



UNIVERSIDAD DE MURCIA
FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO

Teorema de Bernstein

D. Juan Manuel Espín López
Curso 2013-2014

Índice general

Introducción.	3
Resumen.	4
Abstract.	8
1. Contexto histórico.	12
2. Conceptos previos.	14
2.1. Definición de superficie.	14
2.2. Aplicaciones diferenciables.	15
2.3. Plano tangente.	16
2.4. Diferencial de una aplicación.	16
2.4.1. Diferencial de una función real.	16
2.4.2. Diferencial de una aplicación entre superficies.	17
2.5. Primera forma fundamental.	18
2.6. Aplicación de Gauss y operador forma.	19
2.7. Curvatura de una superficie.	21
2.8. Grafo.	24
3. Superficies Minimales.	29
3.1. Definición.	29
3.2. Grafos minimales no enteros.	32
4. Teorema de Bernstein analítico.	36
4.1. Preliminares. Teorema de Jörgens.	36
4.2. Teorema de Bernstein.	40
5. Teorema de Bernstein geométrico.	44
5.1. Cálculo intrínseco en una superficie.	44
5.1.1. Métrica.	44
5.1.2. Derivada covariante.	45
5.1.3. Gradiente, divergencia y laplaciano.	50
5.2. Parabolicidad y completitud.	54
5.3. Teorema de Bernstein.	56
Bibliografía.	63

Introducción.

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado es demostrar el teorema de Bernstein de dos formas distintas. Cada demostración hace uso de los conocimientos previos y herramientas de la rama matemática en la que se encuadra. La primera es una demostración analítica, que usa herramientas del cálculo en derivadas parciales y varios resultados importantes como el teorema de Jörgens. La segunda es una demostración geométrica, basada en herramientas de la geometría diferencial y la geometría Riemanniana.

Comenzamos con un resumen del texto en español, precedido por su correspondiente traducción al inglés, donde se detalla de forma escueta el trabajo. Posteriormente, con el objetivo de ponernos en situación, en el Capítulo 1 se incluye una breve contextualización histórica del problema de Bernstein donde se detallan las fechas y autores que intervinieron en ambas demostraciones.

Después, en el Capítulo 2 recordamos una serie de conceptos ya conocidos, con la intención de recordarlos y tenerlos presentes en la lectura de este trabajo. En el Capítulo 3, vemos las distintas, pero equivalentes, definiciones de superficie minimal y algunos ejemplos de grafos minimales que no son enteros como la superficie de Scherk, véase la Figura 3.5.

A continuación, en el Capítulo 4 damos la primera demostración del teorema, la versión analítica. Para ello desarrollamos todas las herramientas que nos son necesarias como notación, definiciones, propiedades y teoremas necesarios para la demostración. En este apartado se demuestra el teorema de Jörgens, herramienta básica para demostrar el teorema de Bernstein.

Por último, en el Capítulo 5 damos la demostración geométrica. Para esta segunda demostración nos es necesario incidir más hondo en la geometría riemanniana. En este trabajo se desarrollan los conceptos y herramientas necesarias de una forma alternativa, sin el uso del cálculo de conexiones y tensores, solo utilizando el concepto de derivadas covariantes. Esta forma de presentar la demostración es novedosa, pues todas hacen uso de la geometría riemanniana más pura, las conexiones. La idea de realizar así la demostración ha sido extraída de [Al], donde se da una introducción al análisis geométrico.

Resumen.

Aunque resulta muy complicado resumir un texto matemático, en este capítulo intentamos resaltar lo más importante de este trabajo con la intención de motivar al lector, y para tener desde el inicio una idea general sobre el contenido del mismo.

Este trabajo recopila dos demostraciones distintas del teorema de Bernstein, pero ¿qué dice el teorema de Bernstein? El teorema de Bernstein en su versión más general afirma que: *el único grafo minimal y entero es el plano*. Este enunciado se puede adecuar a las distintas ramas de las matemáticas en la cual se intente demostrar.

Hay que tener en cuenta que el trabajo se enmarca dentro de la geometría, concretamente en la geometría global de superficies. En este trabajo haremos uso de conceptos y herramientas, no sólo de esta rama, sino también indagaremos en la geometría riemanniana y, de forma más superficial, en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales mostrando algunos resultados.

Este trabajo, como todo trabajo fin de grado, comienza con una portada, un índice, una introducción y un resumen, en el cual nos encontramos ahora mismo. Después de este resumen en español, se encuentra su correspondiente traducción al inglés, como exige la normativa.

Al comienzo del trabajo, Capítulo 1, realizamos una breve introducción histórica. S. G. Bernstein fue un matemático brillante. Estudió en la Sorbona y por el año 1914 plantea y resuelve un teorema, el cual posteriormente recibirá su nombre *Teorema de Bernstein*. En los años sucesivos son varios los autores que dan demostraciones distintas y extienden el teorema a dimensiones mayores.

En el año 1969, se producen dos hitos relacionados con este teorema. Los matemáticos Bombieri, Giorgi y Giusti demuestran que el teorema no es cierto si la dimensión del espacio es ocho o superior; y el matemático chino-estadounidense Chern, da una demostración distinta del teorema usando la geometría riemanniana. En torno a la década de los noventa se demuestra el Teorema de Bernstein para codimensiones mayores que uno.

Una vez nos hemos situado históricamente, dedicamos un capítulo entero, Capítulo 2, a introducir los conceptos básicos y necesarios de la Geometría Diferencial. Este capítulo tiene la intención de recordar y tener presentes los conceptos básicos de

la geometría a la hora de leer el trabajo. Todos estos conceptos, proposiciones y propiedades han sido vistos en los tres primeros cursos del Grado en Matemáticas, por este motivo son varias las demostraciones que se omiten. Las demostraciones que se realizan se hacen con el objetivo de fijar términos, ya que muestran un proceso o método interesante.

En este capítulo damos las definiciones de superficie regular, aplicaciones diferenciables y planos tangentes al comienzo, todo ello ilustrado con algunos ejemplos de superficies que se muestran en figuras. Posteriormente, hacemos especial hincapié en la diferencial de una aplicación, pues ésta será una herramienta básica que usaremos en el Capítulo 5. En esta sección y por especial interés se demuestran unas propiedades que cumple la diferencial, en cambio se muestra la regla de la cadena y el teorema de la función inversa sin demostración.

A continuación, exponemos la primera forma fundamental, así como los coeficientes que la definen, la aplicación de Gauss, el operador forma, la segunda forma fundamental y sus respectivos coeficientes. Tras esto, dedicamos una importante sección a la curvatura de una superficie, donde definimos las curvaturas principales, la curvatura media y la curvatura de Gauss. Damos una clasificación del tipo de puntos en una superficie y también la caracterización de las superficies totalmente umbilicales. Para finalizar el capítulo, dedicamos una sección completa al estudio de un tipo de superficie, los grafos. Los grafos tienen una particularidad, y es que si el grafo está definido por u una función diferenciable se cumple que su curvatura media viene dada por la siguiente ecuación:

$$2H = \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

En el Capítulo 3 damos la definición de superficie minimal. Para ello mostramos seis de las numerosas definiciones equivalentes que existen para definir las. La definición más relevante para nosotros será la Definición **III** que nos indica que una superficie es *minimal* si su curvatura media es nula, es decir, $H = 0$.

A lo largo de la historia, cada nueva definición ha surgido con el objetivo de encontrar nuevas superficies. La primera superficie que se conoció fue el plano; después, Euler demostró que el catenoide era la única superficie minimal de revolución; Meusnier, descubrió el helicoide y, posteriormente, hubo que esperar a que Scherk encontrara sus dos superficies. En este capítulo se muestran representaciones gráficas de estas superficies y algunas otras. Para finalizar el capítulo, se muestran dos superficies minimales que son grafos no enteros, y que por el teorema de Bernstein, como ya sabíamos de antemano, no son planos. Estas dos superficies se obtienen buscando soluciones a la ecuación siguiente, que nos proporcionará el Corolario 3.8

$$\operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0.$$

Como hemos mencionado al comienzo del resumen, este trabajo expone dos demostraciones del teorema. En este punto, tras asentar los conocimientos necesarios, ya estamos en disposición de dar la primera de las demostraciones.

En el Capítulo 4 presentamos la primera demostración del teorema cuyo enunciado es el siguiente:

Teorema de Bernstein. *Los planos son las únicas superficies minimales en \mathbb{R}^3 tales que son grafos enteros de una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Esta versión del teorema es una versión más analítica. Su demostración fue dada por el propio Bernstein y nosotros la recuperamos del libro Spivak, véase [Sp]. Para su demostración, hacemos uso de la notación clásica de las ecuaciones en derivadas parciales y es necesario un resultado clásico, el Teorema de Jörgens. Este teorema afirma que si una función ϕ está definida en todo el plano y satisface la ecuación

$$rt - s^2 = 1$$

se tiene que esa función ϕ ha de ser un polinomio cuadrático en las variables x e y . Este teorema y su demostración se da como un resultado previo en la primera sección del capítulo.

La demostración del Teorema de Bernstein se realiza de la siguiente forma: usando la ecuación de Euler-Lagrange se encuentra una función ϕ , a la cual se le aplica el teorema de Jörgens, luego se tiene que esa función ϕ es un polinomio cuadrático. Así que, por la relación que hay entre ϕ y u se tiene que u ha de ser un polinomio de grado 1 en x e y , por lo tanto su grafo es un plano. Para ver más detalles de la demostración, véase el Teorema 4.7.

Ya hemos cumplido uno de los objetivos, ahora nos falta dar una segunda demostración. Esta segunda demostración se encuentra en el Capítulo 5 y fue dada por Chern en 1969.

Lo primero que necesitamos para la demostración es una serie de cálculos intrínsecos en una superficie. Para esto, damos la definición de campos tangentes y de métrica. Una vez estos términos están definidos, dedicamos un intenso apartado al cálculo de la derivada covariante. En primer lugar, derivamos de forma covariante un campo tangente respecto a un vector, damos la fórmula de Gauss y sus propiedades. Posteriormente, extendemos el concepto de derivada de funciones respecto campos y de derivada covariante de campos respecto a campos. A continuación, damos la definición de campo de endomorfismos y la derivada covariante de estos respecto a un campo tangente. El objetivo de todas estas derivadas es derivar el operador forma.

A continuación, en la misma sección, damos las siguientes nociones: Gradiente, Divergencia y Laplaciano de una función sobre una superficie. Todas estas funciones definen un cálculo intrínseco en la superficie y, por tanto vemos la relación que existe en estos términos entre dos métricas conformes.

En la siguiente sección damos dos nuevos conceptos: la parabolicidad y la completitud. El primer concepto nos permite clasificar las superficies en parabólicas y no-parabólicas, de forma que una superficie es parabólica si las únicas funciones superarmónicas y acotadas inferiormente son las constantes. De la misma forma, la completitud nos clasifica las superficies, siendo completa si toda curva divergente en S tiene longitud infinita. Una propiedad importante que debemos de remarcar es que la parabolicidad es un invariante conforme en dimensión 2, Proposición 5.33. Terminamos la sección dando el criterio de Ahlfors, que afirma que si una superficie es completa con curvatura de Gauss no negativa, $K \geq 0$, entonces es parabólica.

En la última sección del capítulo, mostramos una proposición con un cálculo necesario, Proposición 5.40. A continuación, enunciamos y demostramos la versión geométrica del teorema que dice así:

Teorema de Bernstein. *Las únicas superficies minimales en \mathbb{R}^3 , orientables y completas cuya imagen esférica está contenida en una semiesfera abierta son los planos.*

La demostración se basa en encontrar una métrica \widehat{g} que es conforme a la métrica g , para la cual la superficie (S, \widehat{g}) es llana y completa, y por el criterio de Ahlfors es parabólica. Como hemos dicho anteriormente, la parabolicidad es un invariante conforme, luego (S, g) es parabólica. Como $\Delta \langle N, \vec{a} \rangle = 2K \langle N, \vec{a} \rangle \leq 0$ y $\langle N, \vec{a} \rangle > 0$ se tiene que es superarmónica y acotada inferiormente, al ser (S, \widehat{g}) parabólica se tiene que $\langle N, \vec{a} \rangle$ ha de ser constante, pero como $K \leq 0$ se ha de cumplir que $K = 0$, y como $H = 0$ por ser minimal, se tiene que el operador forma vale 0, y por tanto la superficie es un plano.

Finalizamos el capítulo, y así la memoria de este trabajo fin de grado con una aplicación del teorema. Haciendo uso de la siguiente desigualdad vista anteriormente

$$|H| \leq \frac{\text{Long}(\partial\Omega)}{2\text{Area}(\Omega)},$$

demostramos en el corolario que los únicos grafos enteros con curvatura media constante son los planos.

Abstract.

Although summarizing a mathematical text is difficult, in this chapter it is tried to remark the most important things of this Final Project work. The aim of this work is to motivate and give to the reader a first idea about the content.

This Final Project collects two different proofs of Bernstein's theorem, but, what does it say the Bernstein theorem? In the most general version it says that "the only entire and minimal graph is the plane". This statement can be adapted to the different mathematical areas in which it is tried to be proved.

It has to be taken into consideration that the work is framed within the geometry, specifically on the surfaces global geometry. In this memory we will use concepts and tools of this branch, but also we will inquire in Riemannian Geometry and a bit on the theory of Partial Differential Equations showing some results.

This work, as all the Final Projects, starts with a title page, an index, an introduction and an abstract. The abstract appears in two different languages, the first one is in Spanish, and the second one in English. As you can see, this work is written in Spanish and only the abstract is translated into English.

At the beginning of the memory, in Chapter 1, it is made a short historical introduction. S. G. Bernstein was a famous mathematician who studied in Sorbona University and in 1914, he proposed and solved an important theorem. This theorem, with the passing of time was called the Bernstein Theorem. In the following years there have been several authors that have given different approaches, extending the theorem to higher dimensions and co-dimensions.

In 1969, two milestones related to this theorem are produced. The mathematicians Bombieri, Giorgi and Giusti showed that the theorem is not true if the space dimension is eight or higher, and the Chinese-American mathematician, Chern, gave a different proof of the theorem using the Riemannian geometry. Around the nineties, it was proved Bernstein theorem for further co-dimensions higher than one.

Once we are historically situated, it is dedicated an entire chapter, Chapter 2, to introduce the basic and necessary concepts of Differential Geometry. This chapter intends to refresh and remind the basic concepts of geometry when reading the work. All these concepts, propositions and properties have been studied during the first

three years of the degree in Mathematics and for that reason some proofs are going to be omitted. The carried out proofs are made with the aim of setting terms as they show an interesting process or method.

In this chapter we give regular surface definitions, differentiable applications and tangent planes, all of them illustrated with some examples of surfaces shown on pictures. Then it is highlighted the differential of an application, as this will be a basic tool that we will use in Chapter 5. In this section and with special interest, it is shown the properties that the differential fulfills. Moreover, it is showed the chain rule and inverse function theorem without proof.

To continue it is presented the first fundamental form, and the coefficients that define it, the Gauss application, the operator form, the second fundamental form and their respective coefficients. After that it is dedicated a considerable section to surface curvatures, where we can define the principal, mean and Gaussian curvatures. A classification of the type of points on a surface and the characterization of the totally umbilical surfaces are given. To conclude the chapter, an entire section is dedicated to the study of a type of surface, the graphs. The graphs have a peculiarity; if the graph is defined by u a differentiable function, its mean curvature is given by the following equation:

$$2H = \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right).$$

In Chapter 3 the minimal surface definitions are given. For that reason we show six of the many equivalent definitions that exist to define it. The most important definition for us is Definition **III**, which states that a surface is *minimal* if the mean curvature vanishes, that is, $H = 0$.

Along the history each new definition has emerged with the aim of finding new surfaces. The first known minimal surface was the plane. After Euler showed that the catenoid was the only minimal surface of revolution, Meusnier discovered the helicoid and after that we had to wait until Scherk found his two surfaces. In this chapter images of these surfaces are shown and some others. To finalize the chapter, we show two minimal surfaces which are not entire graphs, which, as we already knew from Bernstein theorem they are not planes. These two surfaces are obtained as solutions to the following equation, which will provide in Corollary 3.8 .

$$\operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0.$$

As we have mentioned at the beginning of the abstract, this memory exposes two proofs of the theorem, and now, after setting the necessary knowledges and we are able to give the first proof. In Chapter 4 it is presented the first proof of the theorem whose statement is the following:

Bernstein Theorem. *The planes are the only minimal surfaces in \mathbb{R}^3 such that are entire graph by a function $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

This is a more analytical version of the theorem, its proof was given by Bernstein himself and we recover it from Spivak's book, see [Sp]. For its proof we use the classical notation of partial differential equations and it is required a classical result, Jörgens Theorem. This theorem states that if a function ϕ is defined in the entire plane and satisfies the equation

$$rt - s^2 = 1$$

it is established that this function ϕ must be a quadratic polynomial in the variables x and y . This theorem and its proof is given as a preliminary result on the first section of the chapter.

The Theorem Bernstein proof, is made as follow; using the Euler-Lagrange equation there is a ϕ function, to which we apply the Jörgens theorem. Moreover we have that function ϕ is a quadratic polynomial. In addition, the relationship between ϕ and u must be u a polynomial of degree 1 in x and y , hence its graph is a plane. To see more details of the proof, see Theorem 4.7.

Now we have achieved one of the objectives, we need to give a second proof. This second proof is in Chapter 5 and it was given by Chern in 1969.

The first thing we need for the proof is a series of intrinsic calculations on a surface. For that purpose we give the definition of fields and metric tangent. Once these terms are defined, we dedicate an intense section to calculate the covariant derivative. Firstly we derive covariantly a tangent field with respect to a vector, we take the Gauss formula and its properties. Then we extend the derivative functions concept whit respect to fields and covariant derivative fields with respect to fields. The following is the endomorphisms field definition and the covariant derivative of this with respect to a tangent field. The aim of all these derivatives, is that we can derivate the operator form.

Then in the same section, we give the following notions: Gradient, Divergence and Laplacian of a function on a surface. All these functions define an intrinsic calculation on a surface and thus we can see the relationship between these terms by two conformal metrics.

In the next section, we give two new concepts: the parabolicity and completeness. The first concept allows us to classify parabolic and not parabolic surfaces, establishing that a surface is parabolic if the only subharmonic functions which are bounded from below are the constants. Likewise, completeness classified surfaces, being completed if any divergent curve has infinite length. An important property that we must highlight is that the parabolicity is conformally invariant in dimension

2, Proposition 5.33. We end this section giving the Ahlfors criteria, which says that if a surface is complete with non-negative Gaussian curvature, then it is parabolic.

