



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Grado de Matemáticas  
TRABAJO FIN DE GRADO

TEOREMA DEL ÍNDICE DE POINCARÉ.

José Antonio Camacho Díaz

Curso 2012-2013

12 de septiembre de 2013



# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>3</b>
<b>1. La característica de Euler</b>	<b>9</b>
1.1. El Teorema de Euler . . . . .	9
1.1.1. Los sólidos platónicos . . . . .	23
1.2. Característica de Euler de una superficie . . . . .	28
<b>2. El Teorema del Índice de Poincaré</b>	<b>37</b>
2.1. Campos de vectores . . . . .	38
2.1.1. Campos de vectores planos . . . . .	38
2.1.2. Campos de vectores sobre superficies . . . . .	42
2.2. Campos de líneas en superficies . . . . .	53
<b>3. Aplicaciones geográficas</b>	<b>69</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>73</b>
<b>Índice alfabético</b>	<b>74</b>



# Abstract

In this work, we present one of the most famous theorems in Differential Topology: we refer to the index theorem established first by Poincaré primarily for abstract surfaces and later improved by Hopf to arbitrary dimension.

This result is one of the most beautiful examples of how to relate different areas of mathematics such as Analysis, Algebra and Geometry. It establishes a relationship between the Euler characteristic, the quintessential topological invariant for varieties, and indices of the singular points of any vector field defined on the surface.

As a result is obtained, for example, that the only surface that supports a global field without singularities should be, from the topological point of view, a torus. This has strong implications in many other branches of knowledge such as physics, forcing the existence of singularities in some spaces with a certain topology. Thus, for instance, a compact spacetime has a topology controlled by this theorem since there must always be a vector field determined by the arrow of time. In case of singularities, they can be interpreted as events in which the spacetime suffers a discontinuity.

There are many more applications of this theorem that can be considered in different situations in various sciences: meteorology, hydrodynamics, geography, etc. In any case, the theorem is a first order qualitative tool because it allows us to anticipate the existence of any vector field singularities if we know the topology of the space in which it is defined.

The work is organized into three chapters. In the first one we start by defining basic elements of classical geometry such as polygons and polyhedra. Next we define the Euler characteristic of a polyhedron, an amount well known by mathematicians in the late eighteenth century. The same Euler proved that for any polyhedron, the value of its characteristic must be 2.

For the sake of completeness, we present several demonstrations of this fact. The first one belongs to Euler in which he develops the elements of graph theory needed to understand the proof. The second one is due to Legendre and move the polyhedron to a sphere for using spherical trigonometry elements and an argument of induction on the number of edges. The third one is of Steiner and uses basic elements of topology of surfaces requiring a proof that the Euler characteristic is invariant under subdivisions of the polyhedron.

To complete this first part of the opening chapter we present the classic definition of the Platonic solids and using the above tools we can show that there are only five. Finally, we determine them completely.

The second part of the first chapter is devoted to define the Euler characteristic for a region in a regular surface. We define what we mean by a regular surface in space and we state its main properties. A polygon is a simply connected region in the surface whose boundary is given by smooth curves with isolated points in which the tangent vectors suffers a break (the angles of the polygon). As a special case we consider polygons with 3 edges which we will call, obviously, triangles.

We end the chapter by stating a number of classical results in surface topology whose proof is beyond the scope of this work. Specifically, we present that any compact surface admits a division into triangles. Also, we find that the characteristic of a region is independent of the chosen division into triangles. Finally, we state that the Euler characteristic is a topological invariant which is preserved under homeomorphisms. These three statements themselves are of enough entity for further study and are a classical part of any course on surface topology.

The second chapter is the focus of this report and is dedicated to present and prove the Poincaré index theorem in two versions: the first one for vector fields and the second on for line fields. We start by defining what is meant by a vector field in the plane and calculate the index related to a singular point. We show that the index definition is good and we are helped by the simplicity of the background to achieve these results.

The next step is the following: we change our environment and we consider surfaces in the 3-space. On a surface is possible, of course, to define a vector field. Similarly, we define the index in a singular point as the change of the field relative to a fixed direction when we travel around this singularity. Again, we show that it is a good definition independent of these two elements: the curve and the fixed direction chosen.

After the preliminaries, we state the Poincaré index theorem which can be stated in the following terms: given a surface  $S$  compact and orientable and  $V$  a vector field on  $S$  with a finite number of singular points, it follows that the sum of the indices of these singular points is the Euler characteristic of the surface.

The proof is divided into two parts. In the first one, we show that any given two fields, the sum of the indices of the singular points is unchanged. In the second, we construct a division into triangles and a particular field so that the sum of the indices of this field is precisely the Euler characteristic. After the proof is easy to conclude various results with direct applications such as the famous hairy ball theorem.

The second part of the chapter is devoted to the study of the fields of lines and families of curves. This is a concept that generalizes the vector fields and which has, therefore, some additional difficulties in order to prove the extended version of the theorem. In this case, we consider again singular points of these families of curves such the points in which it is impossible to define a direction continuously. These singular points also support the index definition and the theorem is stated in the same terms as above. The proof requires some ideas of differential geometry concerning parallel fields and Gauss curvature.

Finally, the third chapter of the report is dedicated to study some geographic applications of these results. Specifically, we discuss the existence of peaks, pits and saddles. The amount of these geographical accidents is strictly governed by the topology of the region under consideration.



# Capítulo 1

## La característica de Euler

### 1.1. Polígonos y poliedros. Característica de Euler. Teorema de Euler.

A lo largo de este tema inicial vamos a definir la característica de Euler de poliedros aplicándolo, más adelante, a superficies tres dimensionales cualesquiera. Daremos además algunos resultados importantes como el Teorema de Euler y corolarios con aplicaciones matemáticas fundamentales que se deducen a partir de éste. Además, también veremos una demostración de la invarianza topológica de este importante número entero y aplicaciones a la teoría de superficies riemannianas.

Para este tema vamos a comenzar definiendo la característica de Euler en los objetos tridimensionales geométricos más sencillos que podemos encontrar que son los **poliedros**. Como sabemos desde la infancia, una idea intuitiva de lo que es un poliedro es la siguiente:

Unión de varios polígonos dos dimensionales que solo tienen en común un vértice o una arista.

En cuanto pensamos en poliedros, siempre se nos vienen a la cabeza los prismas y pirámides que son los que más quebraderos de cabeza dan cuando queremos estudiar áreas y volúmenes en la educación secundaria; pero hay muchos más.

Haciendo caso a la definición intuitiva de poliedro, en primer lugar deberíamos dar una definición de polígono (dos dimensiones).

Consideremos  $\mathbb{R}^2$  el plano afín euclídeo. Un segmento de recta en  $\mathbb{R}^2$  está determinado por dos puntos  $p$  y  $q$  y viene dado por,

$$\alpha(t) := (1 - t)p + tq, \text{ donde tomamos } t \in [0, 1].$$

Consideremos  $p_1, \dots, p_n$ ,  $n$  puntos del plano y sea  $\alpha_i$  el segmento de recta que une  $p_i$  con  $p_{i+1}$  con  $i = 1, \dots, n - 1$  y  $\alpha_n$  el segmento que une  $p_n$  con  $p_1$ . Sea  $\alpha$  la **poligonal** que resulta de concatenar  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  y supongamos que es una curva simple (sin autointersecciones).

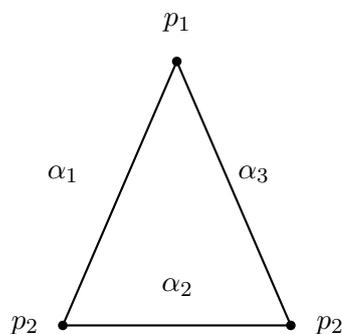
Como esta curva es también cerrada y continua entonces divide al plano  $\mathbb{R}^2$  en dos conjuntos en virtud del teorema de separación de Jordan. Consideremos  $P$  el (único) que es compacto.

**Definición 1.1.1.** *Dado el razonamiento anterior, se dice que  $P$  es el **polígono** determinado por los puntos  $\{p_i\}_{i=1}^n$ . Estos puntos se denominan **vértices** y a los segmentos de recta  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  que los unen se denominan **aristas**.*

En  $\mathbb{R}^2$  se dice que un subconjunto  $\Omega$  es **convexo** si para cualquier par de puntos  $p, q \in \Omega$  el segmento de recta determinado por estos dos puntos está contenido completamente en el subconjunto. Esto quiere decir que,  $\forall t \in [0, 1]$ , el punto  $\alpha(t) = (1 - t)p + tq \in \Omega$ .

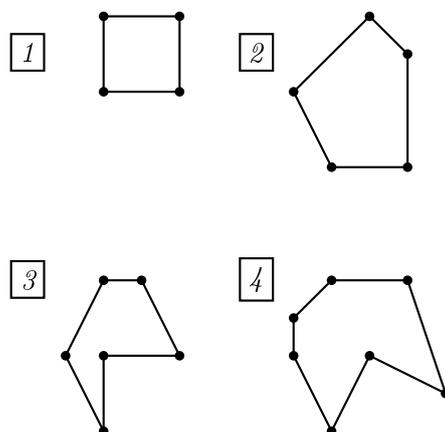
**Definición 1.1.2.** *Si  $P$  es un conjunto convexo, entonces  $P$  se dice que es un **polígono convexo**.*

**Ejemplos 1.1.1.** *A continuación mostramos algunos ejemplos de polígonos.*



*Aquí hemos construido el polígono más simple que podemos realizar. Está constituido por tres puntos,  $p_1, p_2$  y  $p_3$  y por tres aristas,  $\alpha_1, \alpha_2$  y  $\alpha_3$  y se denomina triángulo.*

Otros ejemplos con más aristas son:



1) Cuadrilátero; 2) Pentágono; 3) Hexágono; 4) Heptágono.

Evidentemente podemos construir polígonos con tantas aristas como queramos. Al existir tantas posibilidades necesitamos clasificarlos de alguna forma. Hay muchas maneras de organizar los polígonos, aunque las más útiles son la clasificación según el número de lados y según sean regulares o irregulares.

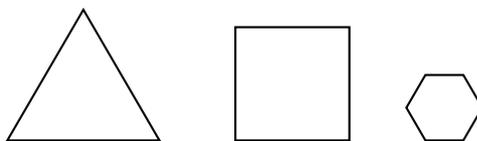
**Según el número de lados o aristas.** En la tabla siguiente se presentan los nombres de los polígonos de hasta 10 lados.

Nº Aristas	Nombre	Nº Aristas	Nombre
3	Triángulo	7	Heptágono
4	Cuadrilátero	8	Octógono
5	Pentágono	9	Eneágono
6	Hexágono	10	Decágono

**Según su regularidad.** En primer lugar necesitamos definir qué es lo que entendemos por un polígono regular.

**Definición 1.1.3.** *Un polígono se dice **regular** si todos sus lados tienen la misma longitud y todos sus ángulos son iguales. Se dice que es **irregular** si no es regular.*

**Ejemplos 1.1.2.** A continuación mostramos tres ejemplos de un triángulo, cuadrilátero y hexágono regulares.



Una vez realizada esta revisión de la geometría plana vamos a dar la generalización a tres dimensiones de los polígonos.

**Definición 1.1.4.** Un poliedro es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$  determinado por una colección finita de polígonos  $\{P_i\}_{i=1}^n$  los cuales han de cumplir alguna de las siguientes restricciones:

1. No tienen ningún punto en común,  $P_i \cap P_j = \emptyset, \forall i \neq j$ .
2. Tienen un único punto en común,  $P_i \cap P_j = \{p\}$ .  
Estos puntos se llaman **vértices**.
3. Tienen una **arista** en común,  $P_i \cap P_j = \alpha$ .

Por último, a cada uno de los polígonos que conforman los poliedros se denominarán **caras** del poliedro.

Obviamente se pueden construir una infinidad de poliedros distintos. Debido a esto nos gustaría tener alguna forma para poder clasificarlos. Para poder hacerlo, damos algunas definiciones sobre propiedades de poliedros.

**Definición 1.1.5.** Enumeramos las siguientes definiciones sobre algunas características de los poliedros.

1. Un poliedro se dice **convexo** si para cualquier par de puntos contenidos en el volumen encerrado por éste, el segmento que los une está contenido en dicho volumen. Se dirá **cóncavo** si no es convexo <sup>1</sup>.
2. Un poliedro se dice **regular** si todas sus caras son polígonos regulares y además, en todos sus vértices confluyen el mismo número de aristas. Se dirá **irregular** si no es regular.
3. Un **prisma** es un poliedro formado por dos polígonos regulares de  $n$ -aristas, los cuales están unidos mediante cuadriláteros. A estos cuadriláteros se les denomina **caras laterales** y ambos polígonos regulares se denominan **bases**.

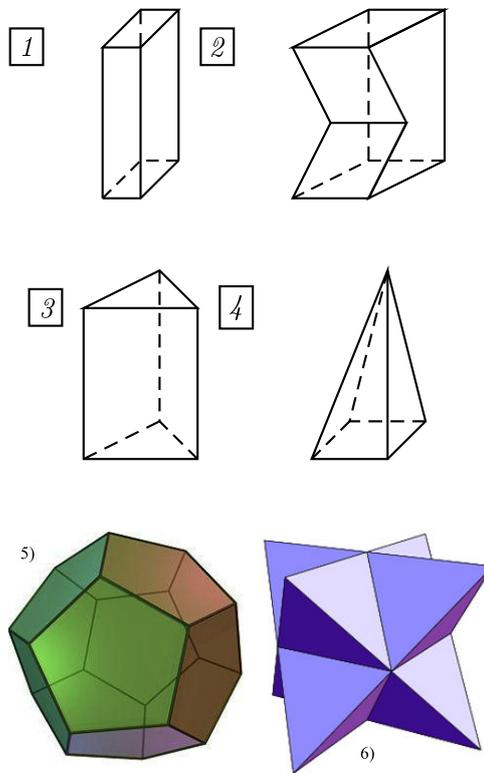
---

<sup>1</sup>Esta es la definición general de un subconjunto convexo en  $\mathbb{R}^3$

4. Una pirámide es un poliedro formado por un polígono regular de  $n$ -vértices, cada uno de ellos unido mediante un segmento de línea recta a otro vértice exterior al área del polígono. Así, el poliedro estaría compuesto por una **base**, que es el polígono regular, y por  $n$  triángulos que son las **caras laterales**.

Estos dos últimos, son poliedros especiales que pertenecen al grupo de los poliedros convexos.

**Ejemplos 1.1.3.** En este ejemplo mostramos poliedros que tienen alguna de las propiedades anteriores.



- 1) Irregular Convexo; 2) Irregular Cóncavo;  
 3) Prisma de base triangular; 4) Pirámide de base cuadrangular;  
 5) Regular Convexo. Dodecaedro; 6) Regular Cóncavo. Tetraedro estrellado.

Como hemos visto en la definición 1.1.4 (página 12), los poliedros están compuestos por vértices, aristas y caras. Para hacer la notación sencilla consideramos para un poliedro cualquiera:

- $v$  : El número de vértices del poliedro.
- $a$  : El número de aristas del poliedro.
- $c$  : El número de caras del poliedro.

Una vez que estamos en este punto, ya podemos definir el concepto que nos mueve durante este primer tema que es el de la característica de Euler. A partir de ahora vamos a denotar por  $P$  a un poliedro convexo cualquiera. Esta hipótesis de convexidad la añadimos porque ésta era importante cuando se demostraron, hace tres siglos, los resultados concernientes a este asunto. Posteriormente, veremos que no es necesaria y que lo significativo no es la convexidad sino la topología del poliedro.

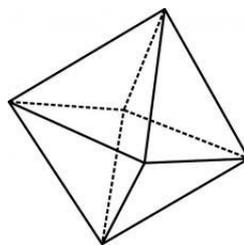
**Definición 1.1.6.** *Se llama característica de Euler de un poliedro  $P$  convexo al número entero*

$$\chi(P) := c - a + v$$

Como hemos hecho hasta ahora, cuando realizamos una nueva definición damos ejemplos para ilustrarla de una manera gráfica y simple. Calcularemos la característica de Euler de varios poliedros convexos para ver cómo funciona.

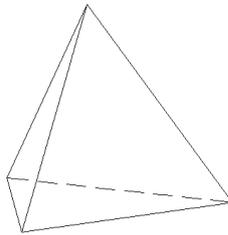
**Ejemplos 1.1.4.** *Mostramos alguna figura y calculamos su característica de Euler.*

### 1. Octaedro.



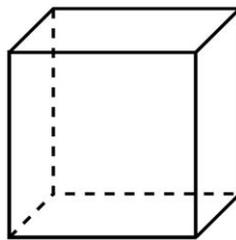
*Caras = 8, Aristas = 12 y Vértices = 6.*

$$\chi(P) = 8 - 12 + 6 = 2$$

**2. Tetraedro.**

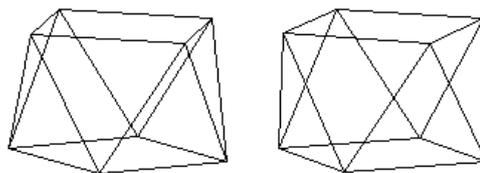
*Caras = 4, Aristas = 6 y Vértices = 4.*

$$\chi(P) = 4 - 6 + 4 = 2$$

**3. Cubo**

*Caras = 6, Aristas = 12 y Vértices = 8.*

$$\chi(P) = 6 - 12 + 8 = 2$$

**4. Antiprisma<sup>2</sup>**

*Caras = 10, Aristas = 16 y Vértices = 8*

$$\chi(P) = 10 - 16 + 8 = 2$$

Como podemos fijarnos en los ejemplos anteriores, la característica de Euler de todos los poliedros es 2. Leonhard Euler (1.707 - 1.783) se fijó en esta constante para los poliedros convexos. Este gran matemático, conjeturó

<sup>2</sup>Un antiprisma se construye igual que un prisma, pero en esta ocasión se gira una de las base haciendo que las caras laterales, en puesto de ser rectangulares, sean triangulares.

a mitad del S. XVIII que para los poliedros convexos esto siempre ocurriría, es decir, que sus características de Euler siempre serían 2. La hipótesis consiguió demostrarla poco tiempo después usando teoría de grafos, naciendo así el llamado Teorema de Euler 1.1.1. Vamos a dar un enunciado estricto para este teorema y ajustado a nuestras definiciones y notaciones. Con respecto a la demostración, existen varias, por lo que daremos tres distintas que son las más representativas. Cada una de estas demostraciones son diferentes y usan herramientas matemáticas variopintas dando así muestras de la gran variedad de técnicas de demostración que se pueden emplear para probar teoremas como éste. La primera demostración es la que dio originalmente Leonhard Euler en 1.750 y fue escrita en una carta dirigida al también matemático Goldbach; posteriormente incluiremos la demostración que da Legendre de este teorema y otra demostración que es la más asentada dentro de la comunidad matemática moderna.

