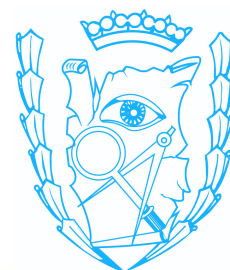




UNIVERSIDAD DE MURCIA  
Facultad de Matemáticas



Trabajo Fin de Máster

# El teorema del elipsoide de John

Eduardo Lucas Marín

Máster en Matemática Avanzada

**2017/18**

Foto de portada: **Modelo del sistema solar de Kepler basado en los sólidos platónicos.**  
Fuente: Johannes Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1595.

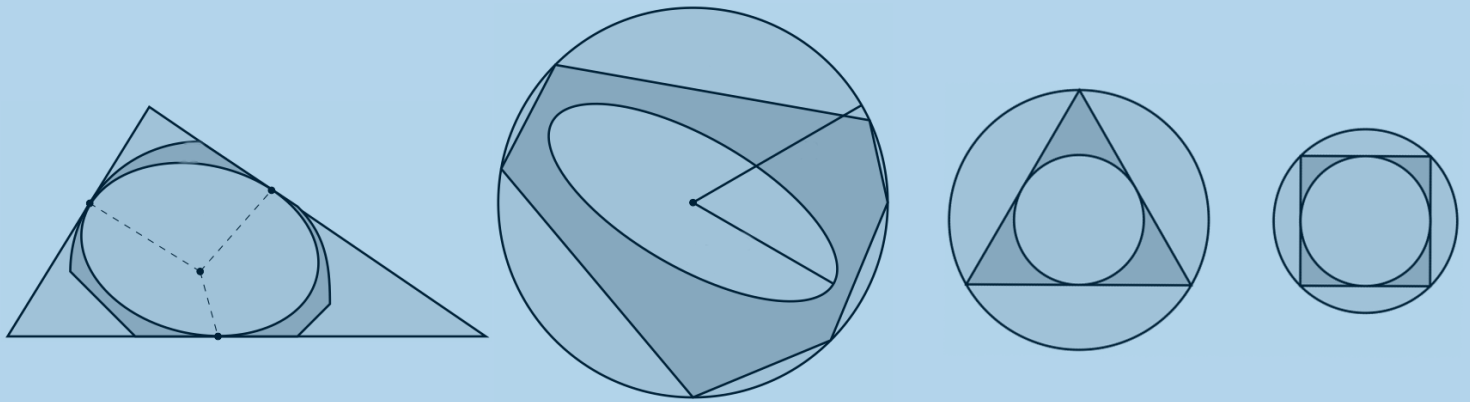
### **Declaración de originalidad**

Eduardo Lucas Marín, autor del TFM "El teorema del elipsoide de John", bajo la tutela de D.<sup>ª</sup> María de los Ángeles Hernández Cifre y la cotutela de D. Jesús Yepes Nicolás, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 25 de junio de 2018



Firmado: Eduardo Lucas Marín

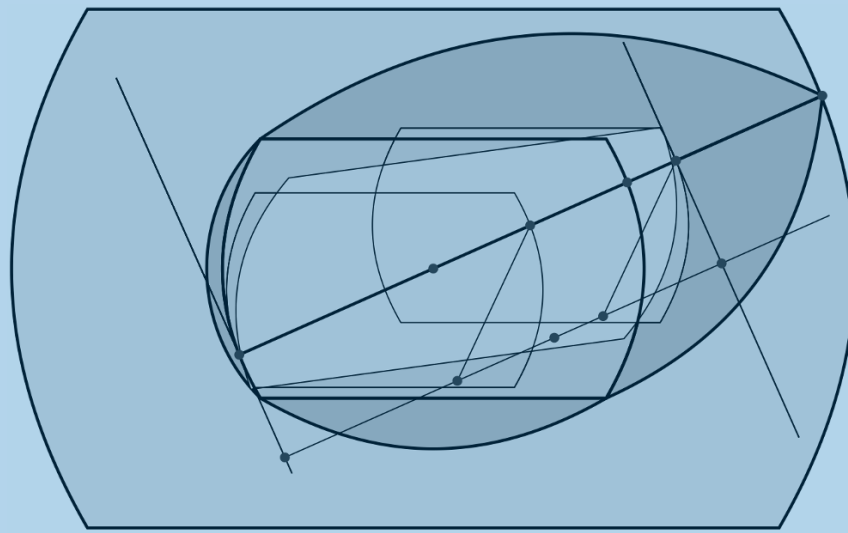


# Índice general

Elipsoides de John (véase la definición 2.10) y herramientas para las pruebas del teorema 2.9 y del lema 2.19.

<b>Resumen</b> .....	<b>5</b>
<b>1 Introducción</b> .....	<b>9</b>
<b>2 El teorema del elipsoide de John</b> .....	<b>15</b>
<b>2.1 Desarrollo histórico</b>	<b>15</b>
<b>2.2 Existencia y unicidad del elipsoide de máximo volumen</b>	<b>20</b>
<b>2.3 Caracterización de los puntos de contacto</b>	<b>22</b>
2.3.1 Preliminares .....	23
2.3.2 Caracterización .....	25
2.3.3 Casos particulares .....	29
2.3.4 Elipsoides de cuerpos duales .....	33
<b>2.4 Acotación de la aproximación</b>	<b>34</b>
<b>2.5 Anillos elipsoidales</b>	<b>35</b>
<b>3 Extensiones del teorema de John</b> .....	<b>39</b>
<b>3.1 Dimensión arbitraria del elipsoide inscrito</b>	<b>39</b>
<b>3.2 Generalización del cuerpo convexo que aproxima</b>	<b>44</b>
3.2.1 Algunas discusiones previas .....	45
3.2.2 Aproximación por cuerpos convexos centralmente simétricos .....	47
3.2.3 Conexión con la distancia de Banach-Mazur entre espacio normados .....	50

<b>3.3</b>	<b>Generalización del volumen a otros funcionales</b>	<b>56</b>
3.3.1	Algunas herramientas previas . . . . .	56
3.3.2	Existencia y unicidad . . . . .	59
3.3.3	Caracterización de los puntos de contacto . . . . .	65
3.3.4	Extensión a quermassintegrales . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Aplicaciones</b> . . . . .	<b>71</b>
<b>4.1</b>	<b>Acotación de la razón de volumen</b>	<b>71</b>
4.1.1	Resultados previos . . . . .	71
4.1.2	Hallando los cuerpos maximales . . . . .	73
<b>4.2</b>	<b>Una desigualdad isoperimétrica inversa</b>	<b>77</b>
4.2.1	Evolución histórica . . . . .	77
4.2.2	Herramientas previas . . . . .	78
4.2.3	Invirtiendo la desigualdad . . . . .	79
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>81</b>
	<b>Índice de figuras</b> . . . . .	<b>83</b>
	<b>Índice alfabético</b> . . . . .	<b>85</b>



## Resumen

Envoltura de cuerpos convexos mediante cuerpos homotéticos centralmente simétricos, acotación de la razón de homotecia (véase el teorema 3.6).

El teorema del elipsoide de John es un resultado fundamental de aproximación en geometría convexa que ha engendrado una fértil investigación y del que se derivan importantes consecuencias en múltiples disciplinas matemáticas. Si designamos por *cuerpos convexos* a los conjuntos compactos convexos de  $\mathbb{R}^n$ , el objeto fundamental de estudio en este contexto son los elipsoides de máximo volumen contenidos en un cuerpo convexo, y simétricamente, los elipsoides de mínimo volumen que contienen a un cuerpo convexo. Como los resultados son completamente duales, nos referiremos a menudo a “elipsoides óptimos” cuando las afirmaciones se apliquen igualmente a sendos casos.

El resultado original, fruto de la unión del trabajo de varios autores, puede ser desgranado en tres partes marcadamente distinguidas. En primer lugar, que dichos elipsoides óptimos siempre existen y son únicos, algo que, observemos, no se tiene por ejemplo con las bolas, siendo en consecuencia la variabilidad añadida del elipsoide la que permite asegurar la unicidad. En segundo lugar, una caracterización precisa de los puntos de contacto entre las fronteras de un cuerpo convexo y de sus elipsoides óptimos. Y en tercer lugar, una acotación finita de la razón homotética necesaria para dilatar el elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo para que pase a contenerlo. Nuevamente, es fácil ver que dicha cota finita no puede obtenerse en el caso de las bolas.

Los resultados anteriores tienen numerosas generalizaciones y aplicaciones, y hemos escogido desarrollar algunas de las más representativas. Podemos destacar dos usos particularmente habituales de dichos resultados. Por un lado, dado que la caracterización de puntos de contacto se realiza en el caso en que el elipsoide óptimo es una bola, y todos los elipsoides pertenecen a la misma clase de equivalencia afín, es habitual, dado un cuerpo convexo cualquiera, escoger su imagen o posición afín tal que su elipsoide óptimo es una bola. Esto no sólo permite hacer uso de la caracterización, sino que, subyacentemente, se traduce en que dicha posición es la “más redondeada” o “menos degenerada” del cuerpo en cuestión, lo que proporciona un escenario ideal en numerosos casos que comentaremos. En especial, cabe destacar la inversión de la desigualdad isoperimétrica, quizá una de las consecuencias más renombradas de los resultados de John. Por otro lado, la acotación de la razón homotética facilita una aproximación sencilla de un cuerpo convexo arbitrario y su volumen por medio de un objeto mucho más asequible, como es un elipsoide, algo que nuevamente da lugar a aplicaciones interesantes. Podemos destacar en este caso la acotación de la familia de espacios normados con respecto a una distancia que definiremos con precisión. Más adelante entraremos un poco más en detalle en estas cuestiones.

Vamos a sintetizar y organizar someramente los resultados del trabajo para dar una idea general del mismo, así como para que sirva de referencia inicial. Dedicamos el primer capítulo, como es habitual, a introducir algunos de los fundamentos de geometría convexa necesarios para seguir con comodidad el trabajo. Naturalmente, esto se hace conveniente por dos razones: en primer lugar por tratarse algunos de éstos de conocimientos no presentes en el grado de matemáticas, y en segundo, para fijar los conceptos y la notación en lo que resta de memoria. Destaca especialmente la introducción de algunas de las familias de cuerpos convexos más relevantes, que a menudo componen las ilustraciones de los resultados y los contraejemplos empleados. Por otro lado, introduciremos la suma de Minkowski, una operación de conjuntos consistente en tomar la suma vectorial de sus elementos, y veremos algunas de las bondades de dicha operación, cualidades que serán fundamentales para su manejo. Tras presentar algunas descripciones precisas de los elipsoides, así como sus correspondientes expresiones para el volumen, concluiremos comentando algunas resultados sobre el soporte de cuerpos convexos. Entenderemos que un hiperplano soporta un cuerpo cuando interseca con él y lo deja contenido en uno de los semiespacios que determina.

El segundo capítulo tiene por objetivo presentar los resultados centrales del trabajo. Comenzaremos realizando un breve recorrido histórico en la sección 2.1, prestando especial atención al artículo original de John. No incluiremos demostraciones en esta parte, ya que más adelante desarrollaremos un entramado teórico más moderno que nos permitirá abordar la prueba de los resultados de manera más unificada y cómoda. El artículo de John tenía por objetivo extender el método de los multiplicadores de Lagrange al caso en que disponemos de una cantidad arbitraria (posiblemente infinita) de restricciones que, además, son desigualdades, en lugar de las igualdades clásicas del método ordinario. Esta extensión permitió a John formular un problema de optimización apropiado en el espacio de elipsoides de  $\mathbb{R}^n$ , que como veremos, puede identificarse con  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ . De la solución de este problema que proporciona el método de los multiplicadores extendido se desprende una propiedad de estructura de los puntos de contacto entre el cuerpo y su elipsoide óptimo, y con un razonamiento adicional, la acotación de la razón homotética anteriormente mencionada. Observemos que la unicidad de dicho elipsoide, si bien asumida en ocasiones por John, fue demostrada algo más tarde por otros autores, como ya comentaremos. Por otro lado, tuvieron que pasar varias décadas hasta que la implicación recíproca, y por tanto, la caracterización completa de los puntos de contacto, fuera demostrada explícitamente y publicada, en este caso, por Ball.

Tras esto pasaremos en la sección 2.2 a demostrar la existencia y unicidad del elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo convexo en el teorema 2.9. Para la existencia presentaremos varias herramientas previas, incluyendo un resultado fundamental en geometría convexa, el teorema 2.7 de selección de Blaschke, que se traduce en que el espacio de cuerpos convexos equipado con la métrica de Hausdorff (definición 2.6) es localmente compacto. Un argumento de compacidad, que será necesario afinar con el resultado anterior para poder afirmar que los límites tratados son elipsoides, culminará la prueba. Por otro lado, para la unicidad será también preciso explotar la estructura afín del espacio de cuerpos convexos que proporciona la suma de Minkowski, que junto con una desigualdad de determinantes de Minkowski (proposición 2.5), implicará el resultado.

En la sección 2.3 desarrollamos posiblemente el resultado más relevante de John, la caracterización de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo  $K$  y el único elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ . Ésta se lleva a cabo en el caso en que dicho elipsoide es la bola unidad  $B_n$  de  $\mathbb{R}^n$ , pudiendo entonces recuperar el resultado general sin más que aplicar una transformación afín apropiada. Identificaremos los elipsoides de  $\mathbb{R}^n$  con las matrices simétricas definidas positivas, que a su vez podemos identificar con un subconjunto  $\mathcal{P}^n$  de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ . Es aquí donde entra en juego la ingeniosa idea de Gruber que permitió probar estos resultados, así como muchos otros similares, de forma unificada y eficaz. Ésta consiste en considerar en  $\mathcal{P}^n$  subconjuntos apropiados, e introduciendo una métrica ligeramente distinta de la euclídea en  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  (definición 2.13), hacer uso de las propiedades de separación entre cuerpos convexos, estudiar sus normales, etc. Los teoremas 2.16, 2.17 y 2.18 reflejan los resultados finales.

Resultará que  $\mathcal{P}^n$  es un cono convexo en  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ , y el subconjunto  $\mathcal{P}_1^n$  de  $\mathcal{P}^n$  dado por las matrices con determinante mayor o igual que 1 es a su vez un conjunto estrictamente convexo y con frontera diferenciable tal que la identidad es un vector normal al mismo. Considerando entonces el conjunto  $E$

de elipsoides contenidos en  $K$ , llegaremos a la conclusión de que el hecho de que  $B_n$  sea el elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$  es equivalente a que los conjuntos  $E$  y  $\mathcal{P}_1^n$  se pueden separar, y sus fronteras intersecan únicamente en la identidad. Veremos que esto es, a su vez, equivalente a la existencia de unos ciertos puntos de contacto  $\{u_i\}_{i=1}^m$  entre las fronteras de  $K$  y del elipsoide, y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ , con  $n \leq m \leq n(n+1)/2$ , tales que se verifica

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n, \quad (1)$$

donde la primera condición puede además eliminarse en el caso en que  $K$  sea centralmente simétrico. Es sencillo comprobar (véase la observación de la página 19) que la segunda propiedad se traduce en que los  $u_i$  generan  $\mathbb{R}^n$  y, además, se comportan de forma bastante similar a una base ortonormal “ponderada”, por cuanto se puede representar el producto escalar y la norma euclídea como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle \langle y, u_i \rangle \quad \text{y} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle^2. \quad (2)$$

Explotaremos la caracterización anterior para calcular los elipsoides óptimos en casos de cuerpos sencillos, como el cubo o el tetraedro  $n$ -dimensional (véanse los corolarios 2.20 y 2.21). Tras esto, relacionaremos los elipsoides óptimos con la noción de dualidad en geometría convexa (véase la definición 2.22), que tiene importantes paralelismos con diversas nociones de dualidad en otras ramas matemáticas, y probaremos en el teorema 2.23 que la bola unidad es el elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo convexo si y sólo si también es el elipsoide de mínimo volumen conteniendo a su dual.

Terminaremos con los resultados centrales demostrando que el elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo, dilatado por un factor de  $n$ , pasa a contener al mismo. Veremos que esta cota puede refinarse a  $\sqrt{n}$  en el caso en que tratemos con cuerpos centralmente simétricos, y comprobaremos que ambas cotas son óptimas para todo  $n$  por cuanto se alcanzan, respectivamente, en el tetraedro regular y en el cubo (véanse los corolarios 2.24 y 2.25).

Daremos remate presentando una interesante noción altamente relacionada, sin demostraciones, a fin de redondear el capítulo. Se trata de unificar sendos elipsoides óptimos, y considerar un anillo elipsoidal (definición 2.26), es decir, un par de elipsoides homotéticos tales que el primero está contenido en un cuerpo y el segundo lo contiene. Veremos en el teorema 2.28 que la caracterización de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo y un anillo elipsoidal óptimo es análoga a aquélla ya estudiada. La unicidad, no obstante, no se tiene en general en este caso, aunque veremos que sí ocurre “casi siempre”, en el sentido de categorías de Baire que precisaremos en la sección 2.5.

De cara a extender los resultados, surgen de manera lógica varias direcciones de exploración razonables. En primer lugar, estudiamos en la sección 3.1 qué sucede al considerar elipsoides degenerados, es decir, elipsoides  $k$ -dimensionales en  $\mathbb{R}^n$  con  $k < n$ , cuestión estudiada por Ball. Para esto será conveniente reformular la definición de elipsoide a emplear, a fin de poder generalizar con comodidad la dimensión. No obtendremos en este caso una caracterización de los puntos de contacto, sin embargo, en el teorema 3.1 acotaremos el volumen  $k$ -dimensional máximo de un elipsoide  $k$ -dimensional contenido en un cuerpo convexo, viendo además que dicha cota es óptima. Este resultado se extiende con comodidad al caso general, y además, permite obtener una interesante cota del diámetro de un cuerpo convexo, que queda reflejada en el corolario 3.4. Naturalmente, este teorema de Ball explota las propiedades (1) y (2).

En segundo lugar, como los elipsoides son las imágenes afines de la bola unidad, es razonable preguntarse por una adaptación del resultado cuando se sustituye la bola por otro cuerpo. Imponiendo la restricción de que dicho cuerpo sea centralmente simétrico, estudiamos también esta cuestión en la sección 3.2 siguiendo la línea abierta por Lassak. Comenzamos con un breve recorrido histórico de aproximación de cuerpos convexos, para dar paso en el teorema 3.6 al resultado central de la sección. En éste, veremos que si denotamos por  $\tilde{C}$  a la imagen afín de un cuerpo convexo centralmente simétrico  $C$  de máximo volumen contenida en un cuerpo  $K$ , entonces  $K \subset (2n-1)\tilde{C}$ . Obtenemos así una generalización de la

cota  $n$  que proporcionan los resultados de John en el caso en que  $C = B_n$ , que al igual que ésta, resulta ser óptima, pues se alcanza en un ejemplo concreto que desarrollamos en el teorema 3.7.

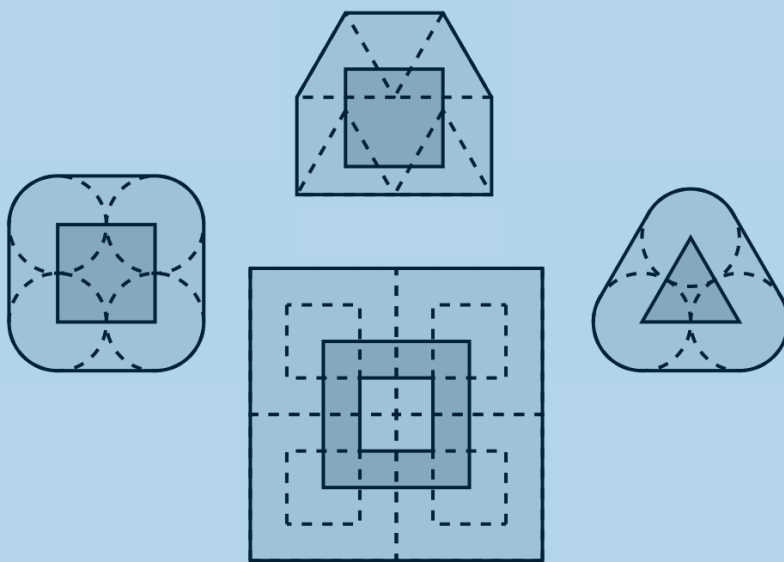
Esta sección tiene una conexión muy interesante con la teoría de espacios normados que comentados en el apartado 3.2.3. Concretamente, podemos introducir una distancia alternativa a la de Hausdorff en el espacio de cuerpos convexos, la distancia de Banach-Mazur (definición 3.8), que se puede entender como la menor razón homotética necesaria para envolver un cuerpo con dos copias homotéticas de otro, salvo transformaciones afines. Como las bolas unidad de los espacios normados son cuerpos convexos centralmente simétricos, si reducimos nuestro estudio a dichos cuerpos, podemos reformular la distancia de Banach-Mazur en el contexto de comparar espacios normados (véase la definición 3.12), y la simetría central nos permite sustituir las transformaciones afines por lineales. Los resultados de John implican entonces que con esta métrica, todo espacio normado dista del euclídeo a lo sumo  $\sqrt{n}$ . Se puede comprobar que, en consecuencia, el conjunto de clases de isometrías de espacios normados de dimensión  $n$ , dotado de la métrica de Banach-Mazur, es un espacio métrico compacto que se denomina habitualmente como *compacto de Banach-Mazur*. Finalizamos la conexión presentando, sin demostración, algunos de los resultados más relevantes relativos a dicho compacto.

Finalmente, la tercera y última extensión que hemos presentando consiste en sustituir el funcional volumen por otros funcionales relacionados. Como vemos, todas estas generalizaciones son bastante naturales. Estudiaremos en detalle el problema de hallar los elipsoides de mínima área de superficie (véase la definición 3.17) conteniendo a un cuerpo convexo, tema investigado por Gruber. La prueba de los resultados centrales de esta sección, el lema 3.22 y los teoremas 3.23, 3.24 y 3.25, es en este caso bastante más elaborada que en el caso del volumen, y será preciso introducir varias potentes herramientas previas para acometerla. Sin embargo, la idea fundamental es nuevamente la misma que en la demostración moderna que hemos presentado para el caso del volumen, la de introducir una métrica en el espacio de elipsoides, estudiar diversos subconjuntos del mismo, y en especial, separarlos. De dicha separación se siguen las condiciones de unicidad, así como la caracterización de los puntos de contacto. Resultará que dicha caracterización, si bien ha de afinarse, coincide esencialmente con el caso del volumen. Finalizaremos la sección extendiendo el resultado a unas generalizaciones de los funcionales volumen y área de superficie, conocidas como quermassintegrales (definición 3.29).

Terminamos el trabajo presentando dos aplicaciones sucesivas de los resultados de John. En primer lugar, podemos preguntarnos por la bondad de la aproximación de un cuerpo mediante su elipsoide de máximo volumen contenido en el mismo, estudiando para ello la razón entre sus volúmenes, cuestión investigada por Ball y desarrollada en la sección 4.1. La cota homotética de los resultados de John implica que esta razón está acotada, pero si bien aquélla era óptima, no ocurre así en este caso. Probaremos que los cuerpos que maximizan la razón de volumen (definición 4.1) son el tetraedro regular en el caso general, y el cubo en el caso centralmente simétrico (véanse los teoremas 4.5 y 4.6, respectivamente). Por tanto, esto refuerza la concepción de dichos cuerpos como los “más complicados” de aproximar mediante elipsoides. La clave para estos resultados, amén de los resultados de John y, en especial, de (1) y (2), será también explotar la desigualdad de Brascamp-Lieb (teorema 4.4), una desigualdad que generaliza otras muchas conocidas, incluyendo por ejemplo la de Hölder.

Daremos remate al trabajo presentando quizá la aplicación más reconocida de los resultados de John y Ball, una inversión de la clásica desigualdad isoperimétrica, algo investigado por Ball y que desarrollaremos en la sección 4.2. Es fácil ver que dicha desigualdad no se puede invertir como tal, por cuanto se pueden obtener cuerpos con volumen fijo y área de superficie arbitrariamente grande, por ejemplo. Sin embargo, veremos que sí se puede si trabajamos módulo transformaciones afines. Es aquí donde considerar las imágenes afines de los cuerpos tales que sus elipsoides óptimos son bolas se hace crucial, pues tales imágenes son las que permiten llegar al resultado al ser, como anticipamos, las “más redondeadas”. La clave para esta aplicación, reflejada en el teorema 4.11, consiste en reducir el problema a comparar las razones de volumen, cuestión solucionada en la sección anterior. Para esto, es preciso explotar los resultados (1) y (2), así como una fórmula para calcular el área de superficie mediante una especie de derivada del volumen, conocida como la fórmula de Minkowski (proposición 4.9).





## Introducción

Suma de Minkowski de dos cuerpos convexos (véase la definición 1.5).

Vamos antes de comenzar a fijar brevemente ciertas notaciones y conceptos ya conocidos. De ahora en adelante,  $\bar{\cdot}$ ,  $\text{Int}(\cdot)$ ,  $\text{bd}(\cdot)$  denotarán respectivamente la clausura, el interior y la frontera topológica de un conjunto, y  $\text{vol}$  denotará el volumen  $n$ -dimensional del mismo, es decir, su medida  $n$ -dimensional de Lebesgue. Asimismo,  $\text{dim}$  denotará la dimensión de un conjunto, entendida como la dimensión del menor espacio afín que lo contiene. Podremos trabajar en general con volúmenes  $k$ -dimensionales en  $\mathbb{R}^n$ , que denotaremos por  $\text{vol}_k$ . Por otro lado, dados vectores  $u, v \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle u, v \rangle = u^T v$  será el producto escalar euclídeo en  $\mathbb{R}^n$ , y  $\|x\|$  la norma euclídea. Como es habitual,  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  representará el conjunto de matrices cuadradas reales invertibles de orden  $n$ .

**Definición 1.1** Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es **convexo** si para todo  $x_0, x_1 \in S$  y  $\lambda \in [0, 1]$  se tiene  $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1 \in S$ . Es además **estrictamente convexo** si  $x_\lambda \in \text{Int}(S)$  para  $\lambda \in (0, 1)$ , es decir, si la frontera de  $S$  no contiene segmentos.

Dados puntos  $\{x_i\}_{i=1}^m$  y escalares  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  con  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  y  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ,  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$  es una **combinación convexa** de  $\{x_i\}_{i=1}^m$ . Asimismo, dado  $S \subset \mathbb{R}^n$  cualquiera, denotaremos por  $\text{conv}(S)$  a la **envoltura convexa** de  $S$ , que se puede caracterizar como el menor convexo que contiene a  $S$ , o bien la intersección de todos los convexos que contienen  $S$ , o bien el conjunto de todas las combinaciones convexas de elementos de  $S$  (véase, e.g., [Gru07, Lemma 3.1]).

Por interés, se puede hacer una interpretación física de este último concepto que se remonta, al menos, a Gauss. La envoltura convexa de  $\{x_i\}_{i=1}^m$  es el conjunto de centros de gravedad de masas  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  colocadas en los puntos  $\{x_i\}_{i=1}^m$ .

Un refuerzo de la propiedad anterior nos la proporciona el archiconocido teorema de Carathéodory, que pasamos a enunciar sin demostración, la cual se puede consultar por ejemplo en [Gru07, Th. 3.1].

**Teorema 1.2 — Carathéodory.** Dado  $S \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv}(S)$  es el conjunto de combinaciones convexas de puntos afínmente independientes. Dicho de otro modo, todo punto de  $\text{conv}(S)$  es combinación convexa de a lo sumo  $n + 1$  puntos de  $S$ .

Será útil para los capítulos posteriores mencionar que el teorema de Carathéodory puede refinarse para conos convexos, es decir, conjuntos de la forma  $C = \text{pos}(S)$  donde  $S \subset \mathbb{R}^n$  es convexo y  $\text{pos}$  denota

la envoltura positiva, el conjunto de combinaciones lineales con coeficientes positivos de elementos de  $S$ . En este caso, la cota  $n + 1$  puede reducirse a  $n$ . Comenzamos ya definiendo algunas clases de objetos fundamentales para nuestro estudio.

**Definición 1.3** Representaremos por  $\mathcal{K}^n$  al conjunto de **cuerpos convexos** de  $\mathbb{R}^n$ , es decir, de conjuntos compactos y convexos. Asimismo,  $\mathcal{K}_0^n$  denotará a los cuerpos convexos simétricos respecto del origen.

En particular, denotaremos por  $B_n \in \mathcal{K}_0^n$  la bola unidad de  $\mathbb{R}^n$ . Dentro de los cuerpos convexos tienen especial relevancia los polítopos o poliedros, conjuntos que obtenemos intersecando una cantidad finita de semiespacios, siempre y cuando esta intersección sea acotada. Si denotamos por  $v_i$  a los vectores normales a las caras de un polítopo  $P$ , es decir, a los normales a los correspondientes hiperplanos, entonces escogiendo los módulos apropiadamente podemos expresar el polítopo como

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leq 1, 1 \leq i \leq k\}. \quad (1.1)$$

Observemos que los polítopos también se pueden ver como las envolturas convexas de conjuntos finitos de puntos. Es conveniente introducir algunos de los ejemplos más comunes que nos servirán a lo largo del trabajo para, por ejemplo, ilustrar los resultados, o proporcionar los casos óptimos o maximales en algunos de ellos.

- Llamaremos *paralelotopos* a la generalización natural de los paralelogramos y los paralelepípedos, es decir, conjuntos obtenidos sumando  $n$  vectores linealmente independientes. Tienen la propiedad de que sus caras  $n - 1$  dimensionales son paralelas dos a dos. Son centralmente simétricos.
- Los *símplices* son la generalización de los triángulos y los tetraedros, la envoltura convexa de  $n + 1$  puntos afínmente independientes. Son los polítopos con el menor número de caras  $n - 1$  dimensionales, y toda pareja de vértices está conectada mediante una arista (cara 1-dimensional). En particular, el *símplice regular* es aquél en que todos los vértices son equidistantes entre sí y con respecto a un punto que llamaremos el *centro*, a pesar de que no es centro de simetría.
- Los *crosspolítopos* son la generalización del octaedro, y se obtienen tomando la envoltura convexa de  $n$  segmentos que se cortan en su punto medio. En particular, si todos los segmentos miden lo mismo y se cortan ortogonalmente, obtenemos el *crosspolítopo regular*. Son centralmente simétricos.

Observemos que el crosspolítopo regular puede entonces obtenerse, salvo rotaciones o dilataciones, como envoltura convexa de los vectores de la base canónica y sus opuestos  $\{\pm e_i\}_{i=1}^n$ . En dimensión 2 los paralelotopos y los crosspolítopos determinan la misma familia de cuerpos convexos, pero no es así en dimensiones superiores. Denotaremos de ahora en adelante por  $C_n = [-1, 1]^n$  el cubo unidad,  $C_n^* = \text{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$  el crosspolítopo regular (notación que se verá justificada en la sección 2.3.4) y  $S_n$  el símplice regular de lado 1.

**Definición 1.4** Denotaremos por  $\mathfrak{P}^n$  al conjunto de **polítopos** de  $\mathbb{R}^n$ , y análogamente  $\mathfrak{P}_0^n$  denotará el conjunto de polítopos simétricos respecto del origen.

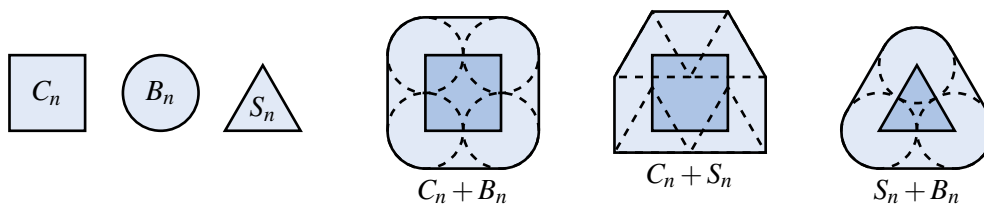
Será fundamental en el trabajo operar con cuerpos convexos, para lo cual introducimos la siguiente suma de conjuntos.

**Definición 1.5** Dados dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  se define su **suma de Minkowski** como la suma vectorial de sus vectores de posición,

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

La suma de Minkowski puede interpretarse geoméricamente como el resultado de colocar en cada punto de  $A$  (resp. de  $B$ ) el conjunto  $B$  (resp.  $A$ ). Algunos ejemplos se muestran en la figura 1.1. Es fácil

ver que los cuerpos convexos con la suma de Minkowski son un semigrupo abeliano con elemento neutro el origen, fallando únicamente la existencia de elemento simétrico.



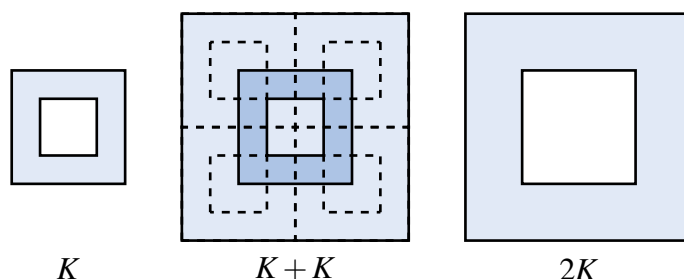
**Figura 1.1:** Ilustración de la suma de Minkowski de dos conjuntos

En la siguiente proposición estudiamos algunas bondades de la suma de cuerpos convexos respecto de operaciones como la unión, la intersección, el producto por escalares, o la aplicación de transformaciones lineales, a fin de agilizar su manejo en resultados posteriores. No presentamos la prueba por tratarse de comprobaciones rutinarias en todo caso, aunque sí hacemos énfasis en que la convexidad se trata de una propiedad fundamental para muchas de ellas, como ilustra la figura 1.2. De hecho, algunas de las propiedades siguientes caracterizan a los conjuntos convexos.

**Proposición 1.6** Sean  $K, L, M \in \mathcal{K}^n$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$  y  $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ . Se verifica:

- (I)  $(K \cup L) + M = (K + M) \cup (L + M)$ .
- (II)  $(K \cap L) + M = (K + M) \cap (L + M)$ .
- (III)  $(K \cup L) + (K \cap L) \subset K + L$ .
- (IV)  $\lambda K + \lambda L = \lambda(K + L)$ .
- (V)  $\lambda K + \mu K = (\lambda + \mu)K$ .
- (VI)  $A(K + L) = AK + AL$ .
- (VII)  $(A + B)K \subset AK + BK$ .

Si además  $K \cup L$  también es convexo, entonces se da igualdad en la tercera propiedad.



**Figura 1.2:** Contraejemplo para propiedades de la suma de Minkowski sin convexidad

Trabajaremos por otro lado con elipsoides, los cuales pueden ser definidos de varias formas. Se trata, por ejemplo, de las únicas hipersuperficies cuadráticas acotadas, o bien de las únicas hipersuperficies cuadráticas tales que toda sección no degenerada es elíptica. Para el propósito de nuestro estudio, no obstante, resulta más cómoda la siguiente definición, que pasaremos a refinar más adelante.

**Definición 1.7** Dados  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , el conjunto dado por

$$\begin{aligned} p + AB_n &= \{p + Ax : x \in B_n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|A^{-1}(x - p)\| \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : (x - p)^T (AA^T)^{-1} (x - p) \leq 1\} \end{aligned}$$

es un **elipsoide** de centro  $p$ .

! Observemos por tanto que para nosotros un elipsoide no será una hipersuperficie, proveniente de la deformación de la esfera unidad, sino un cuerpo convexo proveniente de la deformación de la bola unidad, de modo que podremos (y será fundamental) hablar de su volumen  $n$ -dimensional.

La última expresión de la definición anterior viene descrita por una función de la forma  $(x-p)^T B(x-p)$  donde, como es bien sabido,  $B = (AA^T)^{-1}$  es una matriz simétrica definida positiva. También se verifica el recíproco, ya que dada  $B$  una matriz simétrica definida positiva, ésta será diagonalizable por el teorema espectral, y por tanto existirá una matriz diagonal  $D$  y una matriz ortogonal  $U$  tales que  $B = UDU^T$ . Como los elementos de la diagonal de  $D$  han de ser positivos, pues son los valores propios de  $B$  que es definida positiva, podemos definir  $\sqrt{D}$  como la matriz diagonal que contiene las raíces de tales valores propios, y entonces  $B = (U\sqrt{D})(U\sqrt{D})^T$  donde la matriz  $U\sqrt{D}$  es no singular. Por tanto, el elipsoide descrito por  $(x-p)^T B(x-p) \leq 1$  es precisamente  $p + (U\sqrt{D})^{-1}B_n$ . Esto implica que podemos reducir nuestro estudio a elipsoides descritos por matrices simétricas definidas positivas, y por tanto tiene sentido la siguiente definición.

**Definición 1.8** Dados  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $B \in GL_n(\mathbb{R})$  una matriz simétrica definida positiva, el conjunto

$$\varepsilon(B, p) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x-p)^T B(x-p) \leq 1\}$$

es un **elipsoide** de centro  $p$ .

Con esta descripción, sabemos además que los vectores propios de  $B$  determinan la dirección de los ejes principales del elipsoide, y los valores propios asociados determinan los semiejes correspondientes. En efecto, esto se debe a que si  $B = UDU^T$  usando la notación anterior, entonces  $\varepsilon(B, p) = p + (U\sqrt{D})^{-1}B_n$  donde además  $U$  es una matriz ortogonal formada por los vectores propios por columnas. Por tanto, el elipsoide se obtiene aplicando a la bola  $U^{-1}$  (matriz de rotación) que lleva los ejes canónicos a los ejes dados por los vectores propios - que son ortonormales -, para luego, al aplicar  $\sqrt{D}^{-1}$ , escalar cada dirección precisamente por el recíproco de la raíz de cada valor propio, y finalmente trasladar al centro  $p$ . Vale la pena institucionalizar este resultado.

**Proposición 1.9** Sean  $\varepsilon(B, p)$  un elipsoide,  $\{u_i\}_{i=1}^n$  los vectores propios de  $B$  y  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  los valores propios asociados. Entonces, los ejes del elipsoide están en la dirección de los  $u_i$  y sus longitudes son, respectivamente,  $2/\lambda_i^2$ .

Pero no sólo podemos representar cualquier elipsoide en la forma de la definición 1.8 con  $B$  definida positiva y viceversa, sino que también podemos representar cualquier elipsoide en la forma de la definición 1.7 con  $A$  definida positiva y viceversa. En definitiva, podremos a partir de ahora manejar con soltura sendas definiciones asumiendo sin pérdida de generalidad que las matrices involucradas son definidas positivas. Vamos a probar este último resultado antes de continuar.

**Proposición 1.10** Todo elipsoide  $p + AB_n$  admite una representación  $p + BB_n$  con  $B$  definida positiva.

*Demostración.* Como  $AA^T$  es simétrica definida positiva podemos diagonalizarla,  $AA^T = U^T D U$ , donde  $U$  es una matriz ortogonal y  $D$  es diagonal con los valores propios (positivos) en ella, con lo que podemos definir  $\sqrt{D}$  como antes. Si definimos  $B = U^T \sqrt{D} U$ , es inmediato que sigue siendo simétrica y definida positiva (valores propios positivos), y se tiene  $AA^T = BB$  por ortogonalidad de  $U$ , luego  $A = BBA^{-T}$  y por tanto  $p + AB_n = p + B(BA^{-T})B_n$ . Dado que  $BA^{-T}$  es ortogonal, será entonces una matriz de rotación que por tanto deja invariante las bolas centradas en el origen, luego  $p + AB_n = p + BB_n$ . ■

Ahora que tenemos una descripción precisa de los elipsoides, vamos a ver cómo trabajar con sus volúmenes. Sabemos que el volumen de la bola unidad, y en consecuencia de cualquier elipsoide, no es expresable de manera general en términos de funciones elementales. Sin embargo, dado que a efectos de nuestro estudio sólo nos interesa comparar sus volúmenes, el siguiente conocido resultado facilita el problema.

**Proposición 1.11** Si  $S \subset \mathbb{R}^n$  tiene volumen finito y  $A \in GL_n(\mathbb{R}^n)$ , entonces  $\text{vol}(AS) = |\det(A)|\text{vol}(S)$ .

La demostración es una mera aplicación del teorema del cambio de variable. Una consecuencia inmediata de lo anterior es la siguiente expresión del volumen de un elipsoide.

**Corolario 1.12** El volumen del elipsoide  $p + AB_n$  es  $\det(A)\text{vol}(B_n)$ , y el volumen del elipsoide  $\varepsilon(B, p)$  es  $\det(B)^{-1/2}\text{vol}(B_n)$ .