In the last section of the chapter, a proposition with a necessary calculation is shown, Proposition 5.40. To continue we state and prove the geometric version of the theorem that says that:

Bernstein Theorem. *The only orientable and complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 whose spherical image is contained in an open hemisphere are the planes.*

The proof is based on finding a metric \widehat{g} which is conformal to the metric g , for which the surface (S, \widehat{g}) is plane and complete, and by the criterion of Ahlfors is parabolic. As we have said before the parabolicity is a conformal invariant, then (S, g) is parabolic. As $\Delta \langle N, \vec{\mathbf{a}} \rangle = 2K \langle N, \vec{\mathbf{a}} \rangle \leq 0$ and $\langle N, \vec{\mathbf{a}} \rangle > 0$ has to be superharmonic and bounded from below, being (S, \widehat{g}) parabolic $\langle N, \vec{\mathbf{a}} \rangle$ should be of constant, but as $K \leq 0$ has to fulfill that $K = 0$, and as $H = 0$ to be minimal, the operator form must be 0, and therefore the surface is a plane.

We finish the chapter, and so the memory of this Final Project with an application of the theorem. Using the following inequality seen before;

$$|H| \leq \frac{\text{Long}(\partial\Omega)}{2\text{Area}(\Omega)},$$

it is proved in the corollary that the only entire graphs with constant mean curvature are planes.

Capítulo 1

Contexto histórico.

La geometría de las culturas griega y egipcia quedó recogida de modo magistral en los Elementos de Euclides. Esta excepcional obra se fecha aproximadamente hacia el año 300 a.C. y en ella se establecen los fundamentos de la geometría y el álgebra griega que van a tener una influencia decisiva a lo largo de los dos milenios siguientes.

Cientos de años de después, en el siglo XVII, se produce un hito matemático importante: el nacimiento del cálculo diferencial, impulsado principalmente por Isaac Newton (1642-1727) en Inglaterra e, independientemente, por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en Alemania. Poco a poco el uso de técnicas diferenciales para la resolución de problemas geométricos iba determinando la disciplina matemática que hoy denominamos como Geometría Diferencial.

Euler usó estas técnicas para encontrar ejemplos y trabajar con superficies minimales. Particularmente interesante es su obra *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* (1744), en la cual proporciona métodos para encontrar la solución a problemas isoperimétricos, e investiga las propiedades geométricas de ciertas curvas notables, en particular, la catenaria. Esta obra es la primera dedicada al cálculo de variaciones y en ella Euler descubre que el catenoide es una superficie minimal.

A lo largo de la historia matemática se han sucedido los matemáticos que han trabajado con superficies minimales. Estos encontraron ejemplos de superficies minimales, como el helicoide y construyeron nuevas superficies minimales como las superficies de Scherk, Enneper, etc .

En 1880 nace Sergei Natanovich Bernstein, un matemático brillante. Estudió en la Sorbona donde presentó su tesis doctoral, donde resolvía el décimo noveno problema de Hilbert. Su trabajo se basó principalmente en la teoría de ecuaciones diferenciales, en la teoría de la probabilidad y en la teoría de aproximaciones. En 1914 plantea y resuelve un problema que actualmente tiene su nombre, véase [Be], también conocido como el teorema de Bernstein.

La demostración que dió Bernstein es solo para superficies en \mathbb{R}^3 . Posteriormente son varios los autores que extienden este teorema. Hasta el año 1968 se consigue demostrar que el teorema de Bernstein es cierto si la superficie (o, mejor dicho, la hipersuperficie) es un grafo sobre \mathbb{R}^n , donde $2 \leq n \leq 7$. Este trabajo de extender el teorema es debido a W. H. Fleming, véase [Fl], E. De Giorgi, véase [dG] y J. Simons, véase [Si].

En 1969, los matemáticos E. Bombieri, E. De Giorgi y E. Giusti muestran en su artículo “Minimal cones and the Bernstein problem”, véase [BdGG], un contraejemplo de porqué el teorema de Bernstein no es cierto para dimensiones mayores de 8. Este contraejemplo hizo que se dejara de intentar demostrarlo para dimensiones mayores y se buscara su extensión para codimensiones mayores que uno. En 1998 se publica un artículo de Jost y Xin, véase [JX], en el cual se enuncian y demuestran varias extensiones del teorema de Bernstein para codimensiones mayores.

Al igual que se ha ido extendiendo el teorema de Bernstein, también se han buscado demostraciones alternativas a la que dió el propio Bernstein. En 1956, J.C.C. Nitsche publica en la revista *Annals of Mathematics* una demostración alternativa a la de Bernstein que hace uso únicamente del teorema de Liouville y de la transformación de Lewy, véase [Ni].

En el año 1969, el matemático chino-estadounidense Shiing-Shen Chern publica un artículo donde da una demostración distinta del teorema de Bernstein, véase [Ch]. Esta demostración utiliza conceptos y herramientas geométricas propias de la geometría diferencial y de la geometría global de superficies, como son los conceptos de parabolicidad y completitud en superficies.

En este Trabajo Fin de Grado se exponen dos demostraciones distintas del teorema. La primera demostración que se da es la demostración inicial de Bernstein en el Capítulo 4, que la podemos encontrar en el Spivak, [Sp, Capítulo 7, pág. 267]. La segunda demostración es la demostración del matemático Chern que la podemos encontrar en el Capítulo 5.

Capítulo 2

Conceptos previos.

En este capítulo de conceptos previos damos las definiciones, proposiciones y propiedades necesarias para una correcta lectura de este trabajo. Las nociones que aquí se incluyen son las mínimas necesarias en un curso de introducción a la geometría diferencial, comenzando desde la definición de superficie hasta finalizar el capítulo hablando de la curvatura de una superficie y estudiando los grafos, que son unos ejemplos de superficies. Todos estos conceptos que aquí se exponen, se pueden ver de forma más exployada y con demostraciones en el libro de M. A. Hernández y J.A. Pastor, *Un curso de Geometría Diferencial*, [HCP].

2.1. Definición de superficie.

En este trabajo hablamos de superficies, tanto grafos como superficies minimales, por lo tanto debemos comenzar definiendo lo que es una superficie y viendo las propiedades que estas reúnen. En la siguiente definición damos la definición de *superficie regular*.

Definición 2.1. *Un subconjunto no vacío $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie regular** si para todo punto $p \in S$ existe un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$, un entorno V de p (con la topología relativa de $S \subset \mathbb{R}^3$) y una aplicación $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que:*

- $X(U) = V$ y $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ es diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty(S)$.
- $X : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo, (es decir, su inversa también es continua).
- para todo $q \in U$, la diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es inyectiva.

La aplicación X se llama una **parametrización** de la superficie.

Como podemos observar, para una misma superficie regular S pueden existir *infinitas* parametrizaciones. A continuación, vemos algunos ejemplos de superficies regulares.

Ejemplo 2.2. Plano. Sea $\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ un plano tal que a, b, c no se anulan al mismo tiempo. Supongamos que $c \neq 0$, tomando $U = \mathbb{R}^2$ y $V = \pi$ tenemos la siguiente parametrización $X : U \rightarrow V$ dada por

$$X(u, v) = \left(u, v, \frac{d - au - bv}{c} \right)$$

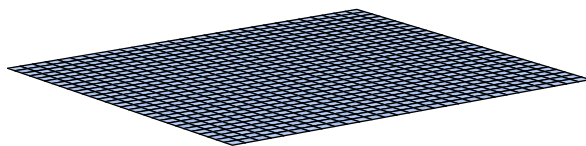


Figura 2.1: Plano.

Ejemplo 2.3. Esfera. Sea $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ la esfera unidad. Para esta superficie podemos encontrar dos parametrizaciones.

Consideremos $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, $V = \mathbb{S}_+^2$ y la aplicación $X : U \rightarrow V$ dada por

$$X(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right),$$

es una parametrización de la superficie.

Ahora considerando las coordenadas geográficas obtenemos otra parametrización de la esfera distinta a la anterior. Sea $U = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$, $V = \mathbb{S}^2$ y la aplicación $\bar{X} : U \rightarrow V$ dada por

$$\bar{X}(\theta, \psi) = (\sin \theta \cos \psi, \sin \theta \sin \psi, \cos \theta)$$

se tiene que es una parametrización de la esfera.

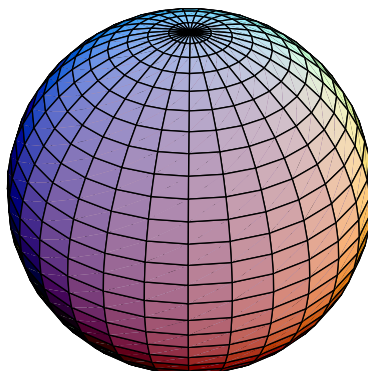


Figura 2.2: Esfera.

2.2. Aplicaciones diferenciables.

Dada una superficie S , podemos definir aplicaciones que vayan de S a un subconjunto de un espacio. Estas aplicaciones pueden tener buenas propiedades, como es el caso de ser una aplicación diferenciable. Veamos a continuación la definición de aplicación diferenciable.

Definición 2.4. Una función $f : S \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable sobre S si, para toda parametrización (U, X) , la función $f \circ X$ es diferenciable sobre el abierto U .

Como vemos, el concepto de aplicación diferenciable se apoya en la definición usual del análisis en \mathbb{R}^m . De la misma forma extendemos el concepto de aplicación diferenciable a una aplicación entre dos superficies.

Definición 2.5. Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares y $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación. Diremos que F es diferenciable si para todas las parametrizaciones (U_1, X_1) y (U_2, X_2) de S_1 y S_2 respectivamente, se tiene que $X_2^{-1} \circ F \circ X_1$ es diferenciable sobre un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$.

2.3. Plano tangente.

De forma intuitiva, para cada punto de una superficie podemos construir un plano que sea tangente. ¿Cómo conseguimos ese plano tangente? Para construirlo debemos fijarnos en todas las curvas de la superficie que pasen por dicho punto y quedarnos con los vectores velocidad de las curvas en el punto, de forma que ese plano tangente estará formado por todos los vectores tales que existe una curva en la superficie que pasa por el punto con esa dirección. Para formalizar esta idea damos las siguientes definiciones.

Definición 2.6. Una **curva diferenciable** en una superficie regular S es una aplicación diferenciable $\alpha : I \rightarrow S$ donde I es un intervalo abierto de \mathbb{R}

Definición 2.7. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular y sea $p \in S$ diremos que $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ es un **vector tangente** a S en p , si existe una curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$

Luego una vez que tenemos la definición de vector tangente, llamamos *plano tangente* de S en p , (notación $T_p S$), al conjunto de vectores tangentes a S en p . De forma que:

$$T_p S = \{ \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ diferenciable con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = \vec{v} \}$$

2.4. Diferencial de una aplicación.

Ahora extendemos algunas nociones del cálculo de varias variables a las superficies. Para ello hacemos uso de la definición y construcción del vector tangente de la sección anterior.

2.4.1. Diferencial de una función real.

En este primer apartado definimos la diferencial de una función real diferenciable, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Definición 2.8. Sea S una superficie regular, p un punto de S y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, se define la **diferencial de f en p** (notación df_p) como la aplicación:

$$\begin{aligned} df_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longrightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) \end{aligned}$$

donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$

Esta definición está bien definida, pues no depende de la curva elegida, y es lineal, ya que $df_p(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda df_p(\vec{v}) + \mu df_p(\vec{w})$. Ahora vemos tres propiedades que cumple la aplicación diferencial respecto a tres operaciones.

Proposición 2.9. Sean f, g dos funciones diferenciables en S , sea $p \in S$ y $\vec{v} \in T_p S$ se cumple que:

$$(I) \quad d(f + g)_p(\vec{v}) = df_p(\vec{v}) + dg_p(\vec{v})$$

$$(II) \quad d(fg)_p(\vec{v}) = df_p(\vec{v})g(p) + f(p)dg_p(\vec{v})$$

Demostración. Vamos a demostrar esta proposición haciendo uso de la definición y las propiedades básicas de la derivada. Sea α una curva diferenciable que cumple que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$ vamos a demostrar los dos apartados:

(I) Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} d(f + g)_p(\vec{v}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f + g)(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f(\alpha(t)) + g(\alpha(t))) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\alpha(t)) = df_p(\vec{v}) + dg_p(\vec{v}). \end{aligned}$$

(II)

$$\begin{aligned} d(fg)_p(\vec{v}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (fg)(\alpha(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f(\alpha(t))g(\alpha(t))) = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha(t))g(p) + f(p) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\alpha(t)) = df_p(\vec{v})g(p) + f(p)dg_p(\vec{v}) \end{aligned}$$

□

2.4.2. Diferencial de una aplicación entre superficies.

En esta segunda parte de la diferencial de una aplicación, vemos la diferencial de una aplicación entre dos superficies.

Sean S_1 y S_2 dos superficies; cada una tiene su plano tangente, $T_p S_1$ y $T_{p'} S_2$ respectivamente.

Definición 2.10. Sea $p \in S_1$, definimos la diferencial de F en p como la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} dF_p : T_p S_1 &\longrightarrow T_{F(p)} S_2 \\ \vec{v} &\longrightarrow \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha)(t) \end{aligned}$$

donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ es una curva diferenciable en S_1 con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$.

Esta nueva definición, está bien definida, no depende de la curva elegida y es lineal, las propiedades vistas en la Proposición 2.9, se extienden en la siguiente proposición.

Proposición 2.11. Sean F, G dos aplicaciones diferenciables de S_1 a S_2 , sea $p \in S_1$ un punto de la superficie y $\vec{v} \in T_p S_1$ se cumple que:

$$(I) \quad d(F + G)_p(\vec{v}) = dF_p(\vec{v}) + dG_p(\vec{v})$$

$$(II) \quad d(Fg)_p(\vec{v}) = dF_p(\vec{v})G(p) + F(p)dG_p(\vec{v})$$

$$(III) \quad d(\langle F, G \rangle)_p(\vec{v}) = \langle dF_p(\vec{v}), G(p) \rangle + \langle F(p), dG_p(\vec{v}) \rangle$$

Demostración. La demostración se reduce a la demostración de la Proposición 2.9. \square

A continuación mostramos varios resultados importantes del análisis de varias variables cuyas demostraciones se omiten. El primero de ellos es la regla de la cadena, tan usada en el cálculo de derivadas, y el segundo es el teorema de la función inversa.

Proposición 2.12. Regla de la cadena. Sean $F : S_1 \rightarrow S_2$ y $G : S_2 \rightarrow S_3$ aplicaciones diferenciables entre superficies. Si $p \in S_1$ se tiene que:

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

Teorema 2.13. (de la función inversa.) Sea $F : S_1 \rightarrow S_2$ una aplicación diferenciable entre dos superficies, S_1 y S_2 y supongamos que dF_p es un isomorfismo lineal para un $p \in S_1$. Entonces F es un difeomorfismo local en p , es decir, existe un entorno $V(p) \subset S_1$ tal que $F : V \rightarrow F(V)$ es un difeomorfismo entre superficies.

2.5. Primera forma fundamental.

Hasta ahora hemos ido a medio camino entre la geometría y el análisis, pues nos hemos llevado algunos conceptos del análisis a las superficies. A partir de esta sección nos metemos de lleno en la geometría, concretamente en la geometría de superficies. Comenzamos construyendo una herramienta muy útil.

Sea S una superficie regular y un punto $p \in S$, tenemos el plano tangente de p en S , $T_p S$, que es un plano vectorial contenido en \mathbb{R}^3 . Luego podemos tomar dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$ y calcular su producto escalar usual $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$

Definición 2.14. La aplicación $\mathbf{I}_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{I}_p(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle_p = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ se denomina la **primera forma fundamental** de S .

Tomando una superficie regular S y (U, X) una parametrización de S , fijado un punto $p \in S$ denotamos por $X_u(p) = \frac{\partial}{\partial u} X(p)$ y $X_v(p) = \frac{\partial}{\partial v} X(p)$. Utilizando esta notación tenemos la siguiente definición.

Definición 2.15. Sea S una superficie regular orientada definimos los **coeficientes de la primera forma fundamental** como:

- $E = \langle X_u, X_u \rangle$
- $F = \langle X_u, X_v \rangle$
- $G = \langle X_v, X_v \rangle$

donde E , F y G son funciones diferenciables.

2.6. Aplicación de Gauss y operador forma.

Sea S una superficie regular y $p \in S$ un punto de la superficie tal que $p = X(q)$ donde X es una parametrización de la superficie; sabemos que los vectores $X_u(q)$ y $X_v(q)$ forman una base del $T_p S$. A partir de estos dos vectores definimos el vector normal de la superficie en q como

$$N(q) := N(X(q)) = \pm \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}(q),$$

donde ponemos \pm pues podemos tomar el normal en dos sentidos. Esto depende de la orientación que tomemos de la superficie. Por ejemplo, si nuestra superficie es una esfera unidad centrada en el origen, su normal en p es $\pm p$, si tomamos el normal hacia fuera sería con signo positivo, mientras que con signo negativo apuntaría hacia el interior de la esfera. Una vez que escogemos el signo del normal, lo mantenemos en todo punto y decimos que tenemos una superficie *regular orientada*. La construcción del normal nos da la aplicación de Gauss.

Definición 2.16. Sea S una superficie regular orientada, a la aplicación $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ que a cada punto de la superficie le hace corresponder su vector normal se le denomina **aplicación de Gauss**. Y $\text{Im}(N) = N(S)$ se llama la **imagen esférica** de S .

Las variaciones de la aplicación normal nos indica como va variando la superficie al movernos en un punto, por esto resulta interesante calcular su diferencial. Sea $p \in S$, $\vec{v} \in T_p S$ y α una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$ entonces

$$dN_p : T_p S \longrightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2,$$

$$dN_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t).$$

Pero nosotros sabemos que si $\bar{p} \in \mathbb{S}^2$, $N(\bar{p}) = \pm \bar{p}$ por lo tanto podemos identificar al $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ con $T_p S$ ya que,

$$T_{N(p)} \mathbb{S}^2 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^3 : \langle N(p), \vec{v} \rangle = 0\} = T_p S,$$

luego podemos ver la diferencial de la aplicación de Gauss como un endomorfismo del $T_p S$. Utilizando esta diferencial definimos el siguiente operador.