**Teorema 1.1.1** (Teorema de Euler). *Sea  $P$  un poliedro convexo. Denotaremos por  $v$ ,  $a$  y  $c$  al número de vértices, aristas y caras de  $P$  respectivamente. Entonces se cumple que:*

$$\boxed{\chi(\mathcal{P}) = c - a + v = 2} \quad (1.1)$$

#### DEMOSTRACIONES.-

**Demostración 1** (Euler). Como se sabe, Euler demostró el problema de los puentes de Königsberg haciendo una extensa teoría de grafos; gracias a esta teoría demostró también este teorema. Para verlo vamos a definir unos conceptos previos y dar unos lemas (sin demostración) para después probarlo.

**Definición 1.1.7.** *Un grafo en el espacio es una colección finita  $A$  de puntos (llamados vértices o nodos) y un subconjunto  $E$  de  $A \times A$  de pares a los que llamaremos aristas.*

Evidentemente, con la definición anterior, cualquier poliedro convexo se puede poner como un grafo en el espacio, es decir, como unión de vértices o nodos mediante aristas que no se intersecan.

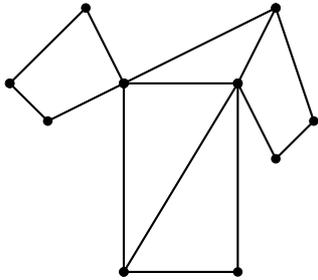
**Definición 1.1.8.** *Una cadena (contenida en un grafo) es una concatenación de vértices (distintos) mediante aristas existentes en el grafo que comienza en un nodo y termina en otro.*

*Un ciclo o lazo (contenido en un grafo) es una cadena que comienza y acaba en el mismo vértice.*

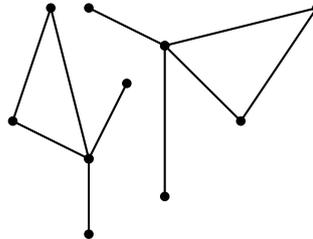
**Definición 1.1.9.** *Un grafo se dice conexo si cualquier pareja de nodos se puede unir mediante una cadena.*

**Ejemplos 1.1.5.** *Vemos ejemplos de grafos conexos y grafos no conexos.*

**Conexo**



**No Conexo**

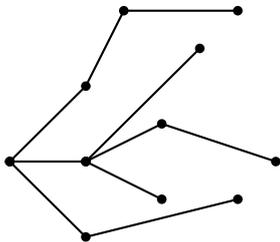


**Lema 1.1.1.** *El grafo asociado a un poliedro  $P$ , al que denotaremos por la misma letra, es conexo.*

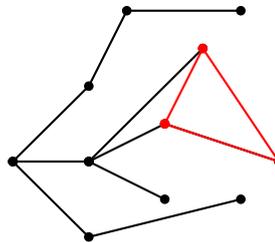
**Definición 1.1.10.** *Un grafo conexo que no tiene ciclos se denomina árbol.*

**Ejemplos 1.1.6.** *En rojo, se representa un ciclo o lazo de un grafo que no es un árbol.*

**Árbol**



**No Árbol**



**Lema 1.1.2.** *El número de vértices de un árbol menos el número de aristas es igual siempre a 1.*

**Demostración.** Sea  $a$  el número de aristas del árbol y  $v$  el número de nodos. Lo que queremos demostrar es que si un grafo es conexo y no tiene ciclos entonces  $v - a = 1$ .

En primer lugar hay que notar que como el grafo es conexo, entonces cualquier nodo se puede conectar con otro mediante una cadena. Además, esta cadena ha de ser única debido a que si existe otra necesariamente se cerraría un ciclo llegando a una contradicción con la hipótesis.

Hacemos inducción sobre  $v$  para mostrarlo. Si  $v = 1$  ó  $2$  la implicación es obvia. Sea ahora cierto para  $v$  vértices y veamos si es cierto para

$v + 1$ . Consideremos un árbol con  $v + 1$  vértices. Eliminando una arista cualquiera del árbol conseguimos, debido a que la cadena que une dos puntos cualesquiera del árbol es única, dividir el árbol en dos componentes conexas diferentes, cada una con un número inferior a  $v + 1$  vértices. Denotando como  $a_1$  y  $a_2$  el número de aristas y por  $v_1$  y  $v_2$  el número de vértices de los grafos resultantes se cumple, aplicando la hipótesis de inducción que  $a_1 = v_1 - 1$  y  $a_2 = v_2 - 1$ .

Por lo tanto,

$$a = a_1 + a_2 + 1 = v_1 - 1 + v_2 - 1 + 1 = v_1 + v_2 - 1 = v - 1$$

lo que demuestra la igualdad del enunciado. □

**Lema 1.1.3.** *De cualquier grafo conexo se puede extraer un árbol. Esto quiere decir que podemos ir eliminando aristas del grafo original (obteniendo así un subgrafo) que contenga todos los vértices formando un árbol con las que quedan.*

En el ejemplo anterior, para el grafo conexo de la derecha se puede extraer como subgrafo suyo el árbol de la izquierda. Aunque también se pueden eliminar otras aristas obteniendo también un árbol como nos dice el lema; por lo tanto, este proceso no es único.

Una vez realizada esta introducción comenzaremos la demostración del teorema. Sea  $P$  un poliedro convexo el cual consideramos como un grafo. Por el lema 1.1.1 y después por el lema 1.1.3 éste es un grafo conexo y se puede obtener un subgrafo suyo que sea un árbol; lo denotaremos por  $T$ . Ahora vamos a considerar un grafo asociado a este árbol, al que vamos a llamar  $\Delta$ . Este grafo asociado se verá definido como: para cada cara de  $P$  en  $\Delta$  hay un vértice. Dos vértices de  $\Delta$  están unidos por una arista si, y sólo si, las correspondientes caras son adyacentes y su intersección es una arista que no está en  $P$ .

Definido  $\Delta$ , no es difícil comprobar que como el grafo de  $P$  es conexo también lo será  $\Delta$ . Esto se debe a que si dos vértices de  $\Delta$  no se pueden unir por una cadena es porque  $T$  contiene algún lazo (es decir, es el perímetro de uno de los polígonos que conforma el poliedro) lo que es una contradicción con que  $T$  sea un árbol.

Por otro lado,  $\Delta$  también es un árbol puesto que si  $\Delta$  poseyese un lazo éste separaría a  $P$  en dos componentes distintas lo que no puede ser ya que  $P$  es conexo.

En resumen, sabemos que  $\Delta$  es un árbol al igual que  $T$  y que el número de vértices menos el de aristas en un árbol, por el lema 1.1.2, es siempre igual a 1. Juntando esto obtenemos que:

1.  $V(\Delta) =$  número de vértices de  $\Delta =$  número de caras de  $P = c$ .
2.  $A(\Delta) + A(T) =$  número de aristas de  $\Delta +$  número de aristas de  $T =$  número de aristas de  $P = a$ .
3.  $V(T) =$  número de vértices de  $T =$  número de vértices de  $P = v$ .

Entonces,

$$2 = V(T) - A(T) + V(\Delta) - A(\Delta) = V(\Delta) - [A(\Delta) + A(T)] + V(T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{2 = c - a + v}$$

□

**Demostración 2** (Legendre). Consideremos  $P$  un poliedro convexo y un punto interior del volumen de éste. Vamos a considerar la esfera de radio unidad centrada en este punto interior. Ahora imaginaremos que proyectamos las aristas y los vértices del poliedro sobre la superficie de la esfera que hemos realizado<sup>3</sup>.

Esta red  $M$  que hemos conseguido en la esfera es un conjunto de polígonos convexos pero que están curvados, o sea, definiremos por polígonos curvados o esféricos convexos a estos polígonos en la esfera<sup>4</sup>. En realidad, consideramos una red (a la que denotamos del mismo modo) *igual* en sentido topológico tal que las aristas de ésta sean geodésicas. Esto siempre es posible conseguirlo aunque su demostración no la incluimos en este trabajo.

**Nota.** En este contexto, un polígono en la esfera está determinado por arcos de geodésica, esto es, círculos máximos. Posteriormente trabajaremos con polígonos generales en la esfera.

Es trivial, entonces, saber que si  $\chi(M) = 2$  entonces también  $\chi(P) = 2$ , luego es suficiente con ver la primera igualdad para los polígonos curvados. Para demostrarlo, vamos a ver primero un lema previo que después aplicaremos a nuestro razonamiento.

**Lema 1.1.4.** *La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo esférico en la superficie de la esfera unidad es igual a  $(n - 2)\pi + A$  donde  $n$  es el número de aristas del polígono y  $A$  es el área.*

<sup>3</sup>Intuitivamente es como si encerrásemos el poliedro en una esfera de radio uno e infláramos el poliedro hasta que todas las aristas formen una malla en la esfera.

<sup>4</sup>Más adelante definiremos con precisión este tipo de construcciones en una superficie arbitraria.

**Demostración.** La demostración la haremos por inducción en el número de aristas,  $n$ .

Para  $n = 3$  su afirmación se debe al bien conocido teorema de la trigonometría esférica. Este teorema puede ser visto como un corolario del teorema de Gauss-Bonnet global para superficies. Para su demostración (véase [7, páginas 234-241]).

Supongámoslo cierto para un número de aristas  $n$  y veamos si es cierto para  $(n + 1)$ . Consideremos un polígono de  $(n + 1)$  aristas, y este polígono vamos a dividirlo en dos polígonos añadiendo una arista interior de tal forma que queden un triángulo  $T$  y un polígono  $\tilde{P}$  que tendrá  $(n - 1)$  aristas.

Por la hipótesis de inducción, para el polígono  $\tilde{P}$  obtenemos:

$$[(n - 1) - 2]\pi + A_{\tilde{P}} = (n - 3)\pi + A_{\tilde{P}}$$

Por el caso  $n = 3$ , para el triángulo  $T$  tenemos:

$$(3 - 2)\pi + A_T = \pi + A_T$$

Sumando todos los ángulos nos queda que:

$$(n - 3)\pi + A_{\tilde{P}} + \pi + A_T = (n - 2)\pi + A_P$$

que es justamente lo que queríamos ver. □

Volviendo a lo que tenemos hasta ahora, vamos a denotar por  $P_j$  cada uno de los polígonos esféricos que conforman nuestra malla, donde  $j$  varía entre 1 y  $m$ . Por el lema, si  $\beta_{ij}$  son los ángulos del polígono  $P_j$ , para cada  $j$  fijo e  $i = 1, \dots, k_j$  se cumple que:

$$\sum_{i=1}^{k_j} \beta_{ij} = (k_{ij} - 2)\pi + A_{P_j} = k_j\pi - 2\pi + A_{P_j}$$

Haciendo la suma para los  $m$  polígonos tenemos que:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_j} \beta_{ij} = 2\pi \cdot v \tag{1.2}$$

Se cumple ya que cada vertice contribuye en una vuelta completa,  $2\pi$  radianes, en esta suma.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{k_j} \beta_{ij} = \sum_{j=1}^m \pi k_j - \sum_{j=1}^m 2\pi + \sum_{j=1}^m A_{P_j} \tag{1.3}$$

Donde,

1. Como cada arista pertenece a dos polígonos distintos y en la suma se consideran dos veces,

$$\sum_{j=1}^m \pi k_j = \pi \cdot \sum_{j=1}^m k_j = \pi(2 \cdot a)$$

2. Como cada cara es una polígono,

$$\sum_{j=1}^m 2\pi = 2\pi \cdot m = 2\pi \cdot c$$

3. La suma de las áreas, es justamente el área de la esfera unidad,

$$\sum_{j=1}^m A_{P_j} = 4\pi$$

Con todo lo enunciado anteriormente, sustituyendo en 1.3 y después igualando con la ecuación 1.2 obtenemos,

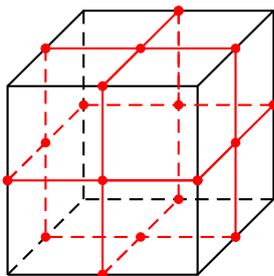
$$2\pi \cdot v = 2\pi \cdot a - 2\pi \cdot c + 4\pi \Rightarrow 2\pi \cdot c - 2\pi \cdot a + 2\pi \cdot v = 2\pi \cdot 2 \Rightarrow \boxed{c - a + v = 2}$$

□

**Demostración 3.** Para llevar a cabo la última de las demostraciones que consideraremos de este importante teorema, tendremos que definir qué es lo que entenderemos por una subdivisión de un poliedro. Después de esta definición, veremos, mediante un importante teorema, que la característica de Euler se conserva bajo subdivisiones de poliedros.

**Definición 1.1.11.** *Una subdivisión de un poliedro es una división de los polígonos que lo conforman mediante el añadido de nuevas aristas y vértices de tal forma que cuando dos polígonos en el poliedro tienen una arista en común, cualquier vértice que hayamos añadido en ésta ha de coincidir con otro vértice añadido en la división del polígono adyacente.*

**Ejemplos 1.1.7.** *En rojo marcaremos los vértices y las aristas que añadimos al cubo principal para hacer una subdivisión de éste.*

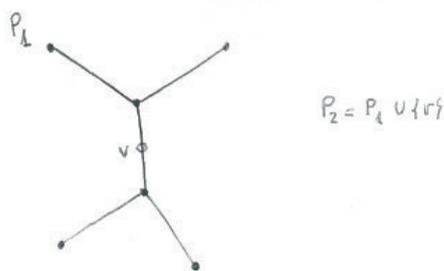


**Teorema 1.1.2.** Sean  $P_1$  y  $P_2$  dos poliedros convexos siendo el segundo una subdivisión del primero.

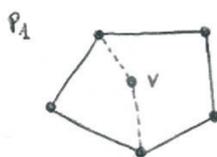
Entonces,

$$\boxed{\chi(P_1) = \chi(P_2)}.$$

**Demostración.** Consideremos una de las aristas del poliedro  $P_1$ . Ahora, vamos a añadirle un vértice a esta nueva arista formando, de esta manera, una subdivisión. Al incorporar este nuevo vértice, dividimos la arista anterior en dos aristas. De este modo, el número de vértices del poliedro inicial se ha visto incrementado en una unidad, pero también el número de aristas se ha incrementado en el mismo número. Así, calculando la característica de ambos, los dos incrementos son anulados debido a que tienen signos contrarios.



Sea ahora una cara del poliedro  $P_1$ . Al añadir un vértice en su interior, debemos introducir dos nuevas aristas obteniendo así una subdivisión de esta cara. Entonces, este añadido de aristas da como resultado que el número de caras se ve aumentado en una unidad, el de vértices también mientras que el de aristas aumenta en dos. De esta forma, al calcular la característica de  $P_1$  y la subdivisión de éste vemos que coinciden puesto que los incrementos, de nuevo, se anulan por los signos que tienen cada uno de los componentes.



Aplicando razonamientos análogos a cada uno de los casos posibles para subdivisiones obtenemos el resultado que nos dice el enunciado.

□

**Nota 1.1.1.** El hecho de que la característica de Euler sea invariante bajo subdivisiones es una de las más importantes herramientas para realizar la clasificación de superficies.

Una vez demostrado el anterior teorema vamos a ver cómo lo utilizaremos para realizar la última de las demostraciones del teorema de Euler.

Consideremos dos poliedros convexos cualesquiera y vamos a proyectar ambos (como hemos hecho en la anterior demostración) sobre la superficie de la esfera unidad obteniendo así dos redes  $P$  y  $Q$ . Realizado esto, vamos a considerar  $S$ , la malla que se obtiene de combinar  $P$  y  $Q$ , o sea, las caras de  $S$  (o polígonos esféricos) son las intersecciones no vacías de los polígonos esféricos que forman las redes de  $P$  y  $Q$ . Sabemos, pues, que las aristas de  $S$  son la división de las aristas de  $P$  y  $Q$  por puntos de intersección de las aristas que conforman esta doble malla; mientras, los vértices de  $S$  son los de  $P$  y  $Q$  más estas intersecciones descritas. De esta forma  $S$ , por definición, es una subdivisión de  $P$ , pero también lo es de  $Q$ . Así, por el teorema anterior, se deduce que:

$$\boxed{\chi(P) = \chi(S) = \chi(Q)}.$$

Gracias a esto, hemos visto que todos los poliedros convexos tienen la misma característica de Euler, pero ¿cuánto vale ésta?

Por los ejemplos que hemos descrito en 1.1.4 (página 14) sabemos que esta característica ha de valer 2, concluyendo la demostración.

□

### 1.1.1. Aplicación del teorema de Euler: Sólidos platónicos

Como es muy común en matemáticas, se buscan siempre consecuencias y aplicaciones de los teoremas, y este importante teorema no va a ser menos. A continuación vamos a presentar tres corolarios que nos demostrarán una de las grandes conjeturas de la antigua Grecia de una manera sencilla y algebraica; nos estamos refiriendo a la unicidad de los llamados sólidos platónicos.

Vamos a denotar por  $c_n$  el número de polígonos del poliedro que tienen  $n$  lados. Obviamente, se cumple que

$$c = \sum_{n=3}^{+\infty} c_n \quad (1.4)$$

Como, cada arista corresponde a dos polígonos, entonces también ocurre

$$2a = \sum_{n=3}^{+\infty} n \cdot c_n \quad (1.5)$$

Se por otro lado  $v_m$  el número de vértices del poliedro en el cual confluyen  $m$  aristas; obviamente:

$$v = \sum_{m=3}^{+\infty} v_m \quad (1.6)$$

Como cada arista contiene (termina) en dos vértices, se tiene también

$$2a = \sum_{m=3}^{+\infty} m \cdot v_m \quad (1.7)$$

o sea, el número total de aristas que tiene el poliedro y que salen de todos los vértices.

De la fórmula del teorema de Euler,  $2c - 2a + 2v = 4$ , multiplicándola por 2, y sustituyendo en primer lugar por 1.4, 1.5 y 1.6 obtenemos

$$2 \sum_{n=3}^{+\infty} c_n - \sum_{n=3}^{+\infty} n \cdot c_n + 2 \sum_{m=3}^{+\infty} v_m = 4 \Rightarrow \sum_{m=3}^{+\infty} 2v_m + \sum_{n=3}^{+\infty} 2c_n - 4 = \sum_{n=3}^{+\infty} n \cdot c_n \quad (1.8)$$

mientras que sustituyendo por 1.4, 1.5 y 1.7 obtenemos

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=3}^{+\infty} c_n - \sum_{m=3}^{+\infty} m \cdot v_m + 2 \sum_{m=3}^{+\infty} v_m &= 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{m=3}^{+\infty} 2v_m + \sum_{n=3}^{+\infty} 2c_n - 4 &= \sum_{m=3}^{+\infty} m \cdot v_m \end{aligned} \quad (1.9)$$

Sumando estas dos últimas ecuaciones, 1.8 + 1.9 vemos que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=3}^{+\infty} 4v_m + \sum_{n=3}^{+\infty} 4c_n - 8 &= \sum_{n=3}^{+\infty} n \cdot c_n + \sum_{m=3}^{+\infty} m \cdot v_m \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= 8 + \sum_{m=3}^{+\infty} (m-4) \cdot v_m + \sum_{n=3}^{+\infty} (n-4) \cdot c_n \end{aligned}$$

Dejando los términos negativos a la izquierda llegamos a que:

$$v_3 + c_3 = 8 + \sum_{m=5}^{+\infty} (m-4) \cdot v_m + \sum_{n=5}^{+\infty} (n-4) \cdot c_n \quad (1.10)$$

Debido a que todos los términos de las sumas son todos positivos se sigue directamente de esta igualdad que

$$v_3 + c_3 \geq 8 \quad (1.11)$$

lo cual, particularmente implica el siguiente corolario.

