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

De la expresión anterior, la función de distribución viene dada por,

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\int_0^t r(x)dx} & \text{si } t \geq 0 \\ 1 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

y la expresión para la función de densidad viene dada por,

$$f(t) = \begin{cases} r(t) \cdot e^{-\int_0^t r(x)dx} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Por último, introducimos el concepto de razón de fallo inversa de una variable aleatoria X .

Definición 1.1.4. *Sea X una variable aleatoria continua y no negativa. Se llama **razón de fallo inversa** a la función*

$$\tilde{r}(t) = \frac{f(t)}{F(t)},$$

para todo $t \geq 0$ tal que $F(t) > 0$.

También podemos expresar la función razón de fallo inversa como

$$r(t) = \frac{d}{dt}(\log(F(t))). \quad (1.2)$$

Veamos cómo se interpreta esta medida de fiabilidad. Supongamos que X representa el tiempo de vida de un determinado sistema. La probabilidad de que un sistema haya fallado en el instante de tiempo t y lo haya dejado de hacer en las anteriores k unidades de tiempo puede ser expresada mediante la probabilidad condicionada

$$F_k(t) = P(t-k \leq X \leq t | X \leq t) = \frac{F(t) - F(t-k)}{F(t)}.$$

Si calculamos el promedio, dividiendo por la longitud del intervalo, y hacemos que k tienda a cero se obtiene que,

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{F_k(t)}{k} = \frac{1}{F(t)} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{F(t) - F(t-k)}{k} = \frac{1}{F(t)} \cdot f(t) = \tilde{r}(t).$$

Por lo que $\tilde{r}(t)$ puede ser interpretada como la “probabilidad” instantánea de vida en el instante t . También, a partir de esta función, podemos tener la correspondiente función de distribución, supervivencia y densidad de la variable aleatoria X de forma análoga al caso de la función razón de fallo.

1.2. Criterios para la comparación de variables aleatorias

Uno de los principales objetivos de la estadística es la comparación de variables aleatorias. Estas comparaciones se realizan utilizando funciones o medidas asociada a las variables como, por ejemplo, las medias, medianas o varianzas. Sin embargo, en muchas situaciones, estas comparaciones son muy poco informativas lo que muestra la necesidad de disponer de criterios de comparación más detallados. Por ello utilizaremos las medidas de fiabilidad definidas anteriormente para la comparación de variables aleatorias, lo que da lugar a los órdenes **orden estocástico**, **orden razón de fallo**, **razón de fallo inverso**. Por último, definiremos también el **orden cociente de verosimilitudes** y **orden en preferencia**. El primero es referido a la monotonía del cociente de las funciones de densidad de las variables aleatorias y el segundo a cuándo el suceso de que una variable aleatoria sea mayor que otra es más probable que el suceso de que ésta segunda sea mayor que la primera.

En esta sección consideraremos, en general, las variables aleatorias continuas y no negativas X e Y , con funciones de distribución $F(t)$ y $G(t)$, funciones de densidad $f(t)$ y $g(t)$, funciones de supervivencia $\bar{F}(t)$ y $\bar{G}(t)$, funciones de razón de fallo $r(t)$ y $s(t)$ y funciones de razón de fallo inversa $\tilde{r}(t)$ y $\tilde{s}(t)$, respectivamente.

1.2.1. Orden estocástico

La ordenación más intuitiva es la que se conoce como ordenación estocástica basada en la comparación de las correspondientes funciones de supervivencia cuya definición damos a continuación.

Definición 1.2.1. *Dadas dos variables aleatorias, decimos que X es menor que Y en el orden estocástico, denotado por $X \leq_{st} Y$, si*

$$\bar{F}(t) \leq \bar{G}(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Si consideramos que X e Y representan los tiempos de vida de dos sistemas, la ordenación anterior implica que para todo t hay mayor probabilidad que la variable Y supere un tiempo de vida t que X .

Observamos que utilizando la función de distribución la definición anterior es equivalente a:

$$X \leq_{st} Y \text{ si, y solo si, } F(t) \geq G(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Una de las cuestiones más importantes de la ordenación anterior es su caracterización en términos de comparaciones de transformaciones de las variables o de esperanzas de las mismas que exponemos en el teorema siguiente.

Teorema 1.2.2. *Sean las variables aleatorias X e Y . Entonces, $X \leq_{st} Y$ sí, y sólo sí, se verifican una de las siguientes condiciones equivalentes:*

1.2. CRITERIOS PARA LA COMPARACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

- a) $\varphi(X) \leq_{st} \varphi(Y)$ para toda función no decreciente φ .
- b) $E[\varphi(X)] \leq E[\varphi(Y)]$ para toda función no decreciente φ para la cual existan las esperanzas anteriores.

Observación 1.1. Si φ es una función no creciente y $X \leq_{st} Y$ las desigualdades del teorema anterior se dan en sentido contrario.

Otra propiedad importante del orden estocástico para dos conjuntos de variables aleatorias independientes viene dada en el siguiente teorema.

Teorema 1.2.3. Sean X_1, X_2, \dots, X_n e Y_1, Y_2, \dots, Y_n dos conjuntos de variables aleatorias independientes. Si $X_i \leq_{st} Y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ y $\beta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función no decreciente en todas sus componentes, entonces,

$$\beta(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq_{st} \beta(Y_1, Y_2, \dots, Y_n).$$

1.2.2. Orden razón de fallo y razón de fallo inverso

Otras ordenaciones que utilizaremos a lo largo de la memoria son el orden en razón de fallo el cuál, en su sentido más general, estudia la monotonía del cociente de las funciones de supervivencia de las dos variables, $\bar{G}(t)/\bar{F}(t)$. Si este cociente es no decreciente para todo t , significará que la probabilidad de que la segunda variable supere t decrece a una “velocidad” inferior a lo que lo hace la primera. Lógicamente si se verifica esta condición y por ser $\bar{G}(0)/\bar{F}(0) = 1$ se cumple que $\bar{G}(t) \geq \bar{F}(t)$, por lo que tendríamos un orden más fuerte que el orden estocástico, que definimos a continuación.

Definición 1.2.4. Sean dos variables aleatorias X e Y continuas y no negativas. Decimos que X es menor que Y en el **orden razón de fallo**, denotado por $X \leq_{hr} Y$, si el cociente $\bar{G}(t)/\bar{F}(t)$ es no decreciente en el conjunto $\{t | \bar{F}(t) > 0\}$, o equivalentemente si se verifica,

$$\bar{F}(x)\bar{G}(y) \geq \bar{F}(y)\bar{G}(x), \forall x \leq y.$$

Originalmente este orden fue introducido para variables aleatorias absolutamente continuas a través de la comparación de sus razones de fallo. Denotando por $r(t)$ y $s(t)$ a las razones de fallo de X e Y , respectivamente, para variables aleatorias absolutamente continuas y no negativas la definición anterior es equivalente a que se verifique la desigualdad $r(t) \geq s(t)$ para todo $t \geq 0$.

Otra ordenación resulta cuando consideramos las funciones de distribución, orden que pasamos a definir.

Definición 1.2.5. Sean dos variables aleatorias, decimos que X es menor que Y en el **orden razón de fallo inverso**, denotado por $X \leq_{rh} Y$, si el cociente $G(t)/F(t)$ es no decreciente en el conjunto $\{t | F(t) > 0\}$, o equivalentemente si se verifica,

$$F(x)G(y) \geq F(y)G(x), \forall x \leq y.$$

CAPÍTULO 1. COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES, SISTEMAS Y FIABILIDAD DE SISTEMAS

Que el cociente entre las funciones de distribución sea no decreciente, indica que la probabilidad con la que la segunda variable falla antes del instante t , crece a una “velocidad” inferior a la que crece la probabilidad con la que la primera variable falla antes de t . Además, como en el caso de la ordenación razón de fallo, esta condición junto con que el cociente $G(t)/F(t)$ es 1 cuando t tiende a infinito, se tendría el orden estocástico de las variables.

Como ocurre para el orden razón de fallo, originalmente el orden razón de fallo inverso fue introducido para variables aleatorias absolutamente continuas a través de la comparación de sus razones de fallo inversa. Denotando por $\tilde{r}(t)$ y $\tilde{s}(t)$ a las razones de fallo inversas de X e Y , respectivamente, para variables aleatorias absolutamente continuas y no negativas la definición anterior es equivalente a que se verifique la desigualdad $\tilde{r}(t) \geq \tilde{s}(t)$ para todo $t \geq 0$.

1.2.3. Orden cociente de verosimilitudes

En los anteriores órdenes es necesario conocer la función de supervivencia (o la función de distribución) para obtener la ordenación de las variables. Para ello se ha de tener una expresión explícita o fácil de calcular de esta función lo que no siempre es sencillo. Si los tiempos de vida se ajustan a modelos paramétricos cuyas funciones de densidad son conocidas, basándonos en la monotonía del cociente de estas funciones, podremos obtener una condición suficiente para los órdenes estocástico, razón de fallo y razón de fallo inverso. Esta nueva ordenación, llamada cociente de verosimilitudes, la pasamos a definir a continuación.

Definición 1.2.6. Sean dos variables aleatorias X e Y no negativas y absolutamente continuas. Decimos que X es menor que Y en el **orden cociente de verosimilitudes**, denotado por $X \leq_{lr} Y$, si $g(t)/f(t)$ es no decreciente en la intersección de los soportes de ambas variables, o equivalentemente si se verifica,

$$f(x)g(y) \geq f(y)g(x), \forall x \leq y.$$

Como se muestra en Shaked y Shanthikumar [29] el orden cociente de verosimilitudes implica el orden razón de fallo y razón de fallo inverso para tiempos de vida. Otra caracterización viene dada en Shaked y Shanthikumar [29] donde haciendo referencia a Shanthikumar y Yao [30] y definiendo el conjunto de funciones

$$\mathcal{G}_{lr} = \{g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : g(x, y) \leq g(y, x) \forall x \leq y\},$$

se obtiene la siguiente implicación.

Teorema 1.2.7. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes. Si $X \leq_{lr} Y$, entonces

$$g(X, Y) \leq_{st} g(Y, X) \forall g \in \mathcal{G}_{lr}.$$

Demostración.- Consideremos las variables $X \leq_{lr} Y$ y sean $g \in \mathcal{G}_{lr}$ y φ una función no decreciente. Por la caracterización del Teorema 1.2.2 apartado b), para comprobar que $g(X, Y) \leq_{st}$

1.2. CRITERIOS PARA LA COMPARACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

$g(Y, X)$, tendríamos que verificar que $E(\varphi(g(Y, X))) - E(\varphi(g(X, Y))) \geq 0$. Dicha diferencia viene dada por,

$$E[\varphi(g(Y, X)) - \varphi(g(X, Y))] = \int_y \int_x [\varphi(g(y, x)) - \varphi(g(x, y))] f(x) g(y) dx dy.$$

Separando esta integral en dos, la primera para valores de $x \leq y$ y la segunda para $x > y$ y renombrando en esta segunda las variables, podemos escribir la igualdad anterior como,

$$\int_y \int_{x \leq y} [\varphi(g(y, x)) - \varphi(g(x, y))] [f(x) g(y) - f(y) g(x)] dx dy.$$

Por ser $X \leq_{lr} Y$, $g(y, x) \geq g(x, y)$ y la función φ no decreciente, entonces $\varphi(g(y, x)) - \varphi(g(x, y)) \geq 0$, lo que implica que la integral anterior sea mayor o igual que cero, lo que completa la demostración. \square

La implicación inversa también es cierta y puede verse en Shanthikumar y Yao [30].

Observación 1.2. Si g es creciente en reordenación, ($[g(x, y) - g(y, x)](y - x) \geq 0$), entonces, el orden de las variables $g(X, Y) \geq_{st} g(Y, X)$ cambia.

Tras la definición de estos cuatro primeros criterios de comparación para variables aleatorias podemos resumir las implicaciones entre ellos según el cuadro,

$$\begin{array}{ccc} X \leq_{lr} Y & \Rightarrow & X \leq_{hr} Y \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ X \leq_{rh} Y & \Rightarrow & X \leq_{st} Y. \end{array} \quad (1.3)$$

1.2.4. Orden en preferencia

Para finalizar esta sección vamos a definir el último de los órdenes que veremos a lo largo de la memoria. Este orden no incluye ninguna de las funciones definidas con anterioridad y se basa en que una variable aleatoria será mejor que la otra, si la probabilidad de que la primera sea mayor que la segunda es mayor que la probabilidad de que la segunda sea mayor que la primera.

Definición 1.2.8. Dadas dos variables aleatorias X e Y , decimos que X es menor que Y en el orden en preferencia, denotado por $X \leq_{pr} Y$, si

$$P(X > Y) \leq P(Y > X).$$

Como se comenta en Singh y Misra [31] y Romera et al. [27], el criterio de elección de una componente a partir del orden estocástico no siempre implica que esta elección sea la mejor en el orden en preferencia. Como vemos en Blyth [7], cuando las variables aleatorias no son independientes el orden estocástico no implica, por lo general, el orden en preferencia. Además en dicho artículo también se presenta un contraejemplo para el cuál se puede obtener que $P(X > Y)$ está arbitrariamente tan cerca de 1 como queramos y, sin embargo, $X \leq_{st} Y$.

1.3. Sistemas y fiabilidad de sistemas

Un sistema puede ser considerado como una colección de dos o más componentes, en el que para su funcionamiento es necesario que al menos funcione una de ellas. Por tanto, interesa el estudio del comportamiento del sistema a través del comportamiento de sus componentes, en distintos sentidos. Las componentes pueden ser independientes entre sí o pueden tener interacciones específicas entre ellas, es decir, tener algún tipo de dependencia. En general cualquier sistema será fiable si algún suceso no deseable, llamado fallo, no ocurriera en el funcionamiento del mismo y decimos que el sistema falla, cuando deja de brindarnos el servicio que debía darnos. Podemos entender por fiabilidad, la probabilidad de que un sistema realice adecuadamente su función prevista a lo largo del tiempo. Históricamente los primeros desarrollos teóricos en fiabilidad de sistemas surgen hace menos de 50 años con el comienzo de la aeronáutica y un libro básico, que representó un avance muy importante en el estudio matemático de sistemas fiables, es Barlow y Proschan [2].

En primer lugar definiremos qué es un sistema y algunas de las características básicas de éstos. Nos basamos en los libros de Barlow y Proschan [3] y Ramamurthy [26], en este último se relaciona la teoría de sistemas con la teoría de juegos simples. Por otro lado, también tenemos en cuenta las referencias dadas durante la asignatura *Fiabilidad de Sistemas* de este máster. En segundo lugar, la función de supervivencia es de gran importancia para la comparación de tiempos de vida; es por esto, que estudiaremos las expresiones de estas funciones para los sistemas en serie, paralelo y k -out of- n .

1.3.1. Sistemas

Intuitivamente, un sistema es un objeto complejo que está compuesto por componentes que pueden relacionarse entre sí. El sistema puede estar en funcionamiento o no según el estado de los componentes. Cada sistema tiene una estructura que indica cómo se relacionan las componentes que la conforman. Matemáticamente, se puede modelar a partir de funciones booleanas e indicadores binarios de funcionamiento de las componentes.

Para indicar el estado de la componente i -ésima vamos a considerar el indicador binario x_i :

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si la componente } i\text{-ésima funciona} \\ 0 & \text{si la componente } i\text{-ésima no funciona.} \end{cases}$$

Con $i = 1, \dots, n$ donde n es el número de componentes del sistema.

Definición 1.3.1. *Un sistema de n componentes es una función booleana*

$$\begin{aligned} \phi : \quad \{0, 1\}^n &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightsquigarrow \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si el sistema no funciona} \\ 1 & \text{si el sistema funciona.} \end{cases} \end{aligned}$$

A la función ϕ se le denomina **función de estructura** y al número de componentes del sistema se le denomina **orden del sistema**.

1.3. SISTEMAS Y FIABILIDAD DE SISTEMAS

Definición 1.3.2. Se dice que un sistema es **coherente** si:

1. ϕ es creciente en todas las componentes.
2. $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ existen $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ tales que

$$0 = \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) < \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n) = 1.$$

La primera de las condiciones asegura que

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq \phi(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n), \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

es decir, que no funcione cualquiera de las componentes es “peor” para el funcionamiento del sistema.

Por otro lado, la segunda condición indica que existe al menos un punto donde la componente i es **relevante**, es decir, que el funcionamiento del sistema en este punto depende del funcionamiento de esta componente.

$$\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = x_i, \text{ para algún } x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in \{0, 1\}.$$

Los sistemas que estudiaremos en la memoria serán: sistemas en serie, en paralelo y k -out-of- n , que describimos a continuación.

Ejemplo 1

• **Sistema en serie.** Es el sistema que funciona si todas sus componentes funcionan. Se puede modelar con la función de estructura,

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{mín}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Se puede representar mediante la siguiente figura.

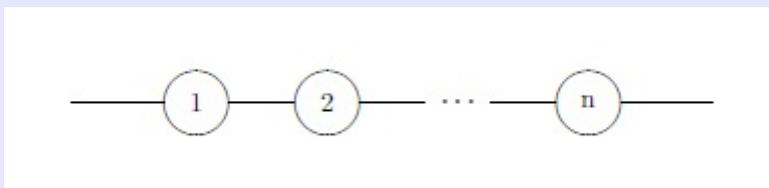


Figura 1.1. Representación gráfica de sistema en serie de n componentes.

• **Sistema en paralelo.** Es el sistema que funciona si al menos una de sus (n) componentes funciona. Se puede modelar con la función de estructura,

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{máx}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

Se puede representar mediante la siguiente figura.

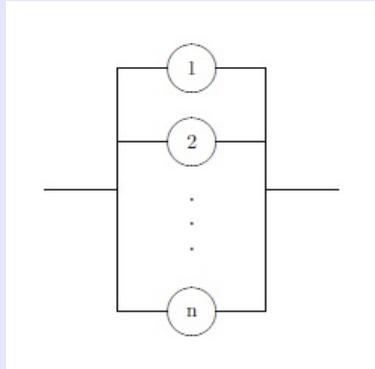


Figura 1.2. Representación gráfica de sistema en paralelo de \$n\$ componentes.

- **Sistema \$k\$-out of-\$n\$.** Es el sistema que funciona si al menos \$k\$ de sus \$n\$ componentes funcionan. Se puede modelar con la función de estructura,

$$\phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i \geq k \\ 0 & \text{si } \sum_{i=1}^n x_i < k. \end{cases}$$

Este tipo de sistemas son la generalización de los sistemas en paralelo y serie. Un sistema en serie sería un \$n\$-out of-\$n\$ y un sistema en paralelo sería un 1-out of-\$n\$.

Un avión con cuatro motores que vuela si funcionan dos de sus motores, es un ejemplo de sistema 2-out of-4.

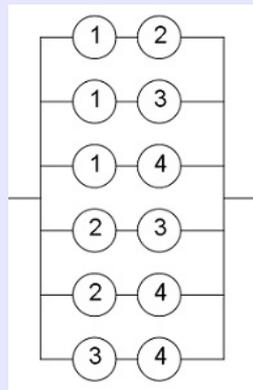


Figura 1.3. Representación gráfica de sistema 2-out of-4.

- Otros ejemplos de sistemas con tres componentes son los dados,

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, \max\{x_2, x_3\}\} \quad \phi(x_1, x_2, x_3) = \min\{\max\{x_1, x_3\}, x_2\},$$

que utilizaremos posteriormente en el estudio de la redundancia de sistemas y que pueden representarse mediante la siguiente figura.

1.3. SISTEMAS Y FIABILIDAD DE SISTEMAS

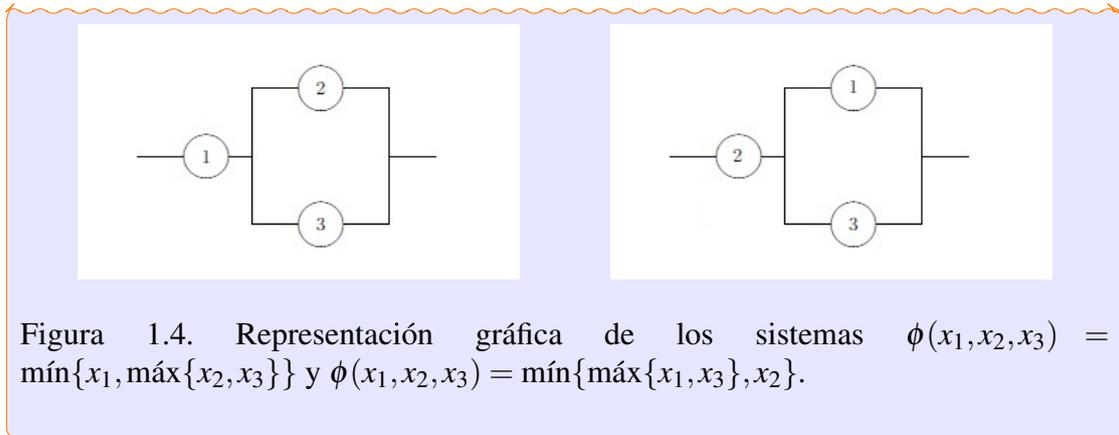


Figura 1.4. Representación gráfica de los sistemas $\phi(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, \max\{x_2, x_3\}\}$ y $\phi(x_1, x_2, x_3) = \min\{\max\{x_1, x_3\}, x_2\}$.

Todos estos resultados en sistemas están dados para un instante concreto de tiempo t . Sin embargo, trabajaremos sistemas de componentes que operan a lo largo del tiempo t . Para cada componente $i = 1, \dots, n$ la variable $x_i(t)$ será el indicador de si la componente i funciona o no en el instante de tiempo t . Así, $x_i(t) = 0$ si la componente i no funciona y 1 si lo hace en el instante t . Podemos construir entonces un vector $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ y aplicar la función de estructura al mismo, $\phi(\mathbf{x}(t))$, para saber el funcionamiento del sistema en el instante t .

Denotamos ahora por X_i los tiempos de vida de cada componente $i = 1, \dots, n$, que no son más que variables aleatorias no negativas y continuas. Cada una tiene su función de distribución (F_i), de supervivencia (\bar{F}_i) y de densidad (f_i). Se cumple la condición $X_i > t$ si, y solo si, $x_i(t) = 1$ y además $P(X_i > t) = P(x_i(t) = 1) = \bar{F}_i(t)$.

Representamos, ahora, por T a la variable aleatoria que modela el tiempo de vida del sistema ϕ . Si representamos por X_1, X_2, \dots, X_n a los tiempos de vida de las componentes, el sistema puede ser denotado por $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Entonces, sabemos que $T = \phi(X_1, X_2, \dots, X_n) > t$ si, y solo si, $\phi(\mathbf{x}(t)) = 1$, de esta manera la supervivencia del sistema en el instante t será la probabilidad de que la variable aleatoria T sea mayor que dicho tiempo.

A continuación pasamos a definir el concepto de estadístico ordenado que es una herramienta muy utilizada en estadística y que podemos encontrar en David y Nagaraja [14] y Arnold et al. [1], entre otros.

Definición 1.3.3. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ un vector aleatorio n -dimensional. Se denomina *i -ésimo estadístico ordenado* a la componente $X_{i:n}$ del vector aleatorio $(X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n})$ ordenado en forma creciente.

Los estadístico ordenados $X_{1:n}$, $X_{n:n}$ y $X_{k:n}$ coinciden con el tiempo de vida de los sistemas en serie, paralelo y $n - k + 1$ -out of- n , respectivamente, siendo las componentes de éstos X_1, X_2, \dots, X_n .

Observación 1.3. Sea el vector aleatorio (X_1, X_2, \dots, X_n) , denotaremos por $X_{[k:n]}$ a la k -ésima variable aleatoria resultante de ordenar este vector en orden decreciente, $(X_{[1:n]}, X_{[2:n]}, \dots, X_{[n:n]})$.

CAPÍTULO 1. COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES, SISTEMAS Y FIABILIDAD DE SISTEMAS

Con esta notación los sistemas en serie, paralelo y k -out of- n con componentes X_1, X_2, \dots, X_n coinciden con $X_{[n:n]}$, $X_{[1:n]}$ y $X_{[k:n]}$, respectivamente. Mantendremos esta notación para dichos sistemas por ser usada en muchos de los trabajos considerados y por contener, en el subíndice, el número de componentes en funcionamiento que son necesarias para que el sistema lo haga.

1.3.2. Fiabilidad de sistemas

En este epígrafe vamos a obtener la función de supervivencia de los sistemas en serie, paralelo y k -out of- n cuyas componentes, X_1, X_2, \dots, X_n , son independientes y que denotaremos por $\bar{F}_{n:n}(t)$, $\bar{F}_{1:n}(t)$ y $\bar{F}_{k:n}(t)$, respectivamente.

Un sistema k -out of- n funciona si k de las n componentes lo hacen y su tiempo de vida es $T = X_{[k:n]}$. Para obtener su función de supervivencia, obsérvese que la probabilidad de que al menos k componentes sean mayores que t se convierte en la unión disjunta de los sucesos $\{\{X_{i_1}, \dots, X_{i_r}\} > t \cap \{X_{j_1}, \dots, X_{j_s}\} \leq t\}$ donde los subconjuntos de $(1, \dots, n)$, (i_1, \dots, i_r) y (j_1, \dots, j_s) son disjuntos y el cardinal del primero es mayor o igual que k . Por ser los sucesos disjuntos y las componentes independientes, esta probabilidad se convierte en la suma de las probabilidades de todas las posibles elecciones de escoger al menos k componentes que funcionen (que lo harán con probabilidad $\bar{F}_i(t)$) y que el resto de las componentes no lo hagan (con probabilidad $F_i(t)$); y por tanto, viene dada por,

$$\bar{F}_{k:n}(t) = P(X_{[k:n]} > t) = \sum_{\varepsilon(k)} \prod_{i=1}^n [\bar{F}_i(t)]^{\varepsilon_i} \cdot [F_i(t)]^{1-\varepsilon_i}, \quad (1.4)$$

donde denotamos por $\varepsilon(k) = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \mid \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \geq k\}$.

Para el sistema en serie $X_{[n:n]} = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ su función de supervivencia puede ser calculada directamente como,

$$\bar{F}_{n:n}(t) = P(X_{[n:n]} > t) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i > t\}\right) = \prod_{i=1}^n \bar{F}_i(t). \quad (1.5)$$

Como el sistema en serie coincide con el sistema n -out of- n esta función puede ser calculada sustituyendo $k = n$ en (1.4).

Por último, para el sistema en paralelo $X_{[1:n]} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ resulta directamente que su función de supervivencia es,

$$\bar{F}_{1:n}(t) = 1 - P(X_{[1:n]} \leq t) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq t\}\right) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \bar{F}_i(t)). \quad (1.6)$$

Como el sistema en paralelo coincide con el sistema 1-out of- n esta función puede ser calculada sustituyendo $k = 1$ en (1.4).

Capítulo 2

Redundancia en componentes para la mejora de sistemas

2.1. Introducción

Un tema importante es el estudio del envejecimiento de los sistemas a partir del envejecimiento de las componentes que, en términos de la teoría de la probabilidad, es el estudio de la evolución del funcionamiento de estas componentes a través del tiempo. La comprensión y estudio del envejecimiento, duración media de vida y probabilidades de fallo de las componentes ayudarán en la identificación de las mejoras que pueden introducirse, para optimizar el tiempo de vida del sistema o al menos, paliar las consecuencias adversas de la producción de fallos. Un ejemplo de mejora que podemos introducir en un sistema son las **redundancias** en las componentes. Se entiende por redundancia la existencia en un sistema de un número adicional de componentes, con el objetivo de que puedan ponerse en funcionamiento alguna de ellas, si falla alguna de las componentes iniciales. Con la redundancia se persigue mejorar la fiabilidad, ya que aumentando el número de componentes, prevenimos el efecto del fallo de alguna de ellas. Por ejemplo, en los aviones numerosas componentes se encuentran duplicadas, como los motores.

Un problema importante es estudiar donde ubicar una componente redundante en el sistema, con el fin de obtener una configuración óptima del mismo que permita aumentar su fiabilidad. Por otro lado, para concluir que la colocación de una reposición en una componente es óptima, debemos hacerlo bajo algún criterio de ordenación de tiempos de vida. Además, por la propia naturaleza y casuística de cómo colocar una redundancia, distinguiremos dos tipos, la redundancia activa y la redundancia en espera. La primera tratará de modelizar el hecho de que la reposición se haga activamente poniéndola en paralelo junto con la componente redundante mientras el sistema funciona; la segunda trata de modelizar la reposición de una componente una vez que ésta haya fallado. También, podemos encontrarnos ante la situación donde las componentes son todas del mismo tipo y con una única componente de reposición podamos hacer la redundancia deseada en cualquiera de las componentes; este tipo de reposición se denominará de reposición común. Si las componentes son diferentes, entonces hemos de tener reposiciones distintas, denominadas uno a uno, que a su vez pueden tener tiempos de vida iguales o diferen-

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

tes a las componentes para las que serán usadas.

Trabajaremos con sistemas cuyas componentes son independientes y continuas o absolutamente continuas. Estudiaremos sistemas k -out of- n y cuando no sea posible obtener resultados sobre ellos trabajaremos con los sistemas en serie y paralelo. Para estos resultados utilizaremos los trabajos de Boland et al. [8, 9, 10], Singh y Misra [31], Valdés y Zequeira [33], Romera et al. [27], Valdés y Zequeira [34], Valdés et al. [32], Misra et al. [23, 24], Brito et al. [13], Zhao et al. [37, 36], You y Li [35] y Zhao et al. [38], entre otros.

Definiciones y notación

Pasamos, a continuación, a dar las definiciones y notaciones generales que consideraremos a lo largo de todo el capítulo. Comenzaremos con las definiciones de las formas de redundancia y tipos de las mismas que existen. Indicaremos ejemplos sobre estos tipos y por último daremos las notaciones que seguiremos en este capítulo.

Usaremos dos formas de redundancia que pasamos a definir.

Definición 2.1.1. *Se dice que una componente de reposición es una **redundancia activa** (o también llamada en caliente o en paralelo) si funciona simultáneamente con una de las componentes del sistema.*

Un ejemplo de redundancia activa los encontramos en los actuales servidores de información. Éstos usan discos RAID (*redundant array of independent disk*) que no son más que múltiples unidades de almacenamiento dispuestas en redundancia activa o en paralelo para que funcionen como una única componente de un sistema de discos. El funcionamiento del servidor sigue aunque uno de éstos falle ya que el resto de las redundancias lo sigue haciendo.

La redundancia activa, como vemos en el ejemplo, conduce al estudio del máximo de las variables.

Definición 2.1.2. *Se dice que una componente de reposición es una **redundancia en espera** (o también llamada fría o pasiva) si comienza a operar cuando la componente, para la que fue colocada, cesa en su función.*

Ejemplos de este tipo de redundancia lo encontramos habitualmente en nuestra vida cotidiana, las ruedas de repuesto de los coches, bombillas de luz que reponemos cuando funde la anterior, etc. En este caso, el tiempo de vida de la componente sería la suma de las variables aleatorias que rigen el comportamiento de cada redundancia, por lo que se consideran convoluciones de variables aleatorias.

Como vemos en los ejemplos, podemos tener reposiciones que sirvan para todas las componentes y/o por las características de éstas, que sean especiales para cada lugar del sistema. Por lo tanto, aparte de definir cómo podemos hacer las redundancias en las componentes de los sistemas, debemos saber con qué tipo de reposición lo haremos. Distinguiremos los dos tipos definidos a continuación, esencialmente.

2.1. INTRODUCCIÓN

Definición 2.1.3. Decimos que una redundancia es de **reposición común** si es una componente independiente del resto, la cual puede ser colocada en redundancia por cualquier otra componente del sistema.

Definición 2.1.4. Decimos que una redundancia es de **reposición uno a uno igualmente distribuida** si existen componentes independientes con tiempos de vida $(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$ que cumplen que $X_i =_{st} X'_i \forall i = 1, \dots, n$. La redundancia se hará en la componente i -ésima colocándose su homóloga de las redundantes.

Se dirá que tenemos **reposición uno a uno no igualmente distribuida** si las componentes $(X'_1, X'_2, \dots, X'_n)$ no cumplen, necesariamente, la condición de igualdad estocástica de la definición anterior. Así, este tipo de reposición es más general que el anterior, conteniéndolo.

Ejemplo II

Veamos un ejemplo sencillo para ver los tipos de redundancia que consideraremos. Tenemos una habitación que queremos iluminar con una lámpara, la cual está compuesta por n bombillas. Esto sería un sistema donde las componentes serían las bombillas y donde si queremos un mínimo de luz, por lo menos, han de funcionar k de las n . Nos disponemos entonces en un sistema k -out of- n donde las componentes pueden ser todas iguales, en el sentido de forma y tiempo de vida, o diferentes.



Figura 2.1. Sistemas de lámparas compuestas por bombillas. A la izquierda de diferentes tipos, a la derecha del mismo tipo. Imagen obtenida de internet.

Dados estos sistemas, podríamos hacer una redundancia activa colocando una nueva bombilla en un cable donde existe otra, considerando que esta componente falla cuando lo hacen ambas. Mientras, por otro lado, podemos hacer una redundancia en espera al intercambiar una de éstas por otra cuando cese en su función.

Del mismo modo, cuando hagamos esta redundancia, en cualquiera de sus modalidades, en la imagen de la derecha, como vemos, solo es necesario tener una componente redundante puesto que puede ser colocada en cualquiera de los lugares. Por otro lado, en la imagen de la izquierda comprobamos que debemos tener componentes redundantes para cada una y hacer la redundancia con un tipo de éstas.

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Tomaremos la siguiente notación, para este capítulo.

- X_1, X_2, \dots, X_n son los tiempos de vida para las componentes. Con funciones de distribución F_1, F_2, \dots, F_n , supervivencia $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, densidad f_1, f_2, \dots, f_n , razón de fallo r_1, r_2, \dots, r_n y razón de fallo inversa $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_n$.
- Las redundancias tendrán tiempos de vida Y_1, Y_2, \dots, Y_n [e Y cuando estemos hablando de redundancia común]. Sus funciones de distribución G_1, G_2, \dots, G_n , supervivencia $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \bar{G}_n$, densidad g_1, g_2, \dots, g_n , razón de fallo s_1, s_2, \dots, s_n y razón de fallo inversa $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_n$ [G, \bar{G}, g, s y \tilde{s}].
- Si tenemos las variables aleatorias Z_1, Z_2, \dots, Z_n , denotaremos por $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)_{[k]}$ o $Z_{[k:n]}$ a la k -ésima variable aleatoria resultante de ordenarlas en orden decreciente.
- Si las componentes son X_1, X_2, \dots, X_n , quedará representado por $X_{[k:n]}$ el tiempo de vida para los sistemas k -out of- n . Si hacemos redundancia, de cualquier tipo, en la componente i -ésima en este sistema, lo representaremos por $X_{[k:n]}^{(i)}$.
- Denotaremos por $\vee(X, Y) = \max(X, Y)$ al máximo de las variables; y por $\wedge(X, Y) = \min(X, Y)$ al mínimo de éstas.
- Para cualquier par de números p y p^* tomaremos como $p \sqcup p^* = p + (1 - p)p^*$.
- Se denota por $\stackrel{sgn}{=}$ a las igualdades en signo.
- Para los sistemas con redundancia activa que consideraremos a lo largo del capítulo tomaremos las notaciones para las variables aleatorias que modelan su tiempo de vida:
 - a) $W_1 = \wedge(\vee(X_1, Y), X_2)$ y $W_2 = \wedge(X_1, \vee(X_2, Y))$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia activa y reposición común.
 - b) $W_1^{(k)} = (\vee(X_1, Y), X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $W_2^{(k)} = (X_1, \vee(X_2, Y), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia activa y reposición común, para $n \geq 3$ y $2 \leq k \leq n$.
 - c) $U_1 = \wedge(\vee(X_1, Y_1), X_2)$ y $U_2 = \wedge(X_1, \vee(X_2, Y_2))$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia activa y reposición uno a uno.
 - d) $U_1^{(k)} = (\vee(X_1, Y_1), X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $U_2^{(k)} = (X_1, \vee(X_2, Y_2), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia activa y reposición uno a uno, para $n \geq 3$ y $2 \leq k \leq n$.
- Para los sistemas con redundancia en espera que consideraremos a lo largo del capítulo tomaremos las notaciones para las variables aleatorias que modelan su tiempo de vida:
 - a) $W'_{\wedge 1} = \wedge(X_1 + Y, X_2)$ y $W'_{\wedge 2} = \wedge(X_1, X_2 + Y)$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia en espera y reposición común.
 - b) $W'_{\vee 1} = \vee(X_1 + Y, X_2)$ y $W'_{\vee 2} = \vee(X_1, X_2 + Y)$. Sistema en paralelo para dos componentes con redundancia en espera y reposición común.

2.1. INTRODUCCIÓN

- c) $W_1^{(k)} = (X_1 + Y, X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $W_2^{(k)} = (X_1, X_2 + Y, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia en espera y reposición común, para $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n$.
- d) $U'_{\wedge 1} = \wedge(X_1 + Y_1, X_2)$ y $U'_{\wedge 2} = \wedge(X_1, X_2 + Y_2)$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia en espera y reposición uno a uno.
- e) $U'_{\vee 1} = \vee(X_1 + Y_1, X_2)$ y $U'_{\vee 2} = \vee(X_1, X_2 + Y_2)$. Sistema en paralelo para dos componentes con redundancia en espera y reposición uno a uno.
- f) $U_1^{(k)} = (X_1 + Y_1, X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $U_2^{(k)} = (X_1, X_2 + Y_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia en espera y reposición uno a uno, para $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n$.

- Representamos las funciones de distribución, densidad, supervivencia, razón de fallo y razón de fallo inversa para cada sistemas por $F_{\square}, f_{\square}, \bar{F}_{\square}, r_{\square}$ y \tilde{r}_{\square} , donde en el subíndice pondremos la variable aleatoria a la que se refiere.

Ejemplo III

Sean las componentes C_1 y C_2 con tiempos de vida X_1 y X_2 y las redundancias R_1 y R_2 con tiempos de vida Y_1 e Y_2 para estas componentes. Los sistemas U_1 y U_2 definidos anteriormente pueden representarse mediante las siguientes figuras.

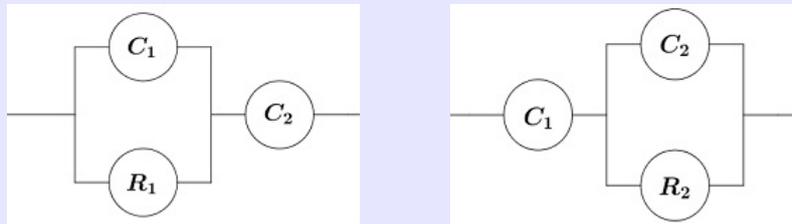


Figura 2.2. Representación gráfica de los sistemas U_1 y U_2 .

Los sistemas W_1 y W_2 tienen la misma estructura que la anterior siendo las redundancias iguales para ambas componentes, $R_1 = R_2 = R$. Puede verse, también, esta estructura en la Figura 1.4.

Como hemos podido comprobar, la casuística de cómo incluir una componente de reposición en los diferentes tipos de sistemas y todos los tipos de sistemas considerados es bastante amplia. Para poder tratar de la forma más ordenada posible todo lo referido a ello, lo organizaremos en primer lugar teniendo en cuenta el orden que se obtiene en el sistema con redundancia. Es por esto que el capítulo estará compuesto por cinco secciones para cada uno de los órdenes estudiados, estocástico, en preferencia, razón de fallo, razón de fallo inversa y cociente de verosimilitudes. Dentro de cada sección incluiremos los tipos de redundancia que hemos definido, activa y en espera, para posteriormente hacer referencia a los tipos de reposición dentro de cada uno de los anteriores. A modo de resumen incluimos la siguiente tabla:

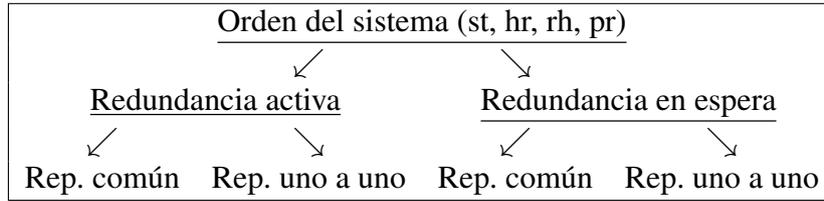


Tabla 2.1. Estructura de presentación de los contenidos.

2.2. Orden estocástico en sistemas con una redundancia

2.2.1. Redundancia activa

Reposición común

Estudiaremos en este apartado dónde es mejor, en sentido estocástico, colocar una redundancia de reposición común en un sistema k -out of- n para posteriormente dar una caracterización del orden estocástico a partir de ello. El primer teorema que presentamos está contenido en Boland y Proschan [12] y hace referencia a que, si tenemos un sistema k -out of- n con componentes independientes y ordenadas estocásticamente e Y es una redundancia activa común independiente de las otras, entonces, hacer esta redundancia en la posición i es mejor estocásticamente que hacerla en la $i + 1$, para cada $i = 1, \dots, n - 1$.

Teorema 2.2.1. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, \dots, X_n e Y independientes. Si $X_1 \leq_{st} X_2 \leq_{st} \dots \leq_{st} X_n$, entonces el tiempo de vida del sistema

$$X_{[k:n]}^{(i)} = (X_1, \dots, X_{i-1}, \vee(X_i, Y), X_{i+1}, \dots, X_n)_{[k]}$$

es decreciente estocásticamente en i .

Demostración.- En primer lugar, vamos a obtener la función de supervivencia $\bar{H}_i(t)$ y la función de distribución $H_i(t)$, de la variable aleatoria $\vee(X_i, Y)$, es decir,

$$\bar{H}_i(t) = P(\{\vee(X_i, Y)\} > t) = P(\{X_i > t\} \cup \{Y > t\}) = \bar{F}_i(t) + \bar{G}(t) - \bar{F}_i(t)\bar{G}(t) = \bar{F}_i(t) \sqcup \bar{G}(t), \quad (2.1)$$

y

$$H_i(t) = P(\{\vee(X_i, Y)\} \leq t) = P(\{X_i \leq t\} \cap \{Y \leq t\}) = F_i(t)G(t), \quad (2.2)$$

donde en ambas expresiones, la segunda igualdad viene dada por la independencia de las variables.

Para comprobar que los tiempos de vida se ordenan en orden decreciente en i , debemos probar que

$$\bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i)}}(t) \geq \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i+1)}}(t) \quad \forall i = 1, \dots, n - 1; \forall k = 1, \dots, n \text{ y } t \geq 0.$$

2.2. ORDEN ESTOCÁSTICO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

Supongamos, en primer lugar, que $k = 1$, es decir, estaremos considerando el sistema en paralelo de n componentes. Si hacemos una redundancia activa en una de las componentes formaríamos el sistema en paralelo con las $n + 1$ componentes y se obtiene la igualdad,

$$\bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i)}}(t) = P(\vee(X_1, X_2, \dots, X_n, Y) > t) = \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i+1)}}(t) \text{ para } t \geq 0,$$

obteniéndose el resultado.