Definición 2.17. Sea S una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss, N . Se llama **operador forma** o **endomorfismo de Weingarten** en $p \in S$ a la aplicación $A_p = -dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$, definida por $A_p \vec{v} = -dN_p(\vec{v})$.

Veamos que este operador posee una propiedad muy importante y es que es un operador autoadjunto.

Proposición 2.18. *El operador forma A_p es un operador autoadjunto, es decir, dados $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$ se tiene que $\langle A_p \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A_p \vec{w} \rangle$.*

Demostración. Para demostrar este resultado es suficiente probarlo para vectores de la base del plano tangente, pues se puede extender a los demás vectores simplemente por linealidad. Para ello, sea (U, X) una parametrización y un punto $p = X(q) = X(u_0, v_0)$. Tomamos como base del $T_p S$ a $\{X_u(q), X_v(q)\}$ y calculamos la diferencial del normal aplicada a cada uno de los vectores de la base. Para ello sea $\alpha(u) = X(u + u_0, v_0)$ que cumple que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_u(q)$, de igual forma tomamos $\beta(v) = X(u_0, v + v_0)$ con $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = X_v(q)$. Luego tenemos

$$dN_p(X_u(q)) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (N \circ X)(u + u_0, v_0) = (N \circ X)_u(u_0, v_0) \equiv N_u(u_0, v_0),$$

$$dN_p(X_v(q)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{v=0} (N \circ X)(u_0, v + v_0) = (N \circ X)_v(u_0, v_0) \equiv N_v(u_0, v_0).$$

Obsérvese que $\{X_u(q), X_v(q), N(q)\}$ forman una base de \mathbb{R}^3 con $\langle X_u(q), N(q) \rangle = 0 = \langle X_v(q), N(q) \rangle$. Por tanto, derivando en el lado de la izquierda con respecto a v y en la derecha respecto a u tenemos que

$$\langle X_{uv}(q), N(q) \rangle + \langle X_u(q), N(q)_v \rangle = 0,$$

$$\langle X_{vu}(q), N(q) \rangle + \langle X_v(q), N(q)_u \rangle = 0.$$

Como las derivadas segundas coinciden, $X_{uv}(q) = X_{vu}(q)$ se tiene que $\langle X_u(q), N(q)_v \rangle = \langle X_v(q), N(q)_u \rangle$ y con esto termina la demostración pues

$$\langle A_p X_u(q), X_v(q) \rangle = \langle -N_u(q), X_v(q) \rangle = \langle X_u(q), -N_v(q) \rangle = \langle X_u(q), A_p X_v(q) \rangle$$

que es lo que queríamos probar. □

De la misma forma que anteriormente dimos la definición de la primera forma fundamental ahora definimos la segunda pero haciendo uso del operador forma.

Definición 2.19. *La aplicación $II_p : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $II_p(\vec{v}) = \langle A_p \vec{v}, \vec{v} \rangle$ se llama la **segunda forma fundamental** de S en p .*

Al igual que en la primera forma fundamental, la segunda forma fundamental también posee unos coeficientes. Omitimos la obtención de estos coeficientes y los mostramos como una definición.

Definición 2.20. *Sea S una superficie regular orientada definimos los **coeficientes de la segunda forma fundamental** en $p \in S$ de S como*

- $e(p) = \langle N(p), X_{uu}(p) \rangle$
- $f(p) = \langle N(p), X_{uv}(p) \rangle$
- $g(p) = \langle N(p), X_{vv}(p) \rangle$

2.7. Curvatura de una superficie.

Esta sección se centra en el concepto de curvatura. Así de forma introductoria, la curvatura nos dice cómo o cuánto se dobla la superficie. Hay muchos tipos de curvatura; tenemos la curvatura geodésica, la curvatura normal, las curvaturas principales, la curvatura media y de Gauss, pero nosotros hacemos hincapié solo en las tres últimas.

En la sección anterior hemos definido el operador forma $A_p : T_p S \rightarrow T_p S$, que era una aplicación lineal y autoadjunta. Por tanto si tomamos una base ortonormal, la matriz de la aplicación es diagonalizable. Luego podemos encontrar dos vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in T_p S \subset \mathbb{R}^3$ que son vectores propios de A_p , y asociados a estos dos vectores propios encontramos los valores propios $k_1(p)$ y $k_2(p)$, de modo que se tiene que $A_p \vec{e}_1 = k_1(p) \vec{e}_1$ y $A_p \vec{e}_2 = k_2(p) \vec{e}_2$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $k_1(p) \leq k_2(p)$.

Definición 2.21. *Sea S una superficie regular orientada por la aplicación de Gauss, N , y p un punto de la superficie. A los valores propios de A_p , $k_1(p)$ y $k_2(p)$, los llamamos las **curvaturas principales** de S en p . A los vectores propios asociados a estos valores se le llama **direcciones principales**.*

Ejemplo 2.22. *Sea S el plano del Ejemplo 2.2; se tiene que el vector normal a la superficie es constante y vale $N(p) = (a, b, c)$ y por tanto $A_p = -dN_p = 0$. Entonces se tiene que las curvaturas principales del plano son $k_1(p) = k_2(p) = 0$ para todos los puntos $p \in S$. Luego todos los vectores son direcciones principales.*

A partir de la definición de curvaturas principales obtenemos dos definiciones de curvatura distintas a la anterior.

Definición 2.23. *Sea S una superficie regular orientada por N . Se denomina **curvatura de Gauss** de S en $p \in S$ al valor*

$$K(p) := \det A_p = \det(-dN_p),$$

o lo que es equivalente, $K(p) = k_1(p)k_2(p)$.

Se denomina **curvatura media** de S en $p \in S$ al valor

$$H(p) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} A_p = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(-dN_p),$$

equivalentemente $H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}$.

Proposición 2.24. *La curvatura de Gauss no depende de la orientación escogida para la superficie, mientras que la curvatura media cambia de signo al cambiar la orientación.*

Demostración. Al cambiar la orientación estamos cambiando N por $-N$, por lo que el signo de las curvaturas principales cambia. Este cambio de signo en ambas curvaturas no le afecta al producto de ambas pero sí a la suma, por lo tanto la curvatura media no cambia de signo mientras que la media sí. \square

Utilizando los coeficientes de la primera forma fundamental, véase la Definición 2.15, y los coeficientes de la segunda forma fundamental, véase la Definición 2.20, podemos dar una expresión distinta tanto para la curvatura media como para la curvatura de Gauss.

$$K(p) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.1)$$

$$H(p) = \frac{1}{2} \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} \quad (2.2)$$

Ahora establecemos la clasificación de los puntos de una superficie dependiendo del signo de su curvatura de Gauss.

Definición 2.25. *Sea S una superficie regular orientada y sea $p \in S$. Se tiene la siguiente clasificación:*

1. se dice que $p \in S$ es **elíptico** si $K(p) > 0$.
2. se dice que $p \in S$ es **hiperbólico** si $K(p) < 0$.
3. se dice que $p \in S$ es **parabólico** si $K(p) = 0$, pero $A_p \neq 0$.
4. se dice que $p \in S$ es **plano** si $A_p \equiv 0$. Decimos que una superficie es plana si todos sus puntos son planos.

Se dice que un punto $p \in S$ es **umbílico** si coinciden sus curvaturas principales, es decir, si $k_1(p) = k_2(p)$.

En particular, una superficie S se dice *totalmente umbilical* si todos sus puntos son umbilicales. A continuación tenemos la siguiente caracterización de las superficies totalmente umbilicales en \mathbb{R}^3 .

Proposición 2.26. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular (conexa) totalmente umbilical. Entonces:*

1. H es constante.
2. Si $H = 0$, entonces S es un trozo abierto de plano.
3. Si $H \neq 0$, entonces S es un trozo abierto de una esfera de radio $\frac{1}{|H|}$.

Demostración. Como la superficie es totalmente umbilical todos sus puntos son umbilicales, $k_1(p) = k_2(p)$ para todo $p \in S$. Luego el operador forma se escribe como

$$A_p = \begin{pmatrix} H(p) & 0 \\ 0 & H(p) \end{pmatrix} = H(p)I_{T_p S} \quad p \in S, \quad (2.3)$$

donde $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Veamos que esta función es constante. Sea $p \in S$ tal que $q = (u_0, v_0) \in U$ cumple $X(q) = p$, de manera que tenemos que $\{X_u(q), X_v(q)\}$ es una base del $T_p S$.

Sea $\alpha(u) = X(u + u_0, v_0)$. Derivando tenemos

$$dH_p(X_u(q)) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (H \circ \alpha)(u) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} (H \circ X)(u + u_0, v_0) = (H \circ X)_u(q)$$

De la misma forma: $dH_p(X_v(q)) = (H \circ X)_v(q)$

Usando la igualdad en (2.3), entonces

$$(H \circ X)(q)X_u(q) = H(p)X_u(q) = A_p(X_u(q)) = -dN_p(X_u(q)) = -(N \circ X)_u(q).$$

Y de forma análoga $(H \circ X)(q)X_v(q) = -(N \circ X)_v(q)$. Esto es cierto para todo q , podemos omitir el punto. Luego derivando la primera respecto v y la segunda respecto u , tenemos:

$$(N \circ X)_{uv} = -(H \circ X)_v X_u - (H \circ X) X_{uv} (N \circ X)_{vu} = -(H \circ X)_u X_v - (H \circ X) X_{vu}$$

Como las derivadas cruzadas coinciden, tenemos que:

$$-(H \circ X)_v X_u + (H \circ X)_u X_v = 0$$

Como los vectores X_u y X_v son una base, son linealmente independientes luego se tiene que $-(H \circ X)_v X_u = (H \circ X)_u X_v = 0$ en U , luego $dH_p(X_u(q)) = dH_p(X_v(q)) = 0$, en consecuencia $dH_p \equiv 0$. Como S es conexa, H ha de ser constante, como queríamos ver.

Ahora supongamos que $H = 0$, por lo que $A_p = \mathbf{0}$, y $dN_p = 0$ lo que implica que $N = \vec{\mathbf{a}}$, un vector fijo unitario. Definimos $\phi(p) = \langle p, \vec{\mathbf{a}} \rangle$ con $p \in S$. Sea $\vec{\mathbf{v}} \in T_p S$,

$$d\phi_p(\vec{\mathbf{v}}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle \alpha(t), \vec{\mathbf{a}} \rangle = \langle \alpha'(0), \vec{\mathbf{a}} \rangle = \langle \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{a}} \rangle = 0,$$

donde α es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y con $\alpha'(0) = \vec{\mathbf{v}}$. Luego $\phi(p) = \langle p, \vec{\mathbf{a}} \rangle$ es constante sobre S , luego se tiene que S ha de ser un trozo de plano.

Si la constante $H = c$ es distinta de cero, probamos que es una esfera. Para ello definimos $\phi(p) = p + (1/c)N(p)$, que es diferenciable. Veamos que ϕ es constante.

$$d\phi_p(\vec{\mathbf{v}}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\phi \circ \alpha)(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left(\alpha(t) + \frac{1}{c}N(\alpha(t)) \right) = \alpha'(0) + \frac{1}{c}(N \circ \alpha)'(0),$$

donde α es una curva diferenciable con las condiciones iniciales p y $\vec{\mathbf{v}}$. Es decir,

$$d\phi_p(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}} + \frac{1}{c}dN_p(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}} - \frac{1}{c}A_p(\vec{\mathbf{v}}).$$

Luego usando (2.3) tenemos

$$d\phi_p(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}} - \frac{1}{c}A_p(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}} - \frac{1}{c}c\vec{\mathbf{v}} = 0,$$

por tanto ϕ es constante y vale $\phi = \mathbf{a}$. Si $p \in S$ se cumple que $p - \mathbf{a} = -(1/c)N(p)$, que tomando módulos, $|p - \mathbf{a}|^2 = 1/c^2$, lo que implica que todos los puntos están contenidos en una esfera de centro \mathbf{a} y radio $1/|c| = 1/|H|$. \square

2.8. Grafo.

En esta sección damos la definición de grafo y presentamos una expresión distinta de la curvatura media para un grafo en términos de la divergencia de un campo. Nuestra notación varía en la justa medida, para adaptarnos a la notación clásica de los grafos. En este caso nuestras variables dejarán de ser u y v , para ser x e y .

Definición 2.27. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto conexo, y sea u una función diferenciable sobre Ω , $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Llamamos **grafo** al conjunto

$$\Sigma(u) := \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} \in \mathbb{R}^3$$

Dicho grafo se dice **entero** si $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Los grafos los podemos ver como un ejemplo de superficie pues basta considerar el conjunto $U = \Omega$, $V = \Sigma(u)$ y la aplicación $X : U \rightarrow V$ dada por

$$X(x, y) = (x, y, u(x, y))$$

que es una parametrización global del grafo visto como una superficie regular.

Proposición 2.28. Sea u una función diferenciable y su grafo $\Sigma(u)$. La curvatura media del grafo viene dada por

$$2H = \text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right), \quad (2.4)$$

donde Du denota el gradiente euclídeo de u .

Demostración. Tomamos la parametrización siguiente

$$\begin{aligned} X : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y, u(x, y)) \end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} X_x &= (1, 0, u_x) & X_y &= (0, 1, u_y) \\ X_{xx} &= (0, 0, u_{xx}) & X_{xy} &= (0, 0, u_{xy}) & X_{yy} &= (0, 0, u_{yy}). \end{aligned}$$

Calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental, Definición 2.15.

- $E = \langle X_x, X_x \rangle = \langle (1, 0, u_x), (1, 0, u_x) \rangle = 1 + u_x^2$
- $F = \langle X_x, X_y \rangle = \langle (1, 0, u_x), (0, 1, u_y) \rangle = u_x u_y$
- $G = \langle X_y, X_y \rangle = \langle (0, 1, u_y), (0, 1, u_y) \rangle = 1 + u_y^2$

Por tanto $EG - F^2 = (1 + u_x^2)(1 + u_y^2) - (u_x u_y)^2 = 1 + u_x^2 + u_y^2$ y el normal unitario es

$$N = \frac{X_x \wedge X_y}{|X_x \wedge X_y|} = \frac{\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix}}{|X_x \wedge X_y|} = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}.$$

Calculamos ahora los coeficientes de la segunda forma fundamental, véase la Definición 2.20.

$$\blacksquare e = \langle N, X_{xx} \rangle = \frac{\langle X_x \wedge X_y, X_{xx} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(X_x, X_y, X_{xx})}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & u_{xx} \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{u_{xx}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$$

$$\blacksquare f = \langle N, X_{xy} \rangle = \frac{\langle X_x \wedge X_y, X_{xy} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(X_x, X_y, X_{xy})}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & u_{xy} \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{u_{xy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$$

$$\blacksquare g = \langle N, X_{yy} \rangle = \frac{\langle X_x \wedge X_y, X_{yy} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{\det(X_x, X_y, X_{yy})}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \\ 0 & 0 & u_{yy} \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} = \frac{u_{yy}}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}$$

Usando la ecuación (2.2), tenemos que la curvatura media es

$$2H = \frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2} = \frac{u_{xx}(1 + u_y^2) + u_{yy}(1 + u_x^2) - 2u_{xy}u_x u_y}{(1 + u_x^2 + u_y^2)\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}.$$

Ahora desarrollamos el lado derecho de la igualdad del enunciado, ecuación (2.4).

Si $Z = (Z_1, Z_2)$ es un campo de vectores, tenemos que $\text{Div}(Z) = \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y}$

Tomando $Z = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} Du = \frac{1}{\sqrt{1 + |Du|^2}} (u_x, u_y) = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} (u_x, u_y)$, calculamos cuanto vale la $\text{Div}(Z)$.

$$\text{Div}(Z) = \text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{xx}\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} - \frac{u_x}{2\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}(2u_xu_{xx} + 2u_yu_{yx})}{(1+u_x^2+u_y^2)} + \\
 & \frac{u_{yy}\sqrt{1+u_x^2+u_y^2} - \frac{u_y}{2\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}(2u_xu_{xy} + 2u_yu_{yy})}{(1+u_x^2+u_y^2)} = \\
 & \frac{u_{xx}(1+u_x^2+u_y^2) - u_x^2u_{xx} - u_xu_yu_{yx} + u_{yy}(1+u_x^2+u_y^2) - u_xu_yu_{xy} - u_y^2u_{yy}}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}(1+u_x^2+u_y^2)} = \\
 & \frac{u_{xx}(1+u_y^2) + u_{yy}(1+u_x^2) - 2u_{xy}u_xu_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}(1+u_x^2+u_y^2)}.
 \end{aligned}$$

Y por tanto tenemos lo que buscábamos,

$$2H = \text{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} \right).$$

□

Mostramos ahora una propiedad que satisfacen todos los grafos.

Proposición 2.29. *Sea Σ un grafo contenido en \mathbb{R}^3 . Su imagen esférica está contenida en una semiesfera abierta de \mathbb{R}^3 .*

Demostración. Sea N la aplicación de Gauss de Σ , que viene dada por

$$N(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} \left(-\frac{\partial u}{\partial x}, -\frac{\partial u}{\partial y}, 1 \right),$$

de donde se tiene que $\|N(x, y)\| = 1$ y que $N_3(x, y) > 0$, por lo tanto $N(x, y) \in \mathbb{S}_+^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$ como queríamos probar. □

Ahora mostramos un teorema interesante, que dice que si un grafo es entero y su curvatura media es constante, entonces ha de ser necesariamente minimal. Para dar este resultado es necesario un lema previo.

Lema 2.30. *Sea $\Omega \in \mathbb{R}^2$ un dominio acotado y $u \in C^\infty(\Omega)$ que define un grafo de curvatura media constante (CMC, es decir, $H = \text{cte}$) sobre Ω . Entonces*

$$|H| \leq \frac{\text{Long}(\partial\Omega)}{2\text{Área}(\Omega)}$$

Demostración. Sea M un grafo entero con CMC, queremos ver que entonces la curvatura media tiene que valer 0 (es decir, $H = 0$).

Sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de la ecuación en derivadas parciales

$$\operatorname{Div}(Z) = 2H \quad (2.5)$$

Calculando la integral de (2.5) en Ω tenemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{Div}(Z) = \int_{\Omega} 2H = 2H \operatorname{Área}(\Omega)$$

Si definimos ν como el conormal unitario de la frontera de Ω y usando el teorema de la divergencia

$$2H \operatorname{Área}(\Omega) = \int_{\Omega} \operatorname{Div}(Z) dx dy = \oint_{\Omega} \langle Z, \nu \rangle ds \quad (2.6)$$

tomando normas en el interior de la segunda integral y usando que $|\langle x, y \rangle|^2 \leq |x|^2 |y|^2$

$$|\langle Z, \nu \rangle| = \left| \left\langle \frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}, \nu \right\rangle \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} |\langle Du, \nu \rangle| \leq \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} |Du| |\nu|$$

Como $|\nu| = 1$ por ser unitario obtenemos

$$|\langle Z, \nu \rangle| \leq \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}} |Du|$$

y llevando esta desigualdad a (2.6) tenemos

$$\oint_{\Omega} |\langle Z, \nu \rangle| ds \leq \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} \oint_{\Omega} 1 ds = \frac{|Du|}{\sqrt{1+|Du|^2}} \operatorname{Long}(\partial\Omega) \leq \operatorname{Long}(\partial\Omega)$$

y

$$\left| \oint_{\Omega} \langle Z, \nu \rangle ds \right| = |2H \operatorname{Área}(\Omega)| = 2|H| \operatorname{Área}(\Omega)$$

usando que $\left| \oint_{\Omega} \langle Z, \nu \rangle ds \right| \leq \oint_{\Omega} |\langle Z, \nu \rangle| ds$ tenemos

$$2|H| \operatorname{Área}(\Omega) \leq \operatorname{Long}(\partial\Omega) \Rightarrow |H| \leq \frac{\operatorname{Long}(\partial\Omega)}{2 \operatorname{Área}(\Omega)}$$

Como queríamos probar. □

Teorema 2.31. *Los grafos enteros de curvatura media constante en \mathbb{R}^3 son necesariamente minimales, $H = 0$.*

Demostración. Sea M un grafo entero con CMC, queremos ver que entonces la curvatura media tiene que valer 0 (es decir, $H = 0$). Para ello usamos el lema previo. Tomamos $\Omega = \mathbb{R}^2$ y $\Omega_R \subset \Omega$ una bola de radio R .

Por el lema tenemos que

$$|H| \leq \frac{\text{Long}(\partial\Omega_R)}{2\text{Area}(\Omega_R)} = \frac{2\pi R}{2\pi R^2} = \frac{1}{R}$$

Luego si $R \rightarrow +\infty$ se cumple que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |H| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} 1/R = 0$$

Por tanto se tiene que $H = 0$.

□

Capítulo 3

Superficies Minimales.

3.1. Definición.

La Geometría Diferencial se desarrolla en el siglo XVIII, época dorada para las matemáticas con *Newton*, *Leibnitz*, *Euler* y *Lagrange*. En esta época existía una tendencia por parte de los científicos en general a creer que las leyes más importantes eran aquellas que optimizaban alguna magnitud. En este marco aparece la primera definición de superficie minimal.

Definición 3.1. (I) Una superficie regular S es **minimal** si, para cada punto de la misma, existe un entorno Ω de modo que éste es la superficie de menor área entre todas aquellas que tienen como frontera la frontera de Ω .

Esta definición la cumple el plano, pues si la curva de la frontera está en un plano, la superficie de mínima área es el propio plano. En 1740, Euler demuestra que el *catenoide*, figura 3.1, es la única superficie de revolución minimal.

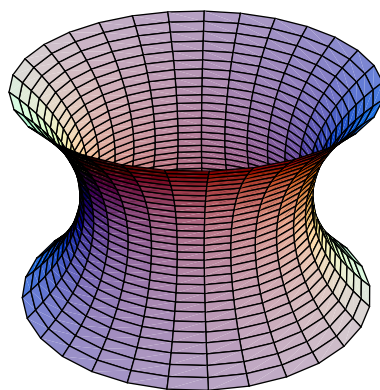


Figura 3.1: Catenoide.

Hacia 1760 Lagrange, que está trabajando en el Cálculo Variacional, establece una nueva definición de superficie minimal. Esta nueva definición de superficie minimal está pensada principalmente para los grafos.

Definición 3.2. (II) Se denomina **superficie minimal** aquella cuya función diferenciable f que determina su gráfica (siempre existe de forma local) verifica la ecuación

$$f_{xx}(1 + f_y^2) - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}(1 + f_x^2) = 0 \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) de la definición anterior, es una ecuación en derivadas parciales, no lineal, que recibe el nombre de *Ecuación de Euler-Lagrange*. En 1770, Meusnier da una nueva definición.

Definición 3.3. (III) Una superficie es **minimal** si su curvatura media se anula en todo punto, esto es, si $H = 0$.

Meusnier aparte de dar esta nueva definición, descubre que existe otra superficie minimal distinta del plano y del catenoide que es el *helicoide*, figura 3.2. Por el momento solo se conocían estas tres superficies. Hubo que esperar hasta 1935 para que Scherk descubriera dos nuevos ejemplos: la *primera superficie de Scherk*, figura 3.5, y la *segunda superficie de Scherk*, figura 3.3. En 1863, Christoffel da una nueva definición.

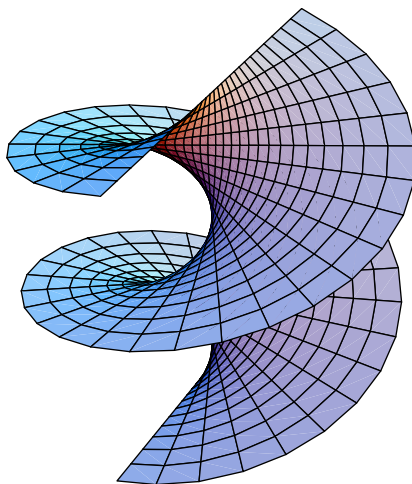


Figura 3.2: Helicoide.

Definición 3.4. (IV) Se llama **superficie minimal** a aquella cuya aplicación de Gauss es conforme y no es una esfera.

En esta definición utilizamos el concepto de aplicación conforme que aún no hemos definido; lo haremos más adelante, en la Definición 4.4. Poco tiempo después y apoyándose en las parametrizaciones isotermas, aparece una nueva definición de superficie minimal. Para ello primero definimos lo que es una parametrización isoterma.

Definición 3.5. Sea $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una parametrización de una superficie regular S . Se dice que X es una parametrización **isoterma** si $E = G$ y $F = 0$.

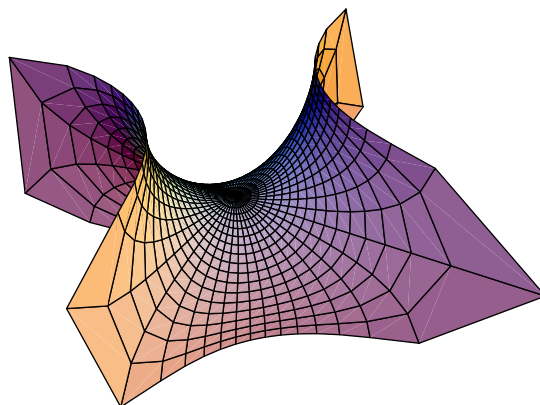


Figura 3.3: Segunda superficie de Scherk.

Por tanto la nueva definición de superficie minimal es:

Definición 3.6. (V) Sea S una superficie regular y (X, U) una parametrización isoterma. La superficie determinada por X es **minimal** si las funciones coordenadas de la parametrización son armónicas, esto es, si $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$.

Esta última definición unió los caminos de las superficies minimales con el Análisis Complejo. Esta definición es quizá la más llamativa y fue debida al físico Plateau en 1847. Quién observó que las superficies minimales con frontera se podían reproducir con alambre y una membrana jabonosa. De ahí nace la siguiente definición de superficie minimal.

Definición 3.7. (VI) Se denomina superficie minimal aquella que se puede reproducir mediante una membrana jabonosa.

Plateau, físico de profesión, no supo argumentar matemáticamente su definición de superficie minimal. Los primeros intentos de formulación son debidos a Schwarz, Riemann y Weierstrass, pero finalmente fueron Douglas y Radó quienes lo formularon de forma correcta en 1931, véase [Do1, Do2, Ra]. Estas seis definiciones de superficie minimal son las más conocidas, aunque en un artículo publicado recientemente, véase [MP], nos muestran ocho definiciones equivalentes, varias de ellas distintas a las aquí dadas. Existen varias proposiciones que demuestran la equivalencia de todas estas definiciones, pero las omitimos por no ser el objetivo de este trabajo. Debido a la definición **(III)** obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.8. Sea S una superficie minimal que viene dada como el grafo de una función diferenciable u . Entonces se tiene que

$$\operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) = 0 \quad (3.2)$$

Demostración. Por la Proposición 2.28, tenemos que

$$2H = \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right)$$

y como la superficie es minimal, usando la definición **(III)** de superficie minimal, se tiene que $H = 0$ y por tanto

$$2H = 0 = \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right)$$

□

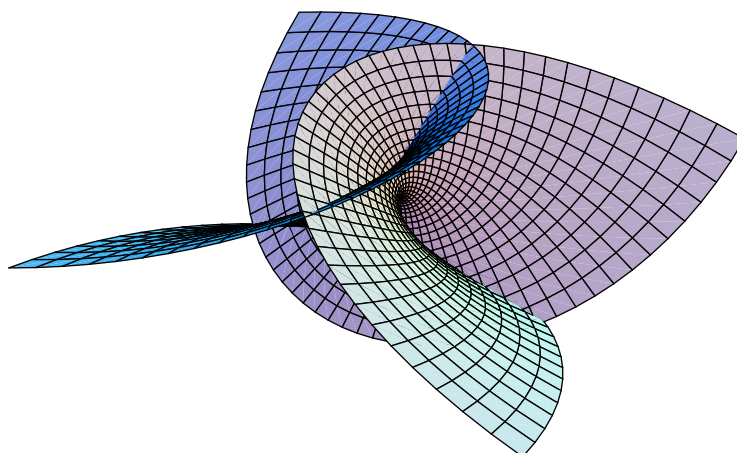


Figura 3.4: Superficie de Enneper, descubierta por Enneper.

3.2. Grafos minimales no enteros.

El grafo más sencillo es el plano, cuya función diferenciable es del tipo $u(x, y) = ax + by + c$, pero resulta que el plano sí es una superficie entera. Como anuncia el teorema de Bernstein es la única superficie entera que se puede expresar como el grafo de una función. En este apartado vamos a construir o ver algunos grafos minimales que *no* son enteros.

Para ello vamos a buscar soluciones a la ecuación (3.2). La primera solución que obtenemos es la superficie de Scherk, figura 3.5, que se obtiene al buscar soluciones del tipo $u(x, y) = f(x) + g(y)$, donde $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Estas soluciones verifican que:

$$u_x(x, y) = f'(x) \quad u_y(x, y) = g'(y)$$

$$u_{xx}(x, y) = f''(x) \quad u_{yy}(x, y) = g''(y) \quad u_{xy}(x, y) = 0$$

Como es minimal, por el Corolario 3.8 se tiene que

$$2H = 0 = \operatorname{Div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right)$$

o lo que es equivalente

$$u_{xx}(1 + u_y^2) + u_{yy}(1 + u_x^2) - 2u_{xy}u_xu_y = 0, \quad (3.3)$$

es decir,

$$(1 + f''(x)^2)g''(y) + (1 + g''(y)^2)f''(x) = 0.$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de variables separadas que podemos resolver. Para ello separamos variables y obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{g''(y)}{1 + g''(y)^2} = -\frac{f''(x)}{1 + f''(x)^2}.$$

Como x e y son variables independientes entre sí, cada lado de la igualdad es constante respecto a la variable del otro lado. Por tanto se tiene que

$$\frac{g''(y)}{1 + g''(y)^2} = a = -\frac{f''(x)}{1 + f''(x)^2},$$

para un $a \in \mathbb{R}$. Luego tomando $w = f'(x)$, $\bar{w} = g'(y)$, se tiene que $f''(x) = \frac{dw}{dx}$ y $g''(y) = \frac{d\bar{w}}{dy}$. Sustituyendo en la ecuación de arriba se nos queda

$$adx = -\frac{dw}{1 + w^2} \quad y \quad ady = \frac{d\bar{w}}{1 + \bar{w}^2}.$$

Estas ecuaciones diferenciales se pueden integrar y se obtiene que

$$ax = -\arctan(w) \quad y \quad ay = \arctan(\bar{w}),$$

despejando llegamos a

$$w = -\tan(ax) \quad y \quad \bar{w} = \tan(ay).$$

Como hemos utilizado un cambio de variable, integrando de nuevo las ecuaciones anteriores recuperamos f y g ,

$$f(x) = \frac{1}{a} \ln(\cos(ax)) \quad y \quad g(y) = -\frac{1}{a} \ln(\cos(ay))$$

Por lo tanto, juntando ambos términos tenemos la solución que buscábamos.

$$u(x, y) = f(x) + g(y) = \frac{1}{a} \ln(\cos(ax)) - \frac{1}{a} \ln(\cos(ay))$$

$$u(x, y) = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{\cos(ax)}{\cos(ay)}\right).$$

Esta es la representación de u de la primera superficie de Scherk, pero ¿por qué no es *entera* esta superficie? Esta superficie no es entera pues esta función $u(x, y)$ solo está definida para los puntos (x, y) que cumplen que $\frac{\cos(ax)}{\cos(ay)} > 0$. Por ejemplo, para los puntos (x, y) que cumplen que

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}, \frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}\right) \quad e \quad y \in \left(\frac{\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}, \frac{3\pi}{2a} + \frac{2k\pi}{a}\right)$$

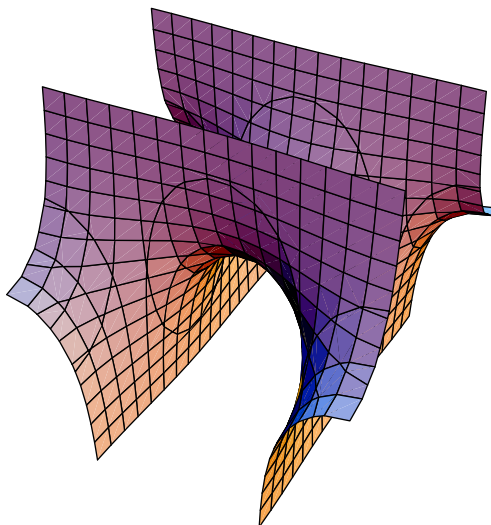


Figura 3.5: Primera superficie de Scherk.

la función $u(x, y)$ no está definida ya que $\cos(ax) > 0$ y $\cos(ay) < 0$.

Siguiendo la misma idea de antes, vamos a construir un nuevo grafo minimal no entero, figura 3.6. Para ello ahora suponemos que la solución es del tipo $u(x, y) = f(x)g(y)$, donde $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ y $f''(x) = 0$. Luego se tiene que $f'(x) = cte$ y que $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Para esta superficie vamos a suponer que $a = 1$ y $b = 0$, por tanto $f(x) = x$, ahora solo nos queda encontrar cuanto vale $g(y)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= g(y) & u_y(x, y) &= xg'(y) \\ u_{xx}(x, y) &= 0 & u_{yy}(x, y) &= g''(y)x & u_{xy}(x, y) &= g'(y) \end{aligned}$$

y la ecuación diferencial (3.3), se nos queda como:

$$g''(y) + g^2(y)g''(y) - 2g'^2(y)g(y) = 0$$

que es una ecuación de segundo orden no lineal. Haciendo uso de una herramienta computacional de cálculo simbólico obtenemos que la solución es

$$\frac{\arctan(g)}{k_1} = y + k_2 \implies g(y) = \tan(cy + k) \text{ donde } c, d \in \mathbb{R}.$$

En nuestro caso tomamos las constantes $c = 1$ y $d = 0$. Luego la solución de la ecuación diferencial y la función diferenciable del grafo es

$$u(x, y) = x \tan(y),$$

que no es entero pues solo está definido en $\Omega = \left\{ (x, y) : y \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

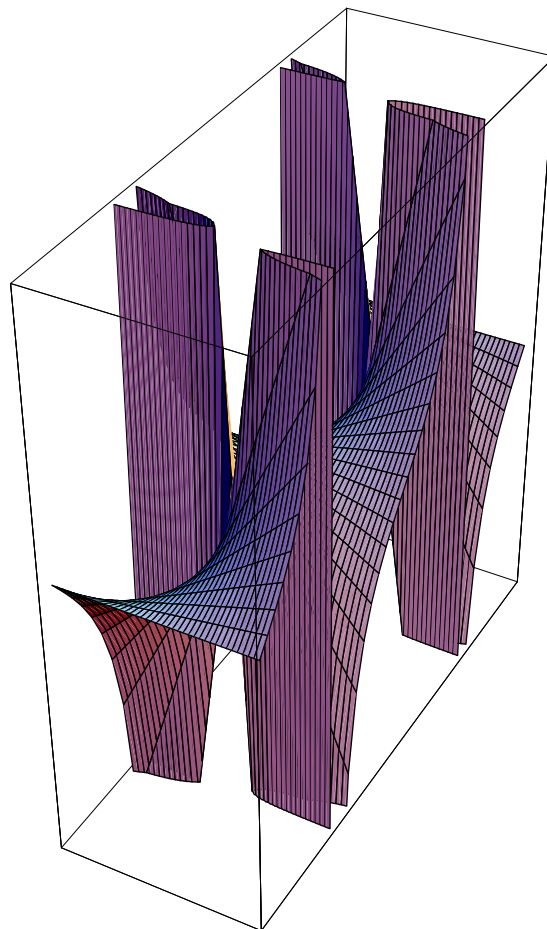


Figura 3.6: Superficie $u(x, y) = x \tan(y)$.

Capítulo 4

Teorema de Bernstein analítico.

En este capítulo, damos la primera demostración del teorema de Bernstein. Fue dada por el propio Bernstein y la recuperamos del libro *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 4* de Spivak, [Sp, Capítulo 7, pág. 267]. Esta demostración esta basada en el uso de herramientas de la teoría de ecuaciones diferenciales y por tanto utilizamos esta notación. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función, tenemos:

$$p = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$
$$r = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

4.1. Preliminares. Teorema de Jörgens.

Comenzamos la sección con un par de lemas previos del análisis de varias variables y tras ellos enunciamos y demostramos el *teorema de Jörgens*, [Jo], herramienta necesaria para la demostración del teorema de Bernstein.

Lema 4.1. *Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación diferenciable. F es un difeomorfismo local si, y solo si $\forall p \in \mathbb{R}^n$, dF_p es una biyección.*

Lema 4.2. *Si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo local entonces es abierta.*

Demostración. Como $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo local se tiene que $\forall p \in \mathbb{R}^2$ existen U y V entornos de p y de $T(p)$, respectivamente, tal que $T : U \rightarrow V$ es un homeomorfismo.

