

FACULTAD DE MATEMÁTICAS - UNIVERSIDAD DE MURCIA



TRABAJO FIN DE MÁSTER:

**ASPECTOS DE DINÁMICA TOPOLÓGICA EN
FUNCIONES CONTINUAS DEL INTERVALO QUE
CONMUTAN**

Trabajo realizado por:
Daniel Nieves Roldán

Dirigido por:
Dr. Antonio Linero Bas

Índice general

Índice de figuras	vi
Introducción	1
1. Preliminares	5
2. Puntos fijos comunes	11
2.1. Algunos casos especiales	12
2.2. Contraejemplo 1 - Huneke	20
2.2.1. Resultados previos	21
2.2.2. Construcción del contraejemplo.	27
2.3. Contraejemplo 2 - Boyce	35
2.4. Generalización del problema	41
3. Puntos periódicos comunes	47
3.1. Conjuntos minimales	48
3.2. Puntos periódicos comunes en funciones continuas	50
3.2.1. Resultados de Alikhani-Koopaei	51
3.2.2. Resultados de Steele	54
3.3. Puntos periódicos comunes en funciones continuamente diferenciables	59
3.4. Otros conjuntos de puntos	68
4. Entropía topológica	73
4.1. Definición y propiedades	74
4.2. Entropía topológica en composición de funciones	81
Anexo I: El Teorema de Sharkovsky	95
Anexo II: Conjuntos perfectos	101
Anexo III: Declaración de Originalidad	103
Bibliografía	105

Índice de figuras

1.1. Ejemplo para encontrar los puntos fijos de una función gráficamente.	6
1.2. Diagrama que ilustra la conjugación topológica. Imagen extraída de [BloCop].	9
2.1. Ejemplo de funciones <i>full</i> que conmutan.	13
2.2. Ejemplo de funciones conmutables que no son <i>full</i>	16
2.3. Funciones del ejemplo 2.16 al lema 2.15.	22
2.4. Ejemplo del lema 2.18.	24
2.5. Función con derivada de valor absoluto constante.	25
2.6. Funciones f y g del ejemplo 2.23	26
2.7. Funciones j y k del ejemplo 2.23.	27
2.8. Funciones referentes al lema 2.24.	27
2.9. Representación del conjunto A_2 en el intervalo unidad.	28
2.10. Funciones f_0 y g_0 de la construcción del contraejemplo de Huneke.	28
2.11. Funciones f_1 y g_1 de la construcción del contraejemplo de Huneke.	29
2.12. Las gráficas de f_2, g_2 y la diagonal; f_2 o g_2 cae entre las líneas punteadas donde $ x - f_2(x) \leq \frac{1}{6}$ o $ x - g_2(x) \leq \frac{1}{6}$. Imagen extraída de [Hun].	29
2.13. Ejemplo de funciones h y h^*	32
2.14. Función lineal a trozos $h : [\frac{1}{4}, \frac{11}{4} - \sqrt{5}] \rightarrow [0, 1]$	33
2.15. Ejemplo función \bar{g}	34
2.16. Ejemplo de (4)-conjunto.	36
2.17. Los cuatro tipos posibles de funciones gancho. Imagen extraída de [Boy1].	37
2.18. Funciones f_1 y g_1 de la construcción del contraejemplo de Boyce.	38
2.19. Funciones f_2 y g_2 de la construcción del contraejemplo de Boyce.	38
2.20. Las gráficas de f_3, g_3 . Imagen extraída de [Boy1].	39
2.21. Las gráficas de f_4, g_4 . Imagen extraída de [Boy1].	39
3.1. Ejemplo de función con conjunto de puntos fijos no numerable, pero típicamente sí es numerable.	67
4.1. Función que ilustra el teorema 4.10.	80
4.2. Ejemplo de función con entropía infinita.	81

4.3. Ejemplo de funciones con dinámica sencilla que al componerse determinan una función de dinámica compleja.	82
4.4. Composición de dos funciones que tiene dinámica compleja.	83
4.5. Ejemplo de dos funciones con dinámica compleja que al conmutar originan una función con dinámica sencilla.	84
4.6. Composición de dos funciones con entropía cero.	84
4.7. Funciones $g(x)$ y $(g \circ f)(x)$ del ejemplo 4.19.	86
4.8. Función $g(x)$ considerada en la construcción del ejemplo de Raith.	89
4.9. Funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Imagen extraída de [Rai].	89

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Daniel Nieves Roldán, autor del TFM “*Aspectos de dinámica topológica en funciones continuas del intervalo que conmutan*”, bajo la tutela del profesor **Antonio Linero Bas**,

DECLARA

que el trabajo que se presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 21 de junio de 2018.

Fdo.: Daniel Nieves Roldán

Nota: La declaración firmada se adjunta al presente trabajo en el Anexo III.

Introducción

El estudio de la dinámica de un sistema nos permite conocer cómo evoluciona a lo largo del tiempo y determinar así su comportamiento. En el caso discreto, objeto de estudio de este trabajo, podemos analizar modelos de distintos campos del conocimiento, a saber, modelos biológicos, económicos, físicos, etc. Este análisis se realiza investigando sobre los conjuntos de puntos fijos, sobre la estabilidad de sus puntos, sobre su comportamiento asintótico...

En el presente trabajo consideramos funciones $f, g : I \rightarrow I$ con $I = [0, 1]$. Nuestro objetivo es estudiar la relación y las propiedades que pueden compartir este tipo de funciones: puntos fijos, puntos periódicos, entropía topológica,... De esta forma, abordaremos, desde distintas perspectivas, cómo la dinámica de dichas funciones determina la dinámica de su composición. En general, poco se puede decir a este respecto, por lo que centraremos nuestro estudio suponiendo la condición adicional de conmutatividad, es decir, $f \circ g = g \circ f$.

Este trabajo está dividido en cuatro capítulos. El primero de ellos está dedicado a los preliminares. El segundo, se centra en la propiedad de que las funciones que conmutan compartan puntos fijos. El tercer capítulo estudia la intersección de los conjuntos de puntos periódicos de funciones continuas del intervalo que conmutan. El último de ellos estudia otros aspectos de la dinámica de las funciones, donde haremos especial énfasis en la entropía topológica.

El primer capítulo se dedica a introducir los conceptos y propiedades básicos necesarios a lo largo del trabajo. Las definiciones y propiedades que se presentan están basadas en los textos de Block-Coppel [[BloCop](#)], Devaney [[Dev](#)] y Sharkovsky, Kolyada, Sivak y Fedorenko [[Sha](#)].

El segundo capítulo estudia la conjetura introducida en los años cincuenta del siglo XX por E. Dyer, A. Shields y L. Dubins. Dicha conjetura afirmaba que dos funciones continuas del intervalo que conmutan tenían al menos un punto fijo común. Huneke y Boyce probaron, de forma independiente, la falsedad de la conjetura en [[Hun](#)] y [[Boy1](#)], respectivamente. El capítulo está dividido en cuatro secciones diferentes. La primera aborda algunos casos par-

ticulares donde la conjetura sí era cierta. Por ejemplo, podemos destacar las funciones *full*, [Coh], las funciones contractivas y lipschitzianas, [De1] y [De2], o las funciones analíticas del disco unidad [Shi]. La segunda recoge la construcción del contraejemplo desarrollada por Huneke, quien presentó dos formas diferentes de conseguirlo. La tercera recoge la construcción de Boyce, donde se podrá apreciar la gran cantidad de similitudes con la desarrollada por Huneke. Finalmente, cerramos el capítulo presentando algunos resultados que se desarrollaron tras demostrar que la conjetura era falsa. A este respecto, podemos destacar el estudio de Mitchell [Mit], quien probó que las familias de funciones continuas del intervalo que conmutan dos a dos, cuyas iteradas son equicontinuas, comparten al menos un punto fijo común; o el trabajo de Grinč [Gri], quien adaptó resultados de este tipo a funciones triangulares.

El tercer capítulo versa sobre la existencia de puntos periódicos comunes de las funciones continuas del intervalo que conmutan. Al contrario que en el caso de los puntos fijos, el problema sigue abierto conociéndose únicamente resultados parciales. El capítulo está dividido en cuatro secciones. En la primera, recogemos una serie de resultados sobre conjuntos minimales basándonos en los textos de [BloCop] y [Sch]. En la segunda, presentamos un conjunto de resultados sobre el problema de la existencia de puntos periódicos comunes en el caso de las funciones continuas. Entre los resultados que allí se recogen, encontramos que si dos funciones continuas del intervalo que conmutan tienen únicamente puntos periódicos de órdenes potencias de dos, entonces dichas funciones compartirán al menos un punto periódico. Por otro lado, Steele, [Ste], investigó, haciendo uso del teorema de la categoría de Baire, acerca del tamaño de las familias de funciones continuas del intervalo cuyos elementos presentan entre sí intersecciones vacías de conjuntos de puntos periódicos. De esta forma, Steele deja preparado el camino para resolver el problema en sentido negativo, ya que únicamente queda pendiente demostrar la conmutatividad de las funciones. En la tercera sección, recogemos algunos resultados relativos al estado del problema en el caso de funciones continuamente diferenciables. En este sentido, Schwartz, [Sch] probó que si una de las dos funciones del intervalo que conmutan es de clase C^1 , entonces tienen que compartir algún punto periódico. Además, Alikhani-Koopaei, [Ali3], probó que típicamente el conjunto de puntos periódicos de una función continuamente diferenciable del intervalo es numerable. Finalmente, estudiamos las intersecciones del conjunto de puntos periódicos con otros conjuntos como, por ejemplo, el conjunto de puntos recurrentes, el conjunto de puntos uniformemente recurrentes o el conjunto de puntos casi periódicos. Esta sección está basada en [CanLin2].

El cuarto capítulo estudia otros aspectos topológicos de la dinámica de funciones continuas del intervalo que conmutan. Dicho capítulo está dividido en dos secciones diferentes. En la primera de ellas, definimos el concepto de entropía topológica y damos algunas pro-

propiedades relativas al caso de funciones del intervalo. Esta sección está basada en [ALM]. La segunda sección estudia la entropía topológica en la composición de funciones y cuáles son las propiedades que comparten f y g si conmutan. Ambas subsecciones están basadas, principalmente, en los artículos de Cánovas y Linero, [CanLin1] y [CanLin2]. Entre los resultados que allí se recogen, podemos destacar que si dos funciones del intervalo que conmutan comparten un punto periódico de orden $2^k p$, con $k \geq 0$ y $p \geq 3$ impar, entonces la entropía de la composición es positiva; o bien, que si comparten un punto periódico cuyo orden no es una potencia de 2 para f entonces la entropía es positiva.

Finalmente, el trabajo recoge dos anexos. El primero de ellos dedicado a uno de los principales resultados dentro de los sistemas dinámicos discretos en el intervalo, a saber, el teorema de Sharkovsky. En dicho anexo realizamos la demostración del teorema basándonos en una simplificación de la misma realizada por Du, [Du]. El segundo de los anexos, recoge la prueba de que todo conjunto perfecto no vacío es no numerable. Dicha prueba está basada en lo recogido en [Rud2].

Para acabar, destacamos que la literatura utilizada consiste, además de algunas referencias generales, en artículos de investigación que hemos ido recopilando y reorganizando apropiadamente siguiendo el orden cronológico.

Capítulo 1

Preliminares

Planetas en movimiento, especies que se reproducen, movimientos bursátiles... En nuestro día a día estamos rodeados de sistemas que evolucionan con el tiempo. Estos sistemas constituyen lo que conocemos por *sistemas dinámicos*, los cuales clasificaremos principalmente dependiendo de si consideramos el tiempo de forma continua o, si por el contrario, lo consideramos de forma discreta. Los primeros reciben el nombre de sistemas dinámicos continuos, mientras que los segundos, objeto de estudio de este trabajo, se denominan *sistemas dinámicos discretos*.

En este trabajo, los sistemas dinámicos que estudiaremos vendrán descritos por la iteración de una función, f , en un determinado espacio métrico compacto X . En particular, consideraremos el intervalo unidad, $[0, 1]$, que denotaremos como I . De esta forma, un sistema dinámico discreto es un par (X, f) donde X es un espacio métrico y $f : X \rightarrow X$ una función que define el sistema a base de iterar en dicho espacio.

En este capítulo nos dedicamos a introducir los conceptos fundamentales relativos a los sistemas dinámicos discretos que utilizaremos posteriormente a lo largo de todo el trabajo. Principalmente, las definiciones que en este capítulo se recogen están basadas en los libros de de Block Coppel, [BloCop], Devaney, [Dev], y Sharkovsky, Kolyada, Sivak y Fedorenko, [Sha].

A lo largo de todo el trabajo entenderemos que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Dado $x_0 \in X$, definimos la *órbita de x_0 por f* a la sucesión de puntos¹

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f^2(x_0), \dots, x_n = f^n(x_0).$$

La denotaremos como

$$Orb_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\},$$

¹Denotamos $f^n(x) = (f \circ f^{n-1})(x)$, para $n \geq 1$, con f^0 la identidad, i.e., $f^0(x) = x$.

cuando esté claro la función f , la denotaremos simplemente $Orb(x_0)$.

Existen numerosos tipos de órbitas en un sistema dinámico, pero, sin lugar a dudas, una de las más importantes son las descritas por los puntos fijos. Diremos que $x_0 \in X$ es un *punto fijo* si verifica $f(x_0) = x_0$. Nótese que en este caso $f^2(x_0) = x_0$ y, en general, $f^n(x_0) = x_0$, para todo $n \geq 1$. Al conjunto de puntos fijos de una función f lo denotaremos por $Fix(f)$. Gráficamente podemos encontrar los puntos fijos viendo donde corta la función a la recta $y = x$.

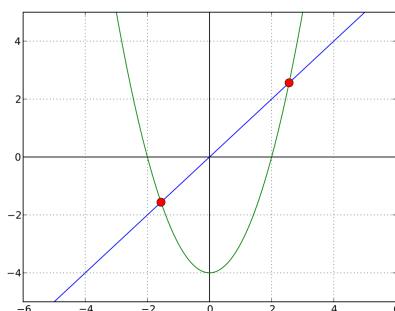


Figura 1.1: Ejemplo para encontrar los puntos fijos de una función gráficamente.

Otro caso importante de órbita son las periódicas o ciclos. Diremos que $x_0 \in X$ es un *punto periódico* si $f^n(x_0) = x_0$ para algún $n > 0$. El menor n que verifica dicha igualdad recibe el nombre de *orden* o periodo mínimo de la órbita. Lo denotaremos como $ord_f(x) = n$. Nótese que si x_0 es un punto periódico de orden n , entonces la órbita de dicho punto es una sucesión de puntos que se repite constantemente

$$Orb_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0), \dots\}.$$

Con $P(f)$ denotaremos al conjunto de puntos periódicos de una función y con $Per(f)$ denotaremos el conjunto de periodos. Un punto $x_0 \in X$ es *finalmente fijo* o *finalmente periódico* si x_0 no es ni fijo, ni periódico, pero algún punto de la órbita de x_0 sí lo es.

Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice f -invariante si $f(A) \subseteq A$. Si se da la igualdad diremos que es fuertemente invariante.

Lema 1.1. *Sea $f \in C(I, I)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x \in Fix(f^n)$ si y solo si x es un punto periódico de f con $ord_f(x) | n$.*

Demostración. “ \implies ” Supongamos que $x \in Fix(f^n)$, entonces se cumple que $f^n(x) = x$. Sea $m = ord_f(x)$. Por definición, m es el menor entero positivo tal que $f^m(x) = x$. De ahí,

$$x = f^m(x) = f^{2m}(x) = \dots = f^{km}(x) = \dots$$

Luego, al verificarse $f^n(x) = x$, existe $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = km$. Así concluimos que $m = \text{ord}_f(x) | n$.

“ \Leftarrow ” Denotemos $m = \text{ord}_f(x)$. Por hipótesis, $f^m(x) = x$ y $m | n$, lo que implica que existe $a \in \mathbb{Z}^+$ tal que $n = am$. Veamos que $x \in \text{Fix}(f^n)$:

$$f^n(x) = f^{am}(x) = f^{(a-1)m} \circ f^m(x) = f^{(a-1)m}(x) = \dots = f^{2m}(x) = f^m \circ f^m(x) = f^m(x) = x.$$

□

Lema 1.2. *Sea $f : X \rightarrow X$ continua y $x_0 \in X$. Entonces, $\overline{\text{Orb}}_f(x_0)$ es cerrada, invariante y no vacía.*

Demostración. $\overline{\text{Orb}}_f(x_0)$ es cerrada por considerar la clausura del conjunto; es no vacía ya que el punto x_0 pertenece a su órbita; e invariante ya que si tomamos $y \in \overline{\text{Orb}}_f(x_0)$, $f(y) \in \overline{\text{Orb}}_f(x_0)$ por definición. □

Existen nociones de recurrencia más débiles que las anteriormente descritas que contienen a los conjuntos de puntos fijos y periódicos. Un punto $x_0 \in X$ diremos que es *recurrente* si para cualquier entorno abierto U de x_0 existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ tal que $f^{n_i}(x_0) \in U$. Si la sucesión $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ tiene intervalos errantes, el punto se denomina *uniformemente recurrente*, donde entendemos que un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ tiene intervalos errantes si para todo $T \in \mathbb{N}$ el conjunto $[t, t + T] \cap S$ contiene al menos un punto. Si $n_i = ki$ para algún $k \in \mathbb{N}$ el punto se denomina *casi periódico*. Denotaremos por $\text{Rec}(f)$, $\text{UR}(f)$ y $\text{AP}(f)$, a los conjuntos de puntos recurrentes, uniformemente recurrentes y casi periódicos respectivamente. De las definiciones se sigue la siguiente cadena de inclusiones

$$\text{Fix}(f) \subset \text{Per}(f) \subset \text{AP}(f) \subset \text{UR}(f) \subset \text{Rec}(f).$$

Un punto x_0 diremos que es *estable* si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|f^n(x) - x_0| < \varepsilon$ para todo $n > 0$. El conjunto de estos puntos lo denominaremos conjunto de puntos estables. En caso contrario, hablaremos de puntos inestables.

Definimos el conjunto ω -límite de un punto $x_0 \in X$ como el conjunto

$$\omega(x) = \omega_f(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} f^n(x)}.$$

Equivalentemente, $y \in \omega_f(x)$ si y sólo si es un punto de acumulación de la trayectoria $\{f^n(x)\}_{n=0}^\infty$, es decir, $f^{n_k}(x) \rightarrow y$ para alguna sucesión de enteros $n_k \rightarrow \infty$. Denotaremos por $\Omega(f)$ al conjunto de todos los ω -límites de f . Destacar que esta equivalencia es válida por trabajar con espacios métricos compactos. En general, dicha afirmación no es cierta en un espacio topológico arbitrario.

Proposición 1.3. Sea $f : X \rightarrow X$ continua y $x_0 \in X$. Entonces $\omega_f(x_0)$ es no vacío, cerrado y f -invariante.

Demostración. Sea $K \subset X$ compacto tal que $Orb_f(x_0) \subseteq K$. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, al ser K compacto, tenemos garantizada la existencia de una subsucesión $(f^{n_i}(x_0))_{i=1}^{\infty}$ convergente a un punto $y \in K$. Luego, por definición, $y \in \omega_f(x_0)$. Así concluimos que $\omega_f(x_0) \neq \emptyset$.

Por definición, $\omega_f(x_0)$ es intersección numerable de conjuntos cerrados, por lo tanto, $\omega_f(x_0)$ es cerrado.

Por último, veamos que es f -invariante. Sea $y \in \omega_f(x_0)$. Tomamos una subsucesión $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ que tiende a infinito tal que $f^{n_k}(x_0)$ tiende a y . Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $s_k = n_k + 1$. Nótese que $s_k \rightarrow \infty$. De esta forma,

$$f^{s_k}(x_0) = f^{n_k+1}(x_0) = f(f^{n_k}(x_0)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(y)$$

por la continuidad de f . Así que $f(y) \in \omega_f(x_0)$, obteniendo así la f -invarianza de $\omega_f(x_0)$. \square

A continuación, definiremos algunas de las propiedades principales a estudiar para describir la dinámica de un sistema dinámico discreto. En concreto, introduciremos la noción de turbulencia, transitividad y bitransitividad.

Diremos que una función $f : I \rightarrow I$ es *turbulenta* si existen subintervalos compactos J, K con a lo sumo un punto en común tal que $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$. Se dirá que es estrictamente turbulenta si los subintervalos J, K se pueden elegir disjuntos. Se sigue de la definición que si f es (estrictamente) turbulenta, entonces f^n es (estrictamente) turbulenta para cualquier $n > 1$.

Una función $f : X \rightarrow X$ diremos que es *topológicamente transitiva* si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V en X , existe un entero positivo k tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En otras palabras, existe una órbita densa. También diremos que f es *bitransitiva* si f^2 es topológicamente transitiva.

También debemos destacar algunos tipos de conjuntos de gran importancia a la hora de estudiar la dinámica de un sistema. En el caso de los conjuntos minimales y perfectos, profundizaremos en la sección 3.1, limitándonos en este capítulo de preliminares a introducir su definición.

Un espacio métrico compacto X diremos que es un *conjunto de Cantor* si no tiene puntos aislados y es totalmente desconexo, es decir, para cualquier par de puntos distintos α, β existen subconjuntos cerrados disjuntos A, B de X que contienen α, β respectivamente.

Las funciones $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ se dice que son *topológicamente conjugadas* si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$ tal que $(h \circ f)(x) = (g \circ h)(x)$ para todo $x \in X$. El homeomorfismo h que satisface esta condición se llama *conjugación topológica*, siendo el siguiente diagrama conmutativo.

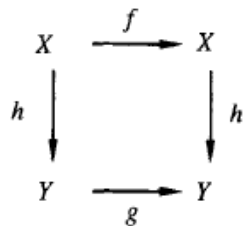


Figura 1.2: Diagrama que ilustra la conjugación topológica. Imagen extraída de [BloCop].

Un subconjunto A de un espacio topológico X es denso en X si para cualquier punto $x \in X$, cualquier entorno de x contiene al menos un punto de A . Un conjunto en un espacio topológico diremos que es *nowhere dense* si es un conjunto cuya clausura tiene interior vacío. En otro caso, diremos que el conjunto es *somewhere dense*.

Finalmente, presentamos uno de los principales resultados dentro del ámbito de los sistemas dinámicos discretos, el *Teorema de Sharkovsky*. En el Anexo I desarrollamos la demostración del teorema.

Teorema 1.4. (*Teorema de Sharkovsky*) *Supongamos que $f : I \rightarrow I$ es una función continua. Si f tiene un punto periódico de orden m , entonces f también tiene un punto periódico de orden n siempre que $m <_s n$ en el orden de Sharkovsky, siendo dicho orden el siguiente:*

$$\begin{array}{cccccccc}
 3 & <_s & 5 & <_s & 7 & <_s & \dots & <_s \\
 2 \cdot 3 & <_s & 2 \cdot 5 & <_s & 2 \cdot 7 & <_s & \dots & <_s \\
 2^2 \cdot 3 & <_s & 2^2 \cdot 5 & <_s & 2^2 \cdot 7 & <_s & \dots & <_s \\
 \dots & <_s & 2^3 & <_s & 2^2 & <_s & 2 & <_s & 1.
 \end{array}$$

Capítulo 2

Puntos fijos comunes

Durante los años cincuenta del S. XX, los matemáticos E. Dyer, A Shields y L. Dubins, de manera independiente, plantearon el siguiente problema:

Conjetura 2.1. *Si f y g son dos funciones continuas del intervalo unidad, I , que conmutan, esto es, $f(g(x)) = g(f(x))$ para todo $x \in [0, 1]$, entonces tienen un punto fijo en común.*

Esta conjetura se recogió por primera vez en la literatura en [Rit], donde J.F. Ritt demostró su veracidad en el caso particular de los polinomios. De hecho, en su artículo, donde abordaba de forma más general distintos métodos para obtener funciones racionales permutables, probó que los únicos polinomios con coeficientes reales que conmutan son las potencias de x , las iteradas del mismo polinomio, y los polinomios de Tchebycheff. Cabe destacar que la prueba desarrollada por Ritt es bastante ardua, de ahí que recomendemos al lector interesado en la prueba desarrollada por él, la lectura del artículo de Block y Thielman [Blo] que sintetiza y expresa de forma más explícita los resultados desarrollados por Ritt en ese sentido; y el artículo de Bertram [Ber] que refina el método desarrollado por él.

A raíz de la conjetura, fueron múltiples los casos particulares que se estudiaron y dieron respuesta afirmativa a la misma. Entre otros, podemos destacar a: DeMarr [De1] y [De2], quien estudió casos particulares de funciones contractivas y lipschitzianas, encontrando resultados positivos para aplicaciones definidas en determinados subconjuntos de espacios de Banach; Shields [Shi], que publicó una prueba para funciones en el disco unidad; Cohen [Coh] que estudió funciones *full*. La sección primera de este capítulo está dedicada a desarrollar estos resultados.

Después de numerosos casos particulares donde la conjetura era cierta, a finales de los

años sesenta, Huneke [Hum] y Boyce [Boy1], de forma simultánea e independiente, construyeron contraejemplos que probaban que, en general, era falsa. Abordaremos estos contraejemplos en las secciones segunda y tercera de este capítulo. A pesar de ello, se siguió profundizando en la dirección positiva de la conjetura, centrándose la investigación, a partir de ese momento, en familias de funciones que conmutaban, extensiones a otros espacios métricos compactos y a clases particulares de aplicaciones continuas como pueden ser las funciones triangulares o las antitriangulares. Estudiaremos estos resultados en la sección cuarta.

En el presente capítulo, abordaremos la evolución de la conjetura siguiendo el recorrido descrito en los párrafos anteriores. Comenzaremos viendo algunos resultados particulares donde se verifica la propiedad de compartir puntos fijos. A posteriori, presentaremos en dos secciones diferentes, los contraejemplos propuestos por Huneke y Boyce y, finalmente, nos centraremos en alguno de los resultados que se desarrollaron a partir de la resolución de la conjetura, relativos a familias de funciones y a la extensión a otros espacios métricos compactos.

2.1. Algunos casos especiales

En esta sección presentamos algunos casos particulares en donde se verifica la conjetura planteada sobre la existencia de puntos fijos comunes para funciones continuas del intervalo que conmutan entre sí.

En primer lugar, destaquemos el trabajo de Cohen [Coh], quien estudió funciones continuas del intervalo que poseían la propiedad de “fullness”.

Definición 2.2. *Diremos que una función continua $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es “full” si existe una partición $P_f = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $n \geq 1$, de $[0, 1]$ con $x_0 = 0$, $x_n = 1$ y $x_i < x_{i+1}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que para cada $i = 0, 1, \dots, n-1$, tenemos que $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ es un homeomorfismo de $[x_i, x_{i+1}]$ con $[0, 1]$. A dicha partición P_f la llamaremos partición plena.*

El estudio de esta propiedad vino motivado por los polinomios de Tchebycheff¹, ya que aparte de ser los únicos polinomios que conmutan entre sí y verifican la conjetura, también cumplen que existe una partición del intervalo $[-1, 1]$ de forma que el polinomio restringido a cada uno de los subintervalos de la partición es homeomorfo al intervalo $[-1, 1]$.

Es inmediato comprobar que la composición de dos funciones *full* sigue siendo *full*, y que P_f es única. A continuación, ilustremos la definición anterior con un ejemplo de dos

¹Los polinomios de Tchebycheff se definen de forma recurrente como sigue: $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

funciones *full* que conmutan.

Ejemplo 2.3.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 2 - 3x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

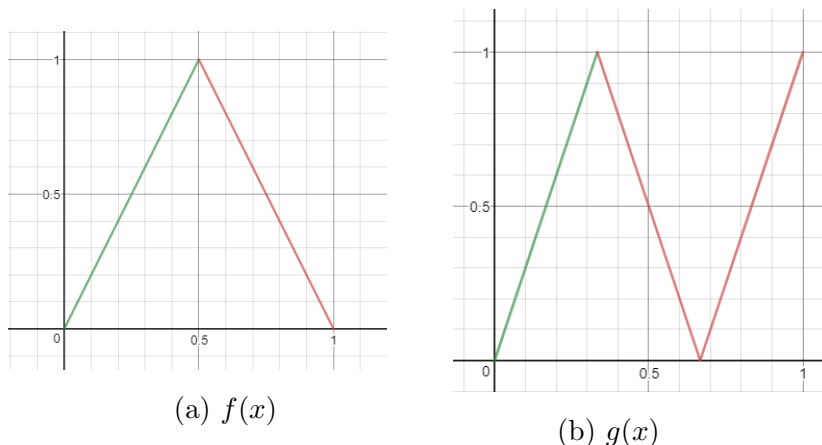


Figura 2.1: Ejemplo de funciones *full* que conmutan.

Las particiones plenas de dichas funciones son $P_f(x) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ y $P_g(x) = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ respectivamente. Como se aprecia en las gráficas de las funciones, $Fix(f) \cap Fix(g) = \{0\}$.

A pesar de que la partición sobre la que están definidas las funciones “*full*” puede tener cualquier número de subintervalos, y estos cualquier longitud, un caso especial y destacable es aquel en el que todos los subintervalos de monotonía tienen la misma longitud.

Definición 2.4. Sean f y g dos funciones “*full*”. Una partición plena P_f es regular si sus subintervalos tienen todos la misma longitud. Una partición plena P_g refina P_f uniformemente si cada subintervalo de P_f es la unión del mismo número de subintervalos de P_g ².

Nótese que ambas particiones del ejemplo 2.3 son regulares.

Una vez introducidos los conceptos correspondientes, presentamos el resultado relativo a la existencia de puntos fijos comunes en funciones “*full*” que conmutan. Para ello, tengamos en cuenta el siguiente lema previo.

Lema 2.5. [Coh] Si f_1 y g_1 son funciones “*full*” que conmutan sin puntos fijos comunes, existen funciones f y g con esas mismas propiedades de f_1 y g_1 y además son tales que $f(0) = g(1) = 0$, $f(1) = g(0) = 1$, P_f, P_g y $P_{f \circ g}$ son regulares, y P_g refina P_f uniformemente.

²La partición plena que refina uniformemente P_g no tiene por qué ser regular.

Demostración. Nótese que $f_1(0) = g_1(0) = 0$ garantizaría la existencia de un punto fijo común. De ahí que únicamente tengamos que considerar los siguientes casos

1. $f_1(0) = 0, g_1(0) = 1,$
2. $f_1(0) = 1 = g_1(0).$

En el caso 1, $f_1(1) = f_1(g_1(0)) = g_1(f_1(0)) = g_1(0) = 1$, luego $g_1(1) = 0$ ya que si fuese 1 tendríamos un punto fijo en 1. En este caso, tomamos $f_2 = f_1$ y $g_2 = g_1$.

En el caso 2, $f_1(1) = f_1(g_1(0)) = g_1(f_1(0)) = g_1(1)$, por lo tanto, para evitar un punto fijo común, debemos tomar $f_1(1) = g_1(1) = 0$. En este caso, tomamos $f_2 = f_1 \circ g_1$ y $g_2 = g_1$. Ahora, $f_2(0) = f_1(g_1(0)) = f_1(1) = 0$, $g_2(0) = g_1(0) = 1$, $f_2(1) = f_1(g_1(1)) = f_1(0) = 1$ y $g_2(1) = g_1(1) = 0$. En cualquier caso, tomamos $f_3 = f_2$ y $g_3 = g_2 \circ f_2$. Claramente P_{g_3} refina uniformemente a P_{f_3} , y de forma similar, $P_{f_3 \circ g_3}$ refina P_{g_3} uniformemente.

Ahora, tomemos ϕ un homeomorfismo en $[0, 1]$ que lleva la partición $P_{f_3 \circ g_3}$ a una partición regular del intervalo unidad. Sea $f = \phi \circ f_3 \circ \phi^{-1}$ y $g = \phi g_3 \phi^{-1}$. Es fácil de comprobar que dichas funciones tienen las propiedades requeridas. \square

Teorema 2.6. [*Coh*] Sean f y g dos funciones full que conmutan. Entonces, tienen en común al menos un punto fijo.

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Supongamos que f y g no comparten ningún punto fijo. En este caso, por el lema 2.5, no hay pérdida de generalidad si suponemos que dichas funciones satisfacen que $f(0) = g(1) = 0$, $f(1) = g(0) = 1$, P_f, P_g y $P_{f \circ g}$ son regulares, y P_g refina P_f uniformemente.

Teniendo en cuenta que las particiones son regulares, tomamos $P_f = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ y $P_g = \{0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1\}$, que determinan la partición de la composición $P_{f \circ g} = \{0, \frac{1}{nm}, \frac{2}{nm}, \dots, 1\}$. Observemos que $m > n$ por refinar P_g uniformemente a P_f . Por otro lado, adoptamos la notación $f_i = f|_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]}$ ($i = 1, \dots, n$) y $g_i = g|_{[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]}$ ($i = 1, \dots, m$).

Nos centraremos en probar el caso donde m y n son números impares, siendo análogo el resto de casos. Sea $r = \frac{n+1}{2}$, y $s = \frac{m+1}{2}$, con r impar y s par (en caso contrario se realiza un razonamiento análogo).