Supongamos ahora que $k \geq 2$. Para cualquier $t \geq 0$ introduciendo (2.1) y (2.2) en (1.4), tenemos para la diferencia de las supervivencias de los sistemas considerados,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i)}}(t) - \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i+1)}}(t) &= \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \geq k}} [\bar{H}_i(t)]^{\varepsilon_i} [H_i(t)]^{1-\varepsilon_i} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n [\bar{F}_j(t)]^{\varepsilon_j} \cdot [F_j(t)]^{1-\varepsilon_j} \\ &\quad - \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \geq k}} [\bar{H}_{i+1}(t)]^{\varepsilon_{i+1}} [H_{i+1}(t)]^{1-\varepsilon_{i+1}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i+1}}^n [\bar{F}_j(t)]^{\varepsilon_j} \cdot [F_j(t)]^{1-\varepsilon_j}. \end{aligned}$$

Para demostrar el enunciado necesitaremos comprobar que esta diferencia es positiva. Sacando factor común del término primero, los factores $\bar{H}_i(t)\bar{F}_{i+1}(t)$, $\bar{H}_i(t)F_{i+1}(t)$, $H_i(t)\bar{F}_{i+1}(t)$ y $H_i(t)F_{i+1}(t)$ que corresponden a los casos en los que las componentes i e $i + 1$ funcionan, cuando funciona una sí y otra no, y por último, cuando no funciona ninguna de las dos en el caso de estar la redundancia en la componente i . Por otro lado, en el segundo miembro, con el mismo criterio anterior, cuando hacemos redundancia en la componente $i + 1$, sacamos factores comunes, $\bar{H}_{i+1}(t)\bar{F}_i(t)$, $\bar{H}_{i+1}(t)F_i(t)$, $H_{i+1}(t)\bar{F}_i(t)$ y $H_{i+1}(t)F_i(t)$. Quedarían estos factores multiplicados por sumatorios del resto de productos de funciones de supervivencia y distribución del resto de componentes. Representando por $\sum_{\geq k}$ al sumatorio de estos productos del resto de componentes cuando requerimos que k de ellas funcionen, la diferencia anterior se puede escribir como,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i)}}(t) - \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i+1)}}(t) &= (\bar{H}_i(t)\bar{F}_{i+1}(t) - \bar{H}_{i+1}(t)\bar{F}_i(t)) \sum_{\geq k-2} \\ &\quad + (\bar{H}_i(t)F_{i+1}(t) + H_i(t)\bar{F}_{i+1}(t) - \bar{H}_{i+1}(t)F_i(t) - H_{i+1}(t)\bar{F}_i(t)) \sum_{\geq k-1} \\ &\quad + (H_i(t)F_{i+1}(t) - H_{i+1}(t)F_i(t)) \sum_{\geq k}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Desarrollando el factor común de cada uno de los sumandos, resulta (obviando la evaluación en t de las funciones),

$$\bar{H}_i\bar{F}_{i+1} - \bar{H}_{i+1}\bar{F}_i = (\bar{F}_i + F_i\bar{G})\bar{F}_{i+1} - (\bar{F}_{i+1} + F_{i+1}\bar{G})\bar{F}_i = [\bar{F}_{i+1} - \bar{F}_i]\bar{G}, \quad (2.4a)$$

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

$$\begin{aligned}
 & \tilde{H}_i F_{i+1} + H_i \bar{F}_{i+1} - \tilde{H}_{i+1} F_i - H_{i+1} \bar{F}_i \\
 &= (\bar{F}_i + F_i \bar{G}) F_{i+1} + F_i G \bar{F}_{i+1} - (\bar{F}_{i+1} + F_{i+1} \bar{G}) F_i - F_{i+1} G \bar{F}_i \\
 &= (\bar{F}_i F_{i+1} - \bar{F}_{i+1} F_i) \bar{G} = -[\bar{F}_{i+1} - \bar{F}_i] \bar{G}, \quad (2.4b)
 \end{aligned}$$

y, por último,

$$H_i F_{i+1} - H_{i+1} F_i = F_i G F_{i+1} - F_{i+1} G F_i = 0. \quad (2.4c)$$

Sustituyendo en (2.3) y sacando factor común los resultados de (2.4a) y (2.4b) tendremos,

$$\bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i)}}(t) - \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i+1)}}(t) = [\bar{F}_{i+1} - \bar{F}_i] \bar{G} \left[\sum_{\geq k-2} - \sum_{\geq k-1} \right].$$

Ahora bien, el segundo sumatorio está contenido en el primero y esto es porque si $k - 1$ componentes del sistema funcionan, entonces lo hacen $k - 2$ de ellas. Se quedará la diferencia como la suma de productos de las supervivencias y distribuciones de que exactamente $k - 2$ componentes funcionen, es decir,

$$\bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i)}}(t) - \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i+1)}}(t) = [\bar{F}_{i+1} - \bar{F}_i] \bar{G} \left[\sum_{=k-2} \right]. \quad (2.5)$$

Que es mayor o igual que cero pues el sumatorio contiene el producto de funciones no negativas y, además, como las variables están ordenadas estocásticamente, entonces $\bar{F}_{i+1} - \bar{F}_i \geq 0$, con lo cual se prueba el teorema. □

Se sigue de este teorema que, en el orden estocástico para sistemas k -out of- n , es siempre preferible realizar la redundancia activa de una reposición común en la componente más débil. Como dicen Boland y Proschan [12], esto quizás no sea sorprendente para los sistemas en serie, donde se conoce que la componente más débil es la más importante. Es más sorprendente para el caso más general de $0 < k < n$ ya que en estos casos la componente más débil estocásticamente no será necesariamente la más importante en todos los valores de tiempo.

Como corolario al anterior teorema tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.2.2. Sean X_1, X_2, \dots, X_n e Y tiempos de vida independientes. Si se cumple que $X_1 \leq_{st} X_2$, entonces:

1. $W_1 \geq_{st} W_2$.
2. $W_1^{(k)} \geq_{st} W_2^{(k)}$, para cada $2 \leq k \leq n$.

Boland et al. [10] prueban, además, que la condición de que se mantenga el orden estocástico en los sistemas $W_1, W_2, W_1^{(k)}$ y $W_2^{(k)}$ para cualesquiera k e Y tiempo de vida independiente de X_1, X_2, \dots, X_n es necesaria y suficiente para que $X_1 \leq_{st} X_2$, como vemos a continuación.

2.2. ORDEN ESTOCÁSTICO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

Teorema 2.2.3. Sean X_1, X_2, \dots, X_n tiempos de vida independientes.

1. $X_1 \leq_{st} X_2$ si, y solo si, para cualquier tiempo de vida Y independiente de X_1 y X_2 se cumple que $W_1 \geq_{st} W_2$.
2. $X_1 \leq_{st} X_2$ si, y solo si, para cualquier tiempo de vida Y independiente de X_1, X_2, \dots, X_n y cualquier k se cumple que $W_1^{(k)} \geq_{st} W_2^{(k)}$.

Demostración.- La condición necesaria viene dada por el Corolario 2.2.2.

Para la condición suficiente, de la igualdad (2.5) para la diferencia de las supervivencias, se tiene para el apartado 1 que $[\bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t)]\bar{G}(t) \geq 0 \forall \bar{G}$ lo que implica que $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$; y para el apartado 2 que $[\bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t)]\bar{G}(t) \sum_{i=k-2} \geq 0 \forall \bar{G}$ lo que implica que $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$, es decir, en ambos casos, $X_1 \leq_{st} X_2$. \square

Reposición uno a uno

En esta sección nos preguntamos qué ocurre en la situación donde vamos a asignar una reposición uno a uno a un sistema k -out of- n en el sentido activo. Para motivar los resultados expuestos vamos a construir, en primer lugar, un ejemplo de sistema 2-out of-3 en el que las componentes tienen distribuciones exponenciales, o sea, sus funciones de densidad son $f_i(t) = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$ para $i = 1, 2, 3$, con el objetivo de probar que, en general, no hay una selección óptima para una colocación activa de la redundancia uno a uno.

Ejemplo IV

Consideremos $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Construimos las funciones de supervivencia $\bar{F}_i(t) = e^{-\lambda_i t}$ para $i = 1, 2, 3$ que son las de tres exponenciales de media λ_i .

El sistema 2-out of-3 tiene como función de supervivencia

$$\bar{F}_{X_{[2;3]}}(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)\bar{F}_3(t) + \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) - 2\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t).$$

Si incluimos la redundancia activa uno a uno en la primera componente en esta función de supervivencia hemos de sustituir \bar{F}_1 por $\bar{F}_1(1 + F_1)$. Para la redundancia en la segunda componente tendríamos que hacerlo de manera igual para \bar{F}_2 .

Teniendo la expresión de ambas funciones, veamos cómo se comporta la diferencia entre ellas para ver cuál sería su orden estocástico, (véase Apéndice A para detalles en los cálculos). Dibujando esta diferencia, obtenemos el siguiente resultado,

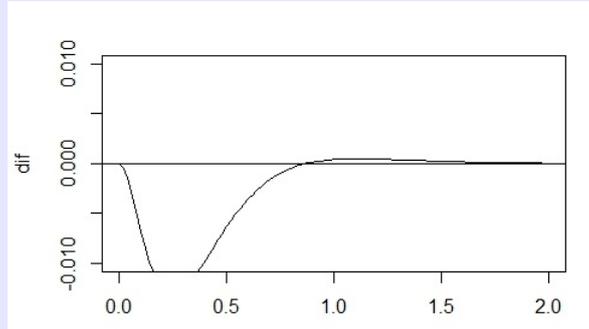


Figura 2.3. Diferencia para supervivencias de sistemas 2-out of-3 con redundancia común uno a uno en la primera y segunda componente.

Con los datos	Tiempo t =	0.5	1.2
	$\bar{F}_{X_{[2:3]}^{(1)}}(t) - \bar{F}_{X_{[2:3]}^{(2)}}(t)$	≈ -0.00633	≈ 0.00046

Lo que indica que los sistemas $X_{[2:3]}^{(1)}$ y $X_{[2:3]}^{(2)}$ no se ordenan estocásticamente.

El anterior ejemplo muestra que, en general, para un sistema k -out of- n no se cumple el orden estocástico para la reposición activa uno a uno e igual si sus componentes están ordenadas estocásticamente. Por otro lado, para sistemas en serie y paralelo, sin embargo, Boland y Proschan [12] demuestran el siguiente resultado.

Teorema 2.2.4. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tiempos de vida independientes que cumplen para cada i , $X_i =_{st} Y_i$. Si $X_1 \leq_{st} X_2 \leq_{st} \dots \leq_{st} X_n$, entonces:

1. El sistema en serie $X_{[n:n]}^{(i)} = \wedge(X_1, \dots, \vee(X_i, Y_i), \dots, X_n)$ es decreciente estocásticamente en i .
2. El sistema en paralelo $X_{[1:n]}^{(i)} = \vee(X_1, \dots, \vee(X_i, Y_i), \dots, X_n)$ es creciente estocásticamente en i .

Demostración.- Como las componentes cumplen $X_i =_{st} Y_i$, denotaremos de la misma forma a sus funciones de supervivencia y distribución, \bar{F}_i y F_i , respectivamente.

El sistema en serie con componentes independientes tiene como función de supervivencia el producto de las supervivencias de sus componentes. De este modo, la diferencia entre las supervivencias de ambos es,

$$P(X_{[n:n]}^{(i)} > t) - P(X_{[n:n]}^{(i+1)} > t) = (1 + F_i) \prod_{j=1}^n \bar{F}_j - (1 + F_{i+1}) \prod_{j=1}^n \bar{F}_j = (F_i - F_{i+1}) \prod_{j=1}^n \bar{F}_j.$$

Esta última expresión es mayor o igual que cero por ser producto de funciones de supervivencia y una diferencia positiva, debido a la ordenación estocástica de los tiempos de vida.

2.2. ORDEN ESTOCÁSTICO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

El sistema en paralelo con componentes independientes tiene como función de distribución el producto de las funciones de distribución de sus componentes. De este modo, al hacer la diferencia entre ambas funciones de distribución queda,

$$P(X_{[1:n]}^{(i)} \leq t) - P(X_{[1:n]}^{(i+1)} \leq t) = F_i \prod_{j=1}^n F_j - F_{i+1} \prod_{j=1}^n F_j = (F_i - F_{i+1}) \prod_{j=1}^n F_j,$$

que es mayor o igual que cero por ser producto de funciones de supervivencia y por la ordenación estocástica de los tiempos de vida. \square

Con este resultado sabemos que, para el sistema en serie con redundancia activa uno a uno e igualmente distribuida, en el orden estocástico, es mejor colocar ésta en la componente más débil estocásticamente; mientras que, por otro lado, para el sistema en paralelo es siempre mejor colocar la redundancia en la componente más fuerte. Como hemos hecho anteriormente, podemos enunciar un corolario directo a partir de este teorema con respecto a los sistemas U_1 y U_2 .

Corolario 2.2.5. Sean X_1, X_2, Y_1 e Y_2 tiempos de vida independientes. Si $X_1 =_{st} Y_1 \leq_{st} X_2 =_{st} Y_2$, entonces $U_1 \geq_{st} U_2$.

Nuestra pregunta es, ahora, si podemos considerar otras condiciones sobre los tiempos de vida de Y_1 e Y_2 para que se siga manteniendo la desigualdad estocástica anterior y que no introduzcamos las igualdades estocásticas $X_i =_{st} Y_i$ para $i = 1, 2$, esto es, considerar la reposición uno a uno no igualmente distribuida. Este tema se trata en Valdés y Zequeira [33] con el siguiente teorema por el cuál se muestran dos condiciones sobre los tiempos de vida de las componentes para que el anterior orden de los sistemas se verifique.

Teorema 2.2.6. Sean X_1, X_2, Y_1 e Y_2 tiempos de vida independientes. Supongamos que se verifica una de las situaciones siguientes:

- a) $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$, o
- b) $X_1 \leq_{st} X_2$, $Y_2 \leq_{st} X_2$ y $X_1 \leq_{st} Y_1$,

entonces, $U_1 \geq_{st} U_2$.

Demostración.- Las funciones de supervivencia de los sistemas U_1 y U_2 , teniendo en cuenta (2.1), vienen dadas por,

$$\bar{F}_{U_1}(t) = P(X_2 > t)P(\vee(X_1, Y_1) > t) = \bar{F}_2(t)(\bar{F}_1(t) \sqcup \bar{G}_1(t)), \quad (2.6a)$$

y

$$\bar{F}_{U_2}(t) = P(X_1 > t)P(\vee(X_2, Y_2) > t) = \bar{F}_1(t)(\bar{F}_2(t) \sqcup \bar{G}_2(t)). \quad (2.6b)$$

Entonces el orden $U_1 \geq_{st} U_2$ se verificará si $\bar{F}_{U_1}(t) \geq \bar{F}_{U_2}(t)$ lo que es equivalente a,

$$\boxed{\bar{F}_2(t)F_1(t)\bar{G}_1 \geq \bar{F}_1(t)F_2(t)\bar{G}_2.} \quad (2.7)$$

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Para probar dicha desigualdad distinguiremos ahora las condiciones del enunciado. Para el caso a) la desigualdad anterior es cierta ya que se verifican las desigualdades $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$, $F_1(t) \geq F_2(t)$ y $\bar{G}_2(t) \leq \bar{G}_1(t)$. Para el caso b) también es cierta ya que se verifican las desigualdades $F_1(t) \geq F_2(t)$, $\bar{F}_1(t) \leq \bar{G}_1(t)$ y $\bar{G}_2(t) \leq \bar{F}_2(t)$. □

Observando la condición equivalente que proporciona (2.7), Valdés y Zequeira [33] obtienen un corolario bajo el cual se da una nueva caracterización para el orden estocástico entre dos tiempos de vida independientes bajo la formación de los sistemas U_1 y U_2 .

Corolario 2.2.7. *Sean X_1, X_2, Y_1 e Y_2 tiempos de vida independientes. La condición $X_1 \leq_{st} X_2$ es necesaria y suficiente para que se verifique el orden $U_1 \geq_{st} U_2$ si*

a) $Y_1 =_{st} Y_2$.

b) $X_i =_{st} Y_i$ para $i = 1, 2$.

Demostración.- La condición primera se ha visto en el Teorema 2.2.3 ya que para $Y_1 =_{st} Y_2$ obtenemos la igualdad $U_i = W_i$ con $i = 1, 2$.

Para la segunda condición se tienen las igualdades $\bar{G}_1(t) = \bar{F}_1(t)$ y $\bar{G}_2(t) = \bar{F}_2(t)$, lo que hace que (2.7) sea equivalente a $F_1(t) \geq F_2(t)$ como queríamos comprobar. □

Si tenemos redundancias activas, tanto con reposición común como uno a uno con distribución igual a la componente, tenemos dos caracterizaciones para el orden estocástico entre dos variables aleatorias bajo condiciones de formación de sistemas en serie con estas redundancias.

Observando los resultados anteriores para la reposición uno a uno, y sus significados, podemos concluir que siempre que se ponga en redundancia activa una reposición uno a uno no igualmente distribuida, ésta ha de hacerse con la reposición más fuerte estocásticamente colocada en la componente más débil. En el Ejemplo IV anterior construimos sistemas 2-out of-3 con redundancia activa uno a uno igualmente distribuida; nuestra pregunta es: si usamos la reposición más fuerte en este sistema en la componente más débil, ¿se mantendría el orden estocástico?

El siguiente teorema resuelve esta cuestión, probando que en el orden estocástico para los sistemas k -out of- n cuando hacemos redundancias activas con reposiciones uno a uno no igualmente distribuidas un sistema es mejor en este orden cuando hacemos la reposición con la redundancia más fuerte en la componente más débil. Este teorema no ha sido encontrado en la literatura.

Teorema 2.2.8. *Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ tiempos de vida independientes. Si $X_1 \leq_{st} \dots \leq_{st} X_n$ e $Y_n \leq_{st} \dots \leq_{st} Y_1$, entonces el tiempo de vida del sistema*

$$X_{[k:n]}^{(i)} = (X_1, \dots, \vee(X_i, Y_i), \dots, X_n)_{[k]},$$

es decreciente estocásticamente en i .

2.2. ORDEN ESTOCÁSTICO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

Demostración.- Sea $k = 1$, entonces se trata de los sistemas en paralelo de $n + 1$ componentes, con reposiciones en las componentes i e $i + 1$. La diferencia entre las funciones de distribución de los sistemas $X_{[1:n]}^{(i+1)}$ y $X_{[1:n]}^{(i)}$ usando (1.6) es igual a,

$$F_{X_{[1:n]}^{(i+1)}}(t) - F_{X_{[1:n]}^{(i)}}(t) = \prod_{j=1}^n F_j(t) [G_{i+1}(t) - G_i(t)],$$

diferencia que es positiva por ser producto de funciones de distribución e $Y_{i+1} \leq_{st} Y_i$, por lo que se verifica el orden $X_{[1:n]}^{(i)} \geq_{st} X_{[1:n]}^{(i+1)}$.

Sea $k = n$, entonces se trata de los sistemas en serie de n componentes, con reposiciones activas en las componentes i e $i + 1$. La diferencia entre las funciones de supervivencia de los sistemas $X_{[n:n]}^{(i)}$ y $X_{[n:n]}^{(i+1)}$ usando (1.5), es igual a,

$$\bar{F}_{X_{[n:n]}^{(i)}}(t) - \bar{F}_{X_{[n:n]}^{(i+1)}}(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \bar{F}_j(t) [\bar{F}_i(t) \sqcup \bar{G}_i(t)] - \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i+1}}^n \bar{F}_j(t) [\bar{F}_{i+1}(t) \sqcup \bar{G}_{i+1}(t)],$$

que sacando factor común $\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n \bar{F}_j(t)$ y simplificando esta diferencia puede escribirse como,

$$\bar{F}_{X_{[n:n]}^{(i)}}(t) - \bar{F}_{X_{[n:n]}^{(i+1)}}(t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n \bar{F}_j(t) [F_i(t)\bar{F}_{i+1}(t)\bar{G}_i(t) - F_{i+1}\bar{F}_i(t)\bar{G}_{i+1}(t)],$$

siendo esta expresión mayor o igual que cero por ser producto de funciones de supervivencia y por el Teorema 2.2.6 apartado a).

Sea, por último, $1 < k < n$. Usando la igualdad (2.3) para la diferencia de supervivencias en sistemas k -out of- n con redundancias activas en i e $i + 1$ y denotando por $\bar{H}_i(t) = \bar{F}_i(t) \sqcup \bar{G}_i(t)$ y $H_i(t) = F_i(t)G_i(t)$, obtenemos,

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i)}} - \bar{F}_{X_{[k:n]}^{(i+1)}} &= (\bar{H}_i(t)\bar{F}_{i+1}(t) - \bar{H}_{i+1}(t)\bar{F}_i(t)) \sum_{\geq k-2} \\ &+ (\bar{H}_i(t)F_{i+1}(t) + H_i(t)\bar{F}_{i+1}(t) - \bar{H}_{i+1}(t)F_i(t) - H_{i+1}(t)\bar{F}_i(t)) \sum_{\geq k-1} \\ &+ (H_i(t)F_{i+1}(t) - H_{i+1}(t)F_i(t)) \sum_{\geq k}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Desarrollando los factores comunes de cada uno de los sumandos anteriores, tenemos,

$$\begin{aligned} \bar{H}_i\bar{F}_{i+1} - \bar{H}_{i+1}\bar{F}_i &= (\bar{F}_i + F_i\bar{G}_i)\bar{F}_{i+1} - (\bar{F}_{i+1} + F_{i+1}\bar{G}_{i+1})\bar{F}_i \\ &= (F_i\bar{G}_i - F_{i+1}\bar{G}_{i+1}) + F_iF_{i+1}(\bar{G}_{i+1} - \bar{G}_i), \end{aligned} \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned}
 & \bar{H}_i F_{i+1} + H_i \bar{F}_{i+1} - \bar{H}_{i+1} F_i - H_{i+1} \bar{F}_i \\
 &= (\bar{F}_i + F_i \bar{G}_i) F_{i+1} + F_i G_i \bar{F}_{i+1} - (\bar{F}_{i+1} + F_{i+1} \bar{G}_{i+1}) F_i - F_{i+1} G_{i+1} \bar{F}_i \\
 &= -2F_i F_{i+1} (\bar{G}_{i+1} - \bar{G}_i) - (F_i \bar{G}_i - F_{i+1} \bar{G}_{i+1}) \quad (2.9b)
 \end{aligned}$$

y, por último,

$$H_i F_{i+1} - H_{i+1} F_i = F_i G_i F_{i+1} - F_{i+1} G_{i+1} F_i = (F_i \bar{G}_i - F_{i+1} \bar{G}_{i+1}). \quad (2.9c)$$

Sustituyendo en (2.8) las igualdades (2.9a), (2.9b) y (2.9c) y sacando los factores comunes, obtenemos la siguiente cadena de igualdades, (obviamos la evaluación en t),

$$\begin{aligned}
 & \bar{F}_{X_{[k;n]}^{(i)}} - \bar{F}_{X_{[k;n]}^{(i+1)}} \\
 &= [F_i \bar{G}_i - F_{i+1} \bar{G}_{i+1} + F_i F_{i+1} (\bar{G}_{i+1} - \bar{G}_i)] \left[\sum_{\geq k-2} - \sum_{\geq k-1} \right] + [F_i F_{i+1} (\bar{G}_i - \bar{G}_{i+1})] \left[\sum_{\geq k-1} - \sum_{\geq k} \right] \\
 &= [F_i \bar{F}_{i+1} \bar{G}_i - F_{i+1} \bar{F}_i \bar{G}_{i+1}] \sum_{=k-2} + [F_i F_{i+1} (\bar{G}_i - \bar{G}_{i+1})] \sum_{=k-1}.
 \end{aligned}$$

En la suma anterior, el primer sumando es mayor o igual que cero por la desigualdad (2.7) probada en el Teorema 2.2.6 apartado a) y la suma de productos de funciones de supervivencia y distribución positivas. El segundo sumando es mayor o igual que cero ya que $Y_i \geq_{st} Y_{i+1}$ y la suma de productos de funciones de supervivencia y distribución positivas lo que completa la demostración. □

Este resultado es más completo que el Teorema 2.2.4 el cuál hacía referencia a la reposición uno a uno e igualmente distribuida. Fijémonos también, en la paradoja que supone que, para el sistema en serie, cuando realizamos reposiciones no igualmente distribuidas, es necesario el orden estocástico decreciente de los tiempos de vida Y_i , mientras que la condición cambia cuando la reposición no es igualmente distribuida.

2.2.2. Redundancia en espera

Reposición común

En esta sección estudiaremos la redundancia en espera en sistemas. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos para la redundancia activa, uno podría esperar que, por ejemplo, si $X_1 \leq_{st} X_2$ e Y es una reposición común en espera, entonces el sistema en serie de dos componentes $W'_{\wedge 1}$ sería mejor estocásticamente que el sistema en serie $W'_{\wedge 2}$; este no es cierto, en general, como puede verse en un contraejemplo en Boland y Proschan [12].

2.2. ORDEN ESTOCÁSTICO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

La condición del orden estocástico para las componentes no es suficiente para obtener el orden estocástico en el sistema con redundancia en espera común. Sin embargo, cuando las componentes están ordenadas en el sentido orden de cociente de verosimilitud, sí que podemos asegurar el orden de los sistemas en serie y paralelo como sigue en el siguiente teorema demostrado en Boland y Proschan [12].

Teorema 2.2.9. Sean X_1, X_2, \dots, X_n e Y tiempos de vida independientes. Si se cumple que $X_1 \leq_{lr} X_2 \leq_{lr} \dots \leq_{lr} X_n$, entonces:

1. El sistema en serie $X'_{[n:n]}^{(i)} = \wedge(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i + Y, X_{i+1}, \dots, X_n)$ es estocásticamente decreciente en i .
2. El sistema en paralelo $X'_{[1:n]}^{(i)} = \vee(X_1, \dots, X_{i-1}, X_i + Y, X_{i+1}, \dots, X_n)$ es estocásticamente creciente en i .

Demostración.- Para demostrar ambos resultados definiremos las funciones $g_{\wedge}^t(t_1, t_2) = \wedge(t_1 + t, t_2)$ y $g_{\vee}^t(t_1, t_2) = \vee(t_1, t_2 + t)$ y veamos que son crecientes en reordenación para cualquier $t \geq 0$.

- Si $t_2 \geq t_1$ entonces $(t_2 - t_1) \geq 0$, además $t_2 + t \geq t_1$ y se tiene:

- a) $\wedge(t_2 + t, t_1) = t_1 = \wedge(t_1, t_2) < \wedge(t_1 + t, t_2)$ lo que implica que $g_{\wedge}^t(t_1, t_2) - g_{\wedge}^t(t_2, t_1) > 0$.
- b) $\vee(t_1, t_2 + t) = t_2 + t = \vee(t_1 + t, t_2 + t) \geq \vee(t_2, t_1 + t)$ lo que implica que $g_{\vee}^t(t_1, t_2) - g_{\vee}^t(t_2, t_1) > 0$.

- Si $t_2 < t_1$ entonces $(t_2 - t_1) < 0$, además $t_2 < t_1 + t$ y se tiene:

- a) $\wedge(t_1 + t, t_2) = t_2 = \wedge(t_2, t_1) < \wedge(t_2 + t, t_1)$ lo que implica que $g_{\wedge}^t(t_1, t_2) - g_{\wedge}^t(t_2, t_1) < 0$.
- b) $\vee(t_2, t_1 + t) = t_1 + t = \wedge(t_1 + t, t_2 + t) \geq \wedge(t_1, t_2 + t)$ lo que implica que $g_{\vee}^t(t_1, t_2) - g_{\vee}^t(t_2, t_1) < 0$.

Por el Teorema 1.2.7, tenemos que como cada $X_i \leq_{lr} X_{i+1}$ con $i = 1, \dots, n - 1$, se cumple

$$\begin{aligned} g_{\wedge}^Y(X_i, X_{i+1}) &= \wedge(X_i + Y, X_{i+1}) \geq_{st} \wedge(X_{i+1} + Y, X_i) = g_{\wedge}^Y(X_{i+1}, X_i), \\ y, g_{\vee}^Y(X_i, X_{i+1}) &= \vee(X_i, X_{i+1} + Y) \geq_{st} \vee(X_{i+1}, X_i + Y) = g_{\vee}^Y(X_{i+1}, X_i). \end{aligned}$$

Estas dos condiciones implican, por la independencia de las componentes y redundancias,

$$\begin{aligned} P(\wedge(X_i + Y, X_{i+1}) > t) &= P(X_i + Y > t)P(X_{i+1} > t) \\ &\geq P(X_{i+1} + Y > t)P(X_i > t) = P(\wedge(X_{i+1} + Y, X_i) > t), \\ y, P(\vee(X_i, X_{i+1} + Y) \leq t) &= P(X_i \leq t)P(X_{i+1} + Y \leq t) \\ &\leq P(X_{i+1} \leq t)P(X_i + Y \leq t) = P(\vee(X_{i+1}, X_i + Y) \leq t), \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

para cada $i = 1, \dots, n-1$ y todo $t \geq 0$, y se tienen las desigualdades:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{X_{[n:n]}'}^{(i)}(t) &= P(X_i + Y > t) \bar{F}_{i+1}(t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n \bar{F}_j(t) \geq P(X_{i+1} + Y > t) \bar{F}_i(t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n \bar{F}_j(t) = \bar{F}_{X_{[n:n]}'}^{(i+1)}(t), \\ \text{y } F_{X_{[1:n]}'}^{(i)}(t) &= P(X_i + Y \leq t) F_{i+1}(t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n F_j(t) \geq P(X_{i+1} + Y \leq t) F_i(t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, i+1}}^n F_j(t) = F_{X_{[1:n]}'}^{(i+1)}(t), \end{aligned}$$

demostrándose así el teorema. □

El resultado anterior indica que si las componentes están ordenadas en el orden cociente de verosimilitudes, entonces los tiempos de vida de los sistemas en serie y paralelo se ordenan en sentido estocástico. Sabemos también, que el orden lr es el más fuerte de los órdenes que hemos visto en este trabajo, por lo que cabe preguntar si bajo otras hipótesis más débiles podemos obtener el mismo resultado. En Boland et al. [10] se estudia este hecho y se aporta una caracterización del orden razón de fallo [razón de fallo inverso] entre dos variables aleatorias no negativas bajo la formación de sistemas en serie [paralelo] con redundancia en espera común y su orden estocástico.

Teorema 2.2.10. Sean X_1, X_2 dos tiempos de vida independientes.

- a) $W'_{\wedge 1} \geq_{st} W'_{\wedge 2}$ para cada tiempo de vida Y independiente de X_1, X_2 si, y solo si, $X_1 \leq_{hr} X_2$.
- b) $W'_{\vee 1} \leq_{st} W'_{\vee 2}$ para cada tiempo de vida Y independiente de X_1, X_2 si, y solo si, $X_1 \leq_{rh} X_2$.

Demostración.- Veamos primero el apartado a). La condición necesaria $W'_{\wedge 1} \geq_{st} W'_{\wedge 2}$ es equivalente a que la diferencia entre sus supervivencias sea positiva. Dicha diferencia viene dada por,

$$\begin{aligned} P(\wedge(X_1 + Y, X_2) > t) - P(\wedge(X_1, X_2 + Y) > t) \\ &= \bar{F}_2(t) \int_0^\infty \bar{F}_1(t-y) dG(y) - \bar{F}_1(t) \int_0^\infty \bar{F}_2(t-y) dG(y) \\ &= \int_0^\infty [\bar{F}_2(t) \bar{F}_1(t-y) - \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t-y)] dG(y) \geq 0. \end{aligned}$$

Tomando la distribución G degenerada en y , obtenemos que $X_1 \leq_{hr} X_2$. Para la condición suficiente, si se cumple que $X_1 \leq_{hr} X_2$, la función $[\bar{F}_2(t) \bar{F}_1(t-y) - \bar{F}_1(t) \bar{F}_2(t-y)]$ es mayor o igual que cero para cada $t \geq 0$ y cada y , lo que implica el orden estocástico de los sistemas.

Para demostrar el apartado b) seguiremos el mismo razonamiento. La condición necesaria $W'_{\vee 1} \leq_{st} W'_{\vee 2}$ es equivalente a que la diferencia de las distribuciones de los sistemas sea positiva. Dicha diferencia viene dada por,

2.2. ORDEN ESTOCÁSTICO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

$$\begin{aligned}
 P(\vee(X_1 + Y, X_2) \leq t) - P(\vee(X_1, X_2 + Y) \leq t) \\
 &= F_2(t) \int_0^\infty F_1(t-y) dG(y) - F_1(t) \int_0^\infty F_2(t-y) dG(y) \\
 &= \int_0^\infty [F_2(t)F_1(t-y) - F_1(t)F_2(t-y)] dG(y) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Como antes, tomando la distribución G degenerada en y , obtenemos el resultado. Para la condición suficiente, si se cumple que $X_1 \leq_{rh} X_2$ la función $[F_2(t)F_1(t-y) - F_1(t)F_2(t-y)]$ es mayor o igual que cero para cada $t \geq 0$ y cada y , completándose la demostración. \square

En el siguiente corolario demostramos que podemos considerar el orden razón de fallo [razón de fallo inverso] en las componentes de los sistemas en serie [paralelo], para que, al hacer redundancia en espera con reposición común, se mantenga el orden estocástico en estos.

Corolario 2.2.11. Sean X_1, X_2, \dots, X_n tiempos de vida independientes.

1. a) Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ entonces $W_1^{(n)} \geq_{st} W_2^{(n)}$ para todo tiempo de vida Y independiente de X_1, X_2, \dots, X_n .
- b) Si $X_1 \leq_{rh} X_2$ entonces $W_1^{(1)} \leq_{st} W_2^{(1)}$ para todo tiempo de vida Y independiente de X_1, X_2, \dots, X_n .
2. Si $0 < F_i(t) < 1$ para cada $t > 0$ e $i = 3, \dots, n$.
 - a) $W_1^{(n)} \geq_{st} W_2^{(n)}$ para todo tiempo de vida Y independiente de X_1, X_2, \dots, X_n , entonces $X_1 \leq_{hr} X_2$.
 - b) $W_1^{(1)} \leq_{st} W_2^{(1)}$ para todo tiempo de vida Y independiente de X_1, X_2, \dots, X_n , entonces $X_1 \leq_{rh} X_2$.

Reposición uno a uno

Cuando queremos hacer redundancia en espera, hemos comprobado que los teoremas generales para sistemas k -out of- n no son nada sencillos y que no se cumplen siempre. Sí que obtenemos resultados para los sistemas en serie y paralelo cuando la redundancia es común. Ahora queremos estudiar qué ocurre cuando hacemos redundancia en espera con reposiciones uno a uno. En Boland y Proschan [12] se demuestra un primer resultado para reposiciones uno a uno e igualmente distribuidas por el cual el sistema en paralelo se ordena estocásticamente si sus componentes lo hacen en orden cociente de verosimilitudes.

Teorema 2.2.12. Sean X_1, X_2, \dots, X_n e Y_1, Y_2, \dots, Y_n tiempos de vida independientes donde $X_i =_{st} Y_i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Si $X_1 \leq_{lr} X_2 \leq_{lr} \dots \leq_{lr} X_n$, entonces los tiempos de vida $X'_{[1:n]} = \vee(X_1, \dots, X_i + Y_i, \dots, X_n)$ son crecientes estocásticamente en i .

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Demostración.- Del Teorema 2.2.9 sabemos que si hacemos redundancia común en espera obtenemos el orden estocástico $X'_{[1:n]}^{(i)} \leq_{st} \vee(X_1, \dots, X_i, X_{i+1} + Y_i, \dots, X_n)$.

Además, $P(X_{i+1} + Y_i \leq t) \geq P(X_{i+1} + Y_{i+1} \leq t)$ en virtud del hecho que $Y_i \leq_{st} Y_{i+1}$ y el Teorema 1.2.3, lo que implica que,

$$X'_{[1:n]}^{(i)} \leq_{st} \vee(X_1, \dots, X_i, X_{i+1} + Y_i, \dots, X_n) \leq_{st} X'_{[1:n]}^{(i+1)},$$

finalizando la demostración. □

Considerando lo anteriormente visto para la redundancia común en espera, era de pensar que para el sistema en serie también pudiéramos obtener un resultado parecido al anterior. Sin embargo no es cierto, en general, cuando realizamos reposición en espera uno a uno e igualmente distribuida. A continuación exponemos un ejemplo, donde se comprueba que para sistemas en paralelo de dos componentes se verifica el Teorema 2.2.12 y para sistemas en serie, aunque las componentes se ordenan en orden lr , sin embargo, no se cumple el orden estocástico para reposiciones uno a uno en espera.

Ejemplo v

- Sean los tiempos de vida $X_1 =_{st} Y_1 \sim \Gamma(m, \theta)$ y $X_2 =_{st} Y_2 \sim \Gamma(m + 1, \theta)$ para un $m \geq 1$ y $\theta \geq 0$. Claramente,

$$\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{\theta^{m+1} t^m e^{-\theta t} \Gamma(m)}{\theta^m t^{m-1} e^{-\theta t} m \Gamma(m)} = \frac{\theta}{m} t.$$

que es creciente en t , por lo que se cumple, $X_1 \leq_{lr} X_2$. También, por las propiedades de la distribución gamma, sabemos que $X_1 + Y_1 \sim \Gamma(2m, \theta)$ y $X_2 + Y_2 \sim \Gamma(2m + 2, \theta)$. (Véase Apéndice A para detalles de los siguientes cálculos).

Sistema en paralelo. Sean los sistemas $U'_{\vee 1}$ y $U'_{\vee 2}$. De (2.2), las funciones de distribución para ambos sistemas vienen dadas por,

$$P(U'_{\vee 1} \leq t) = P(X_1 + Y_1 \leq t)P(X_2 \leq t) \tag{2.10a}$$

y

$$P(U'_{\vee 2} \leq t) = P(X_1 \leq t)P(X_2 + Y_2 \leq t). \tag{2.10b}$$

En la gráfica $\Delta(m, \theta)$ de la diferencia de ambas funciones de distribución, para los valores $m = 3, 5, 7$ y $\theta = 2$ se observa que dicha diferencia siempre es positiva lo que implica que $U'_{\vee 1} \leq_{st} U'_{\vee 2}$ como hemos visto en el Teorema 2.2.12.

2.2. ORDEN ESTOCÁSTICO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

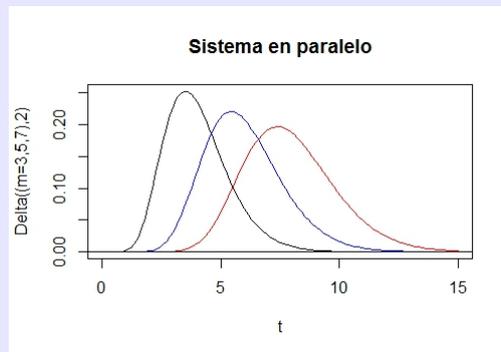


Figura 2.4. Representación de la diferencia entre las funciones de distribución de los sistemas U'_{V1} y U'_{V2} con componentes Gamma.

Sistema en serie. Sean los sistemas $U'_{\wedge 1}$ y $U'_{\wedge 2}$. De (1.5) las funciones de supervivencia para ambos sistemas vienen dadas por,

$$P(U'_{\wedge 1} > t) = P(X_1 + Y_1 > t)P(X_2 > t), \quad (2.11a)$$

y

$$P(U'_{\wedge 2} > t) = P(X_1 > t)P(X_2 + Y_2 > t). \quad (2.11b)$$

El valor de la diferencia para ambas supervivencias con $m = 3$, $\theta = 2$ y los tiempos $t_1 = 1.2$ y $t_2 = 6.2$ viene dada por,

t =	1.2	6.2
$\Delta(3,2)(t)$	≈ 0.1831	$\approx -7.5 \cdot 10^{-7}$

y su gráfica viene dada en la Figura 2.5. Ello indica que estos sistemas no están ordenados estocásticamente en ningún sentido. Se trata de un contraejemplo para demostrar que no en todos los casos para el sistema en serie cuyas componentes están ordenadas en el orden cociente de verosimilitud tienen que ordenarse en sentido estocástico cuando hacemos redundancia en espera uno a uno e igualmente distribuida.

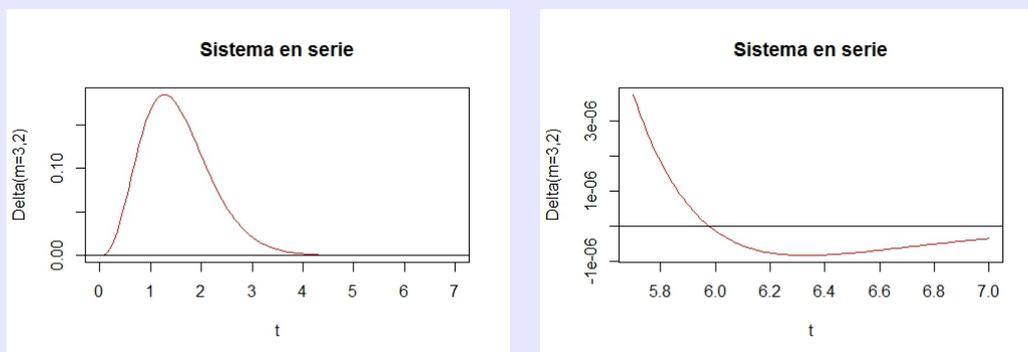


Figura 2.5. Representación de la diferencia entre las funciones de supervivencia de los sistemas $U'_{\wedge 1}$ y $U'_{\wedge 2}$ con componentes Gamma de distinto parámetro de forma y de igual parámetro de escala.

• Sean ahora los tiempos de vida $X_1 \stackrel{st}{=} Y_1 \sim \Gamma(m, \theta_1)$ y $X_2 \stackrel{st}{=} Y_2 \sim \Gamma(m, \theta_2)$ para un $m \geq 1$ y $\theta_1 \geq \theta_2 > 0$, entonces también, $X_1 \leq_{lr} X_2$, puesto que es creciente el cociente de densidades,

$$\frac{f_2(t)}{f_1(t)} = \frac{\theta_2^m t^{m-1} e^{-\theta_2 t}}{\theta_1^m t^{m-1} e^{-\theta_1 t}} = \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^m e^{(\theta_1 - \theta_2)t}.$$

La diferencia de funciones de supervivencia $\Delta(m, \theta_1, \theta_2)$, para los sistemas $U'_{\wedge 1}$ y $U'_{\wedge 2}$ formados con dichas componentes, se queda entonces, para $m = 3, 5, 7$ y para $\theta_1 = 3 > 2 = \theta_2$, como:

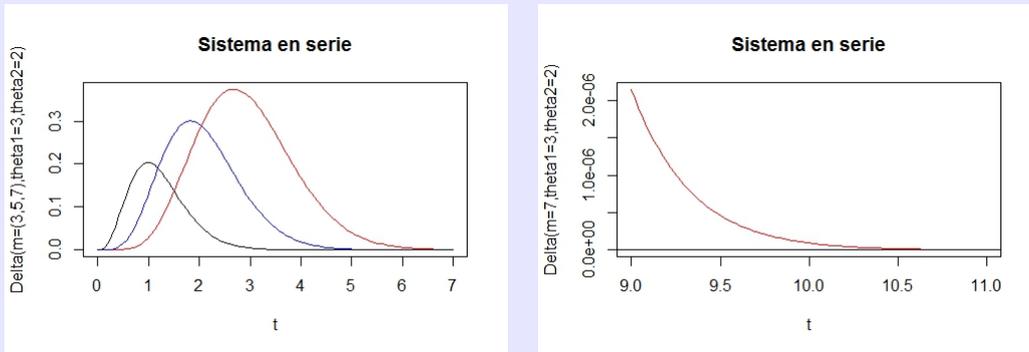


Figura 2.6. Representación de la diferencia entre las funciones de supervivencia de los sistemas $U'_{\wedge 1}$ y $U'_{\wedge 2}$ con componentes Gamma de igual parámetro de forma y distinto parámetro de escala.

y el orden estocástico entre ambos sistemas sí que se cumple, es decir,

$$U'_{\wedge 1} \geq_{st} U'_{\wedge 2}.$$

En general, para los sistemas donde aplicamos una reposición uno a uno e igualmente distribuida, necesitaremos que el orden de las componentes sea lr para poder verificar el orden estocástico de éstos. Además, solamente hemos comprobado que los resultados son válidos para los sistemas en paralelo. Será de interés para líneas de investigación futuras la comprobación de nuevas hipótesis más débiles para comprobar que se sigue manteniendo este orden y ampliarlo a sistemas más generales.