Veamos que T ha de ser abierta. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ un abierto. ¿es $T(A)$ un abierto?. Tomemos $y \in T(A)$ se tiene que existe un $x \in A$ tal que $T(x) = y$. Luego como T es un homeomorfismo local se tiene que existen U y V entornos de x y de $T(x) = y$ respectivamente, y con $T : U \rightarrow V$ homeomorfismo. Luego $T(U \cap A)$ es abierto en V y este en \mathbb{R}^2 , con $y \in T(U \cap A) \subset T(A)$ luego $T(A)$ es abierto. Y por tanto T es abierta. □

Teorema 4.3. (Teorema de Jörgens). Si $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función en todo el plano que satisface

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^2 = 1 \quad (4.1)$$

entonces ϕ es un polinomio cuadrático en x e y .

Demostración. Usando la notación clásica de la teoría de ecuaciones diferenciales la ecuación (4.1) se abrevia en

$$rt - s^2 = 1$$

Podemos ver que $rt > 1$, y más en particular que $rt > 0$, lo que implica que r y t han de tener el mismo signo. En lo que sigue suponemos que $r, t > 0$, en caso contrario, bastaría con remplazar ϕ por $-\phi$.

Fijamos dos puntos de \mathbb{R}^2 , (x_0, y_0) y (x_1, y_1) , y consideramos la función

$$h(\tau) = \phi(x_0 + \tau(x_1 - x_0), y_0 + \tau(y_1 - y_0)),$$

tal que $h(0) = \phi(x_0, y_0)$ y $h(1) = \phi(x_1, y_1)$, y cuya derivada primera y segunda valen

$$\begin{aligned} h'(\tau) &= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x_1 - x_0) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y_1 - y_0) = p(x_1 - x_0) + q(y_1 - y_0) \\ h''(\tau) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x_1 - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y_1 - y_0)^2 = \\ &= r(x_1 - x_0)^2 + 2s(x_1 - x_0)(y_1 - y_0) + t(y_1 - y_0)^2 \end{aligned}$$

Aquí las funciones p , q , r , s y t son evaluadas en los puntos $(x_0 + \tau(x_1 - x_0), y_0 + \tau(y_1 - y_0))$. Si $x_1 \neq x_0$, se tiene que

$$h''(\tau) = (x_1 - x_0)^2 \left[r - 2 \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right) s + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \right)^2 t \right]$$

El término entre corchetes es un polinomio cuadrático en la variable $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$, y cuyo discriminante vale $4s^2 - 4rt = (-4)(rt - s^2) < 0$, por (4.1), ya que es siempre positivo. Entonces siempre se tiene que $h''(\tau) \geq 0$. Esto implica que $h'(\tau)$ es monótona creciente y $h'(1) \geq h'(0)$, y por tanto si denotamos $p_0 = p(x_0, y_0)$, $p_1 = p(x_1, y_1)$, $q_0 = q(x_0, y_0)$ y $q_1 = q(x_1, y_1)$, tenemos

$$\begin{aligned} h'(1) - h'(0) &= p_0(x_1 - x_0) + q_0(y_1 - y_0) + p_1(x_1 - x_0) + q_1(y_1 - y_0) = \\ &= (x_1 - x_0)(p_1 - p_0) + (y_1 - y_0)(q_1 - q_0) \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ahora consideramos la *Transformación de Lewy* siguiente, $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que fue dada por H. Lewy en [Le], tal que

$$T(x, y) = (\varepsilon(x, y), \eta(x, y)) = (x + p(x, y), y + q(x, y)).$$

Si al igual que antes, ahora denotamos

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(x_0, y_0), \quad \varepsilon_1 = \varepsilon(x_1, y_1), \quad \eta_0 = \eta(x_0, y_0), \quad \eta_1 = \eta(x_1, y_1)$$

entonces la ecuación (4.2) implica que

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 \geq (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2$$

pues sustituyendo en el lado izquierdo tenemos

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2 &= ((x_1 + p_1) - (x_0 + p_0))^2 + ((y_1 + q_1) - (y_0 + q_0))^2 = \\ &= (x_1 - x_0)^2 + 2(x_1 - x_0)(p_1 - p_0) + (p_1 - p_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + 2(y_1 - y_0)(q_1 - q_0) + (q_1 - q_0)^2 \geq \\ &= (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Por (4.3) tenemos que T aumenta distancias, pues

$$|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})| \geq |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$$

El Jacobiano de T es

$$J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}$$

cuyo determinante vale $1 + r + t + rt - s^2 = 2 + r + t \geq 2$ por (4.1).

Luego el determinante de su jacobiano es mayor que cero, y por el Lema 4.1 tenemos que es un difeomorfismo local y por lo tanto T es abierta. Ahora tenemos que ver que T es cerrada. Y una vez visto que es cerrada, $T(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ luego es sobreyectiva e inyectiva, por tanto es un difeomorfismo global y como consecuencia tiene inversa.

Sea F un cerrado en \mathbb{R}^2 , veamos que $T(F)$ es cerrado. Tomamos $q \in \overline{T(F)}$, por tanto existe una sucesión $x_n \in F$ que cumple que $T(x_n)$ converge a q . Queremos ver que $q = T(p)$ para un cierto $p \in F$.

Se tiene que $T(x_n)$ es convergente y por tanto es una sucesión de Cauchy. Como T aumentaba distancias, se tiene que x_n también es de Cauchy y está contenida en F que es cerrado, luego x_n converge a un cierto $p \in F$ y se tiene $T(p) = T(\lim x_n) = \lim T(x_n) = q$.

Denotamos la aplicación inversa de T por T^{-1} que nos lleva un punto (ε, η) al $(x(\varepsilon, \eta), y(\varepsilon, \eta))$, es decir, $T^{-1}(\varepsilon, \eta) = (x(\varepsilon, \eta), y(\varepsilon, \eta))$. Su jacobiano es

$$J_{T^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & s \\ s & 1+t \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2+r+t} \begin{pmatrix} 1+t & -s \\ -s & 1+r \end{pmatrix},$$

de donde podemos obtener las derivas parciales de x e y .

Definimos ahora una nueva función $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\varepsilon, \eta) &= (\mathbf{U}(\varepsilon, \eta), \mathbf{V}(\varepsilon, \eta)) = (x - p, -y + q) = \\ &(x(\varepsilon, \eta) - p(x(\varepsilon, \eta), y(\varepsilon, \eta)), -y(\varepsilon, \eta) + q(x(\varepsilon, \eta), y(\varepsilon, \eta))). \end{aligned}$$

Entonces derivando respecto a ε y η las funciones \mathbf{U} y \mathbf{V} tenemos.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{2+r+t} [1+t-r(1+t) - s(-s)] = \frac{t-r}{2+r+t},$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \varepsilon} = -\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{2s}{2+r+t},$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{-2s}{2+r+t},$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} = -\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial q}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{t-r}{2+r+t}.$$

Luego se tiene que \mathbf{U} y \mathbf{V} , cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (pág 171,[HCP])

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varepsilon} &= \frac{t-r}{2+r+t} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \varepsilon} &= \frac{2s}{2+r+t} = -\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Dado que (\mathbf{U}, \mathbf{V}) satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, la aplicación $\mathbf{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida de la siguiente forma

$$\mathbf{F}(\varepsilon + i\eta) = (\mathbf{U}(\varepsilon, \eta) + i\mathbf{V}(\varepsilon, \eta)) = (x - p + (-y + q)i),$$

es una función analítica compleja, luego calculando su derivada compleja tenemos,

$$\mathbf{F}'(\varepsilon + i\eta) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varepsilon} + i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \varepsilon} = \frac{t-r+2is}{2+r+t}. \quad (4.4)$$

Al calcular la norma al cuadrado tenemos,

$$|\mathbf{F}'(\varepsilon + i\eta)|^2 = \frac{(t-r)^2 + 4s^2}{(2+r+t)^2}.$$

Como $4s^2 = 4rt - 4$, por (4.1) sustituyendo

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}'(\varepsilon + i\eta)|^2 &= \frac{(t-r)^2 + 4rt - 4}{(2+r+t)^2} = \frac{t^2 - 2tr + r^2 + 4rt - 4}{(2+r+t)^2} = \\ &= \frac{(t^2 + 2tr + r^2) - 4}{(2+r+t)^2} = \frac{(t+r)^2 - 4}{(2+r+t)^2} = \\ &= \frac{(t+r-2)(t+r+2)}{(2+r+t)^2} = \frac{-2+r+t}{2+r+t}. \end{aligned}$$

Luego $1 - |\mathbf{F}'(\varepsilon + i\eta)|^2 = 1 - \frac{-2 + r + t}{2 + r + t}$, y usando (4.1) se tiene que

$$1 - |\mathbf{F}'(\varepsilon + i\eta)|^2 = \frac{4}{2 + r + t} > 0. \quad (4.5)$$

Entonces \mathbf{F}' está acotada, y consecuentemente es constante por el teorema de Liouville (pág. 548, [Ap]). Usando las ecuaciones (4.4) y (4.5) calculamos r, s, t en términos de \mathbf{F}' .

$$\begin{aligned} \text{De (4.4) } s &= \frac{2 + r + t}{2} \text{Im}(\mathbf{F}') = \frac{2\text{Im}(\mathbf{F}')}{1 - |\mathbf{F}'|^2} \\ \left. \begin{aligned} t - r &= \frac{4\text{Re}(\mathbf{F}')}{1 - |\mathbf{F}'|^2} \\ t + r &= \frac{4}{1 - |\mathbf{F}'|^2} - 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \left(\frac{4\text{Re}(\mathbf{F}')}{1 - |\mathbf{F}'|^2} + \frac{4}{1 - |\mathbf{F}'|^2} - 2 \right) \\ r &= \frac{1}{2} \left(\frac{4}{1 - |\mathbf{F}'|^2} - 2 - \frac{4\text{Re}(\mathbf{F}')}{1 - |\mathbf{F}'|^2} \right) \end{aligned}$$

Luego si \mathbf{F}' es constante, también lo son r, s, t . Como r, s y t son constantes ϕ ha de ser un polinomio cuadrático en x, y . \square

4.2. Teorema de Bernstein.

En esta sección damos la primera demostración del teorema. Para ello introducimos las últimas definiciones y propiedades necesarias.

Definición 4.4. *Se dice que un difeomorfismo local $\phi : S \rightarrow S$ entre superficies es una **aplicación conforme** si existe una función diferenciable $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$, que no se anula en ningún punto, tal que $\forall p \in S$ y $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$,*

$$\langle d\phi_p(\vec{v}), d\phi_p(\vec{w}) \rangle = \lambda(p)^2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Veamos ahora que si tenemos una superficie minimal sin puntos umbilicales entonces su aplicación de Gauss es conforme.

Proposición 4.5. *Sea S una superficie regular en \mathbb{R}^3 sin puntos umbilicales con aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Entonces S es minimal si, y sólo si, la aplicación de Gauss N es conforme.*

Demostración. La demostración ha sido extraída de [HCP]. Usando la definición de aplicación conforme tenemos que probar que

$$\langle dN_p(\vec{v}), dN_p(\vec{w}) \rangle = \lambda(p)^2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \forall p \in M \text{ y } \vec{v}, \vec{w} \in T_p S$$

Sean $p \in S$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ la base (ortonormal) de direcciones principales en $T_p S$. Si $H(p) = 0$, entonces $k_1(p) = -k_2(p)$, y por tanto tenemos $k_1(p)^2 = k_2(p)^2$. Sean ahora \vec{v} y \vec{w} dos vectores cualesquiera de $T_p S$, por tanto existen (v_1, v_2) y (w_1, w_2) tales que $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$ y $\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2$. Calculamos $dN_p(\vec{v})$, como $dN_p(\vec{e}_i) = -k_i(p) \vec{e}_i$ donde $i = 1, 2$ se tiene que:

$$dN_p(\vec{v}) = dN_p(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = -v_1 k_1 \vec{e}_1 - v_2 k_2 \vec{e}_2$$

y para el vector \vec{w} ,

$$dN_p(\vec{w}) = dN_p(w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2) = -w_1k_1\vec{e}_1 - w_2k_2\vec{e}_2$$

luego

$$\begin{aligned} \langle dN_p(\vec{v}), dN_p(\vec{w}) \rangle &= \langle -v_1k_1\vec{e}_1 - v_2k_2\vec{e}_2, -w_1k_1\vec{e}_1 - w_2k_2\vec{e}_2 \rangle = \\ &= v_1w_1k_1(p)^2 + v_2w_2k_2(p)^2 = (v_1w_1 + v_2w_2)k_1(p)^2 = \\ &= k_1(p)^2 \langle v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2, w_1\vec{e}_1 + w_2\vec{e}_2 \rangle = k_1(p)^2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \end{aligned}$$

Es claro que si $\lambda(p) = k_1(p)$, es una función diferenciable y no nula, pues si $k_1(p) = 0$, entonces $k_2(p) = 0$ lo que implicaría que $K(p) = 0$ y entonces el punto p sería plano y por lo tanto umbilical, y en S no hay puntos umbilicales.

Veamos ahora el recíproco, supongamos que existe una función diferenciable no nula $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ tal que cumpla $\langle dN_p(\vec{v}), dN_p(\vec{w}) \rangle = \lambda(p)^2 \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ para cualesquiera $\vec{v}, \vec{w} \in T_pS$. En particular, si $\vec{v} = \vec{e}_i$ y $\vec{w} = \vec{e}_i$ con $i = 1, 2$, se tiene que

$$\lambda(p)^2 = \lambda(p)^2 \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle dN_p(\vec{e}_1), dN_p(\vec{e}_1) \rangle = \langle -k_1(p)\vec{e}_1, -k_1(p)\vec{e}_1 \rangle = k_1(p)^2$$

$$\lambda(p)^2 = \lambda(p)^2 \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = \langle dN_p(\vec{e}_2), dN_p(\vec{e}_2) \rangle = \langle -k_2(p)\vec{e}_2, -k_2(p)\vec{e}_2 \rangle = k_2(p)^2$$

Luego se tiene $k_1(p)^2 = \lambda(p)^2 = k_2(p)^2$, si quitamos los cuadrados tenemos que $k_1(p) = \pm k_2(p)$. Como S no tiene puntos umbilicales, no puede ocurrir que $k_1(p) = k_2(p)$, luego se tiene que $k_1(p) = -k_2(p)$, lo que implica que $H(p) = k_1(p) + k_2(p) = -k_2(p) + k_2(p) = 0$. Luego S es minimal. \square

Proposición 4.6. *Podemos tomar una parametrización isoterma alrededor de cualquier punto de una superficie minimal $S \subset \mathbb{R}^3$.*

Demostración. Como el resultado es local, podemos asumir que S es el grafo de una función $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, para un cierto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Luego S es la imagen de la aplicación $f(x, y) = (x, y, h(x, y))$.

Usando la expresión de la curvatura media para un grafo y como la superficie es minimal tenemos:

$$H = 0 \Rightarrow (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \quad (4.6)$$

Denotamos $W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, con un pequeño cálculo tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1 + q^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{pq}{W} \right) = \\ &\frac{1}{W^2} \left(2qsW - \frac{1}{2W} (2pr + 2qs) (1 + q^2) \right) - \frac{1}{W^2} \left((qs + pt)W - \frac{pq}{2W} (2ps + 2qt) \right) = \\ &\frac{1}{W^3} (2qsW^2 - (pr + qs)(1 + q^2) - (qs + pt)W^2 + (ps + qt)pq) = \end{aligned}$$

$$\frac{-p}{W^3} ((1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t) = 0 \text{ por (4.6).}$$

De forma similar se prueba también que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{pq}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1+p^2}{W} \right) = 0$$

Por el lema de Poincaré podemos encontrar funciones α y β localmente con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{1+p^2}{W} & \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{pq}{W} \\ \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{pq}{W} & \frac{\partial \beta}{\partial y} &= \frac{1+q^2}{W} \end{aligned}$$

Ahora consideramos la *Transformación de Lewy*

$$T(x, y) = (x + \alpha(x, y), y + \beta(x, y)).$$

$$\text{Su Jacobiano es } J_T = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{W} & \frac{pq}{W} \\ \frac{pq}{W} & 1 + \frac{1+q^2}{W} \end{pmatrix}$$

Con determinante $2 + \frac{2+p^2+q^2}{W} \geq 2$, luego T es un difeomorfismo local y por tanto tiene inversa localmente, y se tiene que

$$\begin{aligned} J_{T^{-1}} &= (J_T)^{-1} = \frac{2W}{2 + 2W + p^2 + q^2} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+q^2}{W} & -\frac{pq}{W} \\ -\frac{pq}{W} & 1 + \frac{1+p^2}{W} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{2}{2 + 2W + p^2 + q^2} \begin{pmatrix} W + 1 + q^2 & -pq \\ -pq & W + 1 + p^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora calculamos $J_{f \circ T^{-1}}(T(x, y)) = J_f(x, y) J_{T^{-1}}(T(x, y)) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{2 + 2W + p^2 + q^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W + 1 + q^2 & -pq \\ -pq & W + 1 + p^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{2}{2 + 2W + p^2 + q^2} \begin{pmatrix} W + 1 + q^2 & -pq \\ -pq & W + 1 + p^2 \\ p + pW & q + qW \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como podemos observar, los dos vectores columnas tienen la misma norma y son ortogonales, pues

$$\begin{aligned} &= \frac{2^2 \langle (W + 1 + q^2, -pq, p + pW), (-pq, W + 1 + p^2, q + qW) \rangle}{(2 + 2W + p^2 + q^2)^2} = \\ &= \frac{4(-pq - pqW - pq^3 - pq - pqW - p^3q + pq + pqW + pqW + pqW^2)}{(2 + 2W + p^2 + q^2)^2} = \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{2 + 2W + p^2 + q^2} \right)^2 (-pq - pq^3 - p^3q + pq(1 + p^2 + q^2)) = 0$$

Entonces $f \circ T^{-1}$ es conforme, y su inversa es la parametrización isoterma deseada. \square

Teorema 4.7. (Teorema de Bernstein) *Los planos son las únicas superficies minimales en \mathbb{R}^3 tales que son grafos enteros de una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que tenemos una función $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo grafo es minimal, es decir, la función u satisface la ecuación de *Euler-Lagrange*:

$$\left(1 + \frac{\partial u^2}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.7)$$

Razonando como en la demostración anterior podemos encontrar funciones α y β que estén definidas en todo \mathbb{R}^2 , ya que \mathbb{R}^2 es simplemente conexo, tales que si $W = \sqrt{1 + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial y}}$ se tiene que :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1 + \frac{\partial u^2}{\partial x}}{W}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{1 + \frac{\partial u^2}{\partial y}}{W}, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}{W}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}{W}. \quad (4.9)$$

De las ecuaciones (4.9) vemos que hay una función $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\phi_x = \alpha \quad y \quad \phi_y = \beta,$$

y junto con las ecuaciones (4.8), tenemos que

$$\phi_{xx} = \frac{1 + \frac{\partial u^2}{\partial x}}{W}, \quad \phi_{xy} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}{W}, \quad \phi_{yy} = \frac{1 + \frac{\partial u^2}{\partial y}}{W},$$

lo que implica que

$$\phi_{xx}\phi_{yy} - (\phi_{xy})^2 = 1.$$

Aplicando ahora el teorema de Jörgens tenemos que

$$\frac{1 + \frac{\partial u^2}{\partial x}}{W}, \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}}{W}, \quad \frac{1 + \frac{\partial u^2}{\partial y}}{W},$$

son constantes. Luego tenemos que $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ han de ser constantes y por tanto, u ha de ser un polinomio de grado 1 en las variables x e y , y por tanto su grafo, un plano. \square

Capítulo 5

Teorema de Bernstein geométrico.