Denotamos por $D(\phi)$ al dominio de una función ϕ . Nótese que $D(f_i \circ g_j)$ es algún subintervalo de $P_{f \circ g}$ para algún i y j , luego, en particular,

$$D(g_1 \circ f_r) = \left[\frac{r-1}{n}, \frac{r-1}{n} + \frac{1}{mn} \right],$$

$$D(g_2 \circ f_r) = \left[\frac{r-1}{n} + \frac{1}{nm}, \frac{r-1}{n} + \frac{2}{nm} \right],$$

...

$$D(g_s \circ f_r) = \left[\frac{r-1}{n} + \frac{s-1}{nm}, \frac{r-1}{n} + \frac{s}{nm} \right] = \left[\frac{nm-1}{2nm}, \frac{nm+1}{2nm} \right].$$

De forma similar,

$$D(f_1 \circ g_s) = \left[\frac{s-1}{m}, \frac{s-1}{m} + \frac{1}{mn} \right],$$

$$D(f_2 \circ g_s) = \left[\frac{s-1}{m} + \frac{1}{nm}, \frac{s-1}{m} + \frac{2}{nm} \right],$$

...

$$D(f_r \circ g_s) = \left[\frac{s-1}{n} + \frac{r-1}{nm}, \frac{s-1}{n} + \frac{r}{nm} \right] = \left[\frac{nm-1}{2nm}, \frac{nm+1}{2nm} \right];$$

y, por consiguiente, hemos probado que $D(g_s \circ f_r) = D(f_r \circ g_s)$.

El motivo por el que distinguimos casos, en función de si m, n, r o s son pares o impares, se debe a que nos interesan los intervalos centrales de las particiones (donde están definidas f_r y g_s), y la expresión de estos depende de si el número de subintervalos es par o impar. Por ejemplo, si m y n fuesen los dos pares, entonces r y s vendrían determinados por $r = \frac{n}{2}$ y $s = \frac{m}{2}$.

Por otro lado, g_s es continua y sobreyectiva en $[0, 1]$, luego su gráfica debe intersectar la diagonal de $[0, 1] \times [0, 1]$, concluyendo así que g_s tiene un punto fijo z_1 . Como $D(g_s) \subset D(f_r)$, tenemos que $z_1 \in D(f_r)$ y así $z_1 \in D(f_r \circ g_s) = D(g_s \circ f_r)$. Por lo tanto, $(g_s \circ f_r)(z_1) = (f_r \circ g_s)(z_1) = f_r(z_1)$. De ahí, $z_2 = f_r(z_1)$ es un punto fijo para g_s . Repitiendo el proceso, encontramos una sucesión de puntos fijos (z_p) de g_s donde $z_{p+1} = f_r(z_p)$. Como f_r es monótona y acotada, la sucesión (z_p) converge a z , que claramente es un punto fijo de f y g . De esta forma, llegamos a una contradicción, quedando así probado el teorema. \square

Obviamente, las funciones “full” no cubren la totalidad de la casuística de funciones continuas que pueden conmutar. De hecho, existen funciones sencillas, como algunas monótonas a trozos, que no son “full”.

Ejemplo 2.7. Consideremos las siguientes funciones del intervalo unidad que conmutan,

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 2-3x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x-1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ 3-3x & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \text{y } g(x) = \begin{cases} 3x + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{6}, \\ \frac{3}{2} - 3x & \text{si } \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 3x - \frac{3}{2} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{6}, \\ \frac{7}{2} - 3x & \text{si } \frac{5}{6} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La función f no es “full” ya que para los subintervalos $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ de la partición, $f|_{[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]}$ y $f|_{[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]}$ no son homeomorfos al intervalo unidad. La función g tampoco lo es, ya que

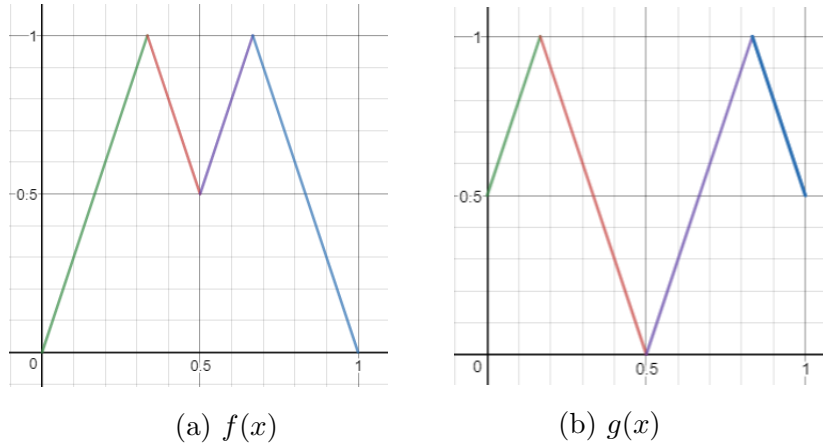


Figura 2.2: Ejemplo de funciones conmutables que no son *full*.

para los subintervalos $[0, \frac{1}{6}]$ y $[\frac{5}{6}, 1]$ de la partición P_g , $g|_{[0, \frac{1}{6}]}$ y $g|_{[\frac{5}{6}, 1]}$ no son homeomorfos al intervalo unidad. En la imagen 2.2 se adjunta la representación gráfica de f y g .

Por otro lado, DeMarr presentó en [De2] dos resultados particulares donde la conjetura 2.1 era cierta. Uno de ellos, relativo a funciones lipschitzianas³ y otro a funciones contractivas⁴. Comencemos estudiando el primero de ellos.

Teorema 2.8. *Sean f y g funciones lipschitzianas del intervalo unidad, con constantes de Lipschitz α y β respectivamente, donde $\beta < \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$. Supongamos que f y g conmutan, entonces existe un punto fijo para f y g .*

Demostración. Antes de nada, resaltar que al ser $\beta, \alpha > 0$, entonces $\alpha > 1$ por la desigualdad que verifica β por hipótesis.

Sea $G = \text{Fix}(g)$. Es sencillo ver que es cerrado y, por lo tanto, compacto. Se sigue inmediatamente, por la conmutatividad, que $f(G) \subset G$. Además, al ser g continua en $[0, 1]$, $G \neq \emptyset$ y es cerrado.

Probemos ahora, por reducción al absurdo, que $\text{Fix}(f) \cap \text{Fix}(g) \neq \emptyset$. Sean $a = \min G$ y $b = \max G$. Como $f(G) \subset G$, se tiene que $a < f(a)$ y $f(b) < b$, siendo las desigualdades estrictas al suponer que no tienen ningún punto fijo en común. Ahora, definimos $A_1 = \{x \in G | x < f(x)\}$ y $A_2 = \{x \in G | x > f(x)\}$, entonces existe $\delta = \inf\{|x - y| : x \in A_1, y \in A_2\} = d(A_1, A_2)$. Sean $x_1 \in A_1$ y $x_2 \in A_2$ los puntos donde se alcanza dicho mínimo. Lo anterior está garantizado por ser G compacto y f continua.

³Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es lipschitziana si existe una constante $K \geq 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

⁴Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es contractiva si es lipschitziana con constante de Lipschitz K menor que 1.

Fijemos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Veamos que $y_1 \geq x_2$ e $y_2 \leq x_1$. Como $f(G) \subset G$, tenemos que $y_1, y_2 \in G$. Ahora, si $z \in G$ y $x_1 < z < x_2$, entonces $f(z) \neq z$ por ser $\delta = d(x_1, x_2) > 0$. Como $x_1 < y_2 \in G$ y $x_2 > y_1 \in G$, entonces $x_2 \leq y_1$ e $y_2 \leq x_1$. También tenemos que $g(x) \neq x$ para todo $x \in I_0 = [x_1, x_2]$. De otra forma, g tendría un punto fijo en el interior de I_0 , lo que no es posible por lo visto anteriormente. Supongamos que $x < g(x)$ para todo $x \in I_0$ (en el otro caso procederíamos de forma completamente análoga).

Como $x_1 < f(x_1)$ y $f(x_2) < x_2$, se sigue que f tiene un punto fijo en I_0 por ser continua. Sea $s = \max\{x : f(x) = x, x \in I_0\}$ y tomemos $t = g(s)$. Nótese que

$$f(t) = f(g(s)) = g(f(s)) = g(s) = t.$$

Luego $t \in \text{Fix}(f)$ y $s < t$, pues suponemos que $x < g(x)$ en $I_0 = [x_1, x_2]$. Esto implica que $x_2 < t$, ya que si $x_1 < t < x_2$ se tendría $f(t) \neq t$.

A continuación, deduzcamos desigualdades adicionales a partir de las condiciones de lipschitzianidad de f y g . No hace falta trabajar con valores absolutos ya que sabemos que todas las cantidades con las que vamos a trabajar son positivas. Tengamos en cuenta que $\alpha > 1$.

$$t - x_1 = f(t) - x_1 \leq f(t) - y_2 = f(t) - f(x_2) \leq \alpha(t - x_2), \quad (2.1)$$

$$t - x_1 = g(s) - x_1 \leq g(s) - g(x_1) \leq \beta(s - x_1), \quad (2.2)$$

$$s - x_1 = f(s) - x_1 \leq f(s) - f(x_2) \leq \alpha(x_2 - s), \quad (2.3)$$

De (2.1) obtenemos,

$$\alpha x_2 - x_1 \leq (\alpha - 1)t. \quad (2.4)$$

De (2.2) y (2.4),

$$\alpha x_2 - x_1 \leq (\alpha - 1)[\beta(s - x_1) + x_1],$$

de ahí, $\alpha x_2 \leq \beta(\alpha - 1)(s - x_1) + \alpha x_1$, de donde se sigue que

$$\alpha(x_2 - x_1) \leq \beta(\alpha - 1)(s - x_1). \quad (2.5)$$

De (2.3) se obtiene $s - x_1 \leq \alpha[(x_2 - x_1) - (s - x_1)]$ y, de ahí,

$$(\alpha + 1)(s - x_1) \leq \alpha(x_2 - x_1). \quad (2.6)$$

De (2.5) y (2.6) obtenemos

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \leq \beta. \quad (2.7)$$

Luego, la desigualdad (2.7) contradice el hecho de que $\beta < \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$. Por lo tanto, f y g tienen un punto fijo común. \square

Nota 2.9. La prueba anterior la hemos desarrollado suponiendo que $\alpha > 1$. En caso contrario, la aproximación que tenemos que realizar es diferente. En el caso $\alpha \leq 1$ tendríamos que se verifica la desigualdad

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Si c y d son el menor y mayor punto fijo de f y $c \leq x \leq d$, entonces

$$f(x) - c \leq |f(x) - c| \leq |f(x) - f(c)| \leq x - c,$$

lo que implica que $f(x) \leq x$. Por otro lado,

$$d - f(x) \leq |d - f(x)| \leq |f(d) - f(x)| \leq d - x,$$

luego $x \leq f(x)$.

En definitiva, concluimos que $f(x) = x$. Así $H = [c, d]$ es el conjunto de puntos fijos de f . Como f y g conmutan, $g(H) \subset H$. Además, g es continua, luego debe tener un punto fijo en H . De ahí, f y g tienen un punto fijo común. \square

Obviamente, el teorema anterior, cierto para funciones lipschitzianas, también es cierto para funciones contractivas, ya que estas son un caso particular de las primeras. Sin embargo, en otro contexto y con condiciones más restrictivas, existen resultados que confirman la conjetura para funciones lipschitzianas con constante $K = 1$, pero donde no se puede garantizar nada, en general, respecto a funciones lipschitzianas. Uno de esos resultados, debido también a DeMarr, [De1], enmarcado en un contexto diferente a los anteriores (considera las funciones definidas sobre subconjuntos convexos y compactos no vacíos de un espacio de Banach), surge de manera natural después de que Kakutani [Kak] y Markov [Mar] probasen que para el caso particular de una familia de transformaciones lineales y continuas de un espacio topológico lineal en sí mismo que conmutan, y con un subconjunto convexo compacto no vacío invariante en dicho espacio, entonces la familia tiene un punto fijo común en dicho subconjunto. A continuación, enunciemos un lema previo que será de utilidad para probar el posterior teorema. No desarrollaremos la demostración por cuestión de longitud del trabajo.

Lema 2.10. Sea X_0 un subconjunto convexo⁵ no vacío de un espacio de Banach⁶ y sea f una función lipschitziana de X_0 en sí mismo con constante $K = 1$. Si existe un conjunto compacto $M \subset X_0$ tal que $M = f(M)$ y M tiene al menos dos puntos, entonces existe un conjunto convexo cerrado no vacío K , tal que $f(x) \in K_1 \cap X_0$ para todo $x \in K_1 \cap X_0$ y $M \cap K_1^c \neq \emptyset$ (K_1^c denota el complementario de K_1).

⁵Un conjunto A es convexo si el segmento que une cualquier par de puntos de A está contenido en A .

⁶Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo en la métrica definida por su norma. Esto quiere decir que un espacio de Banach es un espacio vectorial V sobre el cuerpo de los números reales o el de los complejos con una norma $\|\cdot\|$ tal que toda sucesión de Cauchy, con respecto a la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, en V tiene un límite en V .

Teorema 2.11. *Sea B un espacio de Banach y $X \subset B$ un subconjunto convexo, compacto no vacío. Si \mathcal{F} es una familia no vacía de funciones lipschitzianas de X en sí mismo que conmutan con constante de Lipschitz $K = 1$, entonces la familia \mathcal{F} tiene al menos un punto fijo común en X .*

Demostración. La idea de la demostración es probar, haciendo uso del lema de Zorn⁷, que existe un conjunto minimal no vacío $X_0 \subset X$ compacto y convexo tal que X_0 es invariante para cada $f \in \mathcal{F}$. Si X_0 consiste en un único punto, entonces el teorema queda probado.

Ahora, supongamos que X_0 consiste en más de un punto. Debemos usar el lema de Zorn de nuevo para ver que existe un conjunto compacto no vacío minimal $M \subset X_0$ tal que M es invariante para cada $f \in \mathcal{F}$. Veamos ahora que $M = f(M)$ para cada $f \in \mathcal{F}$.

Como cada $f \in \mathcal{F}$ es continua y M es compacto, $f(M)$ es compacto. Para cada $f \in \mathcal{F}$ tenemos $f(M) \subset M$. Supongamos que para algún $g \in \mathcal{F}$ tenemos $g(M) = N \neq M$. Para cada $x \in N$ existe $y \in M$ tal que $x = g(y)$. Como todas las funciones en \mathcal{F} conmutan, para todo $f \in \mathcal{F}$ se tiene,

$$f(x) = f(g(y)) = g(f(y)) \in N,$$

ya que $f(y) \in M$.

De ahí, tenemos que $f(N) \subset N \subset M$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Pero como N es un subconjunto compacto no vacío de X_0 que es invariante para cada $f \in \mathcal{F}$ y como $N \subset M \neq N$, tenemos una contradicción con la minimalidad de M .

Consecuentemente, nuestro supuesto de que $M \neq N$ es falso. Debemos suponer que M tiene al menos dos puntos; en otro caso, el teorema estaría probado. Aplicamos el lema 2.10 a cada $f \in \mathcal{F}$. Refiriéndonos a la notación de dicho lema, vemos que el conjunto $K_1 \cap X_0$ es invariante por cada $f \in \mathcal{F}$. Como K_1 es cerrado, vemos que $K_1 \cap X_0$ es un subconjunto de X_0 compacto convexo no vacío. Como $\emptyset \neq M \cap K_1^c \subset X_0 \cap K_1^c$, vemos que $K_1 \cap X_0 \neq X_0$. De ahí, que si X_0 tiene más de un punto, entonces llegamos a una contradicción con la minimalidad de X_0 . \square

Nótese que si la norma asociada al espacio de Banach B es estrictamente convexa⁸, entonces el teorema anterior se verifica, ya que en ese caso cada función lipschitziana con

⁷Lema de Zorn: Si S es un conjunto parcialmente ordenado en que cada cadena, esto es, cada subconjunto totalmente ordenado, tiene una cota superior, entonces S tiene un elemento maximal.

En la demostración se utiliza la versión equivalente con *cota inferior* y *elemento minimal*.

⁸Se dice que una norma $\|\cdot\|$ en un espacio de Banach es estrictamente convexa, si la condición $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2}\|x + y\|$ implica que $x = y$.

constante de Lipschitz $K = 1$ tiene un conjunto de puntos fijos que no es vacío, convexo y compacto. Sin embargo, en el caso general, el conjunto de puntos fijos de una isometría no es convexo. Ilustremos esta observación con un ejemplo.

Ejemplo 2.12. Sea B el espacio de todos los pares ordenados (a, b) de números reales, donde si $x = (a, b)$, entonces $\|x\| = \max\{|a|, |b|\}$. Definimos $X = \{x : \|x\| \leq 1\}$ y $f : X \rightarrow X$ dada por $f(a, b) = (|b|, b)$. Veamos que f es una función lipschitziana con constante $K = 1$ considerando $x = (a, b)$ e $y = (a', b')$:

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|(|b|, b) - (|b'|, b')\| = \|(|b| - |b'|, b - b')\| = |b - b'| \\ &\leq \max\{|a - a'|, |b - b'|\} = \|(a - a', b - b')\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Además, $x = (1, 1)$ e $y = (1, -1)$ son puntos fijos de f . Sin embargo, $\frac{1}{2}(x + y) = (1, 0)$ no es un punto fijo.

Finalmente, a pesar de que el trabajo esté centrado en el estudio de funciones reales, destacaremos un resultado, sin entrar en su demostración, para funciones complejas debido a Shields. En [Shi] se prueba que si f y g son funciones continuas en el disco unidad, $|z| \leq 1$, analíticas en el disco abierto, y conmutan para todo z , entonces tienen un punto fijo común. De forma más general, una familia conmutable de dichas funciones tiene un punto fijo.

Teorema 2.13. Sea \mathcal{F} una familia conmutable de funciones continuas que llevan el disco unidad en él mismo y son analíticas en el disco abierto D . Entonces existe al menos un punto fijo x_0 para todas las funciones de la familia.

2.2. Contraejemplo 1 - Huneke

A pesar de que la conjetura 2.1 sobre puntos fijos comunes de funciones continuas que conmutan en el intervalo resultó ser cierta para numerosos casos particulares, J.P. Huneke presentó en 1968 dos construcciones diferentes que probaban que, en general, era falsa, [Hun]. Para ello, desarrolló, en primer lugar, una serie de resultados que caracterizaban a las funciones que podían contradecir la conjetura. Después, teniendo en cuenta dichas consideraciones, construyó sucesiones de funciones cuyos límites formarán un contraejemplo para el problema de la función conmutable (nombre con el que Huneke hacía referencia al problema de la existencia de dos funciones continuas f y g que conmutan en el intervalo sin tener puntos fijos comunes).

A continuación, desarrollamos las ideas de Huneke en dos subsecciones diferentes. En la primera, presentaremos las definiciones y resultados previos sin detenernos en profundidad en las demostraciones. En la segunda, procederemos a construir los dos ejemplos que presentó.

Todos los resultados que se presentan en esta sección han sido extraídos de [Hum], cualquier lector interesado en los detalles que omitamos puede consultarlos en dicho artículo.

2.2.1. Resultados previos

En los contraejemplos presentados por Huneke, las funciones lineales a trozos⁹ juegan un papel muy importante. Los extremos de definición de cada uno de los subintervalos que definen la función no son derivables y, dentro del conjunto de los puntos no derivables, el lema 2.18 muestra cómo puntos consecutivos siguen siendo consecutivos bajo la aplicación de una función lineal a trozos. Por otro lado, el lema 2.17 es una propiedad sobre la conmutatividad de los límites de sucesiones uniformemente convergentes de funciones continuas.

Definición 2.14. *Sea f una función lineal a trozos definida en I . Denotaremos por $B(f)$ al conjunto de todos los puntos del interior de I donde f no tiene derivada, es decir, donde f' no existe.*

El lema 2.15 nos proporciona una serie de propiedades sobre este conjunto $B(f)$.

Lema 2.15. *Sea f una función lineal a trozos definida en I ; sea g una función definida en I ; sea h una función lineal con imagen en I ; y sea p una función lineal no constante definida en $f(I)$. Entonces $(g \circ h)(B(f \circ h)) = g(B(f))$, $B(p \circ f) = B(f)$, y $h^{-1}(B(f)) = B(f(h))$.*

Ejemplo 2.16. *Ilustremos el lema 2.15 estudiando un caso concreto. Consideremos las funciones $f : I \rightarrow I$ lineal a trozos, $g : I \rightarrow I$, $h : [2, 3] \rightarrow I$ lineal y $p : I \rightarrow I$ definidas como:*

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ -4x + 2, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 4x - 2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ -4x + 4, & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases},$$

$$g(x) = x^2, \quad h(x) = 3 - x \quad \text{y} \quad p(x) = -x.$$

Aquí $B(f) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. La composición $f \circ h$ viene dada por:

$$(f \circ h)(x) = \begin{cases} 4x - 8, & \text{si } 2 \leq x \leq \frac{9}{4}, \\ 10 - 4x, & \text{si } \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 4x - 10 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{11}{4}, \\ 12 - 4x, & \text{si } \frac{11}{4} \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Las funciones f y $f \circ h$ están representadas gráficamente en 2.3.

⁹Por función lineal a trozos entendemos aquella función cuyo dominio está dividido en una cantidad finita de subintervalos, siendo en cada uno de ellos una función lineal.

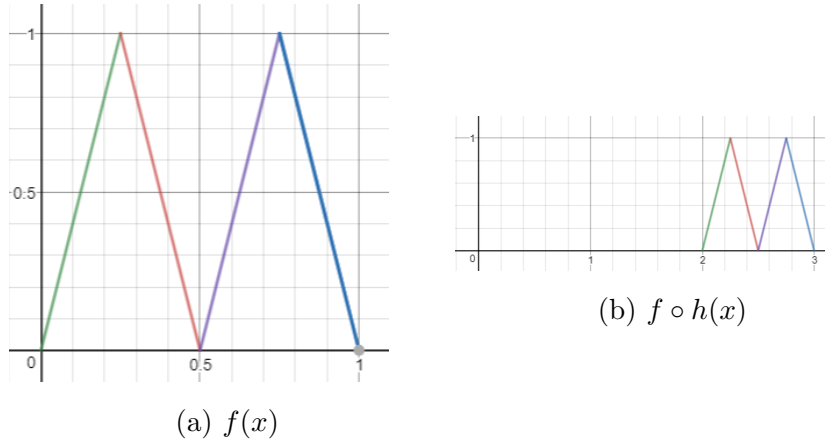


Figura 2.3: Funciones del ejemplo 2.16 al lema 2.15.

El conjunto $B(f \circ h) = \{\frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}\}$. Teniendo en cuenta que $h^{-1}(x) : I \rightarrow [2, 3]$, es fácil calcular $h^{-1}(B(f))$, siendo $h^{-1}(\frac{1}{4}) = \frac{11}{4}$, $h^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$ y $h^{-1}(\frac{3}{4}) = \frac{9}{4}$. Así ya tenemos que se verifica la tercera igualdad, a saber, $h^{-1}(B(f)) = B(f \circ h)$.

Para la segunda igualdad, al ser $p(x) = -x$, considerar la composición implica que $(p \circ f)(x) = -f(x)$. Luego el conjunto de puntos no derivables se conserva y se verifica que $B(p \circ f) = B(f)$.

Finalmente, comprobemos que se cumple la primera igualdad. Computar $g(B(f))$ es sencillo, resultando $g(B(f)) = \{\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}\}$. De igual manera, se comprueba fácilmente que $(g \circ h)(B(f \circ h))$ da el mismo resultado:

$$g\left(h\left(\frac{9}{4}\right)\right) = g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16},$$

$$g\left(h\left(\frac{5}{2}\right)\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

$$g\left(h\left(\frac{11}{4}\right)\right) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}.$$

De esta forma, se verifica $(g \circ h)(B(f \circ h)) = g(B(f))$. Así queda probado el cumplimiento del lema en este caso particular.

Lema 2.17. Sean $(f_n)_n, (g_n)_n$ dos sucesiones uniformemente convergentes de funciones continuas definidas del intervalo $[0, 1]$ en sí mismo con límite f, g , respectivamente. Si $f_n \circ g_{n+1} = g_n \circ f_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces f, g conmutan.

Demostración. Sean $(f_n)_n, (g_n)_n$ dos sucesiones uniformemente convergentes con límite f, g , respectivamente. De esta forma, para todo $\epsilon > 0$, existen $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|f(x) -$

$f_n(x) < \frac{\epsilon}{4}$ y $|g(x) - g_m(x)| < \frac{\epsilon}{4}$ para todo $x \in I$ y para todo $n \geq n_0$ y $m \geq m_0$. Podemos así concluir lo siguiente

$$\begin{aligned} |f(g(x)) - g(f(x))| &\leq |f(g(x)) - f_n(g(x))| + |f_n(g(x)) - f_n(g_{n+1}(x))| \\ &\quad + |g_n(f_{n+1}(x)) - g_n(f(x))| + |g_n(f(x)) - g(f(x))| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

donde el primer y cuarto sumando son menores que $\frac{\epsilon}{4}$ por la convergencia uniforme y el segundo y tercero lo son por ser $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ sucesiones de funciones continuas. Queda así probada la conmutatividad de f y g . \square

Lema 2.18. *Sea $h : I = [0, 1] \rightarrow I$ una función lineal a trozos sin tramos constantes; y sea $A \subset h(I)$ un conjunto finito que contiene a la imagen por h de $B(h)$. Si r, s son consecutivos¹⁰ en $h^{-1}(A)$, entonces $h(r), h(s)$ son consecutivos en A .*

Ejemplo 2.19. *El presente ejemplo ilustra el lema 2.18. Consideremos la función*

$$h(x) = \begin{cases} \frac{9}{2}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{6}, \\ -3x + \frac{5}{4} & \text{si } \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{9}{2}x - \frac{5}{4} & \text{si } \frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{2}, \\ -3x + \frac{5}{2} & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{si } \frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{6}, \\ -\frac{9}{2}x + \frac{9}{2} & \text{si } \frac{5}{6} < x \leq 1. \end{cases}$$

En este caso, tenemos que $B(h) = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}\}$ y $h(B(h)) = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. Consideramos el subconjunto $A = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$. De ahí, obtenemos la antiimagen de dicho subconjunto por h , es decir,

$$h^{-1}(A) = \left\{ \frac{1}{18}, \frac{1}{9}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{7}{18}, \frac{4}{9}, \frac{7}{12}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}, \frac{17}{18} \right\}.$$

Es fácil comprobar que si $r, s \in h^{-1}(A)$ son consecutivos, entonces $h(r)$ y $h(s)$ también lo son en A . Por ejemplo, tomemos $\frac{7}{18}$ y $\frac{4}{9}$ que son consecutivos en $h^{-1}(A)$. Sus imágenes son $h(\frac{7}{18}) = \frac{1}{2}$ y $h(\frac{4}{9}) = \frac{3}{4}$, que son consecutivos en A .

Haciendo uso de los dos lemas anteriores, se prueba la siguiente proposición donde se establecen las primeras propiedades que deben cumplir las sucesiones de funciones para no verificar la conjetura 2.1.

Proposición 2.20. *Sean $(f_n)_n, (g_n)_n$ sucesiones de funciones lineales a trozos de $[0, 1]$ en sí mismo tales que o bien $|x - f_2(x)| > \frac{1}{6}$ o $|x - g_2(x)| > \frac{1}{6}$ para cada $x \in [0, 1]$. Entonces los límites de las sucesiones anteriores no verifican la conjetura siempre y cuando exista*

¹⁰Dado un subconjunto finito $F \subset [0, 1]$, entendemos por puntos consecutivos aquellos que sean sucesivos si ordenamos de forma creciente todos los puntos del subconjunto, i.e., $F = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$.

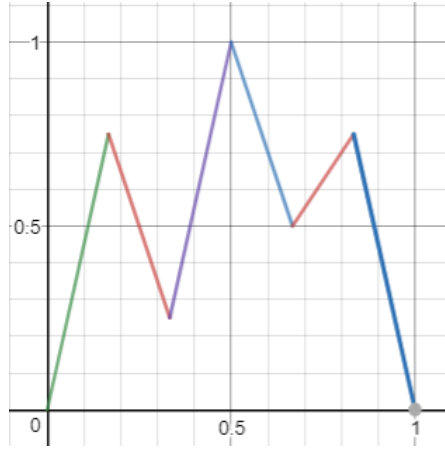


Figura 2.4: Ejemplo del lema 2.18.

una sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos finitos de $[0, 1]$, y para cada $n \in \mathbb{N}$, sean válidas las siguientes propiedades:

- $P_1(n)$: $f_n \circ g_{n+1} = g_n \circ f_{n+1}$;
- $P_2(n)$: $|f'_n(x)| \geq 3$ y $|g'_n(y)| \geq 3$ cuando las derivadas existan;
- $P_3(n)$: Si $f'_n(x)$ o $g'_n(x)$ no existe, entonces $x \in A_n$;
- $P_4(n)$: Para cada par de puntos consecutivos $r, s \in A_{n+1}$ con $r < s$, $f_n([r, s]) = f_{n+1}([r, s])$ y $g_n([r, s]) = g_{n+1}([r, s])$;
- $P_5(n)$: $f_n^{-1}(A_n) = A_{n+1} = g_n^{-1}(A_n)$;
- $P_6(n)$: $0, 1 \in A_n$.

Este resultado es crucial para la construcción del contraejemplo, ya que determina las propiedades que deben cumplir las sucesiones de funciones que nos darán la solución. La prueba de dicha proposición se basa en el uso de los resultados anteriores y de la convergencia uniforme de las sucesiones. En $P_2(n)$ y $P_3(n)$ se aprecia la importancia de la derivada en la construcción de la solución.

Definición 2.21. Para cualquier función lineal a trozos f , si existe un $m \in \mathbb{R}^+$ tal que $|f'(x)| = m$ para cada x para el que $f'(x)$ existe, entonces f tiene derivada de valor absoluto constante, lo que denotaremos por f tiene DVAC. Denotaremos por $s(f)$ al valor absoluto de la pendiente de f .

La función tienda,

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

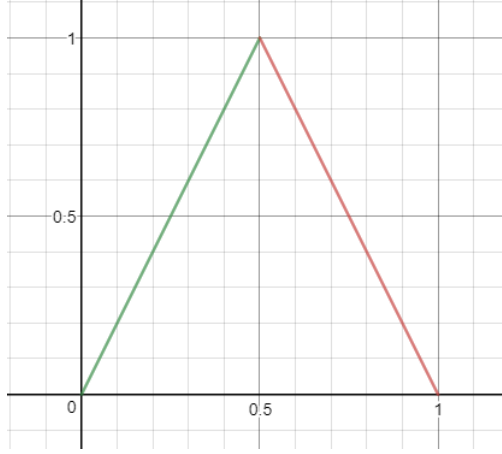


Figura 2.5: Función con derivada de valor absoluto constante.

es un ejemplo de función con derivada de valor absoluto constante, siendo $s(f) = 2$ en este caso.

Sea $J = [r, s]$, entonces denotamos por $T_{rs} : J \rightarrow J$ a la función lineal definida para cada $x \in J$ por

$$T_{rs}(x) = r + s - x. \quad (2.8)$$

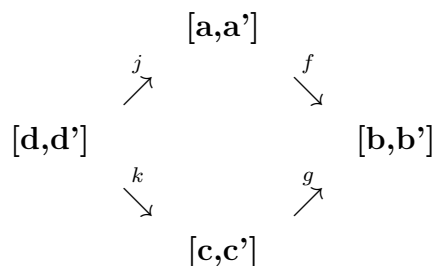
Utilizando esta notación, se prueba que bajo ciertas condiciones se tiene garantizada la conmutatividad de determinadas funciones lineales a trozos formando así un diagrama conmutativo.

Proposición 2.22. Sean $f : [a, a'] \rightarrow [b, b']$ y $g : [c, c'] \rightarrow [b, b']$ funciones lineales a trozos. Si $\{f(a), f(a')\} = \{b, b'\} = \{g(c), g(c')\}$ y si f, g tienen DVAC, entonces existen funciones lineales a trozos $j : [d, d'] \rightarrow [a, a']$ y $k : [d, d'] \rightarrow [c, c']$ que satisfacen las propiedades:

- $j(d) = a$ y $j(d') = a'$;
- $\{k(d), k(d')\} = \{c, c'\}$;
- j, k tienen DVAC;
- $j(B(k)) \subset B(f)$,
- $k(B(j)) \subset B(g)$;
- $f \circ j = g \circ k$.

El diagrama 2.1 conmuta:

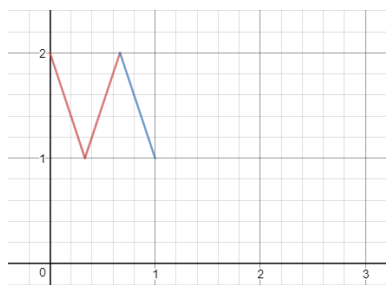
Ilustremos el uso que se hará de la proposición 2.22 con el siguiente ejemplo. Este resultado se utilizará en el proceso de inducción de la construcción del contraejemplo.