*Demostración.* Para el primer caso, como el volumen es invariante por traslaciones, aplicando la proposición 1.11 tenemos

$$\text{vol}(p + AB_n) = \text{vol}(AB_n) = \det(A)\text{vol}(B_n).$$

Para el segundo, basta recordar que  $\varepsilon(B, p) = p + (U\sqrt{D})^{-1}B_n$ , y aplicar nuevamente la proposición 1.11, teniendo en cuenta que  $\det((U\sqrt{D})^{-1}) = \det((\sqrt{D})^{-1}) = \det(\sqrt{D})^{-1} = \det(B)^{-1/2}$ , ya que  $U$  es ortogonal y  $\det(D) = \det(B)$  con  $D$  diagonal. ■

Por tanto a la hora de comparar volúmenes de elipsoides bastará trabajar con los determinantes de las matrices que los definen. Vamos a terminar la introducción definiendo unos conceptos habituales en el contexto que nos ocupa. Por un lado, dado un cuerpo convexo, podemos considerar la posibilidad de “soportarlo” por un hiperplano “tangente” - en un sentido que ahora precisaremos - en una cierta dirección  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Observemos que tomando la componente de un punto cualquiera  $p$  en la dirección de un vector unitario  $u$  obtenemos precisamente la distancia de dicho punto al origen en la dirección de  $u$ , o dicho de otro modo, la distancia al origen del hiperplano de normal  $u$  que pasa por  $p$ , salvo el signo. Esto lleva a considerar la siguiente definición.

**Definición 1.13** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$  su **función soporte** es

$$h_K: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h_K(u) = \text{máx}\{\langle x, u \rangle : x \in K\}.$$

La función anterior puede definirse para conjuntos cualesquiera sustituyendo el máximo por un supremo y aceptando valores infinitos, o bien restringiendo el dominio. En cualquier caso, esto no nos afectará a nosotros, ya que trabajaremos únicamente con cuerpos convexos. Se sigue entonces la siguiente definición para un hiperplano soporte.

**Definición 1.14** Dados  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , el **hiperplano soporte** a  $K$  en la dirección de  $u$  es

$$H_K(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h_K(u)\},$$

y los **semiespacios soporte** en dicha dirección son

$$H_K^-(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq h_K(u)\},$$

$$H_K^+(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq h_K(u)\}.$$

Observemos que, implícitamente, estamos entendiendo que un hiperplano “soporta” un conjunto si interseca con él y lo deja en uno de los semiespacios que determina. Nuevamente, lo anterior puede definirse para conjuntos  $C \subset \mathbb{R}^n$  arbitrarios, aunque en tal caso la existencia no está garantizada.

Consideremos el haz de hiperplanos paralelos con normal  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Entonces  $h_C(u)$  es precisamente la menor distancia al origen de un hiperplano de normal  $u$  que deja a  $C$  y al origen en el mismo semiespacio (figura 1.3, izquierda y central). Claramente no tiene porqué ser único (figura 1.3, central) ni porqué intersecar en un único punto (nuevamente, figura 1.3, central).

Por otro lado, observemos que si no tenemos convexidad tampoco tiene porqué existir un hiperplano soporte pasando por todo punto de la frontera (figura 1.3, derecha). De hecho, se da el recíproco: un conjunto es convexo si y sólo si existe un hiperplano soporte pasando por todo punto de su frontera

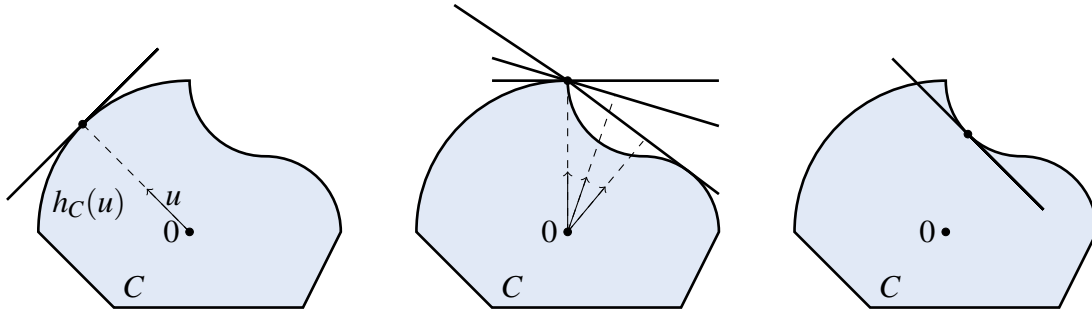


Figura 1.3: Patologías del hiperplano soporte

([Gru07, Th. 4.2]). Incluso más, un conjunto es un cuerpo convexo si y sólo si tiene un hiperplano soporte tanto en todo punto de su frontera como en toda dirección  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  ([Gru07, Th. 4.1+4.2]) (figura 1.4). De hecho, todo cuerpo convexo es la intersección de sus semiespacios soporte, como también se intuye por la figura 1.4, es decir,

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} H_K^-(u).$$

Este resultado puede consultarse en [Gru07, Cor. 4.1].

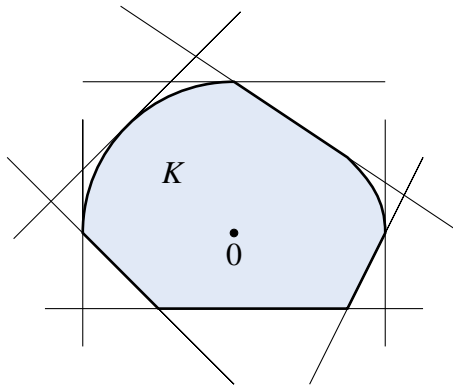
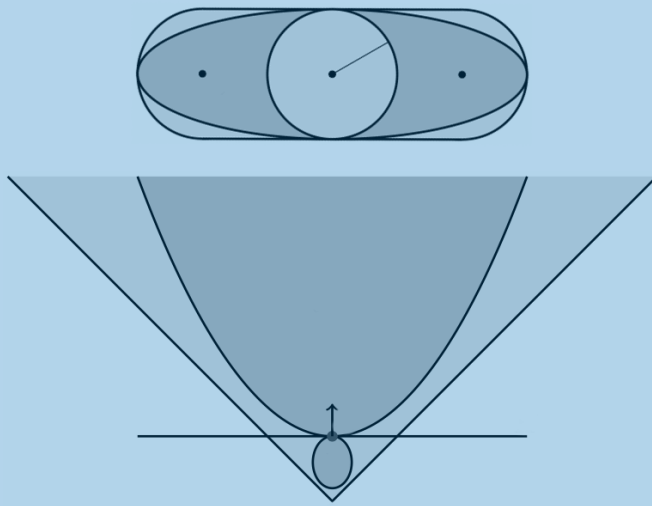


Figura 1.4: Cuerpo convexo como intersección de semiespacios soporte

Las funciones soporte son positivamente homogéneas de grado 1 y subaditivas, y es importante mencionar que al igual que todo cuerpo convexo tiene una función soporte, toda función soporte (es decir, verificando las dos propiedades anteriores) corresponde a un único cuerpo convexo. Esta biyección ([Gru07, Th. 4.3]) permite definir cuerpos convexos a partir de funciones soporte, y como todo lo que estamos presentando, será de utilidad en resultados posteriores.



## El teorema del elipsoide de John

Cono de matrices definidas positivas (véase la definición 2.11) y herramienta para la prueba de la unicidad del elipsoide de John (véase el teorema 2.9).

Vamos a presentar en este capítulo la teoría central del trabajo. Comenzaremos exponiendo brevemente los resultados originales desde un punto de vista histórico que se puede profundizar, por ejemplo, en [Hen12]. Prestaremos especial atención al artículo original [Joh48] de John, y al artículo [Bal92] de Ball que completó los resultados de John. Tras esto, presentaremos un entramado teórico más moderno, basado en ideas desarrolladas por Gruber en [Gru88], que nos permitirá demostrar los resultados de John de manera cómoda, siguiendo la línea de las pruebas de Gruber y Schuster en [GS05].

En particular, demostraremos la existencia y unicidad del elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo convexo, caracterizaremos los puntos de contacto entre el cuerpo y dicho elipsoide, y acotaremos la razón homotética necesaria para dilatar dicho elipsoide hasta contener al cuerpo. Presentaremos también la caracterización dual para elipsoides circunscritos, y completaremos el capítulo empleando dichas caracterizaciones para determinar los elipsoides óptimos para cuerpos sencillos, como el cubo, el crosspolitopo o el símplice regular. Finalmente, daremos remate relacionando dichos elipsoides con el concepto de dualidad de cuerpos, y presentando una interesante generalización: los anillos elipsoidales, consistentes en un par de elipsoides homotéticos tales que uno de ellos está contenido en un cuerpo y el otro lo contiene, noción estudiada también por Gruber en [Gru08].

Aparte de los artículos anteriormente citados, serán referencia general los libros [Gru07] y [Sch14], donde se pueden consultar todos los resultados necesarios relativos a geometría convexa que fundamentan en detalle todo el proceso. El desarrollo teórico que seguiremos en las demostraciones de los resultados de John también puede consultarse en [Gru07, Sec. 11.1] y en [AGM15, Sec. 2.1].

### 2.1 Desarrollo histórico

No podemos comenzar este capítulo sin revisar los primeros avances en esta materia y, en particular, sin desgranar el artículo original de Fritz John que abrió la veda a la investigación en este terreno concreto. Veremos cómo procedió por razones históricas y por el interés de los métodos empleados, aunque no desarrollaremos las demostraciones, ya que en este trabajo vamos a mostrar el desarrollo teórico que tuvo lugar posteriormente y que simplificó en gran medida el trabajo de John y sus contemporáneos.

La cuestión de la unicidad del elipsoide óptimo, ya sea el elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo o el elipsoide de mínimo volumen que contiene a un cuerpo, parece haber sido resuelta

originalmente en [Beh38] en el caso plano, y en [DLL57] y [Zag58] en el caso general. A menudo se dice que la unicidad en el caso del elipsoide que contiene al cuerpo la había probado previamente Löwner, sin publicar dicho resultado. En consecuencia, es frecuente encontrar en la literatura (véase, e.g., [Hen12] y sus referencias) los elipsoides óptimos denotados como *elipsoides de Löwner-John*, o bien denotar como *elipsoides de Löwner* a los que contienen al cuerpo y *elipsoides de John* a los contenidos en el cuerpo. También es común esta última nomenclatura cuando se quiere hacer énfasis en la caracterización de los puntos de contacto o en la acotación de la razón homotética, cuestiones que Löwner no estudió. Por esto último hablaremos en nuestro trabajo siempre de elipsoides de John.

El artículo original [Joh48] de John, que ha sido consultado en la recopilación [Joh85, pp. 543 - 560], tiene por objetivo extender el método de los multiplicadores de Lagrange para optimizar funciones al caso en que las restricciones son desigualdades, en lugar de las igualdades del método ordinario. Además, la cantidad de restricciones es arbitraria, y de hecho, es ahí donde reside la potencia del resultado. Esto hace más conveniente que el sistema de inecuaciones se modelice mediante una función donde una de las variables, que se mueve en un conjunto muy general y casi arbitrario, define el índice de la inecuación.

Con más precisión, consideremos  $S$  un conjunto compacto de un espacio métrico cualquiera, y definamos las restricciones de nuestro problema mediante una función  $G : \mathbb{R}^n \times S \rightarrow \mathbb{R}$  con derivadas continuas respecto a las variables reales. Denotemos por  $R \subset \mathbb{R}^n$  a la *región factible*, es decir, al conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^n$  para los cuales se dan las restricciones  $G(x, y) \geq 0$  para todo  $y \in S$ . Sea finalmente  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función con derivadas continuas, objeto de nuestro problema de optimización. En estas condiciones, John prueba primero una condición necesaria de extremo relativo ([Joh48, Th. 1]):

**Teorema 2.1 — Condición necesaria.** Con las condiciones y notación anteriores, si  $x^0 \in \mathbb{R}^n$  es un mínimo de  $F$  en  $R$ , entonces para cierto  $0 \leq s \leq n$  existen escalares positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , puntos  $y^1, \dots, y^s \in S$  y un escalar no negativo  $\lambda_0$  para los cuales la función

$$\phi(x) = \lambda_0 F(x) - \sum_{r=1}^s \lambda_r G(x, y^r),$$

que llamaremos el lagrangiano, tiene un punto crítico en  $x^0$ , es decir,  $d\phi(x^0) = 0$ . Además, en estos puntos las restricciones se dan con igualdad,  $G(x^0, y^r) = 0$  para todo  $r = 1, \dots, s$ .

Observemos que a pesar de existir una cantidad arbitraria de restricciones, podemos obtener la condición habitual del lagrangiano reducido a un conjunto finito de las mismas, para las cuales además obtenemos igualdad, y que será crucial para su aplicación a resultados posteriores. Tras esto, John prueba en [Joh48, Th. 2] una condición suficiente:

**Teorema 2.2 — Condición suficiente.** Con las condiciones y notación anteriores, si existen cierto  $s \in \mathbb{N}$  y ciertos escalares positivos  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , puntos  $y^1, \dots, y^s \in S$  y un escalar no negativo  $\lambda_0$  para los cuales la función

$$\phi(x) = \lambda_0 F(x) - \sum_{r=1}^s \lambda_r G(x, y^r)$$

tiene un punto crítico en  $x^0$ , y además la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial x_1}(x^0) & \frac{\partial G}{\partial x_1}(x^0, y^1) & \cdots & \frac{\partial G}{\partial x_1}(x^0, y^s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial x_n}(x^0) & \frac{\partial G}{\partial x_n}(x^0, y^1) & \cdots & \frac{\partial G}{\partial x_n}(x^0, y^s) \end{pmatrix}$$

tiene rango  $n$ , entonces  $x^0$  es un mínimo relativo de  $F$ , tanto en el conjunto determinado por la cantidad finita de restricciones  $G(x, y^r) \geq 0$  como en  $R$ .



En particular, de los dos teoremas anteriores se deduce que bajo buenas condiciones, un mínimo  $x^0$  de una función  $F$  bajo una cantidad arbitraria de restricciones es también mínimo relativo para una cantidad finita apropiada de las mismas.

Si bien este estudio era el cuerpo principal del artículo de John, las aplicaciones que a continuación propone fueron precisamente el origen de la materia que en este trabajo nos ocupa. En primer lugar, John prueba en [Joh48, sec. 3] la unicidad de la bola de mínimo volumen conteniendo a un compacto arbitrario. Vamos en este caso a delinear la prueba, ya que si bien los detalles son algo trabajosos, la idea es muy interesante y muestran el potencial del resultado anterior.

**Corolario 2.3** Dado  $S \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto compacto, la bola de mínimo volumen que contiene a  $S$  está unívocamente determinada.

*Demostración.* La existencia es inmediata por compacidad. Para probar la unicidad, formulamos un problema en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Observamos que podemos determinar una bola mediante un punto  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  donde las primeras  $n$  coordenadas representen el centro de la bola y la última el cuadrado del radio. Ahora, para cada  $y \in S$  podemos considerar la restricción

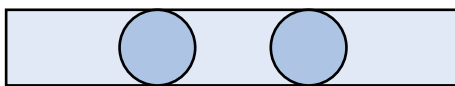
$$G(x, y) = x_{n+1} - \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \geq 0, \quad (2.1)$$

y entonces, es evidente que la región factible en  $\mathbb{R}^{n+1}$  determinada por las restricciones anteriores es precisamente el conjunto de bolas que contienen a  $S$ . Por tanto, como ya sabemos que existe cierta bola  $x^0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  que minimiza el volumen, podemos considerar la función  $F(x) = x_{n+1}$  definida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , que por alcanzar un mínimo en  $x^0$  estará en las condiciones del teorema 2.1. Manipulando entonces los resultados que el teorema garantiza, se obtiene para cualquier  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  arbitrario la igualdad

$$\sum_{r=1}^s \lambda_r G(x, y^r) = \lambda_0 \left( x_{n+1} - x_{n+1}^0 - \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 \right),$$

así como  $\lambda_0 > 0$ . De la expresión anterior se deduce que si  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  es otra bola de mínimo volumen que contiene a  $S$ , entonces al ser el miembro izquierdo nulo, también lo será el derecho, pero como  $\lambda_0 > 0$  y además  $x_{n+1} = x_{n+1}^0$  al ser ambas bolas de mínimo volumen, resulta que debe ser  $x_i = x_i^0$ , y por tanto, ambas son la misma bola. ■

! Es clave advertir que no se tiene un resultado análogo para bolas inscritas, aunque trabajemos con cuerpos convexos. En efecto, basta considerar un paralelepípedo como muestra la figura 2.1, que además tiene la bondad de ser centralmente simétrico, pero sin éxito.



**Figura 2.1:** La bola de máximo volumen contenida en un paralelepípedo no es única

Esta inconveniencia se resolverá al tomar los elipsoides como objetos de estudio, y la simetría central sí será un factor importante que reforzará los resultados. En este caso particular bidimensional, la figura 2.2 muestra la única elipse de área máxima contenida en el rectángulo.



**Figura 2.2:** La elipse de área máxima contenida en un rectángulo sí es única

Observemos cómo ha sido crucial la posibilidad de poder definir una cantidad infinita (no numerable) de restricciones para determinar nuestra región factible. Esto por sí solo abre la puerta a multitud de

aplicaciones. Otra observación importante es que las restricciones  $G(x^0, y^r)$  para las que se obtiene igualdad en el teorema 2.1 nos dicen que, de acuerdo a la expresión (2.1), los puntos  $y^r \in S$  son precisamente puntos de contacto de  $S$  con la bola circunscrita. Dicho de otro modo, la bola circunscrita viene caracterizada únicamente por  $s$  puntos de contacto con  $s \leq n + 1$ . Esto es importante ya que, como veremos más adelante, no sólo será algo recurrente, sino que además caracterizaremos tales puntos en el caso general.

En segundo lugar, y mediante un procedimiento mucho más trabajoso en el cual ya no entraremos, John prueba en [Joh48, sec. 4] un potente resultado que constituye a efectos de nuestro estudio la pieza clave de su trabajo. En esencia, describe los puntos de contacto entre un cuerpo y el elipsoide de mínimo volumen que lo contiene en el caso en que éste es una bola, y muestra además un primer resultado de aproximación. Sobre los puntos de contacto, John sólo dio la condición necesaria, pero no los caracterizó. La implicación recíproca, de demostración bastante más sencilla, era conocida y empleada pero sorprendentemente tardó en publicarse de forma explícita. Ball lo hizo en [Bal92, sec. 1], referenciando el caso simétrico probado apenas dos años antes en [Pel90]. Es interesante observar que John asume en ocasiones la unicidad del elipsoide óptimo, hablando de “el elipsoide de mínimo volumen que contiene a un cuerpo”, a pesar de que la prueba de dicha unicidad en el caso general no llegó hasta una década más tarde. Presentamos a continuación el resultado completo, incorporando todos los mencionados hasta ahora.

**Teorema 2.4** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  un cuerpo convexo. Entonces se verifica:

1. Existe un único elipsoide de mínimo volumen conteniendo a  $S$ .
2. Este elipsoide óptimo es la bola unidad si y sólo si existen ciertos puntos de contacto  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}(K) \cap \text{bd}(B_n)$  y ciertos escalares  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ , con  $n \leq m \leq \frac{n(n+3)}{2}$ , tales que
  - (a)  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$  y
  - (b)  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n$ , la identidad en  $\mathbb{R}^n$ .
3. Si denotamos a este elipsoide por  $p + AB_n$ , se tiene

$$p + \frac{1}{n} AB_n \subset K \subset p + AB_n.$$

Es más, si  $K$  es simétrico respecto de algún punto  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $K = c - K$ , entonces

$$p + \frac{1}{\sqrt{n}} AB_n \subset K \subset p + AB_n.$$

*Demostración.* Sobre la demostración hacemos únicamente unos comentarios, ya que todos estos resultados, como hemos mencionado, quedarán probados más adelante mediante un entramado teórico más moderno. Además, John prueba en [Joh48] el caso del elipsoide de mínimo volumen conteniendo  $K$ , mientras que nosotros probaremos el caso del elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ . Por supuesto, sendos argumentos pueden adaptarse a sendos casos, pero de este modo damos más riqueza al trabajo.

Mencionamos únicamente en este caso que si modelizamos un elipsoide en  $\mathbb{R}^n$  de centro  $p$  mediante la inequación  $(x - p)^T B (x - p) \leq 1$ , con  $B$  una matriz simétrica definida positiva, podemos entonces formular un problema de optimización en  $\mathbb{R}^{n(n+3)/2}$ . En efecto, al ser la matriz  $B$  simétrica, ésta queda determinada por  $n(n+1)/2$  coordenadas, y añadiendo las  $n$  coordenadas del centro  $p$ , tenemos las  $n(n+3)/2$  coordenadas que caracterizan a cada elipsoide. Trabajaremos pues con las restricciones dadas por  $G(x, y) = 1 - (x - p)^T B (x - p) \geq 0$ , donde  $p$  y  $B$  están determinados por  $y$  como se ha dicho antes.

En estas condiciones, aplicando el teorema 2.1 se deduce la existencia de a lo sumo  $n(n+3)/2$  puntos  $y^r \in K$  para los cuales las restricciones  $G(x, y)$  se dan con igualdad, es decir, puntos de contacto. Los  $\lambda_i$  son los obtenidos por aplicación del teorema, y resta entonces un proceso manipulativo para obtener las expresiones del enunciado. ■

Reformulando el último apartado, un cuerpo convexo  $K$  siempre está contenido entre dos elipsoides homotéticos de razón a lo sumo  $n$ , y si el cuerpo es simétrico la razón es a lo sumo  $\sqrt{n}$ . Tenemos por tanto una aproximación teórica por elipsoides de un cuerpo convexo arbitrario, con una cota del error cometido.

! Es interesante interpretar, como indica Ball en [Bal92], las dos condiciones del teorema anterior. La condición (a) nos dice que si vemos los  $\lambda_i$  como “pesos” que asignamos a la colección de puntos  $u_i$  de la esfera, entonces el centro de masas de los  $\lambda_i u_i$  es el origen, en particular, no puede ocurrir que todos los  $u_i$  estén únicamente en una semiesfera (al ser los  $\lambda_i > 0$ ). Intuitivamente, si los puntos de contacto estuvieran relativamente concentrados se podría entonces reducir el tamaño de la bola circunscrita, algo que cuadra con la intuición.

Por otro lado, es muy útil observar que la condición (b) se puede entender como que los  $u_i$  se comportan de forma similar a una base ortonormal, ya que podemos expresar

$$x = I_n x = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i.$$

En particular generan  $\mathbb{R}^n$ , y el producto escalar puede expresarse como

$$\langle x, y \rangle = x^T y = x^T \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T \right) y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^T u_i u_i^T y = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle \langle y, u_i \rangle,$$

y en consecuencia, la norma como

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle^2. \quad (2.2)$$

Además, el hecho de que generen  $\mathbb{R}^n$ , junto a que la matriz  $u_i u_i^T$  no representa más que la proyección ortogonal de rango 1 a la recta de dirección  $u_i$ , no hacen sino reforzar la concepción de que los puntos de contacto  $u_i$  están relativamente esparcidos en la esfera. En particular, que generen  $\mathbb{R}^n$  implica que no caen en un subespacio propio.

■ **Ejemplo 2.1** Vamos a ver que las cotas obtenidas en el corolario anterior son las mejores posibles. Para el caso general, basta considerar un **símplice**, y para el caso simétrico, un **cubo** o un **crosspolitopo** (véase la figura 2.3). Este último en dos dimensiones no es más que un cubo.

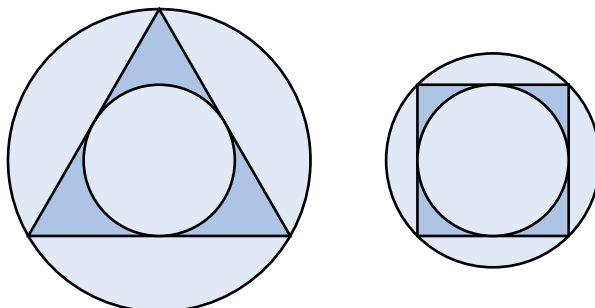


Figura 2.3: Elipsoides (bolas) de máximo/mínimo volumen en un símlice y un cubo.

Como vemos, el elipsoide de mínimo volumen que contiene al conjunto (y el de máximo volumen contenido en el mismo) en el caso del cubo y del crosspolitopo es una bola. Para el símlice no es así en general, salvo cuando éste es regular, como es el caso en este ejemplo para mayor simplicidad de cálculos. Es trivial comprobar que se dan las cotas del teorema 2.4 para el caso del cuadrado, ya que si el lado mide  $\ell$  entonces la diagonal mide  $\sqrt{2}\ell$ . Para el caso del triángulo no es sencillo en general, salvo el caso de nuestro ejemplo, ya que al ser equilátero basta usar que el incentro está a  $1/3$  de distancia de la base y  $2/3$  del vértice opuesto, lo cual lleva a que el circunradio es el doble que el inradio.

No estamos ahora en condiciones de probar que, efectivamente, éstos son los elipsoides óptimos en estos casos, pero lo estaremos más adelante, y volveremos sobre este ejemplo. ■

En resumen, tras este desarrollo, podemos decir que la idea fundamental del artículo de John consiste en reformular problemas como el que nos ocupa en este trabajo como problemas de optimización en dimensiones superiores, que además se pueden atacar mediante el método extendido de los multiplicadores que presenta en el mismo artículo.

! Es interesante observar que simplemente con bolas no podemos llegar a un resultado de aproximación similar al del teorema anterior, y por tanto, es la variabilidad añadida del elipsoide la que nos permite obtener unas cotas finitas en dicha aproximación. En efecto, basta nuevamente considerar el caso de un paralelepípedo. Si denotamos por  $R(K)$  al circunradio, es decir, al radio de la bola circunscrita a  $K$ , y por  $r(K)$  al inradio, es decir, al radio de una bola inscrita a  $K$ , es fácil ver, dilatando el paralelepípedo en una dimensión, que será imposible acotar  $R(K)/r(K)$ , como muestra la figura 2.4.

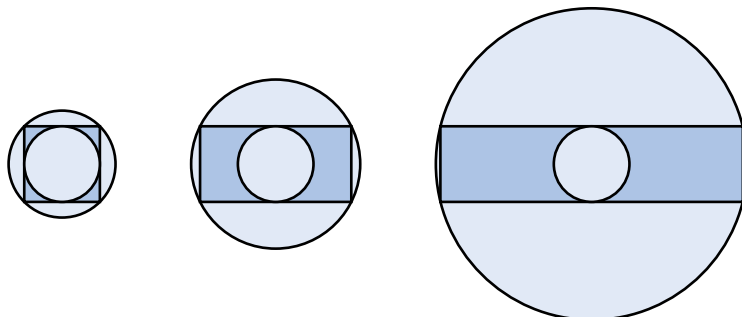


Figura 2.4: Bolas inscrita y circunscrita a paralelepípedos de razón no acotada.

## 2.2 Existencia y unicidad del elipsoide de máximo volumen

Vamos en las secciones siguientes a presentar unas demostraciones para los resultados comentados en la sección previa, que corresponden a un desarrollo teórico posterior a los artículos originales de John y sus contemporáneos. Comenzamos demostrando la existencia y unicidad de los elipsoides de máximo volumen contenidos en un cuerpo convexo, lo que correspondería al ítem 1 del teorema 2.4 de John. Para la prueba, conviene recordar que dado un elipsoide descrito por  $p + AB_n$ , su volumen viene dado por  $\det(A)\text{vol}(B_n)$ , mientras que si está descrito como  $\varepsilon(B, p)$ , su volumen viene dado por  $\det(B)^{-1/2}\text{vol}(B_n)$ , como probamos en el corolario 1.12.

Antes de presentar el teorema, vamos a establecer un resultado fundamental que nos dice que la función  $\det(\cdot)^{1/n}$  es cóncava para matrices definidas positivas, donde además la igualdad se puede caracterizar, algo que será crucial. Este es un resultado nada trivial, y eludimos su demostración para no divergir en exceso del tema. Sin embargo, conviene mencionar que se trata de un recurso abundantemente empleado.

**Proposición 2.5 — Desigualdad de determinantes de Minkowski.** Dadas  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices definidas positivas, se verifica

$$\det(\lambda A + (1 - \lambda)B)^{1/n} \geq \lambda \det(A)^{1/n} + (1 - \lambda) \det(B)^{1/n},$$

con igualdad si y sólo si  $B = \mu A$  para cierto  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Una prueba se puede consultar por ejemplo en [MM64, Th. 4.1.8]. Será conveniente inducir en  $\mathcal{K}^n$  una topología métrica, que emplearemos en lo que sigue, en particular, para poder estudiar la convergencia de sucesiones de elipsoides.

**Definición 2.6** Dados  $K, L \in \mathcal{K}^n$ , su **distancia de Hausdorff**  $d_H(K, L)$  es el menor  $\lambda > 0$  tal que  $K \subset L + \lambda B_n$  y  $L \subset K + \lambda B_n$ .

El siguiente resultado topológico fundamental en geometría convexa nos proporciona información importante acerca del espacio  $\mathcal{K}^n$  equipado con la métrica de Hausdorff.

**Teorema 2.7 — Teorema de selección de Blaschke.** Toda sucesión acotada  $(K_n)_n \subset (\mathcal{K}^n, d_H)$  admite una subsucesión convergente en  $(\mathcal{K}^n, d_H)$ .

Una prueba puede consultarse en [Gru07, Th. 6.3]. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, el teorema de selección de Blaschke implica que todo entorno acotado de  $(\mathcal{K}^n, d_H)$  es compacto. Dicho de otro modo, se tiene la siguiente consecuencia de forma inmediata.

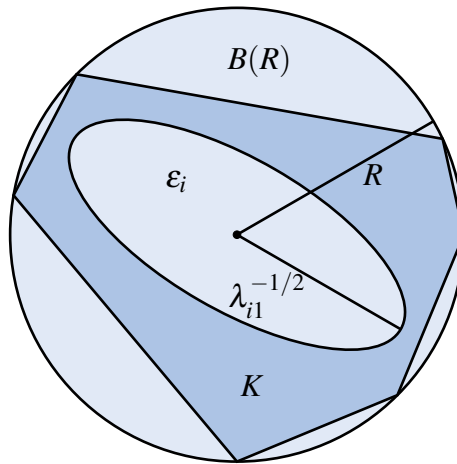
**Corolario 2.8** El espacio  $(\mathcal{K}^n, d_H)$  es localmente compacto.

Con estas herramientas en nuestro cinturón pasamos a demostrar la existencia y unicidad del elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo convexo cualquiera.

**Teorema 2.9** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$ . Existe un único elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ .

*Demostración.* Comencemos probando la existencia. Si denotamos por  $S \subset \mathbb{R}^{n(n+3)/2}$  al conjunto de los elipsoides  $\varepsilon(B, p)$  contenidos en  $K$ , es claro que sus volúmenes estarán acotados por el volumen de  $K$ , de modo que sus determinantes estarán acotados inferiormente (véase el corolario 1.12). Denotemos por  $\rho$  a dicho ínfimo y consideremos una sucesión de elipsoides  $\varepsilon_i = \varepsilon(B_i, p_i)$  tal que  $\det(B_i) \rightarrow \rho$ . Si probamos que convergen a un elipsoide de  $S$ , se habrá demostrado la existencia. Denotemos por  $\lambda_{ij}$  al  $j$ -ésimo valor propio de  $B_i$ , que recordemos son positivos por ser  $B_i$  definidas positivas, ordenados de menor a mayor. La existencia se desprenderá de acotar  $\rho$ , así como  $\lambda_{i1}$ .

Sean  $B(r), B(R)$  bolas de radios  $r > 0$  y  $R > 0$ , respectivamente, tales que  $B(r) \subset K \subset B(R)$ . Como  $\varepsilon_i \subset K \subset B(R)$ , tendremos que  $\text{vol}(\varepsilon_i) \leq \text{vol}(B(R))$  es decir,  $\text{vol}(B_n) \det(B_i)^{-1/2} \leq R^n \text{vol}(B_n)$ , de modo que  $\det(B_i)^{1/2} \geq 1/R^n$  para todo  $i$ . En consecuencia,  $\sqrt{\rho} \geq 1/R^n$ . Por otro lado, como  $B(r) \subset K$  entonces  $B(r) \in S$ , luego  $\text{vol}(B(r)) = r^n \text{vol}(B_n) \leq \text{vol}(B_n) \rho^{-1/2}$ , ergo  $\sqrt{\rho} \leq 1/r^n$ . Ya tenemos  $\rho$  acotado inferior y superiormente. Para terminar, recordemos que como vimos en la proposición 1.9, la longitud del semieje mayor del elipsoide  $\varepsilon_i$  es precisamente  $\lambda_{i1}^{-1/2}$ , y como  $\varepsilon_i \subset K \subset B(R)$ , debe ser  $\lambda_{i1}^{-1/2} \leq R$  (figura 2.5), es decir,  $\lambda_{i1} \geq 1/R^2$ .



**Figura 2.5:** Acotación de elipsoides contenidos en el cuerpo convexo

Como  $\rho$  está acotado entonces la sucesión  $\det(B_i) = \lambda_{i1} \cdots \lambda_{in} \leq \lambda_{in}^n$  también lo está, y como el menor valor propio  $\lambda_{i1}$  está acotado inferiormente, entonces el mayor  $\lambda_{in}$  debe estarlo superiormente. Sea pues  $C$  tal que  $\lambda_{in} \leq C$  para todo  $i$ . Entonces si denotamos  $B_i = (b_{kl}^i)_{kl}$ , tenemos la acotación entrada a entrada

$$|b_{kl}^i| = |\langle e_k, B_i e_l \rangle| \leq |B_i e_l| \leq \lambda_{in} |e_l| = \lambda_{in} \leq C.$$

Por tanto, la sucesión  $\varepsilon_i$  es acotada en  $\mathbb{R}^{n(n+3)/2}$ , de modo que tiene una subsucesión convergente, a la cual nos restringimos. Si denotamos por  $\varepsilon(A, p)$  al límite, tendremos por continuidad del determinante que  $\det(B_i) \rightarrow \det(A)$ , luego  $\det(A) = \rho$ . Como  $K$  es compacto, entonces  $S$  es acotado en la distancia de Hausdorff, luego el teorema de selección de Blaschke implica que  $S$  es compacto. En consecuencia, tenemos que  $\varepsilon \in S$ , de modo que hemos encontrado un elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ .

Para la unicidad, supongamos que tenemos dos elipsoides  $a + AB_n$  y  $b + BB_n$  contenidos en  $K$  de máximo volumen, y probemos que  $a = b$  y  $A = B$ . En primer lugar, como ambos tienen igual volumen,

será  $\det(A) = \det(B)$ . Construimos un nuevo elipsoide tomando puntos medios:

$$\frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(A+B)B_n \subset \frac{1}{2}(a+AB_n) + \frac{1}{2}(b+BB_n) \subset \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}K = K.$$

Por supuesto, las operaciones con conjuntos anteriores no son triviales, algunas requieren de la convexidad, y quedan justificadas por la proposición 1.6. Concretamente, el primer contenido se justifica usando (IV) y (VII), el segundo contenido sí es inmediato, y la igualdad final hace uso de (v).

Sabemos que el volumen de dicho elipsoide es  $\det(1/2(A+B))\text{vol}(B_n)$ . Ahora bien, por la proposición 1.10 podemos suponer que  $A, B$  son definidas positivas, y por la desigualdad de determinantes de Minkowski (proposición 2.5), tenemos que

$$\det\left(\frac{1}{2}(A+B)\right)^{1/n} \geq \frac{1}{2}\det(A)^{1/n} + \frac{1}{2}\det(B)^{1/n} = \det(A)^{1/n}.$$

Pero por la maximalidad de  $p + AB_n$  como elipsoide contenido en  $K$ , lo anterior debe ser una igualdad. Usando la caracterización de la igualdad en dicho lema, tenemos que  $A = \lambda B$  para cierto  $\lambda \in \mathbb{R}$ , pero como sus determinantes coinciden, debe ser necesariamente  $A = B$ .

Finalmente, probemos que los centros también coinciden. Aplicando una transformación afín apropiada, podemos suponer que  $A = B = I_n$  y que  $a = -\mu e_1, b = \mu e_1$  para cierto  $\mu \geq 0$ , donde  $\{e_i\}_{i=1}^n$  representa la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, como  $a + B_n \subset K$  y  $b + B_n \subset K$ , y por convexidad el segmento  $[a, b] \subset K$ , tenemos nuevamente por convexidad que  $[a, b] + B_n \subset K$ . En efecto, dado  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,

$$(\lambda a + (1-\lambda)b) + B_n = (\lambda a + (1-\lambda)b) + (\lambda B_n + (1-\lambda)B_n) = \lambda(a + B_n) + (1-\lambda)(b + B_n) \subset K,$$

usando la convexidad de  $K$  y la propiedad (v) de la proposición 1.6. Ahora bien, en la “salchicha”  $[a, b] + B_n$  podemos inscribir un elipsoide de semiejes  $(1 + \mu, 1, \dots, 1)$  como muestra la figura 2.6, de modo que su volumen  $(1 + \mu)\text{vol}(B_n)$  debe ser menor o igual que el maximal, en este caso  $\text{vol}(B_n) = \text{vol}(B_n)$ , ergo  $\mu = 0$  y por tanto  $a = b$ , como queríamos ver. ■

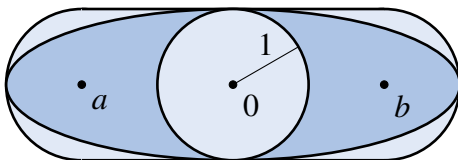


Figura 2.6: Elipsoide contenido en una salchicha

**Definición 2.10** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , denotaremos por  $\varepsilon(K)$  al **elipsoide de John**, el único elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ .

### 2.3 Caracterización de los puntos de contacto

El siguiente paso será caracterizar los puntos de contacto entre un cuerpo convexo y su elipsoide de John. Como dijimos antes, esto es una combinación del ítem 1 del teorema 2.4 de John, probado en [Joh48, sec. 4] (necesidad), y el artículo [Bal92, sec. 1] de Ball (suficiencia), aunque las demostraciones que aquí presentamos son de desarrollo posterior. Concretamente, seguimos la línea de las pruebas de Gruber y Schuster en [GS05, Th.1-2], las cuales se basan en ideas previamente exploradas en [Gru88], que permitieron simplificar ampliamente las demostraciones anteriores. Para proceder, caracterizamos dichos puntos en el caso en que tal elipsoide es la bola unidad, de modo que el caso general se desprenderá aplicando una transformación afín a la caracterización anterior. Nos centraremos en los cuerpos centralmente simétricos, observando luego que la extensión al caso general puede obtenerse mediante una ligera modificación.

### 2.3.1 Preliminares

Presentamos antes unas nociones de gran importancia en el ámbito de estudio que nos ocupa. Cada forma cuadrática en  $\mathbb{R}^n$ , dada por

$$x \rightarrow x^T A x = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n,$$

puede identificarse con su matriz de coeficientes,  $A = (a_{ij})_{ij}$ , que será una matriz real simétrica  $n \times n$ . Por simetría, también podemos identificarla con el vector de coordenadas

$$x_A = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{nn})^T \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}.$$

Por tanto, identificaremos  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  con el espacio de formas cuadráticas, o con el de matrices simétricas. Esta idea fue aplicada notablemente por Voronoi en [Vor08] para el estudio de formas cuadráticas, y desde entonces es ampliamente empleada. Resulta entonces que el subconjunto de formas cuadráticas definidas positivas es un cono no degenerado (con interior no vacío) en  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  con vértice el origen. Este cono, así como ciertos subconjuntos relevantes del mismo, tienen numerosas propiedades interesantes y una rica estructura geométrica. Son precisamente estas observaciones sobre el cono y sus propiedades las que desarrolló Gruber en [Gru88], y que sirvieron de base para su cristalina y clarificadora prueba en [GS05] que vamos a seguir.

Vamos a describir algunas de esas propiedades, que entre otras cosas, serán relevantes para demostrar la caracterización de los puntos de contacto anteriormente mencionada.

**Definición 2.11** Denotaremos por  $\mathcal{P}^n \subset \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  al cono de formas cuadráticas definidas positivas (o bien, de matrices simétricas definidas positivas), y por  $\mathcal{Q}^n$  al cono de formas cuadráticas semidefinidas positivas. Asimismo, denotaremos por  $\mathcal{P}_1^n = \{A \in \mathcal{P}^n : \det(A) \geq 1\}$ .

Naturalmente, la definición anterior requiere de ciertas justificaciones, las cuales quedan incluidas en la siguiente proposición.

**Proposición 2.12** Se verifican las siguientes propiedades:

1.  $\mathcal{P}^n$  es un cono convexo no degenerado con vértice el origen.
2.  $\mathcal{P}_1^n$  es un conjunto cerrado, no acotado, estrictamente convexo y con frontera suave. Además, es disjunto de un entorno del origen.
3.  $\mathcal{Q}^n = \overline{\mathcal{P}^n}$ , y es nuevamente un cono convexo no degenerado con vértice el origen.
4. La identidad  $I_n$  es un punto interior a  $\mathcal{P}^n$  y perteneciente a la frontera de  $\mathcal{P}_1^n$ .

