



UNIVERSIDAD DE MURCIA

Grado de Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

APLICACIONES DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO: FRACTALES

Álvaro Hernández Vicente

Curso 2012-2013



APLICACIONES DEL TEOREMA DEL PUNTO FIJO:  
FRACTALES

Álvaro Hernández Vicente

dirigida por

Bernardo Cascales Salinas y Antonio José Pallarés Ruiz



# Notación y terminología

La notación específica que hemos utilizado en este texto ha sido la siguiente:

- $(X, d)$  espacio métrico (completo) con una distancia  $d(\cdot, \cdot)$
- $(\mathbb{R}^n, d)$  espacio de los reales  $n$ -dimensionales con la distancia euclídea
- $\text{diam}(A)$  diámetro del conjunto  $A$
- $\mathcal{H}^s(A)$  medida  $s$ -dimensional de Hausdorff del conjunto  $A$
- $\text{dim}_{\text{H}}(A)$  dimensión de Hausdorff del conjunto  $A$
- $\mathcal{K}(X)$  espacio cuyos elementos son los conjuntos compactos no vacíos del espacio  $X$
- $h(\cdot, \cdot)$  distancia de Hausdorff entre dos conjuntos
- $S + \varepsilon$  conjunto de los  $y \in X$  tales que  $d(x, y) \leq \varepsilon$  para algún  $x \in S$
- $\mathcal{S}$  conjunto de contracciones  $\{f_1, \dots, f_m\}$
- $\{X; \mathcal{S}\}$  sistema de funciones iteradas donde  $(X, d)$  es un sistema métrico completo
- $\mathcal{S}_n$  conjunto de todas las posibles combinaciones de la forma  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$  donde  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$
- $\mathcal{S}^*$  conjunto de todas las posibles combinaciones de funciones de  $\mathcal{S}$
- $\text{fix}(f)$  punto fijo de la función  $f$
- $A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  conjunto de enteros  $N$  tales que si  $f \in \mathcal{S}_N$  entonces  $f$  tiene constante de contractividad menor o igual que  $\varepsilon$



# Abstract

**T**HIS dissertation deals with the notion of fractal and how to obtain them. So the first question that we must answer is: what is a fractal? Unfortunately there is no commonly accepted answer to this question. To understand what fractals are we will go over the history of how they emerged and the reasons why we study them, that is, their characteristics or properties.

**I**N chapter one we review the historical context that led Mandelbrot to use the term fractal. Perhaps the first important event was the presentation by Weierstrass showing a real-valued function on the real line which was continuous everywhere but differentiable nowhere. A lot of curves and functions with this property followed and they were considered “pathological” cases and called “monsters” in the literature. Two common properties of them are:

- (1) they were constructed iteratively from curves, with a certain length (one dimension), but in the limit they have infinite length or they filled the space (two dimensions) and
- (2) they were self-similar, i.e. parts of the curve looks like the entire curve.

This led to new concepts of dimension (some of them would be called fractal dimensions). Years later, Benoît Mandelbrot studied these sets and functions again (calling them fractals, from Latin “frāctus” that means “broken” or “fractured”), and he connected them with physics, medicine, biology and economy. Fractal geometry became a natural way to describe the real world. Nowadays, we understand fractal (see [Fal]) as set with some of these properties:

- it is too irregular to be described in term of euclidean geometry,
- it has an structure, someways, self-similar (exactly or approximately),
- it has non-entire dimension,
- or it is constructed iteratively.

**I**N chapter two we introduce the idea of fractal dimension. Although there are several different important definitions of dimension, like Minkowski-Bouligand or box-counting dimension (see [Bar] or [Fal]), we focus on two of them: topological dimension and Hausdorff-Besicovitch

dimension (known as Hausdorff dimension). Intuitively, topological dimension is the expected concept: a curve has dimension one, a surface has dimensions two, etc.; even though its formalization was not easy. Due to its importance (Mandelbrot used it) we will present the Lebesgue definition for topological dimension. In the second part of this chapter we introduce the Hausdorff dimension (even if it is difficult to calculate than others) which is based on a measure (see [WhZyg]).