**Corolario 1.1.1.** *Cualquier poliedro convexo posee caras triangulares, o vértices con exactamente tres aristas o, posiblemente, ambos casos.*

Ahora, vamos a multiplicar por 2 la igualdad 1.8 y sumamos 1.9 obteniendo:

$$\begin{aligned} \sum_{m=3}^{+\infty} 6v_m + \sum_{n=3}^{+\infty} 6c_n - 12 &= \sum_{n=3}^{+\infty} 2nc_n + \sum_{m=3}^{+\infty} mv_m \Rightarrow \\ \Rightarrow -12 &= \sum_{n=3}^{+\infty} (2n-6)c_n + \sum_{m=3}^{+\infty} (m-6)v_m \end{aligned} \quad (1.12)$$

Haciendo que esta ecuación solamente contenga términos no nulos, vemos que es equivalente a:

$$\begin{aligned} 3v_3 + 2v_4 + v_5 &= 12 + \sum_{n=4}^{+\infty} (2n-6)c_n + \sum_{m=7}^{+\infty} (m-6)v_m \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{3v_3 + 2v_4 + v_5 \geq 12} \end{aligned} \quad (1.13)$$

ya que todos los términos de los sumatorios son positivos.

Del mismo modo, sumando 1.8 a dos veces la ecuación 1.9 obtendríamos que

$$\boxed{3c_3 + 2c_4 + c_5 \geq 12} \quad (1.14)$$

De estas dos inecuaciones se deducen los siguientes corolarios.

**Corolario 1.1.2.** *Cualquier poliedro convexo debe contener vértices que tengan 3, 4 ó 5 aristas partiendo de él (ecuación 1.13).*

**Corolario 1.1.3.** *Cualquier poliedro convexo debe contener triángulos, cuadriláteros o pentágonos como caras (ecuación 1.14).*

Una vez que hemos presentado estos tres corolarios, podemos dar paso a lo que sería una gran consecuencia referida a los poliedros que son regulares (véase la definición 1.1.5 (página 12)). Con la notación que hemos dado anteriormente, en esta ocasión, se cumplirá para un  $n$  y un  $m$  determinados,  $c = c_n$  y  $v = v_m$ . A los poliedros convexos regulares se les suele denominar como sólidos platónicos debido al filósofo y matemático de la antigua Grecia que estudió este tipo de poliedros.

Por las propiedades de los corolarios y por ser el poliedro regular, resulta que los valores de  $m$  y  $n$  han de ser

$$\text{ó } m = 3 \text{ y } 3 \leq n \leq 5$$

$$\text{ó } n = 3 \text{ y } 3 \leq m \leq 5$$

Además, las ecuaciones quedan como,

$$2a = \sum_{m=3}^{+\infty} mv_m = mv$$

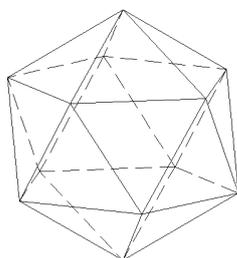
$$2a = \sum_{n=3}^{+\infty} nc_n = nc$$

$$c - a + v = 2$$

determinando completamente los posibles valores de  $c$ ,  $a$  y  $v$  en términos de  $m$  y  $n$ . Tabularemos las posibles combinaciones en la siguiente tabla.

<b>n</b>	<b>m</b>	<b>v</b>	<b>c</b>	<b>a</b>	<b>Nombre</b>
3	3	4	4	6	Tetraedro
3	4	6	8	12	Octaedro
3	5	12	20	30	Icosaedro
4	3	8	6	12	Cubo
5	3	20	12	30	Dodecaedro

En los ejemplos 1.1.3 (página 13) y 1.1.4 (página 14) se muestran todos los poliedros descritos excepto el icosaedro.



*ICOSAEDRO*

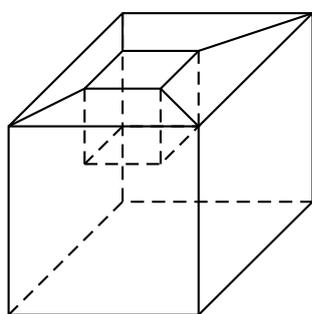
De este modo, hemos demostrado que los únicos poliedros convexos regulares que existen son los descritos anteriormente dando respuesta así a la conjetura que Platón lanza sobre la imposibilidad de construir otros con las mismas propiedades <sup>5</sup>.

En resumen, hemos visto el teorema de Euler que nos habla de que la característica de Euler es constantemente igual a 2 para los poliedros convexos y después estudiamos algunas consecuencias suya. Ahora bien, como suelen hacer los matemáticos, podríamos hacernos más preguntas

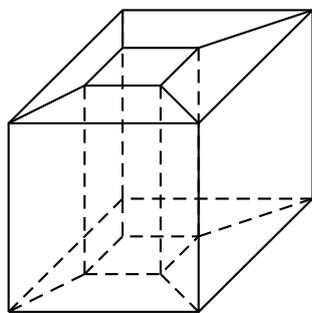
<sup>5</sup>A estos sólidos, en la antigüedad se le asociaban poderes místicos y espirituales. Además, en el Timeo, que es uno de los diálogos que Platón escribe, describe que: *El fuego está formado por tetraedros, el aire de octaedros, el agua de icosaedros, la tierra de cubos y como aun es posible otra forma, Dios ha utilizado ésta, el dodecaedro, para que sirva de límite al mundo.*

sobre esta característica; ¿se podrán debilitar un poco más las hipótesis del teorema obteniendo el mismo resultado? ¿habrá algún poliedro no convexo que cumpla lo anterior?

La respuesta a estas preguntas es sí. Daremos algún ejemplo para mostrar que existen poliedros (en realidad, hay infinitos) que no tienen la propiedad de ser convexos y que aun siguen teniendo la característica de Euler igual a 2. Esto pone de manifiesto que quizás la necesidad de ser convexo no es importante a la hora de que se cumpla el teorema.



Aquí mostramos un cubo  $C$  al cual le hemos sustraído un pequeño cubo de la base superior. En esta ocasión tenemos, 14 caras, 28 aristas y 16 vértices. De esta forma nos queda  $\chi(C) = 14 - 28 + 16 = 2$ . En esta ocasión también obtenemos el mismo resultado que el descrito en el enunciado del teorema.



En esta ocasión hemos perforado totalmente el cubo con un prisma cuadrado (lo denotamos por  $C'$ ). Calculando su característica de Euler, tendremos 16 caras, 32 aristas y 16 vértices y su característica es  $\chi(C') = 16 - 32 + 16 = 0$ .

Como veremos más adelante, esta variación se debe a que la topología del poliedro ha variado. En los ejemplos que hemos considerado anteriores a éste último, los poliedros son, desde el punto de vista topológico, *iguales* (homeomorfos) mientras que en esta última ocasión, tenemos que el poliedro tiene un agujero que lo atraviesa completamente haciendo que sea homeomorfo a

un toro. Como conclusión, podemos decir, que la hipótesis de ser *convexo* no es importante. Lo que es decisivo es el hecho topológico que hay detrás de cada uno de los poliedros.

## 1.2. Generalización a una superficie de la característica de Euler.

La generalización de este concepto a cualquier superficie la vamos a llevar a cabo mediante lo que se denomina una triangulación de una superficie. Daremos, pues, una definición de lo que entendemos por una superficie regular de  $\mathbb{R}^3$  y después definiremos lo que es una triangulación y la característica de Euler asociada a ella. A continuación, se podrán ver algunos resultados importantes sobre su invarianza topológica y la clasificación de superficies compactas y orientable <sup>6</sup>. Para realizar todo esto, nos ayudaremos de los libros [4] y [7] donde podremos encontrar las demostraciones de los teoremas.

**Definición 1.2.1.** *Un subconjunto no vacío  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  es una superficie regular si para todo punto  $p \in S$  existe un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^2$ , un entorno  $V$  de  $p$  en  $S$ , con la topología inducida de  $S$  y una aplicación  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tales que cumplen las siguientes condiciones:*

1.  $X(U) = V$  y  $X$  es diferenciable en el sentido ordinario.
2.  $X : U \rightarrow V$  es un homeomorfismo, es decir, una aplicación biyectiva y continua cuya inversa  $X^{-1} : V \rightarrow U$  es también continua.
3. Para cada punto  $q \in U$ , la diferencial  $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es inyectiva.

A la aplicación  $X$  se le denomina carta, parametrización o sistema de coordenadas, mientras que al entorno  $U$  se le llama entorno coordenado.

**Nota 1.2.1.** Vamos a ver qué significan estas condiciones de la definición.

1. la aplicación  $X$  se puede ver como  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  para un punto  $(u, v) \in U$ . El que  $X$  sea diferenciable significa que las funciones  $x, y, z : U \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables con derivadas parciales continuas de todos los órdenes.
2. El decir que  $V$  es un entorno de  $p$  en  $S$  con la topología relativa quiere decir que existe un abierto  $W \subseteq \mathbb{R}^3$  de forma que  $V = W \cap S$ .
3. Con la condición segunda de la definición nos aseguramos que la superficie no tiene autointersecciones.

---

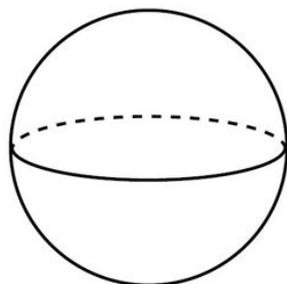
<sup>6</sup>Aunque no entraremos en detalles de las demostraciones por su larga extensión y no entrar dentro de los propósitos de este trabajo.

4. La última condición es la que nos asegura la existencia de un plano tangente a la superficie en cualquier punto  $p \in S$ . Esta condición es equivalente a decir que la matriz jacobiana asociada a esta aplicación lineal tiene rango máximo. Esto último, geoméricamente nos dice que los vectores tangentes

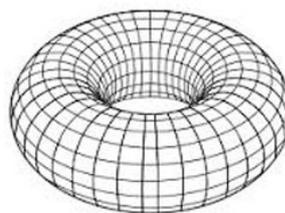
$$X_u(q) = \frac{\partial X}{\partial u}(q) \quad X_v(q) = \frac{\partial X}{\partial v}(q)$$

son linealmente independientes.

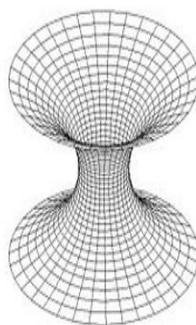
**Ejemplos 1.2.1.** *Aquí exponemos algunos ejemplos de superficies regulares.*



*Esfera*



*Toro*



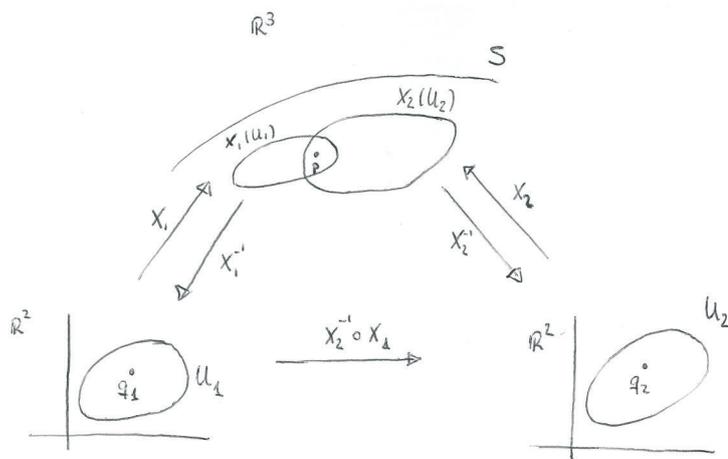
*Catenoide*



*Cilindro*

Por lo general, una superficie no se puede cubrir enteramente con una única carta por lo que necesitamos ver cómo podríamos cubrir toda la superficie de una manera compatible con una cantidad suficiente de cartas.

**Definición 1.2.2.** *Sea  $S$  una superficie regular y  $p \in S$ . Dadas dos cartas  $(U_1, X_1)$  y  $(U_2, X_2)$  tales que  $X_1(U_1) \cap X_2(U_2) = V$ . Tomamos un  $q_i \in U_i$  con  $i = 1, 2$  tales que  $X(q_i) = p$ . Se denomina a la función  $X_2^{-1} \circ X_1$  como la aplicación cambio de coordenadas.*



**Teorema 1.2.1** (Compatibilidad de cartas). *En las condiciones de la definición anterior, la aplicación cambio de coordenadas es siempre un difeomorfismo entre abiertos de  $\mathbb{R}^2$ .*

Este teorema nos asegura que cualquier punto de  $S$  que se cubra con dos cartas distintas, el cambio entre ambos sistemas coordenadas es suave, o sea, diferenciable.

**Definición 1.2.3.** *Una superficie regular  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  se dice compacta si, considerándola como un subespacio topológico del espacio ambiente es compacta.*

**Nota 1.2.2.** De la propia definición de compacidad y de superficie regular compacta, si tenemos una familia  $\mathcal{A} := \{(U_i, X_i)\}_{i \in I}$  de cartas tal que  $S := \cup_{i \in I} X_i(U_i)$  cubre toda la superficie  $S$ , entonces existe un subconjunto finito de esta familia  $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$  tal que también cubre a  $S$  completamente.

A lo largo de todo el trabajo, solamente trabajaremos con superficies compactas que son aquellas que nos interesan a posteriori ya que son la generalización inmediata de los poliedros.

Por otro lado, consideraremos por conocido que el lector sabe la definición de orientabilidad de una superficie, al igual que sabe distinguir superficies orientables y no orientables<sup>7</sup>. Para más información sobre este tema, véase [7].

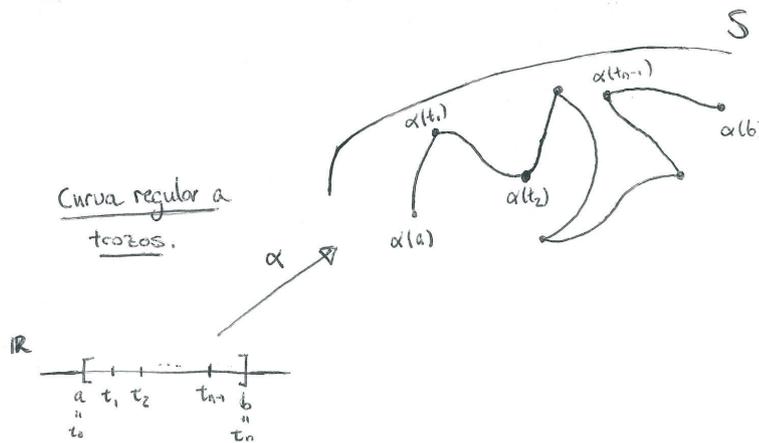
En nuestro caso, vamos a considerar sólo las superficies orientables ya que el estudio de las no orientables requiere de la definición de superficie abstracta que no entran dentro de nuestro objetivo.

<sup>7</sup>Intuitivamente, una superficie no orientable es aquella que solamente tiene una cara (contiene una banda de Möbius); mientras, en una superficie orientable, se pueden distinguir dos caras.

Una vez llegados a este punto ya podemos ver la construcción necesaria para llegar a la definición de característica de Euler para una superficie regular compacta. De aquí en adelante, consideraremos siempre la superficie  $S$  regular, remarcando posteriormente la importancia de que sean compactas y orientables.

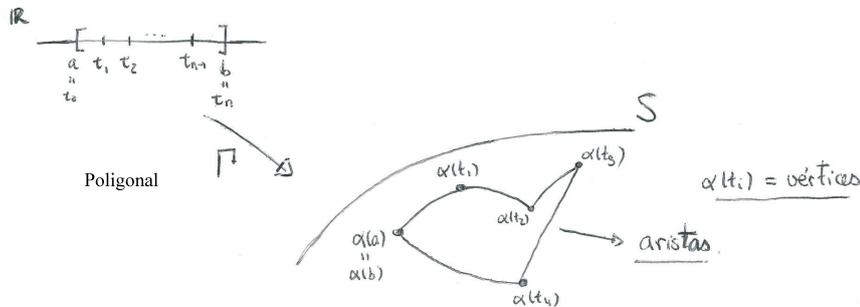
**Definición 1.2.4.** Una curva diferenciable o regular sobre una superficie  $S$  es una aplicación  $\alpha : I \rightarrow S$  donde  $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$  diferenciable.

**Definición 1.2.5.** Una curva regular a trozos sobre una superficie  $S$  es una aplicación  $\alpha : I \rightarrow S$  donde  $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$  continua para la cual existe  $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$  una partición tal que para cada  $i = 1, \dots, n$ , la restricción  $\alpha_i := \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es una curva diferenciable.



**Definición 1.2.6.** Una poligonal en una superficie  $S$  es una aplicación  $\Gamma : I = [a, b] \rightarrow S$  tal que  $\Gamma$  es una curva regular a trozos simple que cumple además que  $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ , es decir, la curva se cierra en sus extremos.

Dada una poligonal, existe  $a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$  una partición tal que  $\Gamma_i := \Gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  es diferenciable. A cada uno de estos puntos se les denominará *vértices* del polígono curvado, mientras que a las partes regulares de las curvas se les denomina *aristas*.



**Definición 1.2.7.** Sea  $R \subset S$  un subconjunto de una superficie regular  $S$ . Diremos que  $R$  es una región de  $S$  si es un subconjunto conexo, relativamente compacto y su frontera (topológica) está formada por una unión finita de poligonales.



a) Región; b) Triángulos.

Por últimos, definimos lo que es un polígono curvado en una superficie regular. Para ello, necesitamos recordar un concepto previo.

**Definición 1.2.8.** Un subconjunto  $\Sigma \subset S$  se dice simplemente conexo si toda curva cerrada contenido en éste puede deformarse de forma continua en un punto sin salir de  $\Sigma$ .

**Definición 1.2.9.** Un polígono de  $n$  lados en  $S$  es una región  $R$ , simplemente conexa, tal que su frontera es una poligonal con  $n$  vértices. Un triángulo es un polígono de tres vértices.

Generalmente llamaremos a la frontera de una región  $R \subset S$  con la letra  $\Gamma$  y a cada una de las poligonales como  $\Gamma_i$  siendo así  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ . Cada uno de estos  $\Gamma_i$  como hemos visto, son curvas regulares a trozos que se cierran por sus extremos.