La figura 2.7 ilustra la estructura de dichos subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ . Ciertas regularidades de la figura, como por ejemplo, que la identidad es el punto de  $\mathcal{P}_1^n$  de menor norma, también son ciertas y se probarán más adelante, por ejemplo, en el lema 2.15.

*Demostración de la proposición 2.12.* Recordemos antes de comenzar que una matriz es definida positiva si y sólo si sus autovalores son todos estrictamente positivos, y es semidefinida positiva si son no negativos. Por tanto, las matrices definidas positivas tienen determinante positivo y las semidefinidas positivas tienen determinante no negativo, en particular,  $\mathcal{Q}^n \setminus \mathcal{P}^n$  está formado por matrices singulares. En consecuencia, por la continuidad del determinante, se deduce que en  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  los conjuntos  $\mathcal{Q}^n$  y  $\mathcal{P}_1^n$  son cerrados y el conjunto  $\mathcal{P}^n$  es abierto. También se desprende de la continuidad del determinante que  $\mathcal{Q}^n = \overline{\mathcal{P}^n}$ , que  $\mathcal{P}_1^n \subset \text{Int}(\mathcal{P}^n)$ , que  $\text{bd}\mathcal{Q}^n$  son las matrices semidefinidas positivas con determinante nulo, y que  $\text{bd}\mathcal{P}_1^n$  son las matrices definidas positivas con determinante unitario.

1. Para ver que  $\mathcal{P}^n$  es un cono con vértice el origen basta ver que es cerrado para la suma y el producto por escalares positivos. Si  $A, B \in \mathcal{P}^n$  y  $\lambda > 0$ , es claro que  $A + B$  y  $\lambda A$  siguen siendo simétricas, y además dados  $x, y \in \mathbb{R}^n$  se tiene

$$\begin{aligned} y^T (A + B)x &= y^T A x + y^T B x > 0, \\ y^T (\lambda A)x &= \lambda y^T A x > 0, \end{aligned}$$

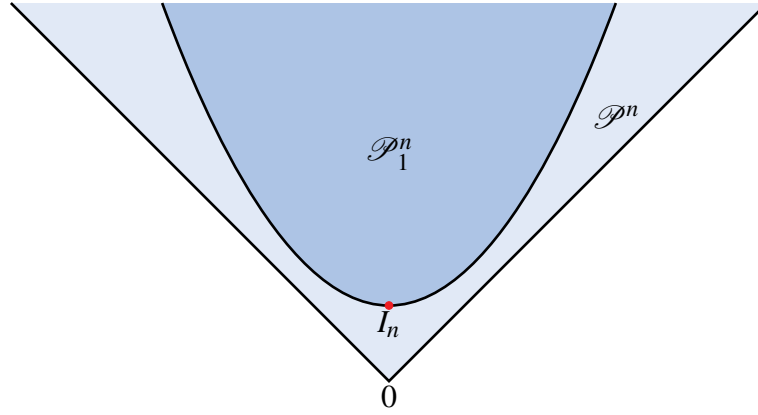


Figura 2.7: Conjuntos  $\mathcal{P}^n$  y  $\mathcal{P}_1^n$  en  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  y algunas de sus propiedades.

con lo cual tanto  $A+B$  como  $\lambda A$  son también definidas positivas y, por tanto, pertenecen a  $\mathcal{P}^n$ . Finalmente, el cono es trivialmente no generado dado que la identidad es interior, al tener determinante positivo.

2. Ya sabemos que  $\mathcal{P}_1^n$  es cerrado. Para ver que es estrictamente convexo, tomemos  $A, B \in \mathcal{P}_1^n$  distintas y  $\lambda \in (0, 1)$  y veamos que  $\det(\lambda A + (1-\lambda)B) > 1$ . Haciendo uso de la desigualdad de Minkowski (proposición 2.5) tenemos

$$\det(\lambda A + (1-\lambda)B)^{1/n} \geq \lambda \det(A)^{1/n} + (1-\lambda) \det(B)^{1/n} \geq \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

de donde se deduce en particular la convexidad. Sin embargo, si se tuviera la igualdad, entonces  $\det(A) = \det(B) = 1$ , y por la caracterización de la igualdad en la desigualdad de Minkowski debería ser  $B = \mu A$ , ergo  $\det(B) = \mu^n \det(A)$ . Por tanto, se tendría necesariamente  $\mu = 1$ , luego  $A = B$ , una contradicción. En conclusión,  $\mathcal{P}_1^n$  es estrictamente convexo.

Que  $\mathcal{P}_1^n$  es disjunto de un entorno del origen es consecuencia de que  $\mathcal{P}_1^n \subset \text{Int}(\mathcal{P}^n)$ , y es inmediato que no es acotado, pues basta considerar múltiplos escalares positivos de la identidad. Finalmente,  $\text{bd}\mathcal{P}_1^n$  viene descrita por la ecuación  $\det(X) = 1$  definida en  $\mathcal{P}^n$ , que es un abierto conexo de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ . Como esa ecuación es polinómica, en particular es diferenciable, como queríamos ver.

3. Ya sabemos que  $\mathcal{Q}^n = \overline{\mathcal{P}^n}$ . El resto es completamente análogo a la primera propiedad.

4. Como  $\det(I_n) = 1$ , ya sabemos que  $I_n \in \text{Int}(\mathcal{P}^n)$  y que  $I_n \in \text{bd}\mathcal{P}_1^n$ . ■

Es habitual trabajar en el espacio  $\mathcal{P}^n$  con el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , que es también un producto escalar particular en  $\mathcal{P}^n \subset \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ , diferente del usual. Esto se debe a que, de este modo, el producto escalar se comporta bien con nuestra identificación de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  con el espacio de matrices simétricas. Además, tiene numerosas compatibilidades con el producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ , así como otras bondades que demostraremos y explotaremos más adelante.

**Definición 2.13** Dadas  $A, B \in \mathcal{P}^n$ , denotaremos por  $\langle A, B \rangle = \sum_{ij} a_{ij} b_{ij}$ .

**Proposición 2.14** Sean  $A \in \mathcal{P}^n$  y  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Se verifican las siguientes propiedades:

1.  $\langle A, vw^T \rangle = w^T Av = \langle Av, w \rangle$ .
2. Dado  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $p + AB_n \subset K$  si y sólo si  $\langle p, w \rangle + w^T Av \leq h(K, w)$  para todo  $v, w \in B_n$ .
3. Si  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  son escalares positivos con  $\sum_i \lambda_i u_i u_i^T = I_n$ , entonces  $m \geq n$ ,  $\sum_i \lambda_i = n$ , y  $x = \sum_i \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demostración.* Como es habitual, denotaremos  $v = (v_1, \dots, v_n)^T$  y  $A = (a_{ij})_{ij}$ .

1. Observemos que  $(vw^T)_{ij} = v_i w_j$ , de modo que  $\langle A, vw^T \rangle = \sum_{ij} a_{ij} v_i w_j = w^T Av$ . La segunda igualdad es inmediata.
2. Usando lo anterior, tenemos que  $\langle p, w \rangle + w^T Av = \langle p + Av, w \rangle$ , que será menor o igual a  $h(K, w)$  para todo  $v \in B_n$  si y sólo si  $p + AB_n$  está contenido en el semiespacio que soporta  $K$  en la dirección



de  $w$ . Esto ocurre para todo  $w \in B_n$  si y sólo si  $p + AB_n \subset K$ , pues  $K$  es la intersección de todos sus semiespacios soporte.

3. Ya vimos en la observación de la página 19 que con esas condiciones los  $u_i$  se comportan de forma similar a una base ortonormal por cuanto  $x = \sum_i \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i$ . Por otro lado, si fuera  $m < n$  existiría  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  ortogonal a los  $u_i$ , de modo que usando nuevamente dicha observación tendríamos  $\langle u, u \rangle = \sum_i \lambda_i \langle u, u_i \rangle^2 = 0$ , contradiciendo que  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Finalmente, como en general  $(vw^T)_{ij} = v_i w_j$ , tenemos que dado  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  se tiene  $\text{tr}(vw^T) = \sum_i v_i^2 = 1$ , de modo que

$$n = \text{tr}I_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{tr}(u_i u_i^T) = \sum_{i=1}^m \lambda_i,$$

como faltaba por ver. ■

Haremos uso de todas las propiedades, pero será particularmente necesario recordar la primera pues la emplearemos de forma automática abundantemente sin referenciarla, por su simplicidad. Vamos finalmente a probar, como anticipábamos, una caracterización de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo y su elipsoide de John cuando éste es una bola. Comenzaremos demostrando el caso simétrico y luego veremos cómo podemos extenderlo al caso general.

Veamos un resultado inicial que nos describe un poco mejor la morfología de  $\mathcal{P}_1^n$ , en el cual recordemos que estamos trabajando con la métrica inducida por el producto escalar introducido en la definición 2.13, que en particular, determina la noción de normalidad.

**Lema 2.15** La identidad  $I_n$  es normal a  $\mathcal{P}_1^n$  en  $I_n$ .

*Demostración.* Como  $\text{bd}\mathcal{P}_1^n$  es suave, el normal en  $I_n$  está unívocamente determinado. Vamos a ver que, efectivamente, es  $I_n$ . Sea  $A \in \mathcal{P}_1^n$  y denotemos sus valores propios por  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ . Entonces se tiene

$$\langle A, I_n \rangle = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq n \prod_{i=1}^n \lambda_i^{1/n} = n \det(A)^{1/n} \geq n = \langle I_n, I_n \rangle,$$

donde la primera desigualdad se sigue de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Por tanto se desprende que

$$\mathcal{P}_1^n \subset \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, I_n \rangle \geq \langle I_n, I_n \rangle\}, \quad (2.3)$$

o dicho de otro modo, se tiene que el hiperplano

$$\{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, I_n \rangle = n\}$$

soporta  $\mathcal{P}_1^n$  en  $I_n$ , y como  $I_n$  es su vector normal, hemos terminado, pues entonces por definición será también normal a  $\mathcal{P}_1^n$ . Observemos que de la ecuación (2.3) se deduce también que  $I_n$  es el punto de  $\mathcal{P}_1^n$  de menor norma. ■

### 2.3.2 Caracterización

Estamos ya en condiciones de presentar la prueba de la caracterización de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo y el elipsoide de máximo volumen contenido en el mismo. Como mencionamos al principio, demostraremos en detalle el caso centralmente simétrico (teorema 2.16), y esbozaremos las sutiles diferencias en la prueba del caso general (teorema 2.17). La caracterización será fundamental para, por ejemplo, hallar los elipsoides de John en casos particulares relevantes, como el cubo, el crosspolitopo regular, o el símplice regular (véase la sección 2.3.3). Como es habitual, la realizamos en el caso en que el elipsoide de John es la bola unidad, pudiéndose obtener una caracterización general aplicando transformaciones afines. Precisamente un uso fundamental de esto, que explotaremos principalmente en los capítulos 3 y 4, consiste en llevar un cuerpo convexo a su imagen afín con elipsoide de John la bola unidad. La caracterización proporciona entonces muy buenas propiedades que hacen a esta posición afín particularmente ventajosa.

**Teorema 2.16** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  con  $B_n \subset K$ . Son equivalentes:

- (I)  $B_n$  es el elipsoide de John de  $K$ .  
 (II) Existen, para cierto  $m$  con  $n \leq m \leq n(n+1)/2$ , puntos de contacto  $\{\pm u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

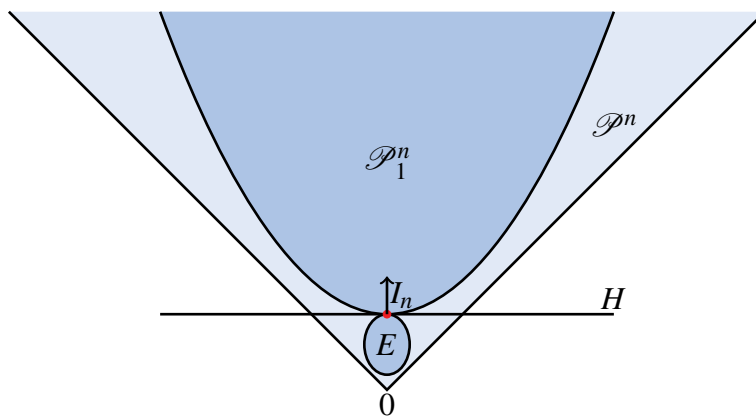
$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n.$$

*Demostración.* Observemos antes de comenzar que por ser el cuerpo  $K$  simétrico respecto del origen también lo será su elipsoide de John, y en particular, éste deberá estar centrado en el origen. Haciendo uso de la descripción para elipsoides contenidos en un cuerpo  $K$  que vimos en la propiedad 2 de la proposición 2.14, tendremos entonces que el conjunto  $E$  de todos los elipsoides simétricos respecto del origen contenidos en  $K$  viene descrito por

$$\begin{aligned} E &= \{A \in \mathcal{P}^n : v^T A u \leq h(K, v), \forall u, v \in B_n\} \\ &= \mathcal{P}^n \cap \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : v^T A u = \langle A, uv^T \rangle \leq h(K, v), \forall u, v \in B_n\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

es decir, por la intersección del cono convexo  $\mathcal{P}^n$  con una familia de semiespacios, también convexos. En consecuencia,  $E$  es convexo.

Comencemos viendo la implicación directa. Como  $\varepsilon(K) = B_n$  entonces  $\max_{A \in E} \det(A) = \det(I_n) = 1$ , y por unicidad,  $\det(A) < 1$  para cualquier otro  $A \in E$ , de modo que  $E \cap \mathcal{P}_1^n = \{I_n\}$ . Como consecuencia de uno de los muchos teoremas de separación (véase, e.g., [Gru07, Th. 4.4, p. 59]), si dos conjuntos convexos y cerrados intersecan en un único punto  $I_n$  entonces existe un hiperplano de separación  $H$  que pasa por  $I_n$  tal que  $E$  queda contenido en un semiespacio y  $\mathcal{P}_1^n$  queda en el otro. Como este último tiene interior no vacío, se trata de una separación propia, aunque como comparten un punto, no será una separación estricta. Precisamente por esto último,  $H$  es un hiperplano soporte para sendos  $E$  y  $\mathcal{P}_1^n$  por  $I_n$ , con unicidad en el segundo caso ya que  $\text{bd}\mathcal{P}_1^n$  es suave como vimos en la propiedad 2 de la proposición 2.12. Además, el lema 2.15 nos asegura que este hiperplano tiene normal  $I_n$ . Por tanto, recuperando el diagrama de la figura 2.7, podemos ahora completarlo con esta nueva información, como muestra la figura 2.8.



**Figura 2.8:** Diagrama de  $\mathcal{P}^n, \mathcal{P}_1^n, E$ , con hiperplano soporte y vector normal

En particular,  $I_n \in \text{bd}E$ , luego podemos considerar  $S(E, I_n)$  el cono soporte a  $E$  por  $I_n$ , es decir, el menor cono con vértice  $I_n$  que contiene a  $E$ . Por ser  $E$  convexo, claramente también lo es  $S(E, I_n)$ , por lo que este cono viene dado por una intersección de semiespacios cuyas fronteras pasan por el vértice  $I_n$ . De hecho, es inmediato que vendrán determinados por los hiperplanos soporte a  $E$  que pasan por  $I_n$ , pero como estos hiperplanos son los descritos en la ecuación (2.4), tenemos finalmente la descripción

$$S(E, I_n) = \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : v^T A u = \langle A, uv^T \rangle \leq h(K, v), \forall u, v \in B_n \text{ con } v^T I_n u = \langle u, v \rangle = h(K, v)\}. \quad (2.5)$$

Ahora bien, en general dados  $u, v \in B_n$  cualesquiera se tiene  $\langle u, v \rangle \leq 1 \leq h(K, v)$ : la primera desigualdad es inmediata y la segunda, como  $B_n \subset K$ , se debe a la propiedad 2 de la proposición 2.14. Por tanto, para que se dé la condición de igualdad en (2.5) debe darse  $\langle u, v \rangle = 1$ , lo cual ocurre si y sólo si  $u = v \in \mathbb{S}^{n-1}$ , y también  $1 = h(K, u)$ . Luego  $u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$ . En consecuencia, podemos refinar la descripción (2.5):

$$S(E, I_n) = \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : u^T A u = \langle A, uu^T \rangle \leq 1, \forall u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K\}. \quad (2.6)$$

Otro objeto de estudio habitual en geometría convexa es el cono normal  $N(E, I_n)$ , consistente en el conjunto de todos los vectores normales exteriores a  $E$  en  $I_n$ , es decir, de todos los normales exteriores a hiperplanos soporte a  $E$  en  $I_n$ , los cuales forman un cono convexo (fácil de ver, consultar e.g. [Gru07]). Por tanto, estos vectores son los normales a los hiperplanos de (2.6), de modo que tenemos la descripción

$$N(E, I_n) = \text{pos}\{uu^T \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K\}. \quad (2.7)$$

Ahora bien, ya sabemos que  $I_n \in N(E, I_n)$ , y como el cono normal es convexo, el teorema de Carathéodory (teorema 1.2, versión reforzada para conos convexos) asegura que hay  $m$  puntos  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que  $I_n = \sum_i \lambda_i u_i u_i^T$ , con  $m \leq n(n+1)/2$ . Por la propiedad 3 de la proposición 2.14 se concluye que  $m \geq n$ . La simetría central garantiza que los  $-u_i$  también son puntos de contacto. Con esto hemos terminado la implicación directa.

Vamos ahora con la implicación recíproca. Sea  $E$  nuevamente el conjunto de elipsoides simétricos respecto del origen contenidos en  $K$  descrito mediante la expresión (2.4). Como  $B_n \subset K$ , tenemos  $I_n \in E$ , y como los vectores  $u_i$  pertenecen a  $\mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$ , tenemos que  $\langle u_i, u_i \rangle = 1$  y  $h(K, u_i) = 1$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , de modo que  $u_i^T I_n u_i = \langle u_i, u_i \rangle = h(K, u_i)$ . Como  $I_n \in E$  y se da la igualdad para algunos de los hiperplanos de la expresión (2.4), tenemos que  $I_n \in \text{bd}E$ . Esto nos permite nuevamente tomar los conos soporte y normal a  $E$  en  $I_n$  tal y como se hizo en la otra implicación. Dado que podemos repetir los mismos razonamientos que realizamos entonces, llegamos nuevamente a las expresiones (2.6) y (2.7), respectivamente.

Ahora bien, como tenemos que  $I_n = \sum_i \lambda_i u_i u_i^T$  con  $\lambda_i > 0$ , se tiene  $I_n \in N(E, I_n)$ , de modo que el cono soporte está contenido en el semiespacio determinado por  $I_n$ , es decir

$$S(E, I_n) \subset \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, I_n \rangle \leq \langle I_n, I_n \rangle\}.$$

Pero por otro lado, el lema 2.15 nos dice que  $I_n$  también es normal a  $\mathcal{P}_1^n$ , y concretamente en la demostración del lema vimos que

$$\mathcal{P}_1^n \subset \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, I_n \rangle \geq \langle I_n, I_n \rangle\}.$$

En definitiva, el hiperplano

$$H = \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, I_n \rangle = \langle I_n, I_n \rangle\}$$

separa los conjuntos  $S(E, I_n)$  y  $\mathcal{P}_1^n$ , y en particular, también separa  $E$  de  $\mathcal{P}_1^n$ . Es claro entonces que  $E \cap \mathcal{P}_1^n \subset H$ , pero como  $\mathcal{P}_1^n$  es estrictamente convexo, esa intersección se reduce a un único punto, que sabemos es  $I_n$ . En suma, tenemos la situación de la figura 2.8. En particular,  $\det(A) < 1$  para todo  $A \in E$  distinto de  $I_n$ , de modo que el determinante en  $E$  alcanza su máximo único en  $I_n$ , ergo  $B_n$  es el único elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ , su elipsoide de John. Esto prueba la equivalencia. ■

! Por la propiedad 3 de la proposición 2.14, la condición (ii) del teorema 2.16 implica que  $\sum_i \lambda_i = n$ . Esta igualdad es de gran utilidad cada vez que estamos en las hipótesis del teorema, de modo que conviene tenerla en mente para próximos resultados.

Presentamos ahora el caso no centralmente simétrico, para el cual sólo delineamos la prueba por presentar las mismas ideas. Como vemos, al desaparecer la simetría es necesario incluir la condición adicional que aparecía en el ítem 2 del teorema 2.4 de John.

**Teorema 2.17** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  con  $B_n \subset K$ . Son equivalentes:

- (I)  $B_n$  es el elipsoide de John de  $K$ .
- (II) Existen, para cierto  $m$  con  $n \leq m \leq n(n+3)/2$ , puntos de contacto  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n.$$

*Demostración.* La prueba es muy similar a la del teorema 2.16 adaptando ciertos detalles. Una demostración más completa puede consultarse en [GS05, Th. 2].

En primer lugar, al perder la simetría el elipsoide de John de un cuerpo convexo puede no estar centrado en el origen, con lo cual a la hora de definir el conjunto  $E$  (véase la fórmula (2.4)) será necesario incorporar las  $n$  coordenadas del centro para describir completamente un elipsoide, como hicimos al delinear la prueba de John en el teorema 2.4. Así pues, trabajaremos en este caso en dimensión  $n(n+3)/2$ , y adaptando el resto análogamente se obtiene entonces la cota  $m \leq n(n+3)/2$ . En particular, esto implica que se trabaja con  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{P}_1^n$  y se separa del nuevo  $E$ .

Con respecto a la condición adicional  $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ , ésta surge de la aplicación del teorema de Carathéodory (teorema 1.2) en este nuevo contexto. ■

Hay una dualidad muy fuerte en el tema que estamos tratando, de hecho, los resultados originales de John eran relativos a elipsoides circunscritos, no inscritos, a pesar de que actualmente se relacione más habitualmente el caso inscrito con John. En cualquier caso, razonamientos casi idénticos permiten demostrar la versión dual de los teoremas de John, que enunciamos a continuación.

**Teorema 2.18** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  (resp.  $K \in \mathcal{K}^n$ ). Se verifica (I), y si  $K \subset B_n$ , entonces (II) y (III) son equivalentes:

- (I) Existe un único elipsoide de mínimo volumen que contiene a  $K$ .
- (II)  $B_n$  es el único elipsoide de mínimo volumen que contiene a  $K$ .
- (III) Existen, para cierto  $m$  con  $n \leq m \leq n(n+1)/2$  (resp.  $n \leq m \leq n(n+3)/2$ ), puntos de contacto  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n \quad \left( \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n \right).$$

Conviene finalizar la sección haciendo una observación sobre la caracterización de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo y su elipsoide de John dada por los resultados anteriores, que será útil para aplicaciones posteriores de los resultados de John. Concretamente, dichos puntos determinan un politopo que siempre contiene al cuerpo, y que en ocasiones nos sirve de cota superior sencilla (véanse, por ejemplo, las secciones 3.1 y 4.1). Lo reflejamos en el siguiente lema, y lo ilustramos en la figura 2.9. Dicha figura también ilustra el hecho de que los puntos de contacto generan todo el espacio.

**Lema 2.19** Sean  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\{u_i\}_{i=1}^m$  los puntos de contacto entre  $K$  y su elipsoide de John. Entonces  $K \subset \bar{K}$  con

$$\bar{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1, 1 \leq i \leq m\}.$$

*Demostración.* La prueba es inmediata. Como  $u_i \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$ , podemos considerar los hiperplanos soporte comunes a sendos cuerpos en los puntos  $u_i$ , que están unívocamente determinados por ser la esfera diferenciable, y que tienen por normal el propio vector de posición  $u_i$ . Por soportar  $K$ , tenemos que  $K \subset H_K^-(u_i)$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . En consecuencia, si construimos el politopo  $P$  dado por la intersección de dichos semiespacios, se tendrá  $K \subset P$ . Pero como los  $u_i$  son unitarios, este politopo es  $P = \bar{K}$ . ■

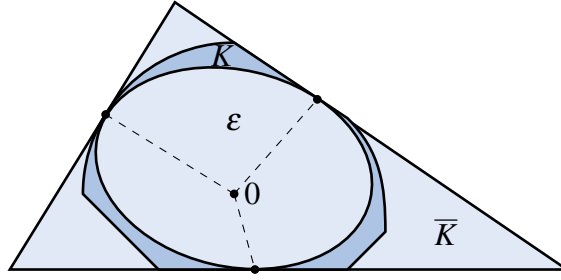


Figura 2.9: Un cuerpo contenido en el polígono determinado por los puntos de contacto  $u_i$

### 2.3.3 Casos particulares

Ahora ya estamos en condiciones de justificar lo que afirmamos en el ejemplo 2.1 de la página 19, en concreto, que la bola es el elipsoide de John del cubo (la bola unidad en la norma infinito), del símplice regular y del crosspolitopo regular (la bola unidad en la 1-norma). Como la caracterización de John coincide tanto en un caso como en su dual, la misma prueba justificará la propiedad para elipsoides inscritos y para elipsoides circunscritos. Comenzamos por los casos simétricos.

**Corolario 2.20** La bola unidad  $B_n$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en el cubo  $C_n$  y en el crosspolitopo  $\sqrt{n}C_n^*$ .

*Demostración.* La existencia y unicidad de sendos elipsoides queda garantizada por el teorema 2.9. El cubo viene descrito por

$$C_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, \forall 1 \leq i \leq n\},$$

y es claro que  $B_n \subset C_n$ . También es inmediato verificar que los puntos de contacto son  $\pm e_i \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}C_n$ . Podemos restringirnos a los positivos,  $u_i = e_i$  y tomar  $\lambda_i = 1$ , y entonces se tiene trivialmente  $\sum_i \lambda_i u_i u_i^T = I_n$ . Así pues, por el teorema 2.16, sabemos que  $B_n$  es el elipsoide de John de  $C_n$ .

Por otro lado, el crosspolitopo del enunciado viene dado por

$$\sqrt{n}C_n^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n} \right\},$$

donde el factor  $\sqrt{n}$  lo tomamos para ajustar la escala a lo que necesitamos. Tenemos que  $B_n \subset \sqrt{n}C_n^*$  debido a que si  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in B_n$  entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n 1 \cdot |x_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{n},$$

que es la conocida desigualdad de normas  $\| \cdot \|_1 \leq \sqrt{n} \| \cdot \|_2$ . Nuevamente, es trivial comprobar que los  $2^n$  puntos descritos por

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{n}} (\pm 1, \dots, \pm 1)^T \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}(\sqrt{n}C_n^*),$$

es decir, que son de contacto (además son los únicos, aunque esto nos da igual). Observemos que denotando por  $\alpha_{kl}^i = (u_i u_i^T)_{kl} = u_{ik} u_{il}$  tenemos que  $\alpha_{kk}^i = 1/n$ , mientras que cuando  $k \neq l$  tendremos que  $\alpha_{kl}^i = 1/n$  para la mitad de los casos y  $\alpha_{kl}^i = -1/n$  para la otra mitad, por simetría, de modo que al sumar  $(u_i u_i^T)$  en  $i$  todos los elementos fuera de la diagonal se cancelarán. Escogiendo entonces  $\lambda_i = n/2^n$  para todo  $i$  tenemos que

$$\sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i u_i u_i^T = \frac{n}{2^n} \frac{2^n}{n} I_n = I_n.$$

Para estar en las condiciones del teorema basta reducir el número de puntos, pero como  $I_n \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ , basta para ello aplicar el teorema 1.2 de Carathéodory para conos convexos que nos dice que podremos

reducir la colección  $\{u_i\}_{i=1}^{2^n}$  a, a lo sumo,  $n(n+1)/2$  elementos, con lo cual estamos en las condiciones del teorema 2.16 y queda probado que  $B_n$  es el elipsoide de John de  $\sqrt{n}C_n^*$ . ■

Sobra decir que los resultados anteriores se verifican para cubos y crosspolitopos regulares cualesquiera, pues cualquier movimiento rígido no altera el elipsoide de máximo volumen y cualquier cambio de escala mantiene el carácter esférico. Pasamos ahora el caso no simétrico. Para numerosos resultados de capítulos posteriores será necesario conocer en profundidad el símplice regular, de modo que aprovechamos el siguiente resultado para probar todas las propiedades que necesitaremos del mismo.

**Corolario 2.21** La bola unidad  $B_n$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en el símplice regular de lado  $\sqrt{2n(n+1)}$ .

*Demostración.* Nuevamente, la existencia y unicidad del elipsoide queda garantizada por el teorema 2.9. Sea  $S_n$  el símplice regular de lado 1, y vamos a comenzar probando que  $1/\sqrt{2n(n+1)}$  es el inradio de  $S_n$ . Esto demostrará que  $B_n$  está contenida en  $\sqrt{2n(n+1)}S_n$ . Para ello, vamos a proceder construyendo el símplice de forma inductiva. Denotemos por  $u_i^n$  para  $i = 0, 1, \dots, n$  a los vértices de  $S_n$ ,  $r_n$  al inradio de  $S_n$ ,  $h_n$  a la altura de  $S_n$ , es decir, a la distancia de un vértice al punto medio de la cara opuesta, y finalmente  $m_n$  al “centro” de  $S_n$ . Este último es el punto que equidista de todos los vértices, o bien de todos los puntos medios de las caras. Naturalmente no es centro de simetría, aunque coincide con el centro de las bolas inscrita y circunscrita.

Para  $n = 1$  claramente tenemos los vértices  $u_0^1 = 0$  y  $u_1^1 = 1$ , el inradio  $r_1 = 1/2$ , la altura  $h_1 = 1$  y el centro  $m_1 = 1/2$ . Para la construcción recursiva, supongamos conocidas  $u_i^n, h_n, r_n, m_n$  para cierto  $n \in \mathbb{N}$  y construyamos  $S_{n+1}$ . Preservamos los primeros  $n+1$  vértices,  $u_i^{n+1} = ((u_i^n)^T, 0)^T$  con  $0 \leq i \leq n$ , y añadimos el nuevo “encima” del punto medio,  $u_{n+1}^{n+1} = (m_n^T, h_{n+1})^T$ . Por otro lado, el centro estará situado sobre el centro anterior precisamente a altura el inradio, de modo que  $m_{n+1} = (m_n^T, r_{n+1})^T$ . Podríamos imponer ahora condiciones sobre los puntos para deducir los valores de  $h_n, m_n$ , pero es más sencillo fijar dichos valores y luego probar que dan lugar a un verdadero símplice. Así pues, consideremos los siguientes valores para la altura y el inradio:

$$r_n = \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}}, \quad h_n = (n+1)r_n = \frac{n+1}{\sqrt{2n(n+1)}} = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}. \quad (2.8)$$

Para probar que estos valores determinan un símplice regular, basta probar que los vértices así generados equidistan entre ellos y con respecto al incentro. Es claro que para los valores iniciales se verifica, así pues, supongámoslo cierto para  $n \in \mathbb{N}$  y demostrémoslo para  $n+1$ . Por un lado, comprobamos que la distancia del nuevo vértice a los anteriores sigue siendo 1. Si  $0 \leq i \leq n$ , entonces

$$\|u_{n+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\|^2 = \|(m_n^T, h_{n+1})^T - ((u_i^n)^T, 0)^T\|^2 = \|m_n - u_i^n\|^2 + h_{n+1}^2. \quad (2.9)$$

Ahora bien, es inmediato por su definición que  $\|u_n^n - m_n\|^2 = (h_n - r_n)^2$ , y por hipótesis de inducción  $\|u_i^n - m_n\|^2 = (h_n - r_n)^2$  para  $0 \leq i \leq n$ . En consecuencia, tras simplificar, se deduce

$$\|u_i^n - m_n\|^2 = \left( \sqrt{\frac{n+1}{2n}} - \frac{1}{\sqrt{2n(n+1)}} \right)^2 = \frac{n}{2(n+1)}, \quad (2.10)$$

y por tanto (2.9) se traduce en

$$\|u_{n+1}^{n+1} - u_i^{n+1}\|^2 = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{n+2}{2(n+1)} = 1,$$

luego el nuevo vértice equidista del resto, y por hipótesis de inducción, todos equidistan entre sí.

Por otro lado, con unos sencillos cálculos vemos que las distancias al centro vienen dadas por

$$\|u_{n+1}^{n+1} - m_{n+1}\|^2 = (h_{n+1} - r_{n+1})^2 = \left( \sqrt{\frac{n+2}{2(n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{2(n+1)(n+2)}} \right)^2 = \frac{n+1}{2(n+2)}$$

y, usando (2.10),

$$\|u_i^{n+1} - m_{n+1}\|^2 = \|u_i^n - m_n\|^2 + r_{n+1}^2 = \frac{n}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{2(n+2)}.$$

En consecuencia, todos los vértices equidistan del nuevo incentro. Por tanto, los vértices así definidos determinan de forma inductiva el símplice regular  $n$ -dimensional  $S_n$  de lado 1, y además, sabemos que su altura y su inradio vienen dados por (2.8). Como son todas magnitudes lineales, esto prueba que  $B_n \subset \sqrt{2n(n+1)}S_n$ .

Para lo que resta de prueba conviene cambiar la concepción del símplice a emplear, pues la construcción inductiva deja de ser útil. Es habitual visualizar el símplice regular  $S_n \subset \mathbb{R}^n$  inmerso en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ya que de este modo puede describirse como  $S_n = \text{conv}\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ . Denotemos por  $T_n$  el símplice regular de inradio 1, que por (2.8), vendrá descrito como  $T_n = \text{conv}(\{\mu e_i\}_{i=1}^{n+1})$  con  $\mu = \sqrt{2n(n+1)}$ . Como los puntos  $\{\mu e_i\}_{i=1}^{n+1}$  verifican  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \mu$ , es claro que  $T_n$  está contenido en el hiperplano  $H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \mu\}$ , de normal  $\sum_{i=1}^{n+1} e_i$ . Identificaremos dicho hiperplano con  $\mathbb{R}^n$  cuando convenga. Es fácil entonces comprobar que su traslación al origen viene dada por

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= H - \frac{\mu}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} e_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}, \\ \tilde{T}_n &= T_n - \frac{\mu}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} e_i. \end{aligned}$$

Nuestro objetivo, de cara a probar el resultado, es obtener una expresión concreta de los centros de las caras, pues tales son los puntos de contacto con la bola inscrita y, en consecuencia, sobre ellos debemos comprobar las condiciones del teorema de John. Para ello, como hemos centrado el símplice en el origen, basta determinar los normales a las caras del mismo. Dado que en el símplice dos vértices cualesquiera están conectados por una arista, podemos denotar por  $F_i$  a la cara obtenida eliminando el vértice  $i$ -ésimo, es decir,

$$F_i = \text{conv}(\{\mu e_j\}_{j \neq i}) - \frac{\mu}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} e_j, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Observemos que al ser  $F_i$   $(n-1)$ -dimensional, el espacio ortogonal en  $\mathbb{R}^{n+1}$  es bidimensional. Es inmediato comprobar que dos generadores ortogonales entre sí del mismo vienen dados por  $e_i$  y  $\sum_{j \neq i} e_j$ , sin más que multiplicar escalarmente por  $e_k - e_l$  para cualesquiera  $i \neq k \neq l \neq i$ . En consecuencia todo normal vendrá dado por

$$ae_i + b \sum_{j \neq i} e_j, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

y si buscamos un normal perteneciente a  $\tilde{H}$ , que determinará el normal a  $F_i$  visto en  $\mathbb{R}^n$ , basta observar

$$ae_i + b \sum_{j \neq i} e_j \in \tilde{H} \iff a + nb = 0,$$

de manera que podemos tomar

$$\tilde{u}_i = -ne_i + \sum_{j \neq i} e_j = (1, \dots, 1, -n, 1, \dots, 1),$$

donde el 1 está en la  $i$ -ésima coordenada. Como  $\tilde{T}_n$  tiene inradio 1, los puntos de contacto se obtendrán normalizando,  $u_i = \tilde{u}_i / \sqrt{n(n+1)}$ , de modo que  $u_i \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}\tilde{T}_n$ .

Debemos ver ahora que se verifican las condiciones del teorema de John. Por un lado, es inmediato comprobar que

$$\sum_{i=1}^{n+1} u_i = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sum_{i=1}^{n+1} (1, \dots, 1, -n, 1, \dots, 1) = 0.$$

Por otro lado, hay que comprobar que los puntos de contacto generan la identidad en  $\mathbb{R}^n$ , que en este caso está identificado con  $\tilde{H}$ . Observemos que

$$\tilde{u}_i \tilde{u}_i^T = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & -n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -n & 1 & \dots & 1 \\ -n & \dots & -n & n^2 & -n & \dots & -n \\ 1 & \dots & 1 & -n & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -n & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)},$$

y como  $n(n+1)u_i u_i^T = \tilde{u}_i \tilde{u}_i^T$ , es fácil ver que se tiene

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{n}{n+1} u_i u_i^T = \frac{1}{(n+1)^2} \begin{pmatrix} n^2+n & -n-1 & \dots & -n-1 \\ -n-1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -n-1 \\ -n-1 & \dots & -n-1 & n^2+n \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, tomando  $x \in \tilde{H}$ , es decir,  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})^T \in \mathbb{R}^{n+1}$  con  $\sum_i x_i = 0$ , se verifica

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{n}{n+1} u_i u_i^T x = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & -1 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{n+1} \begin{pmatrix} nx_1 - \sum_{i \neq 1} x_i \\ \vdots \\ \vdots \\ nx_{n+1} - \sum_{i \neq n+1} x_i \end{pmatrix} = x,$$

como queríamos ver. En definitiva, el teorema 2.16 de John, aplicado a los  $u_i$  y tomando  $\lambda_i = n/(n+1)$  para todo  $1 \leq i \leq n+1$ , implica que  $B_n$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $\mu S_n = \sqrt{2n(n+1)} S_n$ .

Con esto concluye la prueba del resultado. Sin embargo, conviene para lo que veremos en capítulos posteriores conocer, además, el volumen y el área de superficie de  $S_n$ . El volumen de un conjunto cónico  $C$  en general puede calcularse fácilmente integrando el volumen  $(n-1)$ -dimensional de las secciones, resultado que suele identificarse con el *Principio de Cavalieri*, o bien, como consecuencia sencilla del teorema de Fubini. Si denotamos por  $B$  la base del cono, contenida en cierto hiperplano, y por  $h$  su altura, es decir, la distancia del hiperplano al vértice del cono (que no debe pertenecer al hiperplano), tenemos

$$\text{vol}(C) = \int_0^h \text{vol}_{n-1} \left( \frac{tB}{h} \right) dt = \frac{\text{vol}_{n-1}(B)}{h^{n-1}} \left[ \frac{t^n}{n} \right]_0^h = \frac{h}{n} \text{vol}_{n-1}(B),$$

un conocido resultado. Ahora bien, haciendo uso de que las caras del símplice regular  $n$ -dimensional son símplices regulares  $(n-1)$ -dimensionales, y que el volumen del símplice 1-dimensional de lado 1 es 1, entonces lo anterior unido a las relaciones (2.8) nos permiten calcular inductivamente  $v_n = \text{vol}(S_n)$ :

$$v_n = \frac{h_n}{n} v_{n-1} = \frac{1}{n!} \prod_{j=1}^n h_j = \frac{1}{n!} \frac{\sqrt{(n+1)!}}{\sqrt{2^n} \sqrt{n!}} = \frac{(n+1)^{1/2}}{2^{n/2} n!}.$$

De modo que el volumen del símplice regular de inradio 1, nuevamente por (2.8) y por la homogeneidad de orden  $n$  del volumen, viene dado por

$$\text{vol} \left( \sqrt{2n(n+1)} S_n \right) = \frac{2^{n/2} n^{n/2} (n+1)^{n/2} (n+1)^{1/2}}{2^{n/2} n!} = \frac{n^{n/2} (n+1)^{(n+1)/2}}{n!}.$$

Finalmente, como el símplice regular tiene  $n+1$  caras que son símplices regulares de igual lado, el área de superficie (homogénea de orden  $n-1$ ) es

$$S \left( \sqrt{2n(n+1)} S_n \right) = (n+1) 2^{(n-1)/2} n^{(n-1)/2} (n+1)^{(n-1)/2} \frac{n^{1/2}}{2^{(n-1)/2} (n-1)!} = \frac{n^{n/2} (n+1)^{(n+1)/2}}{(n-1)!}.$$

Observemos que  $S \left( \sqrt{2n(n+1)} S_n \right) = n \text{vol} \left( \sqrt{2n(n+1)} S_n \right)$ . Con esto, cerramos la prueba. ■



### 2.3.4 Elipsoides de cuerpos duales

Terminamos la sección con una interesante propiedad que verifican los elipsoides de John, a saber, su compatibilidad con la dualidad de cuerpos convexos. Se trata de una noción muy relevante en geometría convexa que merece una breve introducción, y que tiene numerosas conexiones con nociones similares en otras disciplinas. Para profundizar en este concepto puede consultarse por ejemplo [Sch14, sec. 1.6].