2.3. Orden en preferencia en sistemas con una redundancia

En Singh y Misra [31] se indica que las condiciones de elección de un sistema bajo la ordenación estocástica, implica que escogemos uno de ellos por tener la mejor supervivencia posible. Sin embargo, si queremos comparar el tiempo de vida completo del sistema, puede ser más apropiado el estudio del orden en preferencia. En este caso, elegiremos un sistema en lugar de otro porque la probabilidad de que el primero sea mayor que el segundo es superior

2.3. ORDEN EN PREFERENCIA EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

a la probabilidad de que el segundo sea mayor que el primero. Por otro lado, la condición de orden estocástico, cuando los tiempos de vida no son independientes, no implica el orden en preferencia, como hemos indicado anteriormente en la Sección 1.2.4. Es por ello, que los resultados anteriores para el orden estocástico no son válidos para la demostración del orden en preferencia de los sistemas, ya que sus tiempos de vida no serán independientes.

La sección la dividiremos en redundancia activa, la cuál contiene reposiciones comunes y uno a uno, y redundancia en espera. Con respecto a esta última redundancia, solo daremos resultados para las reposiciones comunes siendo de interés la investigación del caso de reposiciones uno a uno en el futuro. Esta sección la desarrollaremos a través de los trabajos de Singh y Misra [31] y Romera et al. [27] que estudian, a partir de Boland et al. [10], los órdenes en preferencia para los sistemas definidos al principio de este capítulo.

2.3.1. Redundancia activa

Para comenzar la sección daremos una serie de lemas técnicos que utilizaremos para probar los teoremas centrales de ésta. Estos lemas contendrán caracterizaciones equivalentes para las desigualdades en los tiempos de vida de los sistemas considerados.

Lema 2.3.1. Sean X_1, X_2 e Y tiempos de vida independientes. Se cumplen las siguientes equivalencias.

1. $W_1 > W_2$ si, y solo si, $X_1 < \wedge(X_2, Y)$.
2. $W_2 > W_1$ si, y solo si, $X_2 < \wedge(X_1, Y)$.

Demostración.- Demostraremos solamente la primera equivalencia, ya que la segunda se realiza de forma similar.

En este caso se trata de demostrar la igualdad entre los sucesos $\{\omega \in \Omega | W_1(\omega) > W_2(\omega)\} = \{\omega \in \Omega | X_1(\omega) < \wedge(X_2(\omega), Y(\omega))\}$. La anterior igualdad se prueba si demostramos la equivalencia entre las expresiones algebraicas¹,

$$X_1 < \wedge(X_2, Y) \text{ si, y solo si, } \wedge(\vee(X_1, Y), X_2) = \wedge(X_1, \vee(X_2, Y)).$$

Sea $X_1 < \wedge(X_2, Y)$, entonces ocurre que W_1 es igual a X_2 o Y . Por otro lado, W_2 , bajo esta hipótesis, es igual a X_1 obteniendo la desigualdad deseada, $W_1 > W_2$.

Sea ahora $W_1 > W_2$. Entonces, o $\vee(X_1, Y) > \vee(X_2, Y)$ y $X_2 > \vee(X_2, Y)$ lo que no puede ocurrir, o $\vee(X_1, Y) > X_1$ y $X_2 > X_1$. Esta última condición implica, claramente, que $X_1 < \wedge(X_2, Y)$, concluyendo la demostración. \square

Observación 2.1. El anterior procedimiento de demostración de las igualdades entre los sucesos se llevará a cabo en el resto de demostraciones.

¹Mantenemos la notación en mayúscula aunque se traten de valores reales.

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Lema 2.3.2. Sean X_1, X_2, \dots, X_n e Y tiempos de vida independientes. Se cumplen las siguientes equivalencias.

a) Para $n \geq 3$, $W_1^{(n)} > W_2^{(n)}$ si, y solo si, $X_1 < \wedge(Y, X_2, X_3, \dots, X_n)$.

a') Para $n \geq 3$, $W_2^{(n)} > W_1^{(n)}$ si, y solo si, $X_2 < \wedge(Y, X_1, X_3, \dots, X_n)$.

b) Para $n \geq 3$ y $1 < k < n$, $W_1^{(k)} > W_2^{(k)}$ si, y solo si, una de las siguientes $\binom{n-2}{k-2}$ desigualdades excluyentes $\vee(X_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$ ocurre, donde $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$ son disjuntos.

b') Para $n \geq 3$ y $1 < k < n$, $W_2^{(k)} > W_1^{(k)}$ si, y solo si, una de las siguientes $\binom{n-2}{k-2}$ desigualdades $\vee(X_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$ excluyentes ocurre, donde $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$ son disjuntos.

Demostración.- Demostraremos el apartado a). El apartado a') se demuestra con un razonamiento similar. Los apartados b) y b') los demostraremos como consecuencia de un lema posterior.

Veamos la condición suficiente del apartado a). Sea $X_1 < \wedge(Y, X_2, X_3, \dots, X_n)$, resulta la desigualdad,

$$W_1^{(n)} = \wedge(\vee(X_1, Y), X_2, X_3, \dots, X_n) = \wedge(Y, X_2, \dots, X_n) > X_1 = \wedge(X_1, \vee(X_2, Y), X_3, \dots, X_n) = W_2^{(n)},$$

que prueba la condición.

Veamos la condición necesaria. Sea $W_1^{(n)} > W_2^{(n)}$. Entonces pueden ocurrir tres sucesos diferentes.

1. $\vee(X_1, Y) > X_j$ y $X_i > X_j \forall i = 2, \dots, n$ y $j = 3, \dots, n$. Que son condiciones incompatibles puesto que $X_i \not\geq X_j$.
2. $\vee(X_1, Y) > \vee(X_2, Y)$ y $X_i > \vee(X_2, Y) \forall i = 2, \dots, n$. Que son condiciones incompatibles ya que $X_2 \not\geq \vee(X_2, Y)$.
3. $\vee(X_1, Y) > X_1$ y $X_i > X_1 \forall i = 2, \dots, n$, de la cual se deduce que $X_1 < X_i$ con $i = 2, \dots, n$ y $X_1 < Y$, lo que implica, $X_1 < \wedge(Y, X_2, \dots, X_n)$, que completa la demostración.

□

El siguiente lema, considerando reposiciones uno a uno para redundancia activa, es una generalización de los dos anteriores, donde hemos considerado una reposición activa común. Dichos lemas pueden verse en Romera et al. [27].

Lema 2.3.3. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 tiempos de vida independientes. Se cumplen las siguientes equivalencias.

2.3. ORDEN EN PREFERENCIA EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

a) $U_1 = \wedge(\vee(X_1, Y_1), X_2) > U_2 = \wedge(X_1, \vee(X_2, Y_2))$ si, y solo si, $X_1 < \wedge(X_2, Y_1)$.

a') $U_2 > U_1$ si, y solo si, $X_2 < \wedge(X_1, Y_2)$.

b) Para $n \geq 3$, $U_1^{(n)} > U_2^{(n)}$ si, y solo si, $X_1 < \wedge(Y_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$.

b') Para $n \geq 3$, $U_2^{(n)} > U_1^{(n)}$ si, y solo si, $X_2 < \wedge(Y_2, X_1, X_3, \dots, X_n)$.

c) Para $n \geq 3$ y $1 < k < n$, $U_1^{(k)} > U_2^{(k)}$ si, y solo si, una de las siguientes $\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$ desigualdades excluyentes ocurren:

$$1) \vee(X_1, X_2, Y_2, X_{r_1}, \dots, X_{r_{n-k-1}}) < \wedge(Y_1, X_{v_1}, \dots, X_{v_{k-1}}) \text{ o,}$$

$$2) \vee(X_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y_1, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}}),$$

donde $\{r_1, \dots, r_{n-k-1}\}, \{v_1, \dots, v_{k-1}\}, \{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$ y son disjuntos $\{r_1, \dots, r_{n-k-1}\} \cap \{v_1, \dots, v_{k-1}\} = \emptyset$ y $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} \cap \{i_1, \dots, i_{k-2}\} = \emptyset$.

c') Para $n \geq 3$ y $1 < k < n$, $U_2^{(k)} > U_1^{(k)}$ si, y solo si, una de las siguientes $\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2}$ desigualdades excluyentes ocurren:

$$1) \vee(X_1, X_2, Y_1, X_{r_1}, \dots, X_{r_{n-k-1}}) < \wedge(Y_2, X_{v_1}, \dots, X_{v_{k-1}}),$$

$$2) \vee(X_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y_2, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}}),$$

donde $\{r_1, \dots, r_{n-k-1}\}, \{v_1, \dots, v_{k-1}\}, \{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$ y son disjuntos $\{r_1, \dots, r_{n-k-1}\} \cap \{v_1, \dots, v_{k-1}\} = \emptyset$ y $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} \cap \{i_1, \dots, i_{k-2}\} = \emptyset$.

Demostración.- Los cuatro primeros apartados se siguen con razonamientos similares a los realizados en los Lemas 2.3.1 y 2.3.2 apartados a) y a'). Demostraremos solo el apartado c) ya que la demostración del apartado c') es análoga.

Como se vio en la Sección 1.3.1, para modelizar un sistema se toman funciones binarias $x_i(t) = 1$ si la componente i funciona en el instante de tiempo t y cero en otro caso. La desigualdad $U_1^{(k)} > U_2^{(k)}$ es equivalente a comprobar que se verifica el siguiente sistema de desigualdades²:

$$\begin{cases} \vee(x_1, y_1) + x_2 + x_3 + \dots + x_n & \geq k \\ x_1 + \vee(x_2, y_2) + x_3 + \dots + x_n & \leq k - 1. \end{cases} \quad (2.12)$$

Ello es debido a que si $U_1^{(k)} > U_2^{(k)}$ ha de existir un tiempo t tal que al menos k de las componentes del sistema primero funcionen (sumen igual o más que k) y que funcionen menos de k componentes en el segundo de ellos (sumen menos que k). De este modo, hemos convertido la desigualdad en la resolución de un sistema de desigualdades con incógnitas binarias.

Si $x_1 = 1$ entonces $\vee(x_1, y_1) = 1$ y las inecuaciones anteriores quedan,

²Denotamos indistintamente $x_i(t) = x_i$ e $y_j(t) = y_j$, ya que fijamos un momento de tiempo t .

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_n & \geq k - 1 \\ \vee(x_2, y_2) + x_3 + \cdots + x_n & \leq k - 2, \end{cases}$$

estas desigualdades no se pueden dar simultáneamente pues $x_2 - \vee(x_2, y_2) \geq 1$ tendría que ocurrir; de esta contradicción deducimos que $x_1 = 0$ y $\vee(x_1, y_1) = y_1$. Por lo que la diferencia de las inecuaciones en el sistema (2.12), quedaría la desigualdad $y_1 + x_2 \geq 1 + \vee(x_2, y_2)$.

Por otro lado, como $x_2 \leq \vee(x_2, y_2)$ se puede deducir que $y_1 + \vee(x_2, y_2) \geq y_1 + x_2 \geq 1 + \vee(x_2, y_2)$ lo que implicaría que se cumplan las igualdades $y_1 = 1$ y $x_2 = \vee(x_2, y_2)$. Con todo ello, podemos deducir que la condición $U_1^{(k)} > U_2^{(k)}$ es equivalente a la resolución del sistema,

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + \cdots + x_n & = k - 1 \\ x_2 = \vee(x_2, y_2). \end{cases}$$

Por hipótesis $1 < k < n$ y distinguiremos dos casos:

1. Para el caso $x_2 = 0$, (lo que implica $y_2 = 0$), existen $\binom{n-2}{k-1}$ soluciones para el sistema anterior. Estas soluciones vendrán dadas por $x_{r_1} = \cdots = x_{r_{n-k-1}} = 0$ y $x_{v_1} = \cdots = x_{v_{k-1}} = 1$ donde los subconjuntos de $\{3, \dots, n\}$, $\{r_1, \dots, r_{n-k-1}\}$ y $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ son disjuntos. Además, por lo que se verifica el apartado c.1),

$$\vee(x_1, x_2, y_2, x_{r_1}, \dots, x_{r_{n-k-1}}) = 0 < 1 = \wedge(y_1, x_{v_1}, \dots, x_{v_{k-1}}).$$

2. Para el caso $x_2 = 1$ (e y_2 arbitrario), existen $\binom{n-2}{k-2}$ soluciones para el sistema anterior. Éstas vendrán dadas por $x_{i_1} = \cdots = x_{i_{k-2}} = 1$ y $x_{j_1} = \cdots = x_{j_{n-k}} = 0$ donde los subconjuntos de $\{3, \dots, n\}$, $\{i_1, \dots, i_{k-2}\}$ y $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ son disjuntos. Además, por lo que se verifica el apartado c.2),

$$\vee(x_1, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = 0 < 1 = \wedge(x_2, y_1, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-2}}).$$

Por lo tanto, las condiciones dictadas en el enunciado son ciertas, para los subconjuntos descritos, concluyendo la demostración. \square

Observación 2.2. El Lema 2.3.2 apartado b), resulta de los apartados c) y c') del lema anterior tomando en la demostración $y_1 = y_2 = y$. En este caso, no pueden ocurrir las primeras $\binom{n-2}{k-1}$ posibles soluciones puesto que, necesariamente, ha de ocurrir $y_1 = y_2 = y = 1$.

Lema 2.3.4. Sean X_1, X_2, Y_1, Y_2 y Z tiempos de vida independientes, con función de supervivencia y distribución de Z , $\bar{H}(t)$ y $H(t)$, respectivamente. Supongamos que se verifica:

- i) $r_1(t)\bar{G}_1(t) \geq r_2(t)\bar{G}_2(t) \forall t \geq 0$, o
- ii) $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t) \forall t \geq 0$,

entonces,

2.3. ORDEN EN PREFERENCIA EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

$$a) P(X_1 < \wedge(Y_1, X_2)) \geq P(X_2 < \wedge(X_1, Y_2)).$$

$$b) P(X_1 < \wedge(Y_1, X_2, Z)) \geq P(X_2 < \wedge(X_1, Y_2, Z)).$$

Demostración.- En primer lugar, sean X_1 y X_2 continuas cumpliendo $r_1(t)\bar{G}_1(t) \geq r_2(t)\bar{G}_2(t)$ para cada $t \geq 0$ y demostremos que se verifican las condiciones a) y b).

Para la condición a), veamos que la diferencia $\Delta = P(X_1 < \wedge(Y_1, X_2)) - P(X_2 < \wedge(X_1, Y_2))$ es mayor o igual que cero. Considerando convoluciones y la independencia de los tiempos de vida, se verifica la igualdad,

$$P(\wedge(Y_1, X_2) > X) = \int_0^{+\infty} P(\wedge(Y_1, X_2) > x | X = x) dF_1(x) = \int_0^{+\infty} P(Y_1 > x) P(X_2 > x) dF_1(x).$$

La diferencia Δ viene dada por,

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{+\infty} \bar{F}_2(x)\bar{G}_1(x)f_1(x)dx - \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)f_2(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} [\bar{F}_2(x)\bar{G}_1(x)f_1(x) - \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)f_2(x)] dx. \end{aligned}$$

Por hipótesis, sabemos que es cierta la desigualdad,

$$\frac{f_1(x)}{\bar{F}_1(x)}\bar{G}_1(x) \geq \frac{f_2(x)}{\bar{F}_2(x)}\bar{G}_2(x),$$

lo que es equivalente a que el integrando anterior sea mayor o igual que cero para cada x , demostrando así que $\Delta \geq 0$.

Consideramos ahora la diferencia del apartado b), $\Delta = P(X_1 < \wedge(Y_1, X_2, Z)) - P(X_2 < \wedge(X_1, Y_2, Z))$ que, considerando convoluciones y la independencia de los tiempos de vida, viene dada por,

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^{+\infty} \bar{F}_2(x)\bar{G}_1(x)\bar{H}(x)f_1(x)dx - \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}(x)f_2(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} [\bar{F}_2(x)\bar{G}_1(x)f_1(x) - \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)f_2(x)] \bar{H}(x)dx. \end{aligned}$$

Por el razonamiento anterior y por ser $\bar{H}(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$, se cumple $\Delta \geq 0$.

Veamos que bajo la condición ii), es decir, $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t) \forall t \geq 0$ se cumplen también los apartados a) y b). Para probar el apartado a) se tiene que,

$$\begin{aligned} P(X_1 < \wedge(Y_1, X_2)) - P(X_2 < \wedge(X_1, Y_2)) &= \int_0^{+\infty} \bar{F}_2(x)\bar{G}_1(x)dF_1(x) - \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)dF_2(x) \\ &\geq \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)dF_1(x) - \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)dF_2(x), \end{aligned}$$

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

donde la desigualdad es debida a $\bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t)$. Al ser la función $\bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)$ no creciente para cada $x \geq 0$ y $X_1 \leq_{st} X_2$, por la aplicación del Teorema 1.2.2, la última diferencia es positiva.

Para demostrar el apartado b) se tiene que,

$$\begin{aligned} P(X_1 < \wedge(Y_1, X_2, Z)) - P(X_2 < \wedge(X_1, Y_2, Z)) \\ \geq \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}(x)dF_1(x) - \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}(x)dF_2(x), \end{aligned}$$

donde la desigualdad es debida a que $\bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t)$ y $\bar{H}(t) \geq 0$.

Por ser la función $\bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}(x)$ no creciente en su dominio y aplicando el Teorema 1.2.2 esta última diferencia es mayor o igual que cero, concluyéndose la demostración. \square

Lema 2.3.5. Sean $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ tiempos de vida independientes y Z_3, Z_4 tiempos de vida independientes entre sí y a su vez de Y_1, Y_2 . Sean $H_i(x)$ [$\bar{H}_i(x)$] las funciones de distribución [supervivencia] de Z_i para $i = 1, \dots, 4$. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_1 \geq_{st} Y_2$, entonces,

a) $P(\vee(X_1, Z_1) < \wedge(X_2, Y_1, Z_2)) \geq P(\vee(X_2, Z_1) < \wedge(X_1, Y_2, Z_2))$.

b) $P(\vee(Y_2, Z_3) < \wedge(Y_1, Z_4)) \geq P(\vee(Y_1, Z_3) < \wedge(Y_2, Z_4))$.

Demostración.- Veamos en primer lugar que se cumple el apartado a). Por la independencia de los tiempos de vida y por la hipótesis $\bar{F}_2(x)\bar{G}_1(x) \geq \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)$, las probabilidades de este apartado vienen dadas por,

$$\begin{aligned} P(\vee(X_1, Z_1) < \wedge(X_2, Y_1, Z_2)) &= P(X_1 < \wedge(X_2, Y_1, Z_2))P(Z_1 < \wedge(X_2, Y_1, Z_2)) \\ &\geq \left(\int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)dF_1(x) \right) \left(\int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)dH_1(x) \right), \end{aligned} \quad (2.13a)$$

y

$$\begin{aligned} P(\vee(X_2, Z_1) < \wedge(X_1, Y_2, Z_2)) &= P(X_2 < \wedge(X_1, Y_2, Z_2))P(Z_1 < \wedge(X_1, Y_2, Z_2)) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)dF_2(x) \right) \left(\int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)dH_1(x) \right). \end{aligned} \quad (2.13b)$$

Restando las expresiones (2.13a) y (2.13b) y denotando por Δ dicha diferencia, se tiene que,

$$\Delta \geq \left[\int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)dF_1(x) - \int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)dF_2(x) \right] \left[\int_0^{+\infty} \bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)dH_1(x) \right].$$

2.3. ORDEN EN PREFERENCIA EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

La diferencia del primer factor es positiva por el orden de los tiempos de vida, por ser la función $\bar{F}_1(x)\bar{G}_2(x)\bar{H}_2(x)$ no creciente y el Teorema 1.2.2. El segundo factor también es positivo por ser una integral de una función positiva con respecto de la distribución H_1 .

Para probar el apartado b), debido a la independencia de las variables y a que $\bar{G}_2(t) \leq \bar{G}_1(t)$, tenemos que las probabilidades de dicho apartado cumplen que,

$$\begin{aligned} P(\vee(Y_2, Z_3) < \wedge(Y_1, Z_4)) &= P(Y_2 < \wedge(Y_1, Z_4))P(Z_3 < \wedge(Y_1, Z_4)) \\ &\geq \left(\int_0^{+\infty} \bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)dG_2(x) \right) \left(\int_0^{+\infty} \bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)dH_3(x) \right), \end{aligned} \quad (2.14a)$$

y

$$\begin{aligned} P(\vee(Y_1, Z_3) < \wedge(Y_2, Z_4)) &= P(Y_1 < \wedge(Y_2, Z_4))P(Z_3 < \wedge(Y_2, Z_4)) \\ &= \left(\int_0^{+\infty} \bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)dG_1(x) \right) \left(\int_0^{+\infty} \bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)dH_3(x) \right). \end{aligned} \quad (2.14b)$$

Restando (2.14a) y (2.14b) y denotando por Δ dicha diferencia, se verifica la desigualdad,

$$\Delta \geq \left[\int_0^{+\infty} \bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)dG_2(x) - \int_0^{+\infty} \bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)dG_1(x) \right] \left[\int_0^{+\infty} \bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)dH_3(x) \right].$$

La diferencia del primer factor es positiva por el orden de los tiempos de vida de las redundancias, por ser la función $\bar{G}_2(x)\bar{H}_4(x)$ no creciente y el Teorema 1.2.2. El segundo factor también es positivo por ser una integral de una función positiva con respecto de la distribución H_3 , concluyéndose la demostración. \square

Reposición común

Una vez demostrados los lemas necesarios comenzamos con el estudio del orden en preferencia para los sistemas con redundancia activa y reposición común. Como se comprueba en el Teorema 2.2.3 y en el anterior Corolario 2.2.2, es condición suficiente que las componentes estén ordenadas estocásticamente para que los sistemas W_1 y W_2 estén ordenados en este mismo orden. En el siguiente teorema, Singh y Misra [31] obtienen la misma implicación para el orden en preferencia de los dos sistemas.

Teorema 2.3.6. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2 e Y independientes. Si se verifica que $X_1 \leq_{st} X_2$ entonces $W_1 \geq_{pr} W_2$.*

Demostración.- Para mostrar que $W_1 \geq_{pr} W_2$ comprobaremos que $P(W_1 > W_2) \geq P(W_2 > W_1)$. Por el Lema 2.3.1 podemos reescribir esta desigualdad como $P(X_1 < \wedge(X_2, Y)) \geq P(X_2 < \wedge(X_1, Y))$ y ahora usando el Lema 2.3.4, se cumplen las hipótesis del apartado segundo, siendo

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

$Y =_{st} Y_1 =_{st} Y_2$, y por tanto queda demostrado el teorema. □

La equivalencia dada en el Teorema 2.2.3 para el orden estocástico de los sistemas, no es cierta, en general, para el caso de la ordenación en preferencia de éstos. Puede verse en un contraejemplo dado en Singh y Misra [31] o en el siguiente ejemplo para componentes continuas que hemos desarrollado para esta memoria.

Ejemplo VI

Sean los tiempos de vida $X_1 =_{st} Y \sim \text{exp}(\lambda)$ y $X_2 \sim \text{Weibull}(\lambda, \alpha)$. Vamos a comprobar que los sistemas W_1 y W_2 se ordenan en preferencia para diferentes valores de los parámetros, mientras que las componentes no lo hacen en sentido estocástico, puesto que ambas tienen distribuciones Weibull.

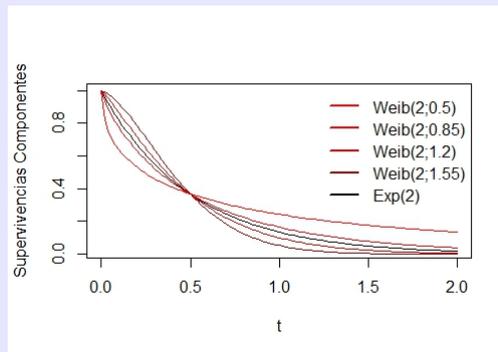


Figura 2.7. Representación de funciones de supervivencia para distintos valores de los parámetros en distribuciones Weibull y exponencial.

Veamos si se ordenan los sistemas W_1 y W_2 . Calculemos primero los valores de las probabilidades $P(W_1 > W_2)$ y $P(W_2 > W_1)$, que por el Lema 2.3.1 podemos reescribir como $P(\wedge(X_2, Y) > X_1)$ y $P(\wedge(X_1, Y) > X_2)$. Usando convoluciones, estas expresiones vienen dadas por,

$$P(W_1 > W_2) = \int_0^{+\infty} P(X_2 > x, Y > x | X_1 = x) dF_1(x) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(2\lambda t + \lambda^\alpha t^\alpha)} dt, \quad y,$$

$$P(W_2 > W_1) = \int_0^{+\infty} P(X_1 > x, Y > x | X_2 = x) dF_2(x) = \int_0^{+\infty} \lambda^\alpha \alpha t^{\alpha-1} e^{-(2\lambda t + \lambda^\alpha t^\alpha)} dt.$$

Sean los valores de $\lambda = 2$ y $\alpha = 0.5, 0.85, 1.2$ y 1.55 . Los valores de la diferencia $P(W_1 > W_2) - P(W_2 > W_1)$ para los distintos parámetros de forma vienen dados en la siguiente figura.

2.3. ORDEN EN PREFERENCIA EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

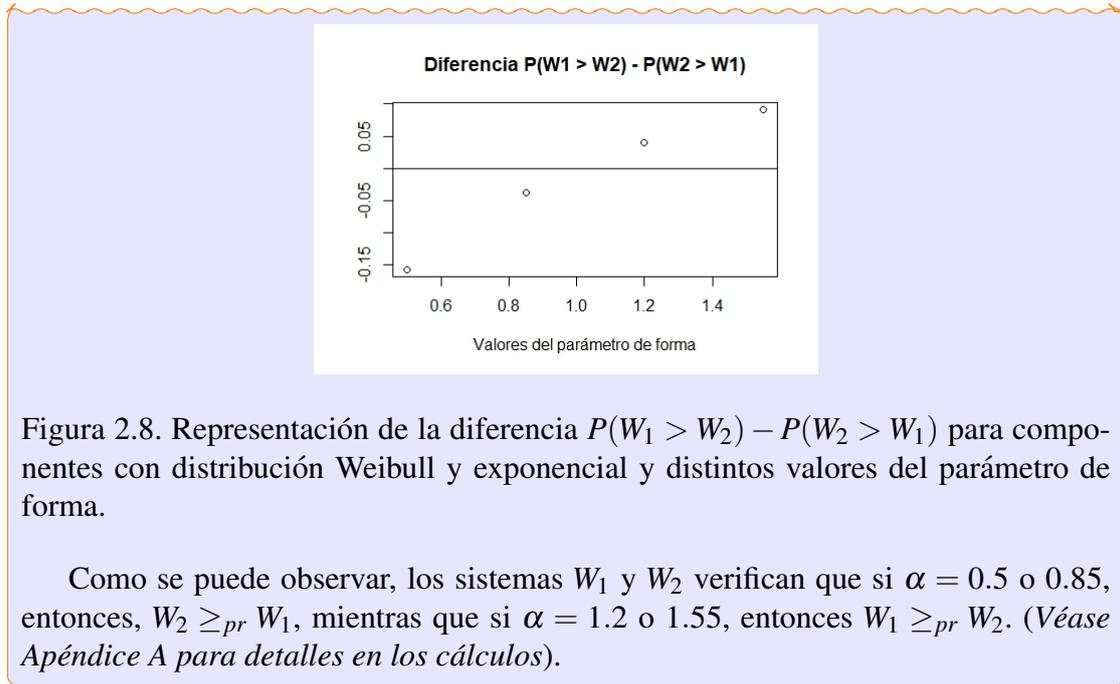


Figura 2.8. Representación de la diferencia $P(W_1 > W_2) - P(W_2 > W_1)$ para componentes con distribución Weibull y exponencial y distintos valores del parámetro de forma.

Como se puede observar, los sistemas W_1 y W_2 verifican que si $\alpha = 0.5$ o 0.85 , entonces, $W_2 \geq_{pr} W_1$, mientras que si $\alpha = 1.2$ o 1.55 , entonces $W_1 \geq_{pr} W_2$. (Véase Apéndice A para detalles en los cálculos).

En el caso de sistemas k -out of- n donde las redundancias se hacen en dos componentes consecutivas que se ordenan estocásticamente, Singh y Misra [31] demuestran el siguiente teorema que asegura el orden en preferencia para dichos sistemas.

Teorema 2.3.7. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, \dots, X_n, Y independientes. Si las componentes $X_1 \leq_{st} X_2$, entonces, $W_1^{(k)} \geq_{pr} W_2^{(k)}$ para $k = 1, \dots, n$ y $n \geq 3$.

Demostración.- Si $k = 1$, los tiempos de vida son iguales, $W_1^{(1)} = W_2^{(1)}$ cumpliéndose el teorema trivialmente.

Sea $k = n$. Por el Lema 2.3.2 apartados a) y a'), la condición $W_1^{(n)} \geq_{pr} W_2^{(n)}$ se cumple si, y solo si, $P(X_1 < \wedge(Y, X_2, X_3, \dots, X_n)) \geq P(X_2 < \wedge(Y, X_1, X_3, \dots, X_n))$. Si denotamos por $Z = \wedge(X_3, \dots, X_n)$ y por $Y =_{st} Y_1 =_{st} Y_2$; se cumple que Z es independiente de X_1 y X_2 y se cumplen las hipótesis del segundo apartado del Lema 2.3.4 por lo que vale el teorema.

Sea, por último, $1 < k < n$. Por el Lema 2.3.2 apartados b) y b'), la condición del enunciado se cumple, si, y solo si, ocurren las $\binom{n-2}{k-2}$ desigualdades excluyentes

$$P(\vee(X_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})) \geq P(\vee(X_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})),$$

para los conjuntos disjuntos $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$. Denotando por $Z_1 = \vee(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}})$, $Z_2 = \wedge(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$ e $Y =_{st} Y_1 =_{st} Y_2$, se cumplen las hipótesis del Lema 2.3.5 concluyendo la demostración. \square

Reposición uno a uno

Romera et al. [27] estudian las condiciones necesarias para mantener el orden en preferencia cuando se realiza una redundancia activa con reposición uno a uno no igualmente distribuida.

Teorema 2.3.8. *Sean los tiempos de vida $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 independientes con $n \geq 3$. Supongamos que se verifica:*

- i) $r_1(t)\bar{G}_1(t) \geq r_2(t)\bar{G}_2(t) \forall t \geq 0$, o
- ii) $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t) \forall t \geq 0$,

entonces,

- a) $U_1 \geq_{pr} U_2$.
- b) $U_1^{(n)} \geq_{pr} U_2^{(n)}$.

Demostración.- La demostración se sigue directamente de los Lemas 2.3.3 apartados a), a'), b) y b') y 2.3.4, tomando para el segundo apartado de éste $Z = \wedge(X_3, \dots, X_n)$. \square

Este resultado tiene como consecuencia que el orden en preferencia se conserva para los sistema en serie de dos componentes (o n componentes) con redundancia activa de reposición uno a uno no igualmente distribuida si $X_1 \leq_{hr} X_2$ e $Y_1 \geq_{st} Y_2$ (lo que implica la primera condición) o $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_1 \geq_{st} Y_2$ (lo que implica la segunda). De esta segunda condición parte la siguiente proposición que trata el orden en preferencia para los sistemas k -out of- n , en general.

Teorema 2.3.9. *Sean los tiempos de vida $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 independientes con $n \geq 3$ y $1 < k < n$. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$ entonces $U_1^{(k)} \geq_{pr} U_2^{(k)}$.*

Demostración.- La demostración se sigue directamente de los Lemas 2.3.3 apartados c) y c') y 2.3.5 tomando en este último $Z_1 = \vee(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}})$ y $Z_2 = \wedge(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$ independientes de X_1, X_2, Y_1 e Y_2 ; y $Z_3 = \vee(X_1, X_2, X_{r_1}, \dots, X_{r_{n-k-1}})$ y $Z_4 = \wedge(X_{v_1}, \dots, X_{v_{k-1}})$ independientes de Y_1 e Y_2 . \square

2.3.2. Redundancia en espera

Como hemos visto en el Teorema 2.2.10 y, posterior, Corolario 2.2.11, para el orden estocástico era necesario, y suficiente, el orden razón de fallo [razón de fallo inverso] en las dos componentes para que se ordene estocásticamente el sistema en serie [paralelo] de n componentes. La intención es ver si existen condiciones iguales, o más débiles, que aseguren el orden en preferencia en los sistemas. Como realizamos para el anterior apartado, enunciaremos un lema que será de ayuda para las demostraciones posteriores.

Lema 2.3.10. *Sean X_1, X_2, \dots, X_n, Y tiempos de vida independientes. Se cumplen las siguientes equivalencias:*

2.3. ORDEN EN PREFERENCIA EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

a) $W_1^{(n)} > W_2^{(n)}$ si, y solo si, $X_1 < \wedge(X_2, \dots, X_n)$ e $Y > 0$.

a') $W_2^{(n)} > W_1^{(n)}$ si, y solo si, $X_2 < \wedge(X_1, X_3, \dots, X_n)$ e $Y > 0$.

b) $W_1^{(1)} > W_2^{(1)}$ si, y solo si, $X_1 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)$ y $X_2 < X_1$.

b') $W_2^{(1)} > W_1^{(1)}$ si, y solo si, $X_2 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)$ y $X_1 < X_2$.

Demostración.- Demostraremos los apartados a) y b). El resto se pueden demostrar con razonamientos análogos. Comenzaremos con la condición suficiente del apartado a), sea $X_1 < \wedge(X_2, \dots, X_n)$ e $Y > 0$ entonces $\wedge(X_1, X_2 + Y, \dots, X_n) = X_1 < \wedge(X_1 + Y, X_2, \dots, X_n)$. Veamos la condición necesaria considerando el mismo razonamiento utilizado en la demostración del Lema 2.3.3. Esta condición es equivalente a la resolución de un sistema de inecuaciones. Denotemos por Z_1 el tiempo de vida de la variable $X_1 + Y$ y por Z_2 el de $X_2 + Y$.

$$\begin{cases} z_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = n \\ x_1 + z_2 + x_3 + \dots + x_n \leq n - 1. \end{cases}$$

De la primera de las ecuaciones se obtiene que todos $x_2 = \dots = x_n = z_1 = 1$. Por lo tanto, la desigualdad segunda queda $x_1 + z_2 \leq 1$, lo que implica que $x_1 + z_2 = 1$ ya que sabemos que $x_2 = 1$ y por tanto z_2 también. En resumen, tenemos las desigualdades, $0 = x_1 < x_2, x_3, \dots, x_n = 1$ y $x_1 < z_1 = x_1 + y$ las cuales implican el resultado requerido, $X_1 < \wedge(X_2, \dots, X_n)$ e $Y > 0$.

Para la condición suficiente del apartado b), sea $X_1 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)$ y $X_2 < X_1$ entonces $\vee(X_1 + Y, X_2, \dots, X_n) = X_1 + Y > \vee(X_1, X_2 + Y, \dots, X_n)$ como queríamos probar.

Para la condición necesaria, la desigualdad $\vee(X_1 + Y, X_2, \dots, X_n) > \vee(X_1, X_2 + Y, \dots, X_n)$ es equivalente a que tenga solución el sistema,

$$\begin{cases} z_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n \geq 1 \\ x_1 + z_2 + x_3 + \dots + x_n = 0. \end{cases}$$

De la segunda ecuación podemos deducir que $x_1 = z_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$ y además $z_1 + x_2 \geq 1$. Pero, si $x_2 = 1$, llegaríamos a la contradicción $z_2 > x_2 = 1$. Por tanto, las soluciones del sistema han de cumplir, $x_1 + y = z_1 = 1 > 0 = x_1 = x_2 = z_2 = x_3 = \dots = x_n$, de donde se deduce que $X_1 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)$ y $X_1 > X_2$; que completa la demostración. \square

En este caso, Singh y Misra [31] prueban que es posible obtener un resultado general para el sistema en serie y paralelo de n componentes. Este resultado muestra que si se ordenan estocásticamente las variables donde se hará la redundancia en espera con reposición común, entonces estos sistemas se ordenan en preferencia como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.11. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, \dots, X_n, Y independientes. Si $X_1 \leq_{st} X_2$, entonces $W_1^{(n)} \geq_{pr} W_2^{(n)}$ y, $W_1^{(1)} \leq_{pr} W_2^{(1)}$.

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Demostración.- Por el Lema 2.3.10, las condiciones anteriores son equivalentes a probar que,

$$P(X_1 < \wedge(X_2, \dots, X_n)) \geq P(X_2 < \wedge(X_1, X_3, \dots, X_n)), \text{ y}$$

$$P(\{X_1 < X_2\} \cap \{X_2 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)\}) \geq P(\{X_2 < X_1\} \cap \{X_1 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)\}).$$

Como $X_1 \leq_{st} X_2$ y denotando por $\wedge(X_3, \dots, X_n) = Y_1 = Y_2$ independiente de las anteriores, la desigualdad primera se cumple por el Lema 2.3.4 apartado ii).

Por otro lado, las condiciones de $X_i + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)$ para $i = 1, 2$, se pueden reescribir como $X_i > \vee(X_3 - Y, \dots, X_n - Y)$. Sea H la función de distribución conjunta de la variable aleatoria $\vee(X_3 - Y, \dots, X_n - Y)$ e $I_A(x)$ la función indicador para el conjunto A .

La diferencia $\Delta = P(\{X_1 < X_2\} \cap \{X_2 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)\}) - P(\{X_2 < X_1\} \cap \{X_1 + Y > \vee(X_3, \dots, X_n)\})$, la podemos reescribir,

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_1 < X_2, X_2 > y) dH(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} P(X_2 < X_1, X_1 > y) dH(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} F_1(x) I_{(y, +\infty)}(x) dF_2(x) \right] - \left[\int_0^{+\infty} F_2(x) I_{(y, +\infty)}(x) dF_1(x) \right] dH(y). \end{aligned}$$

Por la desigualdad estocástica de $X_1 \leq_{st} X_2$, esta diferencia es mayor o igual que,

$$\Delta \geq \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} F_2(x) I_{(y, +\infty)}(x) dF_2(x) \right] - \left[\int_0^{+\infty} F_2(x) I_{(y, +\infty)}(x) dF_1(x) \right] dH(y),$$

siendo esta última mayor o igual que cero en virtud del Teorema 1.2.2 y quedando así demostrado el teorema. \square

2.4. Orden razón de fallo en sistemas con una redundancia

2.4.1. Redundancia activa

Hasta ahora, los resultados que hemos visto parten de los sistemas más generales, k -out of- n a sistemas en serie y paralelos con n o dos componentes. Cada vez que avanzamos en ordenes más estrictos, las condiciones son más restrictivas y más en el caso de las redundancias en espera. Para el orden en razón de fallo estudiaremos únicamente los sistemas W_1, W_2, U_1 y U_2 para redundancia activa. Los dos primeros, como sabemos, son un caso particular de los segundos tomando la redundancia común en lugar de uno a uno, por lo que obtendremos resultados para estos últimos y en especial, se cumplirán para los primeros. Nótese que las condiciones obtenidas para estos sistemas implican el orden hr de los sistemas $W_1^{(n)}, W_2^{(n)}, U_1^{(n)}$

2.4. ORDEN RAZÓN DE FALLO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

y $U_2^{(n)}$, debido a que los cocientes cumplen, por la independencia de los tiempos de vida, las igualdades:

$$\frac{\bar{F}_{W_2}(t)}{\bar{F}_{W_1}(t)} = \frac{\bar{F}_{W_2^{(n)}}(t)}{\bar{F}_{W_1^{(n)}}(t)} \quad \text{y} \quad \frac{\bar{F}_{U_2}(t)}{\bar{F}_{U_1}(t)} = \frac{\bar{F}_{U_2^{(n)}}(t)}{\bar{F}_{U_1^{(n)}}(t)}.$$

También incluimos algunos resultados sobre ordenación en razón de fallo de sistemas con redundancia en espera sobre los sistemas $W'_{\wedge 1}, W'_{\wedge 2}, W_1^{(n)}, W_2^{(n)}, U_1^{(n)}$ y $U_2^{(n)}$.

Singh y Misra [31] estudian el orden en razón de fallo para los sistemas W_1 y W_2 pero con componentes que siguen distribuciones exponenciales de medias $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$ y $1/\lambda$ (para la componente de redundancia común). Un modelo más general, se estudia en Valdés y Zequeira [33] para los sistemas U_1 y U_2 con distribuciones cualesquiera de las componentes y redundancias. Por ello comenzaremos viendo los resultados más específicos para estudiar después los más generales. Supondremos, además, que las variables aleatorias son absolutamente continuas.

Podríamos esperar, equivocadamente, que para el orden razón de fallo de las componentes $X_1 \leq_{hr} X_2$ sea preferible hacer la redundancia activa común en la primera de éstas para que se ordenen los sistemas en el sentido razón de fallo. El siguiente ejemplo de Singh y Misra [31] proporciona un contraejemplo para este caso.

Ejemplo VII

Sean las componentes con distribuciones exponenciales $X_1 \sim \exp(\lambda_1 = 1/10)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2 = 3/10)$ e $Y \sim \exp(\lambda = 1/2)$.

La gráfica para las razones de fallo $r_{W_1}(t)$ y $r_{W_2}(t)$ está presentada a continuación, donde el color rojo es para la segunda.

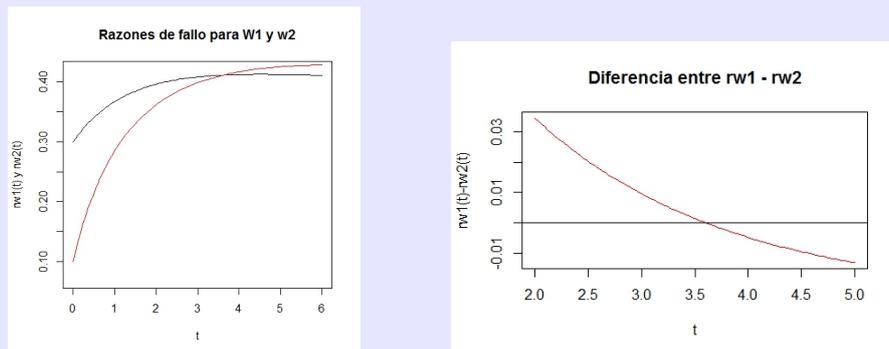


Figura 2.9. Representación de las funciones de razón de fallo de sistemas en serie con dos componentes exponenciales (de parámetros $\lambda_1 = 1/10$ y $\lambda_2 = 3/10$) y redundancia activa común exponencial (de parámetro $\lambda = 1/2$).

Como podemos ver, las funciones se cortan en un tiempo $t \approx 3.65$ lo que implica que no se ordenan en orden razón de fallo los tiempos de vida de los sistemas W_1 y W_2 .

Sin embargo, para los valores de los parámetros, $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = 3/10$ y $\lambda = 1/10$ las funciones anteriores son,

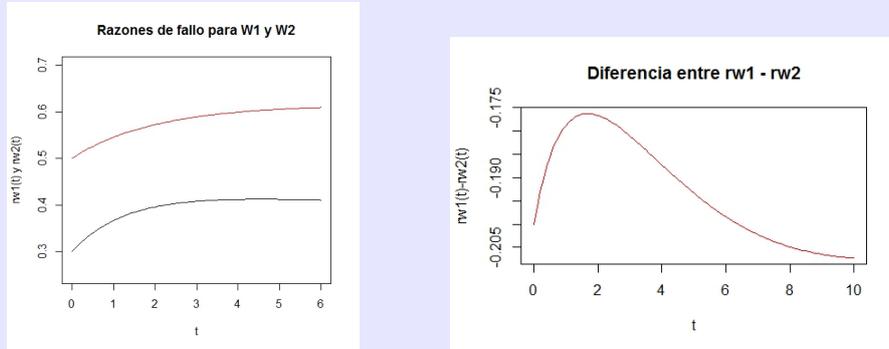


Figura 2.10. Representación de las funciones de razón de fallo de sistemas en serie con dos componentes exponenciales (de parámetros $\lambda_1 = 1/2$ y $\lambda_2 = 3/10$) y redundancia activa común exponencial (de parámetro $\lambda = 1/10$).