Para esta segunda demostración necesitamos introducir más términos y resultados de la geometría diferencial. Concretamente del análisis geométrico. Por ello introducimos términos y resultados propios de la Geometría Riemanniana.

5.1. Cálculo intrínseco en una superficie.

5.1.1. Métrica.

Definición 5.1. Un *campo de vectores tangente* sobre S es una aplicación $X : S \rightarrow T_p S$ que a cada punto $p \in S$ le hace corresponder un vector tangente $X(p) \in T_p S$.

Todos los campos tangentes con los que trabajaremos los consideraremos diferenciables, en el sentido de ser diferenciable como aplicación de la superficie en \mathbb{R}^3 .

Definición 5.2. Al conjunto de campos de vectores tangentes a S los denotaremos por $\mathfrak{X}(S)$.

Definición 5.3. Una *métrica* en $S \subset \mathbb{R}^3$ es una aplicación que asocia a cada $p \in S$ una aplicación $g_p : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$, tal que g_p es una forma bilineal, simétrica, definida positiva y es diferenciable en el sentido siguiente:

$$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(S) \Rightarrow g(X, Y) \in C^\infty(S),$$

donde $g(X, Y) = g_p(X(p), Y(p))$.

Cuando no hay confusión en cuanto a la métrica que se está usando en la superficie, es frecuente y habitual hacer uso de la notación:

$$\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$$

Si en una misma superficie trabajamos de forma consecutiva con dos métricas, haremos uso de la notación dada por la definición con el objetivo de diferenciarlas de forma correcta. Veamos unos primeros ejemplos de métricas.

Ejemplo 5.4. En el primer capítulo vimos la definición y los coeficientes de la primera forma fundamental. Esta primera forma nos define una métrica, tomando $g_p = \mathbf{I}_p$.

Ejemplo 5.5. Sea $\lambda(p)$ una función positiva y diferenciable sobre S . Podemos tomar como métrica aquella en la que $g_p = \lambda_p \mathbf{I}_p$, ya que $g(X, Y) = \lambda \mathbf{I}(X, Y) \in \mathcal{C}^\infty(S)$.

Como podemos observar, entre los ejemplos anteriores de métrica existe una relación en su definición. Puesto que una se define a partir de la otra. Dadas dos métricas podemos dar una relación entre ellas, el ser conformes que definimos a continuación.

Definición 5.6. Diremos que una métrica \hat{g} es un **métrica conforme** a g , si esta es del tipo $\hat{g} = e^{2u}g$, con u una función diferenciable sobre S .

Luego diremos que la métrica \mathbf{I}_p , vista en el Ejemplo 5.5, es una métrica conforme a la métrica $\lambda_p \mathbf{I}_p$, del Ejemplo 5.4.

5.1.2. Derivada covariante.

En el apartado 2.4.1 definimos la diferencial de una función diferenciable mediante el uso de curvas parametrizadas en la superficie, notación: $\vec{\nabla}(f) = df_p(\vec{\nabla})$. Nuestro objetivo en este apartado es extender esa definición a *campos de vectores tangentes* y *campos de tensores*. Para ello antes hemos de dar las definiciones y conceptos previos correspondientes.

Definición 5.7. Sea $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo tangente, definimos la **derivada usual** del campo respecto a un vector $\vec{\nabla} \in T_p S$ en un punto $p \in S$ como

$$dX_p(\vec{\nabla}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\alpha(t)),$$

donde $\alpha : I \rightarrow S$ es una curva parametrizada en S con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{\nabla}$.

En esta definición se deriva algo tangente, pero eso no implica que su derivada sea tangente. De forma general $dX_p(\vec{\nabla})$ no es tangente a S . Luego nosotros nos quedaremos con la parte tangente obteniendo así la siguiente definición.

Definición 5.8. Sea $X \in \mathfrak{X}(S)$ se define la **derivada covariante** ($\nabla_{\vec{\nabla}} X$) del campo tangente X respecto al vector $\vec{\nabla} \in T_p S$, como la parte tangente de la derivada usual de este campo, es decir,

$$\nabla_{\vec{\nabla}} X = dX_p(\vec{\nabla}) - \langle dX_p(\vec{\nabla}), N(p) \rangle N(p) \in T_p S.$$

A partir de esta nueva derivada obtenemos unos destacados resultados y propiedades. El primer resultado que mostramos es la famosa *fórmula de Gauss* de una superficie.

Proposición 5.9. Sea $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores tangente a S , sea $p \in S$ un punto de la superficie y $\vec{\nabla} \in T_p S$ un vector tangente a la superficie en p . Se tiene la fórmula de Gauss:

$$dX_p(\vec{\nabla}) = \nabla_{\vec{\nabla}} X + \langle A_p(\vec{\nabla}), X(p) \rangle N(p).$$

Demostración. Como X es tangente a S , se tiene que $h(p) = \langle X(p), N(p) \rangle = 0$ para todo punto de la superficie. Sea $p \in S$ y $\vec{v} \in T_p S$ derivando h respecto \vec{v} , se tiene que

$$\vec{v}(\langle X(p), N(p) \rangle) = \langle \vec{v}(X(p)), N(p) \rangle + \langle X(p), \vec{v}(N(p)) \rangle = 0,$$

por tanto $\langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle + \langle X(p), dN_p(\vec{v}) \rangle = 0$. Ahora si despejamos el primer término, tenemos

$$\langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle = -\langle X(p), dN_p(\vec{v}) \rangle = +\langle X(p), A_p(\vec{v}) \rangle,$$

sustituyendo en la fórmula de la Definición 5.8 tenemos que

$$\nabla_{\vec{v}} X = dX_p(\vec{v}) - \langle X(p), A_p(\vec{v}) \rangle N(p).$$

Por lo que despejando $dX_p(\vec{v})$ tenemos lo que queríamos probar,

$$dX_p(\vec{v}) = \nabla_{\vec{v}} X + \langle A_p(\vec{v}), X(p) \rangle N(p).$$

□

Ahora mostramos cinco de las propiedades que cumple la derivada covariante.

Proposición 5.10. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, $\vec{v}, \vec{w} \in T_p S$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ se cumple que :

- (I) $\nabla_{\vec{v}+\vec{w}} X = \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{w}} X$,
- (II) $\nabla_{\lambda\vec{v}} X = \lambda \nabla_{\vec{v}} X$,
- (III) $\nabla_{\vec{v}} (X + Y) = \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{v}} Y$,
- (IV) $\nabla_{\vec{v}} (fX) = \vec{v}(f)X(p) + f(p)\nabla_{\vec{v}} X$,
- (V) $\vec{v}(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_{\vec{v}} X, Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_{\vec{v}} Y \rangle$.

Demostración. Para demostrar esta serie de propiedades vamos a hacer uso de la definición de derivada covariante y de las propiedades de la diferencial, véase la Definición 5.8 y la Proposición 2.9.

- (I) $\nabla_{\vec{v}+\vec{w}} X = dX_p(\vec{v} + \vec{w}) - \langle dX_p(\vec{v} + \vec{w}), N(p) \rangle N(p) =$
 $dX_p(\vec{v}) + dX_p(\vec{w}) - \langle dX_p(\vec{v}) + dX_p(\vec{w}), N(p) \rangle N(p) =$
 $dX_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle + dX_p(\vec{w}) - \langle dX_p(\vec{w}), N(p) \rangle = \nabla_{\vec{v}} X + \nabla_{\vec{w}} X.$
- (II) $\nabla_{\lambda\vec{v}} X = dX_p(\lambda\vec{v}) - \langle dX_p(\lambda\vec{v}), N(p) \rangle N(p) =$
 $\lambda dX_p(\vec{v}) - \lambda \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) =$
 $\lambda (dX_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p)) = \lambda \nabla_{\vec{v}} X.$

$$\begin{aligned}
\text{(III)} \quad \nabla_{\vec{v}}(X + Y) &= d(X + Y)_p(\vec{v}) - \langle d(X + Y)_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) = \\
&= dX_p(\vec{v}) + dY_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}) + dY_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) = \\
&= dX_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle + dY_p(\vec{v}) - \langle dY_p(\vec{v}), N(p) \rangle = \nabla_{\vec{v}}X + \nabla_{\vec{v}}Y.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(IV)} \quad \nabla_{\vec{v}}(fX) &= d(fX)_p(\vec{v}) - \langle d(fX)_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) = \\
&= \vec{v}(f)X(p) + f(p)dX_p(\vec{v}) - \langle \vec{v}(f)X(p) + f(p)dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) = \\
&= \vec{v}(f)X(p) + f(p)dX_p(\vec{v}) - \langle f(p)dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) = \\
&= \vec{v}(f)X(p) + f(p)dX_p(\vec{v}) - f(p) \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p) = \\
&= \vec{v}(f)X(p) + f(p) (dX_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p)) = \vec{v}(f)X(p) + f(p)\nabla_{\vec{v}}X.
\end{aligned}$$

(v) Para demostrar este último apartado de las propiedades, vamos a ver primero cuanto vale $\langle \nabla_{\vec{v}}X, Y(p) \rangle$.

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{\vec{v}}X, Y(p) \rangle &= \langle dX_p(\vec{v}) - \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle N(p), Y(p) \rangle = \\
&= \langle dX_p(\vec{v}), Y(p) \rangle - \langle dX_p(\vec{v}), N(p) \rangle \langle N(p), Y(p) \rangle,
\end{aligned}$$

como $X \in \mathfrak{X}(S)$, se tiene que $\langle N(p), Y(p) \rangle = 0$ y por tanto se nos queda que

$$\langle \nabla_{\vec{v}}X, Y(p) \rangle = \langle dX_p(\vec{v}), Y(p) \rangle$$

Luego el lado derecho de la igualdad vale,

$$\langle \nabla_{\vec{v}}X, Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_{\vec{v}}Y \rangle = \langle dX_p(\vec{v}), Y(p) \rangle + \langle X(p), dY_p(\vec{v}) \rangle.$$

Veamos ahora cuanto vale el lado izquierdo,

$$\begin{aligned}
\vec{v}(\langle X, Y \rangle) &= d(\langle X, Y \rangle)_p(\vec{v}) = \\
&= \langle dX_p(\vec{v}), Y(p) \rangle + \langle X(p), dY_p(\vec{v}) \rangle.
\end{aligned}$$

Como queríamos probar. □

La primera vez que hemos hablado de derivadas, derivábamos una función $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ respecto a un vector $\vec{v} \in T_pS$. Ahora damos un paso adelante y vamos a derivar respecto a campos, para ello definimos lo siguiente.

Definición 5.11. Sea $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores tangente y $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ una función diferenciable se define **la derivada de f respecto al campo X** como:

$$X(f)(p) = X(p)(f) = df_p(X(p)) \quad \forall p \in S$$

Es fácil ver que de las propiedades de la derivada usual, se extienden las siguientes:

Proposición 5.12. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$, y $f, g \in \mathcal{C}^\infty(S)$ se cumple que :

- (a) $(X + Y)(f) = X(f) + Y(f)$,
- (b) $(fX)(g) = fX(g)$,
- (c) $X(f + g) = X(f) + X(g)$,
- (d) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$,

Demostración. Demostración directa de las propiedades de la derivada usual, pues al derivar campos, lo único que realizamos es fijar un punto y realizar la derivada usual del campo en ese punto. \square

A lo largo de este capítulo hemos dado la derivada usual y covariante de un campo y hemos derivado funciones respecto a campos. Parece existir una sucesión natural y faltaría dar la definición de la derivada de un campo respecto a otro, aquí directamente daremos la derivada covariante.

Definición 5.13. Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ dos campos tangentes, se define la **derivada covariante** de Y respecto a X como el campo $\nabla_X Y$ dado por

$$(\nabla_X Y)(p) = \nabla_{X(p)} Y \in T_p S.$$

Esta derivada cumple las siguientes propiedades.

Proposición 5.14. Sean $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(S)$, y $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ se cumple que :

- (I) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,
- (II) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
- (III) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,
- (IV) $\nabla_Y (fX) = Y(f)X(p) + f(p)\nabla_Y X$,
- (V) $Z(\langle X, Y \rangle) = \langle \nabla_Z X, Y(p) \rangle + \langle X(p), \nabla_Z Y \rangle$,

Demostración. La demostración de estas propiedades se basa en las propiedades de la derivada covariante, en la Proposición 5.10. \square

En un contexto mucho más abstracto, la Geometría de Riemman, las cuatro primeras propiedades definen el concepto de una *conexión afín* sobre S . La quinta propiedad nos indica que tal *conexión afín es compatible* con la primera forma fundamental.

Ahora damos un último paso para derivar campos de tensores. Las demostraciones se escapan del objetivo de este trabajo y las podemos encontrar en el libro B.O' Neill, *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*, [On].

Definición 5.15. Un **campo de endomorfismos** sobre una superficie regular S , es una aplicación T que asigna a cada punto $p \in S$ un endomorfismo $T_p : T_p S \rightarrow T_p S$. Es decir,

$$\begin{aligned} T : S &\longrightarrow \text{End}(T_p S) \\ p &\longrightarrow T_p : T_p S \longrightarrow T_p S. \end{aligned}$$

Diremos que el campo de tensores T es *diferenciable* sobre S , si para cada campo de endomorfismos $X \in \mathfrak{X}(S)$ el campo TX definido por:

$$(TX)(p) = T_p(X(p)) \in T_pS, \quad p \in S,$$

es diferenciable. De esta forma se define una aplicación $T : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(S)$ que cumple las siguientes propiedades:

- (i) $T(X + Y) = TX + TY$,
- (ii) $T(fX) = fT(X)$,

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ y $f \in C^\infty(S)$.

Ejemplo 5.16. *El endomorfismo de Weingarten A (u operador forma) de S , es un campo de tensores diferenciable sobre S .*

Ahora introducimos la derivada covariante de un campo de endomorfismos diferenciable T , con el objetivo de aplicarla al operador forma y así demostrar el teorema de Bernstein.

Definición 5.17. *Sea $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores diferenciable, y sea $T : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(S)$ un campo de endomorfismos diferenciable sobre S . Se define la **derivada covariante de T respecto a X** como el campo de endomorfismos diferenciable $\nabla_X T : T_pS \longrightarrow T_pS$ dado por*

$$(\nabla_X T)(Y) = \nabla_X(TY) - T(\nabla_X Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(S)$$

$(\nabla_X T)$ cumple las propiedades (I) y (II) anteriores, de manera que es una buena definición. Ahora vemos una propiedad fundamental.

Proposición 5.18. *Sea $T : \mathfrak{X}(S) \longrightarrow \mathfrak{X}(S)$ un campo de endomorfismos diferenciable sobre una superficie S . Entonces, para cada $p \in S$ y $\vec{v} \in T_pS$ se tiene*

$$\text{tr}(\nabla_{\vec{v}} T) = \vec{v}(\text{tr} T) = \langle \vec{v}, \nabla(\text{tr} T)(p) \rangle,$$

donde $\text{tr} T \in C^\infty(S)$ es la función dada por $\text{tr} T(p) = \text{tr}(T_p)$. Equivalentemente para cada $X \in \mathfrak{X}(S)$ campo de vectores diferenciable sobre S , se tiene

$$\text{tr}(\nabla_X T) = X(\text{tr} T)$$

Ahora damos una formulación sencilla de las ecuaciones clásicas de Codazzi-Mainardi.

Teorema 5.19. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Las ecuaciones de **Codazzi-Mainardi** de S son equivalente a la siguiente propiedad: Para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ se verifica que*

$$(\nabla_X A)(Y) = (\nabla_Y A)(X)$$

5.1.3. Gradiente, divergencia y laplaciano.

En esta sección realizamos un cálculo intrínseco, es decir, propio de la superficie. Comenzamos con la primera de las herramientas que usaremos, el gradiente.

Definición 5.20. Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ una función diferenciable sobre la superficie S . Para cada punto $p \in S$ se define el **gradiente** de f en el punto p como el vector $\nabla f(p) \in T_p S$ determinado por

$$\langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle = df_p(\vec{v}) = \vec{v}(f),$$

para todo $\vec{v} \in T_p S$.

Este gradiente hereda todas las propiedades del gradiente euclídeo que son las siguientes.

Proposición 5.21. Sean $f, g \in \mathcal{C}^\infty(S)$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces se tiene que:

1. $\nabla(f + g) = \nabla(f) + \nabla(g)$,
2. $\nabla(fg) = g\nabla(f) + f\nabla(g)$,
3. $\nabla\phi(f) = \phi'(f)\nabla(f)$,
4. $\nabla f(p) = 0$ para todo $p \in S$ si y solo si f es constante en S .

Demostración. 1. Para todo $\vec{v} \in T_p S$, el gradiente de $f + g$ cumple que

$$\langle \nabla(f + g), \vec{v} \rangle = d(f + g)_p(\vec{v}),$$

usando las propiedades de la diferencial se tiene que

$$= df_p(\vec{v}) + dg_p(\vec{v}) = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle + \langle \nabla g, \vec{v} \rangle = \langle \nabla f + \nabla g, \vec{v} \rangle,$$

luego tenemos que $\langle \nabla(f + g), \vec{v} \rangle = \langle \nabla f + \nabla g, \vec{v} \rangle$ para todo \vec{v} , por tanto se tiene $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

2. Procediendo igual que en el primer apartado, tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla fg, \vec{v} \rangle &= d(fg)_p(\vec{v}) = g(p)df_p(\vec{v}) + f(p)dg_p(\vec{v}) = \\ &g(p)\langle \nabla f, \vec{v} \rangle + f(p)\langle \nabla g, \vec{v} \rangle = \langle g(p)\nabla f + f(p)\nabla g, \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

de donde se tiene que $\nabla fg = g\nabla f + f\nabla g$.