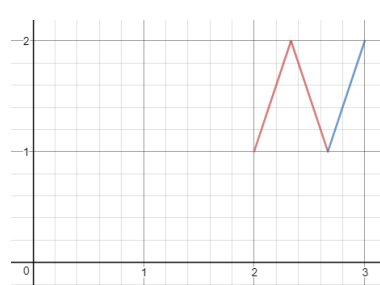
Cuadro 2.1: Diagrama conmutativo

Ejemplo 2.23. Consideramos las funciones $f : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$ y $g : [2, 3] \rightarrow [1, 2]$ siguientes:

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 3x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ -3x + 4 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 3x - 5 & \text{si } 2 \leq x < \frac{7}{3}, \\ -3x + 9 & \text{si } \frac{7}{3} \leq x < \frac{8}{3}, \\ 3x - 7 & \text{si } \frac{8}{3} \leq x < 3. \end{cases}$$



(a) $f : [0, 1] \rightarrow [1, 2]$



(b) $g : [2, 3] \rightarrow [1, 2]$

Figura 2.6: Funciones f y g del ejemplo 2.23

siendo $B(f) = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$ y $B(g) = \{\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\}$. Entonces existen dos funciones $j : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y $k : [0, 1] \rightarrow [2, 3]$ que cumplen las condiciones de la proposición 2.22 que hacen el diagrama de dicha proposición conmutativo. En este caso se trata de

$$j(x) = \begin{cases} -\frac{5}{3}x + 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{2}{5}, \\ \frac{5}{3}x - \frac{1}{3} & \text{si } \frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{5}, \\ -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3} & \text{si } \frac{3}{5} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad y \quad k(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x + 2 & \text{si } 0 \leq x < \frac{2}{5}, \\ -\frac{5}{3}x + \frac{10}{3} & \text{si } \frac{2}{5} \leq x < \frac{3}{5}, \\ \frac{5}{3}x + \frac{4}{3} & \text{si } \frac{3}{5} \leq x < 1. \end{cases}$$

Véase las gráficas de la imagen 2.7. En este ejemplo $s(j) = s(k) = \frac{5}{3}$.

Lema 2.24. Sean h, k dos funciones sobreyectivas que van de $[a, a']$ a $[b, b']$, con h lineal y k lineal a trozos. Si k tiene DVAC, entonces $s(h) \leq s(k)$, es decir, el valor absoluto de la pendiente de la función lineal es menor que la de la lineal a trozos.

La imagen 2.8 muestra la relación entre las pendientes destacada en el lema 2.24.

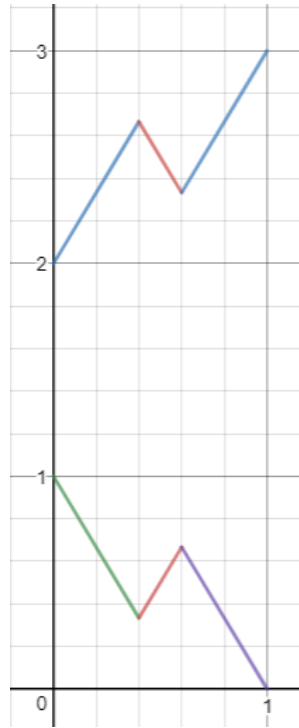


Figura 2.7: Funciones j y k del ejemplo 2.23.

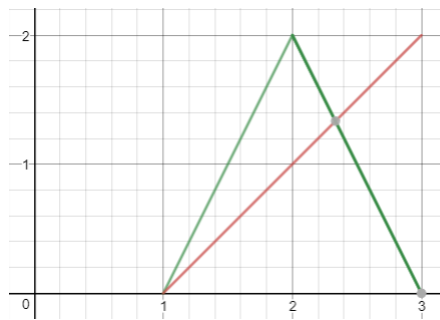


Figura 2.8: Funciones referentes al lema 2.24.

2.2.2. Construcción del contraejemplo.

El contraejemplo se basa, haciendo uso de la proposición 2.22, en construir sucesiones $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ y $(A_n)_n$ que satisfagan las condiciones de la proposición 2.20. En concreto, queremos dos sucesiones de funciones $(f_n)_n$ y $(g_n)_n$ lineales a trozos que vayan del intervalo $[0, 1]$ en sí mismo de forma que para cada $x \in [0, 1]$, o bien

$$|x - f_2(x)| > \frac{1}{6} \text{ o bien } |x - g_2(x)| > \frac{1}{6},$$

y una sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos finitos de $[0, 1]$ tal que $0, 1 \in A_0$, y tal que se satisfagan las propiedades siguientes para cada $n \in \mathbb{N}$:

- $P_i(n)$: para $i = 1, 2, \dots, 5$ como en la proposición 2.20,
- $P_7(n)$: $f_n|_{A_{n+1}} = f_{n+1}|_{A_{n+1}}$ y $g_n|_{A_{n+1}} = g_{n+1}|_{A_{n+1}}$,

- $P_8(n)$: $f_n(B(g_n)) \cup g_n(B(f_n)) \subset A_n$,
- $P_9(n)$: $A_n \subset A_{n+1}$,
- $P_{10}(n)$: para todo par de puntos r, s consecutivos en A_n tal que $r < s$, se cumple que $f_n|_{[r,s]}$ y $g_n|_{[r,s]}$ tienen DVAC.

Nótese que al estar $\{0, 1\} \in A_0$, se sigue que $\{0, 1\} \in A_n$ para todo $n \geq 1$. De ahí que se verifique directamente $P_6(n)$ para todo $n \geq 1$.

Definamos $A_0 = \{0, 1\}$; $A_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ y $A_2 = \{0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{6}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{9}{15}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1\}$.

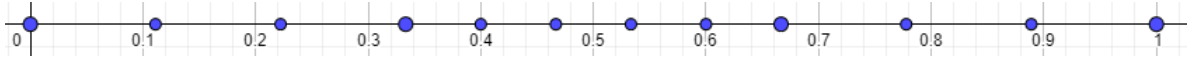


Figura 2.9: Representación del conjunto A_2 en el intervalo unidad.

También definamos f_0, g_0, f_1, g_1, f_2 y g_2 en $[0, 1]$ como sigue:

$$f_0(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 2 - 3x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad g_0(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 3x - 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3 - 3x & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que $g_0 = f_0(1 - x)$.

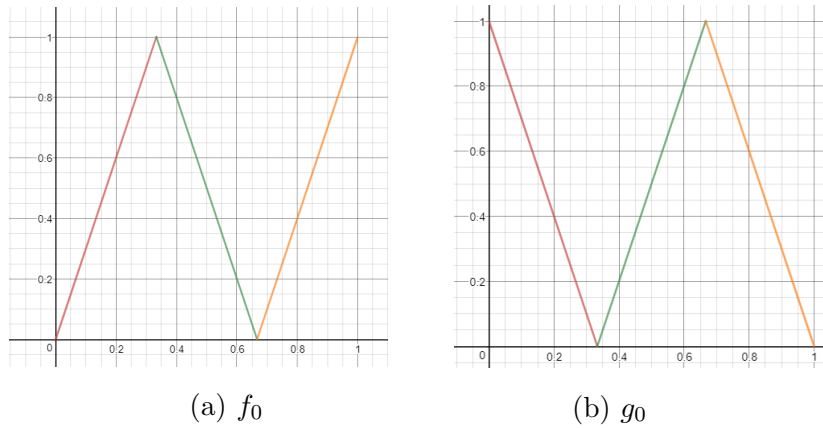


Figura 2.10: Funciones f_0 y g_0 de la construcción del contraejemplo de Huneke.

Para construir f_1 y g_1 , modificamos f_0 y g_0 en la zona central.

$$f_1(x) = \begin{cases} f_0(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ \frac{8}{3} - 5x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{6}{15}, \\ 5x - \frac{4}{3} & \text{si } \frac{6}{15} \leq x < \frac{7}{15}, \\ \frac{10}{3} - 5x & \text{si } \frac{7}{15} \leq x < \frac{2}{3}, \\ f_0(x) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \text{y} \quad g_1(x) = \begin{cases} g_0(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 5x - \frac{5}{3} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{8}{15}, \\ \frac{11}{3} - 5x & \text{si } \frac{8}{15} \leq x < \frac{9}{15}, \\ 5x - \frac{7}{3} & \text{si } \frac{9}{15} \leq x < \frac{2}{3}, \\ g_0(x) & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

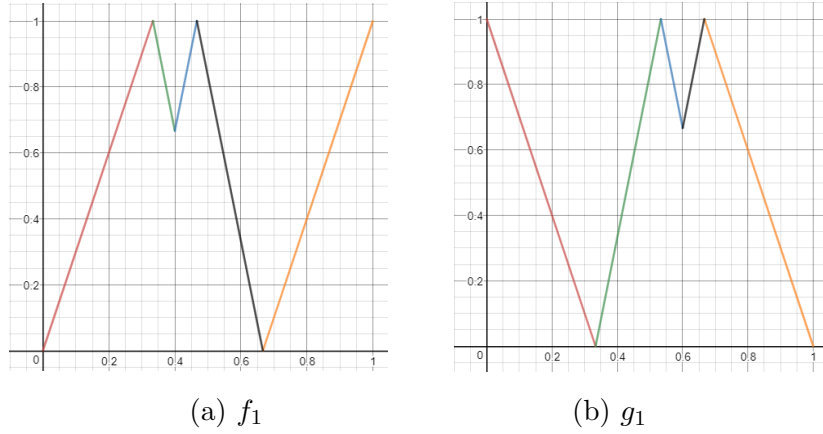


Figura 2.11: Funciones f_1 y g_1 de la construcción del contraejemplo de Huneke.

Nótese que $g_1(x) = f_1(1 - x)$.

Para construir $f_2(x)$ y $g_2(x)$, se modifica $f_1(x)$ en el subintervalo $[\frac{6}{15}, \frac{7}{15}]$ y $g_1(x)$ en el subintervalo $[\frac{8}{15}, \frac{9}{15}]$.

$$f_2(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{6}{15}, \\ \frac{25}{3}x - \frac{8}{3} & \text{si } \frac{6}{15} \leq x < \frac{31}{75}, \\ \frac{38}{9} - \frac{25}{3}x & \text{si } \frac{31}{75} \leq x < \frac{32}{75}, \\ \frac{25}{3}x - \frac{26}{9} & \text{si } \frac{32}{75} \leq x < \frac{7}{15}, \\ f_1(x) & \text{si } \frac{7}{15} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad \text{y } g_2(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{8}{15}, \\ \frac{49}{9} - \frac{25}{3}x & \text{si } \frac{8}{15} \leq x < \frac{41}{75}, \\ \frac{25}{3}x - \frac{11}{3} & \text{si } \frac{41}{75} \leq x < \frac{42}{75}, \\ \frac{17}{3} - \frac{25}{3}x & \text{si } \frac{42}{75} \leq x < \frac{9}{15}, \\ g_1(x) & \text{si } \frac{9}{15} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

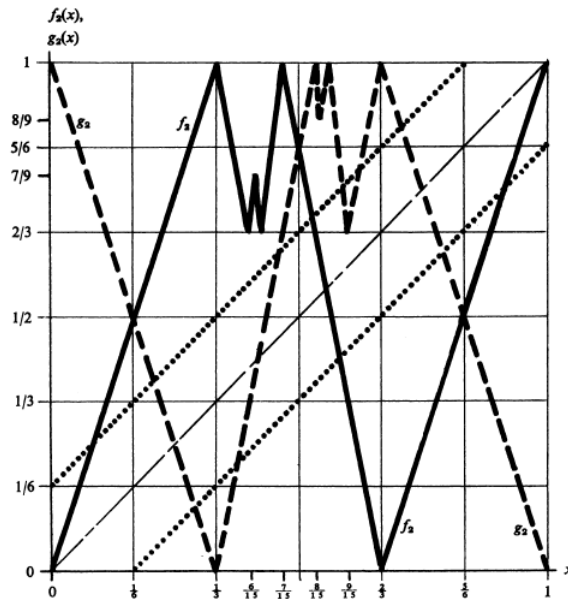


Figura 2.12: Las gráficas de f_2 , g_2 y la diagonal; f_2 o g_2 cae entre las líneas punteadas donde $|x - f_2(x)| \leq \frac{1}{6}$ o $|x - g_2(x)| \leq \frac{1}{6}$. Imagen extraída de [Hun].

Obsérvese que f_i, g_i y A_i ($i = 0, 1, 2$) se han definido satisfaciendo las propiedades deseadas $P_1(n) - P_{10}(n)$ descritas al comienzo de la sección. En la figura anterior 2.12, se aprecia cómo para cada $x \in [0, 1]$, $|x - f_2(x)| > \frac{1}{6}$ o $|x - g_2(x)| > \frac{1}{6}$. Para $i = 1, 2$, también se verifican $P_1(i - 1), P_2(i), P_3(i - 1), P_4(i - 1), P_5(i - 1), P_7(i - 1), P_8(i), P_9(i - 1), P_{10}(i)$.

Procedamos a definir $(f_n)_n, (g_n)_n$ y $(A_n)_n$ por inducción. Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, y supongamos que f_i, g_i y A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) se han definido satisfaciendo las propiedades deseadas. Definamos $A_{n+1} = f_n^{-1}(A_n)$.

Nótese que aplicando $P_5(n), P_1(n)$ y nuevamente $P_5(n)$ obtenemos,

$$A_{n+2} = f_{n+1}^{-1}(A_{n+1}) = (f_{n+1}^{-1} \circ g_n^{-1})(A_n) = (g_{n+1}^{-1} \circ f_n)^{-1}(A_n) = g_{n+1}^{-1}(A_{n+1}),$$

luego se cumple $P_5(n + 1)$. De esta forma, podemos determinar la sucesión de conjuntos A_n , por ejemplo, para A_3 encontramos:

$$A_3 = \left\{ 0, \frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{1}{9}, \frac{4}{27}, \frac{5}{27}, \frac{2}{9}, \frac{7}{27}, \frac{8}{27}, \frac{1}{3}, \frac{6}{15}, \frac{31}{75}, \frac{32}{75}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{41}{75}, \frac{2}{3}, \frac{19}{27}, \frac{20}{27}, \frac{7}{9}, \frac{22}{27}, \frac{23}{27}, \frac{8}{9}, \frac{25}{27}, \frac{26}{27}, 1 \right\}.$$

Para cada $x \in [0, 1]$ definamos $f_{n+1}(x)$ y $g_{n+1}(x)$ de la siguiente manera: Existen dos puntos consecutivos d, d' de A_{n+1} tales que $d \leq x \leq d'$, ya que A_{n+1} es finito y contiene a 0 y a 1. Fijemos

$$\{a, a'\} = \{g_n(d), g_n(d')\}; \quad \{b, b'\} = \{(f_{n-1} \circ g_n)(d), (f_{n-1} \circ g_n)(d')\}; \quad \{c, c'\} = \{f_n(d), f_n(d')\}$$

tal que $a < a', b < b'$ y $c < c'$ por el lema 2.18.

Observemos que $f_n|_{[a,a']}$ y $g_n|_{[c,c']}$ satisfacen la hipótesis de la proposición 2.22 para f_n y g_n respectivamente. Así que podemos definir, por la proposición 2.22, dos aplicaciones j, k tales que j lleva $[d, d']$ a $[a, a']$ y k lleva $[d, d']$ a $[c, c']$. Si $g_n(d) = a$, entonces definamos $f_{n+1}(x) = k(x)$ y $g_{n+1}(x) = j(x)$; si $g_n(d) = a'$, entonces definimos $f_{n+1}(x) = (k \circ T_{dd'})(x)$ y $g_{n+1}(x) = (j \circ T_{dd'})(x)$. Recordemos que $T_{dd'}$ viene definido por $T_{dd'} = d + d' - x$ como introdujimos en 2.8. En el procedimiento anterior, para $x \in [0, 1]$ fijo, los puntos d, d' no son necesariamente únicos. Sin embargo, f_{n+1} y g_{n+1} son funciones bien definidas ya que $g_{n+1}|_{A_{n+1}} = g_n|_{A_{n+1}}$ por definición, y de ahí $f_{n+1}|_{A_{n+1}} = f_n|_{A_{n+1}}$. Por lo tanto, $P_7(n + 1)$ se satisface. Teniendo esto en cuenta, determinemos las siguientes funciones de las sucesiones, a saber, f_3 y g_3 :

$$f_3(x) = \begin{cases} f_2(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{31}{75}, \\ -\frac{125}{9}x + \frac{176}{27}, & \text{si } \frac{31}{75} \leq x \leq \frac{156}{375}, \\ \frac{125}{9}x - \frac{136}{27}, & \text{si } \frac{156}{375} \leq x \leq \frac{157}{375}, \\ \frac{125}{9}x + \frac{178}{27} & \text{si } \frac{157}{375} \leq x \leq \frac{32}{75}, \\ f_2(x) & \text{si } \frac{32}{75} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \text{y } g_3(x) = \begin{cases} g_2(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{41}{75}, \\ \frac{125}{9}x - \frac{181}{27}, & \text{si } \frac{41}{75} \leq x \leq \frac{206}{375}, \\ \frac{77}{9} - \frac{125}{9}x, & \text{si } \frac{206}{375} \leq x \leq \frac{207}{375}, \\ \frac{125}{9}x - \frac{61}{9} & \text{si } \frac{207}{375} \leq x \leq \frac{42}{75}, \\ g_2(x) & \text{si } \frac{42}{75} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$P_1(n+1)$ también se verifica, ya que para cada $x \in [0, 1]$ existen d, d' consecutivos en A_{n+1} de modo que $d \leq x \leq d'$ y o bien

$$(f_n \circ g_{n+1})(x) = (f_n \circ j \circ T_{dd'})(x) = (g_n \circ k \circ T_{dd'})(x) = (g_n \circ f_{n+1})(x),$$

o bien

$$(f_n \circ g_{n+1})(x) = (f_n \circ j)(x) = (g_n \circ k)(x) = (g_n \circ f_{n+1})(x),$$

donde j, k están definidas por la proposición 2.22. Luego $f_n \circ g_{n+1} = g_n \circ f_{n+1}$.

Además, $P_3(n+1)$ se cumple por $P_5(n)$ y $P_8(n)$.

$P_4(n+1)$ se cumple por $P_3(n)$ y la proposición 2.22.

$P_{10}(n+1)$ se satisface por la proposición 2.22.

$P_2(n+1)$ se verifica por $P_2(n), P_3(n), P_4(n), P_{10}(n+1)$ y el lema 2.24.

$P_9(n+1)$ se satisface por $P_5(n), P_7(n), P_9(n)$ y $P_5(n+1)$.

$P_8(n+1)$ se verifica por la proposición 2.22, el lema 2.15, $P_5(n), P_9(n)$ y $P_3(n)$.

Por lo tanto, f_i, g_i y A_i ($i = 0, \dots, n+1$) se han definido satisfaciendo las propiedades deseadas.

En definitiva, las sucesiones $(f_n)_n, (g_n)_n$ y $(A_n)_n$, definidas por inducción satisfacen la proposición 2.20. Así que $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ y $g = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ constituyen un contraejemplo para la conjetura 2.1 sobre puntos fijos comunes de funciones continuas del intervalo que conmutan.

Esta construcción es esencialmente la misma que desarrolló de forma independiente Boyce [Boy1]. Sin embargo, Huneke presentó una segunda construcción donde describió funciones más suaves que también formaban un contraejemplo. Veamos esta segunda construcción.

Para cualquier aplicación $h : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotemos por h^* a la aplicación

$$h^*(x) = 1 - h(1 - x)$$

para cada x para el cual $h(1 - x)$ esté definido. Obsérvese que $h^{**} = h$.

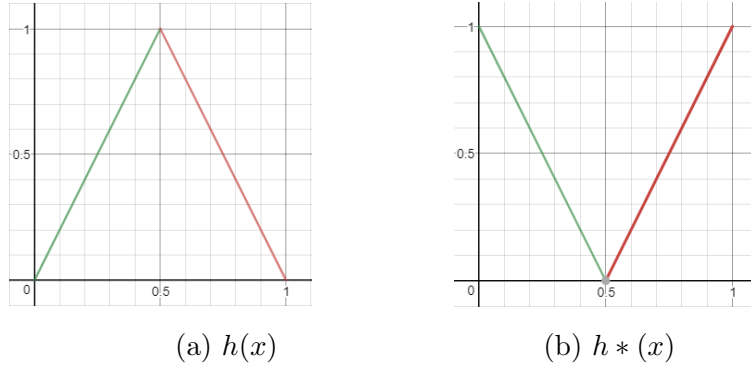


Figura 2.13: Ejemplo de funciones h y h^* .

También, diremos que h es s -lipschitziana siempre y cuando s sea un número real y para cada x, y en el dominio de h , $|h(x) - h(y)| \leq s|x - y|$. Ahora tomemos cualquier b en $[0, \frac{1}{2})$, y definamos

$$s = \frac{3 - 2b + (6 - 4b)^{\frac{1}{2}}}{1 - 2b}.$$

Definamos las tres funciones lineales,

$$h_1 : \left[b, \frac{1-b+sb}{s} \right] \rightarrow [b, 1] \text{ tal que } h_1(x) = sx - sb + b.$$

$$h_2 : \left[\frac{1-b+sb}{s}, \frac{2-b+sb}{s} \right] \rightarrow [0, 1] \text{ tal que } h_2(x) = 2 - sx + sb - b.$$

$$h_3 : \left[\frac{2-b+sb}{s}, \frac{3-2b+sb}{s} \right] \rightarrow [0, 1 - b] \text{ tal que } h_3(x) = -2 + sx - sb + b.$$

y definamos la función lineal a trozos $h : \left[b, \frac{3-2b+sb}{s} \right] \rightarrow [0, 1]$ por $h = h_1 \cup h_2 \cup h_3$. El caso particular $b = 0$ es el más sencillo. En ese caso, tenemos $s = 3 + \sqrt{6}$ y es fácil calcular la expresión explícita de h . En el siguiente ejemplo recogemos el caso particular $b = \frac{1}{4}$.

Ejemplo 2.25. *Definamos y representemos gráficamente las funciones lineales anteriores para el caso particular $b = \frac{1}{4}$ con el objetivo de apreciar mejor su comportamiento.*

Comencemos calculando s

$$s = \frac{3 - 2b + (6 - 4b)^{\frac{1}{2}}}{1 - 2b} = \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{4} + (6 - 4 \cdot \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}{1 - 2 \cdot \frac{1}{4}} = 5 + 2\sqrt{5}.$$

Así, las funciones lineales h_i ($i = 1, 2, 3$) serán las siguientes:

$$h_1 : \left[\frac{1}{4}, \frac{10 - 3\sqrt{5}}{10} \right] \rightarrow \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$$

$$x \mapsto (5 + 2\sqrt{5})x - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$h_2 : \left[\frac{10 - 3\sqrt{5}}{10}, \frac{20 - 7\sqrt{5}}{10} \right] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto 3 + \frac{\sqrt{5}}{2} - (5 + 2\sqrt{5})x;$$

$$h_3 : \left[\frac{20 - 7\sqrt{5}}{10}, \frac{11}{4} - \sqrt{5} \right] \rightarrow \left[0, \frac{3}{4} \right]$$

$$x \mapsto (5 + 2\sqrt{5})x - 3 - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Quedando así definida la función lineal a trozos $h : \left[\frac{1}{4}, \frac{11}{4} - \sqrt{5} \right] \rightarrow [0, 1]$ por $h = h_1 \cup h_2 \cup h_3$. Véase la imagen 2.14.

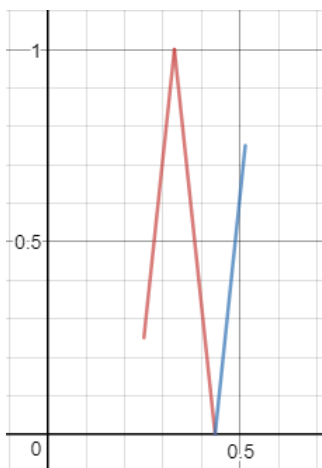


Figura 2.14: Función lineal a trozos $h : \left[\frac{1}{4}, \frac{11}{4} - \sqrt{5} \right] \rightarrow [0, 1]$.

□

Denotemos por C_b el conjunto de funciones continuas de $[0, b]$ a $[0, b]$ que tienen como punto fijo a b , donde b sigue comprendido en $[0, \frac{1}{2})$.

Definición 2.26. Para cada $g \in C_b$, sea \bar{g} la única extensión de g definida por:

1. $\bar{g}(x) = g(x)$ cuando $0 \leq x \leq b$;
2. $\bar{g}(x) = h(x)$ cuando $b \leq x \leq h_3^{-1}(1 - b)$;
3. $\bar{g}(x) = h_1^{*-1}\bar{g}(h^*(x))$ cuando $h_3^{-1}(1 - b) \leq x \leq h_2^{*-1}(h_2^{-1}(0))$;
4. $\bar{g}(x) = h_2^{*-1}\bar{g}(h^*(x))$ cuando $h_2^{*-1}(h_2^{-1}(0)) \leq x \leq 1 - b$;
5. $\bar{g}(x)$ es igual al punto fijo de h_2^* cuando $1 - b \leq x \leq 1$.

Ejemplo 2.27. En el siguiente ejemplo ilustraremos con un caso concreto la definición 2.26. Para ello nos apoyaremos en el ejemplo 2.25 donde definíamos una función $h : [\frac{1}{4}, \frac{11}{4} - \sqrt{5}] \rightarrow [0, 1]$ para el caso $b = \frac{1}{4}$.

Tomamos la función $g(x) = x$. Nótese que $g \in C_{\frac{1}{4}}$. Haciendo los cálculos correspondientes a la definición anterior obtenemos la función que buscábamos

$$\bar{g}(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ (5 + 2\sqrt{5})x - 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} & \text{si } \frac{1}{4} < x \leq \frac{10-3\sqrt{5}}{10}, \\ -(5 + 2\sqrt{5})x + 3 + \frac{\sqrt{5}}{2} & \text{si } \frac{10-3\sqrt{5}}{10} < x \leq \frac{20-7\sqrt{5}}{10}, \\ (5 + 2\sqrt{5})x - 3 - \frac{\sqrt{5}}{2} & \text{si } \frac{20-7\sqrt{5}}{10} < x \leq \frac{11}{4} - \sqrt{5}, \\ \frac{508925-230078\sqrt{5}}{114520\sqrt{5}-251535}x + \frac{2455059\sqrt{5}-5477170}{229040\sqrt{5}-503070} & \text{si } \frac{11}{4} - \sqrt{5} < x \leq \frac{9\sqrt{5}-17}{5}, \\ \frac{3077\sqrt{5}-6755}{8180}x + \frac{350-143\sqrt{5}}{50} & \text{si } \frac{9\sqrt{5}-17}{5} < x \leq \frac{3}{4}, \\ \frac{3\sqrt{5}+3}{16} & \text{si } \frac{3}{4} < x \leq 1. \end{cases}$$



Figura 2.15: Ejemplo función \bar{g} .

La definición explícita de \bar{g} no ayuda mucho a hacerse una imagen mental de cómo pueden ser este tipo de funciones. De ahí que la hayamos representado gráficamente, imagen 2.15, para que el lector aprecie mejor la forma de este tipo de funciones.

En [Hum] se puede encontrar la prueba de que la definición anterior de \bar{g} es consistente en el sentido de que está únicamente determinada por una función s -lipschitziana $g \in C_b$.

Lema 2.28. Para cualquier f, g en C_b y cualquier $x \in [\frac{1}{2}, 1]$,

1. $\bar{f}^*(x) = x$ implica $\bar{g}(x) \neq x$,
2. $\bar{f}^*(\bar{g}(x)) = \bar{g}(\bar{f}^*(x))$.

Proposición 2.29. Cualquier $f, g \in C_b$, \bar{f} y \bar{g}^* no cumplen la conjetura sobre puntos fijos comunes a funciones continuas que conmutan en el intervalo unidad.

Demostración. Sean $f, g \in C_b$. Entonces por el lema 2.28, \bar{f} y \bar{g}^* conmutan sin puntos fijos comunes en $[\frac{1}{2}, 1]$; también \bar{f}^* y \bar{g} conmutan sin puntos fijos comunes en $[\frac{1}{2}, 1]$.

Luego \bar{f}^{**} y \bar{g}^* conmutan sin puntos fijos comunes en $[0, \frac{1}{2}]$. Pero $\bar{f}^{**} = \bar{f}$, así que \bar{f} y \bar{g}^* forman un contraejemplo para la conjetura 2.1. \square

2.3. Contraejemplo 2 - Boyce

En esta sección presentamos el contraejemplo propuesto por Boyce [Boy1]. Debido a las inmensas similitudes con el primer contraejemplo construido por Huneke descrito en el apartado anterior, no daremos todos los detalles de la construcción para evitar repeticiones innecesarias. El lector interesado puede encontrar todos los detalles en [Boy1], el artículo que ha servido de base para el texto que sigue.

Comenta Boyce en su artículo que su construcción vino motivada por una extensa y profunda investigación sobre la conexión entre las funciones que conmutan y las permutaciones definidas por Baxter y Joichi [BaxJo], [Bax]. Dichas permutaciones conmutan los puntos fijos de las composiciones $f \circ g$ y de $g \circ f$. Además, en dicho trabajo se analizan los distintos tipos de puntos fijos.

Motivado por este trabajo, Boyce construyó las funciones buscadas f y g como los límites de un par de sucesiones de funciones continuas $(f_i)_i$ y $(g_i)_i$. A cada par de funciones (f_i, g_i) $i \geq 1$, le asoció un conjunto de puntos estables¹¹ S_i . Dichos conjuntos se relacionan del siguiente modo, $S_i \subset S_{i+1}$, y para cada $x \in S_i$, se tiene que $f_{i+j}(x) = f_i(x)$ y $g_{i+j}(x) = g_i(x)$ para todo $j \geq 0$. Así que en el límite, $f(x) = f_i(x)$ y $g(x) = g_i(x)$ para x en S_i . Al ser densa en I la unión de los S_i , se tiene que las funciones límite f y g vendrán determinadas por los valores de f_i y g_i en S_i , siendo independiente de los valores en los (i) -intervalos intermedios (véase la definición 2.32).

Introducimos una serie de conceptos clave para aclarar la descripción anterior y la posterior construcción del contraejemplo. Se entiende que fijamos las funciones f_i, g_i y el conjunto de puntos estables asociado S_i , que consideraremos finito, para todo $i \geq 1$.

Definición 2.30. *Sea A un intervalo cerrado. Un subconjunto T de A es el (k) -conjunto de A si tiene k elementos, contiene a los extremos de A y lo divide en $k - 1$ subintervalos de igual longitud.*

¹¹Recordemos que un punto x_0 es estable si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implica que $|f^n(x) - x_0| < \varepsilon$ para todo $n > 0$.

En el caso del intervalo unidad, $I = [0, 1]$, un ejemplo de (4)-conjunto sería el subconjunto $T = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$.



Figura 2.16: Ejemplo de (4)-conjunto.

Definición 2.31. Sean A y B intervalos cerrados. Sea T el $(2k + 2)$ -conjunto de A y U el $(2k)$ -conjunto de B para $k \geq 2$. Sean $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{2k+2}\}$ y $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{2k}\}$, donde los elementos de T y U se numeran en orden creciente. Cuatro funciones de A a B se llamarán funciones gancho de orden $(2k + 2)$ de A a B . Cada una de ellas tiene una dirección (creciente o decreciente) y un tipo (máximo o mínimo). Cada una de ellas lleva T a U y es lineal en los subintervalos definidos por los puntos de T , luego es suficiente con definirlos explícitamente en T como sigue:

Tipo	Dirección	Valor de la función en t_i
Mínimo	Creciente	$u_i, i \leq 2; u_{i-2}, i > 2$.
Máximo	Creciente	$u_i, i \leq 2k; u_{i-2}, i > 2k$.
Mínimo	Decreciente	$u_{2k+1-i}, i \leq 2k; u_{2k+3-i}, i > 2k$.
Máximo	Decreciente	$u_{2k+1-i}, i \leq 2; u_{2k+3-i}, i > 2$.

Cuadro 2.2: Función gancho

El término de función gancho se utilizará únicamente cuando el orden y los intervalos involucrados estén claros. La imagen 2.17, extraída de [Boy1], recoge los cuatro tipos de funciones gancho posibles.

Definición 2.32. Dado $S_i \subset I, i \geq 1$. Diremos que un intervalo cerrado no degenerado $J \subset I$ es un (i) -intervalo si sus extremos están en S_i pero no lo están ninguno de sus puntos interiores.

Si consideramos el subconjunto anterior, $T = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$, nótese que $T = S_1$, es decir, coincide con el conjunto de puntos estables asociado a (f_1, g_1) . En este caso podemos distinguir tres (1)-intervalos, $J_1 = [0, \frac{1}{3}]$, $J_2 = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ y $J_3 = [\frac{2}{3}, 1]$.

Definición 2.33. El tamaño de red M_i de S_i es el máximo de las longitudes de los (i) -intervalos asociados.

En referencia a los ejemplos anteriores, el tamaño de red de S_1 es $M_1 = \frac{1}{3}$.