En este segundo caso, la razón de fallo del sistema W_1 es menor, para todo tiempo t , que la razón de fallo de W_2 por lo que se obtiene el resultado $W_1 \geq_{hr} W_2$. (Véase Apéndice A para detalles en los cálculos).

Como vemos en el ejemplo, si tenemos componentes exponenciales con medias $1/\lambda_1$, $1/\lambda_2$ y $1/\lambda$, en el primer caso, siendo $X_1 \geq_{hr} X_2 \geq_{hr} Y$, el orden de los sistemas W_1 y W_2 no se consigue. Pero por otro lado, si tenemos que $X_1 \leq_{hr} X_2 \leq_{hr} Y$ sí que se consigue que $W_1 \geq_{hr} W_2$. Además, Singh y Misra [31] demuestran la siguiente proposición, que indica que si $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $X_1 \leq_{hr} Y$, cuando las componentes siguen distribuciones exponenciales independientes, entonces $W_1 \geq_{hr} W_2$.

Teorema 2.4.1. Sean los tiempos de vida X_1, X_2 e Y con distribuciones exponenciales de medias $1/\lambda_1, 1/\lambda_2$ y $1/\lambda$, respectivamente. Si $\lambda_1 \geq \vee(\lambda_2, \lambda)$, entonces $W_1 \geq_{hr} W_2$.

Demostración.- La demostración la veremos como caso particular del Teorema 2.4.4. \square

Esta proposición puede dar una idea para ampliar el resultado a distribuciones en general para las componentes. Valdés y Zequeira [33] proponen los sistemas U_1 y U_2 con redundancia activa y reposiciones uno a uno no igualmente distribuidas. Como casos particulares de ellos, siendo las redundancias $Y_1 =_{st} Y_2 =_{st} Y$, podremos obtener el orden razón de fallo también para los sistemas W_1 y W_2 . Por ello probaremos los resultados para los sistemas U_1 y U_2 , para posteriormente enunciarlos, en forma de corolario, para los sistemas W_1 y W_2 . Probamos, en primer lugar, dos lemas técnicos que ayudarán a las demostraciones de los teoremas principales donde se proporcionan condiciones necesarias para que se cumpla el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Un primer lema importante para este propósito será el que se describe a continuación y en el cuál probamos una igualdad útil para las razones de fallo de los sistemas U_1 y U_2 (y en definitiva, para W_1 y W_2).

2.4. ORDEN RAZÓN DE FALLO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

Lema 2.4.2. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Las razones de fallo para los sistemas U_1 y U_2 cumplen las igualdades,

$$r_{U_1}(t) = r_2(t) + \frac{r_1(t)G_1(t)\bar{F}_1(t) + F_1(t)s_1(t)\bar{G}_1(t)}{1 - F_1(t)G_1(t)}, \quad (2.15a)$$

$$y, r_{U_2}(t) = r_1(t) + \frac{r_2(t)G_2(t)\bar{F}_2(t) + F_2(t)s_2(t)\bar{G}_2(t)}{1 - F_2(t)G_2(t)}. \quad (2.15b)$$

Además, $r_{U_1}(0) = r_2(0)$ y $r_{U_2}(0) = r_1(0)$.

Demostración.- Las igualdades (2.6a) y (2.6b) para las funciones de supervivencia de los sistemas U_1 y U_2 , podemos reescribirlas para $i = 1, 2$ como $\bar{F}_{U_i}(t) = \bar{F}_i(t) \sqcup \bar{G}_i(t) = 1 - F_i(t)G_i(t)$. Derivando el logaritmos de esta expresión, se tiene,

$$\begin{aligned} r_{U_1}(t) &= \frac{-\frac{d}{dt}\bar{F}_{U_1}(t)}{\bar{F}_{U_1}(t)} = \frac{f_2(t)(1 - F_1(t)G_1(t)) + \bar{F}_2(t)(f_1(t)G_1(t) + F_1(t)g_1(t))}{\bar{F}_2(t)(1 - F_1(t)G_1(t))} \\ &= r_2(t) + \frac{f_1(t)G_1(t) + F_1(t)g_1(t)}{1 - F_1(t)G_1(t)} = r_2(t) + \frac{r_1(t)G_1(t)\bar{F}_1(t) + F_1(t)s_1(t)\bar{G}_1(t)}{1 - F_1(t)G_1(t)}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} r_{U_2}(t) &= \frac{-\frac{d}{dt}\bar{F}_{U_2}(t)}{\bar{F}_{U_2}(t)} = \frac{f_1(t)(1 - F_2(t)G_2(t)) + \bar{F}_1(t)(f_2(t)G_2(t) + F_2(t)g_2(t))}{\bar{F}_1(t)(1 - F_2(t)G_2(t))} \\ &= r_1(t) + \frac{f_2(t)G_2(t) + F_2(t)g_2(t)}{1 - F_2(t)G_2(t)} = r_1(t) + \frac{r_2(t)G_2(t)\bar{F}_2(t) + F_2(t)s_2(t)\bar{G}_2(t)}{1 - F_2(t)G_2(t)}. \end{aligned}$$

Las igualdades $r_{U_1}(0) = r_2(0)$ y $r_{U_2}(0) = r_1(0)$ son directas a partir de lo anterior y por ser los tiempos de vida no negativos. \square

Lema 2.4.3. Se verifica que $\sup[x^y - x - (1 - y)] \leq 0$ para los valores $0 \leq x \leq 1$ y $0 < y \leq 1$.

Demostración.- Denotamos por $h(x) = x^y - x - (1 - y)$. Si $y = 1$ entonces, $h(x) = x - x - (1 - 1) = 0$, cumpliéndose el resultado para cualquier $0 \leq x \leq 1$.

Sea $0 < y < 1$. Observamos que $h(0) = y - 1 = h(1)$ menor que cero y su derivada es $h'(x) = yx^{y-1} - 1$; lo que implica que tiene un punto crítico en el punto $x_0 = y^{1/1-y}$. Además, su segunda derivada $h''(x) = y(y-1)x^{y-2}$ es negativa para cualquier valor de $0 < x < 1$, por lo que este punto x_0 será un máximo, que cumple,

$$h(x_0) = y^{\frac{y}{1-y}} - y^{\frac{1}{1-y}} - (1 - y) = (1 - y) \left[y^{\frac{y}{1-y}} - 1 \right],$$

que es menor que cero demostrando así el lema. \square

Para las siguientes proposiciones y teoremas, vamos a suponer que la razón de fallo para X_1 es $r_1(t) > 0$ para todo valor de $t > 0$ y denotamos por $\alpha(t) = r_2(t)/r_1(t)$.

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE
SISTEMAS

Teorema 2.4.4. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Si $r_2(t) > 0$ para $t > 0$ y se cumplen las condiciones,

1. $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$,
2. $Y_2 \leq_{hr} Y_1$,
3. $\alpha(t)$ es no creciente,

entonces, $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Demostración.- Para $t = 0$ el resultado es trivial a partir del Lema 2.4.2 y de las hipótesis.

Sea $t > 0$, por las expresiones (2.15a) y (2.15b), la desigualdad $r_{U_1}(t) \leq r_{U_2}(t)$, que tenemos que probar, tras manipulaciones algebraicas, es equivalente a, (omitimos la evaluación en t de las funciones),

$$\boxed{\frac{\bar{G}_1}{\bar{G}_2} \cdot \frac{1 - F_2 G_2}{1 - F_1 G_1} \cdot (r_1 - s_1 F_1) \geq r_2 - s_2 F_2.} \quad (2.16)$$

Por hipótesis tenemos que $X_1 \leq_{hr} X_2$ e $Y_2 \leq_{hr} Y_1$ lo que, en particular, hace cierta la desigualdad, $\bar{G}_1 G_2 \bar{F}_2 \geq \bar{G}_2 G_1 \bar{F}_1$ siendo ésta equivalente a $\bar{G}_1(1 - F_2 G_2) \geq \bar{G}_2(1 - F_1 G_1)$ para cada $t \geq 0$. Por otro lado, $X_1 \leq_{hr} Y_1$ implica que se cumpla la desigualdad $r_1(t) \geq s_1(t) \geq s_1(t)F_1(t)$ y, por tanto, $r_1(t) - s_1(t)F_1(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Por ello, si se verifica la desigualdad $r_1 - s_1 F_1 \geq r_2 - s_2 F_2$, equivalente a

$$1 - \alpha \geq \frac{s_1}{r_1} F_1 - \frac{s_2}{r_1} F_2,$$

podemos asegurar que (2.16) es cierto y el teorema quedaría probado.

Considerando la hipótesis $s_2(t) \geq s_1(t)$, del enunciado, se obtiene,

$$\frac{s_1}{r_1} F_1 - \frac{s_2}{r_1} F_2 = \left[\frac{s_2}{r_1} \bar{F}_2 + \frac{s_1}{r_1} \right] - \left[\frac{s_1}{r_1} \bar{F}_1 + \frac{s_2}{r_1} \right] \geq \frac{s_1}{r_1} (\bar{F}_2 - \bar{F}_1),$$

lo que prueba que si se cumple la desigualdad siguiente, quedaría demostrada (2.16).

$$\boxed{1 - \alpha(t) \geq \bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t).} \quad (2.17)$$

Por el teorema de caracterización de distribuciones a partir de la función de razón de fallo, Teorema 1.1.3, y por ser la función α no decreciente, se verifica,

$$\bar{F}_2(t) = e^{-\int_0^t r_2(x) dx} = e^{-\int_0^t \alpha(x) r_1(x) dx} \leq e^{-\alpha(t) \int_0^t r_1(x) dx} = \bar{F}_1(t) \alpha(t).$$

Ahora bien, por el Lema 2.4.3, con $0 \leq x = \bar{F}_1(t) \leq 1$ y $0 < y = \alpha(t) = r_2(t)/r_1(t) \leq 1$, es cierta la desigualdad $\bar{F}_1(t) \alpha(t) - \bar{F}_1(t) - (1 - \alpha(t)) \leq 0$ para cada $t > 0$, lo que es suficiente para completar la demostración; ya que

2.4. ORDEN RAZÓN DE FALLO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

$$\bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_1(t)^{\alpha(t)} - \bar{F}_1(t) \leq 1 - \alpha(t).$$

□

A partir de este teorema, el Teorema 2.4.1 tiene una demostración directa con las distribuciones exponenciales de las componentes ($\alpha(t) = \lambda_2/\lambda_1$ e $Y_1 =_{st} Y_2 =_{st} Y$).

Corolario 2.4.5. Sean los tiempos de vida X_1, X_2 e Y independientes y sea $r_2(t) = c \cdot r_1(t)$ para $t \geq 0$, donde $c > 0$. Si $Y =_{st} X_1$ o $Y =_{st} X_2$, entonces son equivalentes,

1. $W_1 \geq_{hr} W_2$.
2. $X_1 \leq_{hr} X_2$.

Demostración.- Sea $W_1 \geq_{hr} W_2$. De (2.15a) y (2.15b) para $t = 0$ se obtiene que $r_{W_1}(0) = r_2(0) = c \cdot r_1(0) \leq r_1(0) = r_{W_2}(0)$, lo que implica que $c \leq 1$ y por consiguiente se verifica que $X_1 \leq_{hr} X_2$. La implicación contraria es directa a partir del Teorema 2.4.4 ya que si $Y =_{st} X_1$ o $Y =_{st} X_2$ entonces se cumplen trivialmente las hipótesis de éste. □

Este corolario proporciona una equivalencia para el orden razón de fallo entre dos variables aleatorias no negativas y continuas, bajo el orden razón de fallo de los sistemas en serie formados con éstas y una redundancia activa común.

A continuación presentamos dos ejemplos donde se proporcionan condiciones necesarias para que las componentes verifiquen las hipótesis del Teorema 2.4.4 considerando razones de fallo lineales y proporcionales.

Ejemplo VIII

Razones de fallo lineales. Sean los tiempos de vida para las componentes con razones de fallo iguales a $r_1(t) = at + b$ y $r_2(t) = ct + d$ cumpliendo $a \geq c > 0$ y $b \geq d > 0$. Claramente,

a) $r_2(t) \leq r_1(t)$.

b) La función,

$$\alpha(t) = \frac{c}{a} + \frac{d - \frac{cb}{a}}{r_1(t)},$$

será no creciente si, $ad - cb \geq 0$ puesto que $r_1(t)$ es creciente y mayor que cero.

Siendo las condiciones $a \geq c > 0$, $b \geq d > 0$ y $ad - cb \geq 0$ para las componentes con razones de fallo lineales e independientes estaríamos en condición de aplicar el Teorema 2.4.4 con redundancias Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $Y_2 \leq_{hr} Y_1$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$.

Razones de fallo proporcionales. Sean los tiempos de vida para las componentes con razones de fallo iguales a $r_1(t) > 0$ y $r_2(t) = c \cdot r_1(t)$ para todo $t \geq 0$ y $0 < c \leq 1$. Trivialmente, $r_2(t) \leq r_1(t)$ y $\alpha(t) = c$ es no creciente. Estas condiciones las verifican las componentes con distribución Weibull con el mismo parámetro de forma, entre otras.

Para este caso es condición necesaria que $0 < c \leq 1$ para aplicar el Teorema 2.4.4 con redundancias Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $Y_2 \leq_{hr} Y_1$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$.

Un caso particular es aquel en que las componentes son exponenciales cuyas razones de fallo son $r_1(t) = \lambda_1 = b$ y $r_2(t) = \lambda_2 = d = c \cdot \lambda_1$. Las condiciones $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $0 < c \leq 1$ son necesarias para la aplicación del Teorema 2.4.4 bajo las redundancias anteriores.

Teorema 2.4.6. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Si $r_2(t) > 0$ para $t > 0$, $m = \inf_{t>0} \alpha(t)$ es mayor que cero y se cumplen las condiciones,

1. $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$,
2. $Y_2 \leq_{hr} Y_1$,
3. $\alpha(t) \leq 1 - m^{m/1-m} + m^{1/1-m}$,

entonces, $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Demostración.- Se obtiene con los mismos razonamientos del Teorema 2.4.4 verificándose el teorema si se cumple la desigualdad (2.17), $1 - \alpha(t) \geq \bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t)$. Del Teorema 1.1.3 y por la definición de m , se tiene la desigualdad,

$$\bar{F}_2(t) = e^{-\int_0^t r_2(x)dx} = e^{-\int_0^t \alpha(x)r_1(x)dx} \leq e^{-m \int_0^t r_1(x)dx} = \bar{F}_1(t)^m.$$

Entonces, $\bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_1(t)^m - \bar{F}_1(t)$, que implica que si se verifica la desigualdad,

$$\bar{F}_1(t)^m - \bar{F}_1(t) \leq 1 - \alpha(t), \quad (2.18)$$

el teorema quedaría probado.

Sea ahora la función $h(x) = x^m - x - (1 - y)$ donde $0 \leq x \leq 1$, $0 < y \leq 1$ y $0 < m \leq y$ que cumple:

1. $h(0) = h(1) = y - 1 < 0$.
2. $h'(x) = mx^{m-1} - 1 = 0$ si, y solo si $x_0 = m^{1/1-m}$.
3. $h''(x) = m(m-1)x^{m-2} < 0$ si $0 \leq x \leq 1$ y $0 < m \leq y \leq 1$.
4. $h(x)$ tiene un máximo en x_0 cuya imagen es $h(m^{1/1-m}) = m^{m/1-m} - m^{1/1-m} - (1 - y)$.

2.4. ORDEN RAZÓN DE FALLO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

Sean los valores de $x = \bar{F}_1(t)$, $m = \inf_{t>0} \alpha(t)$ y $\alpha(t) = y$. Por hipótesis, $m^{m/1-m} - m^{1/1-m} - (1 - \alpha(t))$ es menor o igual que cero, por lo tanto, la función $h(\bar{F}_1(t)) = \bar{F}_1(t)^m - \bar{F}_1(t) - (1 - \alpha(t))$ es menor o igual que cero para cada valor de $t \geq 0$ quedando así demostrada la desigualdad (2.18). \square

Misra et al. [23] demuestran que las hipótesis de los Teoremas 2.4.4 y 2.4.6 pueden ser reemplazadas por las del siguiente teorema manteniendo el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Teorema 2.4.7. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Si se verifican las condiciones,*

1. $X_1 \leq_{st} X_2$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$,
2. $Y_2 \leq_{hr} Y_1$, y
3. $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ para cada $t \geq 0$,

entonces, $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Demstración.- Mostraremos que la función,

$$\eta(t) = \frac{\bar{F}_{U_1}(t)}{\bar{F}_{U_2}(t)} = \frac{\bar{F}_2(t)(1 - F_1(t)G_1(t))}{\bar{F}_1(t)(1 - F_2(t)G_2(t))},$$

donde la segunda igualdad viene dada por las igualdades eq3.6a y eq3.6b, es creciente en t . Para ello, derivando la expresión anterior, obtenemos (omitiendo la evaluación en t) que,

$$\eta'(t) = \frac{(-f_2(1 - F_1G_1) + (f_1G_1 + F_1g_1)\bar{F}_2)\bar{F}_1(1 - F_2G_2)}{\bar{F}_{U_2}^2} + \frac{(-f_1(1 - F_2G_2) + (f_2G_2 + F_2g_2)\bar{F}_1)\bar{F}_2(1 - F_1G_1)}{\bar{F}_{U_2}^2}.$$

Se comprueba que esta expresión es igual en signo a,

$$\eta' \stackrel{sgn}{=} \phi := \frac{\bar{F}_{U_2}^2 \eta'}{\bar{F}_1 \bar{F}_2 \bar{G}_2} = \bar{G}_1 [r_1 F_2 - r_2 F_1 + F_1 F_2 (s_2 - s_1)] + \bar{F}_2 \frac{\bar{G}_1}{\bar{G}_2} (r_1 - s_1 F_1) - \bar{F}_1 (r_2 - s_2 F_2).$$

Por la hipótesis 3 se cumple la desigualdad, $r_1(t)F_2(t) - r_2(t)F_1(t) \geq 0$; por la condición 2 se verifica que $(s_2(t) - s_1(t))F_1(t)F_2(t) \geq 0$ y $\bar{G}_1(t) \geq \bar{G}_2(t)$ para cada $t \geq 0$; y por la condición 1, $r_1(t) - s_1(t)F_1(t) \geq 0$ y $\bar{G}_1(t) \geq \bar{F}_1(t)$. Por ello, se verifica la desigualdad,

$$\bar{F}_1 (r_1 F_2 - r_2 F_1) + \bar{F}_1 (F_1 F_2 (s_2 - s_1)) + \bar{F}_2 (r_1 - s_1 F_1) - \bar{F}_1 (r_2 - s_2 F_2),$$

reagrupando,

$$r_1 (\bar{F}_1 F_2 + \bar{F}_2) - r_2 (\bar{F}_1 F_1 + \bar{F}_1) + F_1 F_2 \bar{G}_1 (s_2 - s_1) - F_1 \bar{F}_2 s_1 + \bar{F}_1 F_2 s_2.$$

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Por la hipótesis 1, $\bar{F}_1(t) \leq \bar{G}_1(t)$ y se verifica la desigualdad,

$$\phi \geq r_1(1 - F_1 F_2) - r_2 \bar{F}_1(1 + F_1) + \bar{F}_1 F_1 F_2 (s_2 - s_1) - F_1 \bar{F}_2 s_1 + \bar{F}_1 F_2 s_2.$$

Usando $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ para cada $t \geq 0$, y multiplicando por F_1 , tenemos,

$$\begin{aligned} \phi F_1 &\geq r_1(F_1 + F_2) + s_2 \bar{F}_1 F_1 F_2 (1 + F_1) - s_1 F_1^2 [\bar{F}_1 F_2 + \bar{F}_2] \\ &\geq s_1 \bar{F}_1 [F_1 - F_2] \text{ (por ser } X_1 \leq_{st} X_1 \leq_{hr} Y_1 \text{ e } Y_2 \leq_{hr} Y_1 \text{)}. \end{aligned}$$

Concluimos que $\phi \geq 0$ para cada $t \geq 0$ y, por lo tanto, $\eta(t)$ es creciente en t . □

También se demuestra que cambiando la hipótesis tercera del teorema anterior por $\alpha(t)$ no creciente para cada $t \geq 0$, entonces $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Teorema 2.4.8. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Si se verifican las condiciones:*

1. $X_1 \leq_{st} X_2$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$,
2. $Y_2 \leq_{hr} Y_1$, y
3. $\alpha(t)$ es no creciente para cada $t \geq 0$,

entonces, $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Demostración.- Las hipótesis 1) y 2) son iguales a las del anterior teorema. Mostraremos que las hipótesis implican la condición $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ para cada $t \geq 0$. En efecto, fijando un $t \geq 0$, para algún $\xi \in (0, t)$, se verifica, por el teorema del valor medio,

$$\frac{F_2(t)}{F_1(t)} = \frac{F_2(t) - F_2(0)}{F_1(t) - F_1(0)} = \frac{f_2(\xi)}{f_1(\xi)} = \frac{r_2(\xi)\bar{F}_2(\xi)}{r_1(\xi)\bar{F}_1(\xi)} \geq \frac{r_2(t)}{r_1(t)},$$

siendo la última desigualdad debida a $X_1 \leq_{st} X_2$, $\xi < t$ y $\alpha(t)$ no creciente en t . □

Obsérvese que este resultado comprueba que es suficiente con el orden estocástico de las componentes X_1 y X_2 en las hipótesis del Teorema 2.4.4 para verificar el orden razón de fallo en los sistemas anteriores.

El siguiente corolario, muestra las condiciones necesarias para que en los sistemas en serie de dos componentes con redundancia activa y reposición común, se ordenen en razón de fallo.

Corolario 2.4.9. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2 e Y independientes. Si se cumple una de las condiciones,*

- a) $X_1 \leq_{st} X_2$, $X_1 \leq_{hr} Y$ y $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ para cada $t \geq 0$, o
- b) $X_1 \leq_{st} X_2$, $X_1 \leq_{hr} Y$ y $\alpha(t)$ es no creciente para cada $t \geq 0$,

2.4. ORDEN RAZÓN DE FALLO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

entonces, $W_1 \geq_{hr} W_2$.

En el siguiente ejemplo, para razones de fallo lineales determinadas, comprobaremos que no se verifican las hipótesis del Teorema 2.4.4 pero sí que lo hacen las hipótesis del Teorema 2.4.6. A continuación, comprobaremos que aún no cumpliéndose las condiciones de los teoremas citados, se sigue manteniendo $U_1 \geq_{hr} U_2$ por el Teorema 2.4.7.

Ejemplo IX

Valdés y Zequeira [33] consideran los tiempos de vida para las componentes con razones de fallo iguales a $r_1(t) = 100t + 10$ y $r_2(t) = 58t + 3$ y sean los tiempos de vida Y_1 e Y_2 cumpliendo $Y_2 \leq_{hr} Y_1$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$. Bajo estas definiciones, las hipótesis 1) y 2) de los Teoremas 2.4.4 y 2.4.6 se verifican.

Por ser $ad - bc = 100 \cdot 3 - 58 \cdot 10 = 300 - 580 < 0$, $\alpha(t)$ es no decreciente. En virtud del Teorema 2.4.4 no podríamos asegurar el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Veamos que se verifican las hipótesis del Teorema 2.4.6. En este caso, la función $\alpha(t)$ tiene como supremo e ínfimo, $s = \sup_{t>0} \alpha(t) = c/a = 0.58$ y $m = \inf_{t>0} \alpha(t) = d/b = 0.3$. Representamos a continuación $\alpha(t)$ (negro) y los valores de s, m (rojo) y $\delta(m) = 1 - m^{m/1-m} + m^{1/1-m}$ (azul).

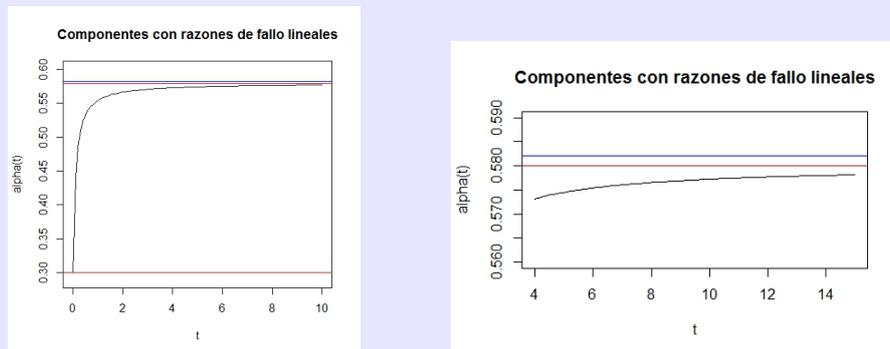


Figura 2.11. Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 100t + 10$ y $r_2(t) = 58t + 3$.

Como puede observarse, los valores de $\alpha(t)$, para cada $t \geq 0$, son menores que $\delta(m) \approx 0.5821$ y, en virtud del Teorema 2.4.6, se asegura el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$. (Véase Apéndice A para detalles en los cálculos).

Misra et al. [24] consideran los tiempos de vida para las componentes con razones de fallo, $r_1(t) = 5t + 10$ y $r_2(t) = 3t + 3$ y sean los tiempos de vida Y_1 e Y_2 cumpliendo $Y_2 \leq_{hr} Y_1$ y $X_1 \leq_{hr} Y_1$. Se tiene que $ad - bc = 15 - 30 < 0$ lo que implica que la función $\alpha(t)$ sea estrictamente creciente y, por otro lado, $s = \sup_{t>0} \alpha(t) = 0.6$, $m = \inf_{t>0} \alpha(t) = 0.3$ y $\delta(m) \approx 0.5821$, lo que indica que existe un \bar{t} suficientemente grande tal que $\alpha(\bar{t}) > \delta(m)$, como se muestra en la figura siguiente.

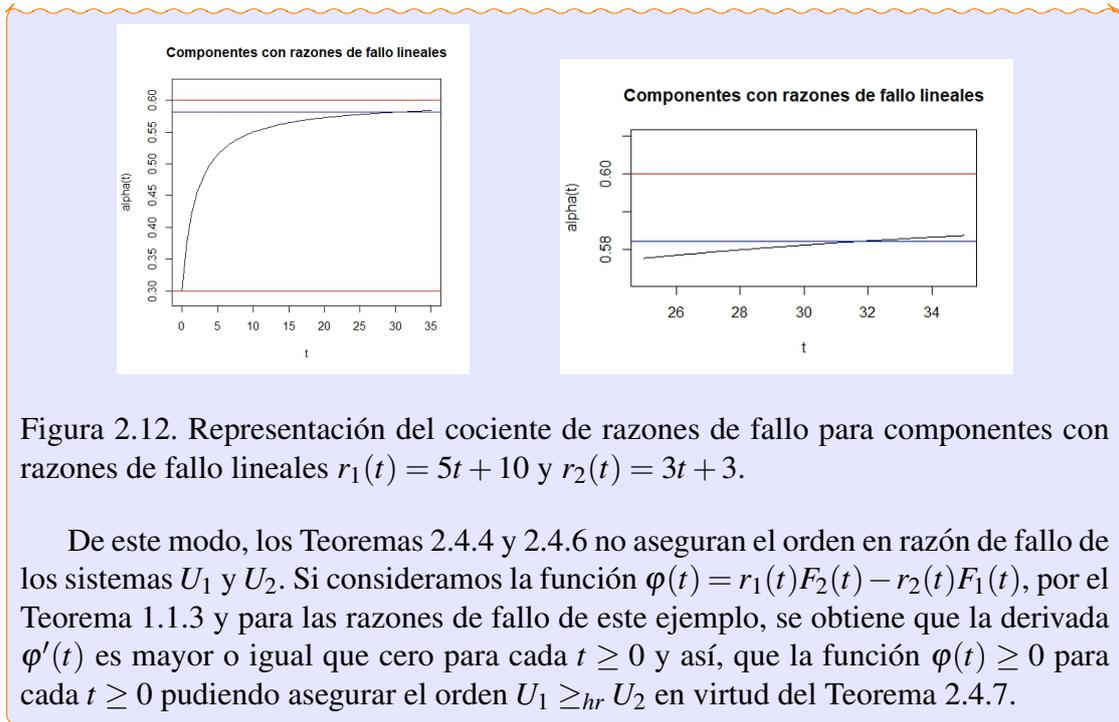


Figura 2.12. Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 5t + 10$ y $r_2(t) = 3t + 3$.

De este modo, los Teoremas 2.4.4 y 2.4.6 no aseguran el orden en razón de fallo de los sistemas U_1 y U_2 . Si consideramos la función $\varphi(t) = r_1(t)F_2(t) - r_2(t)F_1(t)$, por el Teorema 1.1.3 y para las razones de fallo de este ejemplo, se obtiene que la derivada $\varphi'(t)$ es mayor o igual que cero para cada $t \geq 0$ y así, que la función $\varphi(t) \geq 0$ para cada $t \geq 0$ pudiendo asegurar el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$ en virtud del Teorema 2.4.7.

Para terminar la subsección, resaltamos que si las redundancias tienen las mismas distribuciones que las componentes, $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$, las condiciones del Teorema 2.4.4 y 2.4.6 indican que estamos en el caso trivial $X_1 =_{st} Y_1 =_{st} X_2 =_{st} Y_2$. En esta línea, la siguiente proposición asegura que si las componentes no están igualmente distribuidas y se colocan reposiciones uno a uno igualmente distribuidas, no podríamos asegurar una ordenación en razón de fallo de los sistemas U_1 y U_2 .

Teorema 2.4.10. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 , cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$, $X_2 =_{st} Y_2$ y $X_1 \neq_{st} X_2$. Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $r_1(0) > r_2(0)$, entonces no existe ordenación en razón de fallo para U_1 y U_2 .

Demostración.- Por una parte, si $r_{U_1}(t) \geq r_{U_2}(t)$ para cada t , en $t = 0$, por el Lema 2.4.2 sabemos que ha de ocurrir $r_{U_1}(0) = r_2(0) \geq r_1(0) = r_{U_2}(0)$ que entra en contradicción con la hipótesis.

Por otro lado, si $r_{U_1}(t) \leq r_{U_2}(t)$ para cada t , la equivalencia dada en la expresión (2.16), se puede reescribir, para estas hipótesis, como,

$$\frac{\bar{F}_1}{\bar{F}_2} \cdot \frac{1 - F_2 F_2}{1 - F_1 F_1} \cdot (r_1 - r_1 F_1) \geq r_2 - r_2 F_2,$$

que, tras realizar operaciones algebraicas, es equivalente a $f_1 + f_1 F_2 \geq f_2 + f_2 F_1$. Por otro lado, la condición $X_1 \leq_{hr} X_2$ es equivalente a $f_1 - f_1 F_2 \geq f_2 - f_2 F_1$. Sumando ambas condiciones, obtenemos, por la hipótesis $X_1 \neq_{st} X_2$, la desigualdad contradictoria $f_1(t) \geq f_2(t)$ para cada $t > 0$, finalizando la demostración. \square

2.4. ORDEN RAZÓN DE FALLO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

En resumen, para obtener el orden en razón de fallo de los sistemas U_1 y U_2 , comprobamos que es necesario que las componentes se ordenen en sentido hr , que la redundancia para la peor componente sea mayor en orden hr tanto de esta componente como de la otra redundancia y además el cociente entre las razones de fallo de las componentes sea no creciente. Esta última condición se consigue relajar por otra, menos restrictiva, que implica que el cociente no supere una cierta función $\delta(m)$ de $m = \inf_{t>0} \alpha(t)$. Por el Teorema 2.4.4, además, hemos podido obtener una caracterización del orden de razón de fallo de dos tiempos de vida con razones de fallo proporcionales a partir de la formación y orden de los sistemas W_1 y W_2 . Por último, hemos comprobado que la condición de orden hr entre los tiempos de vida de las componentes del sistema puede ser cambiado por el orden estocástico manteniéndose $U_1 \geq_{hr} U_2$.

2.4.2. Redundancia en espera

En este subapartado estudiaremos el orden en razón de fallo para el caso de redundancia en espera y probamos un resultado para los sistemas en serie de n componentes con redundancia en espera y reposición uno a uno, para después demostrar tres resultados con reposición común.

Misra et al. [23] abordan este estudio para que los sistemas $U_1^{(n)}$ y $U_2^{(n)}$ se ordenen en sentido razón de fallo y dan condiciones necesarias, descritas en el siguiente teorema. La demostración la omitimos por su extensión y complejidad técnica.

Teorema 2.4.11. *Sean los tiempos de vida $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 independientes. Supongamos que X_1 o X_2 tiene razón de fallo no decreciente, el cociente $\bar{F}_2(t)/\bar{F}_1(t)$ es log-convexo, $X_1 \leq_{hr} X_2$ y que $Y_2 \leq_{lr} Y_1$. Entonces $U_1^{(n)} \geq_{hr} U_2^{(n)}$.*

Al tratarse de reposición uno a uno no igualmente distribuida podemos considerar $Y_1 =_{st} Y_2 =_{st} Y$ una reposición común a las componentes X_1 y X_2 y enunciar el siguiente corolario para los sistemas $W_1^{(n)}$ y $W_2^{(n)}$.

Corolario 2.4.12. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2, \dots, X_n e Y independientes. Supongamos que X_1 o X_2 tiene razón de fallo no decreciente, el cociente $\bar{F}_2(t)/\bar{F}_1(t)$ es log-convexo y $X_1 \leq_{hr} X_2$. Entonces $W_1^{(n)} \geq_{hr} W_2^{(n)}$.*

El Corolario 2.2.11 indica que para comprobar el orden estocástico de estos sistemas es necesario y suficiente que $X_1 \leq_{hr} X_2$; este corolario añade las condiciones de no decrecimiento de una de las razones de fallo de las componentes y la log-convexidad del cociente de sus supervivencias para asegurar el orden hr .

Por último, You y Li [35] demuestran una condición necesaria y suficiente para el orden en razón de fallo de los sistemas $W'_{\wedge 1}$ y $W'_{\wedge 2}$.

Teorema 2.4.13. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2 e Y independientes. $W'_{\wedge 1} \geq_{hr} W'_{\wedge 2}$ si, y solo si, $r_1(t) - r_{X_1+Y}(t) \geq r_2(t) - r_{X_2+Y}(t)$ para cada $t \geq 0$.*

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Demostración.- Las funciones de supervivencia de los sistemas $W'_{\wedge 1}$ y $W'_{\wedge 2}$ vienen dadas por,

$$\bar{F}_{W'_{\wedge 1}}(t) = \bar{F}_{X_1+Y}(t)\bar{F}_2(t) \quad \text{y} \quad \bar{F}_{W'_{\wedge 2}}(t) = \bar{F}_1(t)\bar{F}_{X_2+Y}(t)$$

Se verifica que $W'_{\wedge 1} \geq_{hr} W'_{\wedge 2}$ si el cociente de las supervivencias anteriores es creciente. El signo de la derivada de este cociente es,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\bar{F}_{W'_{\wedge 1}}(t)}{\bar{F}_{W'_{\wedge 2}}(t)} \right]' &\stackrel{sgn}{=} -f_{X_1+Y}(t)\bar{F}_{X_2+Y}(t)\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) - f_2(t)\bar{F}_{X_2+Y}(t)\bar{F}_{X_1+Y}(t)\bar{F}_1(t) \\ &+ f_{X_2+Y}(t)\bar{F}_{X_1+Y}(t)\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) + f_1(t)\bar{F}_{X_2+Y}(t)\bar{F}_{X_1+Y}(t)\bar{F}_2(t) \\ &= \bar{F}_{X_1+Y}(t)\bar{F}_{X_2+Y}(t)\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) [r_1(t) - r_{X_1+Y}(t)] \\ &- \bar{F}_{X_1+Y}(t)\bar{F}_{X_2+Y}(t)\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) [r_2(t) - r_{X_2+Y}(t)] \stackrel{sgn}{=} \\ &\stackrel{sgn}{=} [r_1(t) - r_{X_1+Y}(t)] - [r_2(t) - r_{X_2+Y}(t)], \end{aligned}$$

y la condición $r_1(t) - r_{X_1+Y}(t) \geq r_2(t) - r_{X_2+Y}(t)$ es necesaria y suficiente para que se cumpla el orden $W'_{\wedge 1} \geq_{hr} W'_{\wedge 2}$. \square

Corolario 2.4.14. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, \dots, X_n e Y independientes. $W_1^{(n)} \geq_{hr} W_2^{(n)}$ si, y solo si, $r_1(t) - r_{X_1+Y}(t) \geq r_2(t) - r_{X_2+Y}(t)$ para cada $t \geq 0$.

Demostración.- Teniendo en cuenta que son iguales los cocientes,

$$\frac{\bar{F}_{W'_{\wedge 1}}(t)}{\bar{F}_{W'_{\wedge 2}}(t)} = \frac{\bar{F}_{W_1^{(n)}}(t)}{\bar{F}_{W_2^{(n)}}(t)}$$

para componentes independientes, el resultado se obtiene directamente del teorema anterior. \square

Una de las consecuencias directas de este teorema, y posterior corolario, es que si las componentes se ordenan en razón de fallo $X_1 \leq_{hr} X_2$ y las convoluciones de éstos con la componente redundante también, es decir, $X_2 + Y \leq_{hr} X_1 + Y$ entonces se cumple $W'_{\wedge 1} \geq_{hr} W'_{\wedge 2}$ [$W_1^{(n)} \geq_{hr} W_2^{(n)}$]. Esto último puede ser demostrado también como consecuencia del Teorema 1.B.33 de Shaked y Shanthikumar [29] por lo que se asegura que dos sistemas en serie se ordenan en razón de fallo si sus componentes se ordenan en razón de fallo dos a dos.

2.5. Orden razón de fallo inverso en sistemas con una redundancia

Estudiamos para los sistemas en serie W_1, W_2, U_1 y U_2 , dónde es mejor, en sentido razón de fallo inverso, colocar una redundancia activa con reposición común o uno a uno. En la bibliografía no hemos encontrado resultados para este orden con redundancia en espera.

2.5. ORDEN RAZÓN DE FALLO INVERSO EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

Damos un resultado principal probado por Misra et al. [24] en el que se cumple $U_1 \geq_{rh} U_2$ bajo condiciones similares a los Teoremas 2.4.4, 2.4.6 y 2.4.7. Concluiremos el apartado con un último teorema, demostrado por Zhao et al. [38], en el se comprueba el orden en razón de fallo inverso para los sistemas en serie de n componentes con distribuciones exponenciales o razón de fallo proporcionales.

Teorema 2.5.1. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Si se verifican las condiciones,*

1. $X_1 \leq_{rh} X_2$ y $X_1 \leq_{rh} Y_1$,
2. $Y_2 \leq_{rh} Y_1$, y
3. $F_1(t)G_1(t) \geq F_2(t)G_2(t)$ para cada $t \geq 0$,

entonces, $U_1 \geq_{rh} U_2$.

Demostración.- La demostración es similar a la del Teorema 2.4.7 considerando la función,

$$\eta(t) = \frac{F_{U_1}(t)}{F_{U_2}(t)} = \frac{F_2(t) + F_1(t)G_1(t) - F_1(t)F_2(t)G_1(t)}{F_1(t) + F_2(t)G_2(t) - F_1(t)F_2(t)G_2(t)},$$

donde la segunda igualdad viene dada por las igualdades (2.6a) y (2.6b). □

También se demuestra que cambiando la hipótesis tercera del teorema anterior por $\tilde{s}_1(t) - \tilde{s}_2(t) \leq \tilde{r}_2(t) - \tilde{r}_1(t)$ para cada $t \geq 0$, entonces $U_1 \geq_{rh} U_2$.

Teorema 2.5.2. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Si se verifica que,*

1. $X_1 \leq_{rh} X_2$ y $X_1 \leq_{rh} Y_1$,
2. $Y_2 \leq_{rh} Y_1$, y
3. $\tilde{s}_1(t) - \tilde{s}_2(t) \leq \tilde{r}_2(t) - \tilde{r}_1(t)$ para cada $t \geq 0$,

entonces, $U_1 \geq_{rh} U_2$.

Demostración.- Las condiciones 1) y 2) son iguales al Teorema 2.5.1, por tanto, vamos a probar que las hipótesis implican que $F_1(t)G_1(t) \geq F_2(t)G_2(t)$. Denotando por

$$\phi(t) = \log(F_1(t)G_1(t)) - \log(F_2(t)G_2(t)),$$

y derivando, se tiene,

$$\phi'(t) = \tilde{s}_1(t) - \tilde{s}_2(t) - \tilde{r}_2(t) + \tilde{r}_1(t),$$

que es menor o igual que cero para cada $t \geq 0$ por la hipótesis 3. Entonces, la función $\phi(t) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$ y, entonces, $F_1(t)G_1(t) \geq F_2(t)G_2(t)$. □

Para la reposición común se tiene para el orden razón de fallo inverso el siguiente corolario.

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Corolario 2.5.3. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2 e Y independientes. Si se cumple que $X_1 \leq_{rh} X_2$ y $X_1 \leq_{rh} Y$, entonces, $W_1 \geq_{rh} W_2$.*

Demostración.- La demostración es directa a partir de los teoremas anteriores. □

Por el Corolario 2.5.3 se puede comprobar el orden $W_1^{(n)} \geq_{rh} W_2^{(n)}$ de forma análoga a la demostración del Corolario 2.4.14. Zhao et al. [38] proporcionan más condiciones para el orden razón de fallo inverso con redundancia activa y reposición común bajo las hipótesis de que los tiempos de vida siguen distribuciones exponenciales o tienen razones de fallo proporcionales.

Teorema 2.5.4. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2, \dots, X_n e Y independientes cumpliendo una de las condiciones,*

- a) *Los tiempos de vida siguen distribuciones exponenciales de medias $1/\lambda_i$ con $i = 1, \dots, n$ y $1/\lambda$, respectivamente.*
- b) *Los tiempos de vida tienen funciones de razón de fallo proporcionales, es decir, $r_i(t) = \lambda_i r(t)$ y $s(t) = \lambda r(t)$ con $r(t)$ función razón de fallo común.*

Si $Y \leq_{hr} X_1 \leq_{hr} X_2$, entonces $W_1^{(n)} \geq_{rh} W_2^{(n)}$.

En resumen, para mantener el orden $U_1 \geq_{rh} U_2$ es necesario que las componentes se ordenen en razón de fallo inversa y también que las redundancias cumplan $X_1 \leq_{rh} Y_1$ e $Y_2 \leq_{rh} Y_1$; además se ha de verificar también que $F_1(t)G_1(t) \geq F_2(t)G_2(t)$ para cada $t \geq 0$. Esta última condición puede ser cambiada por $\tilde{s}_1(t) - \tilde{s}_2(t) \leq \tilde{r}_2(t) - \tilde{r}_1(t)$ para cada $t \geq 0$.

2.6. Orden cociente de verosimilitud en sistemas con una redundancia

Como hemos visto tras la Definición 1.2.6, el orden cociente de verosimilitud es el más fuerte de los considerados a lo largo de la memoria. Este hecho implica que obtener resultados generales de ordenación de sistemas con redundancia activa o en espera sea una tarea difícil. Es por esto que los estudios sobre esta ordenación se centren en la especificación de las distribuciones de las componentes y redundancias, además de considerar los sistemas más sencillos, $W_1, W_2, W'_{\wedge 1}$ y $W'_{\wedge 2}$. Este apartado estará compuesto por resultados para redundancia activa y en espera bajo la suposición de que las componentes siguen distribuciones exponenciales o tienen razón de fallo proporcionales.

Para redundancia activa, Zhao et al. [37] prueban que, bajo las mismas hipótesis consideradas que en Singh y Misra [31], Teorema 2.4.1, los sistemas W_1 y W_2 se ordenan en orden cociente de verosimilitudes.