**Definition.** *The  $s$ -dimensional Hausdorff measure of a set  $A$  is defined as*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (\text{diam}(A_i))^s : \{A_i\} \text{ is a } \delta\text{-cover of } A \right\}$$

It could be shown that  $\mathcal{H}^s$  is a metric outer measure and that for a set  $A$  there is a critical value  $s$  at which  $\mathcal{H}^s(A)$  “jumps” from  $\infty$  to 0. This value is called Hausdorff dimension of  $A$  and written  $\dim_{\text{H}}(A)$ .

**Definition.** *The Hausdorff dimension of  $A$  it is defined as*

$$\dim_{\text{H}}(A) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\} = \inf\{r : \mathcal{H}^r(A) = 0\}.$$

In the rest of the chapter we offer the proofs for some results and properties dimension (taken from [Fal]), which will be useful later.

**I**N chapter three we formalize a specific type of fractal: the limits of certain iterative process. With this goal we divide the chapter in four sections. In the first section (based on chapter two of [Bar]) we introduce a metric space  $(\mathcal{K}(X), h)$  where  $\mathcal{K}(X)$  represent the not empty compact sets of a metric space  $(X, d)$  and  $h(\cdot, \cdot)$  is a metric (called Hausdorff metric).

**Definition.** *Let  $(X, d)$  a complete metric space and let  $A, B \in \mathcal{K}(X)$  compacts of  $X$ . We define Hausdorff metric between  $A$  and  $B$  as*

$$h(A, B) = \sup\{d(A, B), d(B, A)\} = \sup\{\sup\{d(x, B) : x \in A\}, \sup\{d(A, y) : y \in B\}\}$$

We will show that if  $(X, d)$  is a complete metric space so  $(\mathcal{K}(X), h)$  is. In the second section we will remember the definition of contractive function in a space  $X$  and we will see how it is extended to  $\mathcal{K}(X)$ .

**Proposition.** *Let  $f : X \rightarrow X$  a contractive application in a metric space  $(X, d)$ , that is, there is a constant  $0 < c < 1$  such that*

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad \text{for all } x, y \in X.$$

Then, the function  $f : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$  defined as

$$f(B) := \{f(x) : x \in B\}, \quad \text{for all } B \in \mathcal{K}(X)$$

is a contractive application in  $(\mathcal{K}(X), h)$ .

The fractals we study are defined by a family of contractive applications, denominated iterated function system (or IFS).

**Definition.** An iterated function system or IFS is a set of contractive applications  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_m\}$ ,  $f_i : X \rightarrow X$ , in a complete metric space  $(X, d)$ . It is denoted  $\{X; \mathcal{S}\}$ .

Because of that, we will demonstrate application

$$F(B) := \bigcup_{i=1}^m f_i(B)$$

for all  $B \in \mathcal{K}(X)$  is a contractive application (see chapter three of [Bar]). In section three, we apply Banach fixed-point theorem when the space is  $(\mathcal{K}(X), h)$  and the application is  $F$ .

**Theorem** (Banach fixed-point theorem). Let  $(X, d)$  a complete metric space and let  $f : X \rightarrow X$  a contractive application with contraction constant  $c$ . Then, the equation  $f(x) = x$  have a unique solution  $\bar{x} \in X$ , that is, a unique fixed-point.

This solution is the limit of succession

$$\bar{x} = \lim_n f^n(x_0)$$

for arbitrary  $x_0$  and where  $f^n(x_0) = f \circ f^{n-1}(x_0)$ . Moreover, error en each step is bounded by

$$e_n = d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$$

**Theorem** (Banach fixed-point theorem (case IFS)). Let an IFS  $\{X; f_n, n = 1, 2, \dots, m\}$  there is a unique set  $A \in \mathcal{K}(X)$  for which  $F(A) = \bigcup_{i=1}^m f_i(A) = A$ . This set  $A$  is also called the attractor of the IFS.