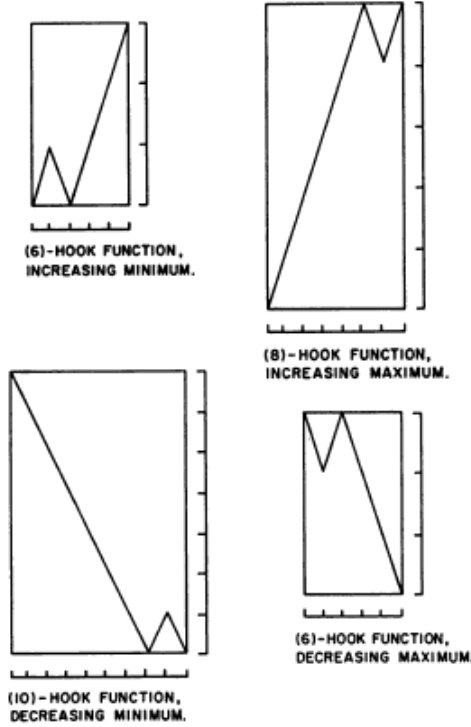


Figura 2.17: Los cuatro tipos posibles de funciones gancho. Imagen extraída de [Boy1].

Una vez que tenemos establecidas las definiciones necesarias, vamos a especificar las funciones iniciales; posteriormente, enunciaremos el lema 2.34 que determinará la sucesión de funciones que debemos considerar y, finalmente, demostraremos el teorema que garantiza las propiedades deseadas para las funciones límite. En las figuras 2.18 y 2.19, tenemos la representación gráfica de las dos primeras funciones de las sucesiones, a saber, f_1, g_1, f_2, g_2 . Las expresiones analíticas de f_1 y g_1 son:

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 3x - 1 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3 - 3x & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad g_1(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 2 - 3x & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que $g_1(x) = f_1(1 - x)$. Para construir f_2 y g_2 modificamos f_1 y g_1 en el subintervalo central $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$.

$$f_2(x) = \begin{cases} -3x + 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ 5x - \frac{5}{3} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{6}{15}, \\ -5x + \frac{7}{3} & \text{si } \frac{6}{15} \leq x < \frac{7}{15}, \\ 5x - \frac{7}{3} & \text{si } \frac{7}{15} \leq x < \frac{2}{3}, \\ -3x + 3 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad g_2(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{3}, \\ -5x + \frac{8}{3} & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{8}{15}, \\ 5x - \frac{8}{3} & \text{si } \frac{8}{15} \leq x < \frac{9}{15}, \\ -5x + \frac{10}{3} & \text{si } \frac{9}{15} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Observemos que $g_2(x) = f_2(1 - x)$. Junto con f_1, g_1, f_2, g_2 consideramos los conjuntos S_1 y S_2 :

$$S_1 = \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right\},$$

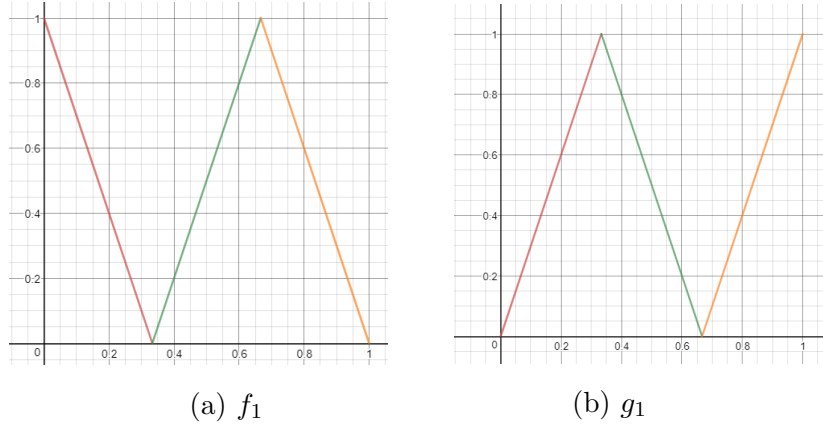


Figura 2.18: Funciones f_1 y g_1 de la construcción del contraejemplo de Boyce.

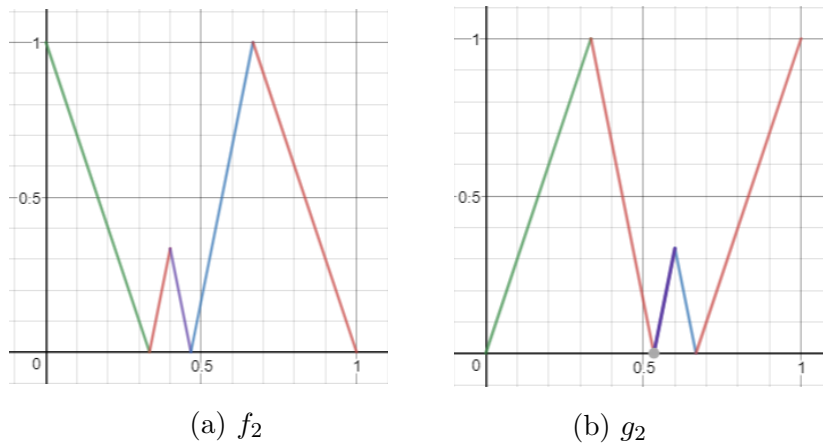


Figura 2.19: Funciones f_2 y g_2 de la construcción del contraejemplo de Boyce.

$$S_2 = \left\{ 0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{6}{15}, \frac{7}{15}, \frac{8}{15}, \frac{9}{15}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1 \right\}.$$

Se puede comprobar fácilmente que se verifica que $f_1 \circ g_2 = g_1 \circ f_2$.

Lema 2.34. *Existen dos sucesiones de funciones $(f_i)_i$ y $(g_i)_i$ y una sucesión de conjuntos $(S_i)^{12}$ de puntos estables que satisfacen los siguientes requisitos para $i \geq 2$:*

1. $f_1, f_2, g_1, g_2, S_1, S_2$ están definidos como antes.
2. [**Propiedades de S_i**] $S_{i-1} \subset S_i$; si J es un $(i-1)$ -intervalo, entonces existe un $k \leq 2$ tal que $S_i \cap J$ es el $(2k)$ -conjunto de J ; y $M_i \leq \left(\frac{1}{3}\right)^i$.
3. [**Conmutatividad del diagrama**] $f_{i-1} \circ g_i = g_{i-1} \circ f_i$ en I .
4. [**f_i en un (i) -intervalo**] $f_i(S_i) \subset S_{i-1}$; f_i es lineal en cada (i) -intervalo y los lleva a un $(i-1)$ -intervalo. Es más, para $j \geq 0$, f_{i+j} coincide con f_i en S_i , y si J es un

¹²Recordemos que S_i es un conjunto de puntos estables asociado a cada par de funciones (f_i, g_i) tal que $S_i \subset S_{i+1}$, y para cada $x \in S_i$, se tiene $f_{i+j}(x) = f_i(x)$ y $g_{i+j}(x) = g_i(x)$ para todo $j \geq 0$.

(i)-intervalo, entonces $f_{i+j}(J) = f_i(J)$; de ahí $\|f_{i+j} - f_i\| \leq M_{i-1}$, donde $\|F\|$ es la norma del supremo de F en I .

5. [g_i en un (i)-intervalo] Lo mismo que en 4 pero para $g_{i+j} = g_i$.

6. [f_i es un ($i-1$)-intervalo] Sea J un ($i-1$)-intervalo y definamos $J_f = f_{i-1}(J)$. Entonces se da uno de los siguientes casos:

- f_i es lineal en J , $f_i|_J = f_{i-1}|_J$; y $S_i \cap J$ y $S_{i-1} \cap J_f$ tienen la misma cardinalidad.
- f_i es una función gancho ($2k+2$) de J en J_f , $S_i \cap J$ es un ($2k+2$)-conjunto de J , y $S_{i-1} \cap J_f$ es el ($2k$)-conjunto de J_f .

7. [g_i es un ($i-1$)-intervalo] Lo mismo que en 6 pero para g_i, g_{i-1} , y J_g .

Nótese que el lema anterior determina un proceso inductivo para determinar el resto de las sucesiones de funciones continuas que vamos a considerar. Siguiendo las propiedades que en él se han establecido, representamos gráficamente el tercer y cuarto término de las sucesiones, f_3, g_3, f_4, g_4 para ilustrar cómo continúa la construcción.

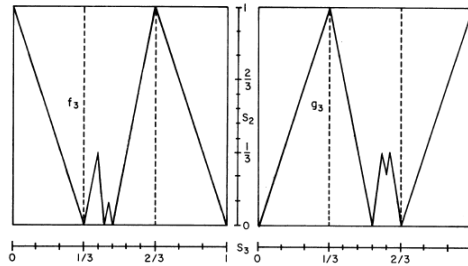


Figura 2.20: Las gráficas de f_3, g_3 . Imagen extraída de [Boy1].

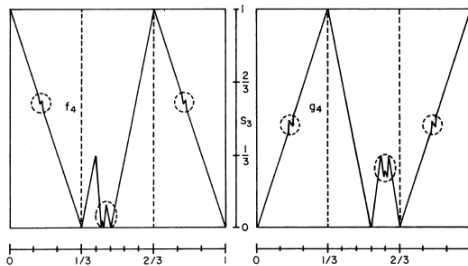


Figura 2.21: Las gráficas de f_4, g_4 . Imagen extraída de [Boy1].

Teorema 2.35. *Existen funciones continuas $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que conmutan pero que no tienen ningún punto fijo en común.*

Demostración. Por el lema 2.34 tenemos dos sucesiones de funciones (f_i) y (g_i) que satisfacen las condiciones 1 – 7. Para demostrar el teorema tenemos que probar que las sucesiones

convergen uniformemente a funciones continuas f y g , que dichas funciones límite conmutan, y que no tienen ningún punto en común.

En primer lugar, veamos la convergencia uniforme. Para ello probemos que (f_i) es una sucesión de Cauchy con respecto a la norma del supremo $\|\cdot\|$ en I . Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{1}{3})^{N-1} < \epsilon$. Entonces cuando $n \geq m > N$, por las condiciones 2 y 4 tenemos que

$$\|f_n - f_m\| \leq M_{m-1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{m-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{N-1} < \epsilon.$$

De ahí, (f_i) converge uniformemente en I , por lo que la sucesión tiene un único límite a una función continua f . De forma similar, (g_i) converge uniformemente a una función continua g .

En segundo lugar, veamos la conmutatividad de f y g utilizando la siguiente desigualdad, obsérvese que $(f_n \circ g_{n+1})(x) = (g_n \circ f_{n+1})(x)$

$$\begin{aligned} |(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)| &\leq |(f \circ g)(x) - (f_n \circ g)(x)| + |(f_n \circ g)(x) - (f_n \circ g_{n+1})(x)| \\ &\quad + |(g_n \circ f_{n+1})(x) - (g_n \circ f)(x)| + |(g_n \circ f)(x) - (g \circ f)(x)|. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos elegir N_1 tal que $n > N_1$ implique $\|f - f_n\| < \epsilon/4$ por la convergencia uniforme. De la misma forma, existe N_2 tal que $n > N_2$ implica $\|g - g_n\| < \epsilon/4$.

También, por ser las sucesiones de Cauchy, existen un N_3 y δ_3 tal que $n, m > N_3$ y $|x - y| < \delta_3$ implica que $|f_n(x) - f_m(y)| < \epsilon/4$; y N_4 tal que $n > N_4$ implica $\|g - g_n\| < \delta_3$. Efectivamente,

$$|f_n(x) - f_m(y)| < |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_m(y)| < \frac{\epsilon}{4},$$

donde el primer y tercer sumando son menores que ϵ por la convergencia uniforme, y el segundo lo es por ser $|x - y| < \delta_3$ y f una función continua.

De la misma forma, existen un N_5 y δ_5 tal que $n, m > N_5$ y $|x - y| < \delta_5$ implica que $|g_n(x) - g_m(y)| < \epsilon/4$; y N_6 tal que $n > N_6$ implica $\|g - g_n\| < \delta_5$. Efectivamente, de forma análoga al caso anterior,

$$|g_n(x) - g_m(y)| < |g_n(x) - g(x)| + |g(x) - g(y)| + |g(y) - g_m(y)| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Además, por la condición 3 del lema 2.34 $\|f_n \circ g_{n+1} - g_n \circ f_{n+1}\| = 0$ para todo n , por lo tanto, cuando $n > \max\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6\}$ y $\delta < \min\{\delta_3, \delta_5\}$, tenemos que

$$|(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} < \epsilon.$$

De ahí que los límites f y g conmuten.

Finalmente, veamos que f y g no tienen ningún punto fijo en común. Para ello vamos a utilizar las características de f_2 y g_2 y las condiciones 4 y 5 del lema 2.34. En la figura 2.19 se aprecia cómo f_2 y g_2 llevan (2)–intervalos en (1)–intervalos. Ahora si J_2 es un (2)–intervalo y $f_2(J_2) = J_1$, un (1)–intervalo, por la condición 4 si $i \geq 2$, tendremos que $f_i(J_2) = f_2(J_2) = J_1$. Así que en el límite, $f(J_2) = J_1$. Esto significa que la gráfica de f está en uno de los rectángulos de altura 1 y base un (i)–intervalo J de S_i de la figura 2.19 si y sólo si lo está la gráfica de f_2 . Comparando los rectángulos por los que pasa la gráfica de f_2 con aquellos por los que pasa la diagonal, está claro que todos los puntos fijos de f deben caer en el tercer, séptimo y noveno (2)–intervalo. Esto es, $J_3 = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $J_7 = [\frac{8}{15}, \frac{9}{15}]$ y $J_9 = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$. De forma análoga, se obtiene que los puntos fijos de g deben caer en el primer, quinto y undécimo (2)–intervalo. Esto es, $J_1 = [0, \frac{1}{9}]$, $J_5 = [\frac{6}{15}, \frac{7}{15}]$ y $J_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$. Como ningún (2)–intervalo puede contener los puntos fijos tanto de f como de g , no pueden tener puntos fijos en común. \square

2.4. Generalización del problema

A pesar de que Boyce y Huneke construyesen contraejemplos que probaban que la conjetura 2.1 era falsa, numerosos matemáticos continuaron investigando en la línea afirmativa de la conjetura, estudiando casos particulares donde sí se verificaba y proporcionando caracterizaciones de las funciones que conmutan. A continuación, vamos a presentar algunos de estos resultados centrándonos principalmente en familias de funciones, en la extensión del problema a otros espacios métricos compactos y a clases particulares de funciones continuas.

En [Shi], como vimos anteriormente en este capítulo 2.13, Shields consideró el caso donde las funciones que conmutan, f y g , van del disco unidad \bar{D} en sí mismo. En dicho artículo probó que si f es analítica en el interior de D , entonces f y g tienen un punto fijo común. Una de las claves en su demostración fue que, bajo ciertas condiciones, f debía ser Γ –compacta¹³. Este resultado lo probó aplicando técnicas topológicas de semigrupos. Utilizando técnicas similares, Boyce consiguió generalizar en [Boy2] el teorema de Shields al probar que si dos funciones f y g de $C(X, X)$ conmutan, con X compacto y f siendo Γ –compacta, entonces dichas funciones tienen un punto fijo en común.

Los métodos topológicos de semigrupos desarrollados por Shields fueron de gran utilidad

¹³Una función $f : X \rightarrow X$, con X un espacio métrico compacto, se dice Γ –compacta si toda sucesión $\{f^n\}_{n \geq 0}$ de iteradas de f tiene una subsucesión que converge uniformemente en subespacios compactos de X .

a muchos otros autores para continuar proporcionando nuevas generalizaciones y caracterizaciones. En [Mit], Mitchell probó que cualquier familia \mathcal{F} de funciones continuas que conmutan dos a dos, definidas en I , contiene un punto fijo común siempre que para cada $f \in \mathcal{F}$, con una posible excepción, la familia de iteradas de f sea equicontinua¹⁴. También haciendo uso de estas técnicas, Cano [Can] demostró que para una familia de funciones continuas de I en I que conmutan, si cada función, excepto a lo sumo una, tiene un intervalo $[a, b]$ como su conjunto de puntos fijos, o no tiene puntos periódicos que no sean fijos, entonces dicha familia tiene un punto fijo común.

Finalmente, destaquemos algunos avances orientados hacia la extensión de otros espacios métricos compactos y a clases particulares de aplicaciones continuas.

A finales de los años 80, Jungck [Jun1] introdujo el término de funciones compatibles como sigue.

Definición 2.36. Sean f y g funciones definidas de un espacio métrico (X, d) en sí mismo. Diremos que f y g son compatibles si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f(g(x_n)), g(f(x_n))) = 0$ siendo (x_n) una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = t$ para algún t en X .

De la definición se deduce que si $d(f(g(x_n)), g(f(x_n)))$ tiende a 0 cuando $d(f(x_n), g(x_n))$ tiende a 0, entonces f y g son compatibles. Claramente, esta condición es más sencilla de comprobar que la propia definición y también es obvio que dos funciones que conmutan son compatibles. El recíproco no es cierto, basta considerar $f(x) = 5x^3$ y $g(x) = 2x^3$ para comprobarlo, ya que se trata de dos funciones compatibles que no conmutan. En [Jun1], Jungck expone resultados que relacionan la compatibilidad de funciones con la existencia de puntos fijos comunes, siendo el resultado principal el siguiente:

Teorema 2.37. Sean f y g funciones que conmutan sobre un espacio métrico compacto (X, d) tal que $g \circ f$ es continua. Si $f(x) \neq g(y)$ implica que $d(f(x), g(y)) < \text{diam}\{h(z) : z \in \{x, y\} \text{ y } h \in C_{gf}\}$, entonces existe un único punto x_0 en X tal que $x_0 = f(x_0) = g(x_0)$. De hecho, $x_0 = h(x_0)$ para todo $h \in C_{gf}$ ¹⁵.

En [Jun1], Jungck siguió trabajando con funciones compatibles y demostró que cualquier función continua definida sobre I tal que todos sus puntos periódicos fuesen fijos, tenía un punto fijo común con cualquier función continua del intervalo que no fuese trivialmente compatible con ella, donde no trivialmente compatible significa que el conjunto de puntos

¹⁴Una familia \mathcal{F} de funciones de X en X es equicontinua si para cada $y \in X$ y $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \in V$ implica que $(f(x), f(y)) \in U$ para todo $f \in \mathcal{F}$, donde \mathcal{U} denota la única uniformidad determinada por la topología de X (véase [Kel, p. 197]).

¹⁵Con $\text{diam}(S)$ nos referimos al diámetro de un conjunto, es decir, $\text{diam}(S) = \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}$. Por otro lado, $C_f = \{g : X \rightarrow X \mid f \circ g = g \circ f\}$.

coincidentes no es vacío. Por ejemplo, $f(x) = 0$ y $g(x) = 1$, para todo $x \in I$, son funciones trivialmente compatibles, ya que no existe ningún punto del intervalo tal que $f(x) = g(x)$. Sin embargo, si consideramos h la función identidad en el intervalo, f y h no lo son.

Posteriormente, los resultados de Jungck fueron generalizados por Jachymski en [Jac], donde expuso condiciones equivalentes que garantizaban la existencia de puntos fijos comunes entre una función continua del intervalo unidad y otra que conmutase con ella en un subconjunto apropiado del intervalo. De esta forma, haciendo uso de la notación utilizada por Boyce [Boy2] y Cano [Can], definió las siguientes clases de funciones:

$$B = \{g : I \rightarrow I \mid \{g^n : n \in \mathbb{N}\} \text{ es equicontinua en } I\},$$

$$C_1 = \{g : I \rightarrow I \mid g \text{ es continua y } \text{Fix}(g) \text{ es un intervalo cerrado}\},$$

$$C_2 = \{g : I \rightarrow I \mid g \text{ es continua y } \text{Fix}(g) = \text{Per}(g)\}.$$

A continuación, enunciamos los teoremas de caracterización de cada uno de esos tres conjuntos. En cuanto a C_1 :

Teorema 2.38. *Sea g una función continua en el intervalo unidad I . Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $g \in C_1$;
2. la familia $\{g^n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinua en $\text{Fix}(g)$ o $\text{Fix}(g)$ es un único punto;
3. g tiene un punto fijo común con toda función continua $f : I \rightarrow I$ que conmuta con g en $\text{Fix}(g)$.

La condición de que el conjunto de puntos fijos de g sea un único punto no puede omitirse como ilustramos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.39.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ -2x + \frac{3}{2} & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, \\ 0 & \text{si } \frac{3}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La función solo tiene un punto fijo, $x = \frac{1}{2}$, así que $g \in C_1$. Sin embargo, se puede comprobar fácilmente que la familia $\{g^n : n \in \mathbb{N}\}$ no es equicontinua en el punto $\frac{1}{2}$.

En cuanto a C_2 :

Teorema 2.40. *Sea g una función continua en el intervalo unidad I . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $g \in C_2$;

2. la sucesión $\{g^n\}_{n=1}^\infty$ converge puntualmente en I ;
3. g tiene un punto fijo común con todas las funciones continuas $f : I \rightarrow I$ que conmuten con g en $\text{Fix}(f)$.

Antes de enunciar el último resultado de Jachymski, nótese que dar un teorema sobre puntos fijos comunes para una familia de funciones que conmutan sería trivial si suponemos que una de ellas tiene un único punto fijo. De ahí, que debamos suponer en el siguiente resultado que el conjunto de puntos fijos de g no se reduce a un único punto.

En cuanto a B :

Teorema 2.41. *Sea g una función continua en el intervalo unidad I tal que $\text{Fix}(g)$ no es un singleton. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $g \in B$;
2. la sucesión $\{g^n\}_{n=1}^\infty$ es uniformemente convergente en I ;
3. g tiene un punto fijo común con todas las funciones continuas $f : I \rightarrow I$ que conmuten con g o bien en $\text{Fix}(f)$ o en $\text{Fix}(g)$.

Finalmente, destaquemos algunos resultados sobre funciones triangulares que conmutan, entendiendo por función triangular toda función continua $F : I^2 \rightarrow I^2$ de la forma

$$F(x, y) = (f_1(x), f_2(x, y)).$$

En [Gri], Grinč publicó cuatro teoremas para el caso de las funciones triangulares que son análogos a los probados por DeMarr (teorema 2.8), Boyce (sobre funciones Γ -compactas [Boy2]), Cano (teorema expuesto en [Can]) y Jachymski (teorema 2.40). Respecto a los teoremas de Jungck que caracterizan las clases de funciones que satisfacen $P(f) = \text{Fix}(f)$, en un artículo conjunto con Snoha [GrSn], presentaron resultados análogos en el caso de las funciones triangulares. En [Lin] también se extendieron algunos de estos resultados al caso de las funciones de Cournot, esto es, funciones continuas bidimensionales del tipo $F(x, y) = (g(y), f(x))$. Este tipo de funciones modelan el llamado duopolio de Cournot, un proceso económico en el que dos firmas competitivas que producen el mismo producto obtienen sus beneficios en función de los niveles de producción de la firma contraria en el paso anterior [Cou].

En definitiva, a pesar de que Boyce y Huneke probaron la falsedad de la conjetura sobre funciones continuas que conmutan compartiendo puntos fijos, ha sido mucha la investigación que se ha realizado para proporcionar casos particulares en los que sí se comparten puntos

fijos. Es más, la investigación no se ha limitado únicamente al caso de funciones definidas en el intervalo unidad, ya que como hemos podido ver se ha trabajado en el plano complejo, en el cuadrado unidad con las funciones triangulares etc. Se trata por tanto de una línea activa de investigación que se ha desarrollado a lo largo de todo el siglo XX.

Capítulo 3

Puntos periódicos comunes

Tras estudiar en el capítulo anterior el problema de puntos fijos comunes de funciones continuas del intervalo que conmutan, surge de manera natural el plantearse qué ocurre con los conjuntos de puntos periódicos. Si dos funciones del intervalo continuas conmutan, ¿necesariamente tienen que compartir algún punto periódico? O al igual que en el caso de puntos fijos, ¿podremos construir un par de funciones que no compartan ninguno?

En este capítulo abordaremos las preguntas anteriores. Al igual que en el caso de los puntos fijos, podemos formular la siguiente conjetura.

Conjetura 3.1. *Si f y g son funciones continuas del intervalo unidad, I , que conmutan entre sí, entonces tienen al menos un punto periódico en común.*

Al contrario que en el caso de puntos fijos, la conjetura 3.1 no se ha demostrado todavía en la actualidad, por lo que los resultados que presentamos en este trabajo son únicamente resultados parciales que nos proporcionan caracterizaciones o casos particulares del problema.

El presente capítulo se encuentra dividido en cuatro secciones diferentes. En la primera de ellas recogemos una serie de resultados sobre conjuntos minimales, ya que estos jugarán un papel importante en los resultados que desarrollaremos posteriormente sobre los conjuntos de puntos periódicos. Dicha sección está basada principalmente en el texto de [BloCop]. La segunda sección, parte principal de este capítulo, se centra en resultados sobre funciones continuas del intervalo. Está dividida en dos subsecciones, donde en cada una de ellas se recogen resultados de autores diferentes. En la primera subsección, los resultados que se exponen en ella se basan en los trabajos de Alikhani-Koopaei, [Ali1] y [Ali2], donde, entre otros resultados, probó que si dos funciones continuas del intervalo que conmutan tienen

únicamente puntos periódicos de órdenes potencias de dos, entonces comparten al menos un punto periódico. En la segunda, presentamos resultados de Steele, [Ste], quien haciendo uso del teorema de la categoría de Baire investigó sobre *el tamaño* de las familias de funciones continuas del intervalo cuyos elementos presentan entre sí intersecciones vacías de conjuntos de puntos periódicos. La sección tercera estudia la conjetura 3.1 en el caso de las funciones continuamente diferenciables. Esta sección sintetiza los trabajos de Schwartz, [Sch], y de Alikhani-Koopaei, [Ali3]. Finalmente, la última sección recoge una serie de resultado sobre la intersección del conjunto de puntos periódicos con otros conjuntos interesantes como el de puntos recurrentes, uniformemente recurrentes o casi periódicos. Esta sección está basada en [CanLin2].

3.1. Conjuntos minimales

En la presente sección recogemos una serie de resultados de especial interés sobre conjuntos minimales que utilizaremos posteriormente en las secciones que siguen. Principalmente, se utilizarán en la subsección correspondiente a los resultados de Alikhani-Koopaei, en lo que respecta a los teoremas 3.12 y 3.14. Exceptuando la proposición 3.8 y el teorema 3.10 que han sido extraídos de [Sch], el resto de la sección está basado en [BloCop].

Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \rightarrow X$ una función continua. Consideraremos (X, f) un sistema dinámico discreto.

Definición 3.2. *Dado un sistema dinámico discreto (X, f) , un conjunto $M \subset X$ se dice que es un conjunto minimal si es no vacío, cerrado y f -invariante y si ningún subconjunto propio tiene estas propiedades.¹*

Haciendo uso del lema de Zorn podemos garantizar la existencia de conjuntos minimales en conjuntos no vacíos, cerrados e invariantes.

Proposición 3.3. [BloCop, pág. 92] *Todo subconjunto no vacío, cerrado e invariante contiene un conjunto minimal.*

Por otro lado, la órbita de cualquier punto de un conjunto minimal es densa en dicho conjunto.

Proposición 3.4. *Si Y es minimal e $y \in Y$, entonces $\overline{\text{Orb}_f(y)} = Y$.*

Demostración. Sabemos que $\overline{\text{Orb}_f(y)}$ es cerrado, invariante y no vacío por el lema 1.2. También es subconjunto de Y , ya que Y es invariante por ser minimal. De ahí, $\overline{\text{Orb}_f(y)} \subseteq Y$, pero la minimalidad de Y impide la inclusión estricta, dándose así la igualdad. \square

¹Por subconjunto propio entendemos todo aquel subconjunto distinto del vacío y del total.

Recordemos que un punto $x \in X$ se dice *recurrente* si pertenece a $\omega(x)$, esto es, si para cada entorno U de x existe $n > 0$ tal que $f^n(x) \in U$. Se verifica que todo punto de un conjunto minimal es recurrente.

Proposición 3.5. *Si Y es minimal e $y \in Y$, entonces y es recurrente.*

Demostración. Por la proposición 3.4, si Y es minimal, entonces para $y \in Y$ se verifica que $\overline{\text{Orb}(y)} = Y$. Luego $y \in \overline{\text{Orb}(y)}$, de ahí que y sea recurrente. \square

A continuación, introducimos el concepto de conjunto perfecto y proporcionamos algunos resultados que relacionan dichos conjuntos con los minimales y los conjuntos de puntos periódicos.

Definición 3.6. *Un conjunto Y es perfecto si es cerrado y todo punto $p \in Y$ es el límite de puntos $q_n \in Y$ con $q_n \neq p$.*

Nótese que otra forma de presentar un conjunto perfecto es un conjunto cerrado sin puntos aislados.

Proposición 3.7. *Si Y es minimal y no es la órbita de un punto periódico, entonces Y es perfecto.*

Demostración. Si $y \in Y$ es un punto aislado, por ser recurrente existe un $n \geq 0$ tal que $f^n(y) = y$. Por lo tanto, y es un punto periódico, contradiciendo así la hipótesis de la proposición. De esta forma, Y no tiene puntos aislados, lo que nos permite concluir que se trata de un conjunto perfecto. \square

Ahora nos centramos en el caso particular donde el espacio métrico es el intervalo unidad, $I = [0, 1]$. Además, los pares de funciones continuas del intervalo que consideremos, f y g , conmutan. Todo lo que sigue ha sido extraído de [Sch].

En primer lugar, veamos que el conjunto de puntos fijos de una función continua del intervalo contiene un conjunto minimal.

Proposición 3.8. *Sean f y g funciones del intervalo que conmutan. Entonces, $\text{Fix}(f)$ contiene un conjunto g -minimal para el sistema (X, g) .*

Demostración. Sea $x \in \text{Fix}$, entonces $g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$. Luego $\text{Fix}(f)$ es invariante. Además, sabemos que es cerrado y no vacío. Así se sigue la conclusión por la proposición 3.3. \square

Proposición 3.9. *Sea f una función de clase C^1 . Si Y es un subconjunto perfecto de $\text{Fix}(f)$, entonces $f'(y) = 1$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $\{y_n\}$ una sucesión en Y , $y \in Y$ tal que y_n tiende a y , estando esta afirmación garantizada por ser Y perfecto. Entonces

$$f'(y) = \lim_{y_n \rightarrow y} \frac{f(y_n) - f(y)}{y_n - y} = \lim_{y_n \rightarrow y} \frac{y_n - y}{y_n - y} = 1.$$

□

Teorema 3.10. *Todo conjunto minimal en (I, f) está contenido en la clausura de $P(f)$.*

Demostración. Sea Y un conjunto minimal. Si Y es la órbita de un punto periódico, entonces la conclusión se sigue de la proposición 3.4. Consideremos, pues, el caso donde Y no es una órbita periódica.

Sean $\varepsilon > 0$, $b = \inf Y$ y $f : I \rightarrow I$ una función continua del intervalo. Como Y es cerrado, $b \in Y$. Además, $Y = \overline{Orb_f(b)}$, luego existen enteros N y M tales que

$$b < f^{N+M}(b) < f^N(b) < b + \varepsilon.$$

Como Y es minimal y no es una órbita periódica, $f^M(b) > b$, pues $b = \inf Y$. Se sigue de la continuidad de f^M que existe un punto $x_0 \in (b, f^M(b))$ tal que $f^M(x_0) = x_0$. Como $b < x_0 < b + \varepsilon$, tenemos establecida la existencia de puntos periódicos arbitrariamente cerca de b .

Ahora, para cada $y \in Y$, puesto que $b \in Y$, se sigue de la proposición 3.4, que $|f^k(b) - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ para algún entero k . Como f^k es continua, existe un $\varepsilon' > 0$ tal que $|f^k(x) - f^k(b)| < \frac{\varepsilon}{2}$ si $|x - b| < \varepsilon'$.

Por el análisis realizado sobre b , se sigue que existe un punto periódico z y un entero L tales que $|b - z| < \varepsilon'$ y $f^L(z) = z$. Así, por la continuidad de f , $f^k(z)$ es un punto periódico a una distancia menor que ε de y , lo que termina la prueba de la densidad de Y en $P(f)$.

□

Corolario 3.11. *En el intervalo unidad, todo conjunto minimal es nowhere dense².*

3.2. Puntos periódicos comunes en funciones continuas

En este apartado nos centramos en estudiar los conjuntos de puntos periódicos de funciones continuas del intervalo, intentando dar respuesta así a la pregunta central de este capítulo: ¿han de compartir necesariamente algún punto periódico dos funciones continuas

²Recordemos que un conjunto en un espacio topológico diremos que es *nowhere dense* si es un conjunto cuya clausura tiene interior vacío.

del intervalo unidad, I , que conmutan entre sí?

En primer lugar, presentaremos una serie de resultados de Alikhani-Koopaei, [Ali1] y [Ali2], que proporcionan condiciones suficientes bajo las cuales dos funciones continuas deben compartir al menos un punto periódico. Entre ellos, podemos destacar los teoremas 3.14 y 3.17. Seguidamente, presentaremos el resultado principal de esta sección, debido a Steele, [Ste], quien haciendo uso del teorema de la categoría de Baire, da condiciones suficientes para que dos funciones continuas del intervalo no compartan ningún punto periódico, véase el teorema 3.23.

Denotemos por $F_n(f)$ al conjunto de puntos fijos de f^n , es decir,

$$F_n(f) = \{x : f^n(x) = x\}$$

y por P_f^n el conjunto de puntos periódicos de orden n , esto es,

$$P_f^n = F_n(f) \setminus \cup_{k < n} F_k(f).$$

Recordemos que $P(f)$ denota el conjunto de puntos periódicos.