**Definición 2.22** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , el cuerpo **dual** o **polar** de  $K$  es  $K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1, \forall y \in K\}$ .

La definición anterior es lógicamente válida para cualquier subconjunto, aunque nos hemos restringido a cuerpos convexos por ser nuestro objeto básico de estudio. No obstante, es interesante mencionar que los conjuntos duales son siempre cerrados y convexos, con independencia del conjunto original, y es inmediato que contienen al origen en su interior. De aquí ya se deduce, por ejemplo, que la dualidad no es involutiva, pues si partimos de conjuntos en los que alguna de estas tres condiciones falla, el dual del dual no coincidirá con el original. Se puede probar, sin embargo, que estas tres condiciones son suficientes para garantizar que sí ocurra, de modo que restringiéndonos a cuerpos convexos  $K$ , basta comprobar que contienen al origen en su interior para saber que  $K^{**} = K$  ([Sch14, Th. 1.6.1]). En particular, los cuerpos convexos centralmente simétricos están en estas condiciones.

Entre otras cosas, se puede probar que el polar de una bola es una bola, y de hecho, que el polar coincide con el cuerpo original si y sólo si este cuerpo es la bola unidad.

■ **Ejemplo 2.2** El cubo  $C_n$  y el crosspolitopo  $C_n^*$  son duales, lo que justifica que antes denotásemos al segundo de esa manera (habitual, por otra parte). Recordemos que el cubo es la bola unidad en la norma infinito y el crosspolitopo es la bola unidad en la 1-norma, y que estas dos normas son duales, lo que esclarece la conexión entre sendas nociones de dualidad, en convexidad y en espacios normados. De hecho, dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$  cualquiera se define más generalmente su conjunto dual  $K^*$  en el espacio dual  $(\mathbb{R}^n)^*$ , como el conjunto de formas que llevan  $K$  a la bola unidad de  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, trabajando con el isomorfismo canónico  $\mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$  y con el producto escalar usual en ambos, la definición se reduce a la 2.22.

La comprobación es muy sencilla. Denotemos por  $C_n^*$  al crosspolitopo y por  $(C_n)^*$  al dual de  $C_n$ , para evitar confusión. Sea  $y = (y_1, \dots, y_n)^T \in C_n^*$ . Entonces  $\sum_i |y_i| \leq 1$ , de modo que dado  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in C_n$  se tiene  $|\langle x, y \rangle| = \sum_i |x_i y_i| \leq \sum_i |y_i| \leq 1$ , ya que  $\max_i |x_i| \leq 1$ . En consecuencia,  $y \in (C_n)^*$ . Recíprocamente, si  $y \in (C_n)^*$  entonces  $\langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i \leq 1$  para todo  $x \in C_n$ , pero como  $C_n$  es simétrico respecto del origen, se deduce  $\sum_i |x_i y_i| \leq 1$ . En particular escogiendo  $x = (1, \dots, 1)^T \in C_n$  se verifica  $\sum_i |y_i| \leq 1$ , y en consecuencia  $y \in C_n^*$ .

Para ver que el dual del crosspolitopo es el cubo se podría usar un argumento similar, o bien observar que como ambos son cuerpos convexos conteniendo al origen en su interior, entonces  $(C_n^*)^* = C_n^{**} = C_n$ , por lo dicho antes. ■

Otras propiedades interesantes de la dualidad, en las que no nos entretendremos, incluyen su compatibilidad con la unión, en el sentido de que  $(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i)^* = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i^*$ ; con el contenido, en el sentido de que si  $A \subset B$  entonces  $B^* \subset A^*$ ; o con el producto por escalares positivos, en el sentido de que  $(\lambda K)^* = (1/\lambda)K^*$ . También hay una cierta compatibilidad con la intersección, a saber, que si se exige que  $\bigcup_{m=1}^n K_m$  sea convexo, entonces  $(\bigcap_{m=1}^n K_m)^* = \bigcup_{m=1}^n K_m^*$  ([Sch14, Th. 1.6.3]).

La razón de presentar el concepto de dualidad, aparte de su importancia intrínseca, es que el elipsoide de John de un cuerpo convexo está íntimamente relacionado con el de su cuerpo dual, y es sencillo probarlo, con lo cual es un resultado que merece ser presentado.

**Teorema 2.23** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  con  $0 \in \text{Int}(K)$ . Entonces  $B_n$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$  si y sólo si  $B_n$  es el elipsoide de mínimo volumen que contiene a  $K^*$ .

*Demostración.* Probaremos una implicación, siendo la otra completamente análoga. Haremos uso del teorema 2.17 de caracterización de puntos de contacto y el correspondiente resultado dual. Si  $B_n$  es el

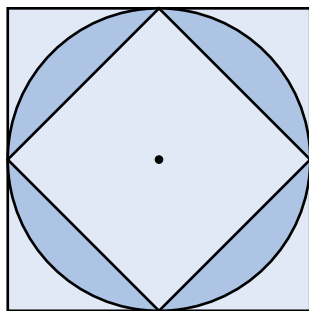
elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$  dicho teorema nos asegura la existencia de puntos de contacto  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$  para cierto  $n \leq m \leq n(n+3)/2$ , así como de escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  en ciertas condiciones que no necesitaremos emplear.

Como  $u_i \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$ , tenemos que el hiperplano soporte a  $B_n$  en  $u_i$  - de normal  $u_i$  - también soporta a  $K$ , con lo cual para todo  $x \in K$  tenemos  $\langle x, u_i \rangle \leq \langle u_i, u_i \rangle = 1$ , y de acuerdo a la definición 2.22,  $u_i \in K^*$ . Como además los propios  $u_i \in K$  y verifican la cota con igualdad,  $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ , entonces  $u_i \in \text{bd}K^*$ , de modo que  $u_i \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K^*$  son también puntos de contacto.

Finalmente, usando algunas de las propiedades de dualidad antes mencionadas, como  $B_n \subset K$  tenemos  $K^* \subset B_n^* = B_n$ , de modo que los  $u_i, \lambda_i$  están en las condiciones de la versión dual del teorema de John (teorema 2.18) y, por tanto, sabemos que  $B_n$  es el elipsoide de menor volumen que contiene a  $K^*$ . ■

Observemos que de la prueba se deduce algo más fuerte, y es que de hecho, los puntos de contacto entre los mencionados cuerpos y elipsoides coinciden.

■ **Ejemplo 2.3** Retomando el ejemplo 2.2 de dualidad entre el cubo y el crosspolitopo, podemos gráficamente comprobar (figura 2.10) el teorema anterior, así como que los puntos de contacto coinciden. Observemos que el teorema anterior nos hubiera permitido reducir la prueba del corolario 2.20 a demostrar sólo uno de los dos casos, y deducir el otro por dualidad.



**Figura 2.10:** Elipsoides de máximo y mínimo volumen de cuerpos polares: Cubo y crosspolitopo

También es fácil comprobarlo en el caso trivial de la bola unidad, ya que  $B_n^* = B_n$ , aunque este ejemplo no aporte mucho. ■

## 2.4 Acotación de la aproximación

Vamos a ver ahora una consecuencia - ya anticipada en el teorema 2.4 - de los teoremas 2.16 y 2.17 que nos permitirá cuantificar la bondad de la aproximación de un cuerpo convexo por su elipsoide de John. En particular, es importante notar como ya dijimos que la razón entre los volúmenes de dichos cuerpos está acotada, y esta cota finita que no se da en la bola es de por sí suficiente justificación de su importancia. Por esto, y por las numerosas consecuencias que ha tenido la acotación más adelante, es por lo que le dedicamos una sección aparte, a pesar de ser un fruto bastante directo de los teoremas anteriormente mencionados. Comencemos pues probando el caso simétrico.

**Corolario 2.24** Dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , existe un elipsoide  $AB_n$  con  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  definida positiva tal que

$$AB_n \subset K \subsetneq \sqrt{n}AB_n,$$

donde además la cota  $\sqrt{n}$  es la mejor posible.

*Demostración.* Consideramos el elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ , cuya existencia y unicidad queda garantizada por el teorema 2.9. Denotemos por  $\bar{K} = A^{-1}K$ , de modo que  $B_n$  sea el elipsoide de máximo volumen contenido en  $\bar{K}$ . Sean entonces  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}\bar{K}$  los puntos de contacto que el teorema 2.16 asegura, y en tales condiciones. Como  $u_i \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}\bar{K}$ , el hiperplano soporte a  $B_n$  en  $u_i$

- de normal  $u_i$  - también soporta  $\bar{K}$  en dicho punto, de modo que  $\langle x, u_i \rangle \leq \langle u_i, u_i \rangle = 1$  para todo  $x \in \bar{K}$ . Como  $\bar{K}$  es simétrico, tenemos de hecho  $|\langle x, u_i \rangle| \leq 1$ . Haciendo entonces uso del comportamiento de los  $u_i$  similar al de una base ortonormal (véase (2.2) o bien la propiedad 3 de la proposición 2.14), tenemos

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i = n,$$

es decir,  $x \in \sqrt{n}B_n$ . Por tanto  $\bar{K} \subset \sqrt{n}B_n$ , donde la inclusión es estricta ya que  $B_n$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $\bar{K}$ . En consecuencia  $K \subset \sqrt{n}AB_n$ , como queríamos ver.

La cota es la mejor posible porque se alcanza por ejemplo en el cubo  $C_n$ . En efecto, por el corolario 2.20 el elipsoide de John del cubo es  $B_n$ , y por el resultado dual (teorema 2.18) el elipsoide que lo contiene de menor volumen es también una bola. Como la semidiagonal de  $C_n$  es  $\sqrt{n}$ , éste es el radio de dicha bola circunscrita y por tanto también la cota en cuestión. ■

El hecho de que se dé la igualdad en el cubo indica intuitivamente que entre los cuerpos convexos simétricos, es el cubo el que más se diferencia de una bola (o de cualquier elipsoide), si usamos como criterio de similitud precisamente el poder acotarlo entre dos bolas homotéticas. Esto concuerda con la intuición de que cuanto más similar es un politopo a una bola, más caras ha de tener, algo que no sólo es intuición sino que de hecho es cierto. Por ejemplo, se tiene que si es posible acotar un politopo (o cualquier imagen afín suya) entre dos bolas homotéticas de razón  $\delta$ , entonces el politopo tiene al menos  $\lceil e^{n/(2\delta^2)} \rceil$  caras, de modo que podemos decir que conforme un politopo se asimila a una bola, reduciendo la razón linealmente, el número de caras crece exponencialmente (véase, e.g., [Bal97, Th. 2.1]). Pasemos ahora a demostrar el caso no simétrico.

**Corolario 2.25** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , existe un elipsoide  $p + AB_n$  con  $p \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  definida positiva tal que

$$p + AB_n \subset K \subsetneq p + nAB_n,$$

donde además la cota  $n$  es la mejor posible.

*Demostración.* La prueba es similar al caso simétrico. Consideramos  $p + AB_n$  el elipsoide de John de  $K$ , y definimos  $\bar{K} = A^{-1}(K - p)$ , de modo que  $B_n$  es su elipsoide de John. Así pues, sean  $u_i, \lambda_i$  en las condiciones que el teorema 2.17 nos garantiza. En particular, volvemos a tener  $\sum_i \lambda_i \langle x, u_i \rangle^2 = \|x\|^2$  y  $\sum_i \lambda_i = n$ , y gracias a la nueva propiedad  $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0$  deducimos  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle = 0$ .

Dado  $x \in \bar{K}$  arbitrario, como  $u_i \in \mathbb{S}^{n-1}$  tenemos que  $-\|x\| \leq \langle x, u_i \rangle$ , y como además  $u_i \in \text{bd}\bar{K}$  tenemos que  $u_i$  es normal a  $\bar{K}$  en  $u_i$ , luego  $\langle x, u_i \rangle \leq \langle u_i, u_i \rangle = 1$ . Por tanto, tenemos

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i (1 - \langle x, u_i \rangle) (\|x\| + \langle x, u_i \rangle) = \|x\| \sum_{i=1}^n \lambda_i + (1 - \|x\|) \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, u_i \rangle - \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, u_i \rangle^2 = n\|x\| - \|x\|^2,$$

de modo que  $\|x\| \leq n$  y por tanto  $\bar{K} \subset nB_n$ , donde la inclusión vuelve a ser estricta ya que  $B_n$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $\bar{K}$ . Luego como  $A^{-1}(K - p) \subset nB_n$ , entonces  $K \subset p + nAB_n$ .

De nuevo, la igualdad se da por ejemplo en el símplice regular, como es fácil comprobar haciendo uso del hecho de que la distancia del baricentro de un símplice regular  $S_n$  en  $\mathbb{R}^n$  a cualquier otro vértice es  $n$  veces la distancia al punto medio de cualquier cara, siendo estas distancias, respectivamente, el circunradio y el inradio, lo que prueba la afirmación. ■

## 2.5 Anillos elipsoidales

En la sección 2.4 hemos calculado el menor factor de dilatación que aplicado al elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo convexo  $K$  lo transforma en un elipsoide que contiene a  $K$ . Es natural, continuando en este sentido, preguntarse en general por la menor razón homotética por la cual un elipsoide

contenido en  $K$  pasa a contener a  $K$ . Cabe esperar que, a este fin, lo más relevante sea la similitud en forma de  $K$  y el elipsoide, no en volumen, de modo que los resultados del capítulo no sean necesariamente óptimos. Por completar y redondear el capítulo, vamos a presentar someramente, sin demostraciones, algunos resultados en esta dirección, que fueron estudiados por Gruber en [Gru08, Sec. 2]. Las pruebas de todas las afirmaciones de esta sección pueden encontrarse en ese artículo, o en las correspondientes referencias del mismo.

Las bolas unidad de los espacios normados son cuerpos convexos centralmente simétricos, las bolas unidad de los espacios euclídeos son elipsoides, y envolver bolas unidad es equivalente a acotar las respectivas normas. Así pues, los resultados de esta sección se traducen a resultados de comparación de espacios normados, en los cuales entraremos con un poco más de detalle en la sección 3.2 y, en especial, en el apartado 3.2.3. Nos restringiremos al caso centralmente simétrico en lo que resta de capítulo.

**Definición 2.26** Dados  $K \in \mathcal{K}^n$ , un elipsoide  $\varepsilon$  y  $\rho \geq 1$ , el par  $\langle \varepsilon, \rho\varepsilon \rangle$  es un **anillo elipsoidal** de  $K$  si  $\varepsilon \subset K \subset \rho\varepsilon$ . Se dice **mínimo** si  $\rho$  es mínimo entre dichos pares.

La figura 2.11 muestra un anillo elipsoidal de un rectángulo, que además, resulta ser mínimo. De los resultados de John (corolario 2.24) se sigue de forma inmediata la siguiente consecuencia.

**Corolario 2.27** Dados  $K \in \mathcal{K}_0^n$  (resp.  $K \in \mathcal{K}^n$ ) y un anillo elipsoidal mínimo  $\langle \varepsilon, \rho\varepsilon \rangle$  de  $K$ , se tiene  $\rho \leq \sqrt{n}$  (resp.  $\rho \leq n$ ).

El resultado central de Gruber en relación a los anillos elipsoidales queda reflejado en el siguiente teorema, que como vemos, encapsula información análoga a los resultados de John vistos en este capítulo.

**Teorema 2.28** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$ . Se verifica (I), y si  $B_n \subset K \subset \rho B_n$  para  $\rho \geq 1$ , entonces las condiciones (II) y (III) son equivalentes.

- (I) Existe un anillo elipsoidal mínimo de  $K$ .
- (II)  $\langle B_n, \rho B_n \rangle$  es un anillo elipsoidal mínimo de  $K$ .
- (III) Existen, para ciertos  $m, l$  con  $m, l \geq 2$  y  $m + l \leq n(n + 1)/2 + 1$ , puntos de contacto  $\{\pm u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\{\pm v_j\}_{j=1}^l \subset \text{bd}K \cap \rho\mathbb{S}^{n-1}$ , así como escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  y  $\{\mu_j\}_{j=1}^l$ , tales que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = \sum_{j=1}^l \mu_j v_j v_j^T \neq O_n \text{ (matriz nula)}.$$

Es importante observar que, a diferencia de los resultados de John, no se tiene unicidad en general, aunque sí en gran parte de los casos, como veremos.

Por un razonamiento de ortogonalidad similar al realizado en la observación de la página 19, la condición (III) del teorema 2.28 implica que el subespacio lineal generado por los  $u_i$  coincide con el generado por los  $v_j$ . En efecto, sea  $x \in \mathbb{R}^n$  tal que  $x \perp u_i$  para todo  $i$ . Entonces tenemos

$$0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle u_i, x \rangle^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^T u_i u_i^T x = x^T \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T \right) x = x^T \left( \sum_{j=1}^l \mu_j v_j v_j^T \right) x = \sum_{j=1}^l \mu_j \langle v_j, x \rangle^2,$$

y como  $\lambda_i, \mu_j > 0$ , lo anterior implica que  $x \perp v_j$  para todo  $j$ . En conclusión, coinciden los subespacios ortogonales a los subespacios generados por los  $u_i$  y por los  $v_j$ , luego éstos también coinciden.

Como hemos enfatizado, no se tiene unicidad en general, sin embargo, sí es así en la “mayoría” de los casos. Para precisar esto, recordemos que un espacio topológico es *Baire* si toda intersección numerable de abiertos densos es densa. Como el espacio  $(\mathcal{K}^n, d_H)$  es localmente compacto por el corolario 2.8, el *teorema de categorías de Baire* nos dice que  $(\mathcal{K}^n, d_H)$  es Baire.

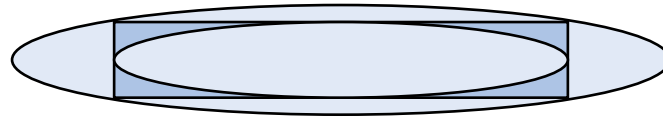


Figura 2.11: Anillo elipsoidal mínimo de un rectángulo

En el contexto de los espacios de Baire, se denota por *conjuntos de primera categoría* a aquellos que son unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte, es decir, cuya clausura tiene interior vacío. Son intuitivamente los conjuntos pequeños o despreciables. Si llamamos *elementos típicos* de un espacio de Baire a todos los elementos salvo un conjunto de primera categoría, tenemos el siguiente resultado de Gruber, nuevamente, en [Gru08, Sec. 2].

**Teorema 2.29** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  un cuerpo convexo típico.

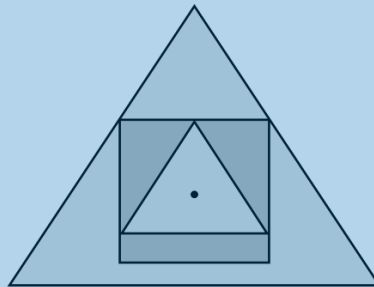
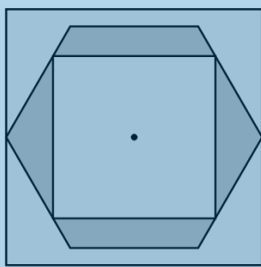
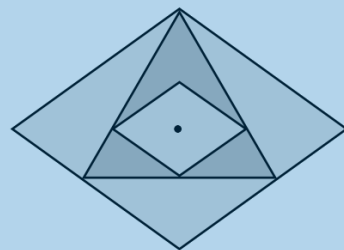
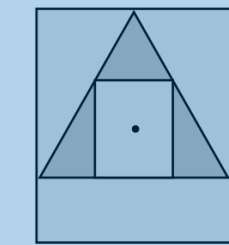
- (I)  $K$  tiene un único anillo elipsoidal mínimo  $\langle \varepsilon, \rho\varepsilon \rangle$ .
- (II) El conjunto de puntos de contacto  $(K \cap \text{bd}\varepsilon) \cup (K \cap \text{bd}\rho\varepsilon)$  tiene precisamente  $n(n+1)/2 + 1$  pares de elementos  $\pm u$ .

Es decir, la cota de puntos de contacto del teorema 2.28 se alcanza casi siempre. Gruber demostró que la cota de  $n(n+1)/2$  puntos de contacto para el elipsoide de máximo volumen contenido en un cuerpo (teorema 2.16) y para el elipsoide de mínimo volumen conteniendo a un cuerpo (teorema 2.18) también se alcanza casi siempre. En consecuencia, la mayoría de elipsoides de John no dan lugar a un anillo elipsoidal mínimo.

**Corolario 2.30** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  un cuerpo convexo típico. Entonces ni el elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$ , ni el elipsoide de mínimo volumen conteniendo a  $K$ , forman parte de un anillo elipsoidal mínimo.

Resultados completamente análogos, sustituyendo la cota de  $n(n+1)/2 + 1$  por  $n(n+3)/2 + 1$ , se tienen también para el caso no centralmente simétrico.





## Extensiones del teorema de John

Envolturas homotéticas de cuerpos convexos (véase la sección 3.2).

En este capítulo vamos a discutir y desarrollar ciertas extensiones y generalizaciones de los resultados del capítulo anterior, explorando para ello varios posibles caminos que surgen de manera natural. En primer lugar, estudiaremos qué sucede al considerar elipsoides de dimensión inferior al espacio ambiente, en la sección 3.1. En segundo lugar, sustituiremos en la sección 3.2 los elipsoides por imágenes afines de cualquier otro cuerpo centralmente simétrico. Finalmente, reemplazaremos el funcional volumen por el funcional área de superficie, y veremos también la extensión a otros funcionales que generalizan los anteriores, conocidos como *quermassintegrales*, en la sección 3.3

### 3.1 Dimensión arbitraria del elipsoide inscrito

¿Qué sucede cuando inscribimos elipsoides degenerados, de dimensión inferior al espacio ambiente  $\mathbb{R}^n$ , en un cuerpo convexo? Fijemos el cuerpo en su posición afín  $K$  para la cual el elipsoide contenido en  $K$  de máximo volumen es la bola unidad, de modo que deshaciendo la transformación obtengamos el resultado para cuerpos convexos arbitrarios. Podemos preguntarnos en este caso por el mayor elipsoide  $k$ -dimensional contenido en  $K$ , en términos de volumen  $k$ -dimensional. Esta cuestión fue estudiada por Ball en [Bal92], y las conclusiones centrales quedan sintetizadas en el teorema 3.1.

Antes de presentarlo y demostrarlo, no obstante, conviene introducir cierta notación. Dado un cuerpo convexo  $K \in \mathcal{H}^n$  tal que su elipsoide de John sea la bola unidad  $B_n$ , tenemos por el teorema 2.17 la existencia de puntos de contacto  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$  y de escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$ , donde  $n \leq m \leq n(n+3)/2$ , tales que se verifica

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = n, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n.$$

Como vimos en la observación de la página 19, la última propiedad se traduce en que los  $u_i$  se comportan de forma relativamente similar a una base ortonormal, por cuanto se puede escribir

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i,$$

teniéndose en consecuencia las correspondientes expresiones para el producto escalar y la norma euclídea. Además, recordemos (véase el lema 2.19) que  $B_n \subset K \subset \bar{K}$  con  $\bar{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1, 1 \leq i \leq m\}$ .

**Teorema 3.1** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  tal que el elipsoide contenido en  $K$  de máximo volumen es la bola unidad  $B_n$ . Entonces, si  $\varepsilon$  es un elipsoide  $k$ -dimensional contenido en  $K$ , se tiene

$$\text{vol}_k(\varepsilon) \leq \left( \frac{n(n+1)}{k(k+1)} \right)^{k/2} \text{vol}_k(B_k),$$

con igualdad, por ejemplo, en el símplice regular  $S_n$ , luego la cota es óptima. Además, en este caso, dicho elipsoide  $k$ -dimensional de máximo volumen  $k$ -dimensional es una bola  $k$ -dimensional contenida en las caras  $k$ -dimensionales de  $S_n$ .

Recuperados del trabalenguas final, y antes de pasar a demostrar el teorema, conviene precisar un resultado técnico previo.

**Lema 3.2** Sean  $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$  y  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1}$  con  $\sum_i x_i = 0$ . Se verifica la desigualdad

$$\left( \sum_{i=1}^m \langle x_i, u_i \rangle \right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^m \|x_i\| \|x_j\| (1 - \langle u_i, u_j \rangle).$$

*Demostración.* Supongamos primero que  $\sum_i \|x_i\| = 1$ . Si denotamos por  $\lambda_i = \|x_i\|$  y  $u = \sum_i \lambda_i u_i$ , entonces tenemos usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left( \sum_{i=1}^m \langle x_i, u_i \rangle \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^m \langle x_i, u_i - u \rangle \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^m \|x_i\| \|u_i - u\| \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \|u_i - u\| \right)^2.$$

Como  $\sum_i \lambda_i = 1$  entonces  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ , luego

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \|u_i - u\| \right)^2 &\leq \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \|u_i - u\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \|u_i - u\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i (1 - 2\langle u_i, u \rangle + \|u\|^2) = \sum_{i=1}^m \lambda_i - 2 \left\langle \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i, u \right\rangle + \|u\|^2 = 1 - \|u\|^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j - \sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle \end{aligned}$$

con lo cual tenemos el resultado probado. Si fuera  $\sum_i \|x_i\| = c$  en general, entonces aplicando el resultado anterior a  $x_i/c$  obtenemos la misma desigualdad con un factor  $1/c^2$  a ambos lados que podemos cancelar, ergo hemos terminado. ■

Para demostrar la desigualdad del teorema 3.1 será conveniente trabajar con una definición alternativa de los elipsoides. Para ello, dado  $p + AB_n$  un elipsoide con  $A$  definida positiva (no perdemos generalidad por la proposición 1.10), podemos diagonalizar  $A = U^T D U$  con  $U$  ortogonal conteniendo los vectores propios  $v_i$  por filas y  $D$  diagonal conteniendo los valores propios  $\alpha_i > 0$ . Entonces tenemos por autoadjunción

$$\|A^{-1}(x-p)\|^2 = \langle U^T D^{-1} U(x-p), U^T D^{-1} U(x-p) \rangle = \langle D^{-2} U(x-p), U(x-p) \rangle.$$

Ahora bien, se tiene  $(U(x-p))_i = \langle v_i, x-p \rangle$ , luego

$$\langle D^{-2} U(x-p), U(x-p) \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{-2} \langle x-p, v_i \rangle^2.$$

En consecuencia, podemos representar el elipsoide como

$$p + AB_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|A^{-1}(x-p)\| \leq 1\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i^{-2} \langle x-p, v_i \rangle^2 \leq 1 \right\}.$$



Por extensión, representaremos en lo que sigue un elipsoide  $k$ -dimensional en  $\mathbb{R}^n$  con semiejes en la dirección de ciertos  $\{v_i\}_{i=1}^k$  ortonormales y de longitudes respectivas  $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$  mediante

$$\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^k \alpha_i^{-2} \langle x - p, v_i \rangle^2 \leq 1, \langle x - p, v_i \rangle = 0, k+1 \leq i \leq n \right\}. \quad (3.1)$$

*Demostración del teorema 3.1.* Como el elipsoide de John de  $K$  es  $B_n$ , el teorema 2.17 nos asegura la existencia de  $m$  puntos de contacto  $u_i \in \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$  y de  $m$  escalares positivos  $\lambda_i$ , donde  $n \leq m \leq n(n+3)/2$ , tales que se verifica

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = n, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n.$$

Asimismo, recordemos que  $K \subset \bar{K}$  con

$$\bar{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1, 1 \leq i \leq m\}.$$

Sea  $\varepsilon = p + AB_n$  un elipsoide  $k$ -dimensional contenido en  $K$  dado por la expresión (3.1). Como los valores propios de  $A$  son  $\alpha_i$  y  $\text{vol}_k(\varepsilon) = \det(A) \text{vol}_k(B_k)$ , tenemos que probar

$$\prod_{j=1}^k \alpha_j \text{vol}_k(B_k) \leq \text{vol}_k \left( \sqrt{\frac{n(n+1)}{k(k+1)}} B_k \right) = \left( \sqrt{\frac{n(n+1)}{k(k+1)}} \right)^k \text{vol}_k(B_k),$$

para lo cual demostraremos

$$\left( \prod_{j=1}^k \alpha_j \right)^{1/k} \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{k(k+1)}}.$$

Por la desigualdad de las medias aritmética y geométrica

$$\left( \prod_{j=1}^k \alpha_j \right)^{1/k} \leq \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \alpha_j,$$

luego basta probar

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \leq \sqrt{\frac{kn(n+1)}{k+1}}.$$

Construimos ahora una colección de puntos  $\{x_i\}_{i=1}^m \subset \bar{K}$ ,

$$x_i = p + \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \langle u_i, v_j \rangle^2 \right)^{-1/2} \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \langle u_i, v_j \rangle v_j.$$

Es inmediato comprobar que pertenecen a (la frontera del) elipsoide (3.1), ya que

$$\sum_{l=1}^k \alpha_l^{-2} \langle x_i - p, v_l \rangle^2 = \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \langle u_i, v_j \rangle^2 \right)^{-1} \sum_{l=1}^k \alpha_l^2 \langle u_i, v_l \rangle^2 = 1,$$

y fácilmente  $\langle x_i - p, v_j \rangle = 0$  para  $k+1 \leq j \leq n$ . Como  $\varepsilon \subset K \subset \bar{K}$ , tenemos entonces que  $x_i \in \bar{K}$  luego  $\langle x_i, u_i \rangle \leq 1$  para todo  $1 \leq i \leq m$ , es decir

$$\langle p, u_i \rangle + \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \langle u_i, v_j \rangle^2 \right)^{1/2} \leq 1,$$

para todo  $1 \leq i \leq m$ .

Definamos para continuar una aplicación lineal  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que proyecta sobre el hiperplano generado por  $\{v_j\}_{j=1}^k$ , dada por

$$Tx = \sum_{j=1}^k \alpha_j \langle x, v_j \rangle v_j,$$

de modo que

$$\|Tx\|^2 = \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \langle x, v_j \rangle^2.$$

Con esta notación la desigualdad anterior se reescribe como

$$\langle p, u_i \rangle + \|Tu_i\| \leq 1, \text{ para todo } 1 \leq i \leq m. \quad (3.2)$$

Por un lado, haciendo uso de la propiedad (2.2) de normas de los  $u_i$  tenemos

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 = \sum_{j=1}^k \|\alpha_j v_j\|^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle \alpha_j v_j, u_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|Tu_i\|^2. \quad (3.3)$$

Por otro lado, observemos que

$$\langle Tu_i, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^k \alpha_j \langle u_i, v_j \rangle v_j, u_i \right\rangle = \sum_{j=1}^k \alpha_j \langle u_i, v_j \rangle^2,$$

de modo que nuevamente por (2.2) se deduce

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = \sum_{j=1}^k \alpha_j \|v_j\|^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^m \alpha_j \lambda_i \langle u_i, v_j \rangle^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle Tu_i, u_i \rangle. \quad (3.4)$$

Vamos ahora a deducir dos acotaciones independientes de  $\sum_j \alpha_j$  que combinadas nos darán el resultado que buscamos. En primer lugar, como por (3.2) tenemos  $\|Tu_i\| \leq 1 - \langle p, u_i \rangle$ , haciendo uso de  $\sum_i \lambda_i u_i = 0$  y  $\sum_i \lambda_i = n$ , obtenemos

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \|Tu_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (1 - \langle p, u_i \rangle)^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i - 2 \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle p, u_i \rangle + \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle p, u_i \rangle^2 = n + \|p\|^2,$$

donde en la última igualdad se usa además la propiedad (2.2). Observemos que por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \right)^2 = \left( \sum_{j=1}^k 1 \cdot \alpha_j \right)^2 \leq \left( \sum_{j=1}^k 1^2 \right) \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \right) = k \sum_{j=1}^k \alpha_j^2,$$

de modo que usando (3.3) llegamos a la primera acotación:

$$\frac{1}{k} \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \|Tu_i\|^2 \leq n + \|p\|^2. \quad (3.5)$$

Para la segunda, observemos que  $\sum_i \lambda_i Tu_i = 0$  por linealidad de  $T$  y por ser  $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ , de modo que acudiendo a (3.4) y haciendo uso del lema 3.2 obtenemos

$$\left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \right)^2 = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle Tu_i, u_i \rangle \right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j (1 - \langle u_i, u_j \rangle) \|Tu_i\| \|Tu_j\|.$$

Como además  $\lambda_i \lambda_j (1 - \langle u_i, u_j \rangle) \geq 0$ , podemos volver a hacer uso de que  $\|Tu_i\| \leq 1 - \langle p, u_i \rangle$  por (3.2) para llegar a

$$\left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j (1 - \langle u_i, u_j \rangle) (1 - \langle p, u_i \rangle) (1 - \langle p, u_j \rangle).$$

Al desarrollar el producto anterior todos los términos en los que aparecen uno o dos productos escalares se anulan sin más que distribuir los  $\lambda_i, \lambda_j$  y hacer uso de que  $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ , de modo que únicamente restan dos términos,

$$\left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \right)^2 \leq \sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j - \sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle \langle p, u_i \rangle \langle p, u_j \rangle = \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \right)^2 - \sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle \langle p, u_i \rangle \langle p, u_j \rangle.$$

Ahora volvemos a hacer uso reiterado de la propiedad (2.2) de los  $u_i$  para representar el producto escalar, obteniendo

$$\sum_{i,j=1}^m \lambda_i \lambda_j \langle u_i, u_j \rangle \langle p, u_i \rangle \langle p, u_j \rangle = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle p, u_j \rangle \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle p, u_i \rangle \langle u_j, u_i \rangle \right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle p, u_j \rangle \langle p, u_j \rangle = \|p\|^2.$$

Así pues, reuniéndolo con lo anterior y usando nuevamente que  $\sum_i \lambda_i = n$  llegamos a la segunda acotación

$$\left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \right)^2 \leq n^2 - \|p\|^2. \quad (3.6)$$

Para terminar, sumando sendas cotas (3.5) y (3.6) tenemos

$$\left( 1 + \frac{1}{k} \right) \left( \sum_{j=1}^k \alpha_j \right)^2 \leq n^2 + n,$$

de modo que reordenando llegamos al resultado buscado,

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j \leq \sqrt{\frac{kn(n+1)}{k+1}},$$

que por lo dicho al comienzo termina la prueba de la desigualdad.

Para poder concluir que la cota obtenida es óptima vamos a ver que se alcanza en las caras  $k$ -dimensionales del símplice regular  $S_n$ . Desde luego, ya sabíamos que el elipsoide  $k$ -dimensional de máximo volumen contenido en dichas caras tenía que ser una bola, ya que las caras  $k$ -dimensionales de un símplice  $n$ -dimensional son símplices  $k$ -dimensionales, y sabemos que el elipsoide de John de cualquier símplice regular es una bola, como asegura el corolario 2.21. Como ya vimos en la demostración del corolario 2.21, el símplice de inradio 1 tiene diámetro  $\sqrt{2n(n+1)}$ , y como el diámetro de las caras  $k$ -dimensionales es el mismo, y las magnitudes involucradas son lineales, el inradio de dichas caras será

$$\frac{\sqrt{2n(n+1)}}{\sqrt{2k(k+1)}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{k(k+1)}},$$

luego la cota efectivamente se alcanza en las caras  $k$ -dimensionales del símplice regular de inradio 1, como queríamos ver. ■

! Es muy interesante observar, atendiendo a la demostración anterior, la potencia de las propiedades que garantiza el teorema de John 2.17 para los puntos de contacto. Como hemos visto, la notable interpretación de los  $u_i$  para representar el producto escalar euclídeo se ha explotado abundantemente en esta sección, tanto en esta prueba como en la que sigue, con lo cual vale la pena dar crédito a la importancia de esta caracterización.

Así pues, a estas alturas tenemos acotado al volumen  $k$ -dimensional de los elipsoides  $k$ -dimensionales contenidos en un cuerpo  $K$  cuyo elipsoide de John es la bola unidad  $B_n$ . Es inmediato extender esta acotación al caso general sin más que hacer uso del corolario 1.12.

**Corolario 3.3** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  con elipsoide de John  $\varepsilon = p + AB_n$ . Entonces dado un elipsoide  $k$ -dimensional  $\varepsilon_k \subset K$  se tiene

$$\text{vol}_k(\varepsilon_k) \leq |\det(A)| \left( \frac{n(n+1)}{k(k+1)} \right)^{k/2} \text{vol}_k(B_k).$$

Observemos que podríamos prescindir del valor absoluto si exigimos que  $A$  sea definida positiva, algo con lo que no perdemos generalidad de acuerdo a la proposición 1.10.

Terminamos la sección mostrando una consecuencia interesante del teorema 3.1 de Ball. Como ya sabíamos por el corolario 2.25, si el elipsoide de John de un cuerpo convexo es la bola unidad, entonces la bola de radio  $n$  contiene al cuerpo, y en particular, esto nos dice que el diámetro  $D$  del cuerpo es menor o igual que  $2n$ . La consecuencia que presentamos a continuación es un refinamiento de dicha cota.

**Corolario 3.4** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , si  $B_n$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$  entonces  $D(K) \leq \sqrt{2n(n+1)}$ .

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata del teorema 3.1 aplicado al caso  $k = 1$ , ya que los elipsoides 1-dimensionales no son más que segmentos y su volumen es su longitud. Sin embargo, merece la pena observar que no era necesaria toda esta maquinaria pesada para llegar a la cota, pues podríamos haberla probado desde el principio usando directamente la cota débil proporcionada por el teorema de John, corolario 2.25. En efecto, sean  $u_i$  los  $m$  puntos de contacto garantizados por el teorema 2.17, con los correspondientes escalares positivos  $\lambda_i$  verificando, entre otras cosas, que  $\sum_i \lambda_i = n$ . Como dijimos, de la unicidad de los hiperplanos soporte en los  $u_i$  se deduce que  $K \subset \bar{K}$  con

$$\bar{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1, 1 \leq i \leq m\}.$$

Entonces, dados  $x, y \in K$ , se tiene

$$0 \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i (1 - \langle x, u_i \rangle)(1 - \langle y, u_i \rangle) = n + \langle x, y \rangle,$$

usando además la representación del producto escalar euclídeo mediante los  $u_i$ . Ahora, como  $\|x\|, \|y\| \leq n$  por la cota del corolario 2.25 (obsérvese que, por ser  $B_n$  el elipsoide de John,  $p = 0$ ), obtenemos que

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \leq 2n^2 + 2n = 2n(n+1),$$

de modo que  $D(K) \leq \sqrt{2n(n+1)}$ , como queríamos ver. ■

### 3.2 Generalización del cuerpo convexo que aproxima

En el capítulo 2 hemos aproximado un cuerpo convexo  $K$  cualquiera mediante su elipsoide de John  $\varepsilon$ , de decir, mediante una imagen afín apropiada de la bola unidad  $B_n$ , obteniendo además que  $K$  está contenido en la imagen homotética de razón  $n$  de  $\varepsilon$ . Es razonable estudiar entonces qué sucede cuando se sustituye  $B_n$  por otro cuerpo convexo  $C$ . Si bien no obtendremos caracterizaciones de los puntos de contacto, algo excesivamente dependiente de la forma de  $C$ , sí que obtendremos una cota homotética general que, además, resulta ser óptima en ciertos casos, como demostraremos.

Concretamente, vamos a probar que si  $\tilde{C}$  es la imagen afín de un cuerpo convexo centralmente simétrico  $C$  de mayor volumen contenida en otro cuerpo convexo  $K$ , entonces  $K \subset (2n-1)\tilde{C}$ , y probaremos que la cota no se puede reducir tomando como cuerpo  $K$  un símplice - el mismo ejemplo maximal que en el resultado original de John - y como cuerpo  $C$  un paralelotopo. El resultado que vamos a desarrollar puede consultarse en [Las98].

### 3.2.1 Algunas discusiones previas

Antes de comenzar, es interesante considerar un problema relacionado pero no equivalente. Nos podríamos preguntar, dados dos cuerpos convexos  $K, L$ , por el menor escalar  $\lambda$  tal que podemos envolver  $L$  por copias homotéticas de  $K$  de razón  $\lambda$ , salvo transformaciones afines. Es decir, si denotamos por  $A_n(\mathbb{R})$  al conjunto de isomorfismos afines sobre  $\mathbb{R}^n$ , podríamos definir

$$\xi_K(L) = \min\{\lambda \geq 1: \exists T, S \in A_n(\mathbb{R}), TK \subset SL \subset \lambda TK\}.$$

De las acotaciones de John, corolario 2.25, deducimos automáticamente que  $\xi_{B_n}(L) \leq n$  para todo cuerpo convexo  $L$ , y  $\xi_{B_n}(L) \leq \sqrt{n}$  para todo cuerpo convexo centralmente simétrico  $L$ . Sin embargo, esta acotación no tiene porqué ser óptima en general, aunque en el caso de  $B_n$  sí lo sea. Es decir, si  $\tilde{K}$  es la imagen afín de  $K$  de mayor volumen contenida en  $L$ , esto no implica que vaya a minimizar  $\xi_K(L)$ , ya que si bien son dos conceptos relacionados, la razón homotética se minimiza con las imágenes afines  $\tilde{K}$  más similares en forma a  $L$ , mientras que el volumen se maximiza tomando las imágenes afines  $\tilde{K}$  “más redondeadas” o “menos planas”, como indica la intuición y justifica la desigualdad isoperimétrica (véase la sección 4.2).