Moreover, this set is given by

$$A = \lim_n F^n(A_0)$$

for any initial set  $A_0 \in \mathcal{K}(X)$ .

This theorem allows us to conclude that fractals generated by IFS are the fixed point of certain contractive applications in the space  $(\mathcal{K}(X), h)$ . In the last section, following the book [Fal], we

will prove the Hausdorff dimension for these kind of one of those fractals in  $\mathbb{R}^n$  is equal to  $s$ , where  $s$  obeys

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^s = 1$$

and  $\lambda_i$  are the constants of  $f_i$  such that

$$d(f_i(x), f_i(y)) = \lambda_i d(x, y) \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

For the above we will need some results and previous conditions like the open set condition or the mass distribution principle.

**I**N chapter four, once finished the formalization of IFS we study two alternatives to draw fractals: L-systems and an approximation points algorithm.

Although L-systems were born to describe the growth of certain plants, they can be used to generate fractals. This approach do not require deep programming knowledge and thanks to the packages Tikz and PGF of L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X it can be easily done. Actually, the pictures for all fractals in chapters 1-3 have been produced by this way.

The approximation points algorithm, although, will allow us to have control on the errors. To use this method we only have to know what transformations define the IFS and the acceptable error. The algorithm is based on the next proposition (taken from [EdA]).

**Proposition.** *Let two reals  $0 < \delta < 1$  and  $0 < \varepsilon < 1$ . Let  $N \in A(\mathcal{S}, \delta)$  and we consider the set  $\mathcal{S}_N = \{h_1, h_2, \dots, h_u\}$ . We denote for  $x_i \in X$  the fixed point of the contractive application  $h_i$  for each  $i = 1, \dots, u$ , and let  $B_1$  the set of those points  $x_i$ .*

*If we take  $M \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  and we define the set  $B$  as*

$$B = \{g(x) : g \in \mathcal{S}_M, x \in B_1\}$$

*then, if  $A$  is the attractor of  $\mathcal{S}$ , we have*

$$h(A, B) \leq \varepsilon \delta \text{diam}(A).$$

---

**Algorithm** Approximation points algorithm

---

**Input:** Set of contractive applications  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_m\}$  with contractive constants  $\{c_1, \dots, c_m\}$  and precision according  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $\text{diam}(A)$  (we estimate).

**Output:** A finite set of points  $B$  such that  $h(A, B) \leq \text{precision}$ , where  $A$  is the fractal defined by  $\mathcal{S}$ .

- 1: From  $\delta$  we calculate  $N \in A(\mathcal{S}, \delta)$  (Lemma 4.2.1).
  - 2: From transformations  $\mathcal{S}_N = \{h_1, \dots, h_u\}$  and its fixed-points  $x_i$ .
  - 3: From  $\varepsilon$  (like  $\delta$ ) we calculate  $M \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  and the transformations  $\mathcal{S}_M$ .
  - 4: Set  $B$  is obtained applying the functions from  $\mathcal{S}_M$  to the points  $x_i$ .
- 

**F**INALLY, we include three appendices. In the first two we collect the main results and definitions about metric spaces and measure theory (that we have seen in some previous subjects in the Mathematics Degree) that we use in chapters two and three. And in the last appendix we attach the Java code that we have prepared of the approximation points algorithm from chapter four.



# Resumen

**E**STE trabajo, como indica su título, trata sobre fractales y cómo se obtienen. Así, la primera pregunta que debemos responder es: ¿qué es un fractal? Lamentablemente no hay una respuesta comúnmente aceptada a esta. Para entender qué son los fractales repasaremos un poco la historia de cómo surgieron y las razones de por qué los estudiamos, esto es, sus características o propiedades.