3.2.1. Resultados de Alikhani-Koopaei

Teorema 3.12. *Sean $f, g : I \rightarrow I$ continuas con $f \circ g = g \circ f$. Si f y g no tienen ningún punto periódico en común, entonces para cualquier par de enteros positivos m y n el conjunto $A_{m,n} = \{x : f^n(x) = g^m(x)\}$ es no numerable.*

Demostración. Veamos en primer lugar que $A_{m,n} \neq \emptyset$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}^+$ por reducción al absurdo.

Supongamos que para algún m y n , $A_{m,n} = \emptyset$. Entonces la continuidad de f y g nos permiten suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$f^n(x) < g^m(x) \tag{3.1}$$

para todo $x \in I$.

Como $g^m(1) \leq 1$, entonces $S = \{x \in I : g^m(x) \leq x\} \neq \emptyset$. De ahí, como S es cerrado, tiene un elemento minimal c . Claramente $c = g^m(c)$, ya que $g^m(c) \leq c$ y para todo $x < c$ se cumple $g^m(x) > x$, dándonos la continuidad de g^m la igualdad.

Luego

$$f^n(c) = f^n(g^m(c)) = g^m(f^n(c)),$$

esto es que $f^n(c) \in S$. Consecuentemente, $f^n(c) \geq c = g^m(c)$ por ser c el mínimo de S . Pero $f^n(c) \geq g^m(c)$, contradiciéndose (3.1). Así, ya tenemos que $A_{m,n} \neq \emptyset$ para todo m, n enteros positivos.

Veamos a continuación la no numerabilidad del conjunto $A_{m,n}$ para todo $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Sea $x \in A_{m,n}$. Entonces $f^n(x) = g^m(x)$. De ahí que, por la conmutatividad de f y g ,

$$f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(g^m(x)) = g^m(f(x))$$

y

$$f^n(g(x)) = g(f^n(x)) = g(g^m(x)) = g^m(g(x)),$$

obteniéndose que $f(x), g(x) \in A_{m,n}$. Haciendo inducción sobre p , se sigue que $f^{pn}(x) = g^{pm}(x)$ para cualquier entero positivo p .

Consecuentemente, se sigue que $Orb_g(x) = \{g^k(x), k \geq 0\} \subset A_{m,n}$ cuando $x \in A_{m,n}$. Por lo tanto, el conjunto $\overline{Orb_g(x)}$ es invariante por g . Luego contiene un conjunto minimal A_1 por la proposición 3.3.

Como por hipótesis f y g no tienen puntos periódicos en común, el conjunto A_1 no puede ser la órbita de un punto periódico. De ahí que A_1 es un conjunto perfecto contenido en $A_{m,n}$, lo que implica que $A_{m,n}$ es no numerable³. \square

De esta forma, el siguiente corolario nos proporciona un criterio para saber cuándo

$$P(f) \cap P(g) \neq \emptyset$$

en el caso en el que f y g conmuten.

Corolario 3.13. *Sean $f, g : I \rightarrow I$ continuas con $f \circ g = g \circ f$. Si $A_{m,n} = \{x : f^n(x) = g^m(x)\}$ es numerable para algunos enteros positivos m y n , entonces f y g tienen un punto periódico común.*

Teorema 3.14. *Sean $f, g : I \rightarrow I$ continuas con $f \circ g = g \circ f$. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones de forma excluyente:*

a) $P(f) \cap P(g) \neq \emptyset$.

b) Existe un conjunto perfecto $A_1 \subset (Rec(g) \cap P(f))$.

³Esta afirmación se debe a que todo conjunto perfecto no vacío es no numerable. El lector interesado en la prueba puede consultarla en el Anexo 2.

Demostración. En primer lugar, nótese que existe un subconjunto no vacío

$$A = \{g^n(x) : n \geq 0, x \in \text{Fix}(f)\}$$

g -invariante de $\text{Fix}(f)$. Efectivamente, sea $x \in \text{Fix}(f)$. Entonces, $g(x) = g(f(x)) = f(g(x))$, luego $g(x) \in \text{Fix}(f)$. Procediendo de forma análoga para todo $n \geq 1$, obtenemos que $g^n(x) \in \text{Fix}(f)$. De ahí que concluyamos que $\text{Orb}_g(x) \subset \text{Fix}(f)$. Por consiguiente, para todo $x \in \text{Fix}(f)$ se sigue que $\omega_g(x) \subset \text{Fix}(f)$. Concluimos así que $A \subseteq \text{Fix}(f)$ es g -invariante. Esto nos permitirá extraer un conjunto minimal $A_1 \subset A$.

Tomemos $x_0 \in A$. Para todo entero positivo n , $g^n(x_0) \in A$ por ser A g -invariante. Así $\text{Orb}_g(x_0) \subset A$, luego se tiene que $\omega_g(x_0) \subset \bar{A} = A$, por ser cerrado.

Claramente, $\omega_g(x_0) \neq \emptyset$ y es invariante por g . Luego el sistema (I, g) , por la proposición 3.3, contiene un subconjunto minimal g -invariante A_1 . Obviamente $A_1 \subset (A \cap \text{Rec}(g))$, ya que A_1 está contenido en el conjunto de puntos recurrentes por ser minimal, como garantiza la proposición 3.5.

Si A_1 es un conjunto finito, entonces es la órbita de un punto periódico de g , lo que implica que, por la hipótesis inicial sobre que $A \subset \text{Fix}(f)$,

$$\emptyset \neq (P(g) \cap A) \subset (P(g) \cap P(f)).$$

Si la intersección es vacía, entonces A_1 no puede ser finito. En otro caso, por la proposición 3.7, A_1 es perfecto contenido en $A \cap \text{Rec}(g) \cap P(f)$, ya que un conjunto minimal que no es la órbita de un punto periódico es perfecto. \square

Proposición 3.15. *En las condiciones del teorema anterior, si además $\overline{P(g)} \setminus P(g)$ no contiene ningún conjunto perfecto, entonces f y g comparten al menos un punto periódico común.*

Demostración. Si f y g no tienen puntos periódicos comunes, como $\overline{\text{Rec}(g)} = \overline{P(g)}$ (véase [CoHe]), tenemos que

$$A_1 \subset A \cap \overline{\text{Rec}(g)} = A \cap \overline{P(g)} = A \cap [(\overline{P(g)} \setminus P(g)) \cap P(g)] = A \cap [\overline{P(g)} \setminus P(g)]$$

donde se sigue, por el teorema anterior, que contiene un conjunto perfecto A_1 . \square

Seguidamente, usaremos el teorema y orden de Sharkovsky introducidos previamente en los preliminares. El lector interesado en su prueba puede consultarla en el Anexo I del presente trabajo.

por lo que se sigue que $g(x) \in \text{Fix}(f)$. Además, como $\text{Fix}(f)$ es un conjunto cerrado, concluimos que $\omega_g(x) \subset \text{Fix}(f)$.

Considerando lo expuesto anteriormente, tomamos $\alpha \in \Omega(g)$ minimal tal que $\alpha \subset \omega_g(x) \subset \text{Fix}(f)$. Al ser $P(f) \cap P(g) = \emptyset$ por hipótesis, tenemos que $\omega_g(x)$ es no numerable (véase [Ste, Lema 4.4]). De esta forma, α también será no numerable y como es un conjunto ω -límite minimal, se sigue que $\alpha \subset \text{Rec}(g)$. Por lo tanto, $\alpha \subset \text{Fix}(f) \cap \text{Rec}(g)$, quedando así probado el teorema. \square

Como consecuencia de este resultado, podemos concluir que los contraejemplos contruidos por Boyce y Huneke en el capítulo anterior no son válidos para demostrar de forma negativa la conjetura 3.1, ya que su número de puntos fijos es finito por lo que $P(f) \cap P(g)$ es no vacío.

Por otro lado, Steele se dedicó a estudiar *el tamaño* de las familias de funciones continuas del intervalo cuyos elementos presentan entre sí intersecciones vacías de conjuntos de puntos periódicos, para más tarde intentar relacionarlo con la conjetura 3.1, pero mediante un enfoque más general, véase la conjetura 3.25. Para ello, utilizó el teorema de la categoría de Baire. Recordemos el enunciado de dicho teorema.

Teorema 3.19. (*Teorema de la categoría de Baire*) [Rud1, pág. 97] Sea (X, d) un espacio métrico completo, con S un subconjunto de X de primera categoría⁴. Entonces $X \setminus S$ es denso en X .

A continuación, presentamos tres lemas previos que marcarán la demostración del teorema final de esta sección, a saber, el teorema 3.23 sobre la existencia de conjuntos residuales, S y L , para los que los conjuntos de puntos periódicos de funciones de dichos conjuntos, $P(f)$ y $P(g)$ con $f \in S$ y $g \in L$, son de primera categoría. Esto implicará que f y g no compartan puntos periódicos. El primero de ellos da una condición suficiente y necesaria para que el conjunto de los puntos periódicos de una función continua del intervalo sea de primera categoría.

Lema 3.20. Sea $f \in C(I, I)$. Entonces, $P(f)$ es de primera categoría si y sólo si $P(f)$ no contiene ningún intervalo.

Demostración. El teorema de la categoría de Baire garantiza que si $P(f)$ es de primera categoría, entonces $P(f)$ no contiene ningún intervalo, ya que su complementario es denso en I . Para ver la otra implicación, probemos el contrarrecíproco.

⁴Un conjunto es de *primera categoría* en (X, d) si puede escribirse como una unión numerable de conjuntos *nowhere dense*, en otro caso, diremos que el conjunto es de segunda categoría o *residual*.

Supongamos que $P(f)$ no es un conjunto de primera categoría. Como

$$P(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(f),$$

existe n tal que $F_n(f)$ no es *nowhere dense*, luego el interior de su clausura es no vacío.

Como $F_n(f)$ es cerrado, esto significa que $F_n(f)$ contiene un intervalo, así $P(f)$ contiene un intervalo también, ya que $F_n(f) \subset P(f)$ para todo $n \geq 1$. \square

El siguiente lema afirma la existencia de un conjunto residual S en el conjunto $C(I, I)$, de las funciones continuas del intervalo en sí mismo, para el que el conjunto de puntos periódicos de cada elemento de dicho conjunto es de primera categoría.

Lema 3.21. *Existe un conjunto residual $S \subset C(I, I)$ tal que $P(f)$ es de primera categoría para todo $f \in S$.*

Demostración. Queremos probar que el conjunto $\{f \in C(I, I) : P(f) \text{ contiene un intervalo}\}$ es de primera categoría.

Como $P(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(f)$, es suficiente ver que $\{f \in C(I, I) : F_n(f) \text{ contiene un intervalo}\}$ es un conjunto de primera categoría.

Para ello, denotemos por Q_N una enumeración de los intervalos racionales (a, b) , donde $a, b \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Nótese que hay una cantidad numerable de intervalos de ese tipo por ser \mathbb{Q} un conjunto numerable. Veamos que $\{f \in C(I, I) : Q_N \subset F_m(f)\}$ es *nowhere dense* en $C(I, I)$ para todo $m \in \mathbb{Z}^+$. Si probamos esto, habremos demostrado que el conjunto es residual.

Sea $f \in C(I, I)$ para la que $Q_N \subset F_m(f)$, y tomemos $\varepsilon > 0$. Ahora, tomemos $g \in B_\varepsilon(f)$ ⁵ tal que Q_N no está en $F_m(g)$. Entonces existe $x \in Q_N$ tal que $|x - g^m(x)| = \sigma > 0$.

Elijamos $\delta > 0$ tal que $h \in B_\delta(g)$ implica $\|h^p - g^p\| < \sigma$ para $p = 1, 2, \dots, m$, siendo esto posible por la continuidad uniforme. Entonces $|x - h^m(x)| > 0$, y Q_N no está contenido en $F_m(h)$.

Así concluimos que $\{f \in C(I, I) : Q_N \subset F_m(f)\}$ es *nowhere dense* en $C(I, I)$, y por tanto, dicho conjunto es residual, lo que implica que $\{f \in C(I, I) : F_n(f) \text{ contiene un intervalo}\}$ es de primera categoría. De esta forma, queda probado el lema. \square

⁵ $B_\varepsilon(f) = \{g \in C(I, I) : \|f - g\| < \varepsilon\}$, donde recordemos que $\|\cdot\|$ denota la norma del supremo.

Finalmente, el último lema demuestra que si el conjunto de puntos periódicos de una función continua del intervalo es de primera categoría, entonces existe un conjunto residual de las funciones continuas del intervalo de forma que todos los elementos de dicho conjunto no comparten ningún punto periódico. Destacar que los resultados presentados hasta el momento no se ha exigido la conmutatividad de las funciones implicadas.

Lema 3.22. *Sea $f : I \rightarrow I$ continua. Si $P(f)$ es de primera categoría, entonces existe un conjunto residual $\mathcal{F} \subset C(I, I)$ tal que $P(f) \cap P(g) = \emptyset$ para todo $g \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Por ser de primera categoría, $P(f) = \cup_{n=1}^{\infty} S_n$, donde S_n es *nowhere dense* para cada n . Como $S_n \subset \overline{S}_n$, es suficiente probar que $\Sigma_n = \{g \in C(I, I) : P(g) \cap \overline{S}_n \neq \emptyset\}$ es de primera categoría, así que únicamente tenemos que ver que $\Sigma_{nm} = \{g \in C(I, I) : F_m(g) \cap \overline{S}_n \neq \emptyset\}$ es *nowhere dense* en $C(I, I)$, para todo $n, m \geq 1$, ya que $F_m(g) \subset P(g)$ para todo $m \geq 1$.

Sea $g \in C(I, I)$ para la que $F_m(g) \cap \overline{S}_n \neq \emptyset$, y sea $\varepsilon > 0$. Como \overline{S}_n es *nowhere dense*, entonces existe $h \in C(I, I)$ tal que $\|h - g\| < \varepsilon$, y $F_m(h) \cap \overline{S}_n = \emptyset$, ya que podemos seleccionar una función con una cantidad finita de puntos fijos sin salirnos de la banda que define la norma. Sea $\sigma = \min\{|h^m(x) - x| : x \in \overline{S}_n\}$. Ahora, tomamos $\delta > 0$ tal que $\|l - h\| < \delta$, y de modo que también $\|l^p - h^p\| < \sigma$ para $p = 1, 2, \dots, m$. Como $F_m(l) \cap \overline{S}_n = \emptyset$ cuando $l \in B_\delta(h)$ se sigue nuestra conclusión, ya que hemos probado que típicamente toda función próxima a $g \in \Sigma_{nm}$ no pertenece a dicho conjunto, luego existe un conjunto residual $\mathcal{F} \subset C(I, I)$ tal que $P(f) \cap P(g) = \emptyset$. \square

Una vez enunciados y demostrados los lemas anteriores, 3.20, 3.21 y 3.22, podemos proceder a enunciar y demostrar uno de los resultados principales de esta sección.

Teorema 3.23. *Existe un conjunto residual $S \subset C(I, I)$ para el que $P(f)$ es un conjunto de primera categoría, para toda $f \in S$. Es más, para cada $f \in S$ existe un conjunto residual $L(f) \subset C(I, I)$ tal que $g \in L(f)$ implica*

- (a) $P(f) \cap P(g) = \emptyset$.
- (b) $P(g)$ es de primera categoría.
- (c) $F_n(g)$ es *nowhere dense* para cada $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea S un conjunto residual en $C(I, I)$ en el que $P(f)$ es de primera categoría para todo $f \in S$, cuya existencia viene garantizada por el lema 3.21, y fijemos $f \in S$. Ahora, sea \mathcal{F} el conjunto residual en $C(I, I)$ garantizado por el lema 3.22.

Sea $L(f) = S \cap \mathcal{F}$. Entonces los apartados (a) y (b) se siguen de forma inmediata, quedando la última afirmación, (c), como consecuencia del lema 3.20. \square

Por último, nos centramos en la estructura del conjunto $\mathcal{F} = \{g \in C(I, I) : g \circ f = f \circ g\}$ donde únicamente se exige continuidad a una de las dos funciones que conmutan, supongamos que dicha función continua es f .

Teorema 3.24. *Sea $f : I \rightarrow I$ continua, entonces el conjunto $\mathcal{F} = \{g \in C(I, I) : g \circ f = f \circ g\}$ verifica:*

a) \mathcal{F} es cerrado en $(C(I, I), \|\cdot\|)$ y es no vacío.

b) Si f no es la función identidad, entonces \mathcal{F} es nowhere dense en $(C(I, I), \|\cdot\|)$.

Demostración. a) Comencemos viendo que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Para ello, nótese que la función identidad conmuta con todas las funciones. De ahí se sigue nuestra afirmación.

Veamos ahora que es cerrado. Consideremos una sucesión $(g_n)_n \subset \mathcal{F}$ convergente a una función g . Nuestro objetivo consiste en probar que $g \in \mathcal{F}$. Procederemos combinando la continuidad uniforme de f y la convergencia de g_n hacia g .

Sea $x \in I$ y $\varepsilon > 0$. Por la continuidad uniforme de f , existe $\delta > 0$ tal que $|y - z| < \delta$ implica que $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $y, z \in I$.

Por otro lado, la convergencia de g_n hacia g conlleva que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ implica que $\|g_n - g\| < \delta$.

Combinando ambas propiedades, llegamos a $|f(g_n(x)) - f(g(x))| < \varepsilon$. Concluyendo así que $f \circ g_n = g_n \circ f \rightarrow f \circ g$. De forma análoga, $g_n \circ f = f \circ g_n \rightarrow g \circ f$. Por consiguiente, $f \circ g = g \circ f$ y $g \in \mathcal{F}$.

b) Sea $\varepsilon > 0, g \in \mathcal{F}$ y tomemos $x \in I$ tal que $x \notin \text{Fix}(f)$. Sea $h \in B_\varepsilon(g)$ tal que $h(x) = g(x)$, pero $h(f(x)) \neq g(f(x))$. Entonces

$$(h \circ f)(x) \neq (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$$

por lo que $h \notin \mathcal{F}$.

Fijemos $\sigma = |(h \circ f)(x) - (f \circ h)(x)|$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $|y - z| < \delta$ implica $|f(y) - f(z)| < \frac{\sigma}{2}$.

Sea $0 < \alpha < \min\{\frac{\sigma}{2}, \delta\}$. Si $l \in B_\alpha(h)$, entonces $|(f \circ h)(x) - (f \circ l)(x)| < \frac{\sigma}{2}$ y $|(h \circ f)(x) - (l \circ f)(x)| < \frac{\sigma}{2}$, así que $|(l \circ f)(x) - (f \circ l)(x)| \neq 0$, y $l \notin \mathcal{F}$. De esta forma, ningún elemento de \mathcal{F} tiene otro lo suficientemente cerca, por lo que no será denso en ninguna parte. Concluimos así que \mathcal{F} es nowhere dense. \square

Con el objetivo de responder la conjetura 3.1 sobre compartir puntos periódicos, Steele propuso la siguiente línea de investigación estrechamente ligada al teorema de la categoría de Baire.

Conjetura 3.25. *Sea $f : I \rightarrow I$ continua con $P(f)$ de primera categoría. Denotemos $P(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, donde S_n es nowhere dense en I para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea $\mathcal{F} = \{g \in C(I, I) : g \circ f = f \circ g\}$. Entonces el elemento típico $g \in \mathcal{F}$ tiene la propiedad de que $P(f) \cap P(g) = \emptyset$.*

En primer lugar, enfatizar el hecho de que $P(f)$ sea de primera categoría, ya que esto es crucial para el correcto desarrollo de la investigación. Para probar la conjetura 3.25 podemos proceder como sigue:

En primer lugar, destaquemos que podemos utilizar el teorema de la categoría de Baire, ya que \mathcal{F} , por el teorema anterior, es un subespacio cerrado de $(C(I, I), \|\cdot\|)$, que es un espacio métrico completo.

Consideramos $\Sigma_{nm} = \{g \in \mathcal{F} : \overline{S_n} \cap F_m(g) = \emptyset\}$. Nuestro objetivo es probar que $\Sigma_{nm} \subset \mathcal{F}$ es nowhere dense. Esto es suficiente, pues $\{g \in \mathcal{F} : P(f) \cap P(g) \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \Sigma_{nm}$.

Sea $\varepsilon > 0$, con $g \in \mathcal{F} \cap \Sigma_{nm}$. Nótese que la función identidad está en dicho conjunto para toda $f \in C(I, I)$ y $n, m \in \mathbb{N}$. Luego $\mathcal{F} \cap \Sigma_{nm} \neq \emptyset$. Por ser dicha intersección vacía, existe $\delta > 0$ para el cuál $\|l - h\| < \delta$ implica que $\overline{S_n} \cap F_m(l) = \emptyset$. Se sigue entonces que Σ_{nm} es nowhere dense, quedando así probada la conjetura.

El problema de esta aproximación radica en la dificultad de encontrar una función $h \in \mathcal{F}$ lo suficientemente próxima a g de manera que $\overline{S_n} \cap F_m(h) = \emptyset$. Como $\mathcal{F} = \{g \in C(I, I) : g \circ f = f \circ g\}$ es nowhere dense en $C(I, I)$, es muy posible que \mathcal{F} tenga intersección vacía con el conjunto residual $\{g \in C(I, I) : P(g) \cap P(f) = \emptyset\}$. Por otro lado, tras las construcciones de Huneke y Boyce, [Hun] y [Boy1] respectivamente, para el caso de puntos fijos, pretender construir una función h que verifique lo anteriormente expuesto es una tarea poco atractiva.

3.3. Puntos periódicos comunes en funciones continuamente diferenciables

A pesar de que el trabajo está centrado en funciones del intervalo que conmutan a las que únicamente les exigimos continuidad, consideramos interesante dedicar una breve sección que recoja un par de resultados en los que exigimos alguna condición más a las funciones.

En los años sesenta, A.J. Schwartz probó en [Sch] que si una de las dos funciones del intervalo que conmutan es continuamente diferenciable, entonces $P(f) \cap P(g) \neq \emptyset$. Cerraremos esta sección con un resultado reciente de 2013 recogido en [Ali3], donde se prueba que típicamente el conjunto de puntos periódicos de una función continuamente diferenciable del intervalo es numerable.

Sean f y g funciones continuas del intervalo que conmutan. El resultado publicado por Schwartz asegura que, por la proposición 3.4 y el teorema 3.10, el sistema dinámico (X, g) tiene un conjunto minimal contenido en el conjunto de puntos fijos de f , que además está en la clausura de $P(g) \cap \text{Fix}(f)$. Este resultado es la clave para probar el corolario 3.27 que afirma que, si una de las funciones del intervalo que conmutan es continuamente diferenciable, entonces comparten algún punto periódico.

Teorema 3.26. *Dado el sistema dinámico (I, g) , consideramos las funciones $f, g : I \rightarrow I$ continuas tal que $f \circ g = g \circ f$. Sea Y un subconjunto de $\text{Fix}(f)$ minimal para (I, g) . Entonces Y está contenido en la clausura de $P(g) \cap \text{Fix}(f)$.*

Demostración. Si Y es una órbita periódica ya tenemos el resultado probado. Si no lo fuese, entonces, por la proposición 3.7, es un conjunto perfecto y así se sigue que $f'(y) = 1$ para todo $y \in Y$ por la proposición 3.9.

Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que

$$|f'(u) - f'(v)| < \frac{1}{2} \text{ si } |u - v| < \varepsilon. \quad (3.2)$$

Elijamos $y_1, y_2 \in Y$ y $x \in Y$ tales que $y_1 < x < y_2 < y_1 + \varepsilon$ y $g^n(x) = x$ para algún n . Si $f(x) = x$, hemos terminado.

Si $f(x) \neq x$, tomamos z_1 y z_2 puntos fijos de f tales que $y_1 \leq z_1 < x < z_2 \leq y_2$ y de modo que el intervalo (z_1, z_2) no contiene ningún punto fijo (podemos tomar $z_1 = \sup\{y \in Y : f(y) = y, y_1 \leq y < x\}$ y $z_2 = \inf\{y \in Y : f(y) = y, x < y \leq y_2\}$). De ahí, para todo $\tau \in (z_1, z_2)$, o bien $f(\tau) > \tau$ o bien $f(\tau) < \tau$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(\tau) > \tau$. Por otro lado, por el teorema del valor medio (véase [Rud2, pág. 108])

$$f(z_2) - f(\tau) = z_2 - f(\tau) = f'(\tau') \cdot (z_2 - \tau) \text{ para algún } \tau' \in (\tau, z_2),$$

y usando 3.2

$$f'(\tau') > f'(z_2) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $f(\tau) < z_2$, pues $f'(\cdot) > 0$ y $(z - \tau) > 0$ para todo $\tau \in (z_1, z_2)$. De ahí, $\{f^k(x)\}$ es una sucesión creciente en (z_1, z_2) y convergente por estar acotada. Llamemos l al límite de dicha solución. Como $f(l) = \lim f^{k+1}(x) = l$, $l \in \text{Fix}$. De hecho, $l = z_2$.

Por otro lado, por la conmutatividad de f y g

$$g^n(f^k(x)) = f^k(g^n(x)) = f^k(x)$$

para cada k , así $g^n(l) = l$.

Luego hemos encontrado un punto l tal que $g^n(l) = l$ y $f(l) = l$, estando entre y_1 e y_2 a una distancia menor que ε . Como y_1, y_2 pueden ser cualquier elemento de Y , queda probado el teorema. \square

Corolario 3.27. *Si f es una función de clase C^1 en I que conmuta con una función continua g , entonces existe un punto x tal que $f(x) = x = g^n(x)$ para algún entero n . En consecuencia, $P(f) \cap P(g) \neq \emptyset$.*

Demostración. De acuerdo con la proposición 3.8, $\text{Fix}(f)$ contiene un conjunto minimal Y en (I, g) , que es no vacío por definición. Así, por el teorema 3.26, existe un punto $y \in P(g) \cap \text{Fix}(f)$. Se sigue de la definición de los conjuntos $P(g)$ y $\text{Fix}(f)$ que $f(x) = x = g^n(x)$ para algún entero n . \square

Finalmente, presentamos un resultado de Alikhani-Koopaei que prueba que típicamente el conjunto de puntos periódicos de las funciones continuamente diferenciable es numerable. Para ello vamos a introducir unos resultados previos que utilizaremos en la demostración del teorema principal, a saber, el teorema 3.35. Daremos la prueba únicamente de algunos de los resultados auxiliares que le precedan. En cualquier caso, el lector interesado en la prueba detallada de estos resultados preliminares puede consultar [Ali3].

Antes de presentar los resultados, presentamos la notación que utilizaremos. Trabajaremos con el espacio de las funciones continuamente diferenciables del intervalo, $C^1(I, I)$. Dicho espacio es métrico, con métrica asociada:

$$d_1(f, g) = d_0(f, g) + d_0(f', g'),$$

para $f, g \in C^1(I, I)$, donde

$$d_0(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|,$$

para $f, g \in C(I, I)$.

Por último, resaltar que $(C^1(I, I), d_1)$ es un espacio completo por la definición de la norma $\|\cdot\|_1$ y por [Apo, Teorema 9.13] y, por lo tanto, se verifica el teorema de la categoría de Baire 3.19.

Procedamos a continuación a introducir los resultados previos.

Lema 3.28. *Sea $A = \{f \in C^1(I, I) : f(0) = 1, f(1) = 0, \text{ y } (f^2)'(0) = 1\}$, entonces A es un subconjunto nowhere dense de $C^1(I, I)$.⁶*

Demostración. Es fácil ver que A es un subconjunto cerrado de $C^1(I, I)$. Para ver que A es nowhere dense probemos que existe $h \notin A$ tal que $d(f, h) < \varepsilon$. Sea $f \in C^1(I, I)$ y $\varepsilon > 0$. Elijamos $0 < \gamma < \min\{\frac{\varepsilon}{8}, 1\}$ y $0 < c < 1$ tal que $|f(t) - f(0)| < [1 - \frac{\varepsilon}{4}]$ para $t \in [0, c]$. Sea $h(x) = f(x) + \int_0^x k(t)dt$, donde

$$k(t) = \begin{cases} -\gamma, & t = 0, \\ 0, & t = \frac{c}{4}, \\ \frac{\gamma}{3}, & t = \frac{c}{2}, \\ 0, & t = c, t = 1, \\ \text{lineal} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es sencillo comprobar que $h(0) = f(0) = 1$, $h(1) = f(1) = 0$, $h'(0) = f'(0) - \gamma$, y $h'(1) = f'(1)$. Además, también se verifica lo siguiente: $h \in C^1(I, I)$, $(h^2)'(0) = (h^2)'(1) \neq 1$, y $d_1(f, h) < \frac{\varepsilon}{2}$. Veámoslo.

En primer lugar, comprobemos que $(h^2)'(0) = (h^2)'(1)$. Para ello, debemos computar la segunda iterada de h .

$$h^2(x) = h(h(x)) = h\left(f(x) + \int_0^x k(t)dt\right) = f\left(f(x) + \int_0^x k(t)dt\right) + \int_0^{f(x) + \int_0^x k(s)ds} k(t)dt$$

Luego, aplicando la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} (h^2)'(x) &= f'\left(f(x) + \int_0^x k(t)dt\right) \cdot (f'(x) + k(x)) + k\left(f(x) + \int_0^x k(t)dt\right) \cdot (f'(x) + k(x)) \\ &= \left[f'\left(f(x) + \int_0^x k(t)dt\right) + k\left(f(x) + \int_0^x k(t)dt\right)\right] \cdot (f'(x) + k(x)). \end{aligned}$$

Así, computando $(h^2)'(x)$ en $x = 0$ y $x = 1$ llegamos a la igualdad.

$$\begin{aligned} (h^2)'(0) &= [f'(f(0)) + k(f(0))] \cdot (f'(0) + k(0)) \\ &= (f'(0) - \delta) \cdot f'(1) \end{aligned}$$

⁶Recordemos que $f^2 = f \circ f$.

y

$$\begin{aligned}(h^2)'(1) &= \left[f' \left(\int_0^1 k(t) dt \right) + k \left(\int_0^1 k(t) dt \right) \right] \cdot (f'(1) + k(1)) \\ &= (f'(0) + k(0)) \cdot f'(1) \\ &= (f'(0) - \delta) \cdot f'(1)\end{aligned}$$

para simplificar la expresión hemos utilizado la igualdad $h(1) - f(1) = \int_0^1 k(t) dt$.

Por lo tanto, efectivamente, $(h^2)'(0) = (h^2)'(1)$. Para ver que son distinto de 1, nótese que $(f'(0) - \delta) \cdot f'(1) = h'(0) \cdot h'(1)$. Si fuese igual a 1, implicaría que $h'(1) = \frac{1}{h'(0)}$ y al ser h' una función del intervalo llegaríamos a una contradicción, ya que o bien $h'(0)$ o $h'(1)$ tendrían que ser mayores de 1.

Por último, comprobemos que $d_1(f, h) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\begin{aligned}d_1(f, h) &= d_0(f, h) + d_0(f', h') \\ &= \sup_{x \in I} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x) - h'(x)| \\ &= \sup_{x \in I} \left| - \int_0^x k(t) dt \right| + \sup_{x \in I} | - k(x) | \\ &= \frac{\delta \cdot c}{8} + \delta \\ &\leq 4\delta \\ &\leq 4 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que tomamos δ tal que $0 < \delta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{8}, 1 \right\}$.

Así quedaría probado el lema, ya que hemos visto que existe una función lo suficientemente cerca de f que no pertenece al conjunto, es decir, los elementos de A no son densos en ninguna parte de $C^1(I, I)$. \square

Ejemplo 3.29. *En este ejemplo pretendemos ilustrar un caso particular de función $k(t)$ definida en la demostración del resultado anterior.*

Consideramos $c = \frac{1}{2}$. En este caso, δ debería verificar lo siguiente:

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{6}, 1 \right\}.$$

Tomando $\varepsilon = 0.1$, podemos considerar $\delta = 0.001$. De esta forma, la función k quedaría

definida como sigue,

$$k(t) = \begin{cases} -\frac{1}{1000}, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t = \frac{5}{16}, \\ \frac{1}{3000}, & \text{si } t = \frac{3}{8}, \\ 0, & \text{si } t = \frac{1}{2}, t = 1, \\ \text{lineal} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lema 3.30. Para $k \geq 1$, el conjunto

$$E_k = \{f \in C^1(I, I) : F_k(f) \cap \{x : (f^k)'(x) = 1\} \neq \emptyset\}$$

es cerrado en $C^1(I, I)$.