**Definición 1.2.10.** Sea  $R \subset S$  una región de una superficie regular  $S$ . Una triangulación  $\tau := \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  de  $R$  es una colección finita de triángulos  $\tau_i$  verificando:

1.  $cl(R) = \bigcup_{i=1}^n cl(\tau_i)$ . Donde  $cl()$  representa la clausura topológica.
2. Si  $i \neq j$  son dos índices distintos entonces:
  - o bien,  $cl(\tau_i) \cap cl(\tau_j) = \emptyset$
  - o bien,  $cl(\tau_i) \cap cl(\tau_j) =$  es un vértice en común.
  - o bien,  $cl(\tau_i) \cap cl(\tau_j) =$  es una arista en común.
3. Existe un homeomorfismo  $\varphi_i : T_i \rightarrow \tau_i$ , con  $i = 1, \dots, n$  donde cada  $T_i$  son triángulos en el plano.

Dada una triangulación  $\tau$  de  $R \subset S$ , se denomina caras de  $\tau$  a cada uno de los triángulos que la conforman.

Haciendo un resumen de todas las definiciones que llevamos hasta ahora, hemos visto que dentro de una región  $R \subset S$  de una superficie regular construimos una triangulación. Como hicimos para poliedros, ya estamos preparados para definir uno de los más importantes conceptos que nos mueven en este estudio.

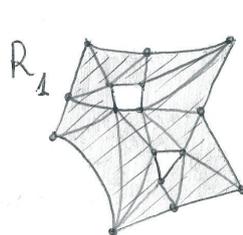
**Definición 1.2.11.** Dada una región  $R \subset S$  de una superficie regular y una triangulación  $\tau$  de  $R$  se define como la característica de Euler (o característica de Euler-Poincaré) para esta triangulación como:

$$\chi(R, \tau) := c - a + v \quad (1.15)$$

Donde, como usamos la notación anteriormente,  $c$  representa el número de caras de la triangulación,  $a$  el número de aristas y  $v$  el número de vértices.

**Nota 1.2.3.** Hay que notar que la característica de Euler de una región  $R$ , en principio, depende de la triangulación escogida de ésta. La pregunta que nos podemos hacer sería la siguiente, ¿la característica de la región depende de la triangulación escogida para ésta? ¿Podremos calcular la característica de Euler para una región  $R$ ?

**Ejemplo.** Calculamos la característica de Euler de las siguiente regiones para unas triangulaciones específicas.



■ Región  
■ Triangulación.

$$\begin{aligned} a &= \overbrace{16}^{\text{Frontera}} + \overbrace{19}^{\text{Interior}} = 35 \\ v &= 16 \\ c &= 18 \end{aligned}$$

$$\chi(R_1) = 18 - 35 + 16 = -1$$



$$a = 10 + 10 = 20$$

$$v = 10$$

$$c = 10$$

$$\chi(R_2) = 10 - 20 + 10 = 0$$

Una vez que hemos visto algunos ejemplos, vamos a dar una serie de resultados que dejamos sin demostrar por su larga extensión y dificultad y que no concierne a nuestro trabajo. Se pueden encontrar algunos de estos resultados en [9].

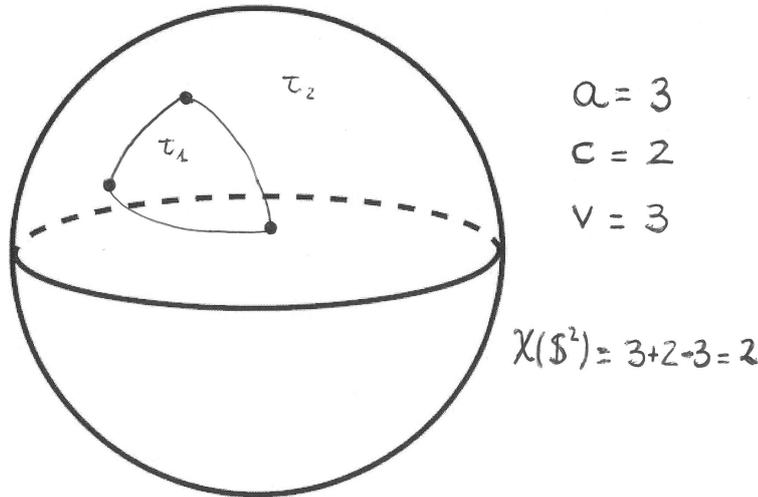
**Teorema 1.2.2.** *Dada una superficie  $S$  se cumple lo siguiente,*

1. *Toda región de una superficie admite una triangulación (véase [1]).*
2. *La característica de Euler-Poincaré de una región no depende de la triangulación escogida. Entonces, denotaremos por  $\chi(R)$  en puesto de  $\chi(R, S)$  (véase [8]). La demostración de este teorema es análoga a la que hemos realizado para la invarianza de la característica de Euler en poliedros.*
3. *La característica de Euler es un invariante topológico, es decir, si dos regiones  $R$  y  $R'$  son homeomorfas entonces  $\chi(R) = \chi(R')$ .*

Estos resultados son muy importantes para lo que queremos ver a continuación. Obsérvese que una superficie compacta (orientable o no) puede ser vista como una región en sí misma con frontera vacía y que, por tanto, podríamos calcular su característica de Euler-Poincaré.

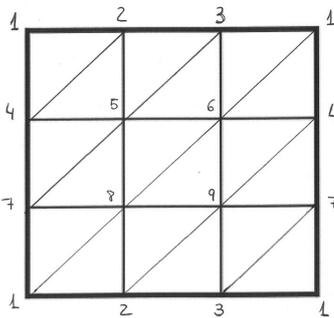
No es difícil comprobar que la característica de Euler de la esfera es  $\chi(S^2) = 2$ ; la del toro es  $\chi(T^2) = 0$ . Véase la figura que sigue.

1. La esfera



2. El toro

$\mathbb{T}^2$  (toro)



$\chi(\mathbb{T}^2) = 18 - 27 + 9 = 0$

Aristas:

12	23	31	14
47	71	24	35
57	16	68	81
49	92	73	25
58	82	36	69
93	45	56	64
78	89	97	

Caras:

124	245	235
356	361	146
457	578	658
689	649	479
187	128	289
239	379	137

Estas dos superficies descritas anteriormente en la figura son ambas compactas y por lo que hemos visto en el teorema 1.2.2 (página 34) no pueden ser homeomorfas dando así una demostración de su no equivalencia topológica.

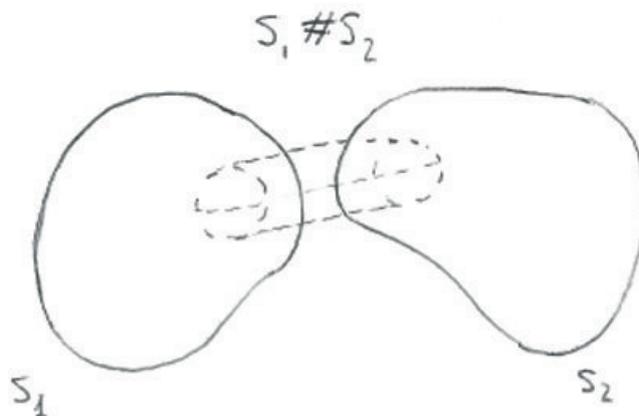
Una de las consecuencias inmediatas de la invarianza de este número natural asociado a cada superficie es el siguiente teorema de clasificación de superficies compactas. Obsérvese que cualquier superficie regular se puede poner como una unión disjunta de superficies conexas, por lo que para este teorema consideraremos superficies conexas, compactas y orientables.

**Teorema 1.2.3.** *Sea  $S$  una superficie regular conexa, compacta y orientable. Entonces,  $S$  es homeomorfa o a la esfera  $S^2$  o a una suma finita conexa de  $g$  toros.*

**Nota 1.2.4.** Algunas observaciones sobre este teorema son,

1. Una definición concreta de lo que es la suma conexa de superficies se puede ver en [6, página 28].

Intuitivamente, es *recortar* en ambas superficies unos discos pequeños y después *pegar* las dos superficies usando un tubo o cilindro.



2. Al número natural finito  $g$  se le denomina género de  $S$  y es un invariante topológico gracias al teorema 1.2.2 (página 34).
3. Se cumple la igualdad siguiente:  $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$  para dos superficies compactas cualesquiera.  
Después de un razonamiento inductivo usual, podemos deducir que para una superficie  $S$  de género  $g$  cumple que  $\chi(S) = 2 - 2g$

En resumen, hemos podido definir la característica de Euler para una superficie compacta y posteriormente hemos dado algunas aplicaciones que tiene este importante número natural como es la clasificación de superficies. Nuestro trabajo ahora es ver si esta característica puede ser descrita de alguna otra forma. Esto lo consigue Poincaré en su famoso teorema que estudiaremos en el siguiente apartado y es el motivo principal del trabajo.

## Capítulo 2

# El Teorema del Índice de Poincaré

El **Teorema del Índice de Poincaré** es un importante resultado que conjuga elementos de casi todas las ramas de las matemáticas. Por un lado tiene elementos de análisis como son las nociones de diferenciabilidad de funciones, índices de familias de curvas y campos vectoriales, elementos topológicos como es la característica de Euler de una superficie y, por último, objetos geométricos como son las superficies. Como se ha venido comentando durante el primer capítulo, las superficies que consideramos para llevar a cabo nuestros objetivos son las superficies compactas, como por ejemplo, esferas, toros, etc.

El capítulo lo dividimos en dos secciones que están estrechamente relacionadas entre sí. En la primera de ellas estudiamos la teoría de los campos de vectores tangentes a una superficie regular  $S$  y posteriormente daremos una versión del teorema de Poincaré para ésta. A continuación, vemos el mismo resultado pero, esta vez, se consideran campos de líneas que es una generalización de los campos vectoriales anteriores.

Necesitamos para redactar y comprender el teorema las definiciones de campos vectoriales sobre una superficie regular  $S$  y campos de líneas. Después definimos lo que entendemos por punto singular en cada uno de estos apartados y qué es el índice para cada singularidad. Para realizar esta tarea nos ayudamos de varias ilustraciones y diferentes dibujos para hacer su comprensión más fácil. También en este apartado vemos algunas pequeñas consecuencias del teorema para ver sus posibles aplicaciones.

## 2.1. Teoría de los campos de vectores sobre superficies. Relación con $\chi(S)$ .

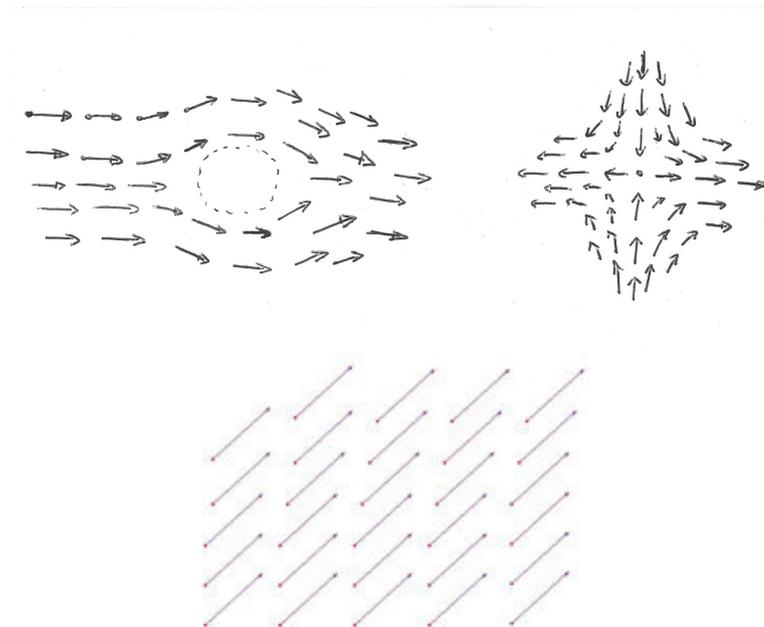
### 2.1.1. Campos de vectores planos

Como ocurre casi siempre en geometría, para definir un nuevo concepto, se comienza por lugares que nos son más fáciles y que *controlamos* como es el plano (ya lo hicimos con los polígonos y poliedros). Una vez definidos aquí, intentaríamos ampliar su definición a espacios de dimensiones mayores y más complicados; en nuestro caso, las superficies regulares.

**Definición 2.1.1.** *Un campo de vectores plano es una asignación  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  que a cada punto  $p$  de un abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  le asocia un vector  $V(p) \in \mathbb{R}^2$ .*

*Se dice que un campo de vectores es diferenciable si escribiendo como  $p = (x, y)$  y  $V(p) = (a(x, y), b(x, y))$ , las funciones  $a$  y  $b$  son diferenciables, en sentido usual, en  $\Omega$*

Geoméricamente, la definición anterior se corresponde con el hecho de que a cada punto  $p = (x, y) \in \Omega$  se le asocia un vector de coordenadas  $a(x, y)$  y  $b(x, y)$ , las cuales varían diferenciablemente con  $(x, y)$ .



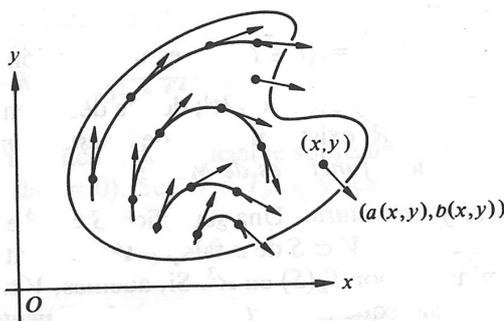
Es natural preguntarse si dado un campo vectorial  $V$ , que siempre lo consideramos diferenciable a no ser que digamos lo contrario, existe una curva  $\alpha$  parametrizada,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  con  $t \in I$  tal que  $\alpha'(t) = V(\alpha(t))$  para cada  $t$ .

Esta curva, en caso de existir, se denomina **trayectoria** de un campo vectorial y su sentido geométrico es que en cada punto de la curva  $\alpha(t)$  su vector velocidad coincide con el vector asociado por  $V$  del punto.

La existencia de esta curva se reduce a la resolución del sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a(x, y) \text{ para la coordenada de abcisas.} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = b(x, y) \text{ para la coordenada de ordenadas.} \end{cases}$$

que en virtud de los teoremas de existencia y unicidad locales para sistemas de este tipo, obtenemos que para cualquier campo vectorial siempre existe una trayectoria local de éste.



*Imagen extraída de [4, página 180]*

**Definición 2.1.2.** Sea  $V$  un campo vectorial en el plano y  $p \in \Omega$ . Se dice que el punto  $p$  es un punto singular o una singularidad de  $V$  si  $V(p) = 0$ , es decir, el vector asociado a este punto es el vector nulo. Al resto de puntos se les denomina puntos regulares.

Se dice que un punto singular es aislado si existe un abierto  $\mathcal{U} \subset \Omega$  tal que  $p \in \mathcal{U}$  y que  $V$  no tenga ninguna otra singularidad en  $\mathcal{U}$ .

Veamos qué es lo que entendemos como índice de un punto singular para campos de vectores planos.

Sea  $V$  un campo vectorial plano y  $p$  un punto singular aislado de este campo. Alrededor de este punto  $p$ , dibujamos una circunferencia  $C$  de un radio cualquiera  $\epsilon > 0$  tal que dentro del círculo no haya ningún otro punto

singular en su interior ni en su circunferencia<sup>1</sup>. Tomemos un punto  $q$  arbitrario de la circunferencia realizada y consideremos  $\gamma$  el ángulo que forma  $V(q)$ , el vector asociado al punto  $q$ , con el eje de abscisas en sentido positivo.

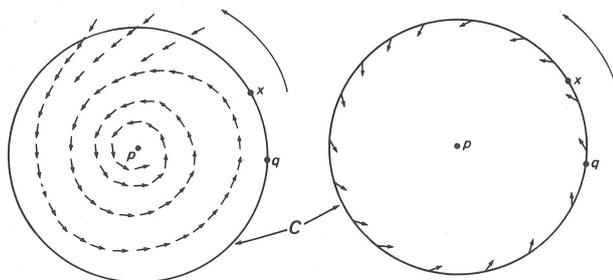


Imagen extraída de [6, página 127]

Obsérvese que  $\gamma$  está unívocamente determinado módulo  $2\pi$ , o sea,  $\gamma$  se puede tomar en  $\gamma \in [0, 2\pi)$ . Tomamos como  $V(t)$  la restricción del campo vectorial  $V$  a los puntos de la circunferencia. Después de fijar el valor de  $\gamma$ , el valor del ángulo de un vector  $V(t)$  cualquiera en cualquier punto posterior de la circunferencia con la dirección del eje  $x$ , queda también determinado por la diferenciabilidad del campo. Consideremos, entonces, el cambio total de  $\gamma$  al dar la vuelta completa. Esta diferencia será siempre un múltiplo de  $2\pi$ , es decir,  $2\pi j$  donde  $j \in \mathbb{N}$ .

**Definición 2.1.3.** *Se denomina índice de un punto singular al número entero  $j$ , que denotamos por  $\text{Ind}[V, p]$ , obtenido del razonamiento anterior. Geométricamente el índice de una singularidad es el número de vueltas que da el campo alrededor de  $p$ .*

### Hechos

1. Este índice es un valor finito y no depende de nuestro punto inicial  $q$ . Además, tampoco depende de la particular elección del radio  $\epsilon$  mientras que el círculo considerado esté libre de puntos singulares.

La demostración de este hecho es muy técnica (aunque intuitiva) y solo la esbozaremos. Consideramos por  $C_i : [0, l_i] \rightarrow \mathbb{R}^2$  las circunferencias de radio  $\epsilon_i$  con  $i = 1, 2$ . El índice con respecto a  $C_1$  será definido como  $\text{Ind}_1[V, p] = \gamma_1(l_1) - \gamma_1(0)$  donde hemos definido por  $\gamma_i(t)$  la función que a cada punto  $C_i(t)$  le asocia el ángulo entre  $V(C_i(t))$  y la dirección positiva del eje  $x$  para cada  $i = 1, 2$ . Del mismo modo,  $\text{Ind}_2[V, p] = \gamma_2(l_2) - \gamma_2(0)$ . Lo que queremos ver es si ambos índices son el mismo. Siempre podemos considerar una familia de circunferencias

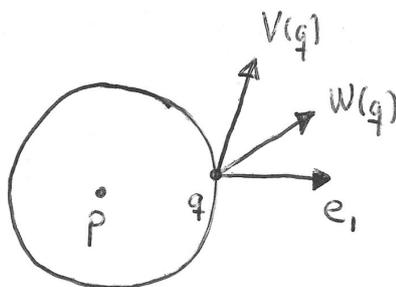
<sup>1</sup>Esto podemos hacerlo debido a que el punto singular es aislado.

concéntricas  $C_s$  que dependan de  $s \in [0, 1]$  de manera continua y describen una deformación de  $C_1$  a  $C_2$ . Si denotamos por  $Ind_s[V, p]$  el índice de  $V$  calculado alrededor de la curva  $C_s$ , vemos que este depende continuamente del valor de  $s$ . Siendo  $Ind_s[V, p]$  un número entero, entonces permanece constante en esta deformación, así  $Ind_1[V, p] = Ind_2[V, p]$ .