**E**N el capítulo uno repasamos el contexto histórico que llevó a Mandelbrot a utilizar el término fractal. Quizás el primer hecho importante fue la presentación por parte de Weierstrass de una función real continua que no era diferenciable en ningún punto. Muchas otras funciones y curvas de este estilo le siguieron, siendo catalogadas como “patológicas” y llamadas “monstruos” en la literatura. Dos propiedades comunes entre ellas son:

- (1) están construidas de manera iterada a partir de curvas, con determinada longitud (dimensión 1), pero que en el límite tenían longitud infinita o rellenaban el plano (dimensión 2) y
- (2) son autosimilares, es decir, las partes de la curva se parecen a la curva entera.

Esto llevó a definir nuevos conceptos de dimensiones (algunas serían denominadas dimensiones fractales). Años más tarde, Benoît Mandelbrot estudia estos conjuntos y funciones de nuevo (llamándolos fractales, del latín “fr̄actus” que significa “roto” o “fracturado”), y consigue conectarlos con la física, la medicina, la biología o la economía. La geometría fractal se convierte en la manera natural de describir el mundo real. Hoy día se considera fractal (ver [Fal]) a los conjuntos que cumplen algunas de las propiedades siguientes:

- es demasiado irregular para ser descrito en términos de la geometría euclídea,
- tiene una estructura, de algún modo, autosimilar (exacta o aproximadamente),
- tiene dimensión no entera,
- or se construye de manera iterada.

**E**N el capítulo dos introducimos la noción de dimensión fractal. Aunque existen varias definiciones importantes, como la de Minkowski-Bouligand o la de recuento de cajas (ver [Bar])

o [Fal]), nos centraremos en dos de ellas: la dimensión topológica y la dimensión de Hausdorff-Besicovitch (conocida simplemente como dimensión de Hausdorff). Intuitivamente, la dimensión topológica es la que estamos acostumbrados a manejar: una curva tiene dimensión uno, una superficie dimensión dos, etc; aunque su formalización no fue fácil. Debido a su importancia (es la que usa Mandelbrot) veremos la definición de Lebesgue de dimensión topológica. En la segunda parte de este capítulo introducimos la dimensión de Hausdorff (aunque sea más difícil de calcular que otras) que está basada en una medida (véase [WhZyg]).

**Definición.** *La medida  $s$ -dimensional de Hausdorff de un conjunto  $A$  se define como*

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (\text{diam}(A_i))^s : \{A_i\} \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento de } A \right\}$$

Se puede demostrar que  $\mathcal{H}^s$  es una medida exterior métrica y que para cada conjunto  $A$  hay un valor crítico  $s$  para el cual  $\mathcal{H}^s(A)$  “salta” desde  $\infty$  a 0. Este valor se denomina dimensión de Hausdorff de conjunto  $A$  y se denota  $\dim_H(A)$ .

**Definición.** *La dimensión de Hausdorff de  $A$  se define como*

$$\dim_H(A) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\} = \inf\{r : \mathcal{H}^r(A) = 0\}.$$

En el resto del capítulo se demuestran algunos resultados y propiedades sobre esta dimensión (tomados de [Fal]), que serán útiles más tarde.

EN el capítulo tres formalizamos un tipo específico de fractal: los que resultan como límite de un determinado proceso iterativo. Con este objetivo dividimos el capítulo en cuatro secciones. En la primera sección (basada en el capítulo dos de [Bar]) introducimos un espacio métrico  $(\mathcal{K}(X), h)$  donde  $\mathcal{K}(X)$  representa los conjuntos compactos no vacíos de un espacio métrico  $(X, d)$  y  $h(\cdot, \cdot)$  es una distancia (denominada distancia de Hausdorff).