Demostración. Si $E_k = \emptyset$, ya estaría probado el lema. Consideremos pues el caso en el que $E_k \neq \emptyset$. Sea $(g_n)_n$ una sucesión de E_k convergente hacia g en la métrica d_1 , $\lim_{n \rightarrow \infty} d_1(g_n, g) \rightarrow 0$. Queremos probar que $g \in E_k$. Entonces existe un $(t_n)_{n=1}^\infty \subset I$ tal que $g_n^k(t_n) = t_n$ y $(g_n^k)'(t_n) = 1$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0 \in I$. Sea $\varepsilon > 0$. Como g es continua, debido a la continuidad uniforme de g^k en I existe un entero positivo n_1 tal que, para $n \geq n_1$, $|g^k(t_n) - g^k(t_0)| < \varepsilon$. Como $d_0(g_n, g)$ tiende a 0, existe un entero positivo n_2 tal que, para $n \geq n_2$, $d_0(g_n^k, g^k) < \varepsilon$. Tomemos un entero positivo n_3 tal que $|t_n - t_0| < \varepsilon$ para $n \geq n_3$, y sea $m_1 = \max(n_1, n_2, n_3)$. Entonces para $m \geq m_1$ llegamos a que

$$\begin{aligned} |g^k(t_0) - t_0| &\leq |g^k(t_0) - g^k(t_m)| + |g^k(t_m) - g_m^k(t_m)| + |g_m^k(t_m) - t_0| \\ &\leq \varepsilon + d_0(g^k, g_m^k) + |t_m - t_0| \\ &\leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

implicando que $g^k(t_0) = t_0$. También tenemos que

$$|(g_n^k)'(t_n) - (g^k)'(t_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(g_n^k, g^k) = 0.$$

Por lo tanto, obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |1 - (g^k)'(t_n)| = |1 - (g^k)'(t_0)| = 0$. En definitiva, $t_0 \in I$ cumple que $(g^k)'(t_0) = 1$ y es punto fijo de g^k , por consiguiente $g \in E_k$. □

El siguiente lema garantiza que $E_k \neq \emptyset$.

Lema 3.31. Sean $n \geq 1$ y $f \in C^1(I, I)$ tales que $F_n(f)$ no es finito. Entonces, existe $x_0 \in I$ tal que $F_n(f) \cap \{x : (f^n)'(x) = 1\} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $F_n(f)$ no es finito. Entonces podemos elegir una sucesión $(x_i)_{i=1}^\infty$ estrictamente monótona en $F_n(f)$. Sin pérdida de generalidad, $x_i < x_{i+1}$ para cada $i \geq 1$. Sea $h(x) = f^n(x) - x$. Entonces, para cada i , $h(x_i) = h(x_{i+1}) = 0$. Así, por el Teorema

de Rolle⁷, tenemos que existe y_i , con $x_i < y_i < x_{i+1}$, tal que $h'(y_i) = 0$. Sea $x_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$, entonces $x_0 \in I$, y también $\lim_{i \rightarrow \infty} y_i = x_0$. De la continuidad de f^n y $(f^n)'$ se sigue que finalmente $f^n(x_0) = x_0$ y $(f^n)'(x_0) = 1$. \square

El resultado que sigue afirma que podemos aproximar toda función continuamente diferenciable del intervalo por un polinomio respecto a la métrica d_1 .

Lema 3.32. *Para cada $f \in C^1(I, I)$ y $0 < \varepsilon < 1$ existe un polinomio $p : I \rightarrow (0, 1)$ con $d_1(f, p) < \varepsilon$.*

Demostración. Tomamos $\beta = \frac{\varepsilon}{8}$, $\alpha = \frac{\varepsilon}{16}$ y $g(x) = \alpha + (1 - \beta)f(x)$. Como por hipótesis tenemos que $0 < \varepsilon < 1$, se sigue que $0 < \beta < 1$. Veamos que $g(I) \subset (0, 1)$.

$$g(x) = \alpha + (1 - \beta)f(x) = \frac{\varepsilon}{16} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) f(x).$$

Supongamos que existen puntos $x_0, x_1 \in I$ tal que $g(x_0) = 0$ y $g(x_1) = 1$. Entonces,

$$\frac{\varepsilon}{16} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) f(x_0) = 0,$$

por lo tanto,

$$f(x_0) = \frac{-\varepsilon}{2(8 - \varepsilon)} < 0,$$

llegando así a una contradicción. Por otro lado,

$$\frac{\varepsilon}{16} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) f(x_1) = 1,$$

por consiguiente,

$$f(x_1) = \frac{16 - \varepsilon}{16 - 2\varepsilon} > 2,$$

obteniéndose otra contradicción. Luego, efectivamente, $g(I) \subset (0, 1)$.

A continuación, veamos que $d_1(f, g) < \frac{\varepsilon}{4}$.

$$\begin{aligned} d_1(f, g) &= d_0(f, g) + d_0(f', g') \\ &= \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x) - g'(x)| \\ &= \sup_{x \in I} |f(x) - \alpha - (1 - \beta)f(x)| + \sup_{x \in I} |f'(x) - (1 - \beta)f'(x)| \\ &= \sup_{x \in I} |\beta f(x) - \alpha| + \sup_{x \in I} |\beta f'(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Sea

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \inf_{x \in I} \left\{ g(x), 1 - g(x), \frac{\varepsilon}{8} \right\},$$

⁷Teorema de Rolle: Sea f una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, derivable en el intervalo abierto, (a, b) , y verificando $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. El lector interesado en la prueba, véase [Rud2].

y $s(t)$ un polinomio tal que $d_0(g', s) < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Entonces $p(x) = g(0) + \int_0^x s(t)dt$ es un polinomio verificando

$$g(x) - p(x) = \int_0^x (g'(t) - s(t))dt.$$

Así tenemos que

$$d_1(g, p) = d_0(g', s) + d_0(g, p) \leq \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_1}{2} = \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Luego $d_1(f, p) \leq d_1(f, g) + d_1(g, p) < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta forma, de $g(I) \subset [2\varepsilon_1, 1 - 2\varepsilon_1]$ y $d_1(g, p) < \varepsilon_1$ se sigue que $p(I) \subset (0, 1)$. □

Lema 3.33. *Existe un subconjunto residual M_1 de $C^1(I, I)$ tal que para todo $f \in M_1$, $Fix(f)$ es finito.*

Demostración. Procedamos por reducción al absurdo. Si $Fix(f)$ tuviese infinitos elementos, entonces, por el lema 3.31, tenemos garantizada la existencia de $x_0 \in Fix(f)$ tal que $f'(x_0) = 1$.

Consideramos el conjunto

$$E_1 = \{f \in C^1(I, I) : \text{existe } x_0 \in I \cap Fix(f), f'(x_0) = 1\}.$$

Dicho conjunto es un caso particular de los E_k definidos en el lema 3.30 para $k = 1$, luego sabemos que E_1 es cerrado en $C^1(I, I)$. A continuación, queremos probar que E_1 no tiene ningún punto interior.

Sea $f \in E_1$ y $\varepsilon > 0$, por el lema 3.32, existe un polinomio p tal que $d_1(f, p) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $p(I) \subset [\varepsilon_1, 1 - \varepsilon_1]$ para algún $0 < \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea

$$M(p) = \{x : p'(x) = 1\} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}.$$

Elijamos $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ tal que $p(x) - x \neq \varepsilon_2$ para todo $x \in M(p)$ y tomemos $h = p - \varepsilon_2$. Entonces $h \in C^1(I, I)$, $d_1(h, f) < \varepsilon$, $M(h) = \{x : h'(x) = 1\} = M(p)$, y $h(x) \neq x$ en $M(h)$, lo que implica que E_1 es de primera categoría y $M_1 = C^1(I, I) \setminus E_1$ es residual. □

Teorema 3.34. *Sea $\varepsilon > 0$, $f \in C^1(I, I)$, y $A_n = \{x : (f^n)'(x) = 1\} \cap F_n(f)$ un conjunto finito, y $Orb(x, f) \subset (0, 1)$ para $x \in A_n$. Entonces existe una función $g \in C^1(I, I)$ con $d_1(f, g) < \frac{\varepsilon}{4}$ tal que $\{x : (g^n)'(x) = 1\} \cap F_n(g) = \emptyset$.*

Tras introducir varios resultados auxiliares necesarios para desarrollar la demostración del siguiente resultado, finalizamos la sección presentando el resultado de [Ali3] sobre la cardinalidad del conjunto de puntos periódicos de una función continuamente diferenciable.

Obviamente, existen funciones de clase C^1 con conjuntos de puntos periódicos no numerable, por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -x^2 + 2x - \frac{1}{4} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Pero típicamente, el conjunto de puntos periódicos sí es numerable. Véase la figura 3.1.



Figura 3.1: Ejemplo de función con conjunto de puntos fijos no numerable, pero típicamente sí es numerable.

Teorema 3.35. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función de clase C^1 . Entonces, típicamente su conjunto de puntos periódicos es numerable, es decir, existe un conjunto residual $M \subset C^1(I, I)$ tal que $P(f)$ es numerable para todo $f \in M$.*

Demostración. Consideramos los siguientes conjuntos,

$$\begin{aligned} H_n &= \{f \in C^1(I, I) : F_n(f) \text{ no es finito}\}, \\ B_1 &= \{f \in C^1(I, I) : 0 \in P_f^2 \cap \{x : (f^2)'(x) = 1\} \text{ con } f(0) = 1\}, \\ F_1 &= \{f \in C^1(I, I) : \text{existe } x_0 \in I \text{ tal que } x_0 \in \text{Fix}(f) \text{ y } f'(x_0) = 1\}, \\ E_n &= \{f \in C^1(I, I) : F_n(f) \cap \{x : (f^n)'(x) = 1\} \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Por los teoremas 3.28 y 3.33, sabemos que los conjuntos F_1 y B_1 son de primera categoría. Por otro lado, para $n \geq 1$, por el lema 3.30 tenemos que E_n es cerrado, y por el lema 3.31 tenemos que $H_n \subset E_n$.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $f \in C^1(I, I)$ ni es una función constante ni un polinomio de primer grado, y entonces, por el lema 3.32, tenemos que elegir un polinomio $g \in C^1(I, I)$ de grado $n \geq 2$ tal que $g(I) \subset I$ y $d_1(f, g) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Ahora, utilizando el teorema 3.34, podemos construir una función $h \in C^1(I, I)$ tal que $d_1(g, h) < \frac{\varepsilon}{4}$ y el conjunto $A_n = F_n(h) \cap \{x : (h^n)'(x) = 1\} = \emptyset$. Así $d_1(f, h) < \varepsilon$ y $h \notin E_k$ es *nowhere dense*, de ahí $E_n^\circ = \emptyset$ ⁸. Esto implica que para cada $k \geq 2$ el conjunto E_k es *nowhere dense*. Así el conjunto $F = (\bigcup_{k=2}^\infty E_k) \cup F_1 \cup B_1$ es de primera categoría por ser unión numerable de conjuntos *nowhere dense*. Luego $M = C^1(I, I) \setminus F$ es un conjunto residual, y para $f \in M$, $P(f) = \bigcup_{n=1}^\infty F_n(f)$ es numerable. De esta forma, queda probado que toda función de clase C^1 del intervalo tiene típicamente conjunto de puntos periódicos numerable. \square

3.4. Otros conjuntos de puntos

En esta sección recogemos una serie de resultados sobre la dinámica topológica que comparten dos funciones continuas del intervalo que conmutan. Estudiaremos la intersección del conjunto de puntos periódicos de una función con otros conjuntos interesantes como el conjunto de puntos recurrentes, uniformemente recurrentes o casi periódicos. Lo expuesto a continuación está basado en el artículo [CanLin2].

Dadas dos funciones $f, g \in C(X, X)$, las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ son operaciones naturales en $C(X, X)$. Desde el punto de vista de los sistemas dinámicos ambas composiciones comparten algunas propiedades, por ejemplo:

- Su entropía topológica coincide como veremos en el capítulo siguiente en 4.12.
- $Per(f \circ g) = Per(g \circ f)$

Sin embargo, hay muchas otras propiedades que no comparten. Por ejemplo, una función puede ser transitiva⁹, mientras que la otra no lo es.

Ejemplo 3.36. Sea $X = [0, 1]$ y consideremos las funciones $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

$$f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}; \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1], \\ 6x - 2, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], \\ -6x + 4, & x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]. \end{cases}$$

Componiendo ambas funciones obtenemos $(g \circ f)(x) = 1 - |1 - 2x|$ que es transitiva (véase [KoSn]), mientras que $f \circ g$ no es transitiva, ya que $(f \circ g)([0, 1]) = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ y, por tanto, no se cumple la definición si tomamos un intervalo abierto distinto del vacío V en $(0, \frac{1}{3})$ o en $(\frac{2}{3}, 1)$.

⁸Con E_n° denotamos el interior de E_n .

⁹Recordemos que f es (topológicamente) transitiva si para cada par de conjuntos abiertos no vacíos U y V en X , existe un entero positivo k tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. En otras palabras, existe una órbita densa.

Recordemos la definición de conjunto minimal.

Definición 3.37. Sea $f \in C(X, X)$, donde X es un espacio métrico compacto. Diremos que un conjunto cerrado no vacío $M \subset X$ es minimal si $f(M) \subseteq M$ y no existe ningún subconjunto propio cerrado invariante de M .

Además de las propiedades sobre conjuntos minimales que se vieron en la sección 3.1., consideremos la siguiente propiedad para la demostración del siguiente resultado.

- Si $M \subset I$ es un conjunto minimal, entonces o bien M es una órbita periódica o un conjunto de tipo Cantor.

El lector interesado en la demostración de las propiedades anteriores puede consultarlas en [BloCop, Capítulo 5].

Siguiendo el orden de Sharkovsky para los números naturales (véase el Anexo I), consideremos los siguientes conjuntos:

- $\mathcal{T}_1 = \{f \in C(I, I) : P(f) \text{ es cerrado}\}$.
- $\mathcal{T}_2 = \{f \in C(I, I) : f \text{ tiene puntos periódicos de periodo } 2^n, n \geq 0\}$.
- $\mathcal{T}_3 = \{f \in C(I, I) : f \text{ tiene un punto periódico que no sea potencia de } 2\}$.

Nuestro primer principal resultado en este apartado es el siguiente,

Teorema 3.38. Supongamos que $f, g \in C(I, I)$. Entonces¹⁰

- a) Si $g \in \mathcal{T}_1$, entonces $Fix(f) \cap P(g) \neq \emptyset$.
- b) Si $g \in \mathcal{T}_2$, entonces $Fix(f) \cap AP(g) \neq \emptyset$.
- c) Si $g \in \mathcal{T}_3$, entonces $Fix(f) \cap UR(g) \neq \emptyset$.

Demostración. **c)** Consideremos que el conjunto $Fix(f) \neq \emptyset$. El conjunto de puntos fijos es compacto. Por otro lado, si $x \in Fix(f)$, entonces $g(Fix(f)) \subset Fix(f)$. De ahí, el conjunto ω -límite $\omega_g(x) \subset Fix(f)$. Entonces, existe un conjunto minimal para g , $M \subset \omega_g(x) \subset Fix(f)$. Como M es minimal, cualquier $x \in M$ es uniformemente recurrente y, de ahí, $Fix(f) \cap UR(g) \neq \emptyset$.

¹⁰En [CanLin2], artículo que recoge este teorema, hay una errata en el enunciado, donde dice $f \in \mathcal{T}_i$, debe decir $g \in \mathcal{T}_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Recordemos que con AP Y UR denotamos los conjuntos de puntos casi periódicos y puntos uniformemente recurrentes, respectivamente.

a) Se sigue de [Sha], teorema 4.11, que $f \in \mathcal{T}_1$ si y solo si $\omega_f(x)$ es finito y, por lo tanto, es una órbita periódica. Luego $Fix(f) \cap P(g) \neq \emptyset$.

b) Como $\omega_g(x) \subset Fix(f)$ para todo $x \in Fix(f)$ tenemos dos posibilidades:

1. $\omega_g(x)$ es finita, lo que implica que se trata de una órbita periódica y, por lo tanto, $Fix(f) \cap P(g) \neq \emptyset$.
2. $\omega_g(x)$ es infinita.

Supongamos que se verifica la segunda. Entonces por [Smi, Teorema 3.5] existe una sucesión encajada de intervalos $J_0 \supset J_1 \supset \dots \supset J_n \supset \dots$ tal que $g^{2^n}(J_n) = J_n$, $J_{n+1} \cup g^{2^n}(J_{n+1}) \subset J_n$, y $\omega_g(x) \subset \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{i=0}^{2^n-1} g^i(J_n)$ es un único punto $x_0 \in \omega_g(x)$. Entonces $g^{k2^n}(x_0) \in g^{kn}(J_n)$ para todo $k \geq 0$, y por lo tanto $x_0 \in AP(g)$, lo que termina la prueba. \square

De forma similar, podemos demostrar el siguiente resultado que generaliza el teorema 3.38 a cualquier espacio métrico compacto.

Teorema 3.39. *Sea X un espacio métrico compacto y sean $f, g \in C(X, X)$ tales que $f \circ g = g \circ f$. Si $P(f) \neq \emptyset$, entonces $UR(g) \cap P(f) \neq \emptyset$. En particular, $UR(g) \cap UR(f) \neq \emptyset$.*

Demostración. Como $P(f) \neq \emptyset$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $Fix(f^n) \neq \emptyset$ es cerrado. La prueba se sigue de forma similar al Teorema 3.38(c) teniendo en cuenta que g y f^n conmutan. \square

En [Fur] se prueba que si $f_i \in C(X, X)$, $1 \leq i \leq n$, conmutan dos a dos, entonces $\bigcap_{i=1}^n Rec(f_i) \neq \emptyset$. Es más, si $x \in \bigcap_{i=1}^n Rec(f_i)$, existe una sucesión de enteros positivos $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ tal que $f_k^{n_i}(x) \in U$, $1 \leq k \leq n$, para cualquier entorno abierto U de x .

No está claro si $UR(g) \cap UR(f) \neq \emptyset$ en general, aunque sí se puede probar el siguiente resultado

Proposición 3.40. *Sean $f, g \in C(I, I)$, entonces $\overline{UR(f)} \cap UR(g) \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea M un subconjunto minimal de f y consideremos un punto arbitrario $x \in M$. Entonces, $x \in UR(f)$ y $M = \omega_f(x)$.

Por otro lado, como g es uniformemente continua, es inmediato comprobar que $g(\omega_f(x)) = \omega_f(g(x)) = g(M)$ para cualquier $x \in M$. De ahí $g(M) = \omega_f(y)$ para todo $y \in g(M)$, lo que implica que $g(M)$ es también un conjunto minimal de f por las proposiciones 3.7 y 3.8 sobre conjuntos minimales.

Entonces $\cup_{n=0}^{\infty} g^n(M) \subset UR(f)$ y, por lo tanto, $\overline{\cup_{n=0}^{\infty} g^n(M)} = K \subset \overline{UR(f)}$. Como g es continua, la función $g|_K : K \rightarrow K$ está bien definida y es continua. Como K es un conjunto compacto, existe un conjunto minimal de g contenido en K . Así, existe

$$y \in UR(g) \cap K \subset \overline{UR(f)} \cap UR(g).$$

□

Capítulo 4

Entropía topológica

En los capítulos anteriores hemos estudiado la existencia de puntos fijos y puntos periódicos comunes a dos funciones continuas del intervalo que conmutan. A pesar de ello, existen infinidad de propiedades que caracterizan y determinan la dinámica de un sistema al margen de sus puntos fijos o puntos periódicos, por ejemplo: la transitividad, la turbulencia, los puntos de recurrencia, etc.

En este capítulo estudiamos la dinámica de las funciones desde una perspectiva más amplia y nos centramos, como a lo largo de todo el trabajo, en funciones continuas del intervalo que conmutan. En concreto, estudiaremos como la entropía topológica de dos funciones que conmutan determinan la entropía de la composición, y viceversa. En ese sentido, daremos resultados interesantes que se verifican para las funciones monótonas a trozos, pero que no son ciertos para el caso general de las funciones continuas, como veremos con un contraejemplo de Raith. Además, analizaremos qué propiedades deben compartir dos funciones continuas que conmutan.

El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera, definimos la entropía topológica y presentamos algunas propiedades interesantes sobre ella que nos permitirán estudiar cómo de complejo¹ es un sistema. En la segunda sección, comenzamos estudiando como f y g determinan la dinámica de las composiciones, $f \circ g$ y $g \circ f$. Finalmente, abordamos preguntas como ¿viene la dinámica de la composición forzada en cierto sentido por el comportamiento dinámico de f y g , siendo estas funciones continuas del intervalo? Si suponemos conmutatividad, ¿son parecidos los comportamientos de f y g ? ¿Qué propiedades dinámicas

¹Entenderemos por sistema dinámico complejo aquel que tenga al menos un punto periódico de orden distinto a una potencia de dos. En el presente capítulo veremos cómo en el caso de un sistema dinámico complejo su entropía es estrictamente positiva. Por el contrario, cuando un sistema dinámico solo tenga puntos periódicos de órdenes alguna potencia de dos, diremos que es sencillo, siendo su entropía, en este caso, igual a cero.

comparten? Para el caso de las funciones monótonas a trozos, veremos como si la entropía de las funciones que conmutan es cero, fuerzan que la de la composición también lo sea (véase teorema 4.17 y el corolario 4.18). Este resultado es falso para el caso general de las funciones continuas. Para ello, construiremos un contraejemplo desarrollado por Raith [Rai].

4.1. Definición y propiedades

A la hora de estudiar un sistema, es importante conocer cómo de complicada es su dinámica: cuántas órbitas diferentes tiene, cómo son los conjuntos de puntos periódicos, puntos recurrentes, etc. La entropía topológica nos permite medir la complejidad del sistema y así conocer el grado de “caos” que hay en él. El teorema 4.10 y el corolario 4.11, con los que cerramos esta sección, son la justificación para hablar de entropía en el presente trabajo, ya que dichos resultados nos proporcionan una forma alternativa y más sencilla para computar la entropía en el caso de las funciones monótonas a trozos. Esto nos permitirá en las secciones que nos siguen estudiar la complejidad de diversos sistemas generados por funciones monótonas a trozos en el intervalo.

Debido a su importancia, la presente sección se centrará en introducir el concepto de entropía topológica y en desarrollar algunas propiedades para el caso concreto donde el espacio es un intervalo compacto de la recta real. Estas propiedades las utilizaremos en la segunda sección de este capítulo, donde abordaremos distintos resultados sobre entropía de funciones continuas del intervalo que conmutan. Esta sección está basada en [ALM, Capítulo 4].

Sean X un espacio métrico y compacto; y $f \in C(X, X)$ una función continua de X en si mismo. Un conjunto \mathcal{A} de subconjuntos de X se llama cubrimiento si la unión de sus elementos es todo X . Para cubrimientos abiertos $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ de X , denotamos:

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^n \mathcal{A}_i &= \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \dots \vee \mathcal{A}_n \\ &= \{A_1 \cap \dots \cap A_n : A_i \in \mathcal{A}_i, A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Entendemos f^0 como la función identidad. Nótese que $\bigvee_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ también es un cubrimiento abierto. En adelante se supondrá implícitamente que los cubrimientos con los que trabajemos serán *abiertos*.

Para un cubrimiento abierto \mathcal{A} , denotamos

$$f^{-n}(\mathcal{A}) = \{f^{-n}(A) : A \in \mathcal{A}\} \text{ y } \mathcal{A}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{A}).$$

Por la continuidad de f , para cada i , $f^{-i}(\mathcal{A})$ es un cubrimiento abierto, luego \mathcal{A}^n es también un cubrimiento abierto. Si \mathcal{A} es un cubrimiento de X e $Y \subset X$, entonces denotamos por $\mathcal{A}|_Y$ el cubrimiento $\{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ de Y .

Denotamos por $\mathcal{N}(\mathcal{A})$ al menor cardinal posible para un subcubrimiento² elegido de \mathcal{A} . Se verifican las siguientes desigualdades:

$$\mathcal{N}(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \leq \mathcal{N}(\mathcal{A})\mathcal{N}(\mathcal{B}); \quad (4.1)$$

$$\mathcal{N}(f^{-n}(\mathcal{A})) \leq \mathcal{N}(\mathcal{A}). \quad (4.2)$$

Para probarlas, nótese que si \mathcal{C} y \mathcal{D} son subcubrimientos elegidos de \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente, entonces $\mathcal{C} \vee \mathcal{D}$ y $f^{-n}(\mathcal{C})$ son subcubrimientos elegidos de $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ y $f^{-n}(\mathcal{A})$, respectivamente.

Por otro lado, usando la definición, tenemos $\mathcal{A}^{k+n} = \mathcal{A}^k \vee f^{-k}(\mathcal{A}^n)$ y así obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{N}(\mathcal{A}^{k+n}) \leq \mathcal{N}(\mathcal{A}^k)\mathcal{N}(\mathcal{A}^n). \quad (4.3)$$

El siguiente lema será útil para demostrar posteriormente el teorema principal de esta sección, a saber, el teorema 4.10. Una sucesión $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ de números reales no negativos se llama subaditiva si para cada n y k tenemos $\alpha_{k+n} \leq \alpha_k + \alpha_n$. Por ejemplo, la sucesión $(\log \mathcal{N}(\mathcal{A}^n))_n$ es subaditiva por 4.3 y es positiva por ser el cardinal mayor o igual que 1.

Lema 4.1. *Si $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión subaditiva, entonces existe el límite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n}$$

y es igual a $\inf_n \frac{\alpha_n}{n}$.

Demostración. Fijemos $m \geq 1$. Podemos reescribir cada n como $n = sm + r$, donde $0 \leq r \leq m - 1$, $s \geq 0$. Entonces, tomando $\alpha_0 = 0$, tenemos

$$\frac{\alpha_n}{n} = \frac{\alpha_{sm+r}}{n} \leq \frac{\alpha_{sm} + \alpha_r}{n} \leq \frac{s\alpha_m}{n} + \frac{\alpha_r}{n} \leq \frac{\alpha_m}{m} + \frac{\alpha_r}{n},$$

donde en las dos primeras desigualdades hemos utilizado la subaditividad de la sucesión y en el resto de desigualdades la descomposición $n = sm + r$. Por lo tanto,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \leq \frac{\alpha_m}{m}.$$

Luego, al ser cierto para todo m

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{n} \leq \inf_m \frac{\alpha_m}{m} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha_m}{m},$$

de donde se sigue el resultado, ya que el límite inferior de una sucesión siempre es menor o igual que el límite superior y obtenemos así la igualdad. \square

²Por subcubrimiento entendemos un subconjunto de un cubrimiento \mathcal{A} que también sea un cubrimiento de X .

Utilizando la desigualdad (4.3) y el lema 4.1, el límite

$$h(f, \mathcal{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \mathcal{N}(\mathcal{A}^n) \quad (4.4)$$

existe y es igual al ínfimo de $\frac{1}{n} \log \mathcal{N}(\mathcal{A}^n)$. Como $\mathcal{N}(\mathcal{A}^n) \geq 1$, tenemos que $h(f, \mathcal{A}) \geq 0$.

Definición 4.2. El número $h(f, \mathcal{A})$ (4.4) se llama entropía (topológica) de f sobre el cubrimiento \mathcal{A} .

Ahora podemos tomar

$$h(f) = \sup h(f, \mathcal{A}), \quad (4.5)$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubrimientos abiertos \mathcal{A} de X .

Definición 4.3. El número $h(f)$ definido por (4.5) se llama entropía topológica de f .

Nota 4.4. Señalamos que existen otras definiciones de entropía topológica que son equivalentes. El lector interesado puede consultar [ALM, pág. 188].

Diremos que un cubrimiento \mathcal{A} es más fino que un cubrimiento \mathcal{B} , y escribimos $\mathcal{A} \geq \mathcal{B}$, cuando cada elemento de \mathcal{A} está contenido en algún elemento de \mathcal{B} . Claramente, tenemos que

$$\text{si } \mathcal{A} \geq \mathcal{B} \text{ entonces } \mathcal{N}(\mathcal{A}) \geq \mathcal{N}(\mathcal{B}), \quad (4.6)$$

y

$$\text{si } \mathcal{A} \geq \mathcal{B} \text{ entonces } \mathcal{A}^n \geq \mathcal{B}^n. \quad (4.7)$$

Consecuentemente

$$\text{si } \mathcal{A} \geq \mathcal{B} \text{ entonces } h(f, \mathcal{A}) \geq h(f, \mathcal{B}). \quad (4.8)$$

Además,

$$\mathcal{A}^n \geq \mathcal{A}. \quad (4.9)$$

Nótese que, como X es compacto, para todo cubrimiento abierto \mathcal{A} de X podemos elegir un subcubrimiento finito \mathcal{B} . Este subcubrimiento \mathcal{B} es más fino que \mathcal{A} . Por lo tanto, de (4.6) se sigue que es suficiente tomar en (4.5) el supremo solo sobre todos los cubrimientos abiertos finitos.

Sea \mathcal{A} un cubrimiento finito. Como por definición de \mathcal{A}^n su cardinalidad es a lo sumo $(\text{Card} \mathcal{A})^n$, tenemos

$$h(f, \mathcal{A}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\text{Card} \mathcal{A})^n = \log \text{Card}(\mathcal{A}).$$

³Con Card denotamos el cardinal de un conjunto, en nuestro caso, de cubrimientos abiertos.

De ahí que

$$0 \leq h(f, \mathcal{A}) < \infty. \quad (4.10)$$

ya que, como hemos comentado, solo podemos tomar el supremo en $h(f)$ sobre cubrimientos abiertos finitos.

Cuando consideramos todos los cubrimientos abiertos, puede ocurrir que haya algunos con entropía arbitrariamente grande. Por lo tanto, ahora para la entropía topológica de la aplicación f ocurre

$$0 \leq h(f) \leq \infty. \quad (4.11)$$

Al final de esta sección, veremos en el ejemplo 4.13, un caso de función con entropía infinita.

Lema 4.5. *Se verifica la siguiente igualdad*

$$h(f^n) = n \cdot h(f).$$

Demostración. Si tomamos un cubrimiento abierto \mathcal{A} , entonces por definición $\mathcal{A}_f^{kn} = (\mathcal{A}^n)_{f^n}^k$ y, por lo tanto,

$$h(f^n, \mathcal{A}^n) = n \cdot h(f, \mathcal{A}).$$

Efectivamente,

$$\begin{aligned} h(f^n, \mathcal{A}^n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(\mathcal{N}(\mathcal{A}^{nk})_{f^n}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log(\mathcal{N}(\mathcal{A}^{kn})_f) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n}{nk} \log(\mathcal{N}(\mathcal{A}^{kn})_f) = n \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \log(\mathcal{N}(\mathcal{A}^s)_f) = n \cdot h(f, \mathcal{A}). \end{aligned}$$

donde hemos hecho el cambio de variable $kn = s$.

Por (4.5), esto prueba que $h(f^n) \geq n \cdot h(f)$. Por otro lado, por (4.8) y (4.9).

$$h(f^n, \mathcal{A}) \leq h(f^n, \mathcal{A}^n) = n \cdot h(f, \mathcal{A}),$$

y esto prueba que

$$h(f^n) \leq n \cdot h(f).$$

Luego hemos obtenido que $h(f^n) = n \cdot h(f)$. □

Veamos a continuación algunos resultados para el caso particular en el que X es un intervalo compacto J . Denotaremos el conjunto de todas las funciones continuas de J a J como $C(J, J)$.

Gracias a la compacidad, para todo cubrimiento abierto existe un cubrimiento más fino consistente en intervalos. Por lo tanto, en (4.5) solo hay que tomar el supremo sobre todos

los cubrimientos abiertos finitos de J por intervalos. Los intervalos que usamos son abiertos en J , que es cerrado. Esto significa que dichos intervalos o son abiertos o si son semicerrados es porque un extremo coincide con un extremos de J .

Lema 4.6. *Si $f \in C(J, J)$ y \mathcal{A} es un cubrimiento finito de J por intervalos, entonces existe un cubrimiento abierto \mathcal{B} de J tal que*

$$h(f, \mathcal{A}) \leq h(f, \mathcal{B}) + \log 3.$$

Demostración. En primer lugar, construyamos una partición \mathcal{C} de I por intervalos que refine a \mathcal{A} . Para ello, para cada $A \in \mathcal{A}$ tomaremos la partición \mathcal{C}_A de I en A y las componentes de $I \setminus A$. Entonces $\mathcal{C} = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{C}_A$ es una partición finita de I por intervalos. Nótese que \mathcal{C} refina a \mathcal{A} , ya que la intersección de todos los conjuntos $I \setminus A$, $A \in \mathcal{A}$ es vacía por ser \mathcal{A} un cubrimiento.

Por 4.8, tenemos que $h(f, \mathcal{C}) \geq h(f, \mathcal{A})$, ya que $\mathcal{C} \geq \mathcal{A}$ por refinarla. De esta forma, para cada elemento $C \in \mathcal{C}$ existe un intervalo abierto $B(C)$ en I que contiene a C e interseca, a lo sumo, tres elementos de \mathcal{C} . Denotemos por $\mathcal{B} = \{B(C) : C \in \mathcal{C}\}$. Ahora, elegimos un subcubrimiento \mathcal{D} de \mathcal{B}^{n^4} , entonces cada elemento de \mathcal{D} interseca a lo sumo 3^n elementos de \mathcal{C}^n . Como \mathcal{D} es un cubrimiento, obtenemos que $\mathcal{N}(\mathcal{C}^n) \leq 3^n \mathcal{N}(\mathcal{B}^n)$. En el límite,

$$h(f, \mathcal{C}) \leq \log 3 + h(f, \mathcal{B}).$$

Consecuentemente, como $h(f, \mathcal{C}) \geq h(f, \mathcal{A})$, se sigue el lema:

$$h(f, \mathcal{A}) \leq h(f, \mathcal{B}) + \log 3.$$

□

Denotemos por \mathcal{M} al conjunto de las funciones monótonas a trozos finitas⁵.