2. Fijándonos en la definición de índice, podemos ver que también es posible calcular el índice de un punto regular. En esta ocasión, el índice siempre es *cero*. Esto se debe a que si consideramos una circunferencia  $C$  lo suficientemente pequeña, el campo vectorial no cambia apenas de dirección debido a la diferenciabilidad no pudiendo dar una vuelta completa.
3. Sea ahora  $V$  un campo vectorial y  $p$  un punto singular aislado suyo, o sea,  $V(p) = 0$ . Sea  $W$  otro campo tal que  $W(p) \neq 0$ . Tomamos un entorno lo suficientemente pequeño tal que  $W \neq 0$  y  $p$  es el único punto singular en este entorno y sea  $C$  una circunferencia alrededor de  $p$  contenida en el entorno anterior.

Sea  $q$  un punto de la circunferencia. Si denotamos por  $e_1$  al vector<sup>2</sup> en la dirección positiva del eje  $x$  que parte de este punto y por  $\angle(d, e)$  el ángulo que forman dos vectores, se cumple trivialmente que,

$$\angle(e_1, V(q)) = \angle(e_1, W(q)) + \angle(W(q), V(q))$$



Al dar la vuelta completa resulta que, representando por  $\delta_C(\angle(V, W))$  la diferencia del ángulo entre los campos  $V$  y  $W$  al dar la vuelta completa a  $C$ ,

$$\delta_C(\angle(e_1, V)) = \delta_C(\angle(e_1, W)) + \delta_C(\angle(W, V))$$

<sup>2</sup>Denotamos del mismo modo el campo vectorial constante que a cada punto le asocia el vector unitario en la dirección positiva del eje  $x$ .

Como  $p$  es un punto regular del campo  $W$ , entonces  $\delta_C(\angle(e_1, W)) = 0$  de donde se deduce directamente que,

$$\text{Ind}[V, p] = \delta_C(\angle(W, V))$$

lo que nos dice que podemos sustituir el campo vectorial  $e_1$  por cualquier otro campo  $W$  que no tenga ninguna singularidad cerca de  $p$  para el cálculo del índice de este punto singular.

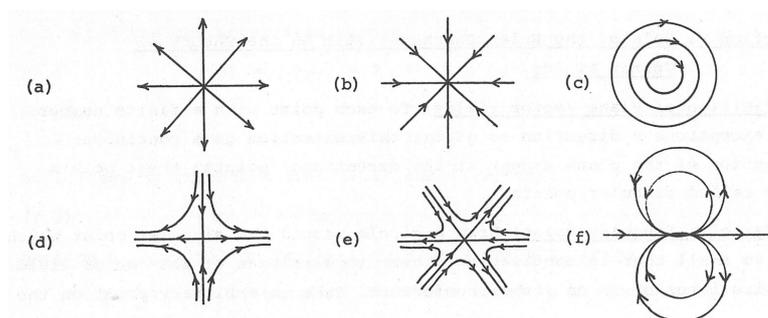


Imagen extraída de [5, página 12]

- a) Punto fuente; b) Punto sumidero; c) Centro;  
d) Punto de silla simple; e) Silla de montar del mono.; f) Dipolo.

Esta definición más generalizada, en la que no hay dependencia del campo de vectores referencial que tomamos, nos servirá de ayuda para estudiar los campos de vectores en superficies.

### 2.1.2. Campos de vectores sobre superficies

Comenzamos ahora el estudio de los campos de vectores definidos en una superficie regular  $S$ . En esta sección sólo consideramos superficies compactas, es decir, subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  compactos.

Para poder definir un campo vectorial tangente, que es nuestro objetivo, necesitamos de la definición de qué es un vector tangente a una superficie en un punto cualquiera de ella. Para esto, recuperamos la definición 1.2.4 (página 31) de curva regular.

**Definición 2.1.4.** Sea  $\alpha : I \rightarrow S$  con  $I = (-\epsilon, \epsilon)$  una curva diferenciable en una superficie regular  $S$ . Entonces, en cualquier punto  $t_0 \in I$ ,  $\alpha(t_0) \in S$  y el vector  $v = \alpha'(t_0)$  es un vector tangente a  $\alpha$  en el punto  $\alpha(t_0)$ , por lo que, también lo será de  $S$  en este punto.

Sabemos, entonces, que para cualquier curva  $\alpha$  diferenciable, su vector velocidad es tangente a la superficie en el punto  $\alpha(t)$  lo que nos mueve a realizar la siguiente definición.

**Definición 2.1.5.** *Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una superficie regular y sea  $p \in S$ . Diremos que  $v \in \mathbb{R}^3$  es un vector tangente a  $S$  en el punto  $p$ , si existe una curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$  diferenciable con  $\alpha(0) = p$  y  $\alpha'(0) = v$ .*

**Nota 2.1.1.** Observa de que el hecho de tomar  $t = 0$  no es restrictivo; se hace así por comodidad. Si existe una curva  $\alpha$  diferenciable con  $\alpha(t_0) = p$  y  $\alpha'(t_0) = v$ , tomando como  $\beta(s) := \alpha(t_0 + s)$  entonces  $\beta(0) = p$  y  $\beta'(0) = v$ . Así, siempre se puede tomar una curva como en la definición.

Representaremos por  $T_p S$  el conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie  $S$  en el punto  $p$ :

$$T_p S = \{v \in \mathbb{R}^3 / \text{ existe } \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S \text{ con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha'(0) = v\}$$

Inmediatamente después de esta complicada definición, nos preguntamos si hay otra forma más analítica de definir el plano tangente, en puesto de una manera tan geométrica. En este caso, la respuesta a esta pregunta es afirmativa y la contiene la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.1.** <sup>3</sup> *Sean  $S$  una superficie regular y  $p \in S$ . Sea  $(U, X)$  una parametrización con  $X(q) = p$  y  $q \in U$ . Entonces se cumple*

$$T_p S = dX_q(\mathbb{R}^2) \tag{2.1}$$

Gracias a esta proposición, podemos deducir que, el conjunto  $T_p S$  es un plano vectorial de  $\mathbb{R}^3$  que llamaremos **plano tangente** a  $S$  en  $p$ . Además, una base de este plano tangente en el punto sería

$$\{dX_q(1, 0), dX_q(0, 1)\} = \{X_u(q), X_v(q)\}$$

De esta manera, podremos completar un base de  $\mathbb{R}^3$  en cada punto de la superficie con estos dos vectores y el vector normal al plano (unitario)

$$N(p) = N(X(q)) = \frac{X_u(q) \wedge X_v(q)}{|X_u(q) \wedge X_v(q)|} \tag{2.2}$$

Por la forma de la expresión, este vector normal a la superficie es una aplicación que varía continuamente lo que nos servirá de gran utilidad para las siguientes definiciones.

---

<sup>3</sup>La demostración de este teorema puede encontrarse en el libro [7, páginas 79-80].

**Definición 2.1.6.** Sea  $S$  una superficie compacta regular. Sabemos que esta superficie tiene en cada punto un plano tangente cuyo vector normal varía continuamente a lo largo de la superficie.

Un campo de vectores tangente  $V$  en un conjunto abierto  $\Omega \subset S$  es una correspondencia que asigna a cada punto  $p \in \Omega$  un vector  $V(p) \in T_p S$ .

Como antes, buscamos las coordenadas de este campo de vectores. Fijamos un punto  $p \in \Omega$  y sea  $(U, X)$  una carta de la superficie  $S$  con  $p = X(q)$  y  $q \in U$ . En este punto, una base para  $T_p S$  es  $\{X_u(q), X_v(q)\}$  luego, el vector  $V(p)$  se puede poner como combinación lineal de esta base,  $V(p) = a \cdot X_u(q) + b \cdot X_v(q)$ , con los valores  $a, b \in \mathbb{R}$ . Así, se puede ver que las coordenadas del campo vectorial tangente en el abierto  $\Omega$  serán  $V(p) = a(u, v) \cdot X_u + b(u, v) \cdot X_v$ .

**Definición 2.1.7.** Sea  $V$  un campo de vectores tangente a  $S$  una superficie regular. Se dice que  $V$  es diferenciable si las funciones  $a$  y  $b$  del razonamiento anterior son diferenciables.

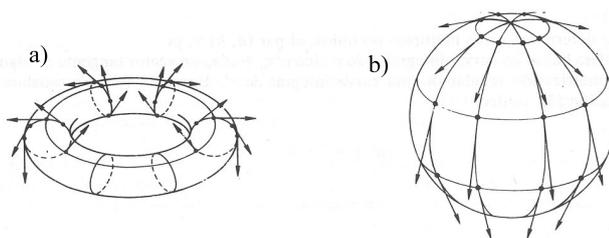


Imagen extraída de [4, página 185]

a) Campo en el toro; b) Campo en la esfera.

Consideremos un campo vectorial tangente  $V$  diferenciable sobre una superficie orientable  $S$ .

**Definición 2.1.8.** Se dice que  $V$  tiene una singularidad o un punto singular en  $p \in S$  si  $V(p) = 0$ .

Se dice que  $p$  es un punto singular aislado si existe un entorno de  $p$  en  $S$  tal que en este entorno no existe ninguna otra singularidad de  $V$ .

Sea  $V$  un campo vectorial diferenciable sobre una superficie orientada  $S$  y  $p$  un punto singular aislado de  $V$ . Ahora, veamos qué es lo que entenderemos por índice de este punto singular. Sea  $X : U \rightarrow S$  una parametrización ortogonal<sup>4</sup> en  $p = X(0, 0)$  compatible con la orientación de

<sup>4</sup>Esta parametrización cumple que  $\langle X_u, X_v \rangle = 0$  y siempre existe.

$S$ . Consideramos  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$  una curva parametrizada, regular a trozos, orientada positivamente, cerrada y simple tal que,  $\alpha([0, l]) \subset X(U)$  es la frontera de una región simple  $R$  que contiene a  $p$  como único punto singular. Nuestro interés se encuentra en descubrir cómo podemos medir la variación de los ángulos que se producen entre nuestro campo vectorial a lo largo de  $\alpha$  y un campo vectorial de referencia. ¿Qué campo vectorial tomamos como referencia?

En primer lugar, tenemos que ver cómo vamos a medir los ángulos entre dos campos vectoriales tangentes. Sean, pues,  $V$  y  $W$  dos campos vectoriales diferenciables a lo largo de una curva regular<sup>5</sup> parametrizada  $\alpha : I \rightarrow S$ , con  $|V(t)| = |W(t)| = 1$ . Aquí cometemos un pequeño abuso de notación por simplicidad; en realidad, deberíamos poner  $V(\alpha(t))$  ya que es  $\alpha(t)$  el punto en la superficie. Queremos definir una función diferenciable  $\varphi : I \rightarrow S$  de forma que  $\varphi(t)$ ,  $t \in I$ , sea una determinación del ángulo de  $V(t)$  a  $W(t)$  en la orientación de  $S$ . Consideremos, a tal efecto, el campo vectorial diferenciable  $\vec{V}$  a lo largo de la curva  $\alpha$ , definido por la condición de que  $\{V(t), \vec{V}(t)\}$  sea una base ortonormal positiva para cada  $t \in I$ . De este modo,  $W(t)$  puede expresarse

$$W(t) = a(t)V(t) + b(t)\vec{V}(t)$$

donde  $a$  y  $b$  son funciones diferenciables en  $I$  y  $a^2 + b^2 = 1$ .

El siguiente lema establece que fijada una determinación  $\varphi_0$  del ángulo entre  $V(t_0)$  y  $W(t_0)$ , es posible *extenderla* diferencialmente a  $I$ , dando lugar a la función buscada.

**Lema 2.1.1.** *Sean  $a$  y  $b$  dos funciones diferenciables en  $I$  con  $a^2 + b^2 = 1$  y sea  $\varphi_0$  tal que  $a(t_0) = \cos \varphi_0$ ,  $b(t_0) = \sin \varphi_0$ . Entonces la función diferenciable*

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^t (ab' - ba') dt$$

*satisface  $\cos \varphi(t) = a(t)$ ,  $\sin \varphi(t) = b(t)$ ,  $t \in I$ , y  $\varphi(t_0) = \varphi_0$*

**Demostración.** Basta con demostrar que la función

$$(a - \cos \varphi)^2 + (b - \sin \varphi)^2 = 2 - 2(a \cos \varphi + b \sin \varphi)$$

es idénticamente cero, o que

$$A = a \cos \varphi + b \sin \varphi = 1$$

---

<sup>5</sup>Este razonamiento se puede hacer perfectamente para curvas regulares a trozos.

Utilizando el hecho de que  $aa' = -bb'$  junto con la definición de  $\varphi$ , inmediatamente obtenemos

$$\begin{aligned} A' &= -a(\sin \varphi)\varphi' + b(\cos \varphi)\varphi' + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi \\ &= -b'(\sin \varphi)(a^2 + b^2) - a'(\cos \varphi)(a^2 + b^2) + a' \cos \varphi + b' \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

Por tanto,  $A(t) = \text{const.}$  y como  $A(t_0) = 1$ , el lema queda demostrado.  $\square$

Una vez que hemos visto que podemos obtener una determinación diferenciable del ángulo entre dos campos vectoriales cualesquiera dando una determinación inicial entre éstos en un punto  $t_0$  estamos listos para poder definir el índice de un punto singular.

Sea  $V = V(t)$ ,  $t \in [0, l]$  la restricción del campo vectorial considerado anteriormente a la curva  $\alpha$  y sea  $\varphi = \varphi(t)$  alguna determinación diferenciable del ángulo entre el campo vectorial tangente  $X_u$  y  $V(t)$ , dada por el lema anterior. Como  $\alpha$  es cerrada, existe un número entero  $j$  definido por,

$$2\pi j = \varphi(l) - \varphi(0) = \int_0^l \frac{d\varphi}{dt} dt.$$

**Definición 2.1.9.** *Al entero  $j$ , al que denotamos por  $\text{Ind}[V, p]$ , de la construcción anterior se le denomina índice de un punto singular aislado a un campo de vectores tangente a una superficie regular.*

Por la construcción, tenemos que demostrar que este número no depende de las elecciones efectuadas, ni de la parametrización  $X$  ni de la curva  $\alpha$  escogida. Estas demostraciones se pueden encontrar en [4, páginas 281-282] donde es posible ver un razonamiento análogo que el realizado anteriormente en 2.1.1 (página 40).

Por otro lado, debe observarse que la definición de índice también es válida para los puntos  $p$  no singulares; aunque en esta ocasión sus índices son nulos por un argumento similar al dado para los campos de vectores planos.

Recordemos el proceso de definición del índice. Tomamos un campo vectorial  $V$  tangente a una superficie regular y orientable  $S$  con una singularidad en  $p$ . Sea  $(U, X)$  una parametrización que contiene este punto y  $\alpha$  una curva simple, cerrada, orientada y regular a trozos que encierra una región  $R$  alrededor de  $p$ .

Una vez realizada esta construcción, restringimos los campos  $V$  y  $X_u$  a esta curva  $\alpha$  denotándolos por  $V(t)$  y  $X_u(t)$ . En este lugar, tomamos una determinación del ángulo diferenciable  $\varphi$  entre  $V(t)$  y  $X_u(t)$  y definimos por,

$$\text{Ind}[V, p] := \frac{1}{2\pi}(\varphi(l) - \varphi(0))$$

Vamos a denotar por  $\angle(V, W)$  ( $= \varphi(t)$ ) el ángulo que forman dos campos vectoriales  $V$  y  $W$  en cualquier punto donde estén definidos ambos y por  $\delta_\alpha(\angle(V, W))$  a la variación  $(\varphi(l) - \varphi(0))$  donde, aquí,  $\varphi$  representa una determinación diferenciable del ángulo entre  $V$  y  $W$ .

De este modo es trivial que en cada punto de la curva  $\alpha$  se cumple para un campo vectorial  $W$  tangente a  $S$  cualquiera,

$$\angle(V, W) = \angle(X_u, V) - \angle(X_u, W)$$

Si calculamos entonces la variación completa alrededor de  $\alpha$  vemos entonces que en la parte derecha de la igualdad obtenemos la diferencia de los índices  $\text{Ind}[V, p] - \text{Ind}[W, p]$  lo que será igual a  $\frac{1}{2\pi}$  el cambio del ángulo  $\delta_\alpha(\angle(V, W))$ , es decir, que esta diferencia es independiente de la elección del campo referencial  $X_u$ .

A continuación presentaremos el teorema principal del trabajo en su versión para los campos de vectores tangentes.

**Teorema 2.1.1** (Th. Poincaré sobre campos de vectores tangentes). *Sea  $S$  una superficie regular compacta y orientable con  $V$  un campo de vectores tangente definido en  $S$ . Representaremos por  $\chi(S)$  la característica de Euler de  $S$  y por  $\lambda$  los puntos singulares de  $V$  donde  $\lambda = \{p_1, p_2, \dots, p_r\} \subset S$  finito. Sea, por último,  $\text{Ind}[V, p_i]$  el índice del punto singular  $p_i$  con  $i = 1, \dots, r$ . Con todo esto, se cumple:*

$$\sum_{i=1}^r \text{Ind}[V, p_i] = \chi(S) \quad (2.3)$$

*La suma de todos los índices  $\text{Ind}[V, p_i]$  es igual a la característica de Euler de la superficie.*

**Demostración.** La demostración está dividida en dos partes diferenciadas. En primer lugar veremos que para cualquier campo de vectores sobre la superficie  $S$ , la suma de los índices de sus puntos singulares toma siempre el mismo valor.

Sean pues dos campos de vectores tangentes  $V$  y  $W$  con puntos singulares  $\Lambda = \{p_1, \dots, p_r\}$  y  $\Lambda' = \{q_1, \dots, q_n\}$  e índices  $\text{Ind}[V, p_i]$  y  $\text{Ind}[W, q_l]$  donde los valores van  $i = 1, \dots, r$  y  $l = 1, \dots, n$  para  $\Lambda$  y  $\Lambda'$  respectivamente. La pregunta sería:

$$¿ \sum_{i=1}^r \text{Ind}[V, p_i] = \sum_{l=1}^n \text{Ind}[W, q_l] ?$$

Consideremos  $S$  y una triangulación diviendo  $S$  de tal manera que no haya ninguna singularidad  $p_i$  o  $q_l$  en los vértices o aristas de ésta. Además, vamos a realizarla de tal forma que en sus caras solamente haya un punto singular de  $V$  o de  $W$ , pero como mucho uno de éstos. Por el hecho de que  $\Lambda \cup \Lambda'$  sea finito, es fácil construir dicha triangulación. Además, al ser la superficie orientable, podemos darle una orientación a cada triángulo, lo que induce una orientación de recorrido para su frontera.