**Definición.** *Dados  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $A, B \in \mathcal{K}(X)$  dos subconjuntos compactos de  $X$  definimos la distancia de Hausdorff entre  $A$  y  $B$  como*

$$h(A, B) = \sup\{d(A, B), d(B, A)\} = \sup\{\sup\{d(x, B) : x \in A\}, \sup\{d(A, y) : y \in B\}\}$$

Mostraremos que si  $(X, d)$  es un espacio métrico completo entonces  $(\mathcal{K}(X), h)$  también lo es. En la segunda sección recordaremos la definición de aplicación contractiva sobre un espacio  $X$  y veremos cómo se extiende a  $\mathcal{K}(X)$ .

**Proposición.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva en un espacio métrico  $(X, d)$ , esto es, existe una constante  $0 < c < 1$  tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Entonces, la función  $f : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$  definida como

$$f(B) := \{f(x) : x \in B\}, \quad \text{para todo } B \in \mathcal{K}(X)$$

es una aplicación contractiva en  $(\mathcal{K}(X), h)$ .

Los fractales que estudiaremos están definidos por una familia de aplicaciones contractivas, denominada sistema de funciones iteradas (o IFS, por sus siglas en inglés).

**Definición.** Denominaremos sistema de funciones iteradas o IFS a un conjunto de aplicaciones contractivas  $\mathcal{S} = \{f_n : n = 1, 2, \dots, m\}$ ,  $f_n : X \rightarrow X$ , con constantes de contractividad  $\{c_n\}$  sobre un espacio métrico completo  $(X, d)$ . Lo denotaremos por  $\{X; \mathcal{S}\}$ .

Debido a esto, demostraremos que la aplicación

$$F(B) := \bigcup_{i=1}^m f_i(B)$$

para cada  $B \in \mathcal{K}(X)$  es una aplicación contractiva (véase el capítulo tres de [Bar]). En la sección tres, aplicamos el Teorema del punto fijo de Banach cuando el espacio es  $(\mathcal{K}(X), h)$  y la aplicación es  $F$ .

**Teorema** (Teorema del punto fijo de Banach). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva con constante de contractividad  $c$ . Entonces la ecuación  $f(x) = x$  tiene una solución única  $\bar{x} \in X$ , esto es, un único punto fijo.

Esta solución se encuentra como el límite de la sucesión de iteradas

$$\bar{x} = \lim_n f^n(x_0)$$

para un  $x_0$  arbitrario y donde hemos utilizado la notación  $f^n(x_0) = f \circ f^{n-1}(x_0)$ . Además, el error en cada etapa está acotado por

$$e_n = d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$$

**Teorema** (Teorema del punto fijo de Banach (caso IFS)). *Dado un IFS  $\{X; f_n, n = 1, 2, \dots, m\}$  existe un único conjunto  $A \in \mathcal{K}(X)$  tal que  $F(A) = \cup_{i=1}^m f_i(A) = A$ . Este conjunto  $A$  también se denomina atractor del IFS.*

*Además, este conjunto se obtiene como*

$$A = \lim_n F^n(A_0)$$

*para cualquier conjunto inicial  $A_0 \in \mathcal{K}(X)$ .*

Este teorema nos permite concluir que los fractales generados por IFS son los puntos fijos de ciertas aplicaciones contractivas en el espacio  $(\mathcal{K}(X), h)$ . En la última sección, siguiendo el libro [Fal], probaremos que la dimensión de Hausdorff para esta clase de fractales en  $\mathbb{R}^n$  es igual a  $s$ , donde  $s$  cumple

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^s = 1$$

y  $\lambda_i$  son las constantes  $f_i$  tales que

$$d(f_i(x), f_i(y)) = \lambda_i d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Para probar esto necesitaremos de resultados y condiciones previas como la condición del conjunto abierto o el principio de distribución de masa.

**E**N el capítulo cuatro, terminada la formalización de los IFS estudiamos dos alternativas para dibujar fractales: los sistemas-L y un algoritmo de aproximación por puntos.