Como ejemplo, Lassak estudió en [Las89] la aproximación de cuerpos convexos planos  $K$  mediante cuerpos convexos centralmente simétricos  $C$ , obteniendo que  $\xi_C(K) \leq \sqrt{2} + 1$ , con igualdad si y sólo si  $K$  es un triángulo y  $C$  un paralelogramo, habiendo en tal caso dos soluciones en las que se alcanza la cota, las que muestra la figura 3.1. Como vemos, esta cota es estrictamente menor que  $2n - 1 = 3$ , y ello se debe a que dicho paralelogramo, si bien minimiza la razón homotética, no es el de mayor volumen contenido en el triángulo, de modo que no contradice la optimalidad. De hecho, en la sección 3.2.2 caracterizaremos los paralelotopos de máximo volumen contenidos en un símplice de cara a probar la optimalidad de la cota  $2n - 1$ , algo que se muestra en la figura 3.6, y como se puede observar, los paralelogramos de la figura 3.1 no están en dichas condiciones, luego no son los de mayor volumen.

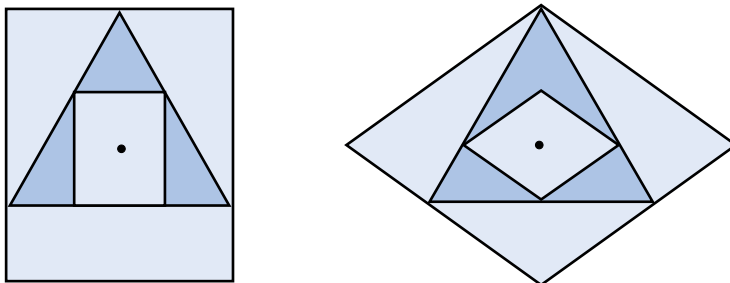
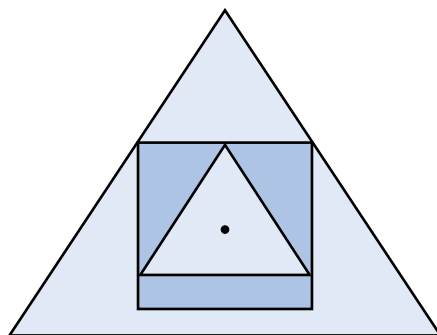


Figura 3.1: Envoltura óptima de un triángulo mediante paralelogramos homotéticos

Era conocido con anterioridad ([Gru63, p. 259]) que el símplice dista mucho de cualquier cuerpo centralmente simétrico  $C$ , concretamente, se tiene que  $\xi_C(S_n) \geq n$ . Por los resultados del capítulo 2, en particular por los corolarios 2.21 y 2.25, sabemos que cuando  $C = B_n$  se alcanza la igualdad, de modo que una bola es lo mejor a lo que podemos aspirar al aproximar un símplice mediante un cuerpo convexo centralmente simétrico. Uniendo esto a la cota de [Las89] en el plano obtenemos que  $2 \leq \xi_C(K) \leq \sqrt{2} + 1$ , donde además, la cota inferior se da precisamente cuando podemos circunscribir a  $C$  una imagen afín del hexágono regular tal que los puntos medios de sus lados pertenecen a  $C$ , es decir, son puntos de contacto. Observemos que en el caso de la bola esto se verifica trivialmente, como debe ser.

Por otro lado, Lassak probó en [Las92] que todo cuerpo convexo plano puede envolverse mediante dos triángulos homotéticos de razón  $5/2$ , que observemos, es ligeramente superior al caso simétrico,  $\sqrt{2} + 1$ . Como un triángulo queda determinado por un punto y dos vectores linealmente independientes, esto se traduce en que todos los triángulos son afínmente equivalentes, es decir, cualquier triángulo se puede obtener como imagen afín de cualquier otro triángulo. En consecuencia, debido a la simetría existente, evidenciada por la posibilidad de aplicar las transformaciones afines o sus inversas a uno u otro cuerpo (véase la proposición 3.10), esto nos permite concluir que  $\xi_{S_2} \leq 5/2$ .

Curiosamente, si definimos  $\xi^*$  igual que  $\xi$ , pero exigiendo que coincidan los centroides (o baricentros) de sendos cuerpos, entonces también se tiene  $\xi_{S_2}^* \leq 5/2$  (véase, e.g., [Gru63, p. 259]), y no se puede mejorar, siendo un ejemplo óptimo el de la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Envoltura óptima de un paralelogramo mediante triángulos homotéticos, mismo baricentro

Es fácil no percibir la diferencia entre las figuras 3.1 y 3.2. En particular, el centro de la primera parece coincidir con el baricentro del triángulo, pero debemos guardarnos de las posibles imprecisiones del dibujo y de nuestra vista, pues hay que tener en cuenta que  $5/2 = 2,5$  y  $\sqrt{2} + 1 \approx 2,41$ , lo cual justifica la sutileza de la diferencia. Observemos que por un argumento análogo, unido a que las aplicaciones afines preservan el paralelismo, todos los paralelogramos también pertenecen a la misma clase de equivalencia afín. Por tanto, resumimos los párrafos anteriores indicando que  $\xi_P(S) = \sqrt{2} + 1$  y  $\xi_P^*(S) = 5/2$ , donde  $P$  es la clase de los paralelogramos y  $S$  la de los triángulos, siendo además estos valores los máximos en la clase de los triángulos.

Discurriremos más sobre este tema y sobre ejemplos extremales en la sección 3.2.3. Antes de probar el resultado central de la sección, es interesante observar que los resultados de John en el capítulo 2, corolarios 2.25 y 2.24, se traducen en que  $\xi_{B_n}(K) \leq n$  en general y  $\xi_{B_n}(K) \leq \sqrt{n}$  para cuerpos  $K$  centralmente simétricos, con igualdades en los casos del símplice regular y del cubo. Esto permite demostrar las siguientes acotaciones que nos comienzan a acercarnos a nuestro objetivo, y que conectan con otras ramas de las matemáticas que describiremos someramente en el apartado 3.2.3, en particular, con la noción de *distancia de Banach-Mazur*.

**Proposición 3.5** Se verifican las siguientes propiedades:

- Dados  $K, L \in \mathcal{K}^n$  se verifica  $\xi_K(L) \leq n^2$ .
- Dados  $K, L \in \mathcal{K}_0^n$  se verifica  $\xi_K(L) \leq n$ .
- Dados  $K \in \mathcal{K}_0^n$  y  $L \in \mathcal{K}^n$  se verifica  $\xi_K(L) \leq n^{3/2}$ .

*Demostración.* La cota se obtiene sin más que aproximar cada cuerpo por la bola haciendo uso de los resultados de John, y emplear la multiplicatividad de  $\xi$  (véase la proposición 3.10). ■

Sin embargo, a pesar de que cada cota en el teorema de John es óptima por cuanto existen ejemplos extremos que la alcanzan, evidentemente esto no implica que al aproximar dos cuerpos pasando por la bola como intermediaria se vaya a mantener la optimalidad. De hecho, es natural pensar que en este sentido exista una cierta desigualdad triangular, como en efecto demostraremos en la sección 3.2.3, donde comprobaremos que la función  $\xi$  induce una distancia entre cuerpos convexos.

Es más, el resultado central que vamos a demostrar y que ya hemos introducido se traduce en que  $\xi_C(K) \leq 2n + 1$  cuando  $C$  es centralmente simétrico, es decir, refina la acotación  $n^{3/2}$  de la proposición 3.5 que nos proporciona el teorema del elipsoide de John. Sin embargo, como ya hemos comentado, estos problemas no son equivalentes, de modo que sigue abierta la cuestión de pulir la acotación de  $\xi$ , tanto en el caso en que uno o ambos cuerpos participantes son centralmente simétricos, como en el caso general. Comentaremos en la sección 3.2.3 algo sobre este último caso y algunos progresos que se han hecho, lo que, como veremos, se traduce en la acotación del diámetro de un cierto espacio métrico compacto que definiremos con precisión.

### 3.2.2 Aproximación por cuerpos convexos centralmente simétricos

Observemos que como los cuerpos convexos centralmente simétricos son, precisamente, las bolas unidad de espacios normados, el resultado cuando sendos cuerpos sean centralmente simétricos se traduce en una acotación de las constantes de comparación de normas

$$c\|\cdot\|_a \leq \|\cdot\|_b \leq C\|\cdot\|_a$$

salvo transformaciones afines, donde  $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$  son dos normas cualesquiera.

Para no tener que considerar la posición de los cuerpos, dado un cuerpo centralmente simétrico  $D$  denotaremos por  $\mu D$  al conjunto homotético a  $D$  de razón  $\mu > 0$  con centro el centro de simetría de  $D$ , en lugar del habitual origen. Cuando no sea así, explicitaremos el centro de homotecia. Recordamos que el conjunto homotético a  $D$  de razón  $\mu$  y centro  $o$  es

$$\{o + \mu(d - o) : d \in D\}. \quad (3.7)$$

Por otro lado, por brevedad, dados dos puntos  $p, q \in \mathbb{R}^n$  denotaremos por  $pq$  al segmento que los une, y por  $|pq|$  a la longitud de dicho segmento.

**Teorema 3.6** Sean  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $C \in \mathcal{K}_0^n$ . Si  $\tilde{C}$  es una imagen afín de  $C$  contenida en  $K$  de máximo volumen, entonces  $K \subset (2n - 1)\tilde{C}$ .

*Demostración.* Si  $n = 1$  los únicos cuerpos convexos son los segmentos cerrados, luego el resultado es trivial y la cota es de hecho 1. Sea pues  $n \geq 2$  y sea  $\tilde{C}$  una imagen afín de  $C$  de máximo volumen contenida en  $K$ . Supongamos que la menor imagen homotética de  $\tilde{C}$  en la que está contenido  $K$  es  $(2m - 1)\tilde{C}$  con  $m > n$ , y llegaremos a una contradicción construyendo una imagen afín de  $C$  de mayor volumen que  $\tilde{C}$  contenida en  $K$ .

Si  $(2m - 1)\tilde{C}$  es la menor imagen homotética de  $\tilde{C}$  que contiene a  $K$ , por compacidad sus fronteras deberán intersectar en al menos un punto  $r$ . Si denotamos por  $o$  al centro de simetría de  $\tilde{C}$ , y por tanto de  $(2m - 1)\tilde{C}$ , por convexidad el segmento  $or$  intersectará con la frontera de  $\tilde{C}$  en exactamente un punto  $q$ . La recta completa, digamos  $L$ , intersectará también en el punto  $p \in \text{bd}\tilde{C}$  simétrico a  $q$ .

Consideremos la razón de homotecia  $\mu$  dada por

$$\mu = \frac{m(n - 1)}{n(m - 1)}. \quad (3.8)$$

Es inmediato comprobar que como  $1 < n < m$  entonces  $0 < \mu < 1$ . Definimos entonces  $P$  y  $R$  como las imágenes homotéticas de  $\tilde{C}$  de razón  $\mu$  con centros  $p$  y  $r$ , respectivamente. Asimismo, denotemos por  $s$  y  $t$  las imágenes por dichas homotecias de  $q$  en  $P$  y  $R$ , respectivamente. Como  $p \in \text{bd}\tilde{C}$  y  $0 < \mu < 1$ , es claro que  $P \subset \tilde{C} \subset K$  por convexidad. Por otro lado, como  $0 < \mu < 1$  entonces se tiene  $R \subset \text{conv}(\tilde{C}, r) \subset K$ , sin más que aplicar la definición de homotecia (3.7) y la convexidad de  $K$ . Observemos que como  $P \subset \tilde{C}$  tenemos  $s \in P$ , y como  $\mu < 1$  y  $r \notin \tilde{C}$ , tenemos  $t \notin \tilde{C}$ . Asimismo, es interesante notar que como  $P$  y  $R$  son homotéticos a  $\tilde{C}$  con la misma razón,  $R$  no es más que un trasladado de  $P$  a lo largo de  $L$  a distancia  $\|t - s\|$ . Por tanto, tenemos una situación como la que muestra la figura 3.3.

Como  $p \in \text{bd}\tilde{C}$ , el hiperplano  $H$  que soporta  $\tilde{C}$  en  $p$  también soporta  $P$  en  $p$  por convexidad. Consideremos ahora la aplicación afín  $\delta$  que deja invariante el hiperplano  $H$  y que lleva  $s$  a  $t$ , es decir,  $\delta$  es una dilatación de  $\mathbb{R}^n$  con origen en  $p$  en la dirección de  $L$  de razón  $|pt|/|ps|$ . Lógicamente esta aplicación está unívocamente determinada, por ejemplo, sin más que tomar una base de  $H$  y completar con el vector director de  $L$ ,  $t - s$ , a una base de  $\mathbb{R}^n$ , definiendo en esta base la aplicación como

$$\delta(x) = p + \text{diag}\left(1, \dots, 1, \frac{|pt|}{|ps|}\right)x,$$

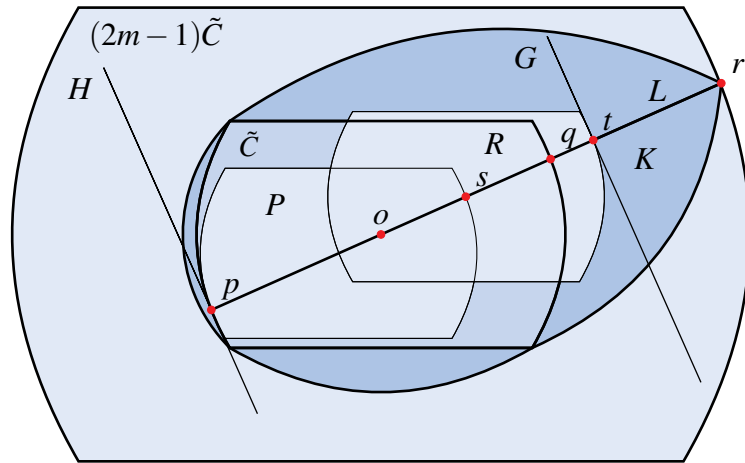


Figura 3.3: Aproximación de un cuerpo  $K$  por un cuerpo centralmente simétrico  $C$

que claramente verifica  $\det(\delta) = |pt|/|ps|$ . Observemos que todo lo dicho está bien definido, en primer lugar porque  $L \notin H$ , luego lo anterior es una verdadera base, y en segundo lugar porque trivialmente  $|ps| > 0$ .

Definimos ahora  $Q = \delta(P)$ , cuerpo que emplearemos para obtener la contradicción. Vamos a probar que  $Q \subset \text{conv}(P \cup R)$ , y como  $P, R \subset K$  esto implicará por convexidad que  $Q \subset K$ , y como veremos,  $\text{vol}(Q) > \text{vol}(\tilde{C})$ . Dado que  $Q$  es una imagen afín de  $C$ , habremos contradicho la maximalidad de  $\tilde{C}$ , terminando la prueba.

Para ver lo primero, consideremos un punto  $t' \in Q$  y su correspondiente preimagen  $s' \in P$  por  $\delta$ . Como  $\delta$  dilata en la dirección de  $L$ , tenemos que la recta  $L'$  que pasa por  $s'$  y  $t'$  es paralela a la recta  $L$  que pasa por  $s$  y  $t$ . Como  $P$  es centralmente simétrico, el hiperplano paralelo a  $H$  que pasa por  $s$  (el punto opuesto a  $p$  en  $P$ ) también soporta  $P$ . Y como  $R$  no es más que una traslación de  $P$  que lleva  $s$  a  $t$ , al ser ambos homotéticos a  $\tilde{C}$  con la misma razón, tenemos entonces que el hiperplano  $G$  paralelo a  $H$  que pasa por  $t$  soporta a  $R$  (véase la figura 3.3). Podemos entonces considerar los puntos  $p' = H \cap L'$  y  $u' = G \cap L'$ , de tal modo que el segmento  $p'u'$  es una traslación del segmento  $pt$ . Finalmente, consideremos el punto  $w' \in L'$  obtenido intersecando con  $L'$  la recta que pasa por  $t$  paralela a segmento  $ss'$ . Véase la figura 3.4 para una aclaración de estos objetos.

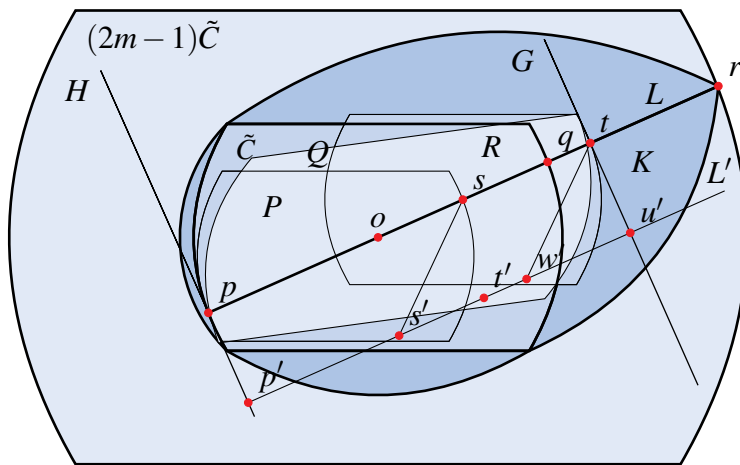


Figura 3.4: Aproximación de un cuerpo  $K$  por un cuerpo centralmente simétrico  $C$  (bis)

Como  $P$  es un trasladado de  $R$ , el segmento  $tw'$  es un trasladado del segmento  $ss'$ . Por tanto, al ser  $s' \in P$ , tenemos  $w' \in R$ . Vamos a probar que  $t' \in s'w'$ , lo cual implicará  $t' \in \text{conv}(P \cup R)$  como queremos



ver. Observemos que como  $\delta(s) = t$  y  $\delta(s') = t'$ , tenemos la relación de proporcionalidad

$$\frac{|pt|}{|ps|} = \frac{|p't'|}{|p's'|},$$

a partir de la cual se deduce la acotación

$$|p'u'| - |p't'| = |pt| - |p't'| = \frac{|pt|}{|ps|} (|ps| - |p's'|) > |ps| - |p's'|.$$

Pero como  $|pt| = |p'u'|$ , y además  $|st| = |s'w'|$  por paralelismo, se tiene  $|ps| = |p's'| + |u'w'|$ , de modo que la acotación anterior se transforma en

$$|p'u'| - |p't'| > |u'w'|,$$

o dicho de otra manera,  $t' \in s'w'$ , como queríamos ver.

Ahora que ya tenemos  $Q \subset \text{conv}(P \cup R) \subset K$ , vamos a acotar el volumen de  $Q$ . Dado que  $\det(\delta) = |pt|/|ps|$ , es preciso estudiar dichas longitudes. Como  $|tr| = \mu|qr|$ , tenemos

$$|ot| = |or| - |tr| = |or| - \mu|qr| = |or| - \mu(|or| - |oq|) = (1 - \mu)|or| + \mu|oq|,$$

y por simetría  $|po| = |oq|$ , de modo que

$$|pt| = |po| + |to| = |oq| + (1 - \mu)|or| + \mu|oq| = (1 + \mu)|oq| + (1 - \mu)|or|.$$

Pero por hipótesis  $|or| = (2m - 1)|oq|$ , luego  $|pt|$  viene dado por

$$|pt| = (1 + \mu)|oq| + (1 - \mu)(2m - 1)|oq| = 2(m - \mu(m - 1))|oq|.$$

Por otro lado, por simetría tenemos

$$|ps| = \mu|pq| = 2\mu|oq|.$$

Sustituyendo sendas expresiones, así como el valor de la razón de homotecia  $\mu$  dado en (3.8), podemos obtener la expresión de  $\det(\delta)$ , que será

$$\frac{|pt|}{|ps|} = \frac{2(m - \mu(m - 1))|oq|}{2\mu|oq|} = \frac{m - \mu(m - 1)}{\mu} = \frac{1}{\mu} \left( m - \frac{m(n - 1)}{n(m - 1)}(m - 1) \right) = \frac{m}{n\mu}.$$

En suma, tenemos la siguiente expresión para el volumen de  $Q$ , haciendo uso de la proposición 1.11 y de la homogeneidad de orden  $n$  del volumen:

$$\text{vol}(Q) = \text{vol}(\delta(P)) = \det(\delta)\text{vol}(P) = \frac{m}{n\mu}\text{vol}(\mu\tilde{C}) = \frac{m\mu^{n-1}}{n}\text{vol}(\tilde{C}) = \frac{m^n(n-1)^{n-1}}{n^n(m-1)^{n-1}}\text{vol}(\tilde{C}).$$

La hipótesis  $2 \leq n < m$  nuevamente implica que

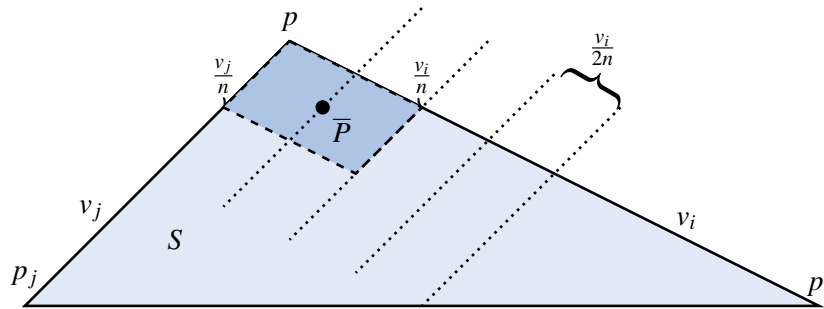
$$\frac{m^n(n-1)^{n-1}}{n^n(m-1)^{n-1}} > 1,$$

de modo que  $\text{vol}(Q) > \text{vol}(\tilde{C})$ , y como  $Q \subset K$  es una imagen afín de  $C$ , esto contradice la maximalidad del volumen de  $\tilde{C}$ , con lo cual hemos terminado la prueba. ■

Para finalizar, vamos a justificar como habíamos anticipado que la cota  $2n - 1$  en el teorema 3.6 es óptima viendo que se alcanza para el caso en que aproximamos un símplice por paralelotopos, que son centralmente simétricos. La figura 3.6 ilustra este ejemplo con  $n = 2$ , de modo que se alcanza la cota homotética 3.

**Teorema 3.7** La cota  $2n - 1$  del teorema 3.6 es óptima.

*Demostración.* Un símlice  $S$  viene caracterizado, por ejemplo, por un vértice  $p$  y  $n$  vectores linealmente independientes  $v_1, \dots, v_n$  que parten de  $p$  y acaban en los restantes  $n$  vértices  $p_1, \dots, p_n$  del símlice. Construimos el paralelotopo  $P$  con vértice  $p$  y lados  $(1/n)v_1, \dots, (1/n)v_n$ . Observemos que dicho paralelotopo está contenido en el símlice, ya que su vértice opuesto será  $p + (1/n)\sum_i v_i$ , es decir, el baricentro de la cara opuesta del símlice.



**Figura 3.5:** Ejemplo extremal para la cota de la razón homotética, símlice y paralelogramo, justificación

Vamos a calcular el menor escalar  $\lambda$  tal que  $S \subset \lambda P$ . Naturalmente, esto se dará precisamente cuando todos los vértices del símlice pertenezcan a  $\lambda P$ , pues en tal caso, por convexidad, se tendrá  $S \subset \lambda P$ . Sin embargo, es fácil ver, por cómo está definido el paralelotopo, que todos los vértices son capturados simultáneamente. En efecto, si nos centramos en una arista del símlice, digamos  $pp_1 \sim v_1$ , observamos que  $P$  sin dilatar captura la porción  $v_1/n$  de dicho segmento, luego será preciso capturar la porción restante,  $(n-1)v_1/n$ . Pero dilatar  $P$  por un factor  $\lambda$  aumenta la porción de segmento  $v_1$  capturado precisamente en

$$\frac{(\lambda - 1)v_1}{2n},$$

es decir, en la mitad de la longitud de la correspondiente arista del paralelotopo (por simetría central) dilatada por  $\lambda - 1$ , pues dilatar por  $\lambda = 1$  no aumenta la porción interceptada, y cada dilatación de una unidad la aumenta en  $v_1/(2n)$ . En consecuencia, para interceptar la porción  $(n-1)v_1/n$  restante será preciso dilatar por  $\lambda = 2n - 1$ . El razonamiento se ilustra en la figura 3.5, donde se muestra la cara formada por los vértices  $p, p_i, p_j$  con  $1 \leq i, j \leq n$ , y donde  $\bar{P}$  es la intersección de dicha cara con  $P$ .

Desde luego, el mismo razonamiento es válido para todos los vértices, y como vemos el resultado obtenido no varía. En consecuencia, se necesita dilatar  $P$  precisamente por un factor  $2n - 1$  para englobar al símlice  $S$ . Convenientemente, Lassak probó en [Las99] mediante una demostración, al igual que la de esta sección, bastante artesanal y que por extensión omitiremos, que el paralelotopo  $P$  tal y como lo hemos definido resulta ser de máximo volumen entre los contenidos en  $S$ . Como ya mencionamos en la sección anterior, todos los paralelotosos son afinmente equivalentes. En consecuencia, queda justificado que la cota del teorema 3.6 es óptima. ■

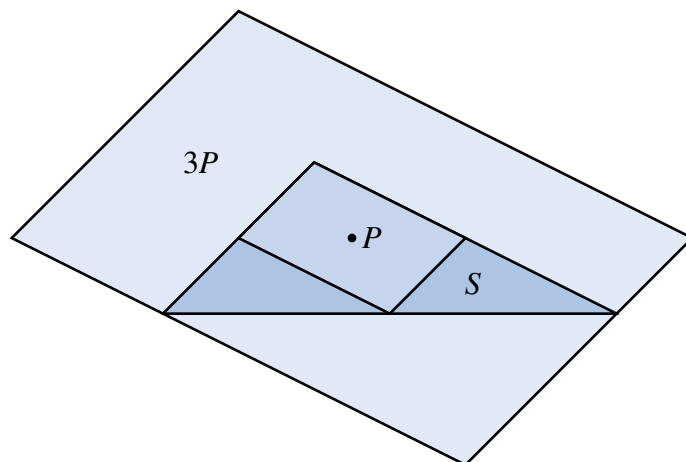
La figura 3.6 muestra el ejemplo extremal para la cota del teorema 3.6 en el caso plano, con el correspondiente paralelogramo contenido en  $S$  de máximo volumen y su dilatación de razón 3 capturando al triángulo, usando el mismo ejemplo que en la figura 3.5.

### 3.2.3 Conexión con la distancia de Banach-Mazur entre espacio normados

Como ya hemos mencionado, las ideas que se han presentado y las acotaciones que hemos estudiado en esta sección pueden reformularse analíticamente para la comparación de espacios normados (o bien esto es una reformulación de aquello), obteniéndose resultados muy interesantes y de amplio estudio en análisis funcional. Tal es la conexión que sería imprudente terminar esta sección sin exponerla, de modo que vamos a introducirla, si bien no entraremos en detalles para no desviarnos del objeto del trabajo. Comenzamos definiendo una distancia entre cuerpos convexos.

**Definición 3.8 — Distancia de Banach-Mazur (geométrica).** Sean  $K, L \in \mathcal{K}^n$  dos cuerpos convexos. Se define su distancia de Banach-Mazur como

$$d(K, L) = \min\{\lambda \geq 1 : \exists T, S \in A_n(\mathbb{R}), TK \subset SL \subset \lambda TK\}.$$



**Figura 3.6:** Ejemplo extremal para la cota de la razón homotética en el plano

A menudo se define la distancia con ínfimos, sin embargo, como nos estamos restringiendo a compactos, podemos siempre suponer que se alcanza. En resumen, esta distancia no es más que el  $\xi_K(L)$  definido en apartados anteriores, es decir, el menor número por el que podemos escalar un conjunto para envolver al otro, salvo transformaciones afines.

Podemos motivar esta distancia de varias maneras, aparte de lo que los resultados del apartado anterior sugieren. Por ejemplo, podríamos pensar en construir una distancia para comparar cuerpos convexos en base a su forma. De esta manera, sería natural eliminar los efectos de la posición, o de cualquier movimiento rígido, es más, de cualquier dilatación. Continuando con este proceso de abstracción se llega a definir esta distancia que, como vemos, tiene particular sentido al comparar clases de equivalencia de cuerpos convexos módulo transformaciones afines, ya que es fácil ver que la distancia de Banach-Mazur es invariante por transformaciones afines sobre cualquiera de sus miembros. En vista de esto, tiene sentido la siguiente definición.

**Definición 3.9** Dos cuerpos convexos  $K, L \in \mathcal{K}^n$  son **afínmente equivalentes**,  $K \sim L$ , si uno es imagen del otro mediante un isomorfismo afín. Denotaremos por  $\mathcal{K}^n / A_n(\mathbb{R})$  al conjunto de dichas clases de equivalencia.

Es habitual trabajar con la distancia de Banach-Mazur en términos de la definición 3.8, y es fácil comprobar que se verifican las siguientes propiedades.

**Proposición 3.10** Dados  $K, L, M \in \mathcal{K}^n$ , se verifica:

- $d(K, L) = 1$  si y sólo si existe  $T \in A_n(\mathbb{R})$  tal que  $L = TK$ .
- $d(K, L) = d(L, K)$ .
- $d(K, M) \leq d(K, L)d(L, M)$ .

*Demostración.* La primera propiedad es trivial. Para la segunda basta observar que si  $TK \subset SL \subset \lambda TK$  entonces  $SL \subset \lambda TK \subset \lambda SL$ . Para la tercera, si tenemos

$$\begin{aligned} AK \subset BL \subset \lambda AK, \\ CL \subset DM \subset \mu CL, \end{aligned} \tag{3.9}$$

para ciertas  $A, B, C, D \in A_n(\mathbb{R})$  y ciertos  $\lambda, \mu \geq 1$ , entonces buscamos probar la existencia de aplicaciones  $E, F \in A_n(\mathbb{R})$  tales que

$$EK \subset FM \subset \lambda \mu EK, \tag{3.10}$$

ya que esto implicará  $d(K, M) \leq \lambda\mu$ , y como el razonamiento será válido para todo  $\lambda, \mu$  en las condiciones anteriores, en particular se desprenderá que  $d(K, M) \leq d(K, L)d(L, M)$ .

Deducimos de la segunda relación en (3.9) que  $L \subset C^{-1}DM$ , ergo sustituyendo en la primera y luego en la segunda tenemos

$$AK \subset BL \subset BC^{-1}DM \subset BC^{-1}\mu CL. \quad (3.11)$$

Por otro lado, de la primera relación en (3.9) se desprende asimismo que  $L \subset B^{-1}\lambda AK$ , y sustituyendo en (3.11) obtenemos

$$AK \subset BC^{-1}DM \subset BC^{-1}\mu CB^{-1}\lambda AK. \quad (3.12)$$

Aplicando  $CB^{-1}$  a los miembros de (3.12) llegamos a

$$CB^{-1}AK \subset DM \subset \mu CB^{-1}\lambda AK. \quad (3.13)$$

Si conseguimos permutar el producto por  $\lambda$  con la aplicación afín  $CB^{-1}$  apropiadamente habremos terminado. Dada una aplicación afín  $T$  cualquiera tal que  $T = t + \bar{T}$  con  $t \in \mathbb{R}^n$  y  $\bar{T} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , podemos considerar  $T^* = (1/\lambda)t + \bar{T}$ , y entonces se tiene

$$T\lambda K = t + \bar{T}\lambda K = t + \lambda\bar{T}K = \lambda \left( \frac{1}{\lambda}t + \bar{T}K \right) = \lambda T^*K.$$

Aplicando lo anterior en (3.13) con  $T = CB^{-1}$  se deduce

$$TAK \subset DM \subset \lambda\mu T^*AK. \quad (3.14)$$

Afirmamos que esto concluye el argumento. En efecto, observemos que si bien las aplicaciones afines en los miembros extremos no coinciden, sí coincide su parte lineal, por la definición de  $T^*$ . Aplicando entonces la inversa de dicha parte lineal, (3.14) se transforma en

$$y_1 + K \subset FM \subset \lambda\mu(y_2 + K), \quad (3.15)$$

para ciertos  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$  y cierta aplicación afín  $F \in A_n(\mathbb{R})$ . Así, (3.15) puede refinarse a

$$y + K \subset x + FM \subset \lambda\mu(y + K), \quad (3.16)$$

como se puede comprobar tomando

$$x = \frac{\lambda\mu}{\lambda\mu - 1}(y_2 - y_1) \quad \text{e} \quad y = \frac{\lambda\mu y_2 - y_1}{\lambda\mu - 1}.$$

Es inmediato que (3.16) implica (3.10), con lo cual hemos terminado. Observemos que en el razonamiento anterior hemos asumido  $\lambda\mu > 1$ , ya que el caso  $\lambda\mu = 1$  es trivial, pues entonces (3.15) es una igualdad y, por tanto,  $y_1 = y_2$ . ■

! De lo realizado al final de la demostración de la proposición 3.10 se concluye también que la distancia de Banach-Mazur puede definirse con traslaciones distintas, siendo únicamente crucial la parte lineal.

Atendiendo a la primera y a la tercera condición de la proposición 3.10, vemos que la distancia de Banach-Mazur así definida no es tal. Sin embargo, en vista de las tres condiciones, es inmediato que el logaritmo definido en el conjunto cociente de cuerpos convexos afinmente equivalentes sí será una verdadera distancia. En consecuencia, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 3.11** El espacio  $(\mathcal{K}^n / A_n(\mathbb{R}), \log d_{\text{BM}})$  es métrico.

Es común trabajar tanto con el logaritmo como sin él, según la preferencia de los autores. Hecha esta introducción, podemos reformular lo dicho en términos analíticos. Si nos limitamos a conjuntos simétricos respecto al origen, podemos restringir los isomorfismos afines a isomorfismos lineales, que al conmutar con el producto por escalares, nos permiten simplificar la definición 3.8 de la distancia de Banach-Mazur a un único isomorfismo lineal. Por ejemplo,

$$d(K, L) = \min\{\lambda \geq 1: \exists T \in \text{GL}_n(\mathbb{R}), K \subset TL \subset \lambda K\}. \quad (3.17)$$

Como los cuerpos convexos centralmente simétricos son precisamente las bolas unidad de los espacios reales normados, y envolver bolas unidad es equivalente a acotar las correspondientes normas, se tiene la siguiente definición equivalente.

**Definición 3.12 — Distancia de Banach-Mazur (analítica).** Sean  $X, Y$  dos espacios normados de dimensión  $n$ , se define su distancia de Banach-Mazur como

$$d(X, Y) = \log \inf\{\|T\| \|T^{-1}\|: T \in \text{GL}_n(X, Y)\}.$$

Para probar la equivalencia de las definiciones 3.8 y 3.12, es preciso ver antes que trabajar con normas y trabajar con cuerpos convexos centralmente simétricos es equivalente, lo cual se resuelve con la siguiente proposición.

**Proposición 3.13** Toda bola unidad de un espacio real normado es un cuerpo convexo centralmente simétrico. Recíprocamente, todo cuerpo convexo centralmente simétrico  $K$  induce una norma dada por

$$\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0: x \in \lambda K\},$$

para la cual la bola unidad es  $K$ , luego toda norma es una norma inducida de este modo.

*Demostración.* Es trivial que toda bola unidad es compacta por el teorema de Heine-Borel, centralmente simétrica porque  $\|x\| = \|-x\|$ , y también convexa por las propiedades de norma. En efecto, si  $\|x\|, \|y\| \leq 1$  para ciertos  $x, y$  entonces

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda \|x\| + (1 - \lambda)\|y\| \leq \lambda + (1 - \lambda) = 1.$$

Por otro lado, vamos a comprobar que  $\|x\|_K$  así definido es una norma para la cual  $K$  es la bola unidad. Que  $K$  sea simétrico respecto del origen es equivalente a que  $K = -K$ .

- I) Es claro por definición que  $\|x\|_K \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Además,  $\|x\|_K = 0$  si y sólo si  $x \in 0K$ , es decir, cuando  $x = 0$ .
- II) Veamos ahora la homogeneidad, sea  $\mu \in \mathbb{R}$ . Observemos en primer lugar que podemos suponer  $\mu \geq 0$ , ya que, por la simetría central,

$$\|-x\|_K = \min\{\lambda \geq 0: -x \in \lambda K\} = \min\{\lambda \geq 0: x \in -\lambda K\} = \min\{\lambda \geq 0: x \in \lambda K\} = \|x\|_K.$$

Así pues, dado  $\mu \geq 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mu \|x\|_K &= \mu \min\{\lambda \geq 0: x \in \lambda K\} = \min\{\mu\lambda \geq 0: x \in \lambda K\} \\ &= \min\left\{\lambda' \geq 0: x \in \frac{1}{\mu}\lambda'K\right\} = \min\{\lambda' \geq 0: \mu x \in \lambda'K\} = \|\mu x\|_K. \end{aligned}$$

- III) Finalmente, veamos la desigualdad triangular. Es elemental por definición que se tiene  $x \in \|x\|_K K$  e  $y \in \|y\|_K K$ , luego será  $x = \|x\|_K k_1$  e  $y = \|y\|_K k_2$  para ciertos  $k_1, k_2 \in K$ . Por tanto, se deduce que

$$x + y = \|x\|_K k_1 + \|y\|_K k_2 = (\|x\|_K + \|y\|_K) \left( \frac{\|x\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} k_1 + \frac{\|y\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} k_2 \right) \in (\|x\|_K + \|y\|_K) K,$$

donde en el último paso se usa la convexidad de  $K$ . De lo anterior se desprende que  $\|x + y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K$ , como queríamos ver.

Determinar la bola unidad es inmediato. Hay que ver que  $\|x\|_K \leq 1$  si y sólo si  $x \in K$ . Como  $\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0: x \in \lambda K\}$ , si  $x \in K = 1K$  entonces  $\|x\|_K \leq 1$ , y si  $\|x\|_K = \lambda \leq 1$  entonces  $x \in \lambda K \subset K$  (el contenido se debe a que  $0 \in K$ ). ■

De modo que podemos asumir cuando trabajemos con normas que son las inducidas por sus bolas unidad. Podemos entonces probar la equivalencia de las definiciones 3.8 y 3.12.

**Proposición 3.14** Sean  $K, L \in \mathcal{K}_0^n$  y  $X, Y$  espacios normados tales que  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$  e  $Y = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_L)$ . Entonces  $d(X, Y) = \log d(K, L)$ .

*Demostración.* Probaremos la doble desigualdad. Como  $K, L \in \mathcal{K}_0^n$  podemos restringirnos a isomorfismos lineales. Recordemos que  $K, L$  son las bolas unidad de  $X, Y$ , respectivamente. Podemos considerar  $\text{GL}_n(\mathbb{R}) \equiv \text{GL}_n(X, Y)$ , según veamos la aplicación entre los espacios normados o simplemente en  $\mathbb{R}^n$ . Trabajaremos con  $d(L, K)$  por comodidad de notación.

Sea  $\lambda \geq 1$  tal que existe  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  con  $L \subset TK \subset \lambda L$ . Por un lado, al ser isomorfismo tenemos  $T^{-1}L \subset K$ , luego dado  $y \in L$  se verifica  $\|T^{-1}y\|_K \leq 1$ , de modo que  $\|T^{-1}\| = \sup_{y \in L} \|T^{-1}y\|_K \leq 1$ . Por otro lado, como  $TK \subset \lambda L$  entonces dado  $x \in K$  se tiene  $\|Tx\|_L \leq \lambda$ , luego  $\|T\| = \sup_{x \in K} \|Tx\|_L \leq \lambda$ . Uniendo ambas cosas, tenemos que  $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$ , ergo  $\inf\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$ , o dicho de otro modo,  $d(X, Y) \leq \log \lambda$ . Como esto es válido para todo  $\lambda$  que esté en las condiciones iniciales, entonces  $d(X, Y) \leq \log d(K, L)$ .