Tomemos un triángulo cualquiera de la triangulación que tenga un punto singular en su interior. Sea  $\tau$  la frontera del triángulo. Consideramos que el punto  $p$  es una singularidad de  $V$  sin pérdida de generalidad ya que podríamos aplicar el mismo razonamiento a los demás puntos singulares. Por la observación anterior, obtenemos que

$$\text{Ind}[V, p] - \text{Ind}[W, p] = \delta_\tau(\angle(V, W))^6$$

Ahora bien, como  $p$  no es un punto singular de  $W$  entonces la ecuación anterior quedaría como,

$$\text{Ind}[V, p] = \delta_\tau(\angle(V, W))$$

Mientras que para los puntos singulares  $q$  de  $W$  se cumplirá

$$-\text{Ind}[W, q] = \delta_\tau(\angle(V, W))$$

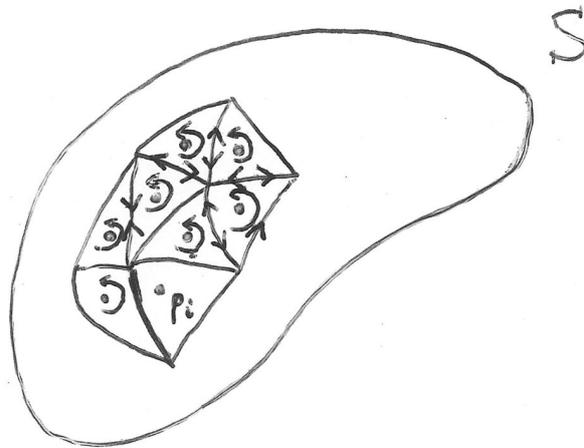
Haciendo la suma para todos los puntos singulares  $\Lambda \cup \Lambda'$  lo que obtenemos es,

$$\sum_{i=1}^r \text{Ind}[V, p_i] - \sum_{l=1}^n \text{Ind}[W, q_l] = \sum_{\tau} \delta_\tau(\angle(V, W))$$

Veamos cuánto vale la suma de la parte derecha de la igualdad. Como los triángulos están orientados según la orientación de la superficie, cada arista se recorre dos veces, pero en direcciones contrarias (aquí se puede observar la importancia de que la superficie sea orientable). De esta forma, como medimos las variaciones de los ángulos entre los campos  $V$  y  $W$  a lo largo de la curva, entonces, al recorrerlas en sentidos contrarios se anularán, dando así, la respuesta afirmativa a la pregunta del comienzo.

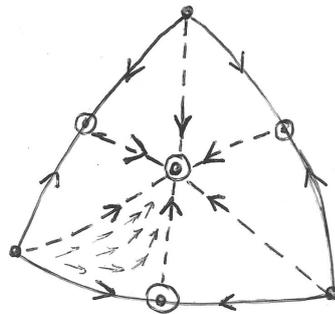
---

<sup>6</sup> descartamos la constante porque no afecta al razonamiento



En la segunda parte de la demostración, construiremos un campo de vectores especial que cumpla la igualdad del enunciado que por la primera parte, ésta se cumplirá para cualquier campo vectorial tangente.

En primer lugar vamos a considerar una triangulación de  $S$ . En cada triángulo de dicha triangulación, vamos a añadir cuatro vértices especiales; un vértice en cada arista y otro en el interior, conectando este último (con nuevas aristas) con los anteriores y con los tres vértices iniciales del triángulo.



⊙ Vértices añadidos.  
 --- aristas añadidas.  
 → Orientación.

Hemos conseguido dividir el triángulo en otros seis triángulos. A las aristas de cada uno de estos triángulos más pequeños le vamos a dar una orientación de recorrido. La dirección será la que apunta hacia el punto

interior desde los vértices exteriores. Es fácil ver que en cada uno de estos triángulos de la subdivisión podemos definir un campo de vectores continuo tangente interior, como se presenta en la figura anterior, el cual coincide con la orientación de la frontera. Uniendo todos estos campos, es trivial que obtenemos un campo continuo de vectores tangentes  $V$  definido en toda la superficie y con puntos singulares en todos los vértices  $p_r$ .

Por cómo se han definido los campos, el índice de los puntos que se encuentran en el interior de cada triángulo y de los vértices iniciales es  $+1$  porque son, respectivamente, sumideros y fuentes. Con respecto a los vértices de las aristas, la singularidad tiene índice  $-1$  debido a que forma el campo de vectores un punto de silla simple. Si utilizamos nuestra notación inicial,  $v$  el número de vértices de la triangulación,  $a$  el número de aristas y  $c$  el número de triángulos entonces obtendremos que para este campo vectorial tangente:

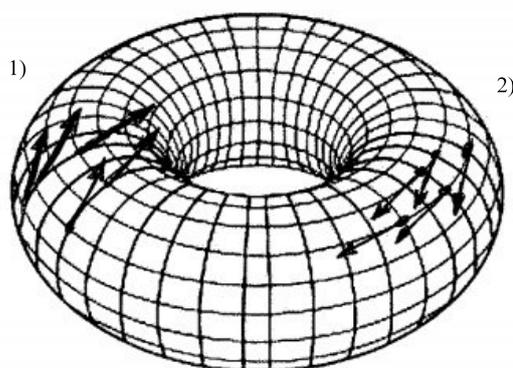
$$\sum_{r=1}^m \text{Ind}[V, p_r] = 1 \cdot v + 1 \cdot c - 1 \cdot a = c - a + v = \chi(S)$$

siendo  $\text{Ind}[V, p_r]$  el índice de cada uno de los puntos singulares. Esto concluye entonces la demostración del teorema.

□

Este teorema da un resultado que une términos muy distintos, en principio, como es la característica de Euler y los índices de puntos singulares de un campo vectorial tangente cualquiera. Además, da otra manera de calcular la característica que parece más sencilla. Otros resultados que se pueden deducir de este gran teorema los vamos a presentar a continuación. Daremos aplicaciones que no son tan teóricas y sirven de ejemplo para mostrar que las matemáticas sirven para describir lo que ocurre en la vida real.

Una de las preguntas que resuelve este gran teorema es, por ejemplo, descubrir en qué tipo de superficies compactas se pueden construir construir campos de vectores tangentes que no tengan singularidades. Si un campo no tiene singularidades, entonces la suma de los índices de éstos ha de ser 0, es decir, la característica de Euler ha de ser 0. Debido al teorema de clasificación de superficies compactas 1.2.3 (página 35) y a su posterior observación, la superficie ha de ser homeomorfa al toro.



En esta figura podemos ver dos tipos de campos de vectores, 1 y 2, diferentes los cuales no tienen ningún punto singular.

Otro corolario muy importante del teorema del índice de Poincaré que tiene aplicaciones, en general, muy útiles es el siguiente.

**Corolario 2.1.1.** *No existe ningún campo vectorial tangente continuo definido en toda la superficie de la esfera que no se anule en, al menos, un punto.*

**Demostración.** La demostración es una aplicación directa del teorema y de que  $\chi(S^2) = 2$ . Así, si  $V$  es un campo vectorial tangente en la esfera la  $\sum_{p \text{ sing.}} \text{Ind}[V, p] = 2$ , o lo que es lo mismo, ha de existir al menos un punto de la esfera que es un punto singular para el campo vectorial.

□

Este es uno de los resultados que más aplicaciones a la vida real posee ya que se puede escribir de otras formas equivalentes con una sintaxis menos matemática. Demostraremos los corolarios, que presentamos a continuación, conjuntamente en una demostración única.

**Corolario 2.1.2** (Teorema de la bola peluda). *Sea  $\mathcal{P}$  una pelota (una esfera) la cual posea un pelo en cada uno de sus puntos. Entonces, no es posible peinar la pelota de una forma continua y regular.*

Lo que este corolario nos dice, en palabras matemáticas, es que no se puede convertir ningún campo de vectores definido en toda la superficie de la esfera en un campo vectorial tangente continuo. Existe, al menos, un punto donde la pelota tiene un remolino (un punto singular).

**Corolario 2.1.3.** *En la superficie terrestre siempre hay, al menos, un punto donde no hace viento.*

Estos puntos son los ojos de las borrascas y de los anticiclones que conforman la atmósfera terrestre. Otros puntos donde no hace viento, son los ojos de los huracanes <sup>7</sup>.

**Demostración.** Las demostraciones de estos dos corolarios es simple modelizando ambas sentencias de acuerdo con lo estudiado en el teorema de Poincaré. En estos casos, los pelos de la pelota sería el campo vectorial, mientras que en el segundo, el viento produciría éste. Del corolario 2.1.1 se deducen directamente ambos resultados.

□

En último lugar, vamos a ver una consecuencia más geométrica juntando este teorema con otro gran teorema de la geometría diferencial como es el de Gauss-Bonnet en su versión global. Este teorema necesita de elementos no descritos en este trabajo, por lo que se presentará el enunciado casi exclusivamente. Para un mayor detalle, véase [7, páginas 241- en adelante].

**Teorema 2.1.2** (Gauss-Bonnet). *Sea  $S$  una superficie compacta regular y orientada. Entonces se cumple la siguiente igualdad donde la función  $K$  representa la asignación que a cada punto le asocia su curvatura de Gauss,*

$$\int_S K \, dA = 2\pi \cdot \chi(S) \quad (2.4)$$

**Nota 2.1.2.** Este teorema se puede formular para regiones contenidas en superficies regulares orientadas arbitrarias. Este teorema más general, da como consecuencia el teorema elemental de la trigonometría esférica como vimos en 1.1.4 (página 19).

A la integral de la parte izquierda de la igualdad 2.4 se le denomina la curvatura total de la superficie. Juntando, pues, ambos teoremas, vemos que se puede enunciar lo siguiente,

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $S$  una superficie regular compacta y  $V$  un campo de vectores tangente continuo. Sea  $\Lambda$  el conjunto de puntos singulares de  $V$  y  $K(p)$  la función curvatura. Entonces la curvatura total de la superficie es  $2\pi$  veces la suma de los índices de los puntos de  $\Lambda$ , o sea,*

$$\int_S K \, dA = 2\pi \cdot \sum_{p \in \Lambda} \text{Ind}[V, p] \quad (2.5)$$

donde  $\text{Ind}[V, p]$  representa el índice del punto singular  $p \in \Lambda$ .

---

<sup>7</sup>Dando sentido a la frase hecha: *Después de la tormenta, viene la calma.*

## 2.2. Campos de líneas y familias de curvas. Relación con los campos de vectores y $\chi(S)$ .

En este apartado del capítulo nos centraremos en el estudio de las familias de curvas en superficies y cómo podemos adaptar dichas familias a nuestro objetivo principal viendo su relación con lo anterior. Para ello necesitamos algunas definiciones que nos hagan unir lo que ya sabemos de los apartados precedentes con esta nueva teoría. En primer lugar definiremos lo que es un elemento de línea y un campo de líneas para posteriormente relacionarlos con los campos de vectores y hacer una nueva versión del Teorema de Poincaré. Después de este teorema daremos algunas aplicaciones importantes para ver su relevancia.

**Definición 2.2.1.** *Sea  $S$  una superficie regular y  $p \in S$ . Un elemento de línea  $L_p$  es un subespacio vectorial unidimensional del plano tangente  $T_pS$ .*

Un elemento de línea, según la definición anterior, será un subespacio generado por cualquier vector  $v$  no nulo del plano tangente a la superficie en el punto  $p$ . De esta forma, si consideramos un escalar  $\lambda \neq 0$  entonces, también el vector  $\lambda v$  ( $\neq 0$ ) genera el mismo elemento de línea.

**Ejemplos 2.2.1.** *Veamos dos ejemplos para aclarar la anterior definición.*

1. *Como hemos visto en el párrafo anterior, en general, para cada  $p \in S$  y  $0 \neq v \in T_pS$  entonces  $L_p := \text{span}\{v\}$  es un elemento de línea.*
2. *Daremos un ejemplo numérico. Sea ahora,  $S = \mathbb{S}^2$  y el punto  $p = (1, 0, 0)$ . Si consideramos el vector  $v_y = (0, 1, 0) \in T_pS \Rightarrow \text{span}\{v_y\}$  es un elemento de línea en el punto  $p \in \mathbb{S}^2$ . Por otro lado, si consideramos también  $v_z = (0, 0, 1) \in T_pS$  tendremos otro elemento de línea en el punto considerado.*

En definitiva, los elementos de línea en un punto  $p \in S$  son todas las posibles direcciones que se pueden escoger en el plano tangente  $T_pS$ .

**Nota 2.2.1.** Consideremos un campo de vectores  $V$  definido en todos los puntos de una región  $R \subset S$  y que no se anula. Para cada punto  $p \in R$ , se tiene que  $0 \neq V(p) \in T_pS$  por lo que obtendríamos un elemento de línea  $L_p(V)$  asociado a nuestro campo de vectores en cada punto  $p$ . Esto nos motiva la siguiente definición y además nos da una estrecha relación entre lo que estudiamos en el anterior apartado y esta nueva teoría de elementos de línea.

**Definición 2.2.2.** *Sea  $R \subset S$  una región de una superficie regular. Un campo (de elementos) de líneas es una asignación  $L$  tal que a cada punto  $p \in R$  le asocia un elemento de línea  $L(p) := L_p$ .*

Diremos que  $L$  es regular si existe una familia de curvas  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  tal que, en cada punto  $p \in R$ , el elemento de línea  $L_p$  es tangente a toda curva  $\alpha_i$  que pasa por dicho punto  $p$ .

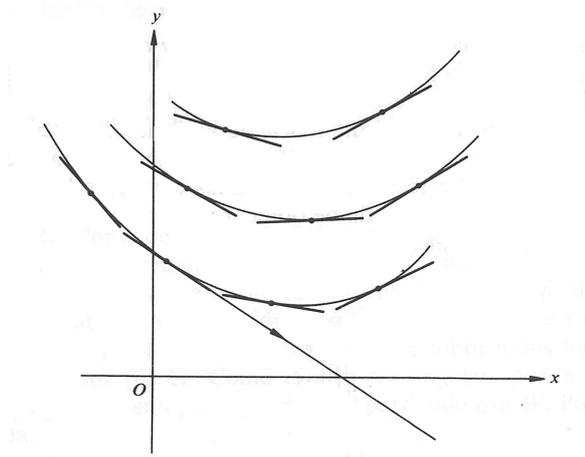


Imagen extraída de [4, página 184]

Como es visible la diferencia existente entre un campo de vectores tangente y un campo de líneas es que un campo de vectores es una asignación que a cada punto le asocia solo un vector tangente  $v$  mientras que un campo de líneas le asocia una dirección completa, o sea, el  $\text{span}\{v\} = \{\lambda v / \lambda \neq 0\}$ , siempre y cuando  $v \neq 0$ .

**Ejemplos 2.2.2.** Demos un ejemplo aclarativo de la definición anterior.

Sea  $S = \mathbb{R}^2$  y un punto  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  genérico<sup>8</sup>. Consideremos para cada punto  $p \in \mathbb{R}^2$  el elemento de línea

$$L_p = \text{span}\{(x, y)\}$$

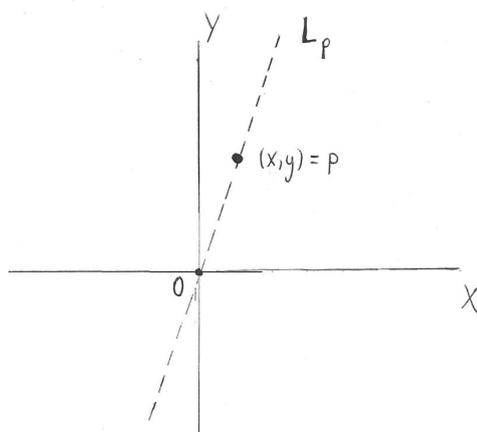
Según la definición, está definido en toda la superficie excepto para el punto  $p = (0, 0)$ . Si tomamos  $R = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  entonces, la asignación  $p \in R \xrightarrow{L} L_p$  es un campo de líneas regular.

La demostración de la afirmación anterior es simple tomando la familia de curvas radiales

$$\{\alpha_{(x,y)}(t)\}_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \text{ de la forma } \alpha_{(x,y)}(t) := t \cdot (x, y), \quad t > 0$$

Obtendremos que para cualquier punto  $p$ , todas las curvas  $\alpha_{(x,y)}(t)$  que pasan por él tienen como vector director un elemento de  $L_p$ .

<sup>8</sup>Nótese que en esta superficie se cumple que  $T_p S = \mathbb{R}^2 = S \quad \forall p \in S$ .



Una observación importante es la siguiente: dada una familia de curvas regulares  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  en una superficie, o sea,  $\alpha_i : J_i \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  regular, podremos construir un campo de líneas a partir de ésta de la siguiente manera.

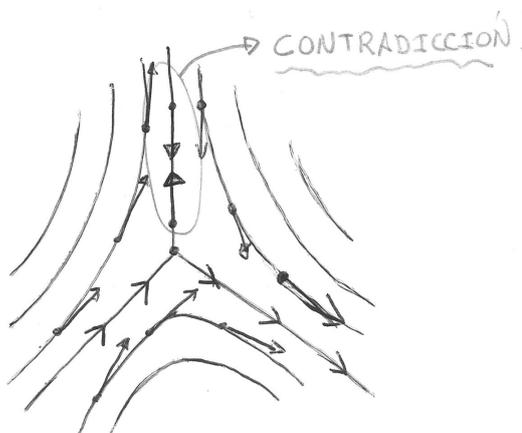
Sea  $p \in S$  y  $\alpha_i$  una curva que pasa por el punto  $p$ , es decir,

$\exists t_0 \in J_i / \alpha(t_0) = p$ , entonces se definirá como  $L(p) := L_p = \text{span}\{\alpha'(t_0)\}$ .

Esta observación, nos dará una manera muy sencilla de obtener campos de líneas a partir de familias de curvas definidas en la superficie.

Siguiendo con la nota 2.2.1, si ahora consideramos un campo de líneas regular  $L$ , ¿podremos obtener en general a partir de él un campo de vectores tangente diferenciable?

La respuesta es no generalmente. Para clarificarlo, fijémos nuestra atención en la siguiente figura.



En ésta, consideramos el campo de líneas asociado a la familia de curvas dibujada. Si comenzamos a darle una orientación a cada uno de los elementos de línea en cada punto, al final, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, este ejemplo muestra el hecho de que si tenemos un campo de líneas, no podemos obtener un campo vectorial.

Sin embargo, si el campo de líneas no tiene singularidades (véase más adelante la definición) entonces sí que se puede obtener (integrar) un campo de vectores a partir de éste, pero siempre localmente.

Nuestro interés ahora es ver qué es lo que ocurre en el punto especial del ejemplo 2.2.2 anterior  $p = (0, 0)$ . En este caso, la asignación  $L$  no está definida en éste pues es necesario que el elemento de línea esté generado por un vector no nulo. Por otro lado, nuestro campo de líneas no se puede extender por continuidad a este punto. Esto es debido a que si tomamos como definición  $L_p = \text{span}\{(1, 1)\}$  entonces, para puntos muy próximos al punto central, tenemos una gran variación en la dirección que hemos escogido con las direcciones de estos puntos por lo que la continuidad se rompe y no es posible su extensión.