Proposición 4.7. *Si $f \in \mathcal{M}$, entonces (4.5) se verifica si el supremo se toma sobre todos los cubrimientos finitos de I por intervalos.*

Demostración. Denotemos por h al supremo de $h(f, \mathcal{A})$ sobre todos los cubrimientos finitos \mathcal{A} de J por intervalos. Sea \mathcal{A} uno de dichos cubrimientos. Como f es monótona a trozos para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un cubrimiento finito \mathcal{C} de J por intervalos que es más fino que \mathcal{A}^n . Del lema 4.6 obtenemos

$$h(f^n, \mathcal{A}^n) \leq h(f^n, \mathcal{C}) \leq h(f^n) + \log 3.$$

⁴Recordemos que $\mathcal{B}^n = \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathcal{B})$

⁵Una función $f : I \rightarrow I$ se dice monótona a trozos, si existen $x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_n = 1$ tales que $f|_{(x_i, x_{i+1})}$ es continua y monótona, donde con monótona nos referimos a estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Por el lema 4.5, $h(f^n, \mathcal{A}^n) = n \cdot h(f, \mathcal{A})$ y $h(f^n) = n \cdot h(f)$. Por lo tanto, $h(f, \mathcal{A}) \leq h(f) + \frac{1}{n} \log 3$. Como n es arbitrario, obtenemos $h(f, \mathcal{A}) \leq h(f)$. Como \mathcal{A} es arbitrario, obtenemos $h \leq h(f)$.

Por otro lado, para cualquier cubrimiento abierto \mathcal{B} podemos encontrar un cubrimiento finito \mathcal{A} consistente en intervalos y más fino que \mathcal{B} . Entonces $h(f, \mathcal{B}) \leq h(f, \mathcal{A}) \leq h$. Como \mathcal{B} es arbitrario, obtenemos $h(f) \leq h$. Lo que completa así la prueba. \square

Si $f \in \mathcal{M}$, llamaremos a un cubrimiento \mathcal{A} de J f -mono si es finito, consiste en intervalos y f es monótona en cada elemento de \mathcal{A} .

Nota 4.8. *Nótese que si un cubrimiento \mathcal{A} es f -mono entonces \mathcal{A}^n es f^n -mono. Efectivamente, si $A = A_0 \cap A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \in \mathcal{A}^n$, entonces $A \subseteq A_{n-1}$ y $A_{n-1} = f^{-(n-1)}(B_{n-1})$ con $B_{n-1} \in \mathcal{A}$, luego $f^n(A) \subseteq f(B_{n-1})$, y al ser \mathcal{A} f -mono, se sigue \mathcal{A}^n es f^n -mono.*

Proposición 4.9. *Si $f \in \mathcal{M}$ y \mathcal{A} es un cubrimiento f -mono de J , entonces $h(f, \mathcal{A}) = h(f)$.*

Ahora ya somos capaces de dar una forma simple y muy útil de computar la entropía de aplicaciones monótonas a trozos en un intervalo. Sea c_n el mínimo cardinal de todos los cubrimientos f^n -mono de J . En otras palabras, c_n es el número de intervalos de monotonía de f^n .

Teorema 4.10. *Si $f \in \mathcal{M}$, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n = h(f)$$

y $\frac{1}{n} \log c_n \geq h(f)$ para cualquier n .

Demostración. Para $n = 1, 2, \dots$, sea \mathcal{A}_n un cubrimiento f^n -mono de cardinalidad mínima, es decir, cardinalidad c_n . Para $m, k > 0$, el cubrimiento $f^{-k}(\mathcal{A}_m) \vee \mathcal{A}_k$ es un cubrimiento f^{m+k} -mono: En efecto, sean $A \in f^{-k}(\mathcal{A}_m)$ y $B \in \mathcal{A}_k$. Consideramos $A \cap B$ y $C \in \mathcal{A}_m$. Entonces $f^{m+k}(A \cap B) \subseteq f^{m+k}(A) = f^{m+k}(f^{-k}(C)) \subseteq f^m(C)$ por ser \mathcal{A}_m f^m -mono por hipótesis.

Por lo tanto,

$$c_{m+k} \leq \text{Card}(f^{-k}(\mathcal{A}_m) \vee \mathcal{A}_k) \leq c_m c_k.$$

La sucesión $(\log c_n)_{n=1}^{\infty}$ es subaditiva y, por consiguiente, el lema 4.1 implica que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n$ y es igual a $\inf_n \frac{1}{n} \log c_n$.

Para cada n tenemos, por el lema 4.5 y la proposición 4.9, que

$$h(f) = \frac{1}{n} h(f^n) = \frac{1}{n} h(f^n, \mathcal{A}_n) \leq \frac{1}{n} \log \text{Card} \mathcal{A}_n = \frac{1}{n} \log c_n.$$

Por otro lado, para cada n y k , el cubrimiento $(\mathcal{A}_n)_{f^n}^k$ es un f^{nk} -mono cubrimiento por la nota 4.8 y, de ahí,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log c_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} \log c_{nk} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nk} \log \mathcal{N}((\mathcal{A}_n)_{f^n}^k) \\ &= \frac{1}{n} h(f^n, \mathcal{A}_n) = \frac{1}{n} h(f^n) = h(f). \end{aligned}$$

□

Corolario 4.11. *Si $f \in C(J, J)$ es un homeomorfismo, entonces $h(f) = 0$.*

A continuación, haciendo uso del teorema 4.10, presentamos dos ejemplos. El primero de ellos veremos como computar la entropía haciendo uso de dicho resultado. En el segundo, veremos un caso de función con entropía infinita.

Ejemplo 4.12. *Aplicamos el teorema 4.10 para calcular la entropía de la siguiente función. Consideremos $I = [0, 1]$ y la función $f : I \rightarrow I$ dada por:*

$$f(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{6}, \\ -6x + 2 & \text{si } \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{3}, \\ 6x - 2 & \text{si } \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}, \\ -6x + 4 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}, \\ 6x - 4 & \text{si } \frac{2}{3} \leq x < \frac{5}{6}, \\ -6x + 6 & \text{si } \frac{5}{6} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Véase la imagen 4.1. En este caso, el número de subintervalos de monotonía, c_n , verifican que $c_n = 6^n$. De esta forma, aplicando el teorema 4.10 obtenemos

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 6^n = \log 6.$$

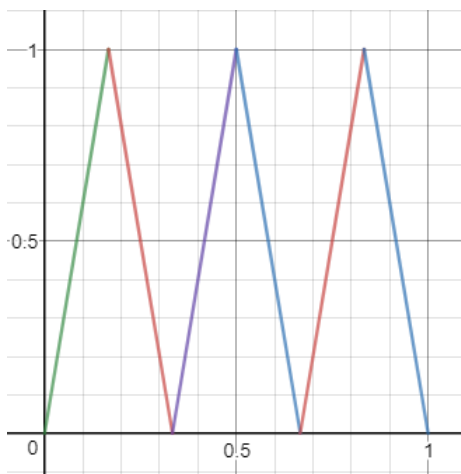


Figura 4.1: Función que ilustra el teorema 4.10.

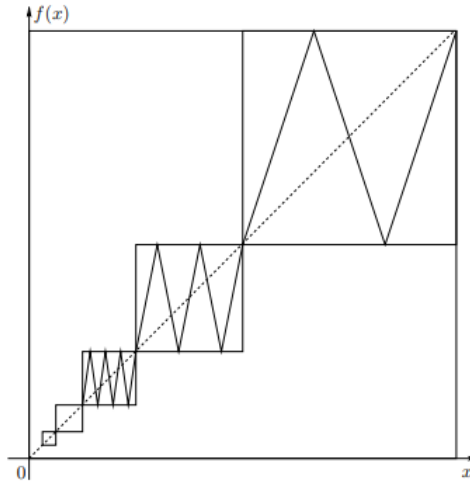


Figura 4.2: Ejemplo de función con entropía infinita.

Ejemplo 4.13. *Ilustremos con el presente ejemplo un caso de función con entropía infinita. Véase la imagen 4.2.*

Finalmente, presentamos un resultado que relaciona la entropía con la propiedad de ser turbulento. El lector interesado puede encontrar la demostración del teorema en [BloCop, pág. 14 y pág. 218].

Teorema 4.14. *Sea $f \in C(I, I)$. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. $h(f) > 0$.
2. f tiene un punto periódico con orden distinto a una potencia de 2.
3. f^n es turbulento para algún $n \in \mathbb{N}$.

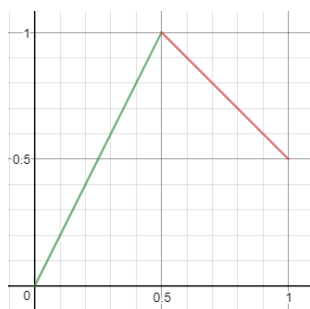
4.2. Entropía topológica en composición de funciones

A continuación vamos a considerar los sistemas dinámicos discretos generados por la composición de dos funciones $f, g \in C(X, X)$, es decir, $(X, f \circ g)$ y $(X, g \circ f)$. Nuestro objetivo es estudiar cómo f y g determinan la dinámica de $f \circ g$ y $g \circ f$. Vamos a centrar nuestra atención en el caso $X = I = [0, 1]$. Entre otros resultados, demostraremos que en el caso de las funciones monótonas a trozos, la suma de las entropías de las funciones que conmutan es mayor o igual que la entropía de la composición. También estudiaremos que si dos funciones continuas del intervalo que conmutan comparten un punto periódico de orden $2^k p$, donde $k \geq 0$ y $p \geq 3$ es impar, entonces, la entropía de la composición es estrictamente positiva.

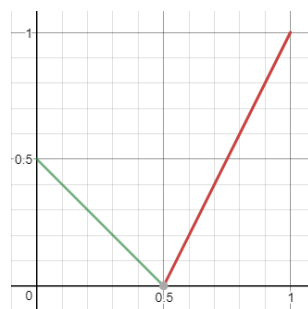
Desafortunadamente, ni siquiera en este caso podemos afirmar nada de forma general. En el siguiente ejemplo se ilustra cómo dos funciones con dinámicas sencillas, al componerse determinan una función de dinámica compleja.

Ejemplo 4.15. Consideramos las siguientes funciones $f, g : I \rightarrow I$, donde g viene definida por $g(x) = 1 - f(1 - x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ \frac{3}{2} - x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \text{ y } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - x, & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



(a) $f(x)$



(b) $g(x) = 1 - f(1 - x)$

Figura 4.3: Ejemplo de funciones con dinámica sencilla que al componerse determinan una función de dinámica compleja.

Se comprueba fácilmente que f y g tienen únicamente puntos periódicos de orden 1 y 2, es decir,

$$Per(f) = Per(g) = \{1, 2\}$$

Así que las dinámicas de f y g son simples en el siguiente sentido: Todas las trayectorias $\{f^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $\{g^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in I$, convergen a la órbita finita de un punto periódico⁶. Además, tanto f como g verifican que $c_n = n + 1$, ya que con cada iteración únicamente aumenta en una unidad el número de intervalos de monotonías de la función. Así, por el teorema 4.10,

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(n + 1) = 0.$$

Ahora consideramos la composición $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 4x - 1 & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

⁶La demostración de esta afirmación puede encontrarse en [Sha, pág. 73]

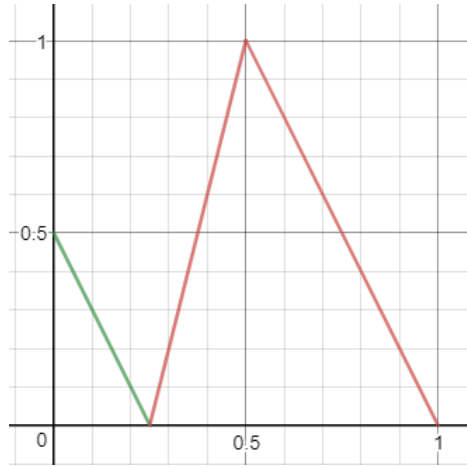


Figura 4.4: Composición de dos funciones que tiene dinámica compleja.

Es fácil deducir que $\text{Per}(g \circ f) = \mathbb{N}$. Para ello basta comprobar que existen puntos periódicos de orden 3, por ejemplo el periodo $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, y el resultado se seguirá por el teorema de Sharkovsky. Al tener puntos periódicos de todos los órdenes, por el teorema 4.14 podemos concluir que la entropía topológica de la composición es estrictamente positiva. Utilizando el teorema 4.10 también podemos llegar a la misma conclusión. Es sencillo comprobar que para cada $n \geq 1$, el número de intervalos de monotonía verifica que $c_n \geq 2^n$. De esta forma,

$$h(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2^n = \log 2.$$

Por lo tanto, $h(g \circ f) > 0$ mientras que $h(g) = h(f) = 0$.

Ahora bien, no necesariamente al componer dos funciones se tiene que complicar la dinámica. De hecho, con el siguiente ejemplo ilustramos como dos funciones de dinámica compleja, al componerlos originan una función que únicamente posee puntos fijos.

Ejemplo 4.16. Consideremos las funciones $f, g \in C(I, I)$ donde $g(x) = 1 - f(1 - x)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Consideramos la composición:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{3}{2} - 2x, & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ x & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

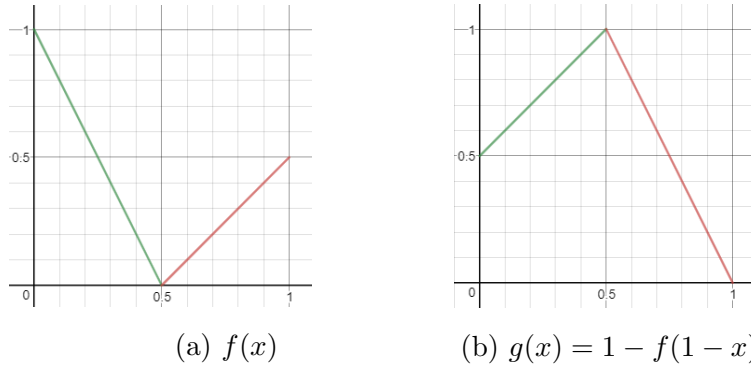


Figura 4.5: Ejemplo de dos funciones con dinámica compleja que al conmutar originan una función con dinámica sencilla.

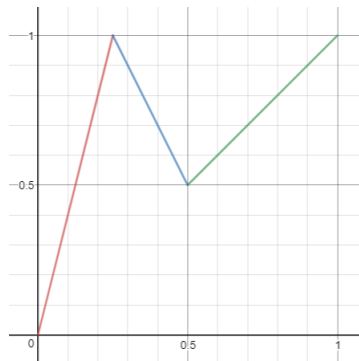


Figura 4.6: Composición de dos funciones con entropía cero.

Obsérvese que f y g comparten la órbita periódica $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Luego tienen puntos periódicos de orden 3, y por el teorema de Sharkovsky, $Per(f) = Per(g) = \mathbb{N}$. De ahí que $h(f) > 0$, $h(g) > 0$ por el teorema 4.14. Sin embargo, se comprueba fácilmente, viendo que no existen puntos periódicos de orden 2, y aplicando el teorema de Sharkovsky, que $Per(g \circ f) = \{1\}$ y, por ende, $h(g \circ f) = 0$ por el mismo teorema.

Como hemos podido apreciar en los ejemplos anteriores, en general, no se puede afirmar nada a priori sobre la complejidad de la composición de dos funciones. Es por ello que, para obtener algún resultado en esta línea es necesario exigir alguna condición adicional. Una de ellas consiste en exigir conmutatividad entre las funciones f y g , es decir, $f \circ g = g \circ f$. Uno de los motivos por los que puede ser conveniente exigir esta condición es por verificarse la siguiente igualdad [KoSn1]:

$$h(g \circ f) = h(f \circ g). \quad (4.12)$$

Además, la entropía topológica de funciones conmutables se ha estudiado en varios artículos. De hecho, en [Hu] se probó la desigualdad $h(f \circ g) \leq h(f) + h(g)$ para difeomorfismos sobre variedades Riemannianas compactas C^∞ . Esta desigualdad no se verifica en general, como probó Goodwyn en su artículo [Goo], donde proporciona dos contraejemplos. Sin em-

bargo, Cánovas y Linero, [CanLin1], probaron que el resultado sí era cierto para el caso de las funciones monótonas a trozos. Recordemos que para este tipo de funciones, $c_n(f)$ denota el número de intervalos de monotonía de f^n .

Teorema 4.17. [CanLin1] Sean f, g dos funciones monótonas a trozos continuas tales que $f \circ g = g \circ f$. Entonces

$$h(f \circ g) \leq h(f) + h(g). \quad (4.13)$$

Demostración. Como $f \circ g = g \circ f$, es fácil de comprobar que $f^p \circ g^q = g^q \circ f^p$ para todo $p, q \in \mathbb{N}$.

El número de intervalos de monotonía de $f^n \circ g^n$ es menor o igual que $c_n(f)c_n(g)$, es decir, $c(f^n \circ g^n) \leq c_n(f)c_n(g)$. Efectivamente, supongamos que f^n tiene a intervalos de monotonía, $c_n(f) = a$; y g^n tiene b intervalos de monotonía, $c_n(g) = b$. Si consideramos $f^n \circ g^n$, como cada intervalo de definición de g^n puede pasar, como máximo, en los a intervalos de definición de f^n , entonces tendrá a lo sumo ab intervalos de monotonía. De ahí que $c(f^n \circ g^n) \leq ab = c_n(f)c_n(g)$. (Nótese que la clave está en que al ser f, g monótonas a trozos, en cada intervalo de definición la función es continua y monótona).

En resumen, $c_n(f \circ g) \leq c_n(f)c_n(g)$, ya que $(f \circ g)^n = f^n \circ g^n$. Ahora, por el teorema 4.10 tenemos

$$\begin{aligned} h(f \circ g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n(f \circ g) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(c_n(f)c_n(g)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\log c_n(f) + \log c_n(g)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n(f) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log c_n(g) = h(f) + h(g). \end{aligned}$$

□

Corolario 4.18. [CanLin1] Sean $f, g \in C(I, I)$ funciones monótonas a trozos tales que $f \circ g = g \circ f$. Si $h(f) = h(g) = 0$, entonces $h(f \circ g) = 0$.

Sin embargo, en general, si tenemos que $h(f) > 0$ o $h(g) > 0$, no podemos afirmar que $h(f \circ g) > 0$ como muestra el ejemplo 4.16.

Con el objetivo de encontrar un resultado en el que la entropía de la composición es positiva, sería razonable que si una de las funciones que conmutan fuese un homeomorfismo, por ejemplo g , entonces la fórmula $h(f \circ g) = h(f) + h(g)$ fuese cierta, incluso para aplicaciones no conmutativas. Entonces $h(f) > 0$ implicaría $h(f \circ g) > 0$. Desafortunadamente, el siguiente ejemplo ilustra que esto es falso.

Ejemplo 4.19. Definamos $f(x) = 1 - x$, para $x \in I$ y $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{4}, \\ -2x + 1 & \text{si } \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$

Entonces,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}, \\ -2x + 2 & \text{si } \frac{3}{4} \leq x < 1. \end{cases}$$

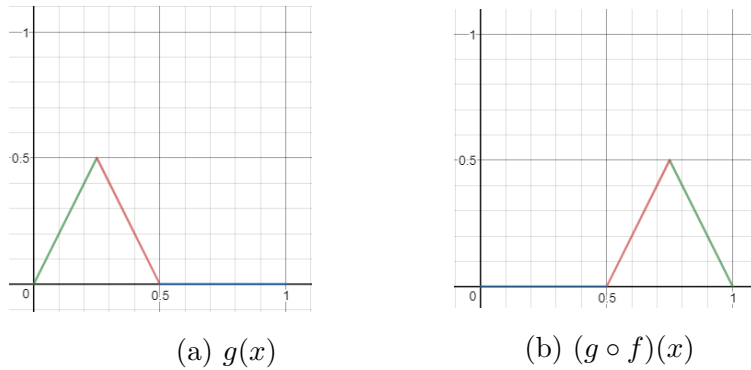


Figura 4.7: Funciones $g(x)$ y $(g \circ f)(x)$ del ejemplo 4.19.

Por un lado, es sencillo computar la segunda iterada de la composición y ver que $(g \circ f)^2(x) = 0$. Luego $(g \circ f)^n = 0$ para todo $n \geq 2$. De ahí, $h(g \circ f) = 0$ ya que únicamente tiene puntos fijos.

Por otro lado, en el caso de g , el tramo que está en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ se va duplicando con cada iterada, lo que implica que $c_n = 2^n$. Ahora, haciendo uso del teorema 4.10:

$$h(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log 2^n = \log 2.$$

Sin embargo, podemos probar el siguiente resultado parcial, donde no exigimos conmutatividad.

Proposición 4.20. [CanLin1] Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua monótona a trozos, y supongamos que $x_1 = 0 < x_2 < \dots < x_{k+1} = 1$ son tales que $f|_{(x_i, x_{i+1})}$ es continua y monótona. Supongamos que $f(x_i^+), f(x_i^-) \in \{0, 1\}$ para $i = 1, 2, \dots, k + 1$. Si $g : I \rightarrow I$ es un homeomorfismo, entonces $h(f \circ g) = h(f) + h(g) = h(f) = \log k$.

Demostración. Para empezar hagamos notar que $h(g) = 0$ por ser homeomorfismo por el corolario 4.11. Es fácil comprobar que $f \circ g$ es una función monótona a trozos con k intervalos de monotonía que lleva cada uno de ellos a un conjunto contenido en $(0, 1)$. Entonces, obtenemos que $c_n(f \circ g) = c_n(f) = k^n$ quedando así probado el resultado gracias al teorema 4.10.

$$h(f \circ g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log k^n = \log k.$$

□

Por otro lado, surge la pregunta de si el teorema 4.17 también es cierto en el marco general de las funciones continuas conmutables sobre el intervalo, sin exigir que sean monótonas a trozos. Dicha pregunta fue planteada en [CanLin1], dando respuesta a ella, en sentido negativo, Peter Raith [Rai]. En su artículo, Raith prueba que para cualquier $\alpha \in [0, \infty]$ existen dos funciones f_1 y $f_2 \in C(I, I)$ en el intervalo que satisfacen $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, $h(f_1) = h(f_2) = 0$ y $h(f_1 \circ f_2) = \alpha$.

Comencemos enunciando una serie de resultados previos que serán necesarios para la construcción del ejemplo de Raith. No desarrollaremos las demostraciones de los resultados que siguen, aunque sí indicaremos una referencia bibliográfica donde poder consultarlos. En el caso del siguiente teorema, el lector interesado puede consultar la demostración en [ALM, Lema 4.1.3].

Teorema 4.21. *Sean $f : I \rightarrow I$ y $g : I \rightarrow I$ funciones continuas. Supongamos que f y g son topológicamente conjugadas⁷, entonces $h(f) = h(g)$.*

La demostración del siguiente lema puede consultarse en [Bow, Corolario 2.18].

Lema 4.22. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Supongamos que existe una sucesión $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados con $f(X_n) \subset X_n$, tal que $I = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Entonces $h(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} h(f|_{X_n})$.*

El lector interesado puede consultar la demostración del siguiente resultado en [ALM, Capítulo 4]. Recordemos que el conjunto ω -límite de un punto $x_0 \in X$ se define como el conjunto

$$\omega(x) = \omega_f(x) = \bigcap_{m \geq 0} \overline{\bigcup_{n \geq m} f^n(x)}.$$

Lema 4.23. *Sea $f : I \rightarrow I$ una función continua. Supongamos que f tiene únicamente una cantidad finita de puntos fijos y que para cada $x \in I$ existe un punto fijo y , tal que $\omega_f(x) = \{y\}$. Entonces $h(f) = 0$.*

Obviamente los resultados anteriores pueden aplicarse al caso de funciones continuas sobre el intervalo unidad $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. El lector interesado puede consultar la demostración del siguiente resultado en [ALM, Capítulo 4].

Proposición 4.24. *Sea $\alpha \in [0, \infty]$. Entonces existe una función continua $g : I \rightarrow I$ con $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y $h(g) = \alpha$.*

⁷Dos funciones $f : X \rightarrow X$ y $g : Y \rightarrow Y$ continuas son topológicamente conjugadas si existe un homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, tal que $h \circ f = g \circ h$.

Comencemos con la construcción del ejemplo que prueba para cualquier $\alpha \in [0, \infty]$ existen dos funciones f_1 y $f_2 \in C(I, I)$ tales que $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$, $h(f_1) = h(f_2) = 0$ y $h(f_1 \circ f_2) = \alpha$.

Construcción del ejemplo:

Sea $\alpha \in [0, \infty]$. Por la proposición 4.24 existe una función continua $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ y $h(g) = \alpha$. Fijemos esta función g para el resto de la construcción.

A continuación, definamos $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como

$$f_1(x) := \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ x + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Obviamente, $f_1(x) > x$ para todo $x \in (0, 1)$ (véase la figura 4.9), de ahí que $\omega_{f_1}(x) = \{1\}$ para todo $x \in (0, 1]$. Como f es un homeomorfismo, por el corolario 4.11, tenemos que $h(f) = 0$.

Con el fin de definir la función f_2 introduzcamos la siguiente notación. Para $n \in \mathbb{N}$, consideramos los conjuntos

$$L_n := \left[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n} \right] \text{ y } R_n := \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right].$$

Nótese que la intersección de dos conjuntos diferentes de este tipo tienen a lo sumo un único punto en común, y que $(0, 1) = (\cup_{n \in \mathbb{N}} L_n) \cup (\cup_{n \in \mathbb{N}} R_n)$. Definamos $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ como

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{2^{n+2}}(1 + g(2^{n+1}x - 1)), & \text{si } x \in L_n, n \geq 1, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4}g(4x - 2), & \text{si } x \in R_1, \\ 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}g(2^{n+1}(x - 1 + \frac{1}{2^n})), & \text{si } x \in R_n, n \geq 2, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Nótese que $f_2(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$ y que $f_2(L_n) = L_{n+1}$. Efectivamente, ya que $f_2(\frac{1}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2^{n+2}}$ y $f_2(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$. También se verifica que

$$f_2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}; f_2(R_1) = L_1; f_2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n} \text{ y } f_2(R_n) = R_{n-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 2$. Todo esto implica que $f_2(x) < x$ para todo $x \in (0, 1)$. Por lo tanto, $\omega_{f_2}(x) = \{0\}$ para todo $x \in [0, 1)$ y entonces, el lema 4.23 implica que $h(f_2) = 0$.

A partir de ahora se considera la siguiente función:

$$g(x) := \begin{cases} 3x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 2 - 3x, & \frac{1}{3} < x \leq \frac{2}{3}, \\ 3x - 2 & \frac{2}{3} < x \leq 1. \end{cases}$$

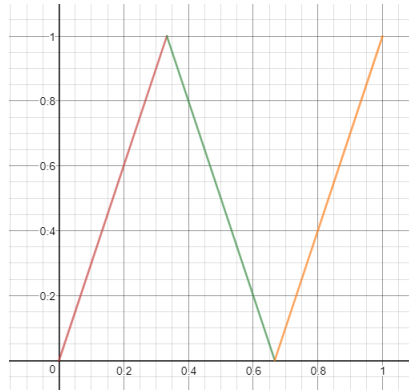


Figura 4.8: Función $g(x)$ considerada en la construcción del ejemplo de Raith.

En este caso, tenemos que $h(g) = \log 3 > 0$ por el teorema 4.10. En la figura 4.9, la segunda gráfica se corresponde a la función f_2 para el caso concreto en el que g está definida como arriba.

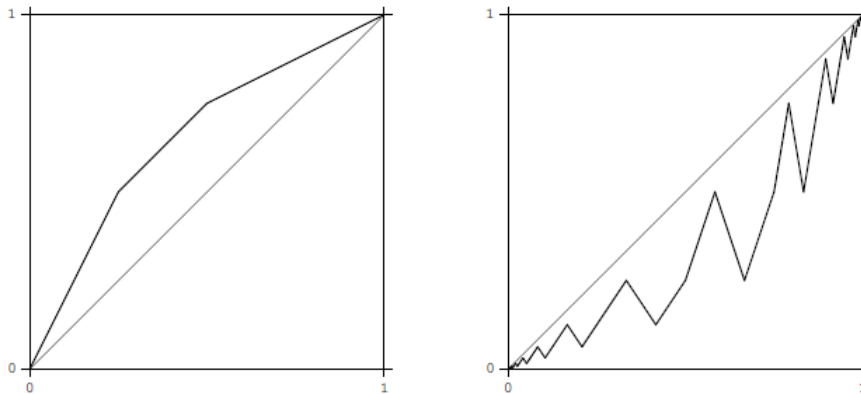


Figura 4.9: Funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$. Imagen extraída de [Rai].

Haciendo unos cálculos laboriosos, pero simples, obtenemos la expresión de la composición

$$(f_1 \circ f_2)(x) = (f_2 \circ f_1)(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{2^{n+1}}(1 + g(2^{n+1}x - 1)), & \text{si } x \in L_n, n \geq 1, \\ 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}g\left(2^{n+1}\left(x - 1 + \frac{1}{2^n}\right)\right), & \text{si } x \in R_n, n \geq 1, \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases} \quad (4.14)$$

Hemos obtenido la conmutatividad de las funciones $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. Por simplicidad llamaremos f a la composición. Por 4.14 obtenemos que $f(L_n) = L_n$. De hecho, vemos que $\frac{1}{2^n}$ es punto fijo de f para todo $n \geq 1$. Además, $f(R_n) = R_n$.

De forma directa, $f|_{L_n}$ es conjugado con g a través del homeomorfismo $h(x) = 2^{n+1}x - 1$ y $f|_{R_n}$ es conjugado con g a través del homeomorfismo $h(x) = 2^{n+1}(x - 1 + \frac{1}{2^n})$. Luego el teorema 4.21 implica que $h(f|_{L_n}) = h(f|_{R_n}) = h(g)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $h(f|_{\{0\}}) = h(f|_{\{1\}}) = 0$, por el lema 4.22, se sigue que $h(f) = h(g)$. De esta forma, hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 4.25. *Sea $\alpha \in [0, \infty]$. Entonces, existe un homeomorfismo estrictamente creciente $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ y existe una función continua $f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $f_2(0) = 0$ y $f_2(1) = 1$, tales que $h(f_1) = h(f_2) = 0$, $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ y $h(f_1 \circ f_2) = \alpha$.*

Corolario 4.26. *Sea $\alpha \in [0, \infty]$. Entonces existen funciones continuas $f_1, f_2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $h(f_1) = h(f_2) = 0$, que satisfacen $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ y $h(f_1 \circ f_2) = \alpha$.*

A continuación presentamos un resultado, también extraído de [CanLin1], que garantiza que la composición tendrá una dinámica complicada siempre que las dos funciones compartan algún punto periódico de orden $2^k p$, donde $k \geq 0$ y $p \geq 3$ es impar. En su demostración haremos uso del teorema 4.14 y del lema 1.1.

Proposición 4.27. *Sean $f, g \in C(I, I)$, con $f \circ g = g \circ f$. Supongamos que f, g tienen una órbita periódica común de orden m , donde $m \geq 3$ es impar. Entonces $h(f \circ g) > 0$.*

Demostración. Sea $P = \{x, f(x), \dots, f^{m-1}(x)\} = \{x, g(x), \dots, g^{m-1}(x)\}$ la órbita periódica común de f y g , con $x = \min P$, $\text{ord}_f(x) = m = \text{ord}_g(x)$. Escribamos la órbita como sigue,

$$x = x_1 < f^{\tau(1)}(x) = x_2 < \dots < f^{\tau(m-1)}(x) = x_m,$$

donde τ es una permutación de $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ con $\tau(0) = 0$. Sea $J_i := [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, m-1$.

Como $m > 1$, vemos que $f(x_k) \neq x_k$ para $k = 1, 2, \dots, m$, ya que en caso contrario tendríamos un punto fijo. De ahí que $f(x_1) > x_1$ y $f(x_m) < x_m$.

Sea $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ mínimo con $f(x_{i+1}) \leq x_i$ y $f(x_i) > x_i$, lo que implica que $f(x_i) \geq x_{i+1}$.

Por lo tanto, obtenemos $J_i \subset f(J_i) \subset \dots \subset f^m(J_i)$, lo que implica que

$$\{x_1, \dots, x_m\} = \{x_i, f(x_i), \dots, f^{m-1}(x_i)\} \subset f^{m-1}(J_i).$$

Como $f^{m-1}(J_i)$ es un intervalo, esto implica que $[x_1, x_m] \subset f^{m-1}(J_i) \subset f^m(J_i)$.

Como m es impar, $i \neq m - i$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $i > m - i$. Como $\{x_1, \dots, x_i\}$ no puede ser invariante, ya que contradeciríamos que i es el menor índice tal que $f(x_{i+1}) < x_{i+1}$, entonces existe $p \leq i$ con $f(x_p) > x_i$.

Por otro lado, los puntos $f(x_1), \dots, f(x_i)$ son disjuntos, por ser elementos de una órbita periódica. De ahí que estos i puntos diferentes no puedan estar contenidos en $\{x_{i+1}, \dots, x_m\}$ porque este último conjunto consiste en $m - i$ puntos e $i > m - i$. Por lo tanto, existe $q \leq i$ con $f(x_q) \leq x_i$. Supongamos que $q < p$. Sea $j < p \leq i$ máximo con $f(x_j) \leq x_i$.