3. Ahora en este apartado usaremos la regla de la cadena para diferenciales. Sea $\vec{v} \in T_p S$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla\phi(f), \vec{v} \rangle &= d\phi(f)_p = \phi'(f(p))df_p(\vec{v}) = \\ &\phi'(f(p))\langle \nabla(f), \vec{v} \rangle = \langle \phi'(f(p))\nabla(f), \vec{v} \rangle \end{aligned}$$

luego se tiene que $\nabla\phi(f) = \phi'(f)\nabla(f)$.

4. Hacemos primero la implicación hacia la izquierda, si $f = cte$ se tiene que $df_p(\vec{v}) = 0$ para todo $\vec{v} \in T_pS$. Y por tanto

$$\langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle = df_p(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \nabla f(p) = 0.$$

El recíproco es inmediato, si $\nabla f(p) = 0$ entonces

$$\langle \nabla f(p), \vec{v} \rangle = \langle 0, \vec{v} \rangle = 0 = df_p(\vec{v}).$$

Y como $df_p(\vec{v}) = 0$, se tiene que f ha de ser constante. \square

Una forma interesante de ver el gradiente de una función sobre una superficie es realizar el gradiente usual de \mathbb{R}^3 y quedarnos con su parte tangente. Lo podemos ver de forma correcta en la siguiente proposición.

Proposición 5.22. *Sea F una función diferenciable definida sobre un abierto $W \subset \mathbb{R}^3$ y sea $S \subset W$ una superficie regular. Si $f = F|_S$, entonces $f \in C^\infty(S)$ y su gradiente es la parte tangente del gradiente euclídeo de F . Es decir,*

$$\nabla f(p) = \text{Grad}F(p) - \langle \text{Grad}F(p), N(p) \rangle N(p).$$

Introducimos ahora los conceptos de divergencia de un campo de vectores tangente a una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ y el laplaciano de una función diferenciable sobre S .

Definición 5.23. *Sea $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores tangente sobre la superficie S . Para cada punto $p \in S$ se define la **divergencia de X en p** como la traza de la aplicación lineal*

$$(\nabla X)_p : T_pS \longrightarrow T_pS,$$

donde $(\nabla X)_p(\vec{v}) = \nabla_{\vec{v}}X$. Es decir, $\text{div}X(p) = \text{tr}(\vec{v} \mapsto \nabla_{\vec{v}}X)$

Proposición 5.24. Propiedades de la divergencia. *Sean $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ dos campos tangentes cualesquiera y $f \in C^\infty(S)$ se tiene que:*

1. $\text{div}(X + Y) = \text{div}X + \text{div}Y$,
2. $\text{div}(fX) = \langle \nabla f, X \rangle + f \text{div}X$,

Demostración. Para demostrar estas propiedades tomamos $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortonormal de T_pS . Luego calculando en un punto p tenemos

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Y) &= \text{tr}(\vec{v} \mapsto \nabla_{\vec{v}}(X + Y)) = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{\vec{e}_i}(X + Y), \vec{e}_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{\vec{e}_i}X + \nabla_{\vec{e}_i}Y, \vec{e}_i \rangle = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{\vec{e}_i}X, \vec{e}_i \rangle + \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{\vec{e}_i}Y, \vec{e}_i \rangle = \\ &= \text{tr}(\vec{v} \mapsto \nabla_{\vec{v}}X) + \text{tr}(\vec{v} \mapsto \nabla_{\vec{v}}Y) = \text{div}X + \text{div}Y. \end{aligned}$$

Obteniendo así la primera propiedad. De igual forma demostramos la segunda propiedad.

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(fX) &= \operatorname{tr}(\vec{v} \mapsto \nabla_{\vec{v}}(fX)) = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{\vec{e}_i}(fX), \vec{e}_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \langle \nabla f, \vec{e}_i \rangle X + f \nabla_{\vec{e}_i} X, \vec{e}_i \rangle = \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla f, \vec{e}_i \rangle \langle X, \vec{e}_i \rangle + f \langle \nabla_{\vec{e}_i} X, \vec{e}_i \rangle = \langle \nabla f, X \rangle + f \operatorname{div} X, \end{aligned}$$

concluyendo de esta forma la demostración de las propiedades de la divergencia. \square

Al igual que el gradiente, para el cálculo de la divergencia podemos realizar la divergencia usual en \mathbb{R}^3 y luego quedarnos con la parte tangente. Por lo tanto obtenemos una proposición parecida a la del gradiente, pero ahora para la divergencia que es la siguiente.

Proposición 5.25. *Sea $X \in \mathfrak{X}(S)$ un campo de vectores tangente sobre la superficie S y sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortonormal del $T_p S$. Para cada punto $p \in S$ verifica que la **divergencia** de X viene dada por*

$$\operatorname{div} X(p) = \langle dX_p(\vec{e}_1), \vec{e}_1 \rangle + \langle dX_p(\vec{e}_2), \vec{e}_2 \rangle.$$

Un caso particular de la divergencia es cuando el campo X es el gradiente de una función diferenciable $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$. De aquí parte la definición de *laplaciano*.

Definición 5.26. *Sea $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ una función diferenciable se define el **laplaciano** de f en S como,*

$$\Delta f(p) = \operatorname{div}(\nabla f(p)).$$

Proposición 5.27. Propiedades del Laplaciano. *Sean $f, g \in \mathcal{C}^\infty(S)$ dos funciones diferenciables, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces el laplaciano cumple que:*

1. $\Delta(f + g) = \Delta(f) + \Delta(g)$,
2. $\Delta(\lambda f) = \lambda \Delta(f)$,
3. $\Delta\phi(f) = \phi'(f) \Delta(f) + \phi''(f) |\nabla f|^2$,
4. $\Delta(fg) = g\Delta f + f\Delta g + 2 \langle \nabla f, \nabla g \rangle$.

Demostración. Para demostrar estas propiedades utilizamos la definición de laplaciano y las propiedades de gradiente y divergencia.

Comenzamos demostrando 1.

$$\Delta(f + g) = \operatorname{div}(\nabla(f + g)) = \operatorname{div}(\nabla f + \nabla g) = \operatorname{div} \nabla f + \operatorname{div} \nabla g = \Delta f + \Delta g.$$

$$2. \Delta(\lambda f) = \operatorname{div}(\nabla \lambda f) = \operatorname{div}(\lambda \nabla f) = \lambda \operatorname{div} \nabla f = \lambda \Delta f.$$

$$3. \nabla \phi(f) = \operatorname{div}(\Delta \phi(f)) = \operatorname{div}(\phi'(f) \nabla f) = \langle \nabla \phi'(f), \nabla f \rangle + \phi'(f) \operatorname{div}(\nabla f) = \langle \phi''(f) \nabla(f), \nabla f \rangle + \phi'(f) \operatorname{div}(\nabla f) = \phi''(f) |\nabla(f)|^2 + \phi'(f) \Delta f.$$

$$4. \Delta(fg) = \operatorname{div} \nabla(fg) = \operatorname{div}(f \nabla g + g \nabla f) = \operatorname{div}(f \nabla g) + \operatorname{div}(g \nabla f) = \langle \nabla f, g \rangle + f \operatorname{div}(\nabla g) + \langle \nabla g, f \rangle + g \operatorname{div}(\nabla f) = 2 \langle \nabla f, g \rangle + f \Delta g + g \Delta f.$$

Y con esta última propiedad finaliza la demostración. \square

A continuación vemos la relación que hay en los conceptos anteriores entre dos métricas conformes. Hasta ahora, para una superficie S hemos utilizado la métrica dada por la primera forma fundamental y por lo cuál no había lugar de confusión. A partir de ahora denotaremos una superficie como un par dado por la superficie euclídea junto con su métrica, notación (S, g) . Comenzamos con la divergencia, que omitimos su demostración, y en la proposición siguiente veremos la relación entre el gradiente y el laplaciano.

Lema 5.28. *Sea (S, g) una superficie regular, y sea \hat{g} una métrica conforme a g , se tiene que*

$$\widehat{\operatorname{div}} = \operatorname{div} + 2du.$$

La demostración de este resultado excede el objetivo de esta memoria y la omitimos.

Proposición 5.29. *Sea (S, g) una superficie regular, y sea \hat{g} una métrica conforme a g , se tiene que*

$$\nabla f = e^{2u} \widehat{\nabla} f. \quad (5.1)$$

$$\Delta f = e^{2u} \widehat{\Delta} f, \quad (5.2)$$

Demostración. Por la definición de gradiente sabemos que

$$\forall X \in \mathfrak{X}(S) \quad g(\nabla f, X) := X(f) =: \widehat{g}(\widehat{\nabla} f, X), \quad (5.3)$$

luego han de ser iguales y como $\widehat{g} = e^{2u}g$ tenemos que

$$g(\nabla f, X) = \widehat{g}(\widehat{\nabla} f, X) = e^{2u}g(\widehat{\nabla} f, X) = g(e^{2u}\widehat{\nabla} f, X).$$

Esto es cierto para todo $X \in \mathfrak{X}(S)$, por lo tanto se ha de cumplir que $\nabla f = e^{2u}\widehat{\nabla} f$, como queríamos probar.

Veamos ahora la otra igualdad. Sabemos que $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$, luego usando la igualdad para el gradiente tenemos que

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{div}(e^{2u}\widehat{\nabla} f),$$

usando las propiedades de la divergencia, Proposición 5.24, se sigue

$$\Delta f = g(\nabla e^{2u}, \widehat{\nabla} f) + e^{2u} \operatorname{div}(\widehat{\nabla} f) = g(2e^{2u}\nabla u, e^{-2u}\nabla f) + e^{2u} \operatorname{div}(\widehat{\nabla} f) =$$

$$= 2g(\nabla u, \nabla f) + e^{2u} \operatorname{div}(\widehat{\nabla} f). \quad (5.4)$$

Por el momento, dejamos esa ecuación ahí y desarrollamos $\operatorname{div}(\widehat{\nabla} f)$. Usando el Lema 5.28 tenemos

$$\operatorname{div}(\nabla f) = \widehat{\operatorname{div}}(\widehat{\nabla} f) - 2du(\widehat{\nabla} f) = \widehat{\Delta} f - 2 \left(\widehat{\nabla} f \right) (u),$$

que usando la definición de gradiente se nos queda

$$\operatorname{div}(\widehat{\nabla} f) = \widehat{\Delta} f - 2\widehat{g}(\widehat{\nabla} f, \widehat{\nabla} u).$$

Dado lo visto en (5.3), podemos cambiar \widehat{g} por g de forma que

$$\operatorname{div}(\widehat{\nabla} f) = \widehat{\Delta} f - 2g(\widehat{\nabla} f, \nabla u).$$

Luego tenemos, $\operatorname{div}(\widehat{\nabla} f) = \widehat{\Delta} f - 2g(\widehat{\nabla} f, \nabla u)$, sustituyendo esto en (5.4), tenemos lo que queríamos probar. Pues

$$\begin{aligned} \Delta f &= 2g(\nabla u, \nabla f) + e^{2u} \left(\widehat{\Delta} f - 2g(\widehat{\nabla} f, \nabla u) \right) = \\ &g(\nabla u, \nabla f) + e^{2u} \left(\widehat{\Delta} f \right) - 2g(\nabla f, \nabla u) = e^{2u} \widehat{\nabla} f. \end{aligned}$$

Luego $\Delta f = e^{2u} \widehat{\nabla} f$ como queríamos probar. □

Una vez vista la relación de estos conceptos entre dos métricas, damos un teorema que nos da la relación que existe entre dos métricas para la curvatura de Gauss. La demostración se omite por la complejidad en su demostración.

Teorema 5.30. *Sea \widehat{g} una métrica conforme a g . La curvatura de Gauss de \widehat{g} esta dada por $\widehat{K} = e^{-2u} (K - \Delta u)$ donde u es la función diferenciable que cumple $\widehat{g} = e^{2u} g$.*

5.2. Parabolicidad y completitud.

En esta sección se introduce un nuevo concepto llamado parabolicidad. Nosotros nos ocuparemos de estudiar la parabolicidad en el caso $n = 2$ (donde n es la dimensión de la superficie) que es el caso que nos ocupa para demostrar el teorema. La parabolicidad es un concepto muy complejo que cambia drásticamente a partir de dimensión 3. Empezamos definiendo los conceptos de funciones armónicas, subarmónicas y superarmónicas.

Definición 5.31. *Se dice que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(S)$ es **armónica** si $\Delta f = 0$. Análogamente se dice que la función es **subarmónica** si verifica $\Delta f \geq 0$. Y respectivamente se dice que la función es **superarmónica** si verifica $\Delta f \leq 0$.*

A partir de esta definición podemos dar ya la definición de superficie parabólica.

Definición 5.32. Sea S una superficie regular, decimos que la superficie es **parabólica** si las únicas funciones subarmónicas ($\Delta f \geq 0$) y acotadas superiormente ($f \leq f^* < +\infty$) son las funciones constantes. Equivalentemente, si las únicas funciones superarmónicas ($\Delta f \leq 0$) y acotadas inferiormente ($f \geq f^* > -\infty$) son las constantes.

Probamos ahora que la parabolicidad es un invariante conforme en dimensión $n = 2$.

Proposición 5.33. Sea (S, g) una superficie regular y $\hat{g} = e^{2u}g$ una métrica conforme a g , donde $u \in C^\infty(S)$. Entonces (S, g) es parabólica si y sólo si (S, \hat{g}) es parabólica.

Demostración. Es claro que si \hat{g} es conforme a g por la función u , g también es conforme a \hat{g} mediante la función $-u$. Por lo tanto, solo es necesario demostrar una implicación.

Sea $f \in C^\infty(S)$ una función subarmónica para \hat{g} , luego $\hat{\Delta}f \geq 0$ y supongamos que f está acotada superiormente, $f \leq f^* < +\infty$. Se tiene que $\Delta f = e^{2u}\hat{\Delta}f \geq 0$ y por tanto f es subarmónica también para la métrica g . Como (S, g) es parabólica se tiene que f ha de ser constante. Luego toda f subarmónica por \hat{g} y acotada superiormente ha de ser constante, luego (S, \hat{g}) es parabólica por definición. \square

Ahora presentamos el concepto de superficie completa y algunos resultados. Para ello daremos las definiciones de distancia intrínseca, superficie completa y curva divergente.

Definición 5.34. Sea (S, g) una superficie regular. Dados $p, q \in S$, se define la **distancia intrínseca** entre p y q como

$$d(p, q) = \inf\{L(\alpha) : \alpha \in \Omega(p, q)\},$$

donde $\Omega(p, q)$ denota al conjunto de curvas diferenciables a trozos en S que unen p con q , y $L(\alpha)$ denota la longitud de la curva α .

Definición 5.35. Sea S una superficie regular. Se dice que S es **métricamente completa**, si es completa como espacio métrico con la distancia intrínseca d .

Definición 5.36. Una **curva divergente** en una superficie diferenciable S es una curva $\alpha : [0, \infty) \rightarrow S$ que se sale de los compactos de S , es decir, tal que para cada conjunto compacto $A \subset S$ existe un t_0 para el cual $\alpha(t) \notin A$ si $t > t_0$. Se define entonces **la longitud de α** como

$$L(\alpha) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a |\alpha'(t)| dt \leq \infty.$$

En esta definición hay que tener en cuenta que la norma de α no es la norma común, sino que es la norma respecto a la métrica g y por tanto se tiene que

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}.$$

Las curvas divergentes nos proporcionan un criterio más geométrico del concepto de completitud. Este teorema que presentamos fue la definición original de completitud que dieron Hopf y Rinow en 1931.

Teorema 5.37. *Una superficie regular (S, g) es completa si y sólo si toda curva divergente en S tiene longitud infinita.*

La demostración de este teorema se omite, pero se puede ver en [HCP]. En la siguiente proposición daremos uso de este criterio.

Proposición 5.38. *Sea (S, g) una superficie regular completa. Supongamos que existe una métrica \widehat{g} sobre S que satisface $\widehat{g} \geq cg$, para una constante $c > 0$, entonces la superficie (S, \widehat{g}) es completa.*

Demostración. Sea $\alpha : [0, \infty) \rightarrow S$ una curva divergente sobre S . Por el teorema anterior, como (S, g) es completa se tiene que la longitud de α ha de ser infinita,

$$L(\alpha) = \int_0^\infty \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt = \infty$$

Como \widehat{g} es una métrica que cumple que $\widehat{g} \geq cg$, se tiene que

$$\widehat{L}(\alpha) = \int_0^\infty \sqrt{\widehat{g}_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt \geq \sqrt{c} \int_0^\infty \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt = \sqrt{c}L(\alpha) = \infty$$

Luego la curva α tiene longitud infinita para la métrica \widehat{g} y por tanto la superficie (S, \widehat{g}) es completa. □

A continuación presentamos un criterio dado por Ahlfors, véase [Ah], que nos permite determinar si una superficie es parabólica.

Teorema 5.39. Criterio de Ahlfors. *Si S es una superficie completa con $K \geq 0$ entonces S es parabólica.*

5.3. Teorema de Bernstein.

Una vez hemos visto todas las herramientas necesarias ya estamos casi a punto de poder alcanzar nuestro objetivo, dar una demostración geométrica del teorema. Solo nos queda enunciar y demostrar una proposición que contiene unos cálculos necesarios para el desarrollo de la demostración.

Proposición 5.40. *Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie minimal y orientable con aplicación de Gauss N . Para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ se tiene*

1. $|\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle|^2 = K (\langle N, \mathbf{a} \rangle^2 - 1)$,
2. $\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle = 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle$.

Demostración. Comenzamos demostrando 1. Como S es orientable consideramos la aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar un $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ que $|\mathbf{a}| = 1$. Luego definimos la siguiente aplicación.

$$\begin{aligned} u : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longrightarrow u(p) = \langle N(p), \mathbf{a} \rangle. \end{aligned}$$

La aplicación u cumple que $-1 \leq u \leq 1$ ya que $u(p) = \cos(\angle(N(p), \mathbf{a}))$. Veamos cuanto vale el gradiente de u , $\nabla u(p)$.