Para ver el recíproco, sea  $\lambda = \|T\|\|T^{-1}\|$  para cierta  $T \in \text{GL}_n(X, Y)$ . Queremos obtener la existencia de  $S \in \text{GL}_n(X, Y)$  con  $L \subset SK \subset \lambda L$ . Lo razonable es buscarla de la forma  $S = \mu T$ , pues en tal caso  $\|S\|\|S^{-1}\| = \|T\|\|T^{-1}\|$ . Que se cumpla  $L \subset \mu TK$  es equivalente a que se cumpla  $\mu^{-1}T^{-1}L \subset K$ , lo cual se da si y sólo si  $\mu^{-1}T^{-1}y \in K$  para todo  $y \in L$ , es decir, si y sólo si  $\mu^{-1}\|T^{-1}y\|_K \leq 1$ . Luego tomando supremos debe ser  $\mu^{-1}\|T^{-1}\| \leq 1$ , ergo  $\|T^{-1}\| \leq \mu$ . Análogamente, si  $\mu TK \subset \lambda L$  entonces  $\mu\|T\| \leq \lambda = \|T\|\|T^{-1}\|$ , es decir,  $\mu \leq \|T^{-1}\|$ . Por tanto, debe ser necesariamente  $\mu = \|T^{-1}\|$ . De hecho, como todo lo anterior son equivalencias, tenemos que efectivamente la aplicación  $S = \|T^{-1}\|T$  verifica  $L \subset SK \subset \lambda L$ . En conclusión,  $d(K, L) \leq \|T\|\|T^{-1}\|$ , y como esto es válido para todo  $T \in \text{GL}(X, Y)$ , tenemos  $\log d(K, L) \leq d(X, Y)$ , como queríamos ver. ■

Podemos ahora explotar las acotaciones de John obtenidas en el capítulo 2, concretamente para cuerpos convexos centralmente simétricos. En efecto, por el corolario 2.24 sabemos que podemos envolver cualquier cuerpo convexo centralmente simétrico con dos copias homotéticas de un elipsoide de razón a lo sumo  $\sqrt{n}$ , y por el corolario 2.20 sabemos que dicha cota se alcanza en el caso del cubo y del crosspolitopo. Ahora bien, usando la notación habitual

$$\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|x\|_p) \text{ donde } \|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ para todo } x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, 1 \leq p \leq +\infty,$$

sabemos que la bola unidad del espacio euclídeo  $\ell_2^n$  es una bola euclídea, cuyas transformaciones afines son elipsoides, la bola unidad de  $\ell_1^n$  es el crosspolitopo, y la bola unidad de  $\ell_\infty^n$  es el cubo. De todo esto se siguen inmediatamente las siguientes acotaciones.

**Proposición 3.15** Sean  $X, Y$  espacios normados de dimensión  $n$ , entonces

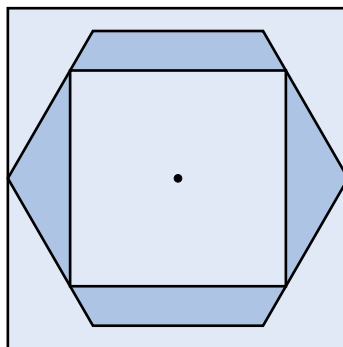
1.  $d(\ell_2^n, X) \leq \frac{1}{2} \log n$ .
2.  $d(\ell_2^n, \ell_1^n) = d(\ell_2^n, \ell_\infty^n) = \frac{1}{2} \log n$ .
3.  $d(X, Y) \leq \log n$ .

La tercera propiedad se traduce en que el espacio de espacios normados equipado con la distancia de Banach-Mazur es acotado, y su diámetro es menor o igual que  $\log n$ . De hecho, se tiene la propiedad que muestra la proposición 3.16 (véase, e.g., [Gia90]). Sin embargo, si bien la primera cota es óptima, como muestran los ejemplos extremales  $\ell_1^n$  y  $\ell_\infty^n$ , la segunda no ha de serlo necesariamente y, en efecto, se ha comprobado abundantemente que no es así.

**Proposición 3.16** El conjunto de clases de isometría de espacios normados de dimensión  $n$ , dotado de la métrica de Banach-Mazur, es un espacio métrico compacto que denotamos por  $\mathcal{B}\mathcal{M}_n$ .

En consecuencia, se conoce a este espacio como **compacto de Banach-Mazur**, siendo un marco de trabajo bastante natural para la comparación cuantitativa de espacios normados de dimensión finita. Estos resultados propiciaron una fructífera investigación que, entre otras cosas, ha ido refinando las diversas cotas que se pueden plantear en este contexto, altamente relacionadas con las cotas que hemos estudiado en esta sección. Se puede consultar [Gia90] para algunos de los principales progresos en distintas direcciones que se han logrado en el estudio de este espacio. Vamos a presentar por completitud algunos de los más relevantes sin demostración. Las numerosas referencias correspondientes pueden encontrarse en [Gia90].

Quizá la primera cuestión que surge consiste en pulir la acotación del diámetro. Naturalmente, de las acotaciones de la proposición 3.15 se deduce que  $(1/2)\log n \leq D(\mathcal{B}\mathcal{M}_n) \leq \log n$ . Se conoce con exactitud únicamente su valor para  $n = 2$ , para el cual  $D(\mathcal{B}\mathcal{M}_2) = \log(3/2)$ , estrictamente contenido entre las acotaciones anteriores que se deducen del teorema de John. Asplund probó en 1960 que todo cuerpo convexo plano centralmente simétrico puede envolverse tanto con paralelogramos como con hexágonos regulares homotéticos de razón a lo sumo  $3/2$  tras una transformación afín apropiada, en ambos casos dándose la igualdad únicamente cuando el otro cuerpo es un hexágono regular o un paralelogramo, respectivamente. Consecuentemente, conjeturó que  $D(\mathcal{B}\mathcal{M}_2) = \log(3/2)$  alcanzándose la igualdad únicamente entre las clases del paralelogramo y del hexágono regular. Más de 20 años más tarde, Stromquist probó un resultado más fuerte siguiendo la filosofía de Asplund, que en particular implicaba su conjetura. Se trata de una demostración bastante trabajosa, distinguiendo numerosos casos para cubrir todas las clases de cuerpos, y logró obtener la existencia de un cuerpo  $K$  tal que  $d(K, L) \leq \frac{1}{2}\log(3/2)$  para todo  $L$ , con igualdad únicamente cuando  $L$  es un paralelogramo o un hexágono regular. Dicho de otro modo, el cuerpo  $K$  es un “centro” de  $\mathcal{B}\mathcal{M}_2$ , y el radio de  $\mathcal{B}\mathcal{M}_2$  centrado en dicho  $K$  es precisamente la mitad del diámetro. La figura 3.7 ilustra el hecho de que los paralelogramos y los hexágonos regulares son los cuerpos convexos centralmente simétricos más distantes en dimensión 2.



**Figura 3.7:** La distancia de Banach-Mazur entre cuerpos convexos planos se maximiza con los paralelogramos y los hexágonos regulares

En dimensión superior sólo se conoce el orden de crecimiento del diámetro. El mismo año de la prueba anterior, Gluskin probó mediante un argumento probabilístico la existencia de una constante  $0 < c < 1$  independiente de  $n$  tal que  $D(\mathcal{B}\mathcal{M}_n) \geq \log(cn)$ . Uniendo esto a la cota  $D(\mathcal{B}\mathcal{M}_n) \leq \log n$  que se deduce del teorema de John, obtenemos que  $D(\mathcal{B}\mathcal{M}_n) = o(\log n)$ .

Sin embargo, para muchas familias de espacios se conocen mejores estimaciones, o incluso valores concretos, de su distancia. En especial, para los espacios  $\ell_p^n$ , se sabe (Gurarii, Kadec, Macaev) que

$$1 \leq p \leq q \leq 2 \text{ ó } 2 \leq p \leq q \leq \infty \implies d(\ell_p^n, \ell_q^n) = \log n^{1/p-1/q},$$

$$1 \leq p < 2 < q \leq \infty \implies \log(c_1 n^\alpha) \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \log(c_2 n^\alpha) \text{ con } \alpha = \max\{1/p - 1/2, 1/2 - 1/q\}.$$

Con respecto a espacios particulares, se conoce también que la distancia de un espacio a su dual se aleja del diámetro (Bourgain y Milman), por cuanto está acotada superiormente por  $\log(c(\log n)^d n^{5/6})$ , donde  $c, d > 0$  son constantes independiente de  $n$ , luego esta distancia es de orden estrictamente menor que  $\log n$ .

Surge también la cuestión de estudiar los “radios” de  $\mathcal{B}\mathcal{M}_n$ , es decir, fijando un espacio  $X$  y estimando  $R(X) = \max_Y d(X, Y)$ . Nuevamente, de la cota de John de la proposición 3.15 se sigue que  $R(\ell_2^n) =$

$(1/2) \log n$ . Observemos que este valor es del menor orden posible, pues de lo contrario, por la desigualdad triangular contradiríamos el hecho de que  $D(\mathcal{B}\mathcal{M}_n) = o(\log n)$ . En consecuencia, a los espacios  $X$  tales que  $R(X) = (1/2) \log(cn)$  para cierta  $c > 0$ , es decir, tales que  $o(R(X)) = (1/2) \log n$ , podemos llamarlos “centros asintóticos”, siguiendo la nomenclatura de [Gia90]. Del resto de espacios se sabe relativamente poco en comparación, aunque es conocido por ejemplo que  $R(\ell_1^n) = R(\ell_\infty^n) = o(\log n)$  (Bourgain y Szarek), luego en particular,  $\ell_1^n$  y  $\ell_\infty^n$  no son centros asintóticos. Es interesante observar que no todos los centros asintóticos son cercanos. Por ejemplo, el espacio  $X = \ell_2^s \oplus \ell_1^{n-s}$  con  $s = \lfloor n/2 \rfloor$  es un centro asintótico que verifica  $d(X, \ell_2^n) \geq (1/2) \log(n/2)$  (Bourgain y Szarek), es decir, se mantiene alejado de  $\ell_2^n$ .

Otros resultados interesantes, con lo que vamos a terminar este apartado, consisten en estudiar las secciones de los espacios normados. Un conocido resultado, el teorema de Dvoretzky, afirma que cuando la dimensión es suficientemente grande, todo espacio normado posee subespacios arbitrariamente similares al euclídeo. Alternativamente, regresando a la formulación mediante cuerpos convexos, todo cuerpo convexo centralmente simétrico en dimensión suficientemente alta posee secciones lineales arbitrariamente similares a un elipsoide. Con mayor concreción, si fijamos  $n \in \mathbb{N}$  y  $\lambda > 0$ , entonces dado un espacio normado  $n$ -dimensional  $X$  existe  $k = k(n, \lambda) \in \mathbb{N}$  y un subespacio  $k$ -dimensional  $E$  de  $X$  tal que  $d(E, \ell_2^k) \leq \log(1 + \lambda)$ . La dimensión  $k$  puede tomarse tal que  $k \geq c\lambda^2 \log n$  con  $c$  independiente de  $n$ , aunque en algunos casos pueden tomarse secciones de dimensión mucho mayor, incluso proporcionales a  $n$ , como es el caso de  $\ell_p^n$  con  $1 \leq p \leq 2$ .

Explicaciones más detalladas de todos estos resultados, junto con sus correspondientes referencias, pueden encontrarse en el survey [Gia90]. Este breve retal de resultados sobre el compacto de Banach-Mazur es suficiente para dar por terminada la conexión que queríamos presentar entre la envoltura de cuerpos convexos y la distancia entre espacios normados, con lo cual, finalizamos la sección.

### 3.3 Generalización del volumen a otros funcionales

Otra extensión completamente natural del teorema de John consiste en estudiar qué sucede al sustituir el funcional volumen por otros similares. En esta sección, vamos a estudiar dicha cuestión en el caso en que consideramos los elipsoides de mínima área de superficie conteniendo a un cuerpo convexo, algo investigado por Gruber en [Gru08, sec. 3], restringiéndonos al caso centralmente simétrico. Anteriormente, en el teorema 2.9 habíamos probado que para todo cuerpo convexo existe un único elipsoide contenido en él de máximo volumen, y en el teorema 2.16 caracterizamos los puntos de contacto entre las fronteras del cuerpo y su elipsoide óptimo cuando éste es la bola unidad. Debido a la unicidad, es común explotar este hecho considerando la imagen afín de un cuerpo en estas condiciones y haciendo uso de las propiedades para los puntos de contacto que se tienen por el teorema de John, a menudo empleándolos como conjunto generador y representando el producto escalar mediante ellos.

En esta sección vamos a demostrar precisamente la extensión de dichos teoremas al funcional área de superficie, y comentaremos también, sin demostraciones, la correspondiente generalización a quermassintegrales (véase la definición 3.29) en el apartado 3.3.4. En primer lugar, probaremos en el apartado 3.3.2, de un modo bastante más complejo que en el caso del volumen, la unicidad del elipsoide de mínima área de superficie que contiene a un cuerpo. Tras esto, veremos en el apartado 3.3.3 que la caracterización para los puntos de contacto es precisamente la misma que en el caso del volumen, obteniendo como consecuencia que el elipsoide de mínimo volumen que contiene a un cuerpo convexo centralmente simétrico es la bola unidad si y sólo si ésta es el elipsoide de mínima área de superficie que lo contiene. Es más, en el resultado más general posible, veremos que la caracterización coincide para todas las quermassintegrales.

#### 3.3.1 Algunas herramientas previas

Es menester precisar la noción de área de superficie que emplearemos en esta sección. En el capítulo siguiente, cuando apliquemos los resultados del teorema de John a estudiar la desigualdad isoperimétrica



y a invertirla, demostraremos también una forma equivalente de definir el área de superficie (proposición 4.9) que, intuitivamente, refleja el conocido hecho de que el área de superficie es la derivada del volumen.

**Definición 3.17** Dado  $P \in \mathfrak{P}^n$  con  $\dim P = n$ , el **área de superficie** de  $P$  es  $S(P) = \text{vol}_{n-1}(\text{bd}P)$ . Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , el área de superficie de  $K$  es  $\lim_{t \rightarrow \infty} S(P_t)$  donde  $(P_t)_t \subset \mathfrak{P}^n$  con  $P_t \rightarrow K$ .

La segunda parte de la definición anterior requiere de justificación. Como opción puede consultarse [Sch14, Th. 2.4.15], que presenta un resultado bastante más fuerte. El esquema de la prueba, tanto para la unicidad del elipsoide de mínima área de superficie que contiene a un cuerpo convexo como para la caracterización de los puntos de contacto, se basa en la misma idea que las correspondientes demostraciones que hemos presentado del teorema de John: construir en el conjunto  $\mathcal{P}^n$  de formas cuadráticas definidas positivas (o matrices simétricas definidas positivas, ver definición 2.11) un subconjunto con diversas bondades entre las que se incluye la convexidad estricta, lo que más tarde se emplea para poder separar dicho conjunto del conjunto de elipsoides que contienen a nuestro cuerpo, siendo el (único) punto de contacto entre sendos conjuntos, precisamente, el elipsoide que minimiza el área de superficie.

No obstante, resulta en este caso mucho más complicado demostrar el resultado, en particular, la convexidad estricta. Para la prueba que vamos a presentar es preciso recurrir a maquinaria más pesada, de modo que vamos en este apartado a introducir, sin demostración, algunos conceptos y resultado previos que explotaremos más adelante.

En primer lugar, recordemos que dadas matrices  $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  con  $B$  simétrica definida positiva, podemos expresar un elipsoide bien en la forma  $\varepsilon_1 = p + AB_n$ , o bien en la forma  $\varepsilon_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Bx \leq 1\}$ , y en tales casos sus volúmenes vienen dados por

$$\text{vol}(\varepsilon_1) = |\det(A)|\text{vol}(B_n), \quad \text{vol}(\varepsilon_2) = \frac{\text{vol}(B_n)}{\sqrt{\det(B)}}, \quad (3.18)$$

tal y como vimos en el corolario 1.12. Emplearemos ambas expresiones según convenga.

Por otro lado, precisamos de un elegante resultado de Cauchy que nos dice que el área de superficie  $S$  de un cuerpo no es más que la media del volumen  $(n-1)$ -dimensional de todas sus proyecciones ortogonales sobre hiperplanos, salvo una constante. Dado un cuerpo  $K \in \mathcal{K}^n$  y un subespacio afín  $E \subset \mathbb{R}^n$  de dimensión  $k$ , denotemos por  $K|E$  a la proyección ortogonal de  $K$  en  $E$ , siendo evidente que  $K|E \in \mathcal{K}^k$ . En particular, dado un vector  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , denotemos por  $K|u^\perp$  a la proyección ortogonal de  $K$  en un hiperplano de normal  $u$ . Entonces tenemos:

**Teorema 3.18 — Fórmula de Cauchy para el área de superficie.** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$  se verifica

$$S(K) = \frac{1}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \text{vol}_{n-1}(K|u^\perp) dS(u).$$

Donde, de ahora en adelante,  $dS(u)$  denotará la medida  $(n-1)$ -dimensional (esférica) de Lebesgue usual. Una demostración puede consultarse en [Gru07, Th 6.15]. Dado un cuerpo  $K \in \mathcal{K}^n$  podemos construir, asociado a él, un cuerpo tal que su función soporte en cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  es precisamente el volumen de la proyección de  $K$  en dicha dirección. Esto está bien definido, pues recordemos que según vimos al final del capítulo 1, existe una biyección entre los cuerpos convexos y las funciones soporte.

**Definición 3.19** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , su **cuerpo proyección**  $\Pi K \in \mathcal{K}^n$  es el cuerpo convexo que verifica  $h_{\Pi K}(u) = \text{vol}_{n-1}(K|u^\perp)$  para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

Que el cuerpo proyección es un cuerpo convexo es algo que probó ya Minkowski. En particular, observemos que los cuerpos proyección de los cuerpos de anchura constante en el plano serán círculos, y también es claro que en general si un cuerpo posee igual volumen en todas sus proyecciones ortogonales, entonces su cuerpo proyección será una bola.

En relación a sendos conceptos anteriores, emplearemos en la demostración el siguiente remarcable teorema que precisa la potente relación entre las proyecciones de un cuerpo y él mismo. No sólo las proyecciones determinan el cuerpo, sino que sus volúmenes lo hacen.

**Teorema 3.20 — Teorema de la proyección de Aleksandrov.** Dados  $K, L \in \mathcal{K}^n$ , si  $\text{vol}_{n-1}(K|u^\perp) = \text{vol}_{n-1}(L|u^\perp)$  para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  entonces  $K = L$ .

Estas son las armas que necesitamos para abordar con comodidad el teorema, siguiendo la prueba de Gruber en [Gru08, sec. 3]. Vamos, para terminar, a exponer un par de propiedades para estudiar cómo se comportan las aplicaciones lineales con las funciones soporte y con los cuerpos proyección.

**Proposición 3.21** Sean  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $A \in \mathcal{P}^n$ . Entonces:

1.  $h_{AK}(u) = h_K(Au)$  para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .
2.  $\Pi(AK) = \det(A)A^{-1}\Pi K$ .

*Demostración.* La primera propiedad es inmediata por definición de función soporte (definición 1.13) y usando la simetría de  $A$  para obtener  $\langle Ax, u \rangle = \langle x, Au \rangle$ . Para la segunda, haciendo uso de la biyección entre cuerpos convexos y funciones soporte que vimos al final del capítulo 1 bastará probar que

$$h_{\Pi(AK)}(u) = h_{\det(A)A^{-1}\Pi K}(u) = \det(A)h_{A^{-1}\Pi K}(u) = \det(A)h_{\Pi K}(A^{-1}u) = \det(A)\|A^{-1}u\|h_{\Pi K}\left(\frac{A^{-1}u}{\|A^{-1}u\|}\right),$$

para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Así, usando la definición del cuerpo proyección será suficiente demostrar

$$\text{vol}_{n-1}\left((AK)|u^\perp\right) = \det(A)\|A^{-1}u\|\text{vol}_{n-1}\left(K|(A^{-1}u)^\perp\right),$$

donde en el miembro derecho hemos prescindido de la normalización dado que es indiferente a la hora de determinar el hiperplano normal.

A estas alturas da la sensación de que una aplicación inmediata de la proposición 1.11 que relaciona las aplicaciones lineales con el volumen debería bastar. Sin embargo hay varias diferencias, entre ellas, que estamos tratando con volúmenes cuya dimensión no coincide con la de la aplicación lineal, de modo que será necesario afinar la prueba un poco.

Vamos a comenzar probando que la aplicación lineal “conmuta” con la proyección en el sentido de que  $(AK)|u^\perp = A(K|(A^{-1}u)^\perp)$ . Por un lado, si  $x \in (AK)|u^\perp$  entonces existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $x + ru \in AK$ , de modo que existe  $z \in K$  tal que  $Az = x + ru$ . Por otro lado, si  $x \in A(K|(A^{-1}u)^\perp)$  entonces existe  $y \in K|(A^{-1}u)^\perp$  tal que  $x = Ay$ , luego existen  $z \in K, r \in \mathbb{R}$  con  $z = y + rA^{-1}u = A^{-1}x + rA^{-1}u$ . Aplicando  $A$  a esta expresión o  $A^{-1}$  a la anterior es inmediato ver que son equivalentes.

Hecho esto, construimos sobre tales conjuntos  $(n-1)$ -dimensionales un cilindro de altura 1, de modo que su volumen  $n$ -dimensional coincida con el volumen  $(n-1)$ -dimensional de la base y podamos aplicar la proposición 1.11. Dado un conjunto  $S$  contenido en algún hiperplano de  $\mathbb{R}^n$ , y un vector  $u$  linealmente independiente a dicho hiperplano, denotemos por  $C(S, u)$  al cilindro de base  $S$ , directriz  $u$  y longitud  $\|u\|$ . Como las transformaciones afines preservan el paralelismo de espacios afines, la imagen de un cilindro es un cilindro y se verifica

$$A(C(K|(A^{-1}u)^\perp, A^{-1}u)) = C(A(K|(A^{-1}u)^\perp), AA^{-1}u),$$

luego usando la igualdad de proyecciones anteriormente probada

$$A(C(K|(A^{-1}u)^\perp, A^{-1}u)) = C((AK)|u^\perp, u).$$

Tomando volúmenes y haciendo uso de la proposición 1.11 tenemos

$$\det(A)\text{vol}(C(K|(A^{-1}u)^\perp, A^{-1}u)) = \text{vol}(C((AK)|u^\perp, u)),$$

y normalizando las alturas de los cilindros, que observemos son rectos,

$$\det(A)\|A^{-1}u\|\text{vol}\left(C\left(K|(A^{-1}u)^\perp, \frac{A^{-1}u}{\|A^{-1}u\|}\right)\right) = \text{vol}(C((AK)|u^\perp, u)).$$

Luego, por lo dicho, tales volúmenes coinciden con los de las respectivas bases, de modo que llegamos a

$$\det(A)\|A^{-1}u\|\text{vol}_{n-1}(K|(A^{-1}u)^\perp) = \text{vol}_{n-1}((AK)|u^\perp),$$

como queríamos. ■

### 3.3.2 Existencia y unicidad

Al igual que en el capítulo 2, comenzaremos estudiando las bondades de un cierto subconjunto de  $\mathcal{P}^n$ , punto en el radica la principal dificultad de la prueba, ya que una vez obtenidas dichas propiedades el argumento es bastante análogo al que ya hicimos para el volumen. Vamos a restringir la prueba al caso centralmente simétrico, lo que nos permite asumir que los elipsoides buscados están centrados en el origen. Dada  $A \in \mathcal{P}^n$  denotemos por  $E_A$  al correspondiente elipsoide

$$E_A = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T A x \leq 1\}. \quad (3.19)$$

Asimismo, recordemos que vemos el espacio  $\mathcal{P}^n \subset \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  no con la métrica usual sino con la métrica inducida por el producto escalar

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}.$$

Con independencia de la complejidad del siguiente resultado lo denotamos como lema por servirnos como una mera utilidad.

**Lema 3.22** El conjunto  $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}^n : S(E_A) \leq S(B_n)\}$  es cerrado, no acotado, con frontera suave y estrictamente convexo en  $\mathcal{P}^n$ . Además, la identidad  $I_n$  es normal interior a  $\mathcal{A}$  en su punto frontera  $I_n$ .

*Demostración.* Es conocido que el funcional área de superficie es continuo (con respecto a la métrica de Hausdorff), de modo que por su definición,  $\mathcal{A}$  es cerrado. Por otro lado, es claro que  $E_{tA} = (1/t)E_A$  para  $t > 0$ , de modo que por homogeneidad, tenemos  $S(E_{tA}) = t^{-(n-1)}S(E_A)$ , es decir, que la función  $S$  es decreciente en cada rayo o semirrecta que parte del origen. En consecuencia,  $\mathcal{A}$  está separado del origen y no es acotado.

Pasemos a probar la convexidad estricta, que será la parte más trabajosa donde emplearemos la mayoría de las herramientas previas que hemos presentado en la sección anterior. El objetivo es obtener la acotación del área de superficie mediante la fórmula de Cauchy, con lo cual debemos estudiar las proyecciones ortogonales de los elipsoides en hiperplanos, que claramente son elipsoides  $(n-1)$ -dimensionales.

Comencemos estudiando el caso en que proyectamos ortogonalmente sobre  $\mathbb{R}^{n-1} \equiv \{x_n = 0\}$ , viendo luego que el resultado no depende del hiperplano escogido. Sea  $E_A$  con  $A \in \mathcal{P}^n$  simétrica definida positiva y sea  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Buscamos hallar la matriz  $A' \in \mathcal{P}^{n-1}$  tal que  $E_A|_{\mathbb{R}^{n-1}} = E_{A'}$ . Por comodidad, dados un vector  $v \in \mathbb{R}^n$  y una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , denotemos en lo que resta de prueba por  $\bar{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$  al vector eliminando su última componente (su proyección) y por  $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  a la matriz eliminando su última fila y columna. Denotemos también por  $A_k$  a sus columnas, o filas, ya que trabajamos con matrices simétricas.

Sea  $x = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0)^T$  un punto de la frontera relativa de  $E_A|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ , es decir, su frontera en  $\mathbb{R}^{n-1}$  (pues la frontera en  $\mathbb{R}^n$  es todo el conjunto, al ser degenerado). El hecho de que pertenezca a dicha frontera quiere decir que existe un único  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $x + te_n \in E_A$ , es decir, la ecuación

$$(x + te_n)^T A (x + te_n) = 1$$

tiene solución única en  $t$ , o equivalentemente, la ecuación cuadrática

$$x^T A x + 2t x^T A e_n + t^2 e_n^T A e_n - 1 = A_{nn} t^2 + 2x^T A_n t + x^T A x - 1 = 0$$

tiene solución única. En consecuencia, el discriminante

$$x^T A_n x^T A_n - A_{nn} (x^T A x - 1) = x^T A_n A_n^T x - A_{nn} (x^T A x - 1) = 0.$$

Como  $x_n = 0$ , lo anterior se traduce en

$$\bar{x}^T \bar{A}_n \bar{A}_n^T \bar{x} - A_{nn} (\bar{x}^T \bar{A} \bar{x} - 1) = 0,$$

o equivalentemente,

$$\bar{x}^T \bar{A} \bar{x} - \frac{1}{A_{nn}} \bar{x}^T \bar{A}_n \bar{A}_n^T \bar{x} = \bar{x}^T \left( \bar{A} - \frac{1}{A_{nn}} \bar{A}_n \bar{A}_n^T \right) \bar{x} = 1.$$

Por tanto, como dicha ecuación describe la frontera del elipsoide  $E_A | \mathbb{R}^{n-1}$ , tenemos que

$$E_A | \mathbb{R}^{n-1} = E_{A'} \text{ con } A' = \bar{A} - \frac{1}{A_{nn}} \bar{A}_n \bar{A}_n^T \in \mathcal{P}^{n-1}, \quad (3.20)$$

como buscábamos.

De cara a obtener acotaciones de volúmenes, vamos a probar a continuación el contenido

$$E_{((1-\lambda)A + \lambda B)'} \subset E_{(1-\lambda)A' + \lambda B'}, \quad \forall A, B \in \mathcal{P}^n, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (3.21)$$

Por (3.19) y (3.20), los elipsoides anteriores vienen descritos, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \bar{x}^T ((1-\lambda)\bar{A} + \lambda\bar{B}) \bar{x} - \frac{1}{(1-\lambda)A_{nn} + \lambda B_{nn}} \langle \bar{x}, (1-\lambda)\bar{A}_n + \lambda\bar{B}_n \rangle^2 &\leq 1, \\ \bar{x}^T ((1-\lambda)\bar{A} + \lambda\bar{B}) \bar{x} - \frac{1-\lambda}{A_{nn}} \langle \bar{x}, \bar{A}_n \rangle^2 - \frac{\lambda}{B_{nn}} \langle \bar{x}, \bar{B}_n \rangle^2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Por tanto, para probar la inclusión (3.21) bastará demostrar que

$$\frac{1}{(1-\lambda)A_{nn} + \lambda B_{nn}} \langle \bar{x}, (1-\lambda)\bar{A}_n + \lambda\bar{B}_n \rangle^2 \leq \frac{1-\lambda}{A_{nn}} \langle \bar{x}, \bar{A}_n \rangle^2 + \frac{\lambda}{B_{nn}} \langle \bar{x}, \bar{B}_n \rangle^2.$$

Tras simplificar, lo anterior se traduce en

$$2A_{nn} B_{nn} \langle \bar{x}, \bar{A}_n \rangle \langle \bar{x}, \bar{B}_n \rangle \leq A_{nn}^2 \langle \bar{x}, \bar{B}_n \rangle^2 + B_{nn}^2 \langle \bar{x}, \bar{A}_n \rangle^2,$$

y esta desigualdad es cierta para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  por ser equivalente a

$$(A_{nn} \langle \bar{x}, \bar{B}_n \rangle - B_{nn} \langle \bar{x}, \bar{A}_n \rangle)^2 \geq 0,$$

con lo cual (3.21) queda probado.

Ahora, como  $E_{((1-\lambda)A + \lambda B)'} \subset E_{(1-\lambda)A' + \lambda B'}$  implica  $\text{vol}_{n-1}(E_{((1-\lambda)A + \lambda B)'}) \leq \text{vol}_{n-1}(E_{(1-\lambda)A' + \lambda B'})$ , entonces usando la expresión (3.18) para el volumen de un elipsoide se deduce

$$\det(((1-\lambda)A + \lambda B)') \geq \det((1-\lambda)A' + \lambda B'),$$

donde recordemos que las matrices son  $(n-1)$ -dimensionales. Uniendo lo anterior a la desigualdad de determinantes de Minkowski, proposición 2.5,

$$\det((1-\lambda)A' + \lambda B')^{\frac{1}{n-1}} \geq (1-\lambda) \det(A')^{\frac{1}{n-1}} + \lambda \det(B')^{\frac{1}{n-1}},$$

llegamos a

$$\det(((1-\lambda)A + \lambda B)')^{\frac{1}{n-1}} \geq (1-\lambda) \det(A')^{\frac{1}{n-1}} + \lambda \det(B')^{\frac{1}{n-1}}. \quad (3.22)$$

Finalmente, considerando la función

$$f(t) = \frac{1}{t^{\frac{n-1}{2}}},$$

derivando dos veces es inmediato comprobar que la función es estrictamente convexa para  $t > 0$ , es decir, dados  $a, b > 0$  se tiene

$$\frac{1}{((1-\lambda)a + \lambda b)^{\frac{n-1}{2}}} \leq (1-\lambda) \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}} + \lambda \frac{1}{b^{\frac{n-1}{2}}}, \quad (3.23)$$

con igualdad si y sólo si  $a = b$ . Combinando (3.22) y (3.23) llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\det(((1-\lambda)A + \lambda B)')^{1/2}} &= \frac{1}{\left(\det(((1-\lambda)A + \lambda B)')^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \\ &\leq \frac{1}{\left((1-\lambda) \det(A')^{\frac{1}{n-1}} + \lambda \det(B')^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{2}}} \\ &\leq (1-\lambda) \frac{1}{\det(A')^{1/2}} + \lambda \frac{1}{\det(B')^{1/2}}, \end{aligned}$$

con igualdad si y sólo si  $\det(A') = \det(B')$ . Finalmente, la desigualdad anterior, teniendo en cuenta nuevamente la expresión (3.18) para el volumen de un elipsoide, se traduce en que

$$\text{vol}_{n-1} \left( (E_{((1-\lambda)A + \lambda B)'} \right) \leq (1-\lambda) \text{vol}_{n-1} (E_{A'}) + \lambda \text{vol}_{n-1} (E_{B'}),$$

es decir,

$$\text{vol}_{n-1} (E_{(1-\lambda)A + \lambda B} | \mathbb{R}^{n-1}) \leq (1-\lambda) \text{vol}_{n-1} (E_A | \mathbb{R}^{n-1}) + \lambda \text{vol}_{n-1} (E_B | \mathbb{R}^{n-1}),$$

con igualdad si y sólo si  $\text{vol}_{n-1} (E_A | \mathbb{R}^{n-1}) = \text{vol}_{n-1} (E_B | \mathbb{R}^{n-1})$ . Pero, si esto es válido para todo elipsoide, es claro que las rotaciones no afectan y por tanto el hiperplano usado para la proyección es indiferente, de modo que

$$\text{vol}_{n-1} (E_{(1-\lambda)A + \lambda B} | u^\perp) \leq (1-\lambda) \text{vol}_{n-1} (E_A | u^\perp) + \lambda \text{vol}_{n-1} (E_B | u^\perp)$$

para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , con igualdad si y sólo si  $\text{vol}_{n-1} (E_A | u^\perp) = \text{vol}_{n-1} (E_B | u^\perp)$ .

Estamos en las condiciones ideales para aplicar la fórmula de Cauchy, teorema 3.18, y obtener la convexidad del área de superficie, ya que como

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \text{vol}_{n-1} (E_{(1-\lambda)A + \lambda B} | u^\perp) dS(u) \leq (1-\lambda) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \text{vol}_{n-1} (E_A | u^\perp) dS(u) + \lambda \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \text{vol}_{n-1} (E_B | u^\perp) dS(u),$$

entonces tenemos

$$S(E_{(1-\lambda)A + \lambda B}) \leq (1-\lambda)S(E_A) + \lambda S(E_B),$$

con igualdad si y sólo si  $\text{vol}_{n-1} (E_A | u^\perp) = \text{vol}_{n-1} (E_B | u^\perp)$  para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  salvo quizá un conjunto de medida nula. Sin embargo por continuidad de las proyecciones y del volumen, dicho conjunto ha de ser vacío, pues como es habitual, de lo contrario, existiría un abierto con desigualdad estricta. En consecuencia, si se da la igualdad, entonces estamos en las condiciones del teorema de Aleksandrov, teorema 3.20, y obtenemos  $E_A = E_B$ , con lo cual la función  $S(E_{(\cdot)})$  es estrictamente convexa. Esto nos permite concluir finalmente que el conjunto

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}^n : S(E_A) \leq S(B_n) = S(E_{I_n})\}$$

es estrictamente convexo. En efecto, si  $A, B \in \mathcal{A}$  entonces

$$S(E_{(1-\lambda)A+\lambda B}) \leq (1-\lambda)S(E_A) + \lambda S(E_B) \leq (1-\lambda)S(E_{I_n}) + \lambda S(E_{I_n}) = S(E_{I_n}),$$

luego  $(1-\lambda)A + \lambda B \in \mathcal{A}$ . Además, si  $(1-\lambda)A + \lambda B \in \text{bd}\mathcal{A}$  entonces  $S(E_{(1-\lambda)A+\lambda B}) = (1-\lambda)S(E_A) + \lambda S(E_B)$ , o equivalentemente  $A = B$  por convexidad estricta de  $S(E_{(\cdot)})$ , con lo cual  $\mathcal{A}$  es estrictamente convexo.

Para terminar la prueba del lema falta ver que la frontera de  $\mathcal{A}$  es suave y que la identidad, correspondiente a la bola unidad, es un vector normal interior a  $\text{bd}\mathcal{A}$  en  $I_n$ . Recordemos (véase el capítulo 1) que si un elipsoide viene descrito por la ecuación  $x^T A x \leq 1$  con  $A \in \mathcal{P}^n$ , entonces viene dado como transformación lineal de la bola unidad mediante  $BB_n$  con  $A = (B^{-1})^2$ . Conviene cambiar a esta notación para lo que resta de demostración, de modo que sea

$$\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{P}^n : S(B^{-1}B_n) = S(B_n)\},$$

y se tendrá, por lo dicho antes, que

$$\text{bd}\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}^n : S(E_A) = S(B_n)\} = \{B \in \mathcal{P}^n : B^2 \in \mathcal{T}\}.$$

Ya hemos visto y empleado que toda matriz definida positiva  $A$  tiene una raíz cuadrada  $\sqrt{A}$  sin más que diagonalizar. Como  $\sqrt{A}$  tiene los mismos valores propios que  $A$ , también es definida positiva. Es más, se tiene unicidad y por tanto biyectividad, lo cual puede consultarse por ejemplo en [Jac75, Th. 11, p. 187]. En consecuencia, la diferenciabilidad y el teorema de la función inversa aseguran que la aplicación  $A \rightarrow A^2$  es un difeomorfismo en  $\mathcal{P}^n$ . Por tanto, será suficiente probar que  $\mathcal{T}$  es diferenciable y ello implicará la diferenciabilidad de  $\text{bd}\mathcal{A}$ .

Observemos que haciendo uso de la fórmula de Cauchy para el área de superficie, teorema 3.18, y la definición del cuerpo proyección, definición 3.19, tenemos que

$$S(B^{-1}B_n) = \frac{1}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \text{vol}_{n-1}(B^{-1}B_n|u^\perp) dS(u) = \frac{1}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{\Pi_{B^{-1}B_n}}(u) dS(u),$$

y ahora, aplicando la homogeneidad de la función soporte y las propiedades de la proposición 3.21, llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{\Pi_{B^{-1}B_n}}(u) dS(u) &= \frac{1}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{\det(B^{-1})B\Pi_{B_n}}(u) dS(u) \\ &= \frac{\det(B^{-1})}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{\Pi_{B_n}}(Bu) dS(u). \end{aligned}$$

Finalmente, normalizando obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\det(B^{-1})}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_{\Pi_{B_n}}(Bu) dS(u) &= \frac{\det(B^{-1})}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|Bu\| h_{\Pi_{B_n}}\left(\frac{Bu}{\|Bu\|}\right) dS(u) \\ &= \frac{\det(B^{-1})}{\text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|Bu\| \text{vol}_{n-1}(B_{n-1}) dS(u), \end{aligned}$$

con lo cual

$$S(B^{-1}B_n) = \frac{1}{\det(B)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|Bu\| dS(u).$$

Como  $\mathcal{T}$  es un conjunto de nivel de la función anterior, para estudiar la diferenciabilidad y la normalidad basta estudiar su gradiente ( $(n \times n)$ -dimensional). Vamos a comenzar calculando el gradiente de la función determinante. Dada  $B \in \mathcal{P}^n$ , desarrollando la fila  $i$  tenemos

$$\det(B) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} B_{ij} \det(M_{ij}),$$

donde  $(-1)^{i+j}M_{ij}$  es el cofactor de  $B_{ij}$ , es decir,  $M_{ij}$  es el menor de  $B$  obtenido suprimiendo la fila  $i$  y la columna  $j$ . Derivando,

$$\frac{\partial}{\partial B_{ij}} \det(B) = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}).$$

Ahora bien,  $B$  es invertible y su inversa es la matriz de cofactores traspuesta por el inverso del determinante. Es decir, si denotamos por  $B^{-1} = (B_{ij}^{-1})_{ij}$ ,

$$B_{ij}^{-1} = \frac{1}{\det(B)} (-1)^{i+j} \det(M_{ji}).$$

Por tanto, sustituyendo en lo anterior,

$$\frac{\partial}{\partial B_{ij}} \det(B) = B_{ji}^{-1} \det(B),$$

de manera que tenemos

$$\nabla \det(B) = \det(B) B^{-T},$$

y en particular,

$$\nabla \det(B) \Big|_{B=I_n} = I_n. \quad (3.24)$$

Nos interesa también el gradiente de  $\langle Bu, Bu \rangle$ . Trabajando en coordenadas

$$(B^T B)_{ij} = \sum_{s=1}^n B_{is}^T B_{sj} = \sum_{s=1}^n B_{si} B_{sj},$$

luego

$$\langle Bu, Bu \rangle = u^T B^T B u = \sum_{i,j=1}^n u_i (B^T B)_{ij} u_j = \sum_{i,j,s=1}^n u_i B_{si} B_{sj} u_j.$$

Derivando,

$$\frac{\partial}{\partial B_{kl}} (u^T B^T B u) = 2B_{kl} u_l^2 + 2 \sum_{j=1, j \neq l}^n u_l B_{kj} u_j = 2 \sum_{j=1}^n u_l B_{kj} u_j.$$

Ahora bien, observemos que

$$(Buu^T)_{kl} = \sum_{j=1}^n B_{kj} (uu^T)_{jl} = \sum_{j=1}^n B_{kj} u_j u_l,$$

de modo que  $\nabla \langle Bu, Bu \rangle = 2Buu^T$ , y en particular,

$$\nabla \langle Bu, Bu \rangle \Big|_{B=I_n} = 2uu^T. \quad (3.25)$$

Por tanto, haciendo uso de la regla de Leibniz para derivar bajo el signo integral, tenemos

$$\begin{aligned} \nabla S(B^{-1} B_n) \Big|_{B=I_n} &= \nabla \left( \frac{1}{\det(B)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|Bu\| dS(u) \right) \Big|_{B=I_n} \\ &= \left( \frac{-1}{\det(B)^2} \nabla \det(B) \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \|Bu\| dS(u) \right) \Big|_{B=I_n} + \left( \frac{1}{\det(B)} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla (\langle Bu, Bu \rangle^{1/2}) dS(u) \right) \Big|_{B=I_n}, \end{aligned}$$

y aplicando ahora (3.24) y (3.25), y denotando la integral de una matriz como la matriz de las integrales de cada componente,

$$\begin{aligned} \nabla S(B^{-1} B_n) \Big|_{B=I_n} &= -S(B_n) I_n + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \frac{1}{2\|Bu\|} \nabla \langle Bu, Bu \rangle \right) \Big|_{B=I_n} dS(u) \\ &= -S(B_n) I_n + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left( \frac{1}{2\|Bu\|} 2Buu^T \right) \Big|_{B=I_n} dS(u) \\ &= -S(B_n) I_n + \int_{\mathbb{S}^{n-1}} uu^T dS(u). \end{aligned}$$

Las componentes de esa última matriz de integrales son

$$\left( \int_{\mathbb{S}^{n-1}} uu^T dS(u) \right)_{ij} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_i u_j dS(u).$$

Para calcular dichas integrales, observemos que por simetría

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u_i) dS(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(u_j) dS(u)$$

para todo  $1 \leq i, j \leq n$  y para cualquier función integrable  $f$ , con lo cual tenemos en particular

$$n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_k^2 dS(u) = \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_i^2 dS(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{i=1}^n u_i^2 dS(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} 1 dS(u) = S(B_n)$$

para todo  $1 \leq k \leq n$ . Análogamente, si  $i \neq j$  la simetría implica que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_i u_j dS(u) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (-u_i) u_j dS(u) = - \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_i u_j dS(u)$$

de manera que

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_i u_j dS(u) = 0.$$

Así pues, tenemos que

$$\nabla S(B^{-1}B_n)|_{B=I_n} = \left(-1 + \frac{1}{n}\right) S(B_n)I_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) S(B_n)(-I_n),$$

es decir, el gradiente de  $S(B^{-1}B_n)$  en  $B = I_n$  está en la dirección y sentido de  $-I_n$ , lo que se traduce en que  $-I_n$  es un normal exterior a la hipersuperficie  $\mathcal{T}$  en  $I_n$ , y por tanto  $I_n$  es un normal interior. Observemos que el cuadrado se comporta localmente en  $I_n$  como una dilatación de centro  $I_n$  y razón 2 ([Gru08, p. 328]), ya que

$$(I_n + \lambda B)^2 = I_n + 2\lambda B + \lambda^2 B^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia,  $I_n$  también será normal interior en  $I_n$  de la superficie formada por los elementos cuyo cuadrado está en  $\mathcal{T}$ , es decir, de  $\mathcal{A}$ , como queríamos ver.