Por maximalidad de j , obtenemos que $f(x_{j+1}) > x_i$. Luego $J_i \subset f(J_j)$. De ahí obtenemos que $[x_1, x_m] \subset f^{m-1}(J_i) \subset f^m(J_j)$. Como obviamente $[x_1, x_m] \subset g([x_1, x_m])$, se sigue que

$$(f \circ g)^m(J_l) = g^m(f^m(J_l)) \supset g^m([x_1, x_m]) \supset [x_1, x_m] \supset J_i \cup J_j$$

para $l \in \{i, j\}$.

Luego $(f \circ g)^m$ es turbulenta⁸ y el teorema 4.14 nos lleva a que $h(f \circ g) > 0$. □

Una vez presentados los resultados previos pasamos a enunciar y demostrar el resultado principal.

Teorema 4.28. [[CanLin1](#)] Sean $f, g \in C(I, I)$ dos funciones tales que $f \circ g = g \circ f$. Supongamos que f y g comparten un punto periódico de orden $2^k p$, donde $k \geq 0$ y $p \geq 3$ es impar. Entonces $h(f \circ g) > 0$.

Demostración. Supongamos que $f, g \in C(I, I)$ comparten un punto periódico x de orden $m = 2^k p$ con $k \geq 0$, $p \geq 3$, p impar y $f \circ g = g \circ f$.

Nótese que $\text{ord}_{f^{2^k}}(x) = \text{ord}_{g^{2^k}}(x) = p$. Consideremos el conjunto

$$P = \{x, f^{2^k}(x), f^{2 \times 2^k}(x), f^{3 \times 2^k}(x), \dots, f^{(p-1)2^k}(x)\}.$$

Sea $t = \text{ord}_{f \circ g}(x)$. Como $(f \circ g)^m(x) = (f^m \circ g^m)(x) = x$ obtenemos $t|m$ por el lema 1.1, luego $t = 2^s q$ con $s \leq k$ y $q|p$.

⁸Recordemos que una función $f : X \rightarrow X$ diremos que es *turbulenta* si existen subintervalos compactos J, K con a lo sumo un punto en común tal que $J \cup K \subset f(J) \cap f(K)$. Se dirá que es estrictamente turbulenta si los subintervalos J, K se pueden elegir disjuntos.

- Si $q > 1$, entonces $f \circ g$ tiene un punto periódico de orden distinto a una potencia de 2 y, por el teorema 4.14, $h(g \circ f) > 0$, terminando así la prueba.
- Si $t = 2^s$, veamos que $P = Orb_{g^{2^k}}(x)$. Para $1 \leq i \leq p$, tenemos

$$\begin{aligned} g^{2^k}(f^{i \times 2^k}(x)) &= f^{2^k}(f^{(i-1)2^k}(f^{2^k}(x))) = f^{(i-1)2^k}((g^{2^k} \circ f^{2^k})(x)) \\ &= f^{(i-1)2^k}((f \circ g)^{2^k}(x)) = f^{(i-1)2^k}(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, f^{2^k} y g^{2^k} comparten una órbita periódica P de orden p . Recordemos que $h(f^n) = nh(f)$ y utilizando la proposición 4.27 se sigue que

$$2^k h(f \circ g) = h((f \circ g)^{2^k}) = h(f^{2^k} \circ g^{2^k}) > 0,$$

lo que implica $h(f \circ g) > 0$.

□

Teorema 4.29. Sean $f, g \in C(I, I)$ tales que $f \circ g = g \circ f$. Si f y g comparten un punto periódico cuyo orden no sea una potencia de dos para f , entonces $h(f \circ g) > 0$.

Demostración. Supongamos que x_0 es un punto periódico de orden $n = 2^p q$, $p \geq 0, q \geq 3$ impar, para f ; y de orden $m = 2^s r$, $s \geq 0, r \geq 1$ impar, para g . Distingamos tres casos:

- $m = n$. Se trata del teorema 4.28.
- $m \neq n$ y $q = r$. Entonces, sea $k = \max\{p, s\}$ y consideremos las aplicaciones $F = f^{2^k}$ y $G = g^{2^k}$. Entonces F y G comparten un punto periódico de periodo q . Efectivamente,

$$F^q(x_0) = (f^{2^k})^q(x_0) = f^{2^k q}(x_0) = f^{2^p q}(x_0) = f^n(x_0) = x_0;$$

$$G^q(x_0) = g^{2^k q}(x_0) = g^{2^{s+u} q}(x_0) = g^{2^s q 2^u}(x_0) = (g^{2^s q})^{2^u}(x_0) = (g^m)^{2^u}(x_0) = x_0.$$

Luego, por el teorema 4.28, tenemos que $h(F \circ G) > 0$. Entonces,

$$h(F \circ G) = h(f^{2^k} \circ g^{2^k}) = h((f \circ g)^{2^k}) = 2^k h(f \circ g),$$

lo que implica que $2^k h(f \circ g) > 0$ y, por lo tanto, $h(f \circ g) > 0$.

- $m \neq n$ y $q \neq r$. Supongamos que n y m son coprimos. Entonces, o bien p , o bien s es 0 para que no haya factores comunes. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $s = 0$. De ahí, $n = 2^p q$ y $m = r$.

$G_1(x_0) = g^m(x_0) = x_0$ por hipótesis. Por lo tanto, x_0 es un punto fijo de $G_1 = g^m$. Además, $F_1^n(x_0) = (f^m)^n(x_0) = (f^n)^m(x_0) = x_0$. Luego x_0 es un punto periódico de orden n de $F_1 = f^m$. De ahí, x_0 es un punto periódico de orden n para $F_1 \circ G_1$

$$(F_1 \circ G_1)^n(x_0) = (F_1^n \circ G_1^n)(x_0) = F_1^n(g^m \circ \dots \circ g^m)(x_0) = F_1^n(x_0) = x_0.$$

Entonces, al ser $n = 2^p q$, por el teorema 4.28, queda probado que $h(F_1 \circ G_1) > 0$. Finalmente,

$$h(F_1 \circ G_1) = h(f^m \circ g^m) = h((f \circ g)^m) = mh(f \circ g) > 0$$

y, de ahí, $h(f \circ g) > 0$.

Veamos ahora qué sucede si n y m no son coprimos. Sea $d = \text{mcd}(n, m)$ y consideremos $F = f^d$ y $G = g^d$. Entonces, tomando $n_1 = \frac{n}{d}$ y $m_1 = \frac{m}{d}$ tenemos que x_0 es un punto periódico de F de orden $n_1 = 2^{p_1} q_1$ ($F^{n_1}(x_0) = f^n(x_0) = x_0$); y también es un punto orden de G de periodo $m_1 = 2^{s_1} r_1$ ($G^{m_1}(x_0) = g^m(x_0) = x_0$).

Ahora bien, n_1 y m_1 son coprimos al obtenerse dividiendo n y m por su máximo común divisor respectivamente. Luego, aplicando el caso previo obtenemos que $h(F \circ G) > 0$ y, procediendo de forma análoga, $h(f \circ g) > 0$.

□

Nótese que la diferencia entre el teorema 4.28 y el teorema 4.29 radica en que mientras en el primero los puntos periódicos comunes deben tener el mismo orden, en el segundo no tienen por qué serlo, es decir, con compartir un punto periódico de órdenes diferentes para f y g es suficiente para concluir que la entropía de la composición es estrictamente positiva, y por ende, su dinámica compleja.

Resultados de este tipo también se pueden demostrar para otro tipo de funciones que no sean continuas en el intervalo. Por ejemplo, Sun, Xi y Chen [Sun], probaron que si $f, g : T \rightarrow T$, donde T es un árbol⁹ con s extremos, son continuas y conmutan, entonces si existe un entero positivo $m \geq 2$ tal que $\text{mcd}(m, l) = 1$ para cualquier $2 \leq l \leq s$ y $P_{km}(f) \cap P(g) \neq \emptyset$ para algún entero positivo k , entonces $h(f \circ g) > 0$.

En el presente trabajo hemos estudiado la dinámica que tienen en común dos funciones continuas del intervalo que conmutan y cómo la dinámica de estas determinan la dinámica de su composición. El análisis realizado recorre la evolución del problema desde que a mediados del siglo XX se plantease la conjetura sobre compartir puntos fijos, conjetura 2.1, hasta el estado actual de la investigación. Principalmente, hemos centrado nuestro estudio en los conjuntos de puntos fijos, los conjuntos de puntos periódicos y en la entropía topológica de las funciones, aunque se han estudiado otras propiedades como la turbulencia, la transitividad o los conjuntos de puntos recurrentes, uniformemente recurrentes y finalmente periódicos.

⁹Por árbol entenderemos una variedad ramificada conexa compacta y unidimensional que no contiene ninguna copia homeomorfa al círculo.

A pesar de que se haya dado respuesta a muchas cuestiones a lo largo de los años, sigue habiendo muchos problemas interesantes abiertos, como por ejemplo la cuestión sobre compartir puntos periódicos, cuestión que Steele abordó determinando el camino a seguir para conseguir probarla típicamente. Esto ilustra, como este campo de los sistemas dinámicos, a la par que interesante, sigue estando vivo y con múltiples incógnitas que descubrir.

Anexo I: El Teorema de Sharkovsky

En el ámbito de los sistemas dinámicos discretos definidos por funciones del intervalo, uno de los resultados más relevantes es el *teorema de Sharkovsky*. En el presente anexo nos dedicaremos a desarrollar la demostración del teorema basándonos en el artículo de Du, [Du], donde sintetiza la prueba original. Recordemos el enunciado del teorema introducido anteriormente en el capítulo de preliminares.

Teorema 4.30. Teorema de Sharkovsky *Supongamos que $f : I \rightarrow I$ es una función continua. Si f tiene un punto periódico de orden m , entonces f también tiene un punto periódico de orden n siempre que $m < n$ en el orden de Sharkovsky, siendo dicho orden el siguiente:*

$$\begin{array}{cccccccc}
 3 & <_s & 5 & <_s & 7 & <_s & \dots & <_s \\
 2 \cdot 3 & <_s & 2 \cdot 5 & <_s & 2 \cdot 7 & <_s & \dots & <_s \\
 2^2 \cdot 3 & <_s & 2^2 \cdot 5 & <_s & 2^2 \cdot 7 & <_s & \dots & <_s \\
 \dots & <_s & 2^3 & <_s & 2^2 & <_s & 2 & <_s & 1.
 \end{array}$$

Nótese que la suficiencia del teorema se puede obtener a partir de los siguientes resultados:

- a) Si f tiene un punto periódico de orden mayor que 2, entonces f también tiene un punto periódico de orden 2.
- b) Si f tiene un punto periódico de orden impar $m \geq 3$, entonces f también tiene un punto periódico de orden n para todo entero n tal que $n \geq m + 1$.
- c) Si f tiene un punto periódico de orden impar $m \geq 3$, entonces f tiene puntos periódicos de todos los órdenes pares.

De ahí, que nos centremos en probar los resultados anteriores para terminar concluyendo con la demostración del teorema 4.30.

Lema 4.31. *Sean k, m, n y s enteros positivos. Entonces se verifica lo siguiente:*

1. Si y es un punto periódico de f de orden m , entonces es un punto periódico de f^n de orden $\frac{m}{(m,n)}$, donde (m,n) denota al máximo común divisor de m y n .
2. Si y es un punto periódico de f^n de orden k , entonces es un punto periódico de f de orden $\frac{kn}{s}$, donde s divide a n y es coprimo con k .

Demostración. **1.** Supongamos que y es un punto periódico de orden m de f , es decir, $f^m(y) = y$; y sea $p = \frac{m}{(m,n)}$. Esto implica que $p|m$ y $p|n$, luego, $m = pk_1$ y $n = pk_2$ con k_1 y k_2 números enteros. De esta forma, el resultado se sigue de

$$(f^n)^{\frac{m}{p}}(y) = f^{\frac{nm}{p}}(y) = f^{k_2 m}(y) = \underbrace{(f^m \circ \dots \circ f^m)}_{k_2}(y) = f^m(y) = y.$$

2. Supongamos que y es un punto periódico de orden m para f^n . Entonces y tiene periodo p para f , donde p divide a mn . Así, podemos escribir $p = \frac{mn}{s}$. Entonces, por 1, $\frac{p}{(n,p)} = \frac{ps}{n}$ y así $(n,p) = \frac{n}{s}$. Luego $n = sd$ y $(sd, md) = d$. \square

Vamos a probar a). Para ello veamos el siguiente lema previo.

Lema 4.32. Si c y d son puntos del intervalo tales que $f(d) \leq c < d \leq f(c)$, entonces f tiene un punto periódico de orden 2.

Demostración. Escribamos $I = [a, b]$. Sea $w = \min\{c \leq x \leq d : f(x) = x\}$, y sea v un punto en $[c, w]$ con $f(v) = d$. Entonces, $f^2(v) = f(d) \leq c \leq v$. Si f no tiene puntos fijos en $[a, c]$, entonces no fija ningún punto de $[a, v]$. Como $f^2(a) \geq a$, se sigue que f tiene un punto periódico de orden 2 en $[a, v]$.

Si f tiene un punto fijo en $[a, c]$, sea $t = \max\{a \leq x < c : f(x) = x\}$. Entonces f no tiene puntos fijos en $(t, v]$. Sea u un punto en $[t, c]$ con $f(u) = c$. Entonces $f^2(u) = f(c) \geq d > u$. Como $f^2(v) \leq v$, deducimos que $f^2(y) = y$ para algún y en $[u, v]$. Finalmente, como f no tiene puntos fijos en $[u, v]$, y es un punto periódico de f de orden 2. \square

Proposición 4.33. Si f tiene un punto periódico de orden m mayor que 2, entonces f también tiene un punto periódico de orden 2.

Demostración. Sea $P = \{x_i : 1 \leq i \leq m\}$, con $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, una órbita de periodo m de f . Como $x_1 < f(x_1)$ y $f(x_m) < x_m$, existe un entero s satisfaciendo $1 \leq s \leq m-1$ tal que $x_s = \max\{x \in P : x < f(x)\}$. Está claro que $x_{s+1} \leq f(x_s)$ y $f(x_{s+1}) \leq x_s$. Por el lema 4.32, f tiene un punto periódico de orden 2. \square

Veamos a continuación, de forma unificada, la demostración de b) y c).

Si hay subintervalos cerrados $J_0, J_1, \dots, J_{n-1}, J_n$ de I con $J_n = J_0$ tal que $f(J_i) \supset J_{i+1}$ para $i = 0, 1, \dots, n-1$, entonces diremos que $J_0 J_1 \dots J_{n-1}$ es un ciclo de longitud n . Necesitamos el siguiente resultado previo.

Lema 4.34. Si $J_0J_1J_2 \dots J_{n-1}J_0$ es un ciclo de longitud n , entonces existe un punto periódico y de f tal que $f^i(y) \in J_i$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ y $f^n(y) = y$.

El lector interesado puede encontrar la prueba de dicho resultado auxiliar en [BloCop, Capítulo 1]

Proposición 4.35. Si f tiene un punto periódico de orden m , con $m \geq 3$ e impar, entonces f tiene puntos periódicos de todos los órdenes pares. Es más, f tiene un punto periódico de orden n para cualquier entero n con $n \geq m + 1$.

Demostración. Sea $P = \{x_i : 1 \leq i \leq m\}$, con $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, una órbita de periodo m de f . Sea $x_s = \max\{x \in P : x < f(x)\}$. Como m es impar, para algún entero t tal que $1 \leq t \leq m - 1$ y $t \neq s$ los puntos $f(x_t)$ y $f(x_{t+1})$ caen en lados opuestos de z . Así $f([x_t, x_{t+1}]) \supset [x_s, x_{s+1}]$. Por simplicidad, supongamos que $x_t < x_s$ ¹⁰. Sea q el menor entero positivo tal que $f^q(x_s) \leq x_t$. Entonces $2 \leq q \leq m - 1$.

En primer lugar, supongamos que $m = 3$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$, y $f(x_3) = x_1$. Sea $J_0 = [x_1, x_2]$ y $J_1 = [x_2, x_3]$. Para cualquier $n \geq 2$, podemos aplicar el lema 4.34 al ciclo $J_0J_1J_1 \dots J_1J_0$ de longitud n para obtener un punto de periodo n . Por consiguiente, si f tiene un punto de periodo 3, entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos.

Ahora, supongamos que $m > 3$. Como q es el menor entero positivo tal que $f^q(x_s) \leq x_t$, entonces $x_{t+1} \leq f^i(x_s)$ cuando $1 \leq i \leq q - 1$. Si $x_{t+1} \leq f^{q-1}(x_s) < x_s$, el lema 4.34 aplicado al ciclo

$$[x_t, f^{q-1}(x_s)][f^{q-1}(x_s), z][f^{q-1}(x_s), z][x_t, f^{q-1}(x_s)]$$

establece la existencia de un punto de periodo 3 de f . Si $f^{q-1}(x_s) = x_{s+1}$, podemos aplicar el lema 4.34 al ciclo

$$[z, x_{s+1}][x_t, x_{t+1}][x_s, x_{s+1}][z, x_{s+1}]$$

para obtener un punto de periodo 3 de f .

Procedemos suponiendo que $x_{s+1} < f^{q-1}(x_s)$. Si $k = \min\{1 \leq i \leq q - 1 : f^{q-1}(x_s) \leq f^i(x_s)\}$, entonces $x_{t+1} \leq f^{k-1}(x_s) < f^{q-1}(x_s)$, así que o bien $x_{s+1} \leq f^{k-1}(x_s) < f^{q-1}(x_s)$ o $x_{t+1} \leq f^{k-1}(x_s) \leq x_s$. Si $x_{s+1} \leq f^{k-1}(x_s) < f^{q-1}(x_s)$, podemos utilizar el lema 4.34 para el ciclo

$$[f^{k-1}(x_s), f^{q-1}(x_s)][z, f^{k-1}(x_s)][z, f^{k-1}(x_s)][f^{k-1}(x_s), f^{q-1}(x_s)]$$

para obtener un punto de periodo 3 de f . Si $x_{t+1} \leq f^{k-1}(x_s) \leq x_s < z < f^{q-1}(x_s)$, podemos elegir $u \in [x_t, x_{t+1}]$ tal que $f(u) = z$, tomamos $w \in [z, f^{q-1}(x_s)]$ con $f(w) = u$, y sea

¹⁰En el caso contrario en el que $x_{s+1} \leq x_t$, la prueba es similar.

$v \in [f^{k-1}(x_s), z]$ un punto tal que $f(v) = w$. Aplicando el lema 4.34 al ciclo $[u, v][z, w][u, v]$ y, para todo entero impar $n \geq 4$, al ciclo

$$[u, v] \overbrace{[z, w][v, z][z, w]}^{(n-2)/2} [u, v]$$

Concluimos así que f tiene puntos periódicos de todos los periodos pares. Por otro lado, sea $J_i = [z : f^i(x_s)]$ para $i = 0, 1, \dots, q-1$, donde $[a : b]$ denota el intervalo cerrado con a y b como puntos extremos. Para cualquier $n \geq m+1$, aplicamos el lema 4.34 al ciclo de longitud n $J_0 J_1 \dots J_{k-1} J_{q-1} [x_t, x_{t+1}] J \dots J J_0$, donde $J = [x_s, x_{s+1}]$, para confirmar la existencia de un punto de periodo n . \square

Ya podemos proceder, combinando (a), (b) y (c), y el lema 4.31, a demostrar el teorema de Sharkovsky.

Teorema 4.36. (Sharkovsky). *Supongamos que $f : I \rightarrow I$ es una función continua. Si f tiene un punto periódico de orden m , entonces f también tiene un punto periódico de orden n siempre que $m < n$ en el orden de Sharkovsky.*

Demostración. Comencemos probando la suficiencia del teorema haciendo uso de los resultados previos. Por (b) y (c), tenemos que $3 < 5 < 7 < \dots < 2 \cdot 3$. Si f tiene puntos de periodo $(2 \cdot m)$ con $m \geq 3$ e impar, entonces f^2 tiene puntos de periodo m . Por (b), f^2 tiene puntos de periodo $(m+2)$, que con el lema 4.31 implica que f tiene o bien puntos periódicos de orden $m+2$ o de periodo $2 \cdot (m+2)$.

Si f tiene puntos de periodo $(m+2)$, entonces por (b) f también tiene puntos de periodo $2 \cdot (m+2)$. En cualquier caso, f tiene puntos periódicos de periodo $2 \cdot (m+2)$. Por otro lado, por (c), f^2 tiene puntos periódicos de orden 6, y así, por el lema 4.31, f tiene puntos periódicos de orden $2^2 \cdot 3$. Ahora, si f tiene puntos de orden $2 \cdot m$ con $m \geq 3$ e impar, y si $k \geq 2$, entonces por el lema 4.31, $f^{2^{k-1}}$ tiene puntos de orden $2 \cdot m$. Se sigue de ahí que $f^{2^{k-1}}$ tiene puntos periódicos de orden $2 \cdot (m+2)$ y de orden $2^2 \cdot 3$. En vista del lema 4.31, f tiene puntos de orden $2^k \cdot (m+2)$ y de orden $(2^{k+1} \cdot 3)$.

Es más, al tener f puntos de orden $2^k \cdot (m+2)$, f^{2^k} tiene puntos periódicos de orden m . Por (b), f^{2^k} tiene puntos de orden 2^n siempre que $2^n > m$, así que por el lema 4.31, f tiene puntos periódicos de orden 2^{k+n} para todos los enteros n tales que $2^n > m$. Finalmente, si f tiene puntos de orden 2^i para algún entero $i \geq 2$, entonces $f^{2^{i-2}}$ tiene puntos de orden 4. Como consecuencia de (a), $f^{2^{i-2}}$ tiene puntos de orden 2, asegurando que f tiene puntos de orden 2^{i-1} . Esto prueba la suficiencia del teorema de Sharkovsky.

Para el recíproco, es suficiente con suponer que $I = [0, 1]$. Sea $T(x) = 1 - |2x - 1|$ la función tienda en I . Entonces para cualquier $k \geq 1$ la ecuación $T^k(x) = x$ tiene exactamente 2^k soluciones distintas en I . Se sigue que T tiene órbitas de orden k . Entre estas órbitas de periodo k , sea P_k una con el menor diámetro $\text{máx } P_k - \text{mín } P_k$. Para cualquier $x \in I$, sea

$$T_k(x) = \begin{cases} \text{mín } P_k & \text{si } T(x) \leq \text{mín } P_k, \\ \text{máx } P_k & \text{si } T(x) \geq \text{máx } P_k, \\ T(x) & \text{si } \text{mín } P_k \leq T(x) \leq \text{máx } P_k. \end{cases}$$

Es entonces fácil ver que T_k tiene exactamente una órbita de periodo k y ninguna órbita de periodo j para cualquier j cumpliendo $j < k$ en el orden de Sharkovsky.

Sea Q_3 cualquier órbita de periodo 3 de T con diámetro mínimo. Entonces $[\text{mín } Q_3, \text{máx } Q_3]$ contiene órbitas de periodo 6 de T . Si Q_6 es una con el diámetro más pequeño, entonces $[\text{mín } Q_6, \text{máx } Q_6]$ contiene órbitas de periodo 12 de T . Elegimos una, digamos Q_{12} , de diámetro mínimo y continuamos el proceso inductivamente. Sea $q_0 = \sup\{\text{mín } Q_{2^n \cdot 3} : n \geq 0\}$ y $q_1 = \inf\{\text{máx } Q_{2^n \cdot 2} : n \geq 0\}$. Sea $T_\infty(x) = q_0$ si $T(x) \leq q_0$, $T_\infty(x) = q_1$ si $T(x) \geq q_1$, y $T_\infty(x) = T(x)$ si $q_0 \leq T(x) \leq q_1$. Entonces, es fácil comprobar que T_∞ tiene puntos periódicos de orden 2^n para cada $n \geq 0$, pero no tiene puntos periódicos de ningún otro periodo. Esto establece la otra implicación en el teorema de Sharkovsky. \square

Anexo II: Conjuntos perfectos.

El presente anexo cubre la demostración de un teorema sobre conjuntos perfecto utilizado en la prueba del teorema 3.12 en el bloque de puntos periódicos. La prueba que aquí exponemos está basada en la desarrollada en [Rud2]. Comencemos recordando la definición de conjunto perfecto.

Definición 4.37. *Un conjunto Y es perfecto si es cerrado y todo punto $p \in Y$ es el límite de puntos $q_n \in Y$ con $q_n \neq p$.*

Teorema 4.38. *Todo conjunto perfecto no vacío es no numerable.*

Demostración. Sea $S \neq \emptyset$ un conjunto perfecto. Al consistir de puntos de acumulación, no puede ser un conjunto finito. Por lo tanto, o es infinito numerable o no numerable.

Supongamos que S es numerable y escribámoslo como:

$$S = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$

El intervalo $U_1 = (x_1 - 1, x_1 + 1)$ es un entorno de x_1 . Como x_1 es un punto de acumulación de S , hay infinitos elementos de S contenidos en U_1 .

Tomemos uno de estos elementos, digamos x_2 y tomemos un entorno U_2 de x_2 tal que $\overline{U_2} \subset U_1$ y $x_1 \notin \overline{U_2}$. De nuevo, x_2 es un punto de acumulación de S , así que el entorno U_2 contiene infinitos elementos de S .

Seleccionamos un elementos, digamos x_3 y tomemos un entorno U_3 de x_3 tal que $\overline{U_3} \subset U_2$, pero $x_1, x_2 \notin \overline{U_3}$.

De forma inductiva, encontramos conjuntos U_n y puntos x_n tal que

- $\overline{U_{n+1}} \subset U_n$,
- $x_j \notin U_n$ para todo $0 < j < n$,
- $x_n \in U_n$.

Ahora consideramos $V = \overline{U_n} \cap S$ que es un conjunto compacto por ser cerrado y acotado. También se cumple, por construcción, que

$$(\overline{U_{n+1}} \cap S) \subset (\overline{U_n} \cap S).$$

Por lo tanto, $V \neq \emptyset$. Ahora bien, ¿qué elemento de S debe pertenecer a V ? No puede ser x_1 , ya que $x_1 \notin \overline{U_2}$. No puede ser x_2 , ya que $x_2 \notin \overline{U_3}$ y así sucesivamente.

Luego, ninguno de los elementos $\{x_1, x_2, \dots\}$ puede estar en V . Pero $V \neq \emptyset$, llegando así a una contradicción.

Por lo tanto, S es no numerable. □

Anexo III: Declaración de Originalidad

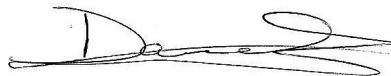
DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Daniel Nieves Roldán, autor del TFM "*Aspectos de dinámica topológica en funciones continuas del intervalo que conmutan*", bajo la tutela del profesor **Antonio Linero Bas**,

DECLARA

que el trabajo que se presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 21 de junio de 2018.



Fdo.: Daniel Nieves Roldán

Nota: La declaración firmada se adjunta al presente trabajo en el Anexo III.

Bibliografía

- [Ali1] Alikhani-Koopaei, A., *On common fixed and periodic points of commuting functions*, Internat. J. Math. and Math. Sci., **21**, (1998), 269-276.
- [Ali2] Alikhani-Koopaei, A., *A counterexample on common periodic points of functions*, Internat. J. Math. and Math. Sci., **21**, (1998), 823-827.
- [Ali3] Alikhani-Koopaei, A., *On the set of fixed points and periodic points of continuously differentiable functions*, Internat. J. Math. and Math. Sci., (2013), 1-5.
- [ALM] Alsedà, L., Llibre, J., Misiurewicz, M., *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, World Scientific, 1993.
- [Apo] Apostol, T.M., *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona, 1976.
- [Bax] Baxter, G., *On fixed points of the composite of commuting functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 851-855.
- [BaxJo] Baxter, G., Joichi, J.T., *On permutations induced by commuting functions, and an embedding question*, Math. Scand. **13** (1963), 140-150.
- [Ber] Bertram, E.A., *Polynomials which commute with a Tchebycheff polynomial*, Amer. Math. Monthly **68** (1971), 650-653.
- [Blo] Block, H.D., Thielman, H.P., *Commutative polynomials*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **2** (1951), 241-243.
- [BloCop] Block, L., Coppel, W.A., *One-Dimensional Dynamics*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1513, Springer, Berlin, 1992.
- [Bow] Bowen, R., *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. **470**, Springer-Verlag, Berlín 1975.
- [Boy1] Boyce, W.M., *Commuting functions with no common fixed point*, Trans. Amer. Math. Soc. **137** (1969), 77-92.

- [Boy2] Boyce, W.M., Γ -compact maps on an interval and fixed points, Trans. Amer. Math. Soc. **160** (1971), 87-102.
- [Can] Cano, J., Common fixed points for a class of commuting mappings on an interval, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 336-338.
- [CanLin1] Cánovas, J.S., Linero, A., On topological entropy of commuting interval maps, Nonlinear Anal. **51** (2002), 1159-1165.
- [CanLin2] Cánovas, J.S., Linero, A., On the dynamics of composition of commuting interval maps, J. Math. Anal. Appl. **305** (2005), 296-303.
- [Coh] Cohen, H., On fixed points of commuting functions, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 293-296.
- [CoHe] Coven, E.M., Hedlund, A., $\overline{P} = \overline{R}$ for maps of the interval, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), no.2, 316-318.
- [Cou] Cournot, A., *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, Hachette, Paris, 1838.
- [De1] DeMarr, R., Common fixed points for commuting contraction mappings, Pacific J. Math. **13** (1963), 1139-1141.
- [De2] DeMarr, R., A common fixed point theorem for commuting mappings, Amer. Math. Monthly **70** (1963), 535-537.
- [Dev] Devaney, R.L., *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1986.
- [Du] Du, B., A simple proof of Sharkovky's Theorem, Amer. Math. Monthly, **111** (2004), 595-599.
- [Fur] Furstenberg, H. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
- [Goo] Goodwyn, L.W., Some counter-examples in topological entropy, Topology **11** (1972) 377-385.
- [Gri] Grinč, M., On common fixed points of commuting triangular maps, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **47** (1999), 61-67.
- [GrSn] Grinč, M., Snoha, L', Jungck Theorem for triangular maps and related results, App. Gen. Topol. **1** (2000), 83-92.

- [Hu] Hu, H., *Some ergodic properties of commuting diffeomorphisms*, Ergodic Theory Dyn. Syst. **13** (1993) 73-100.
- [Hun] Huneke, J.P., *On common fixed points of commuting continuous functions on an interval*, Trans. Amer. Math. Soc. **139** (1969), 371-381.
- [Jac] Jachymski, J.R., *Equivalent conditions involving common fixed points for maps on the unit interval*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 3229-3233.
- [Jun1] Jungck, G., *Common fixed points for commuting and compatible maps on compacta*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 977-983.
- [Jun2] Jungck, G., *Common fixed points for compatible maps on the unit interval*, Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 495-499.
- [Kak] Kakutani, S., *Two fixed-point theorems concerning bicomact convex sets*, Proc. Imp. Acad. **14** (1938), 242-245.
- [Kel] Kelley, J.L., *General topology*, D. van Nostrand Co. Inc., Princeton, N.J., 1955.
- [KoSn] Kolyada, S.F., Snoha, L., *Some aspects of topological transitivity - a survey*, Grazer Math. Ber. **334** (1997) 3 -35.
- [KoSn1] Kolyada, S.F., Snoha, L., *Topological entropy of nonautonomous dynamical systems*, Random Comput. Dyn. **4** (1996) 205-233.
- [Lin] Linero, A., *Common fixed points for commuting Cournot Maps*, Real Analysis Exchange, **28** (2002), 121-144.
- [Mar] Markov, A., *Quelques théorèmes sur les ensembles abéliens*, Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) **10** (1936), 311-314.
- [Mis] Misiurewicz, M., Szlenk, W., *Entropy of piecewise monotone mappings*, Studia Math. **67** (1980) 45-63.
- [Mit] Mitchell, T., *Common fixed-points for equicontinuous semigroups of mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 146-150.
- [Rai] Raith, P., *Two commuting interval maps with entropy zero whose composition has positive topological entropy*, Grazer Math. Ber. **346** (2004), 351-354.
- [Rit] Ritt, J.F., *Permutable rational functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **25** (1923), 399-448.
- [Rud1] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 2nd Edition, 1974.

- [Rud2] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, Inc, New York, 3rd Edition, 1976.
- [Sch] Schwarts, A.J., *Common periodic points of commuting functions*, The Michigan Mathematical Journal, **22** (1965), 353-355.
- [Sei] Seider, G.T., *The topological entropy of homeomorphisms on one-dimensional continua*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990).
- [Sha] Sharkovsky, A.N., Kolyada, S.F., Sivak, A.G., Fedorenko, v.v., *Dynamics of One-Dimensional Maps*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.
- [Shi] Shields, A.L., *On fixed points of commuting analytic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 703-706.
- [Smi] Smítal, J., *Chaotic functions with zero topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986) 269-282.
- [Ste] Steele, T.H., *A note on periodic points and commuting functions*, Real Analysis Exchange, **24** (1998) 781-789.
- [Sun] Sun, T., Xi, H., Chen, Z., *On topological entropy of commuting tree maps*, Nonlinear Anal. **69** (2008), 167-170.