Realizada esta nota tan importante estamos preparados para dar la siguiente definición:

**Definición 2.2.3.** *Si un campo de líneas regular  $L$  está definido en una región  $R \subset S$  excepto en un punto aislado  $q$  de la misma y no es posible extenderlo a dicho punto por continuidad, diremos que  $L$  tiene una singularidad en  $q$ . Manteniendo la nomenclatura, diremos que  $q$  es un punto singular de  $L$ .*

*Se dice que la singularidad es aislada si existe un entorno de  $q$  contenido en  $R$  tal que  $L$  no tiene más puntos singulares en este entorno.*

Con esta definición, en el ejemplo anterior tendremos un campo de líneas en  $\mathbb{R}^2$  que tiene un punto singular en el punto  $p = (0, 0)$ .

Obsérvese que si  $L_p(V) = \text{span}\{V(p)\}$  es un campo de líneas asociado al campo de vectores tangentes  $V$  a la superficie  $S$ , entonces, si  $p$  es un punto singular de  $V$ , es decir,  $V(p) = 0$ , también lo será del campo de líneas  $L_p(V)$ .

Ya sabemos que es lo que se entiende por punto singular de un campo de líneas. Al igual que hicimos para puntos singulares de campos de vectores, podemos definir el índice de este punto singular dentro del campo de línea que lo contiene.

Consideremos un campo de líneas en una región  $R \subset S$  de una superficie regular que tenga en el punto  $p \in R$  una singularidad aislada. Sea  $\alpha$  una

curva simple cerrada, regular a trozos y orientada contenida en  $R$  de tal forma que:

1.  $p$  es la única singularidad en el interior de la región que conforma  $\alpha$ .
2. No hay singularidades en la curva  $\alpha$ .

Una vez realizado esto, nuestro campo de líneas induce sobre  $\alpha$  un campo de líneas  $L(t)$ , al que denotaremos de la misma manera, o sea,  $L|_\alpha$ . Parametrizando la curva  $\alpha$  de la forma  $\alpha(t)$ , para  $0 \leq t \leq 1$  escogeremos uno de los dos sentidos posibles para el elemento de línea  $L_{\alpha(0)}$ .

Esta elección determina, por continuidad, un sentido para cada  $L_{\alpha(t)}$  en el punto  $\alpha(t)$  para cada  $t$ . Nosotros tenemos como objetivo, como en el campo de vectores, medir el cambio total del ángulo alrededor de la curva  $\alpha$ . Para realizar esto, tendremos que tener algo de referente para poder medir esta variación angular. Asumamos, por el momento, que  $\alpha$  es lo suficiente pequeño como para estar contenida en una región donde podemos fijar un sistema de coordenadas. Así, existe una carta  $(U, X)$  tal que  $\alpha(t) \in X(U)$  para cada  $t$ . Dentro de esta región, consideramos el campo de líneas asociado a la familia de curvas  $\alpha_v(u) = X(u, v)$  para  $v = \text{constante}$ .

Esta construcción determina una dirección en cada punto, al ser un campo de líneas, a la cual vamos a denotar por  $B$ . Además, este campo de líneas también tiene un sentido que se lo da el recorrido de la curva  $\alpha$ . Sea  $\angle_{\alpha(t)}[B, L]$  el ángulo entre  $B$  y  $L$  en el punto  $\alpha(t)$  de la curva; y sea  $\delta_\alpha \angle[B, L]$  el cambio total del ángulo alrededor de la curva  $\alpha$  en sentido antihorario, o sea,

$$\delta_\alpha \angle[B, L] = \angle_{\alpha(1)}[B, L] - \angle_{\alpha(0)}[B, L]$$

**Definición 2.2.4.** *Se define como índice de un punto singular  $p$  de un campo de líneas  $L$  como el valor  $Ind[L, p]$  que hace posible la igualdad:*

$$2\pi Ind[L, p] = \delta_\alpha \angle[B, L]$$

**Nota 2.2.2.** En esta ocasión, al considerar campos de líneas (solamente direcciones) es posible que este valor no sea un entero. Es posible, que el sentido de la dirección asociada a un punto  $\alpha(t_0)$  puede cambiar al determinarlos de forma continua alrededor de la curva  $\alpha$ . Entonces, se considera  $Ind[L, p] = \frac{n}{2}$ , donde  $n$  si que es un entero.

Para la definición hemos usado varios elementos, como el campo de referencia y la curva  $\alpha$  que necesitamos ver si son independientes del índice  $Ind[L, p]$  o hacen que este cambie si consideramos otros. En el siguiente teorema mostraremos la independencia de estos elementos con el índice; a la

misma vez, esto muestra que la restricción que hemos hecho para la curva  $\alpha$  no es necesaria.

**Teorema 2.2.1.** *El índice  $Ind[L, p]$  no depende de la elección del campo  $B$  ni de la curva  $\alpha$  escogidos.*

**Demostración.** Sea  $W$  otro campo de líneas orientado sin singularidades. En cada punto  $\alpha(t)$  tenemos, (como lo hacemos usualmente)

$$\angle_{\alpha(t)}(B, L) = \angle_{\alpha(t)}(B, W) + \angle_{\alpha(t)}(W, L)$$

Como  $B$  y  $W$  son campos de líneas sin singularidades, podemos encontrar siempre (localmente) dos campos de vectores  $\vec{V} \neq 0$  y  $\vec{B} \neq 0$  en todos los puntos. Es claro que,

$$\angle_{\alpha(t)}(B, W) = \angle_{\alpha(t)}(\vec{B}, \vec{W})$$

Al recorrer la curva completa  $\alpha$ , de la primera ecuación deducimos que

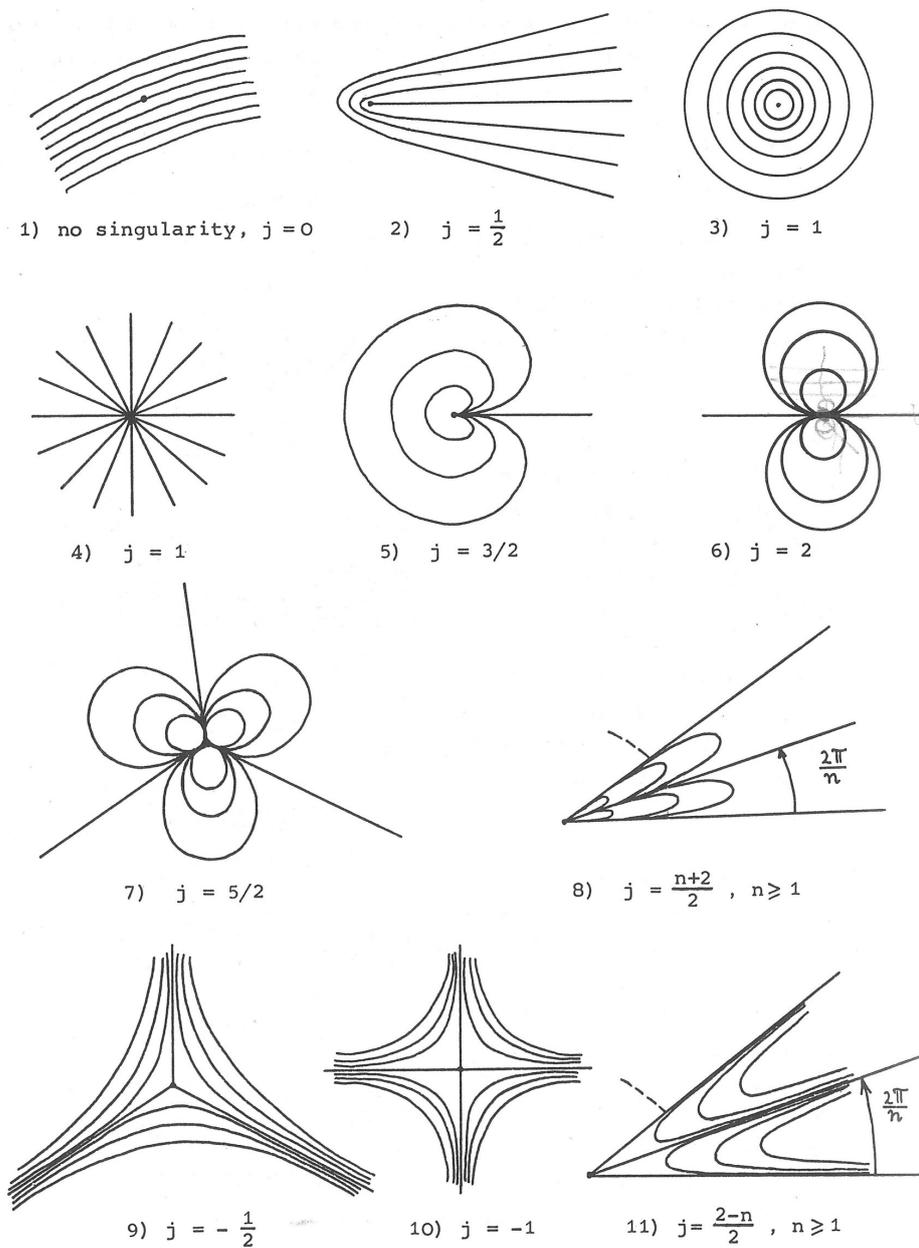
$$\delta_{\alpha}\angle(B, L) = \delta_{\alpha}\angle(B, W) + \delta_{\alpha}\angle(W, L)$$

Así, por la segunda ecuación,  $\delta_{\alpha}\angle(B, W) = \delta_{\alpha}\angle(\vec{B}, \vec{W})$  y por tanto es el cambio de dirección entre los campos vectoriales  $\vec{B}$  y  $\vec{W}$  sin singularidades. Al ser ambos campos diferenciables entonces este cambio es nulo obteniendo la independencia deseada de la primera ecuación.

Para ver la independencia con respecto de la curva  $\alpha$  se usa un razonamiento análogo al expuesto en la nota 2.1.1 (página 40).

□

En la siguiente ilustración, resaltaremos algunos ejemplos que muestran los índices de puntos singulares de campos de líneas asociados a familias de curvas en el plano.



*Imagen extraída de [5, página 109]*

*En esta figura, la letra  $j$  denota el índice de la singularidad en cada ejemplo.*

El objetivo que nos marcamos de aquí en adelante es el de mostrar el teorema del índice de Poincaré. Para esto necesitaremos de algunos resultados previos como el siguiente.

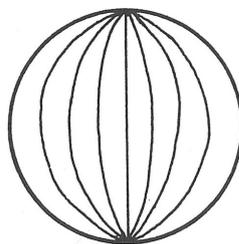
**Teorema 2.2.2.** *Dada una superficie regular  $S$  compacta y orientable de género  $g$ , existe un campo de líneas  $L$  definido en la superficie con un número finito de singularidades tal que la suma de los índices de estos puntos (representado por  $\sum \text{Ind}[L]$ ) cumple que:*

$$\sum \text{Ind}[L] = 2 - 2g$$

**Demostración.** Esbozaremos los campos de líneas destacados con esta propiedad. Separaremos los casos según el género de la superficie dando algunos ejemplos para cada uno.

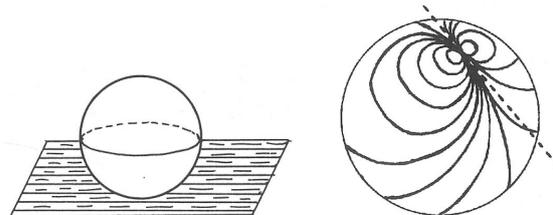
Hay que remarcar que por el teorema 1.2.3 siempre podemos encontrar un homeomorfismo entre la superficie del enunciado,  $S$ , y la esfera o la suma conexa de  $n$  toros. Además, los campos de líneas se conservan por homeomorfismos (es un concepto topológico) y por tanto, podemos restringirnos a los casos más sencillos como son  $\mathbb{S}^2$  y  $n\mathbb{T}^2$  (los  $n$ -Toros).

1. ■ Si  $g = 0$ , la esfera (u homeomorfos). Tomamos la familia de curvas formada por las circunferencias de radio máximo a través de los polos. De esta forma, el campo de línea asociado tiene dos singularidades del tipo 4 de la figura anterior, o sea, de índice  $+1$ . Así,  $\sum \text{Ind}[L] = 1 + 1 = 2 = 2 - 2 \cdot 0 = 2 - 2g$ .



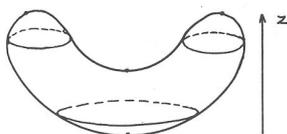
*Imagen extraída de [5, página 110]*

- Si  $g = 0$ . Si consideramos la proyección estereográfica desde el polo norte y en el plano la familia de curvas horizontales paralelas, al proyectarlas sobre la esfera obtenemos un campo de líneas cuyo único punto singular está en el polo norte y será uno de la forma 6. Así, como su índice es  $+2$  obtenemos lo que buscamos.



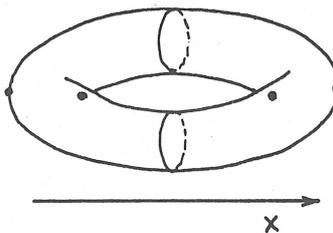
*Imágenes extraídas de [5, página 110] y [10, página 63]*

- Si  $g = 0$ . Tomando las líneas de nivel en el eje  $z$ . Existirán tres singularidades de la forma 3 con índice  $+1$  y una de la forma 10 con índice  $-1$  dándonos el resultado para esta superficie. Sin embargo, si consideramos la esfera, solamente tendremos dos singularidades del primer tipo con índice  $+1$ .



*Imagen extraída de [5, página 110]*

2.
  - Si  $g = 1$ . Tomando los círculos de revolución alrededor del toro vemos que es un campo de líneas que no tiene singularidades y por tanto  $\sum \text{Ind}[L] = 0 = 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2g$ .
  - Si  $g = 1$ . Tomando las curvas de nivel en el eje  $y$  hay dos singularidades con índice  $+1$  como en 3 y otras dos con índice  $-1$  como en 10.



*Imagen extraída de [5, página 110]*

3. Para un  $g$  arbitrario, sabemos que la superficie es una suma conexa de  $g$  toros (intuitivamente, tiene  $g$  agujeros). Tomando las curvas de nivel, también en el eje  $y$ , tenemos dos singularidades con índice  $+1$ , mientras que por cada uno de los toros (por cada uno de los agujeros) tenemos dos singularidades con índice  $-1$ . De este modo se cumple que, la suma de los índices de estos últimos es  $-2g$  y por tanto,  $\sum \text{Ind}[L] = 2 - 2g$ .

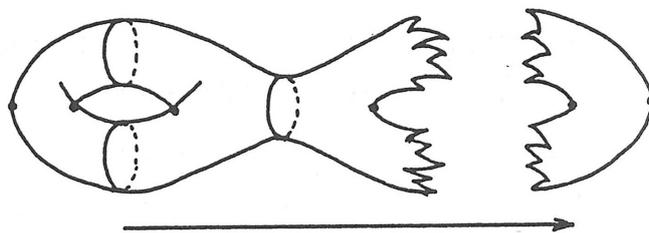


Imagen extraída de [5, página 111]

□

Este teorema nos muestra que para una superficie como la del enunciado siempre existirán campos de líneas que tengan como suma de sus índices la característica de Euler de la misma. Esto se debe a que hemos unido también el resultado 3 (página 36) para completarlo.

De este modo, solamente hay que ver, para mostrar el teorema del índice de Poincaré que para cualesquiera dos campo de líneas se cumple que la suma de sus índices es igual, lo que acabaría la demostración. Este teorema lo demostraremos mediante un resultado previo y que a partir de él podemos acabar la demostración.

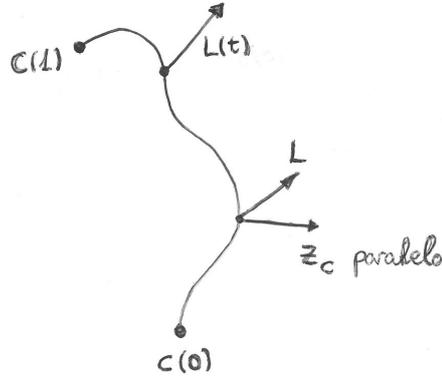
**Teorema 2.2.3.** *Sea  $S$  una superficie regular compacta y orientable de género  $g$ . Representamos por  $K$  la asignación que a cada punto de la superficie  $p \in S$  le asocia su curvatura de Gauss. Entonces, para cualquier campo de líneas  $L$  en la superficie que tenga como máximo un número finito  $\Lambda$  de singularidades cumple:*

$$\int_S K dA = 2\pi \sum_{p \in \Lambda} \text{Ind}[L, p]$$

donde  $\sum_{p \in \Lambda} \text{Ind}[L, p]$  representa la suma de los índices de las singularidades del campo de líneas.

**Demostración.** Para esta demostración necesitamos de algunas definiciones previas que consideramos conocidas por el lector. Para profundizar en el tema véase [7, apartado 5.1], [4, apartado 4.4] ó [5, Segunda sección, apartado 1.4].

Sea  $\alpha$  un segmento de curva parametrizado,  $\alpha(t)$  con  $t \in [0, 1]$  en la superficie  $S$  que no contiene singularidades. Por otro lado, sea  $Z_\alpha$  un campo de vectores *paralelo* a lo largo de la curva  $\alpha(t)$ , que siempre existe, y  $L_\alpha$  la restricción de nuestro campo de líneas a la curva.



Definimos por  $\Phi(\alpha) := \delta(\angle(Z_\alpha, L_\alpha))$ , es decir, el cambio de ángulo total al recorrer  $\alpha$  entre ambos campos de vectores<sup>9</sup>.

**Lema 2.2.1.**  $\Phi(\alpha)$  no depende del campo paralelo  $Z_\alpha$  escogido.

**Demostración.** Si  $\overline{Z}_\alpha$  otro campo paralelo, entonces (como es ya usual)

$$\angle(Z_\alpha, L_\alpha) = \angle(Z_\alpha, \overline{Z}_\alpha) + \angle(\overline{Z}_\alpha, L_\alpha)$$

Ahora bien, como los campos de vectores  $Z_\alpha$  y  $\overline{Z}_\alpha$  son paralelos, el ángulo entre ellos se mantiene constante a lo largo de la curva  $\alpha$ . Así, calculando la variación completa,

$$\begin{aligned} \delta_\alpha(\angle(Z_\alpha, L_\alpha)) &= \delta_\alpha(\angle(Z_\alpha, \overline{Z}_\alpha)) + \delta_\alpha(\angle(\overline{Z}_\alpha, L_\alpha)) \Rightarrow \\ \Phi_Z(\alpha) &= 0 + \delta_\alpha(\angle(\overline{Z}_\alpha, L_\alpha)) = \Phi_{\overline{Z}}(\alpha) \end{aligned}$$

□

Si denotamos ahora por  $-\alpha$  a la curva anterior recorrida en sentido contrario, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $Z_\alpha = Z_{-\alpha}$  puesto que el que  $Z$  sea paralelo no depende del sentido de la curva.
- $L_\alpha = L_{-\alpha}$ .
- Al cambiar el sentido de recorrido de la curva, se obtiene

$$\Phi(-\alpha) = -\Phi(\alpha)$$

<sup>9</sup>Recuerda que la curva no contiene puntos singulares y, por tanto, de  $L$  se puede obtener un campo de vectores al cual denotaremos de la misma manera.