Para finalizar la prueba de este largo lema, vamos a ver que  $\mathcal{T}$  es diferenciable, lo cual, recurriendo nuevamente al hecho de que la aplicación  $A \rightarrow A^2$  es un difeomorfismo en  $\mathcal{P}^n$ , implicará que  $\mathcal{A}$  es diferenciable. Para verlo, basta comprobar que el gradiente de  $S(B^{-1}B_n)$  existe y es no nulo en todo punto de  $\mathcal{P}^n$ . Como el gradiente es el normal a la superficie  $\mathcal{T}$ , el teorema de la función implícita implicará que  $\mathcal{T}$  es una superficie suave. El hecho de que el gradiente existe se debe a la diferenciableidad de la función área de superficie. Por otro lado, vamos a ver que la no nulidad se sigue de la homogeneidad de orden  $n-1$  de la función área de superficie. Dado  $B \in \mathcal{P}^n$ , para probar que el gradiente de  $S(M^{-1}B_n)$  es no nulo en  $M = B$  basta probar que existe  $A \in \mathcal{P}^n$  tal que

$$\langle \nabla S(M^{-1}B_n)|_B, A \rangle \neq 0.$$

Tomando el propio  $B$  obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle \nabla S(M^{-1}B_n)|_B, B \rangle &= D_B S(M^{-1}B_n)(B) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S((B+tB)^{-1}B_n) - S(B^{-1}B_n)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{-(n-1)} S(B^{-1}B_n) - S(B^{-1}B_n)}{t} \\ &= S(B^{-1}B_n) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^{-(n-1)} - 1}{t} = -(n-1) S(B^{-1}B_n) \neq 0, \end{aligned}$$

que era el resultado buscado. Por lo discurrido antes, esto concluye la prueba. ■

Las propiedades de subconjuntos del cono  $\mathcal{P}^n$  que hemos probado en el lema 3.22 nos servirán, de modo análogo a como hicimos en la prueba del teorema 2.16, para probar el siguiente resultado.



**Teorema 3.23** Dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , existe un único elipsoide de mínima área de superficie que lo contiene.

*Demostración.* Consideremos el conjunto de elipsoides que contienen al cuerpo,

$$E = \{A \in \mathcal{P}^n : K \subset E_A\},$$

y observemos que se tiene la descomposición

$$E = \{A \in \mathcal{P}^n : x^T A x \leq 1, \forall x \in K\} = \bigcap_{x \in K} \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : x^T A x \leq 1\} \cap \mathcal{P}^n. \quad (3.26)$$

Es claro que cualquier rayo en  $\mathcal{P}^n$  que parte del origen comienza en  $E$  y sale del mismo en un tiempo finito. En consecuencia,  $E$  es un conjunto acotado en  $\mathbb{R}^n$  que contiene un entorno del origen. El área de superficie de un elipsoide que contiene a  $K$  está acotada inferiormente por el área de superficie de  $K$ , con lo cual existe el ínfimo y podemos tomar una sucesión de elipsoides en  $E$  cuya área de superficie converge a dicho ínfimo. Como  $E$  es acotado, existe una subsucesión de elipsoides convergente, y por la continuidad del funcional área de superficie, dicho límite tiene por área de superficie el ínfimo. Finalmente, como  $E$  es también claramente cerrado, dicho límite está en  $E$ , luego se trata de un elipsoide que contiene a  $K$  de mínima área de superficie, lo que concluye la prueba de la existencia. Denotemos a dicho elipsoide por  $E_B$  con  $B \in \mathcal{P}^n$ .

Para probar la unicidad, consideremos el conjunto de elipsoides con menor área de superficie que  $E_B$ ,

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}^n : S(E_A) \leq S(E_B)\}.$$

El lema 3.22 prueba que el conjunto  $\mathcal{A}$  es suave y estrictamente convexo, y por la descomposición dada en (3.26)  $E$  es una intersección de semiespacios de  $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$  con el cono convexo  $\mathcal{P}^n$ , de modo que  $E$  es convexo.

Desde luego dichos conjuntos intersecan pues  $B \in E \cap \mathcal{A}$ , pero además, no pueden solaparse, es decir, sus interiores no intersecan. En efecto, en tal caso existiría  $A \in E \cap \text{bd}\mathcal{A}$ , es decir,  $K \subset E_A$  con  $S(E_A) < S(E_B)$ , contradiciendo la minimalidad de  $E_B$ . Por tanto, únicamente sus fronteras intersecan, y por convexidad, podemos encontrar un hiperplano  $H$  de separación (véase, e.g., [Gru07, Th. 4.4]) entre  $E$  y  $\mathcal{A}$  pasando por  $B$ . Pero la convexidad estricta de  $\mathcal{A}$  implica que la intersección de  $H$  con  $\text{bd}\mathcal{A}$  se reduce a un punto, y por tanto  $B = E \cap \text{bd}\mathcal{A}$ , es decir,  $E_B$  es el único elipsoide de mínima área de superficie conteniendo a  $K$ , como queríamos ver. ■

### 3.3.3 Caracterización de los puntos de contacto

Una vez probada la existencia y unicidad del elipsoide de mínima área de superficie conteniendo a un cuerpo convexo simétrico respecto del origen  $K$ , el siguiente paso consiste, al igual que en los resultados de John trabajados en el capítulo 2, en caracterizar los puntos de contacto entre dichos cuerpos. En aquel entonces, se caracterizaron dichos puntos cuando el elipsoide óptimo era una bola, pudiendo entonces en el caso general reducirnos siempre a esta situación aplicando una transformación afín apropiada. De hecho, como estamos trabajando con conjuntos simétricos respecto del origen, podemos restringirnos a aplicaciones lineales.

Seguiremos en esta sección la misma filosofía. Para ello, denotemos por  $S^m$  la función que asigna a cada cuerpo convexo  $K \in \mathcal{K}_0^n$  la menor área de superficie entre los elipsoides que lo contienen. Podemos entonces considerar la imagen de  $K$  mediante transformaciones lineales que preservan el volumen para la cual  $S^m$  es mínima, la cual llamaremos *posición mínima* de  $K$ . Probaremos que está unívocamente determinada, salvo rotaciones, en el teorema 3.24. Caracterizaremos luego en el teorema 3.25 los puntos de contacto entre la posición mínima de  $K$  y el correspondiente elipsoide de mínima área de superficie que lo contiene, en el caso en que éste es la bola unidad. En general, la unicidad nos permite aplicar una transformación lineal apropiada que lleve  $K$  a su posición mínima.

**Teorema 3.24** Dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$  existe, salvo rotaciones respecto del origen, una única posición mínima de  $K$ . El correspondiente elipsoide de mínima área de superficie es único y, necesariamente, una bola.

*Demostración.* Por los resultados duales de John presentados en el capítulo 2 sabemos que para cada cuerpo convexo  $K$  existe un único elipsoide de mínimo volumen conteniéndolo. En consecuencia, podemos tomar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  que preserva el volumen ( $\det(T) = \pm 1$ ) tal que el elipsoide de mínimo volumen conteniendo a  $TK$  sea una bola  $B$  centrada en el origen. Comencemos probando que  $TK$  se encuentra en posición mínima y que  $B$  es también el elipsoide de mínima área de superficie que contiene a  $TK$ .

Para ello, consideremos una aplicación lineal  $M$  que preserva el volumen tal que  $MK$  está en posición mínima, y sea  $E$  el correspondiente elipsoide de mínimo área de superficie conteniendo a  $MK$ . Entonces,  $E$  debe ser una bola, pues de lo contrario, podríamos tomar una aplicación lineal  $N$  que preserva el volumen tal que  $NE$  sea una bola y, en tal caso, la desigualdad isoperimétrica (véase el teorema 4.10) implicaría que  $S(NE) < S(E)$ . Pero como  $NMK \subset NE$ , esto contradice el hecho de que  $MK$  está en posición mínima y su elipsoide óptimo correspondiente es  $E$ . Por otro lado, como por hipótesis  $B$  es de mínimo volumen conteniendo a  $TK$ , y estamos trabajando con transformaciones lineales que preservan el volumen, tenemos que  $\text{vol}(B) \leq \text{vol}(E)$ . Pero como ambos elipsoides son bolas, esto implica por semejanza que  $S(B) \leq S(E)$ . Ahora bien, como  $MK$  está en posición mínima y el elipsoide correspondiente es  $E$ , también se tiene  $S(E) \leq S(B)$ . En consecuencia  $S(B) = S(E)$  y, por tanto,  $TK$  también se encuentra en posición mínima. Además, al estar las bolas están centradas en el origen, tenemos necesariamente  $E = B$ , lo cual prueba que  $B$  es el elipsoide de mínima área de superficie que contiene a  $TK$ .

Para terminar, falta probar que cualquier posición mínima  $MK$  verifica  $M = RT$  para una cierta rotación  $R$  de  $\mathbb{R}^n$  respecto del origen. El recíproco es trivial, ya que toda rotación preserva el área de superficie. Así pues, sea  $MK$  una posición mínima de  $K$ , por lo discurrecido en el párrafo anterior, el correspondiente elipsoide de mínima área de superficie es  $B$ . En consecuencia,  $T^{-1}B$  y  $M^{-1}B$  son elipsoides de mínimo volumen conteniendo a  $K$ , luego la unicidad de dicho elipsoide, garantizada por el teorema 2.9, nos dice que  $T^{-1}B = M^{-1}B$ , es decir,  $MT^{-1}B = B$ . Por tanto, como  $B$  es una bola centrada en el origen, debe ser necesariamente  $MT^{-1} = R$  para una cierta rotación  $R$  respecto del origen, o bien  $M = RT$ , como queríamos. ■

Finalmente, la prueba de la caracterización de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo centralmente simétrico y el elipsoide de mínima área de superficie que lo contiene sigue razonamientos análogos a la correspondiente para el volumen realizada en el teorema 2.16, sustituyendo  $\mathcal{P}_1^n$  por  $\mathcal{A}$ .

**Teorema 3.25** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  con  $K \subset B_n$ . Son equivalentes:

- (I)  $K$  está en posición mínima respecto de  $S_m$  y  $B_n$  es el único elipsoide de mínima área de superficie que contiene a  $K$ .
- (II) Existen, para cierto  $m$  con  $n \leq m \leq n(n+1)/2$ , puntos de contacto  $\{\pm u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n.$$

*Demostración.* Si  $B_n$  es el único elipsoide de mínima área de superficie que contiene a  $K$ , entonces considerando los conjuntos

$$\begin{aligned} E &= \{A \in \mathcal{P}^n : K \subset E_A\}, \\ \mathcal{A} &= \{A \in \mathcal{P}^n : S(E_A) \leq S(B_n)\}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

y reproduciendo el mismo argumento que en la prueba del teorema 3.23, sustituyendo  $E_B$  por  $B_n = E_{I_n}$ , obtenemos que  $E \cap \mathcal{A} = \text{bd}E \cap \text{bd}\mathcal{A} = I_n$ , y, en consecuencia, la existencia de un hiperplano de separación  $H$  entre  $E$  y  $\mathcal{A}$  que pasa por  $I_n$ .

Como vimos en dicho teorema, tenemos la descripción

$$E = \bigcap_{u \in K} \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : u^T A u \leq 1\} \cap \mathcal{P}^n = \bigcap_{u \in \text{bd}K} \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : u^T A u \leq 1\} \cap \mathcal{P}^n, \quad (3.28)$$

y como se vio en la proposición 2.14, lo anterior se traduce en

$$E = \bigcap_{u \in \text{bd}K} \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, uu^T \rangle \leq 1\} \cap \mathcal{P}^n,$$

donde recordemos que el producto escalar en  $\mathcal{P}^n$  es el dado por la definición 2.13. Al igual que en la prueba del teorema 2.16, como  $I_n \in \text{bd}E$  podemos considerar el cono soporte a  $E$  por  $I_n$ , que será un cono convexo por serlo  $E$  y por tanto vendrá dado por la intersección de los hiperplanos soporte a  $E$  que pasan por  $I_n$ , es decir,

$$\begin{aligned} S(E, I_n) &= \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, uu^T \rangle \leq 1, \forall u \in \text{bd}K \text{ con } \langle I_n, uu^T \rangle = \|u\|^2 = 1\} \\ &= \{A \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : \langle A, uu^T \rangle \leq 1, \forall u \in \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}\}. \end{aligned}$$

En consecuencia, como el cono de vectores normales a  $E$  en  $I_n$  queda determinado por los normales a los hiperplanos que definen  $S(E, I_n)$ , tenemos

$$N(E, I_n) = \text{pos}\{uu^T \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} : u \in \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}\}. \quad (3.29)$$

Por el lema 3.22 tenemos que  $I_n$  es normal interior a  $\mathcal{A}$  en  $I_n$ , de manera que  $-I_n \in N(\mathcal{A}, I_n)$ , luego  $I_n$  es normal a  $H$  y, en consecuencia, también es normal exterior a  $E$ , ergo  $I_n \in N(E, I_n)$ . Así pues, como consecuencia del teorema de Carathéodory para conos, existen puntos de contacto  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$I_n = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T,$$

con  $m \leq n(n+1)/2$ . Ya sabemos que la igualdad anterior implica que los  $u_i$  generan  $\mathbb{R}^n$  luego, en particular, tenemos  $n \leq m$ . Finalmente, la simetría central implica que los  $-u_i$  también son puntos de contacto, concluyendo así la prueba.

Demostremos ahora el recíproco. Considerando nuevamente los conjuntos  $E$  y  $\mathcal{A}$  definidos en (3.27), como  $K \subset B_n$ , tenemos  $I_n \in E$ . Pero dado que  $u_i \in \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  entonces  $u_i I_n u_i = \langle u_i, u_i \rangle = 1$ , de manera que se da igualdad para varios hiperplanos en la expresión (3.28), luego  $I_n \in \text{bd}E$ . Esto permite nuevamente considerar los conos soporte y normal a  $E$  en  $I_n$ , y realizando los mismos razonamientos que en la implicación directa, llegamos otra vez a la expresión (3.29).

Al ser  $I_n = \sum_i \lambda_i u_i u_i^T$  con  $\lambda_i > 0$ , la expresión (3.29) asegura que  $I_n \in N(E, I_n)$ . Como  $I_n \in \text{bd}\mathcal{A}$ , y también  $-I_n \in N(\mathcal{A}, I_n)$ , se concluye la existencia de un hiperplano de separación entre  $E$  y  $\mathcal{A}$  por  $I_n$ . La convexidad estricta de  $\mathcal{A}$  implica que debe ser  $E \cap \mathcal{A} = \text{bd}E \cap \text{bd}\mathcal{A} = I_n$ , lo que se traduce en que  $B_n = E_{I_n}$  es el único elipsoide de mínima área de superficie que contiene a  $K$ , como queríamos probar. ■

Para terminar, como la condición (II) del teorema 3.25 de Gruber es idéntica a la condición (II) del teorema 2.16 de John, de las equivalencias en sendos teoremas y recurriendo a la versión dual se concluye el siguiente corolario de forma inmediata.

**Corolario 3.26** Sea  $K \in \mathcal{K}_0^n$  con  $K \subset B_n$ . Son equivalentes:

- (i)  $B_n$  es el único elipsoide de mínimo volumen que contiene a  $K$ .
- (ii)  $K$  está en posición mínima y  $B_n$  es el único elipsoide de mínima área de superficie que contiene a  $K$ .

### 3.3.4 Extensión a quermassintegrales

Una vez ampliado el resultado clásico del volumen al funcional área de superficie, es inmediato preguntarse por una extensión todavía más general del funcional tratado, continuando con la disminución del grado del mismo. A este fin, vamos a presentar una extensión de dichos funcionales muy común en geometría convexa, sin demostraciones. Estos funcionales surgen del estudio del siguiente objeto.

**Definición 3.27** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , su **conjunto paralelo exterior** de parámetro  $\lambda$  es  $K + \lambda B_n \in \mathcal{K}^n$ .

Recordando la interpretación intuitiva de la suma de Minkowski que vimos tras la definición 1.5, el concepto anterior tiene particular sentido cuando se considera  $\lambda$  pequeño. La figura 3.8, izquierda, muestra un politopo y un paralelo exterior suyo. Podemos ver que, en esencia, se aumenta ligeramente el conjunto, redondeando los bordes esféricamente.

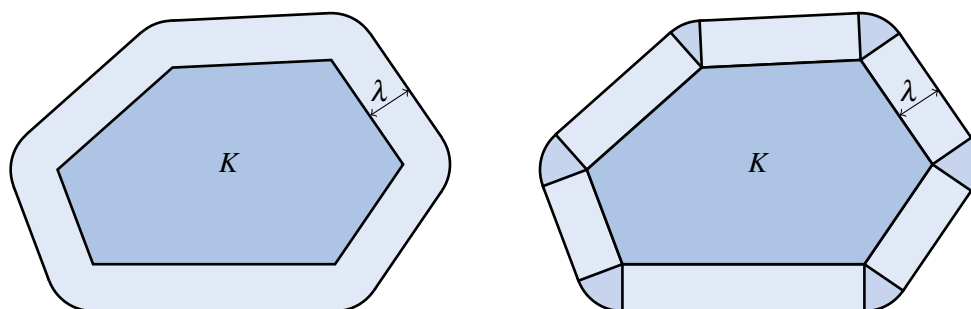


Figura 3.8: Paralelo exterior de un politopo

Los paralelos exteriores son ampliamente utilizados y, entre otras cosas, esto hace conveniente conocer un modo de calcular su volumen en términos de  $K$  y  $\lambda$ . Steiner demostró en 1840 que dicho volumen es un polinomio en  $\lambda$  de grado  $n$  cuyos coeficientes son, precisamente, los funcionales en cuestión.

**Teorema 3.28 — Fórmula de Steiner.** Dados  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\lambda > 0$ , se verifica

$$\text{vol}(K + \lambda B_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} W_i(K) \lambda^i,$$

expresión conocida como **polinomio de Steiner**.

La prueba puede consultarse en [Gru07, Th. 6.6]. El teorema anterior justifica la siguiente definición.

**Definición 3.29** Las funciones  $W_i(K)$  de la fórmula de Steiner son las  $i$ -ésimas **quermassintegrales** del cuerpo  $K$ .

Las quermassintegrales  $W_i$  son funcionales continuos, invariantes por movimientos rígidos, positivamente homogéneos de orden  $n - i$ , y no decrecientes con respecto al orden de inclusión. En resumen, lo que cabría esperar de generalizaciones del volumen. Adicionalmente se verifica:

- $W_0(K) = \text{vol}(K)$ .
- $W_1(K) = \frac{1}{n} S(K)$ .
- $W_{n-1}(K) = \frac{\text{vol}(B_n)}{2} b(K)$ , donde  $b(K)$  es la anchura media de  $K$ .
- $W_n(K) = \text{vol}(B_n)$ .

Para la prueba de todas las afirmaciones anteriores véase, por ejemplo, [Gru07, Sec. 6.4]. Entre otras cosas, lo anterior apoya intuitivamente que las quermassintegrales generalicen efectivamente los funcionales volumen y área de superficie, continuando con el proceso de disminución del grado.

Si construimos el paralelo exterior de  $K$  añadiendo a cada punto  $p \in \text{bd}K$  los fragmentos de los correspondientes conos normales  $N(K, p)$ , el comportamiento de dichos conos depende muy esencialmente de la cara en la que se encuentra  $p$ . En particular las dimensiones son complementarias: si  $F \subset K$  es una cara de  $K$ , entonces  $\dim F + \dim N(K, p) = n$  para todo  $p \in F$ . Subrayamos que las caras de un cuerpo convexo son una generalización del concepto usual de cara en politopos, que hacemos explícita en la siguiente definición adaptada concretamente a cuerpos convexos.

**Definición 3.30** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , una cara  $k$ -dimensional de  $K$  es un cuerpo  $F \in \mathcal{K}^k$  con  $F \subset K$  tal que si  $(1 - \lambda)x + \lambda y \in F$  con  $x, y \in K$  y  $0 < \lambda < 1$ , entonces  $x, y \in F$ .

Las quermassintegrales, y por tanto la fórmula de Steiner, se basan entonces precisamente en la descomposición del paralelo exterior como unión disjunta del conjunto original y los fragmentos de los conos normales, tal y como muestra la figura 3.8, derecha, correspondiendo la porción añadida a las caras  $k$ -dimensionales a la  $(n - k)$ -ésima quermassintegral. En el caso de la figura 3.8, bidimensional, podemos observar el conjunto original (cara 2-dimensional), cuyo volumen queda codificado en  $W_0(K)$ , los rectángulos adosados a las aristas (caras 1-dimensionales), cuyo volumen queda codificado en  $W_1(K)$  y es función del área de superficie (perímetro, en este caso), y los sectores circulares adosados a los vértices (caras 0-dimensionales), cuyo volumen queda codificado en  $W_2(K)$ . Obviamente, éstos últimos completan un círculo, y lo mismo se puede probar en general, evidenciando que  $W_n(K) = \text{vol}(B_n)$ .

Ahora que hemos presentado estos funcionales con ánimo de generalizar el volumen y el área de superficie, vamos a exponer, sin demostración, la extensión de los teoremas de John referidos al volumen (teoremas 2.9 y 2.16) y de Gruber referidos al área de superficie (teoremas 3.23, 3.24 y 3.25) a las quermassintegrales. Para ello, consideremos al igual que en la sección 3.3.3 la función

$$W_{im}: \mathcal{K}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$W_{im}(K) = \text{mín}\{W_i(\varepsilon): \varepsilon \text{ elipsoide, } K \subset \varepsilon\},$$

y definamos la *posición mínima de  $K$  respecto de  $W_{im}$*  como la imagen de  $K$  bajo transformaciones lineales que preservan el volumen, que minimiza  $W_{im}$ . Tenemos entonces el siguiente resultado.

**Teorema 3.31** Sean  $K \in \mathcal{K}_0^n$  e  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ . Entonces se verifica (I), y si  $K \subset B_n$ , entonces (II) y (III) son equivalentes:

- (I) Existe, salvo rotaciones respecto del origen, una única posición mínima de  $K$  respecto de  $W_{im}$ . El correspondiente elipsoide minimizante es único y, necesariamente, una bola.
- (II)  $K$  está en posición mínima respecto de  $W_{im}$  y  $B_n$  es el único elipsoide de mínima  $W_i$  que contiene a  $K$ .
- (III) Existen, para cierto  $m$  con  $n \leq m \leq n(n + 1)/2$ , puntos de contacto  $\{\pm u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n.$$

De la prueba hacemos únicamente una indicación. Denotemos por  $W_k^l$  a la  $k$ -ésima quermassintegral en  $\mathbb{R}^l$ , para  $k = 0, \dots, l$ . Observemos que la fórmula de Cauchy para el área de superficie (teorema 3.18) puede reescribirse entonces en términos de quermassintegrales como

$$W_1(K) = \frac{1}{n \text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} W_0^{n-1}(K|u^\perp) dS(u).$$

La relación recursiva anterior puede extenderse en general a todas las quermassintegrales mediante las conocidas como *fórmulas de Kubota*,

$$W_i(K) = \frac{1}{n \text{vol}_{n-1}(B_{n-1})} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} W_{i-1}^{n-1}(K|u^\perp) dS(u).$$

En la prueba del lema 3.22 se proyectan los elipsoides en hiperplanos y se obtiene una relación de convexidad para el volumen  $(n-1)$ -dimensional de dichas proyecciones que se extiende luego al área de superficie  $n$ -dimensional. Para adaptar la prueba de dicho lema al caso de quermassintegrales se debe iterar el proceso anterior. Proyectando los elipsoides en un espacio  $k$ -codimensional y empleando inductivamente la convexidad estricta de  $W_{k-j}^{n-j}$  para  $j = 1, \dots, k$  se obtiene la convexidad estricta de  $W_k = W_k^n$  mediante las fórmulas de Kubota correspondientes. Una vez extendido el lema, la prueba de la existencia y unicidad, así como la prueba de la caracterización de los puntos de contacto, es prácticamente la misma.

Como consecuencia del teorema 3.33, la condición de optimalidad coincide en todos los casos, como habíamos anticipado al comienzo de la sección. Nótese que el teorema anterior incluye, en particular, al teorema de John referido al volumen ( $W_0$ ). Observemos que en este caso un cuerpo siempre se encuentra en posición mínima, con lo cual esta noción se vuelve trivial y el enunciado anterior se reduce al de John. No se incluye, eso sí, el caso  $W_n$ , lo cual es intuitivamente claro ya que esta función es constante.

Al igual que en la sección anterior, de la igualdad de la condición de caracterización de puntos de contacto para todas las quermassintegrales se sigue de forma inmediata el siguiente corolario.

**Corolario 3.32** Sean  $K \in \mathcal{K}_0^n$  con  $K \subset B_n$  e  $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ . Son equivalentes:

- (i)  $K$  está en posición mínima respecto de  $W_{im}$  y  $B_n$  es el único elipsoide de mínima  $W_i$  que contiene a  $K$ .
- (ii)  $K$  está en posición mínima respecto de  $W_{jm}$  y  $B_n$  es el único elipsoide de mínima  $W_j$  que contiene a  $K$ .

Para redondear la sección, conviene mencionar que resultados similares pueden obtenerse también en el caso dual, es decir, para elipsoides inscritos a un cuerpo convexo, así como omitiendo la condición de simetría central, al igual que en el capítulo 2. Para ello, consideramos análogamente

$$W_{iM}: \mathcal{K}_0^n \rightarrow \mathbb{R}$$

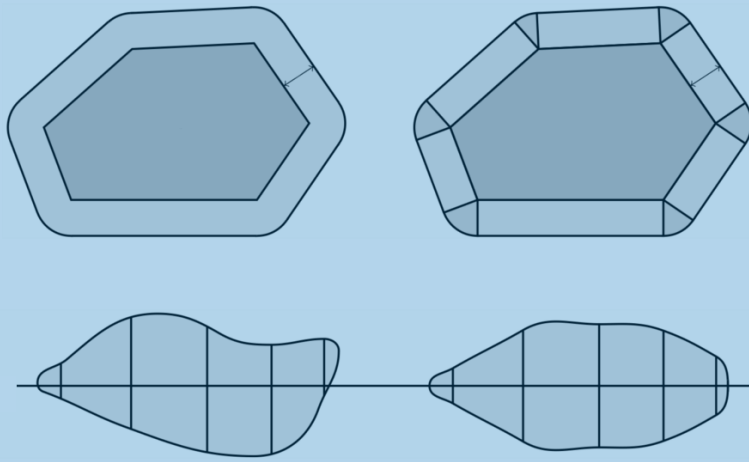
$$W_{iM}(K) = \max\{W_i(\varepsilon) : \varepsilon \text{ elipsoide, } \varepsilon \subset K\},$$

y definimos la *posición máxima de  $K$  respecto de  $W_{iM}$*  como la imagen de  $K$  bajo transformaciones lineales que preservan el volumen que maximiza  $W_{iM}$ . El resultado completamente general con el que cerramos la sección sería entonces el siguiente.

**Teorema 3.33** Sean  $K \in \mathcal{K}^n$  e  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Entonces se verifica (I), y si  $K \subset B_n$  (resp.  $B_n \subset K$ ), entonces (II) y (III) son equivalentes:

- (I) Existe, salvo rotaciones respecto del origen, una única posición mínima (resp., máxima) de  $K$  respecto de  $W_{im}$  (resp.,  $W_{iM}$ ). El correspondiente elipsoide minimizante (resp., maximizante) es único y, necesariamente, una bola.
- (II)  $K$  está en posición mínima (resp., máxima) respecto de  $W_{im}$  (resp.,  $W_{iM}$ ) y  $B_n$  es el único elipsoide de mínima  $W_i$  (resp., máxima  $W_i$ ) que contiene a  $K$  (resp., contenido en  $K$ ).
- (III) Existen, para cierto  $m$  con  $n \leq m \leq n(n+3)/2$ , puntos de contacto  $\{\pm u_i\}_{i=1}^m \subset \text{bd}K \cap \mathbb{S}^{n-1}$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n.$$



# 4

## Aplicaciones

Paralelo exterior a un cuerpo convexo (véase la definición 3.27) y simetrización de Steiner de un conjunto (véase la sección 4.2.1).

En este capítulo vamos a exponer algunas de las posibles (y abundantes) aplicaciones que tienen los resultados presentados hasta ahora, en especial, la caracterización de los puntos de contacto entre un cuerpo convexo y el elipsoide de máximo volumen contenido en él, y la acotación de la razón de los volúmenes de dichos cuerpos, una suerte de aproximación elipsoidal del cuerpo. Desarrollaremos dos aplicaciones internas a la propia disciplina de geometría convexa, donde más abundantes son. Comenzaremos estimando en la sección 4.1 la bondad de la aproximación de un cuerpo por su elipsoide de John, no en términos de la cota homotética, algo ya resuelto en los corolarios 2.24 y 2.25, sino en términos del volumen. Por otro lado, obtendremos en la sección 4.2 una consecuencia muy reseñable de estos resultados: una inversión de la clásica desigualdad isoperimétrica.

Estas dos aplicaciones fueron desarrolladas por Ball en los artículos [Bal89] y [Bal91], cuya línea seguiremos. Otras aplicaciones del contenido desarrollado en este trabajo en las que ya no entraremos, por ejemplo en el contexto de la optimización lineal, tienen también mucho interés. Para expandir un poco este aspecto puede consultarse por ejemplo [Hen12].

### 4.1 Acotación de la razón de volumen

Vimos en el capítulo 2 que todo cuerpo convexo posee un único elipsoide contenido en él de máximo volumen, y obtuvimos en la sección 2.4 que existe un múltiplo homotético de dicho elipsoide que contiene al cuerpo, donde la razón de la homotecia es una constante dependiente únicamente de la dimensión. Concretamente, podemos envolver todo cuerpo convexo centralmente simétrico entre dos elipsoides homotéticos de razón a lo sumo  $\sqrt{n}$ .

Si bien apuntamos en su momento que se trataba de una cota óptima, pues se verifica la igualdad por ejemplo para el cubo (véase el corolario 2.20), surge la cuestión de estudiar la bondad de la aproximación en términos del volumen, pues no nos aporta la misma información que conocer únicamente cuánto hemos de dilatar el elipsoide de John hasta envolver al cuerpo.

#### 4.1.1 Resultados previos

A fin de estudiar la relación entre el volumen de un cuerpo convexo y el de su elipsoide de John - el estudio se puede realizar también con elipsoides circunscritos - es habitual el siguiente concepto.

**Definición 4.1** Dados  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $\varepsilon$  su elipsoide de John, definimos la **razón de volumen** del cuerpo  $K$  como

$$vr(K) = \left( \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(\varepsilon)} \right)^{1/n}.$$

En la definición anterior las iniciales provienen de *volume ratio*. Recordemos que el volumen es un funcional positivamente homogéneo de grado  $n$ , en el sentido de que  $\text{vol}(\lambda K) = \lambda^n \text{vol}(K)$  para  $\lambda > 0$ , con lo cual es razonable tomar la raíz  $n$ -ésima en la definición anterior. Tenemos entonces la siguiente consecuencia inmediata de los resultados del capítulo 2 que nos permite acotar la razón de volumen de cuerpos convexos arbitrarios.

**Corolario 4.2 — Cota débil de la razón de volumen.** Dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , se tiene  $vr(K) \leq \sqrt{n}$ , y dado  $K \in \mathcal{K}^n$  se tiene  $vr(K) \leq n$ .

*Demostración.* Si  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , por el corolario 2.24 sabemos que existe un elipsoide  $p + AB_n \subset K$  tal que  $K \subset p + \sqrt{n}AB_n$ , con lo cual si  $\varepsilon$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$  se tendrá

$$\begin{aligned} vr(K) &= \left( \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(\varepsilon)} \right)^{1/n} \leq \left( \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(p + AB_n)} \right)^{1/n} \leq \left( \frac{\text{vol}(p + \sqrt{n}AB_n)}{\text{vol}(p + AB_n)} \right)^{1/n} \\ &= \left( \frac{|\det(\sqrt{n}A)|\text{vol}(B_n)}{|\det(A)|\text{vol}(B_n)} \right)^{1/n} = \sqrt{n}, \end{aligned}$$

donde hemos hecho uso de la expresión del volumen de un elipsoide dada por el corolario 1.12. Un argumento completamente análogo prueba el caso no simétrico haciendo uso esta vez del corolario 2.25 que proporciona la cota  $n$  en lugar de  $\sqrt{n}$ . ■

Sin embargo, la motivación para introducir este concepto, aparte de lo ya dicho y entre otras cosas, es que la cota anterior no es óptima, como sugiere el ejemplo 4.1.

■ **Ejemplo 4.1** El elipsoide de John del cubo es una bola, como demostramos en el corolario 2.20. Así pues, el cubo  $C_n = [-1, 1]^n$  (o cualquier otro paralelepípedo, ver proposición 4.3) tiene razón de volumen

$$vr(C_n) = \left( \frac{\text{vol}(C_n)}{\text{vol}(\varepsilon)} \right)^{1/n} = \left( \frac{2^n}{\text{vol}(B_n)} \right)^{1/n} = \frac{2}{\text{vol}(B_n)^{1/n}} \approx \sqrt{\frac{2n}{\pi e}},$$

donde la última estimación del volumen de la bola se obtiene aproximando mediante la clásica fórmula de Stirling  $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$  el volumen exacto, que viene dado por  $\text{vol}(B_n) = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2 + 1)$ . En cualquier caso, es claro que lo anterior es estrictamente menor que la cota del corolario 4.2 (o al menos su aproximación, que al igual que la fórmula de Stirling, es bastante buena en cuanto  $n$  es ligeramente alto), a pesar de que según vimos en el corolario 2.20, el cubo alcanza la cota máxima para la razón homotética igual a  $\sqrt{n}$ . ■

El ejemplo anterior muestra entre otras cosas que el concepto de razón de volumen no es trivial ni equivalente al de razón homotética, y sugiere de forma natural la pregunta de hallar la mejor cota para la razón de volumen. Esta cuestión la resolvió Ball en [Bal89, sec. 1] y en [Bal91, sec. 1], y serán estos artículos y alguna de sus referencias las que servirán de base para lo que resta de sección. Anticipamos que los resultados centrales de esta sección consistirán en probar que el cubo es el cuerpo convexo centralmente simétrico que maximiza la razón de volumen, siendo el símplice regular el cuerpo maximal en el caso general. Desde luego, estos resultados cuadran con la intuición en el sentido de que son cuerpos que se alejan bastante de su elipsoide de John correspondiente, son difíciles de aproximar por elipsoides, y cuadra con el hecho ya mencionado anteriormente de que el número de caras de un polítopo crece exponencialmente conforme su distancia a la bola (o a un elipsoide) disminuye.

Esta sección servirá además de base para otra aplicación importante, quizá más significativa, una desigualdad isoperimétrica inversa. Antes de continuar, es inmediato también comprobar la siguiente propiedad, que sin embargo resulta bastante útil.



**Proposición 4.3** La razón de volumen es invariante por transformaciones afines.

*Demostración.* Dados  $K \in \mathcal{K}^n$  y  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ , si  $\varepsilon$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $K$  entonces  $A\varepsilon$  es el elipsoide de máximo volumen contenido en  $AK$ , pues de lo contrario, si existiera  $\varepsilon' \subset AK$  con  $\text{vol}(\varepsilon') > \text{vol}(A\varepsilon)$ , entonces se tendría  $A^{-1}\varepsilon' \subset K$ , y haciendo uso de la proposición 1.11 deduciríamos que

$$\text{vol}(A^{-1}\varepsilon') = |\det(A^{-1})|\text{vol}(\varepsilon') > |\det(A^{-1})|\text{vol}(A\varepsilon) = |\det(A^{-1})||\det(A)|\text{vol}(\varepsilon) = \text{vol}(\varepsilon),$$

contradiciendo la maximalidad de  $\varepsilon$ . Pero entonces haciendo nuevamente uso de la proposición 1.11 tenemos

$$vr(AK) = \left( \frac{\text{vol}(AK)}{\text{vol}(A\varepsilon)} \right)^{1/n} = \left( \frac{|\det(A)|\text{vol}(K)}{|\det(A)|\text{vol}(\varepsilon)} \right)^{1/n} = \left( \frac{\text{vol}(K)}{\text{vol}(\varepsilon)} \right)^{1/n} = vr(K),$$

que es lo que queríamos. ■

Necesitamos introducir una herramienta adicional antes de poder demostrar los resultados, que presentamos a continuación sin demostración.

**Teorema 4.4 — Desigualdad de Brascamp-Lieb.** Dado cierto  $m \geq n$ , consideremos escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}$  y vectores  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{R}^n$  con  $\sum_i \lambda_i u_i u_i^T = I_n$ . Entonces dadas funciones positivas e integrables  $\{f_i\}_{i=1}^m$  se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(\langle u_i, x \rangle)^{\lambda_i} dx \leq \prod_{i=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x) dx \right)^{\lambda_i},$$

con igualdad si y sólo si bien los  $u_i$  son una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  o bien las  $f_i$  son densidades gaussianas (densidades de distribuciones normales).

La desigualdad anterior es un caso particular estudiado por Ball en [Bal89] precisamente para la resolución del problema que nos ocupa. La desigualdad original es bastante más general, pues sustituye el producto escalar por formas multilineales sobreyectivas arbitrarias, entre otras cosas. El artículo original puede consultarse en [BL76]. La desigualdad de Brascamp-Lieb es un resultado importante que extiende numerosas desigualdades conocidas. En particular, el caso  $n = 1$  se reduce a la clásica desigualdad de Hölder para  $m$  funciones, pues recordemos que la condición  $\sum_i \lambda_i u_i u_i^T = I_n$  implica  $\sum_i \lambda_i = n$  (véase la proposición 2.14), de modo que poniendo  $p_i = n/\lambda_i$  tenemos  $\sum_i 1/p_i = 1$ , que es la restricción fundamental para la desigualdad de Hölder.