Teorema 2.6.1. *Sean tiempos de vida X_1, X_2 e Y con distribuciones exponenciales de medias $1/\lambda_1, 1/\lambda_2$ y $1/\lambda$, respectivamente. Si $\lambda_1 \geq \vee(\lambda_2, \lambda)$, entonces $W_1 \geq_{lr} W_2$.*

2.6. ORDEN COCIENTE DE VEROSIMILITUD EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

En este mismo artículo se expone un ejemplo donde se pone de manifiesto que la condición no puede ser cambiada.

Ejemplo x

Si consideramos tres casos de valores de los parámetros,

- a) $\lambda = 2.5, \lambda_2 = 3, \lambda_1 = 3.5$.
- b) $\lambda = 3, \lambda_2 = 2.5, \lambda_1 = 3.5$.
- c) $\lambda = 3.5, \lambda_2 = 3, \lambda_1 = 2.5$.

Se observa que los valores de los parámetros en los casos a) y b) verifican las condiciones del Teorema 2.6.1, y el cociente de verosimilitudes es creciente en t , gráficas (a) y (b). Mientras, los valores de los parámetros del apartado c) no cumplen las condiciones del enunciado del Teorema 2.6.1 y el cociente de verosimilitudes no es creciente para cada valor de t , gráfica (c).

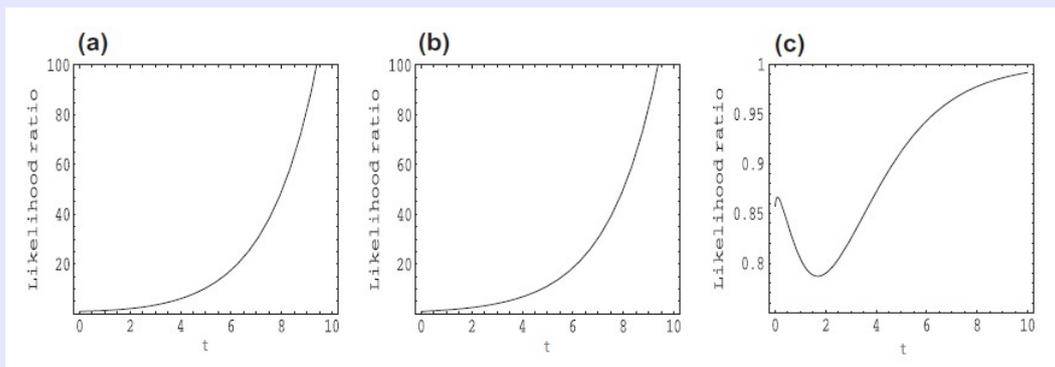


Figura 2.13. Cociente de verosimilitudes para los sistemas W_1 y W_2 con componentes exponenciales y distintos valores de sus parámetros. Imagen obtenida de Zhao et al. [37].

También, You y Li [35] prueban que para tiempos de vida con función razón de fallo proporcional, el Teorema 2.6.1 también es válido. Por otro lado, Zhao et al. [38] completan los dos resultados anteriores para los sistemas en serie con $n \geq 3$ componentes, y bajo las mismas condiciones para los tiempos de vida exponencialmente distribuidos o de razones de fallo proporcional; si $\lambda_i \geq \vee(\lambda_j, \lambda)$ con $1 \leq i \neq j \leq n$, entonces $X_{[n:n]}^{(i)} = \wedge(X_1, \dots, \vee(X_i, X), \dots, X_n) \geq \wedge(X_1, \dots, \vee(X_j, X), \dots, X_n) = X_{[n:n]}^{(j)}$.

A partir del Teorema 2.2.10, para la redundancia en espera, Zhao et al. [37] prueban que, para componentes con distribuciones exponenciales, el orden estocástico para los sistemas $W'_{\wedge 1}$ y $W'_{\wedge 2}$ puede ser extendido al orden cociente de verosimilitudes, como se puede ver en el siguiente teorema, cuya demostración omitimos.

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

Teorema 2.6.2. Sean tiempos de vida X_1, X_2 e Y distribuidos exponencialmente con medias $1/\lambda_1, 1/\lambda_2$ y $1/\lambda$, respectivamente. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$, entonces $W'_{\wedge 1} \geq_{lr} W'_{\wedge 2}$.

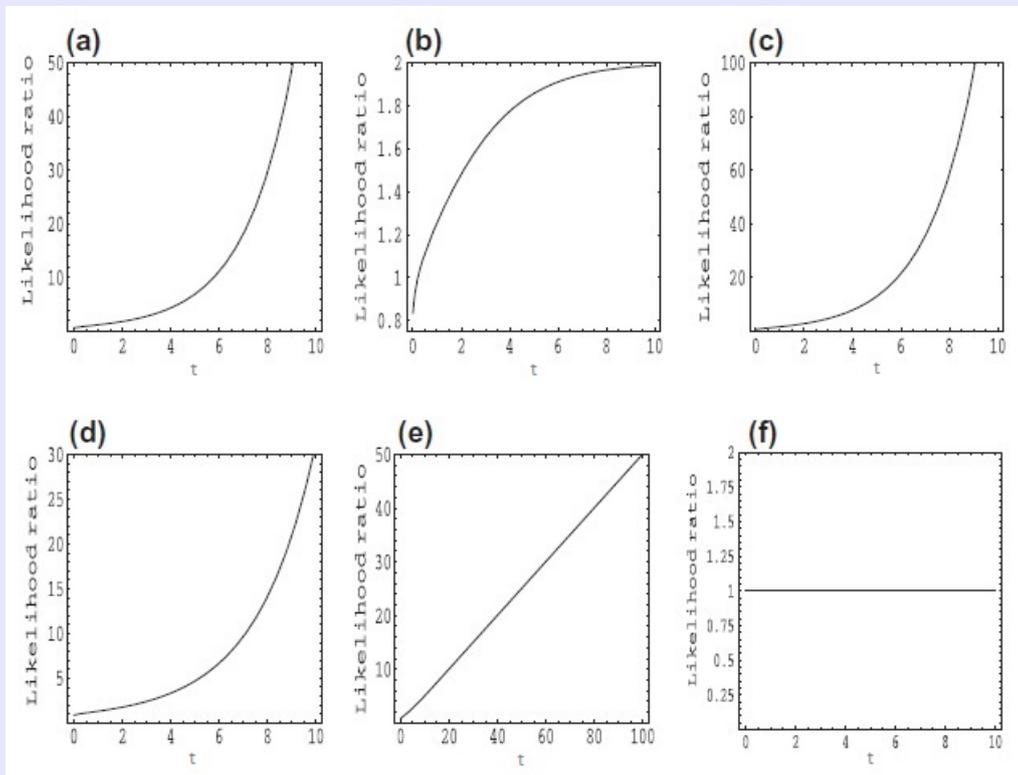
El siguiente ejemplo se muestran las posibles elecciones de los parámetros de las distribuciones de las componentes para que se verifique el teorema.

Ejemplo XI

La única condición, $\lambda_1 \geq \lambda_2$, del enunciado deja libertad para la elección de los parámetros λ_1, λ_2 y λ para que se cumpla el orden lr en los sistemas considerados. En concreto, podemos distinguir seis casos diferentes que verifican las hipótesis anteriores. Estos casos se muestran en Zhao et al. [37] como,

- a) $\lambda = 2.5, \lambda_2 = 3, \lambda_1 = 3.5$
- b) $\lambda = 3.5, \lambda_2 = 2.5, \lambda_1 = 3$
- c) $\lambda = 3, \lambda_2 = 2.5, \lambda_1 = 3.5$
- d) $\lambda = 3, \lambda_2 = 3, \lambda_1 = 3.5$
- e) $\lambda = 3.5, \lambda_2 = 3, \lambda_1 = 3.5$
- f) $\lambda = 3.5, \lambda_2 = 3, \lambda_1 = 3$

En la siguiente figura pueden verse los cocientes de las verosimilitudes de los sistemas $W'_{\wedge 1}$ y $W'_{\wedge 2}$ para cada uno de los casos anteriores.



2.6. ORDEN COCIENTE DE VEROSIMILITUD EN SISTEMAS CON UNA REDUNDANCIA

Figura 2.14. Cociente de verosimilitudes para los sistemas W'_{λ_1} y W'_{λ_2} con componentes exponenciales y distintos valores de sus parámetros. Imagen obtenida de Zhao et al. [37].

Zhao et al. [38] extienden este resultado a los sistemas $W_1^{(n)}$ y $W_2^{(n)}$ con componentes exponenciales dando una ordenación más estricta para éstos que la dada en el Corolario 2.2.11. Por otro lado, You y Li [35] prueban en el siguiente ejemplo, que el resultado no puede extenderse para el caso de distribuciones con funciones de razón de fallo proporcionales. Este mismo ejemplo sirve además, para mostrar un caso donde se verifican las condiciones del Teorema 2.2.10.

Ejemplo XII

Sean los tiempos de vida X_1, X_2 y X independientes con distribución Weibull de parámetros de escala λ_1, λ_2 y λ y común parámetro de forma θ , respectivamente.

Como las funciones de supervivencia de las variables aleatorias Weibull de parámetros λ y θ son $\bar{F}(t) = e^{-\lambda t^\theta}$ para $t \geq 0$, se puede comprobar que las funciones de supervivencia de los sistemas W_1 y W_2 son,

$$\bar{F}_{W_1}(t) = \bar{F}_{X_2}(t)\bar{F}_{X_1+X}(t) = e^{-\lambda_2^\theta t^\theta} \left[e^{-\lambda^\theta t^\theta} + \theta \lambda^\theta \int_0^t x^{\theta-1} e^{-(\lambda_1^\theta (t-x)^\theta) + \lambda^\theta x^\theta} dx \right]$$

$$\bar{F}_{W_2}(t) = \bar{F}_{X_1}(t)\bar{F}_{X_2+X}(t) = e^{-\lambda_1^\theta t^\theta} \left[e^{-\lambda^\theta t^\theta} + \theta \lambda^\theta \int_0^t x^{\theta-1} e^{-(\lambda_2^\theta (t-x)^\theta) + \lambda^\theta x^\theta} dx \right]$$

La figura siguiente muestra el cociente $\bar{F}_{W_1}(t)/\bar{F}_{W_2}(t)$ para los valores de $\lambda_1 = 11 > \lambda_2 = 10, \lambda = 15$ y $\theta = 0.7$.

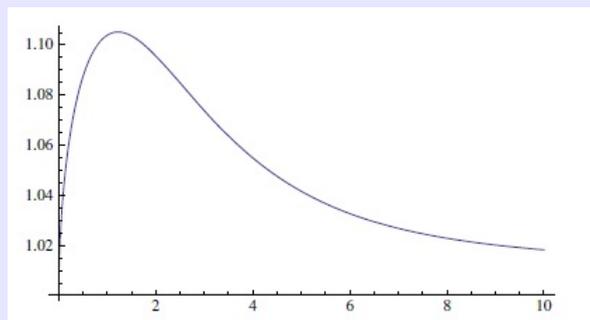


Figura 2.15. Cociente de supervivencias para sistemas W_1 y W_2 con redundancia en espera con componentes Weibull con mismo parámetro de forma. Imagen obtenida de You y Li [35].

Como se puede ver el cociente es creciente hasta $t \approx 1$ y después es decreciente, lo que implica que el orden razón de fallo para ambos sistemas no se cumple, esto

CAPÍTULO 2. REDUNDANCIA EN COMPONENTES PARA LA MEJORA DE SISTEMAS

es, $W_2 \not\leq_{hr} W_1$ ni $W_1 \not\leq_{hr} W_2$, por lo que el orden cociente de verosimilitudes para los sistemas tampoco se verifica.

Por otro lado, por la elección de los parámetros λ_1, λ_2 y θ , se verifica que $\lambda_1^\theta > \lambda_2^\theta$ lo que es condición necesaria para que se cumpla el orden $X_1 \leq_{hr} X_2$ en las componentes. En virtud del Teorema 2.2.10 el orden $W_1' \geq_{st} W_2'$ se mantiene, como se observa en la Figura 2.15, ya que el cociente de las funciones de supervivencia es mayor o igual a 1 para cada $t \geq 0$.

En definitiva, el orden cociente de verosimilitud solamente se ha podido comprobar para casos muy particulares de distribuciones de componentes y de sistemas. Sería de gran interés poder obtener nuevos resultados en esta línea de investigación ya que esta es la ordenación más estricta de todas las consideradas en este estudio.

Capítulo 3

Uso de dos redundancias activas en sistemas k -out of- n

3.1. Introducción

Hasta ahora, hemos estudiado las condiciones necesarias sobre las componentes, y las redundancias para que la aplicación de una única reposición sea lo más conveniente posible en un orden de fiabilidad concreto. En el uso práctico de las redundancias, si disponemos de más de una reposición, nuestra intención siempre será la de colocar las máximas posibles para alargar el tiempo de vida del sistema. Por ejemplo, sean los sistemas U_1 y U_2 , definidos al comienzo del capítulo anterior, estos sistemas disponen de una única redundancia activa uno a uno siendo nuestra intención la de comprobar dónde se coloca esta reposición para prolongar su tiempo de vida. Eliminando la restricción de ubicar solamente una redundancia, el propósito principal recaerá en discutir cómo colocaríamos ambas en el sistema; si Y_1 con X_1 e Y_2 con X_2 o Y_1 con X_2 e Y_2 con X_1 . En este capítulo discutimos cuáles son las condiciones necesarias sobre las componentes y las redundancias para que, al usar más de una redundancia en sentido activo, el tiempo de vida del sistema sea mayor en los órdenes de comparación que hemos definido. Centraremos este estudio únicamente en las redundancias activas. Para la redundancia en espera, se pueden encontrar resultados sobre los sistemas considerados en este capítulo en Misra et al. [23] donde se estudia el orden en preferencia para los sistemas $\wedge(X_1 + Y_2, X_2 + Y_1, X_3, \dots, X_n)$ y $\wedge(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, X_3, \dots, X_n)$. También Zhao et al. [36] estudian el orden en cociente de verosimilitud de los sistemas $\wedge(X_1 + Y_2, X_2 + Y_1)$ y $\wedge(X_1 + Y_1, X_2 + Y_2)$ donde las reposiciones son igualmente distribuidas y todos los tiempos de vida siguen distribuciones exponenciales.

Como notación para el resto del capítulo, usaremos:

- X_1, X_2, \dots, X_n son los tiempos de vida para las componentes. Con funciones de distribución F_1, F_2, \dots, F_n , supervivencia $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, densidad f_1, f_2, \dots, f_n , razón de fallo r_1, r_2, \dots, r_n y razón de fallo inversa $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_n$.
- Las redundancias tendrán tiempos de vida Y_1 e Y_2 . Sus funciones de distribución G_1, G_2 , supervivencia \bar{G}_1, \bar{G}_2 , densidad g_1, g_2 , razón de fallo s_1 y s_2 y razón de fallo inversa \tilde{s}_1 y \tilde{s}_2 , respectivamente.

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K -OUT OF- N

- Si tenemos las variables aleatorias Z_1, Z_2, \dots, Z_n , denotaremos por $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)_{[k]}$ a la k -ésima variable aleatoria resultante de ordenarlas en orden decreciente.
- Denotaremos por $\vee(X, Y) = \max(X, Y)$ al máximo de las variables; y por $\wedge(X, Y) = \min(X, Y)$ al mínimo de éstas.
- Para cualquier par de números p y p^* tomaremos como $p \sqcup p^* = p + (1 - p)p^*$.
- Consideraremos en este capítulo los siguientes sistemas:
 - a) $V_1 = \wedge(\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2))$ y $V_2 = \wedge(\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1))$. Sistema en serie con dos componentes y redundancias activas y reposiciones uno a uno en X_1 y X_2 . En V_1 usamos la redundancia primera en la primera componente [segunda redundancia para segunda componente] y en V_2 usamos la segunda redundancia para la primera componente [primera redundancia en segunda componente].
 - b) $V_1^{(k)} = (\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $V_2^{(k)} = (\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancias activas y reposiciones uno a uno para las dos primeras componentes, para $n \geq 3$ y $2 \leq k \leq n$.
- Representamos las funciones de distribución, densidad, supervivencia, razón de fallo y razón de fallo inversa para cada sistema por $F_{\square}, f_{\square}, \bar{F}_{\square}, r_{\square}$ y \tilde{r}_{\square} , donde en el subíndice pondremos la variable aleatoria a la que se refiere.

Ejemplo XIII

Sean las componentes C_1 y C_2 con tiempos de vida X_1 y X_2 y las redundancias R_1 y R_2 con tiempos de vida Y_1 y Y_2 . Los sistemas V_1 y V_2 definidos anteriormente pueden representarse mediante las siguientes figuras.

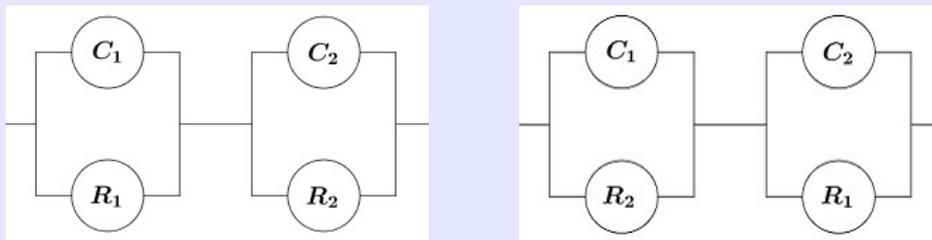


Figura 3.1. Representación gráfica de los sistemas $V_1 = \wedge(\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2))$ y $V_2 = \wedge(\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1))$.

Los resultados centrales que estudiamos en este capítulo se encuentran en los artículos de Romera et al. [27] y Valdés y Zequeira [34]; además incluiremos otros resultados de Valdés et al. [32], Brito et al. [13], Misra et al. [24] y Zhao et al. [36]. En el primero de los artículos, se estudia para qué condiciones de las componentes y redundancias, en los sistemas considerados,

3.2. ORDEN ESTOCÁSTICO Y EN PREFERENCIA PARA SISTEMAS CON DOS O MÁS REDUNDANCIAS ACTIVAS

se conserva el orden estocástico y en preferencia. En el segundo artículo se estudian las condiciones para la conservación del orden en razón de fallo. Seguiremos este mismo orden para la redacción del capítulo presentando los resultados para el orden estocástico y en preferencia, en primera lugar, para después ocuparnos del orden razón de fallo, refiriéndonos siempre a componentes y reposiciones independientes y absolutamente continuas.

3.2. Orden estocástico y en preferencia para sistemas con dos o más redundancias activas

A partir de los resultados del capítulo anterior, la intuición lleva a pensar que, para el orden estocástico para este tipo de doble redundancia, si colocamos la mejor redundancia, estocásticamente en la peor de las componentes, tendremos el orden en los sistemas V_1 y V_2 . En esta ocasión, este resultado sí que es cierto y lo comprobamos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_1 \geq_{st} Y_2$, entonces $V_1 \geq_{st} V_2$.*

Demostración.- De (1.5), las expresiones para las funciones de supervivencia de los sistemas V_1 y V_2 pueden expresarse como,

$$\begin{aligned}\bar{F}_{V_1}(t) &= P(\vee(X_1, Y_1) > t) \cdot P(\vee(X_2, Y_2) > t) \\ &= \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t)F_2(t) + \bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t)F_1(t) + \bar{G}_1(t)\bar{G}_2(t)F_1(t)F_2(t),\end{aligned}\quad (3.1a)$$

y

$$\begin{aligned}\bar{F}_{V_2}(t) &= P(\vee(X_1, Y_2) > t) \cdot P(\vee(X_2, Y_1) > t) \\ &= \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)\bar{G}_1(t)F_2(t) + \bar{F}_2(t)\bar{G}_2(t)F_1(t) + \bar{G}_1(t)\bar{G}_2(t)F_1(t)F_2(t).\end{aligned}\quad (3.1b)$$

La diferencia de ambas expresiones viene dada por,

$$\begin{aligned}\bar{F}_{V_1}(t) - \bar{F}_{V_2}(t) &= \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t)F_2(t) + \bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t)F_1(t) - \bar{F}_1(t)\bar{G}_1(t)F_2(t) - \bar{F}_2(t)\bar{G}_2(t)F_1(t) \\ &= (\bar{G}_1(t) - \bar{G}_2(t))(\bar{F}_2(t) - \bar{F}_1(t)),\end{aligned}\quad (3.2)$$

que es mayor o igual que cero por las hipótesis, lo que implica que $V_1 \geq_{st} V_2$. \square

Observación 3.1. Si las condiciones necesarias del enunciado son cambiadas por $X_1 \geq_{st} X_2$ e $Y_1 \leq_{st} Y_2$, entonces se sigue manteniendo el resultado $V_1 \geq_{st} V_2$ y continuamos usando la mejor componente redundante para la peor componente del sistema, en sentido estocástico. Por otro lado, si las condiciones son, $X_1 \geq_{st} X_2$ e $Y_1 \geq_{st} Y_2$ o $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_1 \leq_{st} Y_2$, sigue siendo cierto el resultado anterior cambiando el orden, $V_1 \leq_{st} V_2$.

Como corolario se deduce que los sistemas en serie de n componentes $V_1^{(n)}$ y $V_2^{(n)}$ también se ordenan estocásticamente bajo las condiciones del teorema anterior.

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K -OUT OF- N

Corolario 3.2.2. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 . Si $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_1 \geq_{st} Y_2$, entonces $V_1^{(n)} \geq_{st} V_2^{(n)}$.

Demostración.- Por (1.5) la supervivencia de los sistemas en serie es el producto de las supervivencias de sus componentes. De este modo, la diferencia entre las fiabilidades de ambos es,

$$\bar{F}_{V_1^{(n)}}(t) - \bar{F}_{V_2^{(n)}}(t) = \bar{F}_{V_1}(t) \prod_{j=3}^n \bar{F}_j(t) - \bar{F}_{V_2}(t) \prod_{j=3}^n \bar{F}_j(t),$$

siendo mayor o igual que cero por las hipótesis, verificándose que $V_1^{(n)} \geq_{st} V_2^{(n)}$. \square

En el Ejemplo IV se dio un contraejemplo de redundancia activa con reposición uno a uno e igualmente distribuida en el cuál el orden estocástico no se cumple para el sistema k -out of- n , en general. Posteriormente, en el Teorema 2.2.8 se dan condiciones necesarias para que este orden sea cierto en dichos sistemas para reposiciones uno a uno no igualmente distribuidas. Cabe preguntar si, bajo las hipótesis de este teorema, ¿obtenemos la ordenación estocástica de $V_1^{(k)}$ y $V_2^{(k)}$? La respuesta a esta pregunta está contenida en el siguiente teorema, junto con las observaciones y corolario posterior, que hemos demostrado y no han sido encontrados en la literatura.

Teorema 3.2.3. Sean X_1, \dots, X_n, Y_1 e Y_2 tiempos de vida independientes. $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$ o $X_1 \geq_{st} X_2$ e $Y_2 \geq_{st} Y_1$, entonces se cumple el orden $V_1^{(k)} \geq_{st} V_2^{(k)}$.

Demostración.- Sea $k = 1$. La diferencia de las funciones de distribución de los sistemas $V_1^{(1)}$ y $V_2^{(1)}$ es igual a cero, ya que ambas son el producto de las funciones de distribución de las componentes X_1, \dots, X_n, Y_1 e Y_2 . Por otro lado, si $k = n$ el resultado viene probado en el Corolario 3.2.2.

Sea entonces $0 < k < n$. De la igualdad (1.4) para supervivencias de sistemas k -out of- n , las funciones de supervivencia para los sistemas $V_1^{(k)}$ y $V_2^{(k)}$ son iguales a, obviando la evaluación en el tiempo t de las funciones,

$$\bar{F}_{V_1^{(k)}}(t) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \geq k}} [\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_1]^{\varepsilon_1} [F_1 G_1]^{1-\varepsilon_1} [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_2]^{\varepsilon_2} [F_2 G_2]^{1-\varepsilon_2} \prod_{j=3}^n \bar{F}_j^{\varepsilon_j} F_j^{1-\varepsilon_j},$$

y

$$\bar{F}_{V_2^{(k)}}(t) = \sum_{\substack{\varepsilon \in \{0,1\}^n \\ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \geq k}} [\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_2]^{\varepsilon_1} [F_1 G_2]^{1-\varepsilon_1} [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_1]^{\varepsilon_2} [F_2 G_1]^{1-\varepsilon_2} \prod_{j=3}^n \bar{F}_j^{\varepsilon_j} F_j^{1-\varepsilon_j}.$$

Calculando la diferencia de las supervivencias anteriores, por el mismo razonamiento del Teorema 2.2.1 para obtener la igualdad (2.3), se tiene,

3.2. ORDEN ESTOCÁSTICO Y EN PREFERENCIA PARA SISTEMAS CON DOS O MÁS REDUNDANCIAS ACTIVAS

$$\begin{aligned} \bar{F}_{V_1^{(k)}}(t) - \bar{F}_{V_2^{(k)}}(t) &= \left([\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_1] [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_2] - [\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_2] [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_1] \right) \sum_{\geq k-2} \\ &+ \left([\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_1] F_2 G_2 + [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_2] F_1 G_1 - [\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_2] F_2 G_1 - [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_1] F_1 G_2 \right) \sum_{\geq k-1} \\ &+ (F_1 G_1 F_2 G_2 - F_2 G_1 F_1 G_2) \sum_{\geq k}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Desarrollando el factor común de cada uno de los tres sumandos, resulta que el primero es igual a $(\bar{G}_1 - \bar{G}_2)(\bar{F}_2 - \bar{F}_1)$ por la demostración del Teorema 3.2.1 y el último igual a cero, trivialmente. Para el segundo factor tenemos la igualdad siguiente,

$$\begin{aligned} &[\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_1] F_2 G_2 + [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_2] F_1 G_1 - [\bar{F}_1 \sqcup \bar{G}_2] F_2 G_1 - [\bar{F}_2 \sqcup \bar{G}_1] F_1 G_2 \\ &= (\bar{F}_1 + F_1 \bar{G}_1) F_2 G_2 + (\bar{F}_2 + F_2 \bar{G}_2) F_1 G_1 - (\bar{F}_1 + F_1 \bar{G}_2) F_2 G_1 - (\bar{F}_2 + F_2 \bar{G}_1) F_1 G_2 \\ &= (\bar{F}_1 - \bar{F}_2)(G_2 - G_1) = -(\bar{G}_1 - \bar{G}_2)(\bar{F}_2 - \bar{F}_1). \end{aligned}$$

Incluyéndolo en la igualdad (3.3) se tiene que,

$$\bar{F}_{V_1^{(k)}}(t) - \bar{F}_{V_2^{(k)}}(t) = (\bar{G}_1 - \bar{G}_2)(\bar{F}_2 - \bar{F}_1) \left[\sum_{\geq k-2} - \sum_{\geq k-1} \right] = (\bar{G}_1 - \bar{G}_2)(\bar{F}_2 - \bar{F}_1) \sum_{=k-2}, \quad (3.4)$$

diferencia mayor o igual que cero por las hipótesis del enunciado, concluyendo la demostración. \square

Observación 3.2. La anterior demostración también es válida para reposiciones de las componentes i e $i+1$, en general, con $i = 1, \dots, n-1$, cumpliendo las hipótesis $X_i \leq_{st} X_{i+1}$ e $Y_{i+1} \leq_{st} Y_i$.

Corolario 3.2.4. Sean X_1, \dots, X_n, Y_1 e Y_2 tiempos de vida independientes cumpliendo $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_1 \leq_{st} Y_2$ o $X_1 \geq_{st} X_2$ e $Y_1 \geq_{st} Y_2$. Entonces se cumple el orden $V_1^{(k)} \leq_{st} V_2^{(k)}$.

Demostración.- La demostración es trivial a partir de la igualdad para la diferencia de las supervivencias dada en (3.4) y las hipótesis. \square

Observación 3.3. Por el Corolario 3.2.4 y la Observación 3.2, podemos deducir que si Y_i e Y_{i+1} son reposiciones uno a uno e igualmente distribuidas y donde las componentes X_i y X_{i+1} están ordenadas estocásticamente en cualquier sentido, entonces, es mayor estocásticamente el sistema $V_2^{(k)}$, donde se intercambian las reposiciones con las componentes.

En el orden estocástico comprobamos que si las componentes y las reposiciones se ordenan en este sentido, entonces, los sistemas en serie de dos componentes, en primer lugar, y, después en general, los sistemas k -out of- n también lo hacen estocásticamente. Cabe preguntarnos ahora

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K-OUT OF-N

si, bajo estas mismas hipótesis, también se cumple el orden en preferencia en los sistemas V_1 y V_2 , y $V_1^{(k)}$ y $V_2^{(k)}$. Comenzamos con la demostración de dos lemas técnicos para la posterior presentación de dos resultados que mostrarán las hipótesis necesarias sobre los tiempos de vida de las componentes y reposiciones para que los sistemas V_1 y V_2 , y $V_1^{(k)}$ y $V_2^{(k)}$, estén ordenados en preferencia. Estos resultados se encuentran en Romera et al. [27].

Lema 3.2.5. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 tiempos de vida independientes. Se cumplen las siguientes equivalencias.

1. $V_1 > V_2$ si, y solo si, una de las dos desigualdades $\vee(X_1, Y_2) < \wedge(X_2, Y_1)$ o $\vee(X_2, Y_1) < \wedge(X_1, Y_2)$ se satisface.

1') $V_2 > V_1$ si, y solo si, una de las dos desigualdades $\vee(X_1, Y_1) < \wedge(X_2, Y_2)$ o $\vee(X_2, Y_2) < \wedge(X_1, Y_1)$ se satisface.

2. Para $n \geq 3$ y $1 < k \leq n$, $V_1^{(k)} > V_2^{(k)}$ si, y solo si, una de las siguientes $2^{\binom{n-2}{k-2}}$ desigualdades excluyentes ocurren:

a) $\vee(X_1, Y_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y_1, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$, o

b) $\vee(X_2, Y_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y_2, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$,

donde los subconjuntos $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$ son disjuntos.

2') Para $n \geq 3$ y $1 < k \leq n$, $V_2^{(k)} > V_1^{(k)}$ si, y solo si, una de las siguientes $2^{\binom{n-2}{k-2}}$ desigualdades excluyentes ocurren:

a) $\vee(X_1, Y_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y_2, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$, o

b) $\vee(X_2, Y_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y_1, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$,

donde los subconjuntos $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$ son disjuntos.

Demostración.- Demostraremos únicamente los apartados 1) y 2) ya que los apartados 1') y 2') se verifican con argumentos análogos.

Para el apartado 1), la condición $V_2 = \wedge(\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1)) < \wedge(\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2)) = V_1$ es equivalente a que se cumpla que al menos una de las dos componentes del sistema V_2 sea menor que las dos componentes del sistema V_1 , es decir, que se verifique,

I) $\vee(X_1, Y_2) < \vee(X_1, Y_1)$ y $\vee(X_1, Y_2) < \vee(X_2, Y_2)$ que es equivalente a $X_1 < X_2, X_1 < Y_1$ e $Y_2 < X_2, Y_2 < Y_1$, o lo que es igual $\vee(X_1, Y_2) < \wedge(X_2, Y_1)$.

II) $\vee(X_2, Y_1) < \vee(X_1, Y_1)$ y $\vee(X_2, Y_1) < \vee(X_2, Y_2)$ que es equivalente a $X_2 < X_1, X_2 < Y_2$ e $Y_1 < X_1, Y_1 < Y_2$, o lo que es igual $\vee(X_2, Y_1) < \wedge(X_1, Y_2)$,

3.2. ORDEN ESTOCÁSTICO Y EN PREFERENCIA PARA SISTEMAS CON DOS O MÁS REDUNDANCIAS ACTIVAS

concluyendo la demostración.

Para demostrar 2), procedemos como en la demostración del Lema 2.3.3 apartado c). Probaremos que $V_1^{(k)} > V_2^{(k)}$ si, y solo si, el sistema

$$\begin{cases} \vee(x_1, y_1) + \vee(x_2, y_2) + x_3 + \dots + x_n \geq k \\ \vee(x_1, y_2) + \vee(x_2, y_1) + x_3 + \dots + x_n \leq k - 1, \end{cases}$$

tiene solución.

Por un lado, si $\vee(x_1, y_2) = \vee(x_2, y_1) = 1$, en la segunda desigualdad se ha de verificar que $\sum_{i=3}^n x_i \leq k - 3$, lo que implica que la desigualdad primera no se pueda satisfacer. Por otro lado, si $\vee(x_1, y_2) = \vee(x_2, y_1) = 0$, entonces $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$ lo que lleva a las desigualdades contradictorias $\sum_{i=3}^n x_i \leq k - 1$ y $\sum_{i=3}^n x_i \geq k$.

Si ahora suponemos $\vee(x_1, y_2) \neq \vee(x_2, y_1)$, para ambos casos, $\vee(x_1, y_2) > \vee(x_2, y_1)$ o $\vee(x_1, y_2) < \vee(x_2, y_1)$, de la desigualdad segunda $\sum_{i=3}^n x_i \leq k - 2$, se obtiene el sistema de desigualdades,

$$\begin{cases} \vee(x_1, y_1) + \vee(x_2, y_2) + x_3 + \dots + x_n \geq k \\ -x_3 - \dots - x_n \geq 2 - k, \end{cases}$$

que sumando ambas, $\vee(x_1, y_1) + \vee(x_2, y_2) = 2$ y, por tanto, $\sum_{i=3}^n x_i = k - 2$.

Las $\binom{n-2}{k-2}$ soluciones de esta ecuación última son de la forma $x_{j_1} = \dots = x_{j_{n-k}} = 0$ y $x_{i_1} = \dots = x_{i_{k-2}} = 1$ donde los subconjuntos $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}, \{i_1, \dots, i_{k-2}\} \subseteq \{3, \dots, n\}$ son disjuntos.

En resumen, $V_1^{(k)} > V_2^{(k)}$ si, y solo si, se verifica una de las $2\binom{n-2}{k-2}$ condiciones excluyentes,

1. $\vee(x_1, y_2) = 1, \vee(x_2, y_1) = 0$ y $\sum_{i=3}^n x_i = k - 2$, equivalente a

$$\vee(X_2, Y_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y_2, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}}).$$

2. $\vee(x_1, y_2) = 0, \vee(x_2, y_1) = 1$ y $\sum_{i=3}^n x_i = k - 2$, equivalente a

$$\vee(X_1, Y_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y_1, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}}).$$

Concluyendo así la demostración. □

Lema 3.2.6. Sean X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1 y Z_2 tiempos de vida independientes. Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ e $Y_2 \leq_{hr} Y_1$, entonces:

a)

$$\begin{aligned} P(\vee(X_1, Y_2) < \wedge(X_2, Y_1) \text{ o } \vee(X_2, Y_1) < \wedge(X_1, Y_2)) \\ \geq P(\vee(X_1, Y_1) < \wedge(X_2, Y_2) \text{ o } \vee(X_2, Y_2) < \wedge(X_1, Y_1)). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(\vee(X_1, Y_2, Z_1) < \wedge(X_2, Y_1, Z_2) \text{ o } \vee(X_2, Y_1, Z_1) < \wedge(X_1, Y_2, Z_2)) \\ \geq P(\vee(X_1, Y_1, Z_1) < \wedge(X_2, Y_2, Z_2) \text{ o } \vee(X_2, Y_2, Z_1) < \wedge(X_1, Y_1, Z_2)). \end{aligned}$$

Demostración.- A partir de las hipótesis de continuidad de los tiempos de vida, y $X_1 \leq_{hr} X_2$ si $0 \leq b \leq a$ entonces $\bar{F}_2(b)\bar{F}_1(a) \leq \bar{F}_2(a)\bar{F}_1(b)$, y por otro lado, las razones de fallo de los tiempos de vida X_1 y X_2 han de cumplir la desigualdad $f_1(t)\bar{F}_2(t) \geq f_2(t)\bar{F}_1(t) \forall t \geq 0$. De estas dos condiciones, para los valores $0 \leq b \leq a$, se satisfacen las dos desigualdades siguientes:

$$f_1(b)\bar{F}_2(a) \geq f_2(b)\bar{F}_1(a) \quad (3.5a)$$

y

$$g_2(b)\bar{G}_1(a) \geq g_1(b)\bar{G}_2(a), \quad (3.5b)$$

siendo la segunda cierta por la hipótesis $Y_2 \leq_{hr} Y_1$.

Para demostrar la primera desigualdad comprobemos que la diferencia es mayor o igual a cero. Dicha diferencia, al ser sucesos disjuntos, viene dada por,

$$\begin{aligned} \Delta &= P(\vee(X_1, Y_2) < \wedge(X_2, Y_1)) + P(\vee(X_2, Y_1) < \wedge(X_1, Y_2)) \\ &\quad - P(\vee(X_1, Y_1) < \wedge(X_2, Y_2)) - P(\vee(X_2, Y_2) < \wedge(X_1, Y_1)) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_1(\vee(x, y))\bar{F}_2(\vee(x, y))f_1(x)g_2(y)dx dy \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_2(\vee(x, y))\bar{F}_1(\vee(x, y))f_2(x)g_1(y)dx dy \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_2(\vee(x, y))\bar{F}_2(\vee(x, y))f_1(x)g_1(y)dx dy \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_1(\vee(x, y))\bar{F}_1(\vee(x, y))f_2(x)g_2(y)dx dy. \end{aligned}$$

Δ es mayor o igual que cero si se cumple la desigualdad,

$$\begin{aligned} \bar{G}_1(\vee(x, y))\bar{F}_2(\vee(x, y))f_1(x)g_2(y) + \bar{G}_2(\vee(x, y))\bar{F}_1(\vee(x, y))f_2(x)g_1(y) \\ \geq \bar{G}_2(\vee(x, y))\bar{F}_2(\vee(x, y))f_1(x)g_1(y) + \bar{G}_1(\vee(x, y))\bar{F}_1(\vee(x, y))f_2(x)g_2(y), \end{aligned}$$

que es equivalente a probar que es mayor o igual que cero,

$$[g_2(y)\bar{G}_1(\vee(x, y)) - g_1(y)\bar{G}_2(\vee(x, y))] [\bar{F}_2(\vee(x, y))f_1(x) - \bar{F}_1(\vee(x, y))f_2(x)],$$

siendo este producto positivo por las desigualdades (3.5a) y (3.5b).

3.2. ORDEN ESTOCÁSTICO Y EN PREFERENCIA PARA SISTEMAS CON DOS O MÁS REDUNDANCIAS ACTIVAS

Para demostrar el apartado b) procedemos de manera análoga que en el anterior, denotando por H_1 y H_2 las distribuciones de Z_1 y Z_2 respectivamente. Sea Δ la diferencia de las probabilidades que, por ser sucesos disjuntos, podemos expresarla como,

$$\begin{aligned} \Delta &= P(\vee(X_1, Y_2, Z_1) < \wedge(X_2, Y_1, Z_2)) + P(\vee(X_2, Y_1, Z_1) < \wedge(X_1, Y_2, Z_2)) \\ &\quad - P(\vee(X_1, Y_1, Z_1) < \wedge(X_2, Y_2, Z_2)) - P(\vee(X_2, Y_2, Z_1) < \wedge(X_1, Y_1, Z_2)) = \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_1(\vee(x, y, z)) \bar{F}_2(\vee(x, y, z)) f_1(x) g_2(y) dx dy dH_1(z) \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_2(\vee(x, y, z)) \bar{F}_1(\vee(x, y, z)) f_2(x) g_1(y) dx dy dH_1(z) \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_2(\vee(x, y, z)) \bar{F}_2(\vee(x, y, z)) f_1(x) g_1(y) dx dy dH_1(z) \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \bar{G}_1(\vee(x, y, z)) \bar{F}_1(\vee(x, y, z)) f_2(x) g_2(y) dx dy dH_1(z). \end{aligned}$$

Para ver que Δ es mayor o igual que cero es suficiente con probar que la siguiente desigualdad es cierta,

$$\begin{aligned} &\bar{G}_1(\vee(x, y, z)) \bar{F}_2(\vee(x, y, z)) f_1(x) g_2(y) + \bar{G}_2(\vee(x, y, z)) \bar{F}_1(\vee(x, y, z)) f_2(x) g_1(y) \\ &\geq \bar{G}_2(\vee(x, y, z)) \bar{F}_2(\vee(x, y, z)) f_1(x) g_1(y) + \bar{G}_1(\vee(x, y, z)) \bar{F}_1(\vee(x, y, z)) f_2(x) g_2(y), \end{aligned}$$

que es equivalente al producto,

$$[g_2(y) \bar{G}_1(\vee(x, y, z)) - g_1(y) \bar{G}_2(\vee(x, y, z))] [\bar{F}_2(\vee(x, y, z)) f_1(x) - \bar{F}_1(\vee(x, y, z)) f_2(x)]$$

siendo éste mayor o igual que cero por (3.5a) y (3.5b), completándose la demostración. \square

Teorema 3.2.7. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 tiempos de vida independientes Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ e $Y_2 \leq_{hr} Y_1$, entonces,

a) $V_1 \geq_{pr} V_2$.

b) $V_1^{(k)} \geq_{pr} V_2^{(k)}$.

Demostración.-

a) Por el Lema 3.2.5, 1) y 1'), la condición $V_1 \geq_{pr} V_2$ es equivalente a

$$\begin{aligned} &P(\vee(X_1, Y_2) < \wedge(X_2, Y_1) \text{ o } \vee(X_2, Y_1) < \wedge(X_1, Y_2)) \\ &\geq P(\vee(X_1, Y_1) < \wedge(X_2, Y_2) \text{ o } \vee(X_2, Y_2) < \wedge(X_1, Y_1)), \end{aligned}$$

que por el Lema 3.2.6 a), bajo las hipótesis del enunciado, sabemos que se cumple.

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K -OUT OF- N

b) Por el Lema 3.2.5, 2) y 2'), la condición $V_1^{(k)} \geq_{pr} V_2^{(k)}$ es equivalente a que se cumplan las $2 \binom{n-2}{k-2}$ situaciones siguientes:

$$\begin{aligned} & P(\vee(X_1, Y_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y_1, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}}) \text{ o} \\ & \quad \vee(X_2, Y_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y_2, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})) \\ & \geq P(\vee(X_1, Y_1, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_2, Y_2, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}}) \text{ o} \\ & \quad \vee(X_2, Y_2, X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}}) < \wedge(X_1, Y_1, X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})). \end{aligned}$$

Definiendo por $Z_1 = \vee(X_{j_1}, \dots, X_{j_{n-k}})$ y $Z_2 = \wedge(X_{i_1}, \dots, X_{i_{k-2}})$ junto con las hipótesis del enunciado y el Lema 3.2.6 apartado b), esta desigualdad es cierta y se completa la demostración. □

Como se indica en Romera et al. [27] este resultado tiene como significado práctico que si introducimos dos redundancias en las componentes primeras de un sistema k -out of- n y se ordenan en sentido razón de fallo $X_1 \leq_{hr} X_2$ e $Y_2 \leq_{hr} Y_1$, entonces es mejor, en sentido probabilístico, asignar la mejor redundancia a la peor de las componentes.

Valdés et al. [32] muestran que si el orden de las componentes y redundancias en el teorema anterior es en razón de fallo inverso, también se verifica el orden en preferencia de los sistemas $V_1, V_2, V_1^{(n)}$ y $V_2^{(n)}$ como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.8. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 tiempos de vida independientes. Si $X_1 \leq_{rh} X_2$ e $Y_2 \leq_{rh} Y_1$, entonces,

1. $V_1 \geq_{pr} V_2$.
2. $V_1^{(n)} \geq_{pr} V_2^{(n)}$.