Como ha sido habitual a lo largo de todo el trabajo, vamos a considerar en la superficie  $S$  una triangulación  $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_n\}$  de tal manera que no haya ninguna singularidad de  $L$  en las fronteras de los triángulos  $\tau_i$  y que cada uno contenga, a lo sumo, un punto singular de  $L$ . Por un resultado teórico de geometría, se sabe que cada uno de los triángulos de  $\tau$  puede ser cubierto por una carta geodésica  $(U_i, X_i)$  la cual cumple que para  $v = \text{constante}$  las curvas coordenadas,  $\alpha(u) := X(u, v)$  son geodésicas. Denotaremos por  $B$  al campo coordenado  $X_u$  para cada una de estas parametrizaciones.

Sea  $\tau_i$  un triángulo fijo y consideremos por  $\Gamma_i$  su frontera. Como se ha denominado anteriormente,  $\text{Ind}[L, p_i]$  designa al índice del punto  $p_i$  que está contenido en  $\tau_i$ . Por la propia definición,

$$2\pi \cdot \text{Ind}[L, p_i] = \delta_{\Gamma_i}(\angle[B, L]) \quad (2.6)$$

En geometría es bien sabido, que si  $Z_{\Gamma_i}$  es un campo paralelo sobre la curva  $\Gamma_i$  entonces,

$$\int_{\tau_i} K dA = \delta_{\Gamma_i}(\angle[B, Z])$$

Este hecho, también se puede reescribir, cambiándole el signo como,

$$- \int_{\tau_i} K dA = \delta_{\Gamma_i}(\angle[Z, B]) \quad (2.7)$$

Sumando las ecuaciones 2.6 y 2.7 vemos que se cumple la igualdad,

$$2\pi \cdot \text{Ind}[L, p_i] - \int_{\tau_i} K dA = \delta_{\Gamma_i}(\angle[Z, L])$$

Esto ocurre para cada punto singular, por lo que, juntando todas las ecuaciones para  $i = 1, \dots, n$  conseguimos la siguiente igualdad

$$2\pi \sum_i \text{Ind}[L, p_i] - \sum_i \int_{\tau_i} K dA = \sum_i \delta_{\Gamma_i}(\angle[Z, L])$$

donde en la igualdad, tenemos que la parte derecha es nula debido a la orientación de los triángulos  $\tau_i$  anulándose los cambios de ángulos si se recorren en sentidos opuestos (véase la demostración del teorema 2.1.1 (página 47)) las mismas aristas. Por lo tanto,

$$\int_S K dA = 2\pi \sum_{p \in \Lambda} \text{Ind}[L, p]$$

quedando el resultado probado. □

**Teorema 2.2.4** (de Poincaré, para campos de líneas). *Para cualquier campo de líneas  $L$  con, a lo sumo, una cantidad finita de singularidades  $\Lambda$ , definido sobre una superficie regular  $S$  compacta y orientable. Se cumple que*

$$\sum_{\Lambda} \text{Ind}[V, p] = 2 - 2g = \chi(S)$$

**Demostración.** La demostración ya está casi terminada ya que el teorema 2.2.2 (página 60) nos asegura la existencia de al menos un campo de líneas que cumple la ecuación del enunciado. Por el teorema 2.2.3 (página 62), tenemos que para cualquier campo  $L$  siempre se cumple la igualdad indicada lo que nos da la invarianza de tomar uno u otro campo de líneas. De este modo, ya hemos probado que todos los campos de líneas tienen la misma suma de índices de puntos singulares y que existe al menos uno que da  $\sum_{\Lambda} \text{Ind}[V, p] = \chi(s)$  lo que muestra el teorema.

□

**Teorema 2.2.5** (Curvatura integral). *Si  $S$  es una superficie compacta y orientable de género  $g$  entonces*

$$\int_S K dA = 2\pi(2 - 2g)$$

**Demostración.** La demostración es trivial usando los teoremas 2.2.2, 2.2.3 y 2.2.4.

□

### Consecuencias del teorema de Poincaré y Curvatura integral

Daremos una lista de breves consecuencias que se deducen directamente de estos dos importantes teoremas.

1. Si  $g = 0$ , entonces  $\int_S K dA = 2\pi \cdot 2$ . Cualquier campo definido en toda la superficie (o cualquier familia de curvas) tiene al menos una singularidad; y si este campo tiene a lo sumo un número finito de singularidades, una de ellas tiene que tener un índice positivo.
2. Si  $g = 1$ , entonces tenemos que  $\int_S K dA = 0$ . Este es el único caso en el cual es posible definir un campo de líneas (o una familia de curvas) que no tenga singularidades. Este ejemplo se presenta en la demostración del teorema 2.2.2.
3. Si  $g \geq 2$  ha de existir al menos una singularidad para cada campo de líneas definido en  $S$ . Si hay a lo sumo una cantidad finita de singularidades, al menos una de ellas tiene que tener un índice negativo pues  $\int_S K dA < 0$ .

Por último, vamos a relacionar este último apartado con la fórmula de Euler del primer tema. Como vimos, para calcular la característica de Euler de una superficie necesitábamos crear una triangulación para posteriormente aplicar la fórmula  $\chi(S) = c - a + v$ . En este caso, veremos que no es necesario considerar una triangulación si no que es suficiente con hacerlo para polígonos curvados cualesquiera.

**Teorema 2.2.6.** *Sea  $S$  una superficie regular compacta y orientable la cual contiene una familia  $\{P_i\}_{i=1}^n$  formada por polígonos curvados<sup>10</sup>. Si denotamos por  $v$ ,  $a$  y  $c$  al número de vértices, aristas y caras de esta familia, se cumple que:*

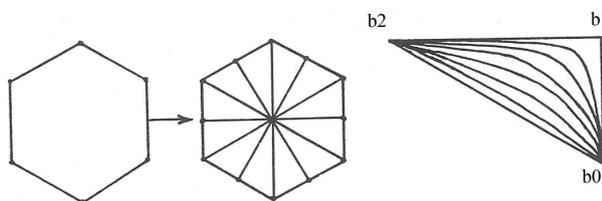
$$c - a + v = 2 - 2g$$

donde  $g$  es el género de la superficie. De aquí se deduce que  $\chi(S) = c - a + v$ .

**Demostración.** Vamos a construir un campo de líneas  $L$  donde sea obvio que  $\sum_p \text{Ind}[L, p] = c - a + v$ . Esto probará el resultado junto con el teorema 2.2.4 (página 65).

Sea  $P_i$  un polígono curvado de la familia y consideramos un punto en el interior de éste. Unimos, mediante nuevas aristas, este punto con los vértices de  $P_i$  y con otros vértices que añadimos en cada una de las aristas de éste. Hemos dividido así nuestro polígono en regiones triangulares interiores.

Sea como en la ilustración,  $b_0, b_1$  y  $b_2$  un triángulo de los que hemos construido. Podemos entonces construir en cada uno de éstos una familia de curvas regulares en el interior y a partir de éstas un campo de líneas. Juntando cada uno de los campos de líneas que hemos realizado obtenemos que este campo tiene puntos singulares en todos los vértices considerados.



*Imagen extraída de [5, página 114]*

<sup>10</sup>Han de cumplir las condiciones que se imponen a los triángulos para que conformen una triangulación.

En los vértices que había al principio y en los vértices interiores, las singularidades son del tipo 4 (véase figura 2.2 (página 58)) con índice  $+1$  mientras que en los vértices introducidos en las aristas son del tipo 10 con índice  $-1$ . De este modo, la suma de los índices de este campo de líneas es  $\sum_p \text{Ind}[L, p] = 1 \cdot c - 1 \cdot a + 1 \cdot v = c - a + v$  terminando así la demostración.

□



## Capítulo 3

# Aplicaciones geográficas del Teorema del Índice de Poincaré

Toda esta teoría, realizada por tantos ilustres matemáticos, en su origen fue creada para hacer un estudio más específico sobre las ecuaciones diferenciales. Poincaré, en su comienzo, estudió diferentes ecuaciones especiales que le llevaron a profundizar dentro de este tema, no solo desde el punto de vista del análisis matemático sino, topológico y geométrico. Todo lo presentado con anterioridad tiene diferentes aplicaciones a la vida cotidiana como ya hemos podido observar con los teoremas 2.1.2 y 2.1.3 (página 51) donde hemos visto una aplicación directa de este teorema a unas situaciones peculiares.

En este apartado veremos otra aplicación más de este teorema en regiones de nuestro ámbito natural. Damos un resultado relacionado con la geografía de islas y sobre qué ha de ocurrir con el número de picos, sumideros y collados sobre esta región. Mostramos, después de obtener la teoría necesaria, algunos ejemplos reales de este hecho.

En esta primera sección del apartado, consideramos una región  $R$  del plano, con coordenadas  $(x, y)$ , delimitada exteriormente por una curva cerrada y simple  $\alpha_0$  (que recorreremos en dirección contraria al sentido de las agujas del reloj) y en su interior por curvas  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  (en dirección horaria). Así tendremos un mapa básico de lo que es una isla donde hemos considerado que dentro de ella tenemos  $r$  lagos. Definimos, en la isla  $R$ , la función altura  $h(x, y)$  que a cada punto de la región le asocia su altitud. Asumiremos que la isla tiene cambios en su altura, entre puntos próximos, suaves, o sea, que podemos suponer que  $h$  es una función continua y que además tiene primeras derivadas parciales continuas<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Esta suposición no es demasiado restrictiva ya que casi todas las regiones terrestres lo cumplen.

Para cada punto  $p = (x, y) \in R$  vamos a definir el vector

$$V(x, y) = - \left( \frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \right)$$

que es el llamado vector gradiente de la función  $h$  en el punto  $p$ . Este vector gradiente marca la dirección en la que la función cambia de valor más rápidamente. De este modo, como las funciones que estamos considerando como coordenadas de  $V$  son continuas, por la suposición anterior, tenemos un campo de vectores continuo definido en toda la isla. Está claro que este campo vectorial tiene puntos críticos o singularidades en los que su valor es 0. Estos puntos pueden ser de tres tipos como refleja la siguiente lista,

1. En primer lugar, tiene puntos de tipo fuente, véase 2.2 (página 58), cuyo índice es  $+1$  y son aquellos que representan un máximo en la altura de la isla. Estos puntos, geográficamente son denominados **picos**.
2. Por otro lado, tendremos puntos que serán de tipo sumidero que son aquellos puntos en los que la función altura  $h$  toma valores mínimos. Geográficamente a éstos se les llama **sumideros** y coincidirán con los lagos que hay en la región. Este punto también tendrá índice  $+1$ .
3. Por último, siempre entre dos picos de montaña hay un pequeño valle en el cual se forma el tipo más especial de punto singular. En este caso se forman puntos de silla y marcan mínimos relativos en la función altura. Su índice es  $-1$  y los denominaremos **collados**.

**Nota.** Imagínese que nos encontramos en esta isla imaginaria y considérese una gota de agua. Las gotas de agua, si las dejamos libres sobre la superficie, siguen siempre la dirección que le marca el campo gradiente  $V$  anterior. De este modo, los picos, se pueden considerar como puntos *fuentes*, en sentido literal, ya que de aquí emanan las gotas de agua. Por otro lado, las gotas de agua llegan, después de un tiempo y desconsiderando el rozamiento, a los puntos llamados *sumidero* dándole así sentido a las denominaciones que hemos considerado la lista anterior.

Tenemos en nuestra mente una superficie regular en la cual hemos incluido un campo de vectores con un número finito de singularidades. Todo esto nos lleva a intuir que podemos aplicar el teorema del índice para ver qué es lo que tiene que pasar en esta situación. Como nos dice el teorema,  $\sum_{p \text{ sing.}} \text{Ind}[V, p] = \chi(R)$ . Debemos calcular primeramente la características de Euler de la región para poder ver qué resultado nos tiene que dar la suma que aparece a la izquierda.

Como vimos en el segundo tema, en la nota 1.2 (página 33), se muestra que para una región del plano que tiene 1 agujero (lago), su característica es 0, mientras que si tiene 2 agujeros en su interior, su característica de Euler es igual a  $-1$ . Al no depender la característica de Euler de la región de la triangulación escogida, y mediante un proceso inductivo usual, podremos deducir que para una región con  $r$  puntos singulares, su característica de Euler vale  $1 - r$ .

De esta manera podremos dar ya un corolario del teorema del índice que tiene connotaciones geográficas como bien indica el título de esta sección.

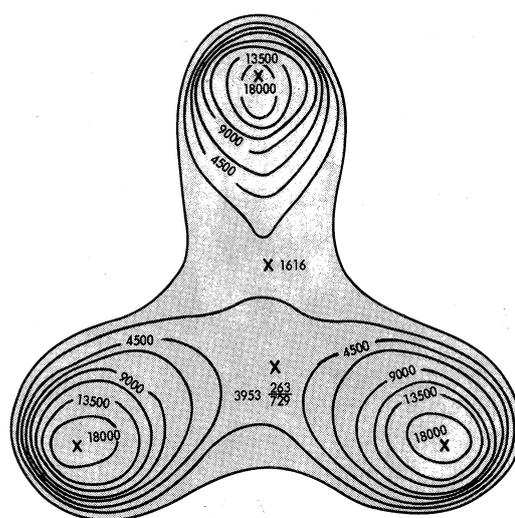
**Teorema 3.0.7.** *La suma de los picos y de sumideros menos el número de collados que tiene una isla con  $r$  lagos en su interior ha de cumplir la siguiente relación:*

$$\text{picos} - \text{collados} + \text{sumideros} = 1 - r$$

**Demostración.** Es una demostración básica y trivial gracias a la aplicación directa del teorema 2.1.1 (página 47). Tomando el campo vectorial gradiente de la función  $h$  tenemos que sus puntos singulares son, exactamente, los picos, sumideros y collados y además con índices  $+1$  para los dos primeros y  $-1$  para el último. De esta forma, la suma de los índices es la parte izquierda de la igualdad mientras que la derecha es la característica de Euler de nuestra región considerada.

□

Sabiendo ya la teoría, veamos a continuación un ejemplo donde aplicamos completamente lo redactado anteriormente. Damos un ejemplo (idílico) en el cual aparecerá una isla imaginaria sin ningún lago.



*Imagen extraída de [2, página 139]*

En esta isla se pueden observar tres picos y dos collados. Como en la isla no hay lagos, entonces, la suma del teorema queda como,

$$3 \text{ picos} - 2 \text{ collados} + 0 \text{ sumideros} = 1 = 1 - r$$

En la superficie de la isla, vamos ahora a representar las líneas de altura (como en la imagen anterior) que son aquellas que tienen  $h(x, y) = cte$ ; en particular, la línea costera de la isla es una curva de altura,  $h(x, y) = 0$ . Entonces, en la superficie hemos realizado una familia de curvas. Esto nos llevará a aplicar el segundo de los apartados del tema anterior, es decir, considerar, en puesto de campos vectoriales, campos de líneas. En esta ocasión, el campo de líneas que obtenemos de la familia de curvas, como es bien sabido y conocido, es un campo ortogonal al campo vectorial gradiente anterior en el sentido de que en cada punto, ambas direcciones son ortogonales.

Con respecto a los puntos singulares de este nuevo campo de líneas podemos decir que son los mismos que en el caso del campo gradiente. Los picos y sumideros son puntos *vórtice* (véase 2.2 58) cuyos índices siguen siendo +1 mientras que los collados siguen teniendo la misma denominación e índice como punto singular de este campo. De este modo, se puede llegar también al mismo resultado visto arriba pero aplicando la teoría de campos de líneas y el teorema del índice en su versión 2.2.4 (página 65).

En suma, podemos considerar ambas teorías estudiadas en el capítulo dos para llegar al mismo resultado. No importa, como vimos, el campo considerado sino que lo único importante es la característica de la superficie en la que hacemos los cálculos.

# Bibliografía

- [1] AHLFORS, L.V. y SARIO, L. *Riemann Surfaces*. Princeton Mathematical Series, No. 26. Princeton, N.J.: Princeton University Press., 1960.
- [2] BLACKETT, Donald W. *Elementary topology*. Londres: Academic Press Inc., 1982. ISBN: 0-12-103060-1
- [3] CASCALES, Bernardo ... [et al.]. *El libro de LaTeX*. [reimp.]. Madrid: Pearson, D. L. 2011. ISBN: 978-84-205-3779-5
- [4] DO CARMO, Manfredo P. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. [reimp. 1995]. Madrid: Alianza Universidad Textos, 1995. ISBN: 84-206-8135-0
- [5] DOLD, A., ECKMANN, B. *Differential Geometry in the Large*. Segunda edición. Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. ISBN: 3-540-51497-X
- [6] FIRBY, P.A. y GARDINER C.F. *Surface topology*. Segunda edición. Gran Bretaña: Ellis Horwood Limited, 1991. ISBN: 0-13-855321-1
- [7] HERNÁNDEZ CIFRE, María de los Ángeles; PASTOR GONZÁLEZ, José Antonio. *Un curso de Geometría Diferencial*. Madrid: , 2010. ISBN: 978-84-00-09154-5
- [8] MASSEY, W.S. *Algebraic topology: an introduction*. Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [9] MUNKRES, J.R. *Topology: a first course*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall Inc., 1975. ISBN: 0-13-925495-1
- [10] PRASOLOV, V.V. *Intuitive topology*. Estados Unidos: American Mathematical Society, 1995. ISBN: 0-8218-0356-5

# Índice alfabético

- Índice singularidad
  - campo de líneas, 57
  - en el plano, 40
  - en superficie, 46
- Campo de líneas, 53
- Campo vectores
  - en el plano, 38
  - en superficie, 44
- Carac. Euler
  - poliedros, 14
  - región, 33
- Collados, 70
- Curva
  - regular, 31
  - regular a trozos, 31
- Elemento de línea, 53
- Picos, 70
- Polígono
  - plano, 10
  - plano regular, 11
  - superficie, 32
- Poliedro, 12
  - regular, 12
- Poligonal, 31
- Región, 32
- Sólidos platónicos, 25
- Singularidad
  - campo de líneas, 56
  - en el plano, 39
  - en superficie, 44
- Sumideros, 70
- Superficie
  - compacta, 30
  - regular, 28
- Teorema
  - clasificación superf. compactas, 35
  - de Euler, 16
  - de Gauss-Bonnet, 52
  - de la bola peluda, 51
  - de Poincaré
    - campos de líneas, 65
    - campos de vectores, 47
- Triangulación, 32