Por la definición de gradiente sabemos que $\nabla u(p)$ ha de cumplir $\langle \nabla u(p), \vec{v} \rangle = \vec{v}(u) = du_p(\vec{v})$ para todos los vectores $\vec{v} \in T_p S$. Luego si $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{v}$ se tiene

$$\langle \nabla u(p), \vec{v} \rangle = du_p(\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(\alpha(t)), \quad (5.5)$$

donde $u(\alpha(t)) = \langle N(\alpha(t)), \mathbf{a} \rangle$ y por tanto de la ecuación (5.5) se sigue

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle N(\alpha(t)), \mathbf{a} \rangle = \left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\alpha(t)), \mathbf{a} \right\rangle + \left\langle N(\alpha(t)), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{a} \right\rangle,$$

Y como \mathbf{a} es una constante fija, $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{a} = 0$ y $\langle N(\alpha(t)), \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{a} \rangle = 0$. Luego la igualdad anterior se nos queda usando la definición del operador forma

$$= \left\langle \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\alpha(t)), \mathbf{a} \right\rangle = \langle dN_p(\alpha'(0)), \mathbf{a} \rangle = \langle dN_p(\vec{v}), \mathbf{a} \rangle = \langle -A_p(\vec{v}), \mathbf{a} \rangle.$$

Es decir,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle N(\alpha(t)), \mathbf{a} \rangle = \langle dN_p(\vec{v}), \mathbf{a} \rangle = \langle -A_p(\vec{v}), \mathbf{a} \rangle. \quad (5.6)$$

Como $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar como combinación de un vector tangente y un vector normal, es decir,

$$\forall p \in S, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}^\top(p) + \lambda(p)N(p),$$

donde $\mathbf{a}^\top(p) \in T_p S$ y $\lambda(p) = \langle N(p), \mathbf{a} \rangle = u(p)$. Por tanto, de la ecuación (5.6) se tiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \langle -A_p(\vec{v}), \mathbf{a} \rangle &= -\langle A_p(\vec{v}), \mathbf{a} \rangle = -\langle A_p(\vec{v}), \mathbf{a}^\top(p) + u(p)N(p) \rangle = \\ &= -\langle A_p(\vec{v}), \mathbf{a}^\top(p) \rangle - \langle A_p(\vec{v}), u(p)N(p) \rangle = -\langle A_p(\vec{v}), \mathbf{a}^\top(p) \rangle. \end{aligned}$$

Como el operador forma es autoadjunto, se tiene que $\forall \vec{v} \in T_p S$

$$\langle \nabla u(p), \vec{v} \rangle = -\langle A_p(\vec{v}), \mathbf{a}^\top(p) \rangle = -\langle A_p(\mathbf{a}^\top(p)), \vec{v} \rangle,$$

lo que implica que $\nabla u(p) = A_p(\mathbf{a}^\top(p))$ donde \mathbf{a}^\top es un campo tangente a S con $\mathbf{a}^\top = \mathbf{a} - \langle N, \mathbf{a} \rangle N$. Una vez conocemos lo que vale el gradiente de u , vamos a calcular su norma. Para ello utilizaremos el *teorema de Cayley-Hamilton* que nos dice que $A_p^2 = 2HA_p - KI$ donde I denota la identidad.

$$\begin{aligned} |\nabla u|^2 &= \langle \nabla u, \nabla u \rangle = \langle -A_p(\mathbf{a}^\top(p)), -A_p(\mathbf{a}^\top(p)) \rangle = \langle A_p(\mathbf{a}^\top(p)), A_p(\mathbf{a}^\top(p)) \rangle = \\ &= \langle A_p^2(\mathbf{a}^\top(p)), \mathbf{a}^\top(p) \rangle = \langle 2HA_p(\mathbf{a}^\top) - K\mathbf{a}^\top, \mathbf{a}^\top(p) \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle 2HA_p(\mathbf{a}^\top), \mathbf{a}^\top(p) \rangle - \langle K\mathbf{a}^\top(p), \mathbf{a}^\top(p) \rangle.$$

Luego se tiene

$$|\nabla u|^2 = 2H \langle A_p(\mathbf{a}^\top), \mathbf{a}^\top(p) \rangle - K|\mathbf{a}^\top(p)|^2 \quad (5.7)$$

Ya casi tenemos lo que buscábamos. Solo queda calcular el término $|\mathbf{a}^\top(p)|^2$. Como $|\mathbf{a}|^2 = 1 = |\mathbf{a}^\top(p)|^2 + \langle N, \mathbf{a} \rangle^2$ se tiene que

$$|\mathbf{a}^\top(p)|^2 = 1 - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2,$$

y por tanto la ecuación (5.7) se queda de la siguiente forma:

$$|\nabla u|^2 = 2H \langle A_p(\mathbf{a}^\top), \mathbf{a}^\top(p) \rangle - K(1 - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2).$$

Como la superficie S es minimal, por la Definición 3.3, $H = 0$, entonces

$$|\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle|^2 = -K(1 - \langle N, \mathbf{a} \rangle^2) = K(\langle N, \mathbf{a} \rangle^2 - 1)$$

que es lo que queríamos probar.

Ahora demostramos 2. Utilizamos la misma función u anteriormente definida. Nuestro objetivo para esta segunda demostración va a ser calcular cuanto vale Δu . Sabemos

$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{tr}(\vec{\nabla} \rightarrow \nabla_{\vec{\nabla}} \nabla u),$$

o si lo evaluamos en un $p \in S$, donde $\{\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2\}$ es una base ortonormal del $T_p S$ tenemos

$$\Delta u(p) = \operatorname{div}(\nabla u) = \operatorname{tr}(\vec{\nabla} \in T_p S \rightarrow \nabla_{\vec{\nabla}} \nabla u \in T_p S) = \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{\vec{\mathbf{e}}_i} \nabla u, \vec{\mathbf{e}}_i \rangle.$$

Ya tenemos algo más de información sobre su valor. Ahora debemos desarrollar esa suma. Para ello vemos cuanto vale $\nabla_{\vec{\nabla}} \nabla u$ con $\vec{\nabla} \in T_p S$.

En la demostración anterior hemos visto que $\nabla u = -A(\mathbf{a}^\top)$ de donde obtenemos que

$$-\nabla_{\vec{\nabla}} \nabla u = \nabla_{\vec{\nabla}} (A(\mathbf{a}^\top)) \quad (5.8)$$

aplicando la regla de la cadena para derivaciones de endomorfismos, se tiene que

$$\nabla_{\vec{\nabla}} (A(\mathbf{a}^\top)) = (\nabla_{\vec{\nabla}} A)(\mathbf{a}^\top) + A(\nabla_{\vec{\nabla}}(\mathbf{a}^\top)). \quad (5.9)$$

Ahora vamos a calcular el valor de la derivada $\nabla_{\vec{\nabla}}(\mathbf{a}^\top)$.

$$\nabla_{\vec{\nabla}}(\mathbf{a}^\top) = \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{a}^\top(\alpha(t)) \right)^\top,$$

donde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ es una curva diferenciable con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = \vec{\nabla}$.

Como $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ es una constante y se puede escribir como combinación de la parte tangente y la normal $\mathbf{a} = \mathbf{a}^\top + u(p)N(p)$, se tiene que

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^\top(\alpha(t)) + u(\alpha(t))N(\alpha(t)).$$

Derivando respecto a t , en $t = 0$

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{a}^\top(\alpha(t)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(\alpha(t)) N(\alpha(0)) + u(\alpha(0)) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\alpha(t)),$$

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{a}^\top(\alpha(t)) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(\alpha(t)) N(p) - u(p) A_p(\vec{\mathbf{v}}).$$

Si nos quedamos con la parte tangente de la ecuación tenemos

$$0 = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{a}^\top(\alpha(t)) \right)^\top - u(p) A_p(\vec{\mathbf{v}}) = \nabla_{\vec{\mathbf{v}}} \mathbf{a}^\top - \langle N(p), \mathbf{a} \rangle A_p(\vec{\mathbf{v}}),$$

Por lo cuál, despejando

$$\nabla_{\vec{\mathbf{v}}} \mathbf{a}^\top = \langle N(p), \mathbf{a} \rangle A_p(\vec{\mathbf{v}}), \quad \vec{\mathbf{v}} \in T_p S$$

Estás derivaciones están realizadas respecto a un vector, pero también las podemos hacer respecto a un campo

$$\nabla_X \mathbf{a}^\top = \langle N(p), \mathbf{a} \rangle A(X), \quad X \in \mathfrak{X}(S).$$

Reescribiendo la ecuación (5.9) en términos de los campos y sustituyendo la anterior tenemos

$$\nabla_X (A(\mathbf{a}^\top)) = (\nabla_X A) (\mathbf{a}^\top) + A (\nabla_X (\mathbf{a}^\top)) = (\nabla_X A) (\mathbf{a}^\top) + \langle N, \mathbf{a} \rangle A^2(X) \quad (5.10)$$

Sean $\{\vec{E}_1, \vec{E}_2\}$ una base ortonormal de campos de $\mathfrak{X}(S)$, usando la ecuación (5.8)

$$-\Delta u = - \sum_{i=1}^2 \left\langle \nabla_{\vec{E}_i} \nabla u, \vec{E}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^2 \left\langle \nabla_{\vec{E}_i} (A \mathbf{a}^\top), \vec{E}_i \right\rangle$$

y ahora sustituyendo por la igualdad de (5.10)

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \sum_{i=1}^2 \left\langle (\nabla_{\vec{E}_i} A) (\mathbf{a}^\top) + \langle N, \mathbf{a} \rangle A^2 \vec{E}_i, \vec{E}_i \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^2 \left\langle (\nabla_{\vec{E}_i} A) (\mathbf{a}^\top), \vec{E}_i \right\rangle + \langle N, \mathbf{a} \rangle \sum_{i=1}^2 \left\langle A^2 \vec{E}_i, \vec{E}_i \right\rangle. \end{aligned}$$

O lo que es lo mismo

$$-\Delta u = \sum_{i=1}^2 \left\langle (\nabla_{\vec{E}_i} A) (\mathbf{a}^\top), \vec{E}_i \right\rangle + \langle N, \mathbf{a} \rangle \text{tr}(A^2). \quad (5.11)$$

Utilizando las Ecuaciones de Codazzi, 5.19, $(\nabla_X A) Y = (\nabla_Y A) X$ y la Proposición 5.18, vamos a desarrollar el primer sumatorio.

$$\sum_{i=1}^2 \left\langle (\nabla_{\vec{E}_i} A) (\mathbf{a}^\top), \vec{E}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^2 \left\langle (\nabla_{\mathbf{a}^\top} A) (\vec{E}_i), \vec{E}_i \right\rangle = \text{tr}(\nabla_{\mathbf{a}^\top} A) = \nabla_{\mathbf{a}^\top} (\text{tr}(A)) =$$

$$= \nabla_{\mathbf{a}^\top} (2H) = 2\nabla_{\mathbf{a}^\top} (H) = 2 \langle \nabla H, \mathbf{a}^\top \rangle$$

dado a que ∇H es tangente podemos poner

$$2 \langle \nabla H, \mathbf{a}^\top \rangle = 2 \langle \nabla H, \mathbf{a} \rangle.$$

Por tanto, la ecuación (5.11) se nos queda

$$-\Delta u = 2 \langle \nabla H, \mathbf{a} \rangle + \text{tr}(A^2) \langle N, \mathbf{a} \rangle.$$

Ahora solo nos queda ver cuanto vale $\text{tr}(A^2)$. Sabemos que $A^2 = 2HA - KI$ luego

$$\text{tr}(A^2) = \text{tr}(2HA - KI) = 2H\text{tr}(A) - K\text{tr}(I) = 4H^2 - 2K.$$

Por lo que,

$$-\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle = -\Delta u = 2 \langle \nabla H, \mathbf{a} \rangle + (4H^2 - 2K) \langle N, \mathbf{a} \rangle$$

Y como por hipótesis nuestra superficie es minimal, $H = 0$ tenemos que

$$\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle = 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Una vez la proposición anterior está demostrada, ya tenemos todas las herramientas para alcanzar nuestro objetivo.

Teorema 5.41. *Las únicas superficies minimales en \mathbb{R}^3 , orientables y completas cuya imagen esférica está contenida en una semiesfera abierta son los planos.*

Demostración. Sea S una superficie minimal, orientable y completa. Y consideremos la función $\langle N, \mathbf{a} \rangle > 0$ y que por la Proposición 5.40 se tiene $\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle = 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle \leq 0$. Puesto que por ser S minimal se tiene que $k_1(p) = -k_2(p)$ lo que implica que $K(p) \leq 0$. Si pudiésemos ver que S es parabólica, tendríamos que $\langle N, \mathbf{a} \rangle$ ha de ser constante y por tanto $\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle = 2K \langle N, \mathbf{a} \rangle = 0$, lo que implicaría que $K = 0$, por lo tanto sus puntos serían umbilicales, y por la caracterización de superficies umbilicales, Proposición 2.26, la superficie es un plano.

Para ello vamos a probar que (S, g) , donde g es la métrica de S , es una superficie parabólica. Pero como hemos visto anteriormente la parabolicidad es un invariante conforme, luego probar que (S, g) es parabólica es lo mismo que probar que (S, \hat{g}) es parabólica siendo \hat{g} una métrica conforme a g .

Consideramos la métrica conforme dada por $\widehat{g} = (1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2 g$. Donde $u = \log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2$. Luego la curvatura para esta nueva métrica \widehat{K} , viene dada por $\widehat{K} = e^{-2u} (K - \Delta u)$ por lo tanto

$$\widehat{K} = \frac{1}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} (K - \Delta \log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2),$$

usando las propiedades del laplaciano respecto a una función tenemos que

$$\Delta \log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2 = \frac{\Delta \langle N, \mathbf{a} \rangle}{1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle} - \frac{|\nabla \langle N, \mathbf{a} \rangle|^2}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} =$$

usando la Proposición 5.40,

$$\frac{2K \langle N, \mathbf{a} \rangle}{1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle} - \frac{K (\langle N, \mathbf{a} \rangle^2 - 1)}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} = K.$$

Lo que implica que

$$\widehat{K} = \frac{1}{(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2} (K - \Delta \log(1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle)^2) = 0.$$

Por tanto (S, \widehat{g}) es una superficie llana pues su curvatura vale 0. Dado que $1 + \langle N, \mathbf{a} \rangle > 0$ se tiene que $\widehat{g} \geq g$, y como g es completa, también lo es \widehat{g} . En definitiva, (S, \widehat{g}) es una superficie llana y completa, por el criterio de Ahlfors es parabólica que es lo que queríamos probar. \square

Ahora mostramos un corolario del Teorema 2.31, haciendo uso del teorema de Bernstein.

Teorema 5.42. *Los únicos grafos enteros de curvatura media constante en \mathbb{R}^3 son los planos.*

Demostración. Por el Teorema 2.31, tenemos que el grafo ha de ser minimal, luego haciendo uso del teorema de Bernstein tenemos que es un plano. \square

Índice de figuras

2.1. Plano.	15
2.2. Esfera.	15
3.1. Catenoide.	29
3.2. Helicoide.	30
3.3. Segunda superficie de Scherk.	31
3.4. Superficie de Enneper, descubierta por Enneper.	32
3.5. Primera superficie de Scherk.	34
3.6. Superficie $u(x, y) = x \tan(y)$	35

Bibliografía

- [Ah] Ahlfors, L.V., Sur le type d'une surface de Riemann, *C.R. Acad. Sc. Paris.*, **201**, (1935), 30–32.
- [Al] Alías L., *Análisis Geométrico y Geometría Global de Superficies: Una introducción Elemental. XIV Escola de geometria diferencial*. Editorial IMPA, 2006.
- [Ap] Apostol. *Análisis Matemático*, Editorial Reverté, 1977.
- [Be] Bernstein, S., Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus., *Math. Z.*, **26** (1927), 551-558.
- [BdGG] Bombieri, E., De Giorgi, E. y Giusti, E. , Minimal cones and the Bernstein problem, *Invent. Math.*, **7**, (1969), 243–268.
- [HCP] Hernández-Cifre, M. A. y Pastor, J. A., *Un curso de Geometría Diferencial*. CSIC, Murcia, 2010.
- [Ch] Chern, S.S., Simple proofs of two theorems on minimal surfaces, *Enseignement Math.*, **15**, (1969), 53–61.
- [dG] De Giorgi, E., Una estensione del teorema di Bernstein, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **19**, (1965), 79–85.
- [Do1] Douglas, J., Solution of the problem of Plateau, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33**, (1931), 263-321.
- [Do2] Douglas, J., Minimals surfaces of higher topological structure, *Ann. of Math.*, **40**, (1939), 205-298.
- [Fl] Fleming, W. H., On the oriented Plateau problem, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **11**, (1962), 69–90.
- [GG] Galaz-García, F., Superficies Minimales, *Miscelánea Mat.*, **39**, (2004), 31-48.
- [Ga1] García-Martínez, S. C., Aplicaciones del principio del máximo generalizado de Omori-Yau al estudio de la geometría global de hipersuperficies en espacios de curvatura constante, Tesis doctoral, Universidad de Murcia, (2007).
- [Ga2] García-Martínez, S. C., The classical Bernstein theorem and some results for surfaces of constant mean curvature in Euclidean space. (Español) *Mat. Enseñ. Univ. (N. S.)*, **18**, (2010), 51–74.
- [Jo] Jörgens, K., Ueber die Lösungen der Differentialgleichung $rt - s^2 = 1$, *Math. Ann.*, **127**, (1954), 130-134.

- [JX] Jost, J y Xin, Y.L., Bernstein type theorems for higher codimension
- [Le] Lewy, H., A priori limitations for solutions of Monge-Ampère equations II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **41** (1937), 365-374.
- [MP] Meeks, W. H., III, y Pérez, J., The classical theory of minimal surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **48** (2011), 325-407.
- [Ni] Nitsche, J. C.C. Nitsche, Elementary proof of Bernstein's Theorem on minimal surfaces, *Ann. of Math.*, **66** (1957), 543-544.
- [On] O'Neill, B.. *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc., New York, 1983.
- [Ra] Radó, T., The problem of the least area and the problem of Plateau, *Math. Z.*, **32** (1930), 763-796.
- [Si] Simons, J., Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math.*, **88**,(1968), 62-105.
- [Sp] Spivak, M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 4., Berkeley, CA: Publish or Perish Press, 1979.