Demostración.- Demostraremos el apartado 2), ya que el apartado 1) se prueba con argumentos análogos. De forma similar a la obtención de las desigualdades (3.5a) y (3.5b), por las hipótesis de continuidad de los tiempos de vida y por ser $X_1 \leq_{rh} X_2$ e $Y_2 \leq_{rh} Y_1$ se cumplen las desigualdades,

$$f_1(b)F_2(a) \geq f_2(b)F_1(a) \tag{3.6a}$$

y

$$g_2(b)G_1(a) \geq g_1(b)G_2(a), \tag{3.6b}$$

para todos los valores $0 \leq b \leq a$.

Por otro lado, se comprueba de igual manera que en el Lema 3.2.6, que la diferencia $P(V_1^{(n)} > V_2^{(n)}) - P(V_2^{(n)} > V_1^{(n)})$ es mayor o igual que cero si se cumple la desigualdad,

3.2. ORDEN ESTOCÁSTICO Y EN PREFERENCIA PARA SISTEMAS CON DOS O MÁS REDUNDANCIAS ACTIVAS

$$[g_2(y)G_1(\vee(x,y,z)) - g_1(y)G_2(\vee(x,y,z))] [F_2(\vee(x,y,z))f_1(x) - F_1(\vee(x,y,z))f_2(x)] \geq 0,$$

que es cierta por (3.6a) y (3.6b). \square

Si consideramos las reposiciones uno a uno e igualmente distribuidos, entonces si se ordenan las componentes en razón de fallo o razón de fallo inverso también se ordenan en preferencia los sistemas $V_1^{(n)}$ y $V_2^{(n)}$, como vemos en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.9. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 tiempos de vida independientes, donde $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si $X_1 \leq_{hr} [\leq_{rh}] X_2$ o $X_2 \leq_{hr} [\leq_{rh}] X_1$, entonces $V_1^{(n)} \leq_{pr} V_2^{(n)}$.

Demostración.- La demostración se obtiene a partir de las igualdades estocásticas de las componentes y las redundancias, el orden razón fallo [razón de fallo inverso] de éstas y los Teoremas 3.2.7 y 3.2.8. \square

En el siguiente ejemplo, propuesto por Valdés et al. [32], se muestran condiciones necesarias y suficientes para que los sistemas V_1 y V_2 se ordenen en preferencia para componentes y redundancias con distribuciones exponenciales.

Ejemplo XIV

Consideremos las componentes X_1, X_2 y las redundancias Y_1 e Y_2 con distribuciones exponenciales de medias $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, 1/\mu_1$ y $1/\mu_2$, respectivamente, formando los sistemas V_1 y V_2 . Se comprueba que las probabilidades $P(V_1 > V_2)$ y $P(V_2 > V_1)$ son iguales a,

$$P(V_1 > V_2) = \frac{\lambda_1 \mu_2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)(\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{\lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)}$$

$$P(V_2 > V_1) = \frac{\lambda_1 \mu_1}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)} + \frac{\lambda_2 \mu_2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)(\lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)}$$

Tras transformaciones obtenemos que $P(V_1 > V_2) - P(V_2 > V_1) \geq 0$ si, y solo si,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \mu_1)(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + \mu_2)^2 \geq 0$$

Así, si $\lambda_1 \geq \lambda_2, X_1 \leq_{hr} [\leq_{rh}] X_2$ y $\mu_2 \geq \mu_1, Y_2 \leq_{hr} [\leq_{rh}] Y_1$ entonces $V_1 \geq_{pr} V_2$. Este resultado cumple las hipótesis del Teorema 3.2.7 [y teorema anterior]. Las condiciones $\lambda_1 \geq \lambda_2$ y $\mu_2 \geq \mu_1$ son también suficientes, lo que permite caracterizar el orden en preferencia de los sistemas V_1 y V_2 a partir del orden de las componentes y redundancias con distribuciones exponenciales.

En los Teoremas 3.2.8 y 3.2.7 se dan condiciones para las que los sistemas $V_1^{(n)}$ y $V_2^{(n)}$ se ordenen en preferencia a partir del orden en razón de fallo o razón de fallo inverso de las componentes y reposiciones. Misra et al. [24] prueban el siguiente teorema en el que se dan ocho

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K -OUT OF- N

condiciones menos restrictivas que las de los teoremas anteriores y bajo las cuales, se sigue manteniendo el orden $V_1^{(n)} \geq_{pr} V_2^{(n)}$. La demostración se omite por su extensión y complejidad.

Teorema 3.2.10. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 tiempos de vida independientes. Si se verifica una de las siguientes condiciones,

- a) $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} X_1 \leq_{st} Y_1$,
- b) $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} X_2 \leq_{st} Y_1$,
- c) $X_1 \leq_{st} X_2$, $X_1 \leq_{st} Y_1$ e $Y_2 \leq_{hr} Y_1$,
- d) $X_1 \leq_{st} X_2$, $Y_2 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{rh} Y_1$,
- e) $X_2 \leq_{st} X_1$ e $Y_1 \leq_{st} X_2 \leq_{st} Y_2$,
- f) $X_2 \leq_{st} X_1$ e $Y_1 \leq_{st} X_1 \leq_{st} Y_2$,
- g) $X_2 \leq_{st} X_1$, $X_2 \leq_{st} Y_2$ e $Y_1 \leq_{hr} Y_2$, o
- h) $X_2 \leq_{st} X_1$, $Y_1 \leq_{st} X_1$ e $Y_1 \leq_{rh} Y_2$,

entonces, $V_1^{(n)} \geq_{pr} V_2^{(n)}$.

A partir del Teorema 3.2.10 y teniendo en cuenta el Corolario 3.2.9 para las reposiciones uno a uno e igualmente distribuidas, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2.11. Sean $X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1$ e Y_2 tiempos de vida independientes, donde $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ o $X_2 \leq_{st} X_1$, entonces $V_1^{(n)} \leq_{pr} V_2^{(n)}$.

Este último teorema y posterior corolario rebajan las condiciones necesarias sobre los órdenes de las componentes y redundancias planteadas en los Teoremas 3.2.8 y 3.2.7. En resumen, son necesarios los órdenes estocásticos de las componentes y redundancias para poder asegurar la ordenación estocástica y en preferencia de los sistemas $V_1, V_2, V_1^{(n)}$ y $V_1^{(n)}$.

3.3. Orden razón de fallo y razón de fallo inverso en sistemas con dos redundancias

El estudio del orden razón de fallo y razón de fallo inverso en sistemas donde son usadas más de una redundancia puede ser visto en Valdés y Zequeira [34], Valdés et al. [32] y Misra et al. [24]. En este primero se desarrollan resultados para los sistemas V_1 y V_2 donde las redundancias son del tipo uno a uno e igualmente distribuidas y las componentes tienen distribuciones continuas. En el segundo se dan resultados análogos para el orden razón de fallo inverso mientras que Misra et al. [24] estudian nuevas condiciones para que se cumpla el orden $V_1 \leq_{hr} V_2$. Asumiremos, a partir de ahora, que $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$ y que son tiempos de vida continuos. Por el Teorema 3.2.1, y la posterior Observación 3.1, si las componentes se ordenan

3.3. ORDEN RAZÓN DE FALLO Y RAZÓN DE FALLO INVERSO EN SISTEMAS CON DOS REDUNDANCIAS

estocásticamente, entonces $V_1 \leq_{st} V_2$. Es de interés ver bajo qué condiciones de orden en las componentes se mantiene $V_1 \leq_{hr} V_2$.

El primer resultado técnico, de Valdés y Zequeira [34] ayudará a conocer la expresión para el valor de la razón de fallo de cada sistema en las suposiciones anteriores.

Lema 3.3.1. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Las razones de fallo de los sistemas V_1 y V_2 cumplen las igualdades,

$$r_{V_1}(t) = \frac{2r_1(t)F_1(t)}{1+F_1(t)} + \frac{2r_2(t)F_2(t)}{1+F_2(t)} \quad (3.7a)$$

y

$$r_{V_2}(t) = \frac{2r_1(t)F_2(t)\bar{F}_1(t)}{1-F_1(t)F_2(t)} + \frac{2r_2(t)F_1(t)\bar{F}_2(t)}{1-F_2(t)F_1(t)} \quad (3.7b)$$

Demostración.- Reescribiendo las funciones de supervivencia para ambos sistemas dadas en (3.1a) y (3.1b),

$$\bar{F}_{V_1}(t) = (1-F_1(t)F_1(t))(1-F_2(t)F_2(t)) = (1-F_1^2(t))(1-F_2^2(t)) \quad (3.8)$$

y

$$y, \bar{F}_{V_2}(t) = (1-F_1(t)F_2(t))(1-F_2(t)F_1(t)) = (1-F_1(t)F_2(t))^2, \quad (3.9)$$

y usando (1.1) se obtienen las expresiones para las razones de fallo del enunciado. \square

Lema 3.3.2. Se verifica que $\sup[x^y - yx - 2(1-y)] \leq 0$ para los valores de $0 \leq x \leq 1$ y $0 < y \leq 1$.

Demostración.- Denotamos por $h(x) = x^y - yx - 2(1-y)$. Para $x = 0$, $h(0) = -2(1-y)$ es menor o igual que cero si $0 < y \leq 1$. Supongamos que $0 < x \leq 1$, entonces $h'(x) = yx^{y-1} - y = y(x^{y-1} - 1)$ es mayor o igual que cero si $0 < y \leq 1$. Por ello, la función h es estrictamente creciente en el intervalo $x \in (0, 1]$ y su máximo para $0 \leq x \leq 1$ se encuentra en el punto $x = 1$, siendo su imagen, $h(1) = -(1-y)$ menor o igual que cero y concluyendo la demostración. \square

El siguiente teorema prueba que, si la primera componente es menor en orden razón de fallo que la segunda y el cociente $\alpha(t) = r_2(t)/r_1(t)$ con $r_1(t) > 0$ para cada $t > 0$ es no creciente, entonces los sistemas V_1 y V_2 se ordenan en razón de fallo.

Teorema 3.3.3. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Sea $r_2(t) > 0$ para $t > 0$, $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $\alpha(t)$ no creciente. Entonces $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Demostración.- Para $t = 0$ es claro que $r_{V_1}(0) = r_{V_2}(0) = 0$ por las expresiones (3.7a) y (3.7b) del Lema 3.3.1. Sea, por tanto, $t > 0$ y la desigualdad $r_{V_1}(t) \geq r_{V_2}(t)$, equivalente a,

$$r_1(t) \left(\frac{F_1(t)}{1+F_1(t)} - \frac{F_2(t)\bar{F}_1(t)}{1-F_1(t)F_2(t)} \right) \geq r_2(t) \left(\frac{F_1(t)\bar{F}_2(t)}{1-F_2(t)F_1(t)} - \frac{F_2(t)}{1+F_2(t)} \right),$$

que, a su vez, es equivalente a,

$$\begin{aligned} & \frac{r_1(t)}{1+F_1(t)} [F_1(t) - F_2(t) + F_1(t)F_2(t)(1 - F_1(t) - (1 - F_1(t)))] \\ & \geq \frac{r_2(t)}{1+F_2(t)} [F_1(t) - F_2(t) - F_1(t)F_2(t)(1 - F_2(t) - (1 - F_2(t)))] , \end{aligned}$$

que equivale a la desigualdad,

$$\boxed{\frac{1+F_2(t)}{1+F_1(t)} \geq \frac{r_2(t)}{r_1(t)} = \alpha(t)} \quad \forall t > 0. \quad (3.10)$$

En resumen, la condición $r_{V_1}(t) \geq r_{V_2}(t)$ es cierta si, y solo si, se cumple $2 - \bar{F}_2(t) \geq (2 - \bar{F}_1(t))\alpha(t)$, o la desigualdad equivalente a esta última,

$$\boxed{\bar{F}_2(t) - \alpha(t)\bar{F}_1(t) - 2(1 - \alpha(t)) \leq 0} \quad \forall t > 0. \quad (3.11)$$

Veamos que la desigualdad (3.11) es cierta. Del Teorema 1.1.3 de caracterización de las funciones de supervivencia por la razón de fallo y por ser la función $\alpha(t)$ no creciente, se cumple la desigualdad,

$$\bar{F}_2(t) = e^{-\int_0^t r_2(x)dx} = e^{-\int_0^t \alpha(x)r_1(x)dx} \leq e^{-\alpha(t)\int_0^t r_1(x)dx} = \bar{F}_1(t)^{\alpha(t)},$$

y si se cumple que $\bar{F}_1(t)^{\alpha(t)} - \alpha(t)\bar{F}_1(t) - 2(1 - \alpha(t))$ es menor o igual a cero, la condición (3.11) sería cierta. Por el Lema 3.3.2, siendo $0 \leq x = \bar{F}_1(t) \leq 1$ y $0 < y = \alpha(t) \leq 1$, esta desigualdad se cumple concluyéndose la demostración. \square

Valdés et al. [32], en las mismas condiciones que el teorema anterior, prueban que si cambiamos el orden razón de fallo de las componentes por el orden razón de fallo inverso y $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{r}_2(t)/\tilde{r}_1(t)$ es no creciente, entonces obtenemos el orden razón de fallo inverso de los sistemas V_1 y V_2 , como se comprueba en el siguiente teorema. La demostración es análoga a la del teorema anterior.

Teorema 3.3.4. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si $X_1 \leq_{rh} X_2$ y $\tilde{\alpha}(t)$ no creciente, entonces $V_1 \leq_{rh} V_2$.

En la siguiente teorema veremos que se sigue manteniendo el mismo resultado aún relajando la condición de no crecimiento de la función $\alpha(t)$.

Teorema 3.3.5. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Sea $r_2(t) > 0$ para $t > 0$ y $m = \inf_{t>0} \alpha(t)$. Si $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $\alpha(t) \leq (m+1)/2$, entonces $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Demostración.- La prueba se sigue de manera análoga al Teorema 3.3.3 anterior hasta la equivalencia (3.11) para la desigualdad $r_{V_1}(t) \geq r_{V_2}(t)$. En este caso, por el Teorema 1.1.3 y la definición de m se obtiene la desigualdad,

3.3. ORDEN RAZÓN DE FALLO Y RAZÓN DE FALLO INVERSO EN SISTEMAS CON DOS REDUNDANCIAS

$$\bar{F}_2(t) = e^{-\int_0^t r_2(x)dx} = e^{-\int_0^t \alpha(x)r_1(x)dx} \leq e^{-m\int_0^t r_1(x)dx} = \bar{F}_1(t)^m$$

siendo la condición (3.11) cierta si $\bar{F}_1(t)^m - m\bar{F}_1(t) - 2(1 - \alpha(t)) \leq 0$ para $t > 0$.

Para comprobar esta desigualdad, consideremos la función $h(x) = x^m - mx - 2(1 - y)$ con $0 \leq x \leq 1$, $0 < y, m \leq 1$. Si $m = 1$, $h(x) = -2(1 - y) \leq 0$ por ser $0 < y \leq 1$. Supongamos que $0 < m < 1$, la función $h(x)$ cumple,

1. $h(0) = -2(1 - y)$ menor o igual que cero para cada valor de $0 < y \leq 1$.
2. $h(1) = 1 - m - 2(1 - y)$ menor o igual que cero para cada valor de $0 < y, m \leq 1$, y, además, $h(0) < h(1)$.
3. $h'(x) = mx^{m-1} - m = m(x^{m-1} - 1)$ que es positivo para cualquier valor de $0 \leq x \leq 1$ y $0 < m \leq 1$,

por lo que la función $h(x)$ es creciente y su máximo se encuentra en $x = 1$ cuya imagen es $h(1) = 1 - m - 2(1 - y)$.

Sean ahora $0 \leq x = \bar{F}_1(t) \leq 1$, $0 < y = \alpha(t) \leq 1$ y $m = \inf_{t>0} \alpha(t)$. El máximo de la función $h(\bar{F}_1(t))$ tiene como imagen $1 - m - 2(1 - \alpha(t))$ que es negativo por la condición de la hipótesis del enunciado $\alpha(t) \leq (m + 1)/2$. Por lo tanto, $h(\bar{F}_1(t)) = \bar{F}_1(t)^m - m\bar{F}_1(t) - 2(1 - \alpha(t))$ es menor o igual que cero para cada $t > 0$, concluyéndose la demostración. \square

Ejemplo xv

Como se comprueba en el Ejemplo VIII, para componentes X_1 y X_2 con razones de fallo lineales $r_1(t) = at + b$ y $r_2(t) = ct + d$, las condiciones $a \geq c > 0$ y $b \geq d > 0$ aseguran que $r_1(t), r_2(t) > 0$ y $X_1 \leq_{hr} X_2$. Por otro lado, la condición, $ad - cb \geq 0$ implica que la función $\alpha(t)$ sea no creciente. En virtud del Teorema 3.3.3 se asegura el orden razón de fallo $V_1 \leq_{hr} V_2$.

En segundo lugar, en el Ejemplo IX, para las componentes con razones de fallo $r_1(t) = 100t + 10$ y $r_2(t) = 58t + 3$, la segunda condición no se cumple, por lo que no podemos asegurar el orden razón de fallo en los sistemas por el Teorema 3.3.3. En esta ocasión, el ínfimo de $\alpha(t)$ es $m = 0.3$ y el supremo es $s = 0.58$, por lo que $\alpha(t) \leq 0.58$ para cada $t > 0$. Entonces, la siguiente cadena de desigualdades es cierta,

$$\alpha(t) \leq 0.58 < 0.65 = \frac{0.3 + 1}{2} = \frac{m + 1}{2} \quad \forall t > 0,$$

que, en virtud del Teorema 3.3.5 asegura que $V_1 \leq_{hr} V_2$.

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K-OUT OF-N

Denotemos por $g(t) = \frac{1+F_2(t)}{1+F_1(t)}$; es claro que esta función es continua, $g(0) = 1$ y que su límite cuando t tiende a más infinito es 1; además, suponiendo que $X_1 \leq_{st} X_2$ podemos asegurar que $0 < g(t) \leq 1$ para cada $t \geq 0$ y que presentará un mínimo absoluto en el intervalo $[0, +\infty)$ al cuál vamos a denotar por ϑ . En estas condiciones, por la equivalencia (3.10) para la desigualdad $r_{V_1}(t) \geq r_{V_2}(t)$ comprobada en la demostración del Teorema 3.3.3, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.3.6. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Sea $r_1(t) > 0$ y $r_2(t) > 0$ para $t > 0$, $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\alpha(t) \leq \vartheta$ para todo $t \geq 0$, entonces $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Demostración.- La demostración es inmediata a partir de la equivalencia (3.10), de la definición de ϑ y las hipótesis.

$$\frac{1 + F_2(t)}{1 + F_1(t)} \geq \vartheta \geq \alpha(t) \quad \forall t \geq 0.$$

□

Ejemplo XVI

Valdés y Zequeira [34] proponen como ejemplo para mostrar la eficiencia del Teorema 3.3.6 los sistemas V_1 y V_2 cuyas componentes tienen razones de fallo $r_1(t) = 5t + 2$ y $r_2(t) = 4t + 1$. Claramente, $r_1(t) \geq r_2(t)$ lo que implica el orden $X_1 \leq_{hr} X_2$ ($X_1 \leq_{st} X_2$) y que $r_1(t), r_2(t) > 0$ para cada $t \geq 0$.

Para este caso, la función $\alpha(t)$ es estrictamente creciente, $ad - cb = 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2$, menor que cero, lo que impide aplicar el Teorema 3.3.3 para asegurar el orden de los sistemas. Por otro lado, el ínfimo de la función $\alpha(t)$ se alcanza en $m = \frac{1}{2}$ y el supremo para esta función es $s = \frac{4}{5}$. La condición de $\alpha(t) \leq \frac{m+1}{2} = \frac{3}{4}$ para comprobar el orden $V_1 \leq_{hr} V_2$ mediante el Teorema 3.3.5 tampoco es válida. Para $t = 3$, $\alpha(3) = \frac{13}{17} > \frac{3}{4}$, por lo que no se cumplen todas las hipótesis de este teorema.

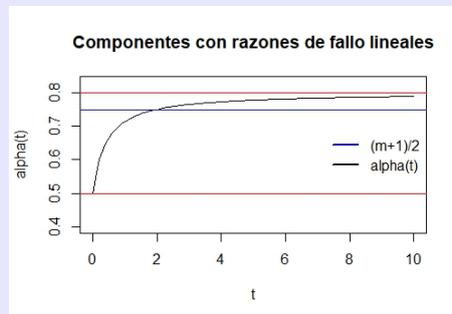


Figura 3.2. Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 5t + 2$ y $r_2(t) = 4t + 1$.

3.3. ORDEN RAZÓN DE FALLO Y RAZÓN DE FALLO INVERSO EN SISTEMAS CON DOS REDUNDANCIAS

Por el Teorema 1.1.3 las funciones de supervivencia de las componentes son,

$$\bar{F}_1(t) = e^{-\int_0^t 5x+2dx} = e^{-(\frac{5}{2}t^2+2t)} \text{ y } \bar{F}_2(t) = e^{-\int_0^t 4x+1dx} = e^{-(2t^2+t)},$$

y la función

$$g(t) = \frac{1 + F_2(t)}{1 + F_1(t)} = \frac{2 - \bar{F}_2(t)}{2 - \bar{F}_1(t)} = \frac{2 - e^{-(2t^2+t)}}{2 - e^{-(\frac{5}{2}t^2+2t)}}.$$

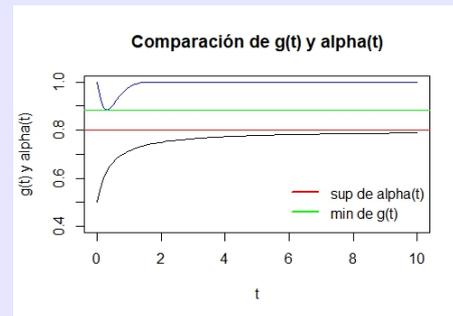
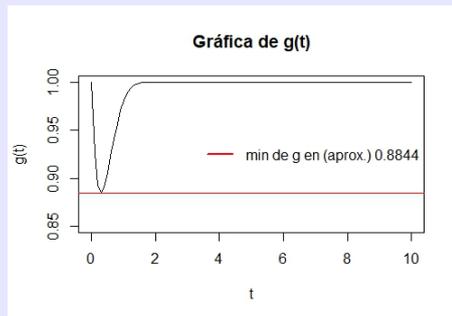


Figura 3.3. Representación del cociente de razones de fallo para componentes con razones de fallo lineales $r_1(t) = 100t + 10$ y $r_2(t) = 58t + 3$ en comparación con la función $g(t) = \frac{1+F_2(t)}{1+F_1(t)} = \frac{2-\bar{F}_2(t)}{2-\bar{F}_1(t)}$.

El mínimo de la función $g(t)$ se encuentra en $g(\bar{t}) \approx 0.88$. Se obtiene así la cadena de desigualdades,

$$g(t) \geq g(\bar{t}) \approx 0.88 > 0.8 = \frac{4}{5} = s \geq \alpha(t),$$

para cada $t \geq 0$, por lo que podemos asegurar, en virtud del Teorema 3.3.6, que se verifica el orden $V_1 \leq_{hr} V_2$. (Véase Apéndice A para detalles en los cálculos).

Misra et al. [24] demuestran a su vez que la condición

$$\alpha(t) \leq \vartheta = \min_{t>0} \frac{1 + F_2(t)}{1 + F_1(t)},$$

del Teorema 3.3.6, puede ser reemplazada por $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ cumpliéndose también el orden $V_1 \leq_{hr} V_2$, como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 3.3.7. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ y $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ para todo $t \geq 0$, entonces $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Demostración.- Por (3.8) y (3.9) el cociente de las supervivencias de los sistemas V_2 y V_1 viene dada por,

$$\phi(t) = \frac{(1 - F_1(t)F_2(t))^2}{(1 - F_1^2(t))(1 - F_2^2(t))} = 1 + \frac{(F_1(t) - F_2(t))^2}{(1 - F_1^2(t))(1 - F_2^2(t))}.$$

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K -OUT OF- N

Se verificará que $V_1 \leq_{hr} V_2$ si la función $\phi(t)$ es creciente. Derivando su expresión se comprueba que el numerador de la misma, es igual a,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &\stackrel{sgn}{=} 2(F_1(t) - F_2(t))(f_1(t) - f_2(t))(1 - F_1^2(t))(1 - F_2^2(t)) \\ &\quad + 2(f_1(t)F_1(t)(1 - F_2^2(t)) + f_2(t)F_2(t)(1 - F_1^2(t)))(F_1(t) - F_2(t))^2 \\ &= 2f_1(t)(1 - F_1(t)F_2(t))(1 - F_2^2(t))(F_1(t) - F_2(t)) \\ &\quad - 2f_2(t)(1 - F_1(t)F_2(t))(1 - F_1^2(t))(F_1(t) - F_2(t)) \\ &\stackrel{sgn}{=} f_1(t)(1 - F_2^2(t)) - f_2(t)(1 - F_1^2(t)) = \Delta,\end{aligned}$$

reordenando en f_1 y f_2 , Δ puede escribirse como,

$$\phi'(t) \stackrel{sgn}{=} \Delta = f_1(t) - f_1(t)F_2(t) + f_1(t)F_2(t)\bar{F}_2(t) - f_2(t) + f_2(t)F_1(t) - f_2(t)F_1(t)\bar{F}_1(t)$$

Por hipótesis, $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ que implica, $f_1(t)F_2(t)\bar{F}_2(t) \geq f_2(t)F_1(t)\bar{F}_1(t)$, se tiene que,

$$\Delta \geq f_1(t)\bar{F}_2(t) - f_2(t)\bar{F}_1(t),$$

que multiplicando por $F_2(t)$, obtenemos que,

$$\begin{aligned}\phi'(t) &\stackrel{sgn}{=} f_1(t)F_2(t)\bar{F}_2(t) - f_2(t)F_2(t)\bar{F}_1(t) \geq f_2(t)F_1(t)\bar{F}_1(t) - f_2(t)F_2(t)\bar{F}_1(t) \\ &= f_2(t)\bar{F}_1(t)(F_1(t) - F_2(t)) \geq 0,\end{aligned}$$

siendo la primera desigualdad válida ya que $f_1(t)F_2(t)\bar{F}_2(t) \geq f_2(t)F_1(t)\bar{F}_1(t)$ y la segunda desigualdad por ser $X_1 \leq_{st} X_2$, concluyéndose así la demostración. \square

Veamos que de este último teorema, el Teorema 3.3.3 es cierto aunque se rebaje la condición del orden razón de fallo de las componentes al orden estocástico.

Teorema 3.3.8. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\alpha(t)$ es no creciente en $t \geq 0$, entonces $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Demostración.- El resultado se comprueba directamente a partir del Teorema 3.3.7 probando que las hipótesis implican la condición $r_1(t)F_2(t) \geq r_2(t)F_1(t)$ para cada $t \geq 0$. En efecto, fijando un $t \geq 0$, para algún $\xi \in (0, t)$, se verifica por el teorema del valor medio,

$$\frac{F_2(t)}{F_1(t)} = \frac{F_2(t) - F_2(0)}{F_1(t) - F_1(0)} = \frac{f_2(\xi)}{f_1(\xi)} = \frac{r_2(\xi)\bar{F}_2(\xi)}{r_1(\xi)\bar{F}_1(\xi)} \geq \frac{r_2(t)}{r_1(t)},$$

siendo la última desigualdad válida por ser $X_1 \leq_{st} X_2$, $\xi < t$ y $\alpha(t)$ no creciente en t . \square

También se pueden dar condiciones análogas a las del Teorema 3.3.7 y Corolario 3.3.8 para el orden razón de fallo inverso de los sistemas V_1 y V_2 y cuyas demostraciones son semejantes a la de los nombrados.

3.3. ORDEN RAZÓN DE FALLO Y RAZÓN DE FALLO INVERSO EN SISTEMAS CON DOS REDUNDANCIAS

Teorema 3.3.9. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\tilde{r}_2(t)\bar{F}_1(t) \geq \tilde{r}_1(t)\bar{F}_2(t)$ para todo $t \geq 0$, entonces $V_1 \leq_{rh} V_2$.

Teorema 3.3.10. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si $X_1 \leq_{st} X_2$ y $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{r}_2(t)/\tilde{r}_1(t)$ es no creciente en $t \geq 0$, entonces $V_1 \leq_{rh} V_2$.

Zhao et al. [36], a partir de los resultados anteriores de Valdés y Zequeira [34], Brito et al. [13] y Misra et al. [24] y considerando los sistemas V_1 y V_2 en las mismas hipótesis de igualdad estocástica para las reposiciones, demuestra el orden en cociente de verosimilitudes para distribuciones exponenciales de las componentes como vemos en el siguiente teorema cuya demostración omitiremos.

Teorema 3.3.11. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Si los tiempos de vida se distribuyen exponencialmente con medias $1/\lambda_1$ y $1/\lambda_2$, entonces $V_1 \leq_{lr} V_2$.

Para finalizar el capítulo, vamos a presentar un último resultado que caracteriza el orden razón de fallo, para dos tiempos de vida con razones de fallo [razones de fallo inversas] proporcionales a partir del orden razón de fallo [razón de fallo inverso] de los sistemas V_1 y V_2 y donde las reposiciones siguen las mismas distribuciones que las dos componentes.

Teorema 3.3.12. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Sea $r_2(t) = c \cdot r_1(t)$, para cada $t \geq 0$. Entonces $X_1 \leq_{hr} X_2$ si, y solo si, $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Demostración.- La condición necesaria es inmediata a partir del Teorema 3.3.3 puesto que $\alpha(t) = c$ no creciente. Para la condición suficiente, por la equivalencia (3.11) para $V_1 \leq_{hr} V_2$ y por el Teorema 1.1.3, $\bar{F}_1(t)^c - c\bar{F}_1(t) - 2(1-c) \leq 0$ para cada $t > 0$. Tomando límites cuando t tiende a más infinito, obtenemos la desigualdad,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{F}_1(t)^c - c\bar{F}_1(t) - 2(1-c) = -2(1-c) \leq 0,$$

lo que prueba que $c = r_2(t)/r_1(t) \leq 1$, concluyéndose la demostración. \square

También, Valdés et al. [32] prueban que el orden razón de fallo inverso de los sistemas V_1 y V_2 caracterizan el orden razón de fallo inverso de los tiempos de vida, en el caso de razones de fallo inversas proporcionales y reposiciones uno a uno igualmente distribuidas.

Teorema 3.3.13. Sean los tiempos de vida X_1, X_2, Y_1 e Y_2 independientes cumpliendo $X_1 =_{st} Y_1$ y $X_2 =_{st} Y_2$. Sea $\tilde{r}_2(t) = c \cdot \tilde{r}_1(t)$, para cada $t \geq 0$. Entonces $X_1 \leq_{rh} X_2$ si, y solo si, $V_1 \leq_{rh} V_2$.

En resumen, son muchos los autores que han estudiado el orden razón de fallo y razón de fallo inverso en los sistemas considerados en este capítulo. A lo largo de los últimos años se han ido mejorando los resultados y también intentando comprobar el orden cociente de verosimilitudes en éstos sistemas con éxito para componentes exponenciales. Sería de gran interés estudiar estos sistemas con redundancias en espera además de poder ampliar este estudio a la aplicación de más de dos redundancias.

CAPÍTULO 3. USO DE DOS REDUNDANCIAS ACTIVAS EN SISTEMAS K -OUT OF- N

Capítulo 4

Conclusiones

Para concluir la memoria, realizamos un resumen de los resultados obtenidos para la ordenación de sistemas, con una o dos redundancias, en las cinco ordenaciones estocásticas estudiadas.

En el orden estocástico de sistemas con una redundancia, por lo general, es necesario que las componentes se ordenen estocásticamente cuando se coloca una redundancia activa común o uno a uno igualmente distribuida. Para el caso donde la reposición es uno a uno no igualmente distribuida, como se prueba en el Teorema 2.2.8, éstas reposiciones han de estar ordenadas de forma contraria al orden de las componentes. Los sistemas que se consideran en los teoremas principales de esta sección son los k -out of- n proporcionando resultados particulares de los sistemas en serie y paralelo para las distintas reposiciones. En redundancia en espera, las condiciones necesarias sobre las componentes son en orden razón de fallo, razón de fallo inverso o cociente de verosimilitud y se obtiene que los sistemas en paralelo y/o en serie se ordenen en sentido estocástico. Cuando hablamos de dos redundancias, el orden estocástico también es fácilmente aplicable a los sistemas k -out of- n , bajo hipótesis de ordenación estocástica de las componentes y redundancias.

El orden en preferencia, para redundancia activa, destaca por considerar hipótesis muy similares de ordenación de las componentes a las del orden estocástico. Para la redundancia en espera no se dan condiciones para la reposición uno a uno, solamente para la reposición común. Para ésta, para el orden en preferencia de los sistemas es necesario que se de el orden estocástico entre las componentes, como se desarrollada en el Teorema 2.3.11, mientras que para el orden estocástico de esos sistemas es necesario que se de el orden en razón de fallo de las componentes, como se indica en el Corolario 2.2.11. Para sistemas de dos redundancias, el orden en preferencia ha sido estudiado en varios trabajos y se observa que las condiciones necesarias de conservación del orden $V_1^{(n)} \geq_{pr} V_2^{(n)}$, han ido rebajándose desde el orden hr [rh] de las componentes y redundancias, hasta el orden st en éstas.

La sección con más resultados es la del orden razón de fallo. En esta sección, y en la siguiente, se estudian los modelos de sistemas U_1 y U_2 para el posicionamiento de una redundancia y los sistemas V_1 y V_2 para el posicionamiento de dos redundancias, bajo las condiciones de

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

igualdad estocástica de éstas y las componentes. Como hemos visto anteriormente para el orden de preferencia, también se puede observar aquí cómo han ido debilitándose las hipótesis a lo largo de los desarrollos de nuevos artículos. Aquí, en general, además del orden de las componentes en razón de fallo o estocástico, se necesitan de condiciones sobre las funciones de razón de fallo y/o supervivencia de las componentes o redundancias. Con respecto a las redundancias en espera, es a partir del estudio de Misra et al. [24] cuando se estudia el orden razón de fallo en los sistemas en serie de una o varias componentes y reposición uno a uno no igualmente distribuida, siendo los resultados muy técnicos y con hipótesis más restrictivas como es el orden lr en las redundancias.

Es de destacar, los pocos resultados encontrados para el orden razón de fallo inverso y cociente de verosimilitudes en la bibliografía consultada. Los resultados que se presentan para el primero de estos órdenes son similares a los de razón de fallo aunque las hipótesis no son tan débiles como en éstos. Es por ello, que una línea de nuevas investigaciones pueda darse en este sentido para el orden razón de fallo inverso en sistemas con una o dos redundancias. Para el orden cociente de verosimilitudes, solamente encontramos resultados para sistemas en serie y reposición común para componentes con distribuciones exponenciales o con razón de fallo proporcionales. Destacar, por último, que las demostraciones en este orden son muy técnicas, lo que da una visión global de la complejidad de este estudio en dicho orden.

En líneas generales, hemos podido comprobar que, conforme avanzamos en ordenes más restrictivos, los resultados se particularizan a sistemas con pocas componentes, llegando incluso, como en el caso del orden cociente de verosimilitud, a considerar distribuciones específicas para éstas. También indicar que los resultados para los órdenes estocástico, razón de fallo y razón de fallo inverso de los sistemas en serie/paralelo de dos componentes implican, en términos generales, la ordenación de los sistemas en serie/paralelo con n componentes, lo que hace más simple el estudio y la modelización de los objetivos.

A continuación presentamos una tabla donde se recogen los resultados principales de la memoria. Esta tabla está ordenada, en primer lugar por el orden demostrado para los sistemas, en segundo lugar, por el número de redundancias, y por último por el tipo de redundancia, activa o en espera.

ORDEN ESTOCÁSTICO						
Teorema	Redundancia	Reposición	N.º Red.	Sistema	Hipótesis	Tesis
Teor. 2.2.1	Activa	Común	1	$X_{[k:n]}^{(i)}$	$X_1 \leq_{st} X_2 \leq_{st} \dots \leq_{st} X_n$	$X_{[k:n]}^{(i)} \geq_{st} X_{[k:n]}^{(i+1)}$
Teor. 2.2.3*	Activa	Común	1	$W_1, W_2;$ $W_1^{(k)}, W_2^{(k)}$	$X_1 \leq_{st} X_2$	$W_1 \geq_{st} W_2;$ $W_1^{(k)} \geq_{st} W_2^{(k)}$
Teor. 2.2.4	Activa	Uno a uno igual. dist.	1	$X_{[n:n]}^{(i)}; X_{[1:n]}^{(i)}$	$X_1 \leq_{st} X_2 \leq_{st} \dots \leq_{st} X_n$	$X_{[n:n]}^{(i)} \geq_{st} X_{[n:n]}^{(i+1)};$ $X_{[1:n]}^{(i+1)} \geq_{st} X_{[1:n]}^{(i)}$
Teor. 2.2.6	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$	$U_1 \geq_{st} U_2$
Teor. 2.2.6	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{st} X_2, Y_2 \leq_{st} X_2$ y $X_1 \leq_{st} Y_1$	$U_1 \geq_{st} U_2$
Cor. 2.2.7*	Activa	Uno a uno igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{st} X_2$	$U_1 \geq_{st} U_2$
Teor. 2.2.8	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	$X_{[k:n]}^{(i)}$	$X_1 \leq_{st} X_2 \leq_{st} \dots \leq_{st} X_n$ e $Y_n \leq_{st} \dots \leq_{st} Y_2 \leq_{st} Y_1$	$X_{[k:n]}^{(i)} \geq_{st} X_{[k:n]}^{(i+1)}$
Teor. 2.2.9	Espera	Común	1	$X_{[n:n]}^{(i)}; X_{[1:n]}^{(i)}$	$X_1 \leq_{lr} X_2 \leq_{lr} \dots \leq_{lr} X_n$	$X_{[n:n]}^{(i)} \geq_{st} X_{[n:n]}^{(i+1)};$ $X_{[1:n]}^{(i+1)} \geq_{st} X_{[1:n]}^{(i)}$
Teor. 2.2.10*	Espera	Común	1	$W_{\wedge 1}^', W_{\wedge 2}^';$ $W_{\vee 1}^', W_{\vee 2}^'$	$X_1 \leq_{hr} X_2; X_2 \leq_{rh} X_1$	$W_{\wedge 1}^' \geq_{st} W_{\wedge 2}^';$ $W_{\vee 2}^' \geq_{st} W_{\vee 1}^'$
Cor. 2.2.11*	Espera	Común	1	$W_1^{(n)}, W_2^{(n)};$ $W_1^{(1)}, W_2^{(1)}$	$X_1 \leq_{hr} X_2; X_2 \leq_{rh} X_1$	$W_1^{(n)} \geq_{st} W_2^{(n)};$ $W_2^{(1)} \geq_{st} W_1^{(1)}$
Teor. 2.2.12	Espera	Uno a uno igual. dist.	1	$X_{[1:n]}^{(i)}$	$X_1 \leq_{lr} X_2 \leq_{lr} \dots \leq_{lr} X_n$	$X_{[1:n]}^{(i+1)} \geq_{st} X_{[1:n]}^{(i)}$

Teor. 3.2.1	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{st} X_2, Y_2 \leq_{st} Y_1$	$V_1 \geq_{st} V_2$
Teor. 3.2.1	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{st} X_2, Y_2 \leq_{st} Y_1$	$V_1 \geq_{st} V_2$
Teor. 3.2.3	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	$V_1^{(k)}, V_2^{(k)}$	$X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$ o $X_2 \leq_{st} X_1$ e $Y_1 \leq_{st} Y_2$	$V_1^{(k)} \geq_{st} V_2^{(k)}$
Cor. 2.2.5	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	$V_1^{(k)}, V_2^{(k)}$	$X_2 \leq_{st} X_1$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$ o $X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$	$V_2^{(k)} \geq_{st} V_1^{(k)}$
ORDEN EN PREFERENCIA						
Teor. 2.3.6	Activa	Común	1	W_1, W_2	$X_1 \leq_{st} X_2$	$W_1 \geq_{pr} W_2$
Teor. 2.3.7	Activa	Común	1	$W_1^{(k)}, W_2^{(k)}$	$X_1 \leq_{st} X_2$	$W_1^{(k)} \geq_{pr} W_2^{(k)}$
Teor. 2.3.8	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	$U_1, U_2;$ $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}$	$r_1(t)\bar{G}_1(t) \geq r_2(t)\bar{G}_2(t)$ $\forall t \geq 0$	$U_1 \geq_{pr} U_2;$ $U_1^{(n)} \geq_{pr} U_2^{(n)}$
Teor. 2.3.8	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	$U_1, U_2;$ $U_1^{(n)}, U_2^{(n)}$	$X_1 \leq_{st} X_2$ y $\bar{F}_2(t)\bar{G}_1(t) \geq \bar{F}_1(t)\bar{G}_2(t)$	$U_1 \geq_{pr} U_2;$ $U_1^{(n)} \geq_{pr} U_2^{(n)}$
Teor. 2.3.9	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	$U_1^{(k)}, U_2^{(k)}$	$X_1 \leq_{st} X_2$ e $Y_2 \leq_{st} Y_1$	$U_1^{(k)} \geq_{pr} U_2^{(k)}$
Teor. 2.3.11	Espera	Común	1	$W_1^{(n)},$ $W_2^{(n)};$ $W_1^{(1)}, W_2^{(1)}$	$X_1 \leq_{st} X_2$	$W_1^{(n)} \geq_{pr} W_2^{(n)};$ $W_2^{(1)} \geq_{pr} W_1^{(1)}$
Teor. 3.2.7	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	$V_1, V_2;$ $V_1^{(k)}, V_2^{(k)}$	$X_1 \leq_{hr} X_2$ e $Y_2 \leq_{hr} Y_1$	$V_1 \geq_{pr} V_2;$ $V_1^{(k)} \geq_{pr} V_2^{(k)}$
Teor. 3.2.8	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	$V_1, V_2;$ $V_1^{(n)}, V_2^{(n)}$	$X_1 \leq_{rh} X_2$ e $Y_2 \leq_{rh} Y_1$	$V_1 \geq_{pr} V_2;$ $V_1^{(n)} \geq_{pr} V_2^{(n)}$

Cor. 3.2.9	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	$V_1^{(n)}, V_2^{(n)}$	$X_1 \leq_{hr} [\leq_{rh}] X_2 \circ$ $X_2 \leq_{hr} [\leq_{rh}] X_1$	$V_2^{(n)} \geq_{pr} V_1^{(n)}$
Teor. 3.2.10	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	$V_1^{(n)}, V_2^{(n)}$	$X_1 \leq_{st} X_2 \text{ e } Y_2 \leq_{st} X_1 \leq_{st} Y_1 \circ$ $X_1 \leq_{st} X_2 \text{ e } Y_2 \leq_{st} X_2 \leq_{st} Y_1 \circ$ $X_1 \leq_{st} X_2, X_1 \leq_{st} Y_1 \text{ e}$ $Y_2 \leq_{hr} Y_1 \circ X_1 \leq_{st} X_2,$ $Y_2 \leq_{st} X_2 \text{ e } Y_2 \leq_{rh} Y_1$	$V_1^{(n)} \geq_{pr} V_2^{(n)}$
Teor. 3.2.10	Activa	Uno a uno no igual. dist.	2	$V_1^{(n)}, V_2^{(n)}$	$X_2 \leq_{st} X_1 \text{ e } Y_1 \leq_{st} X_2 \leq_{st} Y_2 \circ$ $X_2 \leq_{st} X_1 \text{ e } Y_1 \leq_{st} X_1 \leq_{st} Y_2 \circ$ $X_2 \leq_{st} X_1, X_2 \leq_{st} Y_2 \text{ e}$ $Y_1 \leq_{hr} Y_2 \circ X_2 \leq_{st} X_1,$ $Y_1 \leq_{st} X_1 \text{ e } Y_1 \leq_{rh} Y_2$	$V_1^{(n)} \geq_{pr} V_2^{(n)}$
Cor. 3.2.11	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	$V_1^{(n)}, V_2^{(n)}$	$X_1 \leq_{st} X_2 \circ X_2 \leq_{st} X_1$	$V_2^{(n)} \geq_{pr} V_1^{(n)}$
ORDEN RAZÓN DE FALLO						
Teor. 2.4.4	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{hr} X_2, X_1 \leq_{hr} Y_1,$ $Y_2 \leq_{hr} Y_1 \text{ y } \alpha(t) \text{ no creciente}$	$U_1 \geq_{hr} U_2$
Cor. 2.4.5*	Activa	Común	1	W_1, W_2	$X_1 \leq_{hr} X_2 \text{ y } X_1 =_{st} Y \circ$ $X_2 =_{st} Y$	$W_1 \geq_{hr} W_2$
Teor. 2.4.6	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{hr} X_2, X_1 \leq_{hr} Y_1,$ $Y_2 \leq_{hr} Y_1 \text{ y } \alpha(t) \leq$ $1 - m^{m/(1-m)} + m^{1/(1-m)}$	$U_1 \geq_{hr} U_2$
Teor. 2.4.7	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{st} X_2, X_1 \leq_{hr} Y_1,$ $Y_2 \leq_{hr} Y_1 \text{ y}$ $r_2(t)F_1(t) \leq r_1(t)F_2(t) \text{ para}$ $\text{cada } t \geq 0$	$U_1 \geq_{hr} U_2$