#### 4.1.2 Hallando los cuerpos maximales

Con la desigualdad de Brascamp-Lieb y los resultados del capítulo 2 estamos en condiciones de probar los resultados principales de esta sección. Comenzamos por el caso más sencillo, el centralmente simétrico, estudiado en [Bal89]. Veremos que la prueba se sigue de dichos resultados de forma sorprendentemente clara.

**Teorema 4.5** Dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$ , se verifica  $vr(K) \leq vr(C_n) = 2\text{vol}(B_n)^{-1/n}$ .

*Demostración.* Como vimos en la proposición 4.3 la razón de volumen es invariante por transformaciones afines, con lo cual podemos asumir que  $K$  está en su posición afín en la cual el elipsoide de John es la bola unidad  $B_n$ . Como el cubo  $C_n = [-1, 1]^n$  también tiene a  $B_n$  por elipsoide de John, y tiene volumen  $2^n$ , basta probar  $\text{vol}(K) \leq 2^n$ .

Por el teorema 2.16 de John que caracteriza los puntos de contacto entre un cuerpo convexo simétrico y su elipsoide de John cuando éste es la bola unidad, tenemos garantizada la existencia de vectores

$\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  verificando  $\sum_i \lambda_i u_i u_i^T = I_n$ . Recordemos (véase el lema 2.19) que en estas condiciones, la unicidad del hiperplano soporte en los  $u_i$  implica que  $K \subset \bar{K}$  con

$$\bar{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_i \rangle| \leq 1, \forall 1 \leq i \leq m\}, \quad (4.1)$$

con lo cual basta ver que  $\text{vol}(\bar{K}) \leq 2^n$ . Para ello, definimos las funciones  $f_i$  características del intervalo  $[-1, 1]$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , que son claramente positivas e integrables. Entonces, por la definición (4.1) de  $\bar{K}$  resulta que su función característica viene dada por

$$\chi_{\bar{K}}(x) = \prod_{i=1}^m f_i(\langle x, u_i \rangle) = \prod_{i=1}^m f_i(\langle x, u_i \rangle)^{\lambda_i},$$

de modo que aplicando la desigualdad de Brascamp-Lieb, teorema 4.4, obtenemos

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}(\bar{K}) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\bar{K}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(\langle x, u_i \rangle)^{\lambda_i} dx \leq \prod_{i=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_i(x) dx \right)^{\lambda_i} = \prod_{i=1}^m 2^{\lambda_i} = 2^{\sum_{i=1}^m \lambda_i} = 2^n,$$

pues recordemos que de  $\sum_i \lambda_i u_i u_i^T = I_n$  se deduce  $\sum_i \lambda_i = n$  (véase la proposición 2.14), con lo cual hemos terminado. ■

Por tanto, ya sabemos que la cota óptima para la razón de volumen es  $2\text{vol}(B_n)^{-1/n}$ , y en particular, podemos ver que coincide con la cota débil  $\sqrt{n}$  proporcionada por el teorema de John únicamente cuando  $n = 1$ , en cuyo caso trivialmente  $C_1 = B_1$  y por tanto  $vr(C_1) = \sqrt{1} = 1$ .

Hecho esto, pasamos a estudiar la situación general, donde el cuerpo con razón de volumen maximal será el símplice regular, caso resuelto en [Bal91].

**Teorema 4.6** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , se verifica  $vr(K) \leq vr(S_n)$ .

*Demostración.* Preparamos el terreno de forma completamente análoga a como lo hemos hecho al demostrar el caso simétrico en el teorema 4.5. Como vimos en la prueba del corolario 2.21, el volumen del símplice regular con inradio 1, es decir, tal que su bola inscrita es  $B_n$ , viene dado por

$$\text{vol}(S_n) = \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}.$$

Dado que la razón de volumen es invariante por transformaciones afines por la proposición 4.3, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $K$  es tal que su elipsoide de John es  $B_n$ , y en tal caso, bastará con probar

$$\text{vol}(K) \leq \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}.$$

Nuevamente por el teorema 2.17, como  $B_n$  es el elipsoide de John de  $K$ , existen puntos  $\{u_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{S}^{n-1} \cap \text{bd}K$  y escalares positivos  $\{\lambda_i\}_{i=1}^m$  tales que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = n, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T = I_n, \quad (4.2)$$

para cierto  $n \leq m \leq n(n+3)/2$ . Y además, como tenemos  $K \subset \bar{K}$  con

$$\bar{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i \rangle \leq 1, \forall 1 \leq i \leq m\},$$

basta probar que  $\text{vol}(\bar{K}) \leq \text{vol}(S_n)$ . La idea de la demostración consiste en construir unas nuevas tuplas de vectores  $\{v_i\}_{i=1}^m$ , escalares  $\{\mu_i\}_{i=1}^m$  y funciones  $\{f_i\}_{i=1}^m$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  en las condiciones de la desigualdad de Brascamp-Lieb (teorema 4.4), cuyo soporte resulta ser un cono en  $\mathbb{R}^{n+1}$  con secciones trasversales homotéticas a  $\bar{K}$ , de modo que integrando en el cono obtendremos el término del volumen de  $\bar{K}$ . Finalmente, aplicando la desigualdad de Brascamp-Lieb a dichas funciones obtendremos la estimación deseada. Los

vectores están escogidos de modo que resulten ortogonales precisamente cuando  $\bar{K}$  es un símplice regular, ya que la ortogonalidad proporciona el caso de igualdad en la desigualdad de Brascamp-Lieb y queremos probar precisamente que dicho caso extremal es el símplice.

Así pues, considerando  $\mathbb{R}^{n+1}$  como  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , definamos los vectores

$$v_i = \left( \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \left( -u_i^T, n^{-1/2} \right)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

y los escalares

$$\mu_i = \frac{n+1}{n} \lambda_i,$$

para cada  $1 \leq i \leq m$ . Como  $\langle v_i, v_j \rangle = (n/(n+1))(\langle u_i, u_j \rangle + 1/n)$ , los  $v_i$  son ortogonales cuando  $\langle u_i, u_j \rangle = -1/n$  para todo  $i \neq j$ , siendo los  $u_i$  los normales a las caras del polítopo  $\bar{K}$ , y según vimos en el corolario 2.21 esto caracteriza al símplice regular.

Al ser  $\|u_i\| = 1$ , es inmediato comprobar que también  $\|v_i\| = 1$ , y como  $\sum_i \lambda_i = n$  también es inmediato que  $\sum_i \mu_i = n+1$ . Además, dado que  $\sum_i \lambda_i u_i = 0$  entonces también  $\sum_i \mu_i u_i = 0$ . Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \mu_i v_i v_i^T &= \sum_{i=1}^m \frac{n+1}{n} \lambda_i \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \left( -u_i^T, n^{-1/2} \right)^T \right) \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \left( -u_i^T, n^{-1/2} \right)^T \right)^T \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \left( -u_i^T, n^{-1/2} \right)^T \left( -u_i^T, n^{-1/2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \begin{array}{c|c} \lambda_i u_i u_i^T & -\lambda_i \frac{u_i}{\sqrt{n}} \\ \hline -\lambda_i \frac{u_i^T}{\sqrt{n}} & \frac{\lambda_i}{n} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i u_i^T & \frac{-1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i \\ \hline \frac{-1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i^T & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \lambda_i \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = I_{n+1}, \end{aligned}$$

donde se han usado al final las tres propiedades (4.2). En definitiva, los  $\mu_i$  y los  $v_i$  est n en las condiciones de la desigualdad de Brascamp-Lieb. Vamos a definir unas funciones apropiadas que nos permitan explotar dicha desigualdad en este problema. Para todo  $1 \leq i \leq m$ , sean

$$f_i(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

claramente positivas, y es fácil ver que integran a 1 en  $\mathbb{R}$ .

En estas condiciones, si consideramos la función

$$F(x) = \prod_{i=1}^m f_i(\langle x, v_i \rangle)^{\mu_i},$$

definida en  $\mathbb{R}^{n+1}$ , entonces aplicando la desigualdad de Brascamp-Lieb (teorema 4.4) tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x) dx \leq \prod_{i=1}^m \left( \int_{\mathbb{R}} f_i(x) dx \right)^{\mu_i} = 1. \quad (4.3)$$

Integraremos  $F$  por secciones, de modo que consideramos  $x = (y^T, r)^T \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  y estudiamos  $F$  según el valor de  $r$  para calcular

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} F(y^T, r) dy dr.$$

Observemos que se tiene

$$\langle x, v_i \rangle = - \left( \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \langle y, u_i \rangle + \frac{r}{(n+1)^{1/2}}.$$

Como  $\sum_i \lambda_i u_i = 0$ , debe existir algún  $j$  para el cual  $\langle y, u_j \rangle \geq 0$ , de modo que si  $r < 0$  se tendrá  $\langle x, v_j \rangle < 0$ , luego  $f_j(\langle x, v_j \rangle) = 0$  y por tanto  $F(x) = 0$ . Por otro lado, si  $r \geq 0$  entonces  $F(x)$  será positiva precisamente cuando todos los términos verifiquen  $\langle y, u_i \rangle \leq r/\sqrt{n}$ , es decir, cuando  $y \in \frac{r}{\sqrt{n}}\bar{K}$ . Como anticipamos,  $F$  tiene soporte en un cono con vértice el origen cuyas secciones son homotéticas a  $\bar{K}$ . Por tanto, sustituyendo en dicho soporte y usando que  $\sum_i \mu_i u_i = 0$  y  $\sum_i \mu_i = n+1$  tenemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \prod_{i=1}^m \left( \exp \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \langle y, u_i \rangle - \frac{r}{(n+1)^{1/2}} \right) \right)^{\mu_i} \\ &= \exp \left( \sum_{i=1}^m \mu_i \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \langle y, u_i \rangle - \frac{r}{(n+1)^{1/2}} \right) \right) \\ &= \exp \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{1/2} \left\langle y, \sum_{i=1}^m \mu_i u_i \right\rangle - \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{r}{(n+1)^{1/2}} \right) \\ &= \exp(-r(n+1)^{1/2}), \end{aligned}$$

de modo que podemos integrar cada sección con  $r \geq 0$  en su soporte  $\frac{r}{\sqrt{n}}\bar{K}$  obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} F(y^T, r) dy &= \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}\bar{K}} \exp(-r(n+1)^{1/2}) dy = \exp(-r(n+1)^{1/2}) \text{vol} \left( \frac{r}{\sqrt{n}}\bar{K} \right) \\ &= \exp(-r(n+1)^{1/2}) \frac{r^n}{n^{n/2}} \text{vol}(\bar{K}) = e^{ar} \frac{r^n}{n^{n/2}} \text{vol}(\bar{K}), \end{aligned}$$

usando al final la homogeneidad de orden  $n$  del volumen y denotando  $a = -(n+1)^{1/2}$ . Finalmente, integrando las secciones con  $r \geq 0$  y aplicando la desigualdad obtenida en (4.3) llegamos a

$$1 \geq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} F(y^T, r) dy dr = \frac{\text{vol}(\bar{K})}{n^{n/2}} \int_0^\infty e^{ar} r^n dr.$$

Podemos resolver esa integral aplicando integración por partes reiteradamente. Integrando una vez obtenemos

$$\int_0^\infty e^{ar} r^n dr = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ r^n \frac{e^{ar}}{a} \right]_0^t - \frac{n}{a} \int_0^\infty e^{ar} r^{n-1} dr = -\frac{n}{a} \int_0^\infty e^{ar} r^{n-1} dr,$$

y la última integración será

$$\int_0^\infty e^{ar} r dr = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ r \frac{e^{ar}}{a} \right]_0^t - \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{ar} dr = \frac{1}{a^2},$$

de modo que, inductivamente, tras las  $n-1$  integraciones tenemos

$$1 \geq \frac{\text{vol}(\bar{K})}{n^{n/2}} \int_0^\infty e^{ar} r^n dr = (-1)^{n-1} \frac{\text{vol}(\bar{K})}{n^{n/2}} \frac{n!}{a^{n+1}} = \text{vol}(\bar{K}) \frac{n!}{n^{n/2} (n+1)^{(n+1)/2}},$$

o dicho de otro modo

$$\text{vol}(K) \leq \text{vol}(\bar{K}) \leq \frac{n^{n/2} (n+1)^{(n+1)/2}}{n!} = \text{vol}(S_n),$$

que era la acotación buscada. ■

## 4.2 Una desigualdad isoperimétrica inversa

Vamos a ver cómo la teoría desarrollada hasta ahora nos permite dar una vuelta de tuerca a una clásica desigualdad geométrica, la desigualdad isoperimétrica. Como su nombre indica, el origen de este problema consistió en hallar, de entre las regiones planas con perímetro fijo, aquéllas que maximizan el área. Es bien sabido que la solución a este problema es el círculo, algo que parece haberse observado desde la antigua Grecia, y que, sin embargo, no fue demostrado rigurosamente hasta el siglo XIX, si bien es cierto que la evolución del estándar de rigor ha sido vertiginosa en los últimos siglos. En esta sección recordamos el problema original, formulado en  $\mathbb{R}^n$ , y demostramos una desigualdad inversa. Es fácil ver que no puede hallarse una cota inversa directamente, aunque sí será posible módulo transformaciones afines. Esto fue demostrado por Ball en [Bal91, sec. 1] explotando los resultados que hemos visto en la sección 4.1.

### 4.2.1 Evolución histórica

Una formulación moderna de la solución al problema isoperimétrico clásico puede ser la siguiente.

**Teorema 4.7 — Desigualdad isoperimétrica clásica.** Sea  $D \subset \mathbb{R}^2$  la región delimitada por una curva continua, cerrada y simple. Si denotamos por  $L$  la longitud de dicha curva y por  $A$  al área de  $D$ , se tiene

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

con igualdad si y sólo si la curva es una circunferencia.

Los griegos lograron demostrar, mediante su proceder euclídeo característico, que entre los polígonos con igual número de lados y perímetro, eran los regulares los que maximizaban el área. Asimismo, que entre los polígonos regulares con igual perímetro, el área aumentaba con el número de lados. Y finalmente, que el círculo tenía mayor área que cualquier polígono regular con igual perímetro. A menudo la prueba de estos hechos se atribuye a Zenodoro, cuyo trabajo se conoce por las referencias de otros matemáticos como Pappus de Alejandría. Con independencia del nivel de rigor de dichas pruebas, es claro que a lo sumo se podría considerar válida en la familia de polígonos, y no en general.

A menudo se acredita a Steiner como artífice del primer progreso significativo y riguroso. A principios del siglo XIX, Steiner demostró la desigualdad construyendo a partir de una región con frontera no circular otra con igual perímetro y área estrictamente mayor. Este método es ahora conocido por *simetrización de Steiner*, y consiste en proyectar ortogonalmente un cuerpo en un hiperplano y, en cada punto de la proyección, centrar el segmento preimagen (véanse la figura 4.1, [Gru07, Sec. 9.1] y [AGM15, Sec. 1.1.7]). Cuando el cuerpo es convexo, la simetrización mantiene la convexidad.

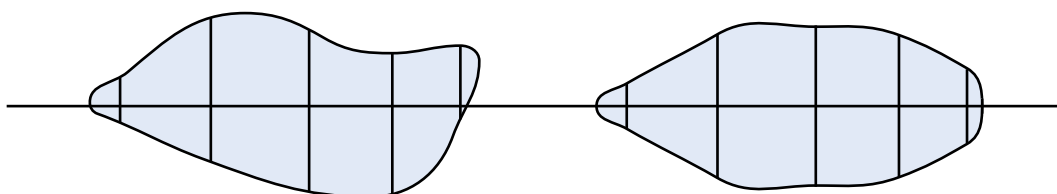


Figura 4.1: Simetrización de Steiner

La prueba se puede considerar rigurosa de acuerdo a los estándares actuales salvo por el hecho de que no justificó la existencia de solución. A finales del siglo XIX Weierstrass, entre otros, observó y corrigió el error mediante cálculo variacional. Tras esto, un rápido proceso generalizó el espacio del problema. Schwarz probó mediante la simetrización de Steiner el caso tridimensional, y el caso general  $n$ -dimensional se derivó como consecuencia de la *desigualdad de Brunn-Minkowski*, una desigualdad geométrica fundamental que relaciona el funcional volumen con la estructura lineal del espacio euclídeo.

Por supuesto, la desigualdad isoperimétrica se extendió abundantemente durante el siglo XX a otros espacios métricos, a otras desigualdades integrales relacionadas, etc.

### 4.2.2 Herramientas previas

Vamos a presentar la desigualdad de Brunn-Minkowski en varias de sus formas y la demostración de la desigualdad isoperimétrica que de ella se deriva, no sólo por su propio interés, sino porque las herramientas que necesitamos serán de utilidad para nuestro objetivo, invertir la desigualdad.

**Teorema 4.8 — Desigualdad de Brunn-Minkowski.** Dados  $K, L \in \mathcal{K}^n$  se verifican las siguientes desigualdades equivalentes.

$$(I) \quad \text{vol}(K+L)^{1/n} \geq \text{vol}(K)^{1/n} + \text{vol}(L)^{1/n}.$$

$$(II) \quad \text{vol}(\lambda K + (1-\lambda)L) \geq \text{vol}(K)^\lambda \text{vol}(L)^{1-\lambda} \text{ para } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Además, si  $\dim K = \dim L = n$ , la igualdad se da únicamente cuando  $K$  y  $L$  son homotéticos.

Como vemos, la primera formulación se traduce en que  $\text{vol}(\cdot)^{1/n}$  es una función cóncava. Varias pruebas pueden consultarse, por ejemplo, en [Gru07, Sec. 8.1] y en [AGM15, Sec. 1.2]. La desigualdad fue demostrada por primera vez por Brunn en su tesis doctoral [Bru87], aunque con algunas imprecisiones y, en particular, sin caracterizar la igualdad. Minkowski publicó más tarde una prueba completa en [Min96]. Ambas referencias están disponibles libremente en la red.

La segunda herramienta que necesitaremos reformula el hecho de que el área de superficie de un cuerpo convexo  $K$  es la derivada de su volumen. Naturalmente, se requiere precisar el significado de dicha derivada. Podríamos pensar simplemente en parametrizar la familia de cuerpos homotéticos a  $K$  y derivar respecto del parámetro. Sin embargo, lo que nos será útil es modificar el cuerpo, no homotéticamente, sino mediante su paralelo exterior (véase la definición 3.27). El siguiente resultado se debe a Steiner, aunque fue Minkowski quién lo formalizó como definición del área de superficie.

**Proposición 4.9 — Fórmula de Minkowski para el área de superficie.** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$ , se tiene

$$S(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

Para una exposición detallada, puede consultarse [Gru07, Sec. 6.4] o [AGM15, Sec. 1.5.3]. Esta herramienta será fundamental para la prueba de la desigualdad isoperimétrica inversa. Sin embargo, en estas condiciones también es rápido deducir la desigualdad clásica, con lo cual merece la pena presentar una demostración. Aprovechamos además para formular el problema en su versión  $n$ -dimensional general.

**Teorema 4.10 — Desigualdad isoperimétrica general.** Dado  $K \in \mathcal{K}^n$  se verifica

$$S(K) \geq n \text{vol}(B_n)^{1/n} \text{vol}(K)^{(n-1)/n}.$$

*Demostración.* Se trata de encadenar aplicaciones respectivas de la fórmula Minkowski para el área de superficie (proposición 4.9) y la desigualdad de Brunn-Minkowski (teorema 4.8).

$$S(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(K + \lambda B_n) - \text{vol}(K)}{\lambda} \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\text{vol}(K)^{1/n} + \lambda \text{vol}(B_n)^{1/n})^n - \text{vol}(K)}{\lambda}.$$

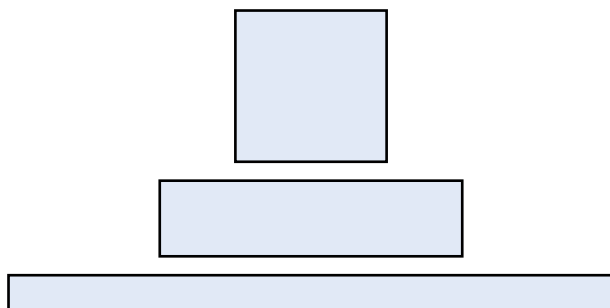
Derivando respecto de  $\lambda$  tenemos por L'Hôpital el resultado deseado,

$$S(K) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} n \left( \text{vol}(K)^{1/n} + \lambda \text{vol}(B_n)^{1/n} \right)^{n-1} \text{vol}(B_n)^{1/n} = n \text{vol}(K)^{(n-1)/n} \text{vol}(B_n)^{1/n},$$

como queríamos ver. ■

### 4.2.3 Invertiendo la desigualdad

Es una cuestión completamente natural, dada una desigualdad cualquiera, pensar en la posibilidad de invertirla y, en tal caso, de cómo hacerlo. Es inmediato comprobar que no es posible invertir directamente la desigualdad isoperimétrica, pues se pueden considerar conjuntos con volumen fijo y área de superficie arbitrariamente grande, como muestra la figura 4.2.



**Figura 4.2:** La desigualdad isoperimétrica no se puede invertir directamente

Sin embargo, el sencillo ejemplo de la figura 4.2 es suficiente para dar con la intuición subyacente al problema, la posibilidad de “aplanar” un cuerpo. Podemos pensar en impedir esta posibilidad, y quizá la forma más natural de hacerlo sea restringir el problema a las clases de equivalencia módulo transformaciones afines, de modo que para cada cuerpo convexo tratemos de probar la desigualdad inversa para su representante “menos plano”.

Esta idea resulta ser satisfactoria, y podemos probar ([Bal91, sec. 1]) que salvo transformaciones afines, es el símplice el que maximiza el área de superficie entre los cuerpos convexos con volumen fijo, y el cubo en el caso especial de cuerpos centralmente simétricos. Demostraciones alternativas pueden consultarse, por ejemplo, en [Gru07, Th. 11.3] y en [AGM15, Sec. 2.4]. En definitiva, los cuerpos maximales coinciden con aquéllos que maximizan la razón de volumen de acuerdo a los teoremas 4.5 y 4.6 de la sección anterior, y no es casualidad, como vamos a ver en la demostración.

**Teorema 4.11 — Desigualdad isoperimétrica inversa.** Sea  $K \in \mathcal{H}^n$ . Existe una imagen afín  $\tilde{K}$  de  $K$  tal que

$$\text{vol}(\tilde{K}) = \text{vol}(S_n) \quad \text{y} \quad S(\tilde{K}) \leq S(S_n).$$

Si además  $K \in \mathcal{H}_0^n$ , entonces existe una imagen afín  $\tilde{K}$  de  $K$  tal que

$$\text{vol}(\tilde{K}) = \text{vol}(C_n) \quad \text{y} \quad S(\tilde{K}) \leq S(C_n).$$

*Demostración.* El procedimiento para probar ambos casos será similar. Comencemos por el general. Como vimos en el teorema 4.6, la razón de volumen de  $\tilde{K}$  será menor o igual que la razón de volumen de  $S_n$ , es decir

$$\left( \frac{\text{vol}(\tilde{K})}{\text{vol}(\varepsilon)} \right)^{1/n} \leq \left( \frac{\text{vol}(S_n)}{\text{vol}(\varepsilon')} \right)^{1/n}, \quad (4.4)$$

donde  $\varepsilon, \varepsilon'$  son los elipsoides de máximo volumen contenidos en  $\tilde{K}$  y en  $S_n$ , respectivamente. Ahora bien, según vimos en el corolario 2.21, el elipsoide de John de  $S_n$  es  $B_n$ . Tomemos pues  $\tilde{K}$  precisamente la imagen afín de  $K$  para la cual  $B_n$  también sea el elipsoide de máximo volumen contenido en  $\tilde{K}$ . En tal caso, la desigualdad (4.4) se reduce a  $\text{vol}(\tilde{K}) \leq \text{vol}(S_n)$ , y por tanto, podemos dilatar  $\tilde{K}$  por un escalar positivo para obtener igualdad. Denotemos dicho conjunto por  $\tilde{K}_1$ . Evidentemente se seguirá teniendo  $B_n \subset \tilde{K}_1$ , de modo que tenemos

$$\text{vol}(\tilde{K}_1) = \text{vol}(S_n) \quad \text{y} \quad \text{vol}(B_n) \leq \text{vol}(\tilde{K}_1). \quad (4.5)$$

De cara a probar que  $S(\tilde{K}_1) \leq S(S_n)$  hay que recordar que, según vimos en el corolario 2.21 al estudiar el símplice regular de inradio 1, su volumen y su área de superficie vienen dadas por

$$\text{vol}(S_n) = \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!} \quad \text{y} \quad S(S_n) = \frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{(n-1)!},$$

por lo que, en particular, tenemos

$$S(S_n) = n\text{vol}(S_n). \quad (4.6)$$

Atendiendo a la proposición 4.9 para el área de superficie de  $\tilde{K}_1$  y haciendo uso de las propiedades (4.5) y (4.6) llegamos a la acotación buscada:

$$\begin{aligned} S(\tilde{K}_1) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\tilde{K}_1 + \lambda B_n) - \text{vol}(\tilde{K}_1)}{\lambda} \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\tilde{K}_1 + \lambda \tilde{K}_1) - \text{vol}(\tilde{K}_1)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}((1+\lambda)\tilde{K}_1) - \text{vol}(\tilde{K}_1)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\lambda)^n \text{vol}(\tilde{K}_1) - \text{vol}(\tilde{K}_1)}{\lambda} \\ &= \text{vol}(\tilde{K}_1) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\lambda)^n - 1}{\lambda} = \text{vol}(\tilde{K}_1) \lim_{\lambda \rightarrow 0} n(1+\lambda)^{n-1} \\ &= n\text{vol}(\tilde{K}_1) = n\text{vol}(S_n) = S(S_n), \end{aligned}$$

donde se ha empleado la homogeneidad de orden  $n$  del volumen y se ha usado al final L'Hôpital para calcular el límite en  $\lambda$ .

El caso simétrico es completamente análogo. Por el teorema 4.5 el cubo  $C_n$  maximiza la razón de volumen entre los cuerpos convexos simétricos, luego dado  $K \in \mathcal{K}_0^n$  podemos construir una imagen afín  $\tilde{K}$  verificando las condiciones

$$\text{vol}(\tilde{K}) = \text{vol}(C_n) \quad \text{y} \quad \text{vol}(B_n) \leq \text{vol}(\tilde{K}). \quad (4.7)$$

Como el cubo  $C_n$  tiene volumen  $2^n$  y área de superficie  $n2^n$ , ya que tiene  $2n$  caras con área  $2^{n-1}$  cada una, obtenemos nuevamente la relación

$$S(C_n) = n\text{vol}(C_n). \quad (4.8)$$

Por tanto aplicando de nuevo la proposición 4.9 junto con (4.7) y (4.8) llegamos a la acotación buscada:

$$S(\tilde{K}) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{vol}(\tilde{K} + \lambda B_n) - \text{vol}(\tilde{K})}{\lambda} \leq \text{vol}(\tilde{K}) \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\lambda)^n - 1}{\lambda} = n\text{vol}(\tilde{K}) = n\text{vol}(C_n) = S(C_n),$$

como queríamos ver. ■



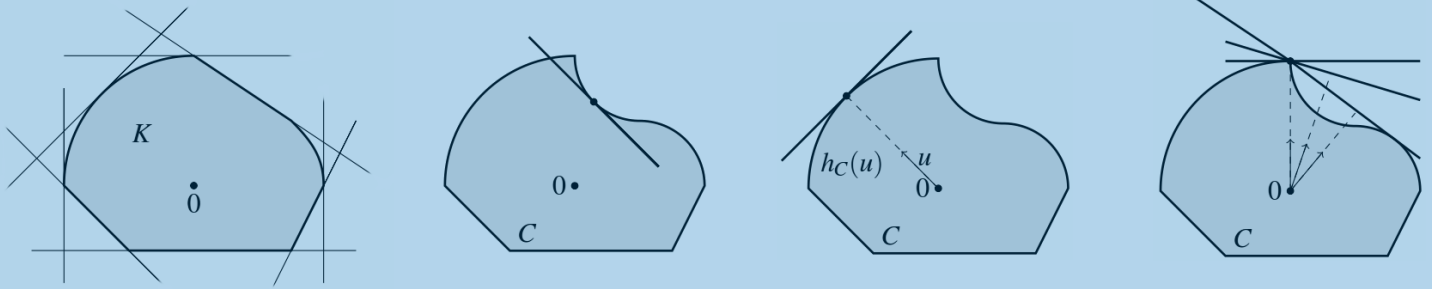


## Bibliografía

Cuerpos proyección del tetraedro y del doble cono (véase la definición 3.19), (Gar06, p. 146).

- [AGM15] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos, V.D. Milman. *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*. Mathematical Surveys and Monographs, **202**. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2015.
- [Bal89] K. Ball. “Volumes of sections of cubes and related problems” en *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Berlin: Springer, 1989, 251–260.
- [Bal91] K. Ball. “Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality”, *J. London Math. Soc.* **44**:2 (1991), 351–359.
- [Bal92] K. Ball. “Ellipsoids of maximal volume in convex bodies”, *Geom. Dedicata* **41** (1992), 241–250.
- [Bal97] K. Ball. “An elementary introduction to modern convex geometry”, en S. Levy, *Flavors of geometry*, Cambridge: Cambridge University Press. *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* **31** (1997), 1–58.
- [Beh38] F. Behrend. “Über die kleinste umbeschriebene und die grösste eingeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs”, *Math. Ann.* **115** (1938), 379–411.
- [BL76] H.J. Brascamp, E.H. Lieb. “Best constants in Young’s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions”, *Adv. Math.* **20** (1976), 151–173.
- [Bru87] H. Brunn. *Über Ovale und Eiflächen*, tesis doctoral, Universidad de Munich, 1887. Disponible libremente en <https://archive.org/details/ueberovaleundeio0brungoog>.
- [DLL57] L. Danzer, D. Laugwitz, H. Lenz. “Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper eingeschriebenen Ellipsoiden”, *Arch. Math.* **8** (1957), 214–219.
- [Gar06] R.J. Gardner. *Geometric tomography*, 2da edición, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
- [Gia90] A.A. Giannopoulos. “Banach-Mazur compactum”, en M. Hazewinkel, *Encyclopedia of Mathematics*, Berlin: Springer, 1990. Disponible libremente en [https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Banach-Mazur\\_compactum](https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Banach-Mazur_compactum).

- [Gru88] P.M. Gruber. “Minimal ellipsoids and their duals”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **2**:37 (1988), 35–64.
- [Gru07] P.M. Gruber. *Convex and Discrete Geometry*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 336, Berlin: Springer, 2007.
- [Gru08] P.M. Gruber. “Application of an idea of Voronoi to John type problems”, *Adv. Math.* **218**:2 (2008), 309–351.
- [GS05] P.M. Gruber, F. Schuster. “An arithmetic proof of John’s ellipsoid theorem”, *Arch. Math. (Basel)* **85** (2005), 82–88.
- [Gru63] B. Grünbaum. “Measures of symmetry for convex sets”, *Convexity en Proc. Sympos. Pure Math.* **7**, Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1963, 233–270.
- [Hen12] M. Henk. “Löwner-John Ellipsoids”, *Doc. Math.* extra volume ISMP (2012), 95–106.
- [Jac75] N. Jacobson. “Lectures in Abstract Algebra II: Linear Algebra”, Nueva York: Springer, 1975.
- [Joh48] F. John. “Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions” en *Studies and Essays presented to R. Courant on his 60th Birthday*, Nueva York: Interscience Publishers, 1948, 187–204.
- [Joh85] F. John. *Collected Papers*, Vol. 2, Boston, Basilea, Stuttgart: Birkhäuser, 1985.
- [Las89] M. Lassak. “Approximation of plane convex bodies by centrally symmetric bodies”, *J. London Math. Soc.* **40**:2 (1989), 369–377.
- [Las92] M. Lassak. “Approximation of convex bodies by triangles”, *Proc. Amer. Math. Soc.* **115**:1 (1992), 207–210.
- [Las98] M. Lassak. “Approximation of convex bodies by centrally symmetric bodies”, *Geom. Dedicata* **72**:1 (1998), 63–68.
- [Las99] M. Lassak. “Parallelotopes of maximum volume in a simplex”, *Disc. Comput. Geom.* **21** (1999), 449–462.
- [MM64] M. Marcus, H. Minc. *A survey of matrix theory and matrix inequalities*, Boston: Allyn and Bacon, 1964.
- [Min96] H. Minkowski. *Geometrie der Zahlen*, Leipzig: Teubner, 1896. Disponible libremente en <https://archive.org/details/geometriederzahl00minkrich>.
- [Pel90] A. Pelczynski. “Remarks on John’s theorem on the ellipsoid of maximal volume inscribed into a convex body in  $\mathbb{R}^n$ ”, *Note di Matematica* **10**:2 (1990), 395–410.
- [Sch14] R. Schneider. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, 2nd expanded edition, Cambridge: Cambridge University Press, 2014.
- [Vor08] G.F. Voronoi. “Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Première mémoire: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites”, *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908), 97–178.
- [Zag58] V.L. Zaguskin. “Circumscribed and inscribed ellipsoids of extremal volume”, *Uspekhi Mat. Nauk* **13** (1958), 89–93.



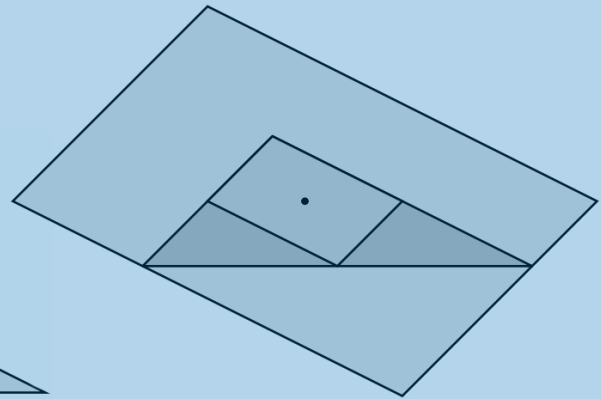
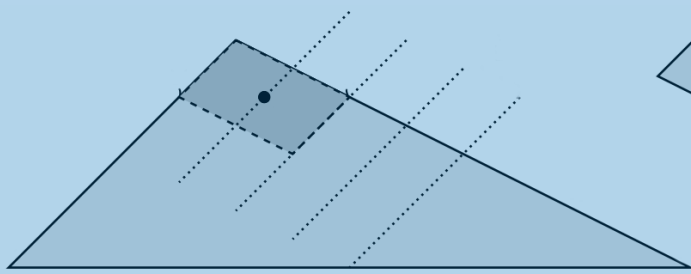
## Índice de figuras

Patologías de hiperplanos soporte a un cuerpo convexo (véase la definición 1.14).

1.1	Ilustración de la suma de Minkowski de dos conjuntos . . . . .	11
1.2	Contraejemplo para propiedades de la suma de Minkowski sin convexidad . . . . .	11
1.3	Patologías del hiperplano soporte . . . . .	14
1.4	Cuerpo convexo como intersección de semiespacios soporte . . . . .	14
2.1	La bola de máximo volumen contenida en un paralelepípedo no es única . . . . .	17
2.2	La elipse de área máxima contenida en un rectángulo sí es única . . . . .	17
2.3	Elipsoides (bolas) de máximo/mínimo volumen en un símplice y un cubo. . . . .	19
2.4	Bolas inscrita y circunscrita a paralelepípedos de razón no acotada. . . . .	20
2.5	Acotación de elipsoides contenidos en el cuerpo convexo . . . . .	21
2.6	Elipsoide contenido en una salchicha . . . . .	22
2.7	Conjuntos $\mathcal{P}^n$ y $\mathcal{P}_1^n$ en $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ y algunas de sus propiedades. . . . .	24
2.8	Diagrama de $\mathcal{P}^n, \mathcal{P}_1^n, E$ , con hiperplano soporte y vector normal . . . . .	26
2.9	Un cuerpo contenido en el politopo determinado por los puntos de contacto $u_i$ . . . . .	29
2.10	Elipsoides de máximo y mínimo volumen de cuerpos polares: Cubo y crosspolitopo . . . . .	34
2.11	Anillo elipsoidal mínimo de un rectángulo . . . . .	37
3.1	Envoltura óptima de un triángulo mediante paralelogramos homotéticos . . . . .	45
3.2	Envoltura óptima de un triángulo mediante paralelogramos homotéticos (bis) . . . . .	46
3.3	Aproximación de un cuerpo $K$ por un cuerpo centralmente simétrico $C$ . . . . .	48
3.4	Aproximación de un cuerpo $K$ por un cuerpo centralmente simétrico $C$ (bis) . . . . .	48
3.5	Ejemplo extremal para la cota de la razón homotética, justificación . . . . .	50
3.6	Ejemplo extremal para la cota de la razón homotética en el plano . . . . .	51
3.7	Distancia de B-M en $\mathbb{R}^2$ maximizada con paralelogramos y los hexágonos regulares . . . . .	55

---

3.8	Paralelo exterior de un politopo . . . . .	68
4.1	Simetrización de Steiner . . . . .	77
4.2	La desigualdad isoperimétrica no se puede invertir directamente . . . . .	79



## Índice alfabético

Caso maximal en el plano para la cota homotética del teorema 3.6, y sección 2-dimensional empleada en la prueba de dicha maximalidad (véase el teorema 3.7).

### A

área de superficie ..... 57

### C

circunradio ..... 20  
 compacto de Banach-Mazur ..... 55  
 conjunto de primera categoría ..... 37  
 conjunto paralelo exterior ..... 68  
 cono de formas cuadráticas d.p.  $\mathcal{P}^m$  ..... 23  
 cono normal ..... 27  
 cono soporte ..... 26  
 convexidad ..... 9  
 cota  
     diámetro de un cuerpo convexo ..... 44  
     distancia de Banach-Mazur ..... 54  
     razón de volumen (óptima general) ..... 74  
     razón de volumen (óptima simétrica) ..... 73  
     razón de volumen (débil) ..... 72  
     razón homotética ..... 35  
     razón homotética (caso simétrico) ..... 34  
     razón homotética (cuerpo general) ..... 47  
     volumen elipsoide  $k$ -dimensional ..... 40  
 crosspolitopo ..... 10  
 cuerpo  
     afínmente equivalente ..... 51  
     convexo ..... 10  
     convexo típico ..... 37

dual ..... 33  
 polar ..... 33  
 proyección ..... 57

### D

desigualdad  
     de Brascamp-Lieb ..... 73  
     de Brunn-Minkowski ..... 78  
     de determinantes de Minkowski ..... 20  
     de Hölder ..... 73  
     de medias aritmética y geométrica ..... 25  
     isoperimétrica  
         clásica, 77  
         general, 78  
         inversa, 79  
 distancia  
     de Banach-Mazur analítica ..... 53  
     de Banach-Mazur geométrica ..... 51  
     de Hausdorff ..... 20  
 dualidad ..... 33  
     del cubo y el crosspolitopo ..... 33  
     y elipsoides de John ..... 33

### E

elipsoide ..... 11  
 elipsoide de John ..... 22  
     del crosspolitopo ..... 29

del cubo .....	29
del s3mplice regular .....	30
envoltura convexa .....	9
envoltura elipsoidal m3nima .....	36
espacio de Baire .....	36

## F

f3rmula	
de Cauchy para $S(K)$ .....	57
de Kubota para quermassintegrales .....	69
de Minkowski para $S(K)$ .....	78
de Steiner .....	68
funci3n soporte .....	13

## H

hiperplano soporte .....	13
--------------------------	----

## I

inradio .....	20
---------------	----

## L

lagrangiano .....	16
-------------------	----

## P

paralelotopo .....	10
polinomio de Steiner .....	68
politopo .....	10
posici3n m3xima de un cuerpo .....	70
posici3n m3nima de un cuerpo .....	65, 69
principio de Cavalieri .....	32

## Q

quermassintegral .....	68
------------------------	----

## R

raz3n de volumen .....	72
------------------------	----

## S

s3mplice .....	10
semiespacio soporte .....	13

simetrizaci3n de Steiner .....	77
suma de Minkowski .....	10

## T

### teorema

de caracterizaci3n de puntos de contacto .	28
de Carath3odory .....	9
de categor3as de Baire .....	36
de John .....	18
de la proyecci3n de Aleksandrov .....	58
de selecci3n de Blaschke .....	20
de separaci3n .....	26
exist. y unic. de elipsoides maximales . . .	21

## V

volumen de un elipsoide .....	13
-------------------------------	----