Teor. 2.4.8	Activa	Uno a uno no igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{st} X_2, X_1 \leq_{hr} Y_1, Y_2 \leq_{hr} Y_1$ y $\alpha(t)$ no creciente	$U_1 \geq_{hr} U_2$
Cor. 2.4.9	Activa	Común	1	W_1, W_2	$X_1 \leq_{st} X_2, X_1 \leq_{hr} Y$ y $r_2(t)F_1(t) \leq r_1(t)F_2(t)$ para cada $t \geq 0$	$W_1 \geq_{hr} W_2$
Cor. 2.4.9	Activa	Común	1	W_1, W_2	$X_1 \leq_{st} X_2, X_1 \leq_{hr} Y$ y $\alpha(t)$ no creciente	$W_1 \geq_{hr} W_2$
Teor. 2.4.11	Espera	Uno a uno no igual. dist.	1	$U_1^{(n)}, U_2^{(n)}$	X_1 o X_2 IFR, $\bar{F}_2(t)/\bar{F}_1(t)$ log-convexa, $X_1 \leq_{hr} X_2$ y $Y_2 \leq_{hr} Y_1$	$U_1^{(n)} \geq_{hr} U_2^{(n)}$
Cor. 2.4.12	Espera	Común	1	$W_1^{(n)}, W_2^{(n)}$	X_1 o X_2 IFR, $\bar{F}_2(t)/\bar{F}_1(t)$ log-convexa y $X_1 \leq_{hr} X_2$	$W_1^{(n)} \geq_{hr} W_2^{(n)}$
Cor. 2.4.14*	Espera	Común	1	$W_{\wedge 1}^', W_{\wedge 2}^'$	$r_2(t) - r_{X_2+Y}(t) \leq r_1(t) - r_{X_1+Y}(t)$	$W_{\wedge 1}^' \geq_{hr} W_{\wedge 2}^'$
Cor. 2.4.14*	Espera	Común	1	$W_1^{(n)}, W_2^{(n)}$	$r_2(t) - r_{X_2+Y}(t) \leq r_1(t) - r_{X_1+Y}(t)$	$W_1^{(n)} \geq_{hr} W_2^{(n)}$
Teor. 3.3.3	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{hr} X_2$ y $\alpha(t)$ no creciente	$V_2 \geq_{hr} V_1$
Teor. 3.3.3	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{hr} X_2$ y $\alpha(t)$ no creciente	$V_2 \geq_{hr} V_1$
Teor. 3.3.5	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{hr} X_2$ y $\alpha(t) \leq (m+1)/2$	$V_2 \geq_{hr} V_1$
Teor. 3.3.6	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{st} X_2$ y $\alpha(t) \leq \vartheta$	$V_2 \geq_{hr} V_1$
Teor. 3.3.7	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{st} X_2$ y $r_2(t)F_1(t) \leq r_1(t)F_2(t)$	$V_2 \geq_{hr} V_1$

Cor. 3.3.8	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{st} X_2$ y $\alpha(t)$ no creciente	$V_2 \geq_{hr} V_1$
Teor. 3.3.12*	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{hr} X_2$ y $r_2(t) = c \cdot r_1(t)$	$V_2 \geq_{hr} V_1$
ORDEN RAZÓN DE FALLO INVERSO						
Teor. 2.5.1	Activa	Uno a uno igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{rh} X_2, X_1 \leq_{rh} Y_1,$ $Y_2 \leq_{rh} Y_1$ y $F_2(t)G_2(t) \leq F_1(t)G_1(t)$	$U_1 \geq_{rh} U_2$
Teor. 2.5.2	Activa	Uno a uno igual. dist.	1	U_1, U_2	$X_1 \leq_{rh} X_2, X_1 \leq_{rh} Y_1,$ $Y_2 \leq_{rh} Y_1$ y $\tilde{s}_1(t) - \tilde{s}_2(t) \leq \tilde{r}_2(t) - \tilde{r}_1(t)$	$U_1 \geq_{rh} U_2$
Cor. 2.5.3	Activa	Común	1	W_1, W_2	$X_1 \leq_{rh} X_2$ y $X_1 \leq_{rh} Y$	$W_1 \geq_{rh} W_2$
Teor. 2.5.4	Activa	Común	1	$W_1^{(n)}, W_2^{(n)}$	$X_i \sim \exp(\lambda_i)$ para $i = 1, 2,$ $Y \sim \exp(\lambda)$ e $Y \leq_{hr} X_1 \leq_{hr} X_2$	$W_1^{(n)} \geq_{rh} W_2^{(n)}$
Teor. 2.5.4	Activa	Común	1	$W_1^{(n)}, W_2^{(n)}$	$r_i(t) = \lambda_i r(t)$ para $i = 1, 2,$ $s(t) = \lambda r(t)$ e $Y \leq_{hr} X_1 \leq_{hr} X_2$	$W_1^{(n)} \geq_{rh} W_2^{(n)}$
Teor. 3.3.4	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{rh} X_2$ y $\tilde{\alpha}(t)$ no creciente	$V_2 \geq_{rh} V_1$
Teor. 3.3.9	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{rh} X_2$ y $\tilde{r}_1(t)\tilde{F}_2(t) \leq \tilde{r}_2(t)\tilde{F}_1(t)$	$V_2 \geq_{rh} V_1$
Teor. 3.3.10	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{st} X_2$ y $\tilde{\alpha}(t)$ no creciente	$V_2 \geq_{rh} V_1$
Teor. 3.3.13*	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_1 \leq_{rh} X_2$ y $\tilde{r}_2(t) = c \cdot \tilde{r}_1(t)$	$V_2 \geq_{rh} V_1$

ORDEN COCIENTE DE VEROSIMILITUD						
Teor. 2.6.1	Activa	Común	1	W_1, W_2	$X_i \sim \exp(\lambda_i)$ para $i = 1, 2,$ $Y \sim \exp(\lambda), X_1 \leq_{hr} X_2$ y $X_1 \leq_{hr} Y$	$W_1 \geq_{lr} W_2$
Teor. 2.6.1	Activa	Común	1	W_1, W_2	$r_i(t) = \lambda_i r(t)$ para $i = 1, 2,$ $s(t) = \lambda r(t), X_1 \leq_{hr} X_2$ y $X_1 \leq_{hr} Y$	$W_1 \geq_{lr} W_2$
Extensión Teor. 2.6.1	Activa	Común	1	$X_{[n:n]}^{(i)}$	$X_j \sim \exp(\lambda_j)$ para $i = 1, \dots, n, Y \sim \exp(\lambda),$ $X_i \leq_{hr} X_{i+1}$ y $X_i \leq_{hr} Y$	$X_{[n:n]}^{(i)} \geq_{lr} X_{[n:n]}^{(i+1)}$
Extensión Teor. 2.6.1	Activa	Común	1	$X_{[n:n]}^{(i)}$	$r_i(t) = \lambda_i r(t)$ para $i = 1, \dots, n, s(t) = \lambda r(t),$ $X_i \leq_{hr} X_{i+1}$ y $X_i \leq_{hr} Y$	$X_{[n:n]}^{(i)} \geq_{lr} X_{[n:n]}^{(i+1)}$
Teor. 2.6.2	Espera	Común	1	$W_{\wedge 1}, W_{\wedge 2}$	$X_i \sim \exp(\lambda_i)$ para $i = 1, 2,$ $Y \sim \exp(\lambda)$ y $X_1 \leq_{hr} X_2$	$W_{\wedge 1} \geq_{lr} W_{\wedge 2}$
Teor. 3.3.11	Activa	Uno a uno igual. dist.	2	V_1, V_2	$X_j \sim \exp(\lambda_j)$ para $i = 1, 2$	$V_2 \geq_{lr} V_1$
(*) En estos casos, las condiciones son necesarias y suficientes.						

Tabla 4.1: Cuadro resumen de resultados.

Por otro lado, este trabajo sugiere la posibilidad de continuar con estudios sobre redundancias de sistemas y las posibilidades de nuevas investigaciones es amplia y pasamos a detallar alguna de ellas.

- En primer lugar, la consideración principal del estudio es la de componentes independientes. Esta suposición es uno de los pilares del trabajo a partir del cuál hemos podido obtener los diversos resultados anteriormente expuestos en esta memoria. En la vida real, este supuesto es, en algunas ocasiones, no aplicable por la dependencia de las componentes en el funcionamiento del sistema. En este sentido, el estudio de las dependencias en las relaciones entre las componentes y la ordenación de estos sistemas con o sin redundancias representa una continuación lógica de esta investigación, (véase Belzunce et al. [4, 5], Fang y Li [16] y Jeddi y Doostparast [20]).
- Los capítulos 2 y 3 hacen referencia a la consideración de una y dos redundancias, respectivamente. A lo largo del tiempo muchos autores como Hu y Wang [19], Ding y Li [15], Zhao et al. [37] o Zhuang y Li [39], y los referenciados en éstos, han ocupado sus investigaciones en la colocación de políticas de m redundancias, en general, para prolongar el tiempo de vida de los sistemas originales. Otros autores como Valdés et al. [32] o Hazra y Nanda [18] estudian, en este mismo sentido, cuándo es mejor aplicar una política de m redundancias a nivel de sistema, que a nivel de componente.
- Por último, en el estudio se han considerado cinco ordenaciones para tiempos de vida. Podría continuar la línea de investigación a partir del estudio de otras condiciones de ordenación sobre las componentes o sistemas u ordenaciones más débiles. Por ejemplo, en Li y Hu [22], Ding y Li [15], Misra et al. [24] y You y Li [35], podemos encontrar, para distintos sistemas, condiciones de orden en las componentes menos estrictas que las expuestas para asegurar el orden estocástico o en preferencia.

Para concluir, personalmente, este estudio me ha aportado gran conocimiento sobre las diferentes herramientas estadísticas en ordenación y modelado de sistemas coherentes, usadas en una amplia gama de aplicaciones, y me ha permitido conocer dónde podemos hacer una mejora “óptima” bajo una o dos redundancias, en los diferentes órdenes estocásticos principales de la Teoría de Fiabilidad. Además, de la evolución a lo largo del tiempo de los resultados existentes, y viendo las distintas técnicas de demostración y/o las diferentes hipótesis necesarias para la comprobación de los órdenes en sistemas, me ha permitido desarrollar los Teoremas 2.2.8 y 3.2.3 y los Corolarios 2.2.5 y 3.2.4, resultados que no hemos encontrado en la literatura. Por último, también hemos ordenado en una estructura que nos parecía lógica, los resultados estudiados para una fácil lectura y comprensión, incluyendo en algunas ocasiones lemas y detalles técnicos no mostrados explícitamente en las demostraciones.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

Apéndice A

Implementación en R

En este apéndice añadimos los archivos de R realizados para la obtención de las gráficas utilizadas en los diversos ejemplos del trabajo y las simulaciones de sistemas que hemos realizado. Estos archivos se han compilado en Markdown con los comandos de R. En primer lugar se exponen los ejemplos que corresponden a los enumerados en la memoria con el mismo número romano. Por último se exponen las simulaciones de los sistemas W_1, W_2, V_1 y V_2 para su posterior comparación en los órdenes estocástico, razón de fallo y cociente de verosimilitudes.

Ejemplo IV: Comparación en orden estocástico de sistemas con redundancia activa uno a uno en sistema 2 - out of - 3 con componentes exponenciales.

Consideramos tres componentes con tiempos de vida X_1, X_2 y X_3 exponenciales de parámetros $\lambda_1 = 1.5$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$. Con éstas vamos a construir el sistema 2-out of-3 y aplicaremos redundancia activa uno a uno igualmente distribuida en las dos primeras componentes, para posteriormente comparar los sistemas resultantes en sentido estocástico.

En primer lugar, para un sistema 2-out of-3 podemos calcular su función de supervivencia por la igualdad (1.4).

$$\begin{aligned} F_{X_{2:3}}(t) &= \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)F_3(t) + \bar{F}_1(t)F_2(t)\bar{F}_3(t) + F_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) + \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) \\ &= \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)\bar{F}_3(t) + \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) - 2\bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t). \end{aligned} \quad (1)$$

Al hacer redundancia activa en una componente, la función de supervivencia de ésta es la del sistema en paralelo formado por ambas. Suponiendo redundancia uno a uno igualmente distribuida, por la igualdad (2.1), para el sistema con redundancia en la primera componente, $X_{2:3}^{(1)}$, tendríamos que sustituir en (1), $\bar{F}_1(t)$ por $\bar{F}_1(t)(1 + F_1(t))$. Igualmente, para el sistema con redundancia en la segunda componente, $X_{2:3}^{(2)}$, tendríamos que sustituir $\bar{F}_2(t)$ por $\bar{F}_2(t)(1 + F_2(t))$, quedando,

$$\bar{F}_{X_{2:3}^{(1)}}(t) = \bar{F}_1(t)[1 + F_1(t)]\bar{F}_2(t) + \bar{F}_1(t)[1 + F_1(t)]\bar{F}_3(t) + \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t) - 2\bar{F}_1(t)[1 + F_1(t)]\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t),$$

y

$$\bar{F}_{X_{2:3}^{(2)}}(t) = \bar{F}_2(t)[1 + F_2(t)]\bar{F}_1(t) + \bar{F}_2(t)[1 + F_2(t)]\bar{F}_3(t) + \bar{F}_1(t)\bar{F}_3(t) - 2\bar{F}_2(t)[1 + F_2(t)]\bar{F}_1(t)\bar{F}_3(t).$$

Interesa representar la diferencia entre las supervivencias para ver si una es mayor que otra en todos los puntos $t > 0$.

$$\begin{aligned} &\bar{F}_{X_{2:3}^{(1)}}(t) - \bar{F}_{X_{2:3}^{(2)}}(t) \\ &= \bar{F}_1(t)\bar{F}_2(t)[F_1(t) - F_2(t)] + \bar{F}_1(t)\bar{F}_3(t)F_1(t) - \bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t)F_2(t) - 2\bar{F}_1(t)[F_1(t) - F_2(t)]\bar{F}_2(t)\bar{F}_3(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Para obtener esta diferencia primero consideramos las funciones auxiliares que representan las funciones de supervivencia de las exponenciales con parámetros λ_i y también las funciones de distribución.

```
# Parámetros.
l1<-1.5
l2<-2
l3<-3
# Funciones de supervivencias de exponenciales.
f1<-function(t) exp(-l1*t)
f2<-function(t) exp(-l2*t)
f3<-function(t) exp(-l3*t)
```

```
# Funciones de distribución de exponenciales.
```

```
F1<-function(t) 1-f1(t)
```

```
F2<-function(t) 1-f2(t)
```

De la función “dif”, para la diferencia de las supervivencias de ambos sistemas dada por (2), tenemos para los valores de $t = 1.2$ y $t = 0.5$,

```
dif<-function(t) (f1(t)*f2(t)*(F1(t)-F2(t)) + f1(t)*f3(t)*F1(t)
                 - f2(t)*f3(t)*F2(t) - 2*f1(t)*f2(t)*f3(t)*(F1(t)-F2(t)))
```

```
dif(1.2)
```

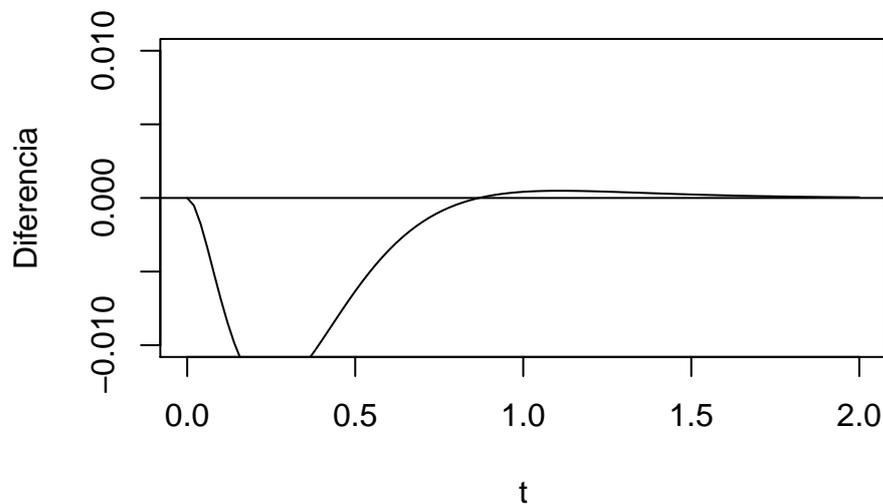
```
## [1] 0.000458843
```

```
dif(0.5)
```

```
## [1] -0.006329786
```

Por último, dibujamos la función diferencia, que cambia de signo y por tanto no podemos asegurar el orden estocástico para los sistemas k-out of-n con redundancia activa uno a uno, en general.

```
plot(dif,xlim = c(0,2),ylim=c(-0.01,0.01),ylab='Diferencia',
     xlab='t')
abline(a = 0, b = 0)
```



Ejemplo V.1: Orden estocástico para sistema en paralelo y serie de dos componentes con tiempo de vida Gamma y redundancia pasiva uno a uno.

Sean los tiempos de vida $X_1 \stackrel{=st}{=} Y_1 \sim \Gamma(m, \theta)$ y $X_2 \stackrel{=st}{=} Y_2 \sim \Gamma(m + 1, \theta)$ para un $m \geq 1$ y $\theta \geq 0$, donde las componentes son X_1 y X_2 y las redundancias son Y_1 e Y_2 , formando los sistemas $U'_{\wedge 1}, U'_{\wedge 2}, U'_{\vee 1}$ y $U'_{\vee 2}$. Claramente, $Y_1 = X_1 \leq_{lr} X_2 = Y_2$. También, por las propiedades de la distribución Gamma, sabemos que $X_1 + Y_1 \sim \Gamma(2m, \theta)$ y $X_2 + Y_2 \sim \Gamma(2m + 2, \theta)$.

Sistema en paralelo.

Nuestra intención es probar que para los valores de $m = 3, 5$ y 7 y $\theta = 2$, las funciones de distribución (supervivencia) para ambos sistemas se ordenan, por lo que obtendríamos el orden estocástico en el sistema en paralelo. La función de distribución del sistema con redundancia en la primera componente ($U'_{\vee 1}$), por la igualdad (2.10a), es $P(X_1 + Y_1 \leq t)P(X_2 \leq t)$ y del sistema con redundancia en la segunda componente, por (2.10b), es ($U'_{\vee 2}$) es $P(X_1 \leq t)P(X_2 + Y_2 \leq t)$.

Vamos a representar la diferencia de ambas funciones de distribución a la que denotamos por $\Delta(m, \theta)$, para comprobar que se ordenan estocásticamente los sistemas. Para ello, vamos a definir la función auxiliar,

```
#función de distribución de gamma(m, theta=2)
gM <- function(t,m) pgamma(t,shape=m,rate=2)
```

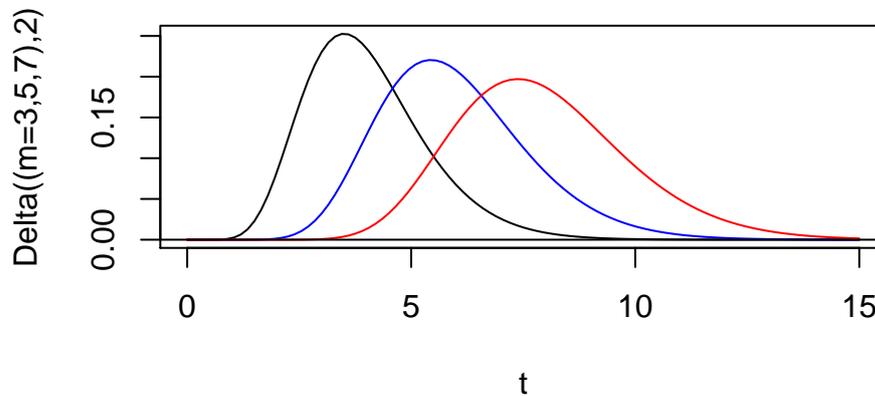
que guarda los valores de la distribución $\Gamma(m, \theta = 2)$. Las funciones que contienen las diferencias, entre la función de distribución del sistema $U'_{\vee 1}$ y la función de distribución de $U'_{\vee 2}$, para los valores del parámetro $m = 3, 5$ y 7 las almacenamos en las variables,

```
delta3 <- function(t) gM(t,6)*gM(t,4) - gM(t,3)*gM(t,8)
delta5 <- function(t) gM(t,10)*gM(t,6) - gM(t,5)*gM(t,12)
delta7 <- function(t) gM(t,14)*gM(t,8) - gM(t,7)*gM(t,16)
```

Dibujamos la diferencia $\Delta(m, \theta = 2)$ para ver si se ordenan estocásticamente ambos sistemas.

```
plot(delta3, xlim = c(0,15), xlab = 't', ylab='Delta((m=3,5,7),2)'
      ,main='Sistema en paralelo')
plot(delta5, xlim = c(0,15), xlab = 't', col='blue', add=TRUE)
plot(delta7, xlim = c(0,15), xlab = 't', col='red', add=TRUE)
abline(a=0,b=0)
```

Sistema en paralelo



Como se puede observar, la diferencia siempre se mantiene positiva, por lo que $U'_{V_1} \leq_{st} U'_{V_2}$.

Sistema en serie.

Las funciones de supervivencia para los sistemas U'_{\wedge_1} y U'_{\wedge_2} vienen dadas por las igualdades (2.11a) y (2.11b), y son, $P(X_1 + Y_1 > t)P(X_2 > t)$ y $P(X_1 > t)P(X_2 + Y_2 > t)$, respectivamente.

Necesitamos ahora de la definición de la función auxiliar que almacenará los valores de la función de supervivencia de una distribución $\Gamma(m, \theta = 2)$.

```
#función de supervivencia de gamma(m,theta=2)
bgM <- function(t,m) 1-pgamma(t,shape=m,rate=2)
```

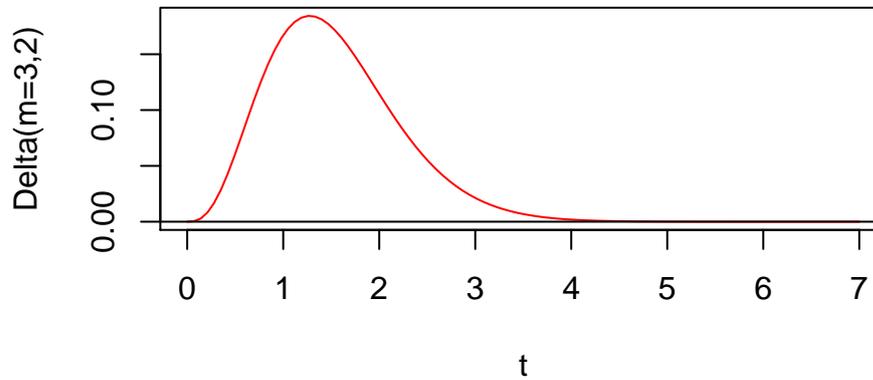
La función diferencia para $m = 3$ sería,

```
delta3s <- function(t) bgM(t,6)*bgM(t,4) - bgM(t,3)*bgM(t,8)
```

y su gráfica viene dada por,

```
plot(delta3s, xlim = c(0,7),xlab = 't', ylab='Delta(m=3,2)', col='red'
      ,main='Sistema en serie')
abline(a=0,b=0)
```

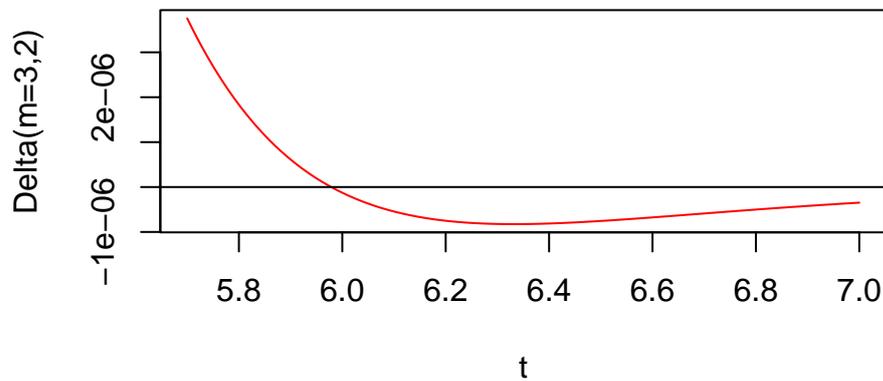
Sistema en serie



```
#ampliado al intervalo de t (5.7, 7)
```

```
plot(delta3s, xlim = c(5.7,7),xlab = 't', ylab='Delta(m=3,2)', col='red'  
      ,main='Sistema en serie')  
abline(a=0,b=0)
```

Sistema en serie



```
delta3s(1.2) #diferencia en t = 1.2
```

```
## [1] 0.1831372
```

```
delta3s(6.2) #diferencia en t = 6.2
```

```
## [1] -7.504501e-07
```

Observamos que no se mantiene el orden estocástico entre los dos sistemas por tener valores negativos y positivos para distintos valores de t .

Ejemplo V.2:

Sean ahora las variables $X_1 =_{st} Y_1 \sim \Gamma(m, \theta_1)$ y $X_2 =_{st} Y_2 \sim \Gamma(m, \theta_2)$ para un $m \geq 1$ y $\theta_1 \geq \theta_2 > 0$, entonces también, $X_1 \leq_{lr} X_2$. Tomaremos aquí $\theta_1 = 3 > 2 = \theta_2$. Las funciones de supervivencia de los sistemas $U'_{\wedge 1}$ y $U'_{\wedge 2}$ son iguales a las anteriores pero con distribuciones para $X_1 + Y_1 \sim \Gamma(2m, \theta_1)$ y $X_2 + Y_2 \sim \Gamma(2m, \theta_2)$.

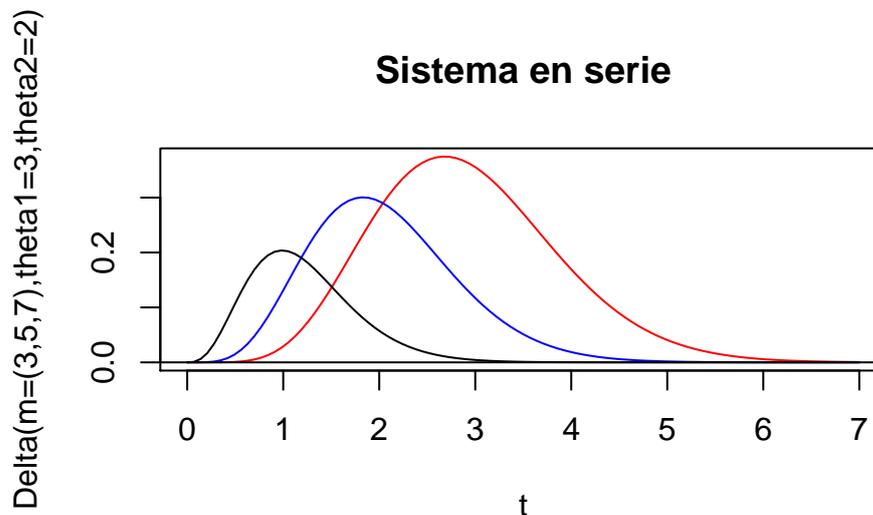
En este caso la diferencia de las funciones de supervivencia $\Delta(m, \theta_1, \theta_2)$ para $m = 3, 5$ y 7 la almacenamos en las funciones,

```
#función de supervivencia de gamma(m,theta=3)
bgM1 <- function(t,m) 1-pgamma(t,shape=m,rate=3)

delta3ss <- function(t) bgM1(t,6)*bgM(t,3) - bgM1(t,3)*bgM(t,6)
delta5ss <- function(t) bgM1(t,10)*bgM(t,5) - bgM1(t,5)*bgM(t,10)
delta7ss <- function(t) bgM1(t,14)*bgM(t,7) - bgM1(t,7)*bgM(t,14)
```

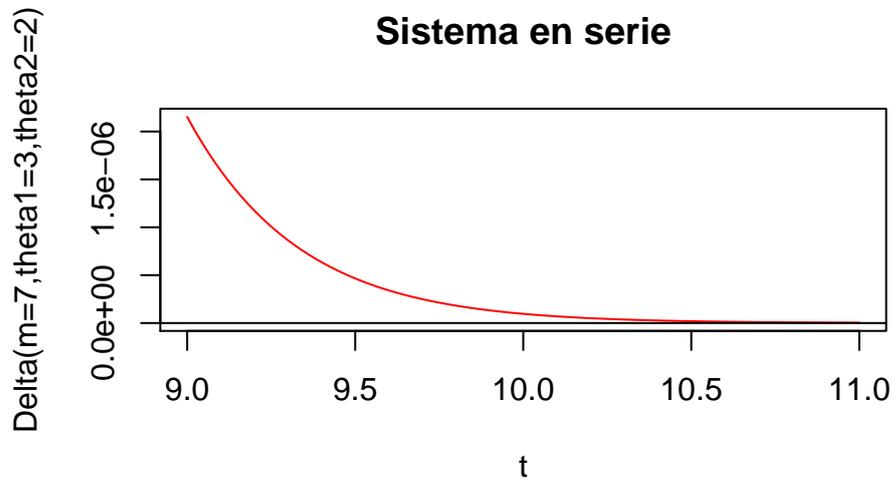
Las gráficas de las mismas son,

```
plot(delta7ss, xlim = c(0,7),xlab = 't', col='red',
      ylab='Delta(m=(3,5,7),theta1=3,theta2=2)',main='Sistema en serie')
plot(delta5ss, xlim = c(0,7),xlab = 't', col='blue',
      main='Sistema en serie', add=TRUE)
plot(delta3ss,xlim=c(0,7),xlab= 't',main='Sistema en serie',add=TRUE)
abline(a=0,b=0)
```



```
#ampliado al intervalo de t (9,11)

plot(delta7ss, xlim = c(9,11),xlab = 't', col='red',
      ylab='Delta(m=7,theta1=3,theta2=2)',main='Sistema en serie')
abline(a=0,b=0)
```



Observamos que siempre se mantienen positivas para cada valor de t y el orden estocástico entre ambos sistemas sí se cumple, $U'_{\lambda_1} \geq_{st} U'_{\lambda_2}$.

Ejemplo VI: Contraejemplo de $W_1 \geq_{pr} W_2$ [$W_2 \geq_{pr} W_1$] no implica $X_1 \leq_{st} X_2$ [$X_2 \leq_{st} X_1$] con componentes Weibull.

Queremos comprobar que los sistemas W_1 y W_2 de componentes $X_1 \stackrel{=st}{=} Y \sim Exp(2)$ y $X_2 \sim Weibull(2, \alpha)$ se ordenan en preferencia para los valores de $\alpha = 0.5, 0.85, 1.2$ y 1.55 pero no se ordenan estocásticamente las componentes X_1 y X_2 .

Por ser las componentes con distribuciones Weibull, es conocido que la ordenación estocástica entre éstas no se cumple. Para comprobarlo, definiremos las funciones de supervivencia de las componentes,

```
pf <- 2 # Parámetro de escala.
ps <- c(0.5,0.85,1.2,1.55) # Parámetro de forma alpha.

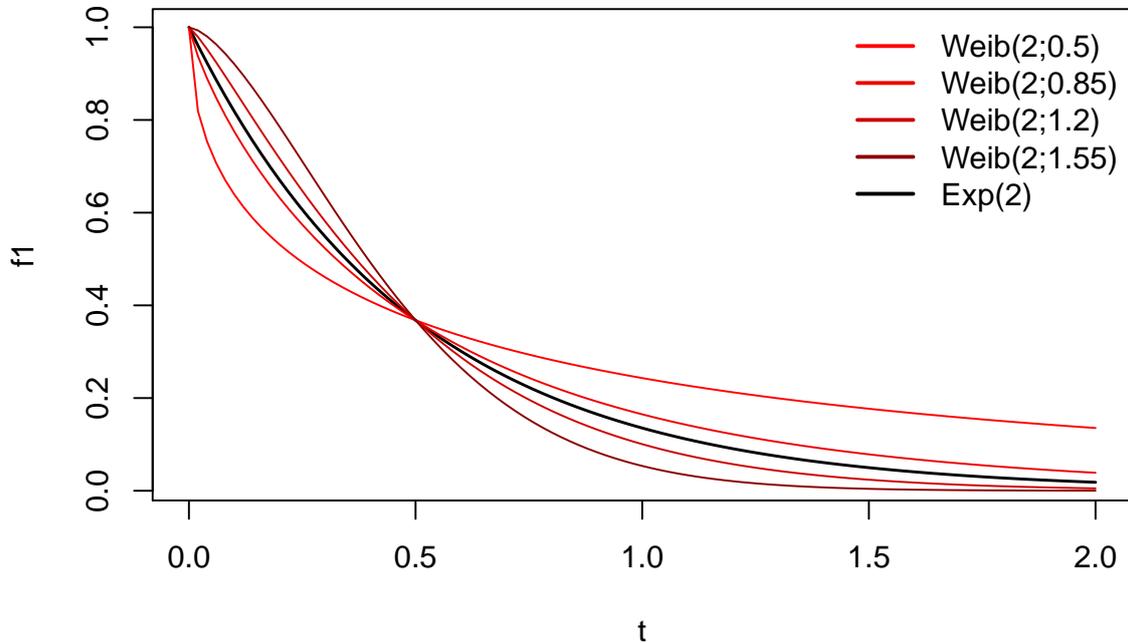
sExp <- function(t,p) exp(-p*t) # Función auxiliar.
sWei <- function(t,p,a) exp(-(p^a)*(t^a)) # Función auxiliar.

f1 <- function(t) sExp(t,pf) # Función supervivencia X1 e Y.
f2a <- function(t) sWei(t,pf,ps[1]) # Funciones de supervivencia
f2b <- function(t) sWei(t,pf,ps[2]) # de la componente X2
f2c <- function(t) sWei(t,pf,ps[3]) # para distintos valores de
f2d <- function(t) sWei(t,pf,ps[4]) # alpha.
```

para posteriormente representarlas en la siguiente gráfica,

```
plot(f1, xlim = c(0,2), main='Supervivencias Componentes', xlab = 't',lwd=1.5)
legend("topright",col=c("red1","red2","red3","red4","black"),
      legend = c(paste('Weib(',pf,',';','ps[1],')', sep= ''),
                 paste('Weib(',pf,',';','ps[2],')', sep= ''),
                 paste('Weib(',pf,',';','ps[3],')', sep= ''),
                 paste('Weib(',pf,',';','ps[4],')', sep= ''),
                 paste('Exp(',pf,')',sep= '')), lwd =2,bty = "n")
plot(f2a, xlim = c(0,2), add=TRUE, col=paste('red',1,sep= ''))
plot(f2b, xlim = c(0,2), add=TRUE, col=paste('red',2,sep= ''))
plot(f2c, xlim = c(0,2), add=TRUE, col=paste('red',3,sep= ''))
plot(f2d, xlim = c(0,2), add=TRUE, col=paste('red',4,sep= ''))
```

Supervivencias Componentes



Veamos ahora que los sistemas W_1 y W_2 se ordenan en preferencia. Para ello estudiaremos la diferencia $P(W_1 > W_2) - P(W_2 > W_1)$, que, considerando convoluciones, viene dada por,

$$\begin{aligned}
 &P(W_1 > W_2) - P(W_2 > W_1) \\
 &= \int_0^{+\infty} P(X_2 > x, Y > x | X_1 = x) dF_1(x) - \int_0^{+\infty} P(X_1 > x, Y > x | X_2 = x) dF_2(x) \\
 &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(2\lambda t + \lambda^\alpha t^\alpha)} dt - \int_0^{+\infty} \lambda^\alpha \alpha t^{\alpha-1} e^{-(2\lambda t + \lambda^\alpha t^\alpha)} dt := \int_0^{+\infty} W12(t) - W21(t) dt.
 \end{aligned}$$

Definimos las funciones siguientes para la ayuda del cálculo de esta última integral.

```

W12 <- function(t,p,a) p*exp(-(2*p*t+(p^a)*(t^a))) # Función auxiliar.
W21 <- function(t,p,a)
  {(p^a)*a*(t^(a-1))*exp(-(2*p*t+(p^a)*(t^a)))} # Función auxiliar.

d1 <- function(t) W12(t,pf,ps[1]) - W21(t,pf,ps[1]) # Diferencias para
d2 <- function(t) W12(t,pf,ps[2]) - W21(t,pf,ps[2]) # los diferentes
d3 <- function(t) W12(t,pf,ps[3]) - W21(t,pf,ps[3]) # valores de alpha.
d4 <- function(t) W12(t,pf,ps[4]) - W21(t,pf,ps[4])
  
```

Para los distintos valores del parámetro α , los valores de la diferencia $P(W_1 > W_2) - P(W_2 > W_1)$ son,

```
i1 <- integrate(d1,0,Inf) # Cálculo de las integrales.
i2 <- integrate(d2,0,Inf)
i3 <- integrate(d3,0,Inf)
i4 <- integrate(d4,0,Inf)
```

```
i1;i2;i3;i4
```

```
## -0.1572733 with absolute error < 4.7e-05
```

```
## -0.03710652 with absolute error < 3e-06
```

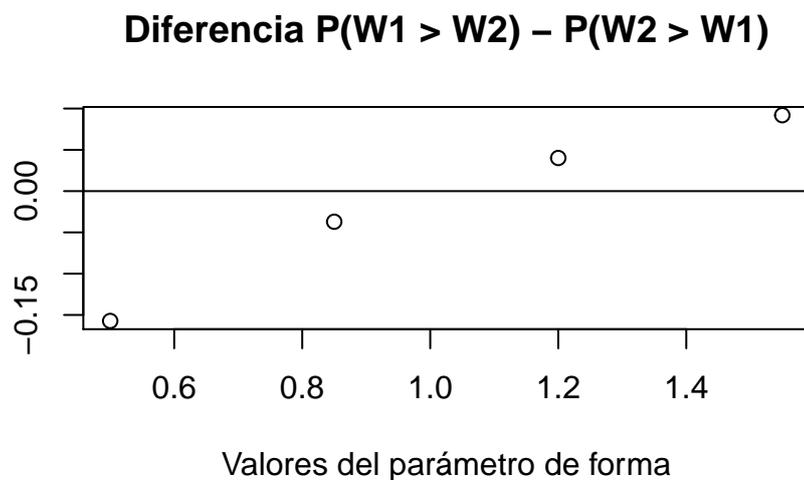
```
## 0.04011423 with absolute error < 5.1e-08
```

```
## 0.09196825 with absolute error < 1.1e-08
```

Representamos en la siguiente gráfica para los valores de α los valores de la diferencia.

```
vec <- c(i1[1],i2[1],i3[1],i4[1]) # Vector auxiliar.
```

```
plot(ps,vec,type='p',xlab='Valores del parámetro de forma',
      ylab='', main = 'Diferencia P(W1 > W2) - P(W2 > W1)')
abline(h=0)
abline(v=0)
```



Los sistemas W_1 y W_2 verifican que si $\alpha = 0.5$ o 0.85 , entonces, $W_2 \geq_{pr} W_1$, mientras que si $\alpha = 1.2$ o 1.55 , entonces $W_1 \geq_{pr} W_2$.

Ejemplo VII: Funciones de razón de fallo para sistemas en serie con dos componentes exponenciales y redundancia activa común.

Formaremos los sistemas W_1 y W_2 cuyas razones de fallo se expresan, por el Lema 2.4.2., como,

$$r_{W_1}(t) = r_2(t) + \frac{f_1(t)G(t) + F_1(t)g(t)}{1 - F_1(t)G(t)}$$

$$r_{W_2}(t) = r_1(t) + \frac{f_2(t)G(t) + F_2(t)g(t)}{1 - F_2(t)G(t)}$$

Ejemplo VII.1.

Consideremos las componentes con distribuciones exponenciales $X_1 \sim \exp(\lambda_1 = 1/10)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2 = 3/10)$ e $Y \sim \exp(\lambda = 1/2)$, que será la componente redundante común. Se cumple $X_1 \geq_{hr} X_2 \geq_{hr} Y$.

Para realizar el cálculo de las razones de fallo necesitaremos de las funciones auxiliares siguientes.

```
#los valores de lambda para cada una de las variables.
l1 <- 1/10 #para X1
l2 <- 3/10 #para X2
l <- 1/2 #para X3

#función de distribución de exponenciales con parámetro a.
dist <- function(t,a) 1 - exp(-a*t)

#función de densidad de exponenciales con parámetro a.
dens <- function(t,a) a*exp(-a*t)

#función num para el cálculo del numerador de la fracción
# en la expresión de la razón de fallo. Dependerán de los parámetros
# de las distribuciones.
num <- function(t,a,b) dens(t,a)*dist(t,b) + dens(t,b)*dist(t,a)

#función den para el cálculo del denominador de la fracción
# en la expresión de la razón de fallo. Dependerán de los parámetros
# de las distribuciones.
den <- function(t,a,b) 1 - dist(t,a)*dist(t,b)
```

Teniendo en cuenta que la razón de fallo de una distribución exponencial es su parámetro λ , las funciones razón de fallo r_{W_1} y r_{W_2} , se escribirán como sigue,

```
rw1 <- function(t) l2 + num(t,l1,l)/den(t,l1,l)
rw2 <- function(t) l1 + num(t,l2,l)/den(t,l2,l)
```

Las funciones de razón de fallo y la función diferencia son dibujadas a continuación.

```
#función diferencia de las dos razones de fallo.
dif <- function(t) rw1(t) - rw2(t)

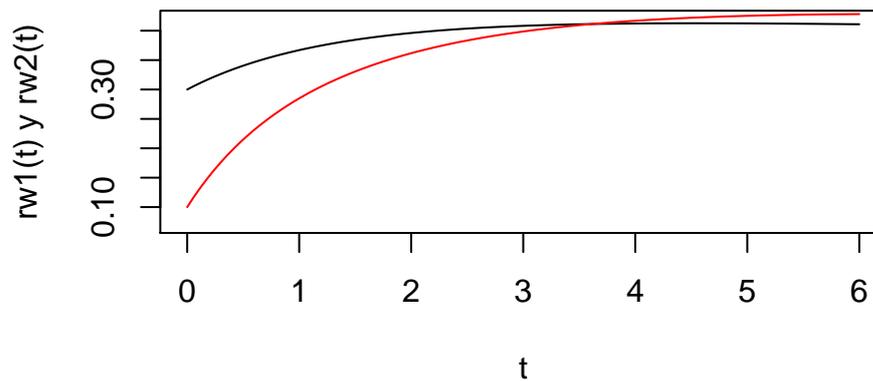
# Dibujamos las funciones razón de fallo. En negro para W1 y rojo
# para W2.
plot(rw1,ylim = c(0.07,0.42),xlim = c(0,6),xlab = 't',
```

```

ylab='rw1(t) y rw2(t)',main='Razones de fallo para W1 y W2')
plot(rw2, xlim = c(0,6),xlab = 't', col='red',add=TRUE)

```

Razones de fallo para W1 y W2

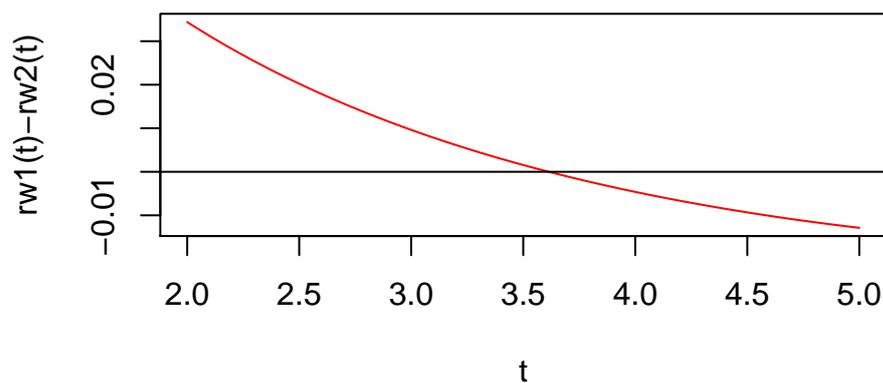


```

# Dibujamos la función diferencia de razones de fallo.
plot(dif, col='red',xlim = c(2,5), xlab = 't',
      ylab='rw1(t)-rw2(t)',main='Diferencia entre rw1 - rw2')
abline(a=0,b=0)

```

Diferencia entre rw1 - rw2



Por tanto, no se ordenan en orden razón de fallo los tiempos de vida W_1 y W_2 .

Ejemplo VII.2.

Consideremos ahora las componentes con distribuciones exponenciales $X_1 \sim \exp(\lambda_1 = 1/2)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2 = 3/10)$ e $Y \sim \exp(\lambda = 1/10)$, que será la componente redundante común. $X_1 \leq_{hr} X_2 \leq_{hr} Y$.

CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES

Realizamos los mismos pasos que en el anterior apartado definiendo ahora las nuevas funciones de razón de fallo.

```
# nuevos parámetros para las variables.
l1_1 <- 1/2
l2_1 <- 3/10
l_1 <- 1/10

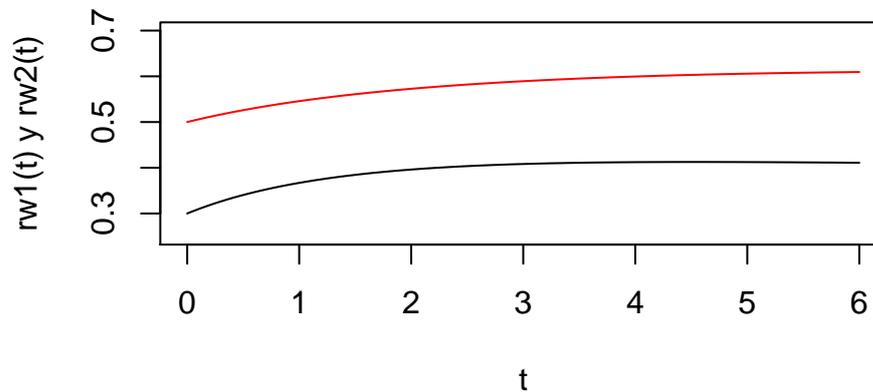
# funciones razón de fallo para W1 y W2.
rw1_1 <- function(t) l2_1 + num(t,l1_1,l_1)/den(t,l1_1,l_1)
rw2_1 <- function(t) l1_1 + num(t,l2_1,l_1)/den(t,l2_1,l_1)

# función diferencia para las razones de fallo.
dif_1 <- function(t) rw1_1(t) - rw2_1(t)
```

Dibujamos las razones de fallo de r_{W_1} y r_{W_2} para las nuevas componentes y su diferencia.

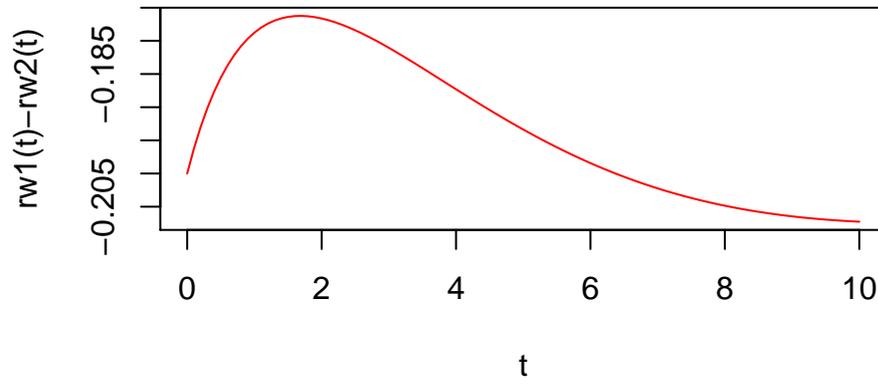
```
# Razones de fallo.
plot(rw1_1,ylim = c(0.25,0.7),xlim = c(0,6),xlab = 't',
     ylab='rw1(t) y rw2(t)',main='Razones de fallo para W1 y W2')
plot(rw2_1, xlim = c(0,6),xlab = 't', col='red',add=TRUE)
```

Razones de fallo para W1 y W2



```
# Diferencia entre ambas.
plot(dif_1, col='red',xlim = c(0,10), xlab = 't',
     ylab='rw1(t)-rw2(t)',main='Diferencia entre rw1 - rw2')
abline(a=0,b=0)
```

Diferencia entre $rw_1 - rw_2$



La razón de fallo del sistema W_1 es menor, para todo tiempo t , que la razón de fallo de W_2 por lo que se obtiene el resultado $W_1 \geq_{hr} W_2$.

Ejemplo IX: Orden de razón de fallo para sistemas en serie con componentes con razón de fallo lineales y redundancia activa uno a uno no igualmente distribuidad.

Sean X_1, X_2, Y_1 e Y_2 las componentes de los sistemas U_1 y U_2 . Sean las razones de fallo de X_1 y X_2 , $r_1(t) = 100t + 10$ y $r_2(t) = 58t + 3$, respectivamente, y las razones de fallo de las redundancias cumpliendo $s_2(t) \geq s_1(t)$. Y sea la función $\alpha(t) = r_2(t)/r_1(t)$.

```
a<-100
b<-10
c<-58
d<-3
r1 <- function(t) a*t + b
r2 <- function(t) c*t + d

alpha <- function(t) r2(t)/r1(t)
```

Nuestra intención es la de comprobar que la función $\alpha(t)$ es creciente y que no existe un $t \geq 0$ para el que se cumpla $\alpha(t) > \delta(m) = 1 - m^{m/1-m} + m^{1/1-m}$, donde $m = \inf_{t>0} \alpha(t)$. El ínfimo para la función $\alpha(t)$ será $m = 3/10$ y el supremo $s = \sup_{t>0} \alpha(t) = 58/100$.

```
m <- 3/10 #ínfimo de alpha.
s <- 58/100 #supremo de alpha.
e <- 1/(1-m) #variable auxiliar para el cálculo de delta.
delta <- 1 - m^(m*e) + m^(e) #delta(m).
```

#Sus valores son:

```
m
```

```
## [1] 0.3
```

```
s
```

```
## [1] 0.58
```

```
delta
```

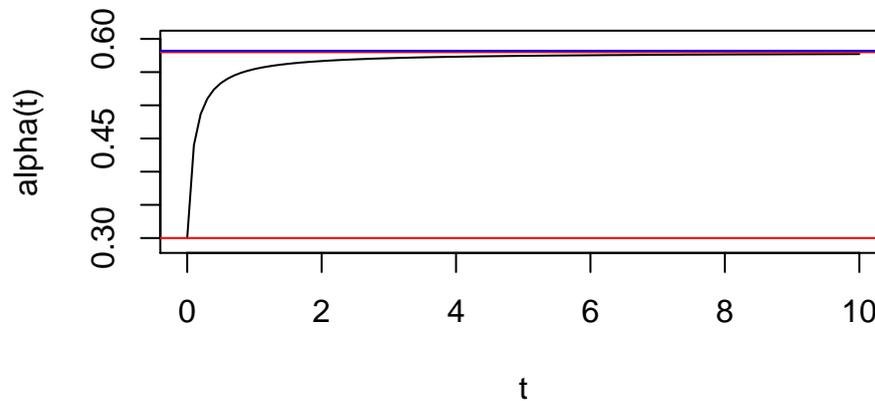
```
## [1] 0.5821628
```

Dibujamos la función $\alpha(t)$ junto con sus límites inferior y superior (en rojo) y el valor de $\delta(m)$ (en azul).

#Para el intervalo de t (0,10)

```
plot(alpha, xlim = c(0,10), ylim = c(0.29,0.6), xlab = 't', ylab='alpha(t)',
      main='Componentes con razones de fallo lineales')
abline(a =s, b=0, col='red')
abline(a =m, b=0, col='red')
abline(a=delta, b=0, col='blue')
```

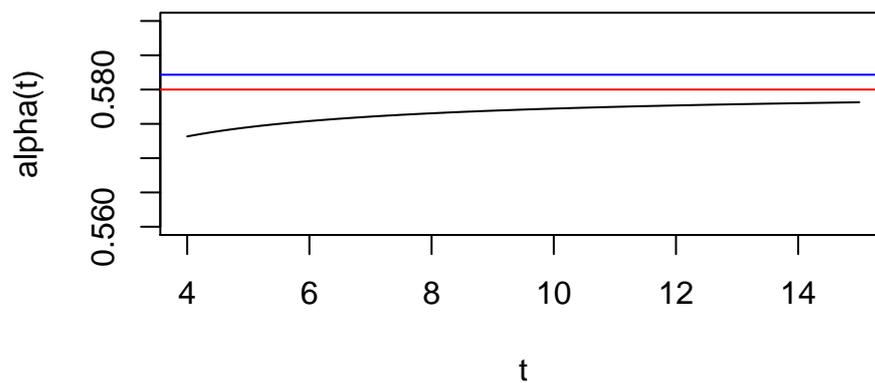
Componentes con razones de fallo lineales



#Para el intervalo de t (4,15)

```
plot(alpha, xlim = c(4,15), ylim = c(0.56,0.59), xlab = 't', ylab='alpha(t)',  
      main='Componentes con razones de fallo lineales')  
abline(a=s, b=0, col='red')  
abline(a=m, b=0, col='red')  
abline(a=delta, b=0, col='blue')
```

Componentes con razones de fallo lineales



Como puede observarse, los valores de $\alpha(t)$, para cada $t \geq 0$, son menores que $\delta(m) \approx 0.5821$ y, en virtud del Teorema 2.4.6., se asegura el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Comprobemos ahora que las componentes con razones de fallo $r_1(t) = 5t + 10$, $r_2(t) = 3t + 3$, no cumplen las hipótesis de los Teoremas 2.4.4. y 2.4.6. Definimos las funciones $r_1(t)$, $r_2(t)$ y $\alpha(t)$ para estos nuevos valores.

```
a<-5
b<-10
c<-3
d<-3
```

Calculemos los valores de m , s y $\delta(m)$.

```
m <- 3/10 #ínfimo de alpha.
s <- 3/5 #supremo de alpha.
e <- 1/(1-m) #variable auxiliar para el cálculo de delta.
delta <- 1 - m^(m*e) + m^(e) #delta(m).
```

#Sus valores son:

```
m
```

```
## [1] 0.3
```

```
s
```

```
## [1] 0.6
```

```
delta
```

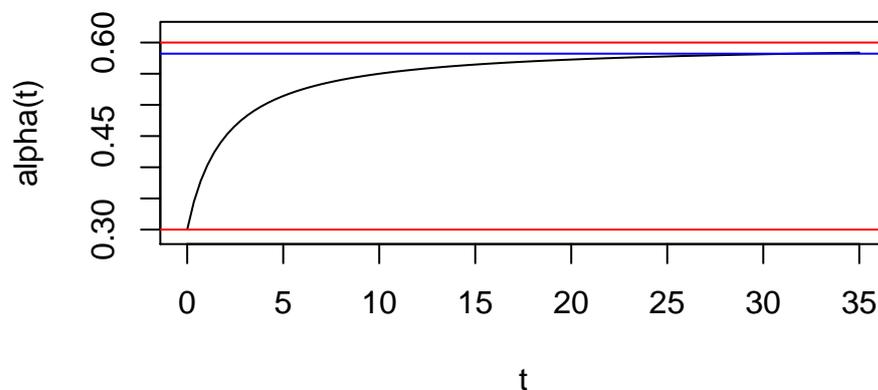
```
## [1] 0.5821628
```

Dibujamos la función $\alpha(t)$ junto con sus límites inferior y superior (en rojo) y el valor de $\delta(m)$ (en azul).

#Para el intervalo de t (0,35)

```
plot(alpha, xlim = c(0,35), ylim = c(0.29,0.62), xlab = 't', ylab='alpha(t)',
      main='Componentes con razones de fallo lineales')
abline(a =s, b=0, col='red')
abline(a =m, b=0, col='red')
abline(a=delta, b=0, col='blue')
```

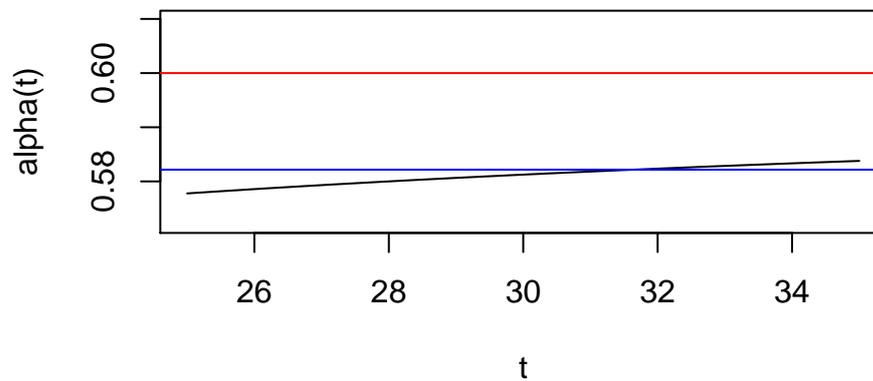
Componentes con razones de fallo lineales



```
#Para el intervalo de t (25,35)
```

```
plot(alpha, xlim = c(25,35), ylim = c(0.572,0.61), xlab = 't', ylab='alpha(t)',  
      main='Componentes con razones de fallo lineales')  
abline(a=s, b=0, col='red')  
abline(a=m, b=0, col='red')  
abline(a=delta, b=0, col='blue')
```

Componentes con razones de fallo lineales



En virtud de los Teoremas 2.4.4. y 2.4.6. no se puede asegurar el orden razón de fallo de los sistemas U_1 y U_2 . Por ser la función $r_1(t)F_2(t) - r_2(t)F_1(t)$ mayor o igual que cero, sí se verifican las hipótesis del Teorema 2.4.7. pudiendo verificar el orden $U_1 \geq_{hr} U_2$.

Ejemplo XVI: Orden de razón de fallo para sistemas en serie con componentes con razón de fallo lineales y dos redundancias activas uno a uno iguales.

Sean las componentes X_1, X_2, Y_1 e Y_2 de los sistemas V_1 y V_2 . Sean las razones de fallo de X_1 y X_2 , $r_1(t) = 5t + 2$ y $r_2(t) = 4t + 1$, respectivamente, y las razones de fallo de las redundancias cumpliendo $Y_1 =_{st} X_2$ e $Y_2 =_{st} X_2$. Además, sea la función $\alpha(t) = r_2(t)/r_1(t)$.

```
r1 <- function(t) 5*t + 2
r2 <- function(t) 4*t + 1

alpha <- function(t) r2(t)/r1(t)
```

En este ejemplo queremos comprobar que no se cumplen las hipótesis de los Teoremas 3.3.3 y 3.3.5 pero sí que lo hacen las hipótesis del Teorema 3.3.6 para asegurar el orden $V_1 \leq_{hr} V_2$.

La función $\alpha(t)$ es creciente y, además, supera el valor de $\delta(m) = \frac{m+1}{2}$ donde $m = \inf_{t>0} \alpha(t)$. Este ínfimo, para la función $\alpha(t)$, será $m = 1/2$ y el supremo $\sup \alpha(t) = 4/5$.

```
m <- 1/2 #ínfimo de alpha.
s <- 4/5 #supremo de alpha.
delta <- (m+1)/2 #delta(m).
```

#Sus valores son:

```
m
## [1] 0.5

s
## [1] 0.8

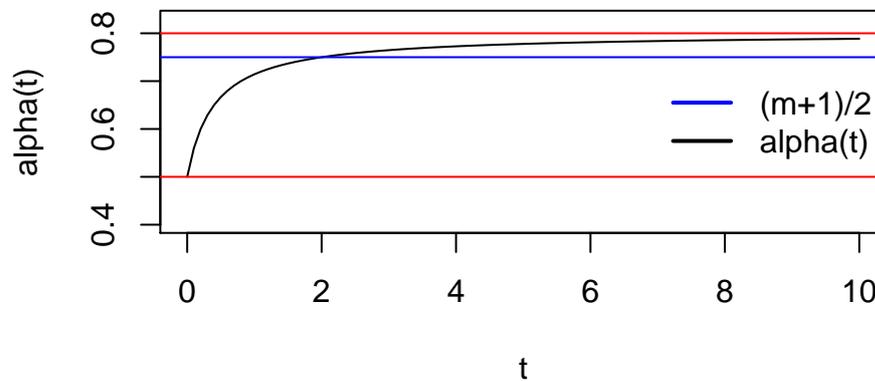
delta
## [1] 0.75
```

Dibujamos la función $\alpha(t)$ junto con sus límites inferior y superior (en rojo) y el valor de $\delta(m)$ (en azul).

```
#Para el intervalo de t (0,10)

plot(alpha, xlim = c(0,10), ylim = c(0.4,0.83), xlab = 't', ylab='alpha(t)',
      main='Componentes con razones de fallo lineales')
legend("right", col=c("blue", "black"),
      legend = c('(m+1)/2', 'alpha(t)'), lwd = 2, bty = "n")
abline(a = s, b=0, col='red')
abline(a = m, b=0, col='red')
abline(a=delta, b=0, col='blue')
```

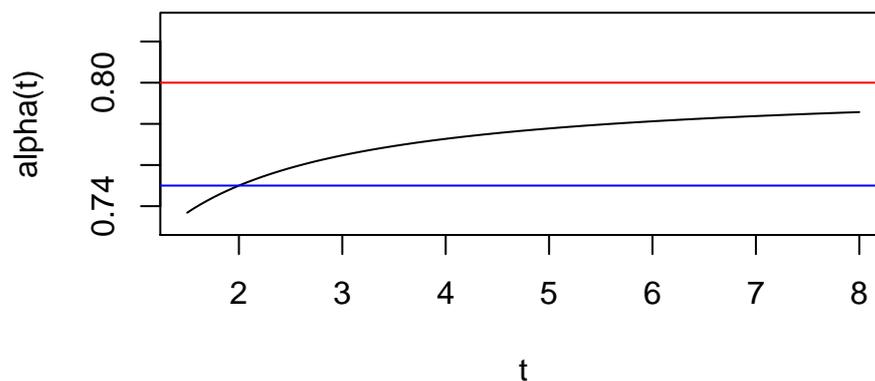
Componentes con razones de fallo lineales



#Para el intervalo de t (1.5,8)

```
plot(alpha, xlim = c(1.5,8), ylim = c(0.73,0.83), xlab = 't', ylab='alpha(t)',
      main='Componentes con razones de fallo lineales')
abline(a=s, b=0, col='red')
abline(a=m, b=0, col='red')
abline(a=delta, b=0, col='blue')
```

Componentes con razones de fallo lineales



Para $t = 3$, el valor de $\alpha(3) = 0.7647059 > \delta(m) = 0.75$, por lo que las hipótesis de los Teoremas 3.3.3 y 3.3.5 no se verifican.

Comprobemos ahora que, la función $g(t) := (1 + F_2(t))/(1 + F_1(t)) = (2 - \bar{F}_2(t))/(2 - \bar{F}_1(t))$ tiene un mínimo absoluto y que éste es mayor que $\alpha(t)$ para cada $t \geq 0$.

En primer lugar, los valores para las supervivencias de las componentes tienen la expresión,

$$\bar{F}_1(t) = e^{-\int_0^t 5x+2dx} = e^{-(\frac{5}{2}t^2+2t)}$$

y

$$\bar{F}_2(t) = e^{-\int_0^t 4x+1dx} = e^{-(2t^2+t)}.$$

La expresión de $g(t)$ queda como,

$$g(t) = \frac{2 - e^{-(2t^2+t)}}{2 - e^{-(\frac{5}{2}t^2+2t)}}.$$

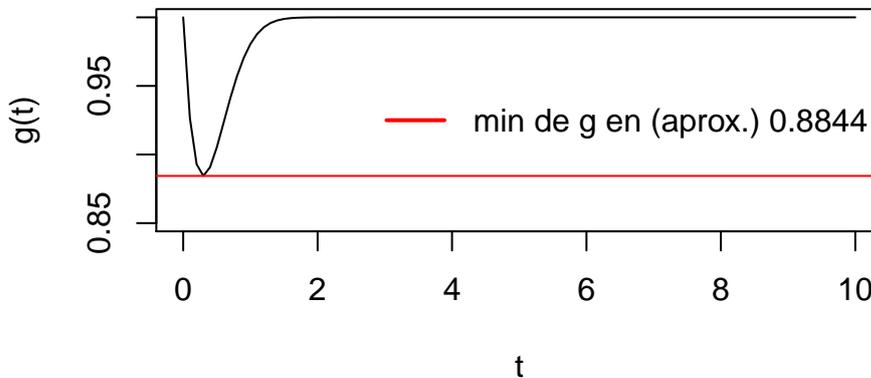
```
F1<- function(t) exp(-(5*t*t/2 + 2*t))
F2<- function(t) exp(-(2*t*t+t))

g <- function(t) ((2 - F2(t))/(2 - F1(t)))
```

Dibujamos la gráfica de la función $g(t)$.

```
plot(g, xlim = c(0,10), ylim=c(0.85,1), xlab = 't', ylab='g(t)',
     main='Gráfica de g(t)')
legend("right",col=c("red"),
      legend = c('min de g en (aprox.) 0.8844'), lwd = 2,bty = "n")
abline(h=0.8844,col='red') #mínimo en t aprox. 0.3 y g(0.3) aprox. 0.8844
```

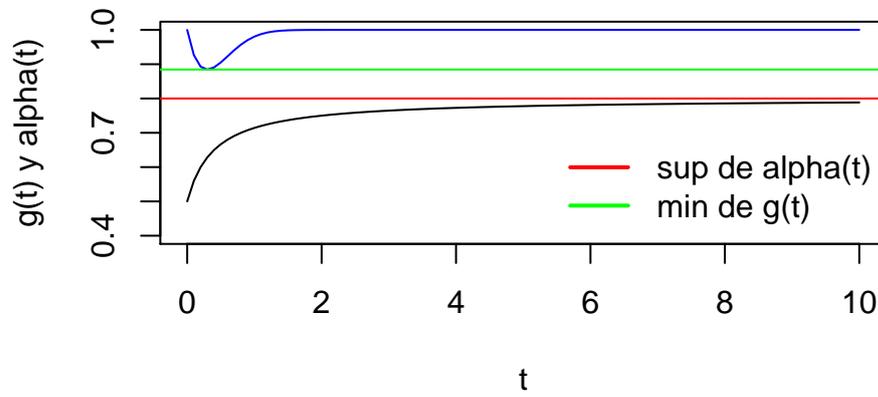
Gráfica de $g(t)$



Como se puede observar en el gráfico, la función $g(t)$ tiene un mínimo en $t \approx 0.3$, lo que supone una imagen $g(0.3) = 0.8843946$. Si hacemos la representación conjunta de ambas funciones, $g(t)$ en azul y $\alpha(t)$ en negro, podremos ver, que para cada $t \geq 0$, $\alpha(t) \leq \min_{t \geq 0} g(t)$.

```
plot(g, xlim = c(0,10), ylim=c(0.4,1), xlab = 't', ylab='g(t) y alpha(t)',
     main='Comparación de g(t) y alpha(t)', col='blue')
legend("bottomright",col=c("red","green"),
      legend = c('sup de alpha(t)', 'min de g(t)'),
      lwd = 2,bty = "n")
plot(alpha, xlim = c(0,10), xlab = 't', ylab='alpha(t)',add=TRUE)
abline(a=s, b=0, col='red') #supremo de alpha(t)
abline(a=0.8844, b=0, col='green') #mínimo de g(t)
```

Comparación de $g(t)$ y $\alpha(t)$



Por lo que podemos asegurar, en virtud del Teorema 3.3.6, que se verifica el orden $V_1 \leq_{hr} V_2$.

Simulación de los sistemas W_1 y W_2 con componentes y redundancia exponencialmente distribuidas.

Con esta simulación pretendemos emular los tiempos de vida de los sistemas W_1 y W_2 , a partir de la simulación de los tiempos de vida de sus componentes y redundancia, para verificar que se ordenan estocásticamente, en orden razón de fallo y en orden cociente de verosimilitud.

Sean las componentes con tiempos de vida X_1 y X_2 distribuidas exponencialmente de parámetros $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0.7$ e Y con distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.3$. Por la elección de los parámetros ($\lambda_1 \geq v(\lambda_2, \lambda)$) y por el Teorema 2.6.1, ha de verificarse que $W_1 \geq_{lr} W_2$.

Definimos los parámetros de las componentes, el parámetro de la redundancia y el tamaño de muestra.

```
n <- 10000 # Tamaño de la muestra
pC1 <- 1 # Parámetro Componente 1
pC2 <- 0.7 # Parámetro Componente 2
pR <- 0.3 # Parámetro Redundancia
```

Simulamos los tiempos de vida de las componentes y calculamos los tiempos de vida de los sistemas W_1 y W_2 .

```
sistema1<-0 # Variable auxiliar que almacena el tiempo de vida del sistema 1.
sistema2<-0 # Variable auxiliar que almacena el tiempo de vida del sistema 2.
muestraExpC1 <- rexp(n, rate = pC1) #Simulación Componente 1.
muestraExpC2 <- rexp(n, rate = pC2) #Simulación Componente 2.
muestra1ExpR <- rexp(n, rate = pR) #Simulación Redundancia.
for(i in 1:n){
  sistema1[i] <- min(max(muestraExpC1[i],muestra1ExpR[i]),muestraExpC2[i])
  # Cálculo del tiempo de vida simulado para el sistema W_1
  sistema2[i] <- min(muestraExpC1[i],max(muestraExpC2[i],muestra1ExpR[i]))
  # Cálculo del tiempo de vida simulado para el sistema W_2
}
```

Utilizamos la función “ecdf” de R para calcular la función de distribución empírica de cada sistema.

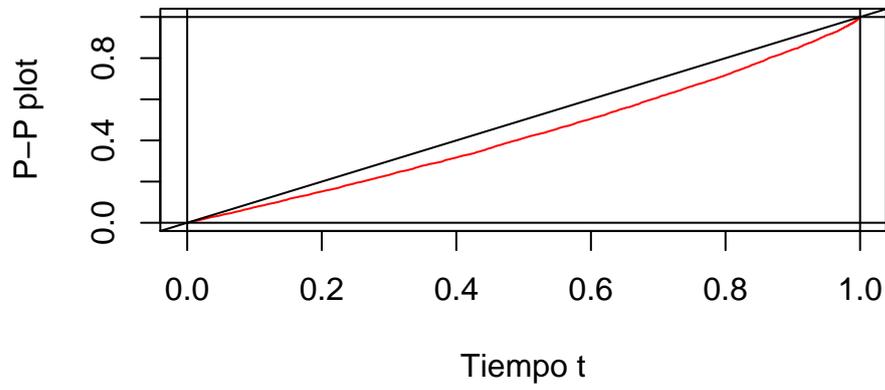
```
FdDW1<-ecdf(sistema1) #Función de distribución empírica sistema W_1
FdDW2<-ecdf(sistema2) #Función de distribución empírica sistema W_2
```

En los Teoremas 1.2.7., 1.3.4. y 1.4.3. de Müller y Stoyan [25] se prueba que:

1. $W_1 \geq_{st} [\leq_{st}] W_2$ se verifica si, y solo si, la gráfica de la curva $(F_{W_2}(t), F_{W_1}(t))$ está por debajo [encima] de la recta bisectriz.
2. $W_1 \geq_{hr} W_2$ se verifica si, y solo si, la gráfica de la curva $(F_{W_2}(t), F_{W_1}(t))$ es estrellada con respecto del punto $(1, 1)$.
3. $W_1 \geq_{lr} W_2$ se verifica si, y solo si, la gráfica de la curva $(F_{W_2}(t), F_{W_1}(t))$ es convexa.

Representamos la curva paramétrica $(F_{W_2}(t), F_{W_1}(t))$ para comprobar que se verifican las tres condiciones anteriores.

```
plot(FdDW2(x), FdDW1(x), type='l', ylim=c(0,1), xlab = 'Tiempo t',
      ylab = 'P-P plot', col='red')
abline(h = 0)
abline(v = 0)
abline(h = 1)
abline(v = 1)
abline(a=0,b=1)
```



La gráfica de $(F_{W_2}(t), F_{W_1}(t))$ es convexa y, por tanto, los sistemas verifican que $W_1 \geq_{lr} [\geq_{hr}, \geq_{st}] W_2$, como queríamos comprobar.

Simulación de los sistemas V_1 y V_2 con componentes y redundancias exponencialmente distribuidas.

Con esta simulación pretendemos emular los tiempos de vida de los sistemas V_1 y V_2 , a partir de la simulación de los tiempos de vida de sus componentes y redundancias, para verificar que se ordenan estocásticamente, en orden razón de fallo y en orden cociente de verosimilitud.

Sean las componentes con tiempos de vida X_1 y X_2 distribuidas exponencialmente de parámetros $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0.5$ y las redundancias con tiempos de vida Y_1 e Y_2 uno a uno igualmente distribuidas. Por el Teorema 3.3.11, ha de verificarse que $V_1 \leq_{lr} V_2$.

Definimos los parámetros de las componentes y reposiciones y el tamaño de muestra.

```
n <- 10000 # Tamaño de la muestra
pC1 <- 1 # Parámetro Componente 1
pC2 <- 0.5 # Parámetro Componente 2
pR1 <- 1 # Parámetro Redundancia 1
pR2 <- 0.5 # Parámetro Redundancia 2
```

Simulamos los tiempos de vida de las componentes y calculamos los tiempos de vida de los sistemas V_1 y V_2 .

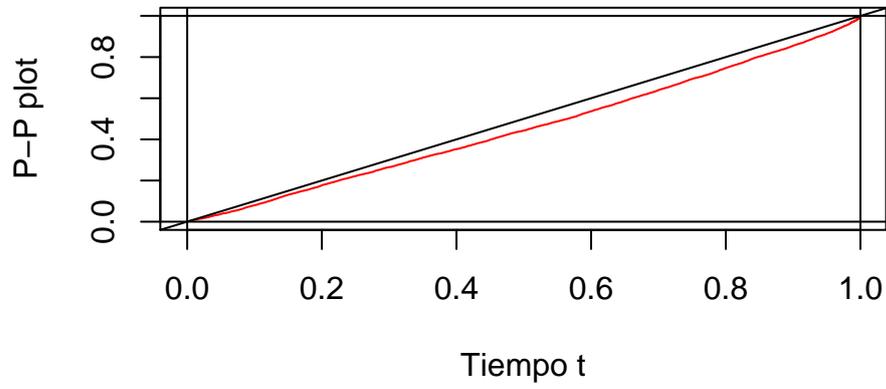
```
sistema1<-0 # Variable auxiliar que almacena el tiempo de vida del sistema 1.
sistema2<-0 # Variable auxiliar que almacena el tiempo de vida del sistema 2.
muestraExpC1 <- rexp(n, rate = pC1) #Simulación Componente 1.
muestraExpC2 <- rexp(n, rate = pC2) #Simulación Componente 2.
muestra1ExpR1 <- rexp(n, rate = pR1) #Simulación Redundancia 1.
muestra1ExpR2 <- rexp(n, rate = pR2) #Simulación Redundancia 2.
for(i in 1:n){
  sistema1[i] <- min(max(muestraExpC1[i],muestra1ExpR1[i]),
                    max(muestraExpC2[i],muestra1ExpR2[i]))
  # Cálculo del tiempo de vida simulado para el sistema V_1.
  sistema2[i] <- min(max(muestraExpC1[i],muestra1ExpR2[i]),
                    max(muestraExpC2[i],muestra1ExpR1[i]))
  # Cálculo del tiempo de vida simulado para el sistema V_2.
}
```

Utilizamos la función “ecdf” de R para calcular la función de distribución empírica de cada sistema.

```
FdDV1<-ecdf(sistema1) #Función de distribución empírica sistema V_1
FdDV2<-ecdf(sistema2) #Función de distribución empírica sistema V_2
```

En el Teoremas 1.4.3. de Müller y Stoyan [25] se prueba que $V_1 \leq_{lr} V_2$ se verifica si, y solo si, la gráfica de la curva $(F_{V_1}(t), F_{V_2}(t))$ es convexa. Representamos la curva paramétrica $(F_{V_1}(t), F_{V_2}(t))$.

```
plot(FdDV1(x),FdDV2(x), type='l', ylim=c(0,1), xlab = 'Tiempo t',
     ylab = 'P-P plot', col='red')
abline(h = 0)
abline(v = 0)
abline(h = 1)
abline(v = 1)
abline(a=0,b=1)
```



La gráfica de $(F_{V_1}(t), F_{V_2}(t))$ es convexa y, por tanto, los sistemas verifican que $V_1 \leq_{lr} V_2$, como queríamos comprobar.

Notación de sistemas

A modo de resumen, para el lector, se incluyen, en este apéndice, las definiciones y notación de los sistemas más característicos estudiados en la memoria.

Redundancia activa y una componente redundante.

- a) $W_1 = \wedge(\vee(X_1, Y), X_2)$ y $W_2 = \wedge(X_1, \vee(X_2, Y))$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia activa y reposición común.
- b) $W_1^{(k)} = (\vee(X_1, Y), X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $W_2^{(k)} = (X_1, \vee(X_2, Y), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia activa y reposición común, para $n \geq 3$ y $2 \leq k \leq n$.
- c) $U_1 = \wedge(\vee(X_1, Y_1), X_2)$ y $U_2 = \wedge(X_1, \vee(X_2, Y_2))$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia activa y reposición uno a uno.
- d) $U_1^{(k)} = (\vee(X_1, Y_1), X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $U_2^{(k)} = (X_1, \vee(X_2, Y_2), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia activa y reposición uno a uno, para $n \geq 3$ y $2 \leq k \leq n$.

Redundancia en espera y una componente redundante.

- a) $W'_{\wedge 1} = \wedge(X_1 + Y, X_2)$ y $W'_{\wedge 2} = \wedge(X_1, X_2 + Y)$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia en espera y reposición común.
- b) $W'_{\vee 1} = \vee(X_1 + Y, X_2)$ y $W'_{\vee 2} = \vee(X_1, X_2 + Y)$. Sistema en paralelo para dos componentes con redundancia en espera y reposición común.
- c) $W_1'^{(k)} = (X_1 + Y, X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $W_2'^{(k)} = (X_1, X_2 + Y, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia en espera y reposición común, para $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n$.
- d) $U'_{\wedge 1} = \wedge(X_1 + Y_1, X_2)$ y $U'_{\wedge 2} = \wedge(X_1, X_2 + Y_2)$. Sistema en serie para dos componentes con redundancia en espera y reposición uno a uno.
- e) $U'_{\vee 1} = \vee(X_1 + Y_1, X_2)$ y $U'_{\vee 2} = \vee(X_1, X_2 + Y_2)$. Sistema en paralelo para dos componentes con redundancia en espera y reposición uno a uno.
- f) $U_1'^{(k)} = (X_1 + Y_1, X_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $U_2'^{(k)} = (X_1, X_2 + Y_2, X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancia en espera y reposición uno a uno, para $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n$.

Redundancia activa y dos componentes redundantes.

- a) $V_1 = \wedge(\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2))$ y $V_2 = \wedge(\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1))$. Sistema en serie con dos componentes y redundancias activas y reposiciones uno a uno en X_1 y X_2 . En V_1 usamos la redundancia primera en la primera componente [segunda redundancia para segunda componente] y en V_2 usamos la segunda redundancia para la primera componente [primera redundancia en segunda componente].
- b) $V_1^{(k)} = (\vee(X_1, Y_1), \vee(X_2, Y_2), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$ y $V_2^{(k)} = (\vee(X_1, Y_2), \vee(X_2, Y_1), X_3, \dots, X_n)_{[k]}$. Sistema k -out of- n con redundancias activas y reposiciones uno a uno para las dos primeras componentes, para $n \geq 3$ y $2 \leq k \leq n$.

Índice alfabético

Estadístico ordenado, 13

Función

- de estructura, 10
- de supervivencia, 3
- razón de fallo, 4
- razón de fallo inversa, 5

Orden

- cociente de verosimilitudes, 8
- en preferencia, 9
- estocástico, 6
- razón de fallo, 7
- razón de fallo inverso, 7

Redundancia

- activa, 16
- en espera, 16

Reposición

- común, 17
- uno a uno igualmente distribuida, 17
- uno a uno no igualmente distribuida, 17

Sistema, 10

- k -out of- n , 12
- coherente, 11
- en paralelo, 11
- en serie, 11

ÍNDICE ALFABÉTICO

Bibliografía

- [1] Arnold, B.C.; Balakrishnan, N. y Nagaraja, H.N. (2008). *A First Course in Order Statistics*. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- [2] Barlow, R.E. y Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart and Winston, New York.
- [3] Barlow, R.E. y Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models*. Silver Spring. To begin with, Maryland.
- [4] Belzunce, F.; Martínez-Puertas, H. y Ruiz, J.M. (2011). On optimal allocation of redundant components for series and parallel systems of two dependent components. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **141**, 3094–3104.
- [5] Belzunce, F.; Martínez-Puertas, H. y Ruiz, J.M. (2013). On allocation of redundant components for systems with dependent components. *European Journal of Operational Research*, **230**, 573–580.
- [6] Block, H.; Savits, T. y Singh, H. (1998). The reversed hazard rate function. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **12**, 69–90.
- [7] Blyth, C.R. (1972). Some probability paradoxes in choice from among random alternatives. *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 366–373.
- [8] Boland, P.J.; El-Newehi, E. y Proschan, F. (1991). Redundancy importance and allocation of spares in coherent systems. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **29**, 55–65.
- [9] Boland, P.J.; El-Newehi, E. y Proschan, F. (1991). Stochastic Order for Inspection and Repair Policies. *The Annals of Applied Probability*, **1**, 207–218.
- [10] Boland, P.J.; El-Newehi, E. y Proschan, F. (1992). Stochastic order for redundancy allocation in series and parallel systems. *Advances in Applied Probability*, **24**, 161–171.
- [11] Boland, P.J.; El-Newehi, E. y Proschan, F. (1994). Applications of the Hazard Rate Ordering in Reliability and Order Statistics. *Journal of Applied Probability*, **31**, 180–192.

- [12] Boland, P.J. y Proschan, F. (1994). Stochastic order in system reliability theory. En: M. Shaked y J.G. Shanthikumar (Eds.), *Stochastic Orders and their Applications*, 485–508. Academic Press.
- [13] Brito, G.; Zequeira, R.I. y Valdés, J.E. (2011). On the hazard rate and reversed hazard rate orderings in two-component series systems with active redundancies. *Statistics and Probability Letters*, **81**, 201–206.
- [14] David, H.A. y Nagaraja, H.N. (2003). *Order Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, New York.
- [15] Ding, W. y Li, X. (2012). The optimal allocation of active redundancies to k-out of-n systems with respect to hazard rate ordering. *Journal of Statistics Planning and Inference*, **142**, 1878–1887.
- [16] Fang, R. y Li, X. (2016). On allocating one active redundancy to coherent systems with dependent and heterogeneous components' lifetimes. *Naval Research Logistics*, **63**, 335–345.
- [17] Finkelstein, M.S. (2002). On the reversed hazard rate. *Reliability Engineering & System Safety*, **48**, 71–75.
- [18] Hazra, N.K. y Nanda, A.K. (2014). Component redundancy versus system redundancy in different stochastic orderings. *IEEE Transactions on Reliability*, **63**, 567–582.
- [19] Hu, T. y Wang, Y. (2009). Optimal allocation of active redundancies in r-out-of-n systems. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**, 3733–3737.
- [20] Jeddi, H. y Doostparast, M. (2016). Optimal redundancy allocation problems in engineering systems with dependent component lifetimes. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **32**, 199–208.
- [21] Lai, C.D. y Xie, M. (2006). *Stochastic Ageing and Dependence for Reliability*. Springer Science + Business Media, New York.
- [22] Li, X. y Hu, X. (2008). Some new stochastic comparisons for redundancy allocations in series and parallel systems. *Statistics and Probability Letters*, **78**, 3388–3394.
- [23] Misra, N.; Misra, A.K. y Dhariyal, I.D. (2011). Active redundancy allocations in series systems. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **25**, 219–235.
- [24] Misra, N.; Misra, A.K. y Dhariyal, I.D. (2011). Standby redundancy allocations in series and parallel systems. *Journal of Applied Probability*, **48**, 43–55.
- [25] Müller, A. y Stoyan, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, Chichester.
- [26] Ramamurthy, K.G. (2012). *Coherent Structures and Simple Games*. Theory and Decision Library C. Springer Science + Business Media, New York.

BIBLIOGRAFÍA

- [27] Romera, R.; Valdés, J.E. y Zequeira, R.I. (2004). Active-redundancy allocation in systems. *IEEE Transactions on Reliability*, **53**, 313–318.
- [28] Shaked, M. y Shanthikumar, J.G. (1994). *Stochastic Orders and their Applications*. Probability and Mathematical Statistics. Academic Press, San Diego, CA.
- [29] Shaked, M. y Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer Series in Statistics. Springer Science + Business Media, New York.
- [30] Shanthikumar, J.G. y Yao, D.D. (1991). Bivariate characterization of some stochastic order relations. *Advances in Applied Probability*, **23**, 642–659.
- [31] Singh, H. y Misra, N. (1994). On redundancy allocations in systems. *Journal of Applied Probability*, **31**, 1004–1014.
- [32] Valdés, J.E.; Arango, G.; Zequeira, R.I. y Brito, G. (2010). Some stochastic comparisons in series systems with active redundancy. *Statistics and Probability Letters*, **80**, 945–949.
- [33] Valdés, J.E. y Zequeira, R.I. (2003). On the optimal allocation of an active redundancy in a two-component series system. *Statistics & Probability Letters*, **63**, 325–332.
- [34] Valdés, J.E. y Zequeira, R.I. (2006). On the optimal allocation of two active redundancies in a two-component series system. *Operations Research Letters*, **34**, 49–52.
- [35] You, Y. y Li, X. (2014). On allocating redundancies to k-out of-n reliability systems. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **30**, 361–371.
- [36] Zhao, P.; Chan, P.S.; Li, L. y Ng, H.K.T. (2013). On allocation of redundancies in two-component series system. *Operations Research Letters*, **41**, 690–693.
- [37] Zhao, P.; Chan, P.S. y Ng, H.K.T. (2012). Optimal allocation of redundancies in series system. *European Journal of Operational Research*, **220**, 673–683.
- [38] Zhao, P.; Zhang, Y. y Chen, J. (2017). Optimal allocation policy of one redundancy in a n-component series system. *European Journal of Operational Research*, **257**, 656–668.
- [39] Zhuang, J. y Li, X. (2015). Allocating redundancies to k-out of-n systems with independent and heterogeneous components. *Comunitations in Statistics - Theory and Methods*, **44**, 5109–5119.