Aunque los sistemas-L nacieron para describir el crecimiento de determinadas plantas, se pueden usar para generar fractales. Esta manera no requiere de grandes conocimientos de programación y gracias a los paquetes TikZ y PGF de  $\text{\LaTeX}$  se pueden dibujar desde este. De hecho, las imágenes de todos los fractales de los capítulos 1-3 han sido realizados de este modo.

El algoritmo de aproximación por puntos, sin embargo, nos permitirá tener control sobre los errores. Para utilizar este método solo tendremos que saber qué transformaciones afines definen el IFS y el error que queremos cometer. Este algoritmo se basa en el siguiente teorema (tomado de [EdA]).

**Proposición.** *Sean dos reales  $0 < \delta < 1$  y  $0 < \varepsilon < 1$  dados. Sea  $N \in A(\mathcal{S}, \delta)$  y consideramos el conjunto  $\mathcal{S}_N = \{h_1, h_2, \dots, h_u\}$ . Denotamos por  $x_i \in X$  el punto fijo de la aplicación contractiva  $h_i$  para cada  $i = 1, \dots, u$ , y sea  $B_1$  el conjunto finito formado por todos los  $x_i$ .*

*Si tomamos  $M \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  y definimos el conjunto  $B$  como*

$$B = \{g(x) : g \in \mathcal{S}_M, x \in B_1\}$$

entonces, si  $A$  es el atractor de  $\mathcal{S}$ , se cumple que

$$h(A, B) \leq \varepsilon \delta \operatorname{diam}(A).$$

---

**Algoritmo** Aproximación por puntos de fractales

---

**Entrada:** Conjunto de aplicaciones contractivas  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_m\}$  con constantes de contractividad  $\{c_1, \dots, c_m\}$  y precisión en función de  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $\operatorname{diam}(A)$  (una estimación).

**Salida:** Un conjunto finito de puntos  $B$  tal que  $h(A, B) \leq \text{precision}$ , donde  $A$  es el fractal definido por  $\mathcal{S}$ .

- 1: A partir de  $\delta$  se calcula  $N \in A(\mathcal{S}, \delta)$  (Lema 4.2.1).
  - 2: Se calculan todas las transformaciones  $\mathcal{S}_N = \{h_1, \dots, h_u\}$  y sus puntos fijos  $x_i$ .
  - 3: A partir de  $\varepsilon$  (e igual que con  $\delta$ ) se calculan  $M \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  y las transformaciones  $\mathcal{S}_M$ .
  - 4: El conjunto  $B$  se obtiene aplicando las funciones de  $\mathcal{S}_M$  a los puntos  $x_i$ .
- 

**F**INALMENTE, incluimos tres apéndices. En los dos primeros se recogen los principales resultados y definiciones sobre espacios métricos y teoría de la medida (vistos en asignaturas previas del Grado de Matemáticas) que usamos en los capítulos dos y tres. Y en el último apéndice adjuntamos la implementación que hemos realizado en Java del algoritmo de aproximación por puntos del capítulo cuatro.



# Contenidos

<b>Notación y terminología</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Resumen</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción a los fractales</b>	<b>1</b>
<b>2. Dimensión fractal</b>	<b>7</b>
2.1. Dimensión topológica . . . . .	8
2.2. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch . . . . .	9
<b>3. Sistema de funciones iteradas (IFS)</b>	<b>17</b>
3.1. Espacio métrico $(\mathcal{K}(X), h)$ . . . . .	18
3.1.1. Completitud de $(\mathcal{K}(X), h)$ . . . . .	21
3.2. Aplicaciones contractivas . . . . .	26
3.3. Teorema del punto fijo de Banach . . . . .	29
3.4. Dimensión de los IFS . . . . .	30
<b>4. Cómo dibujar fractales</b>	<b>39</b>
4.1. Sistemas-L . . . . .	39
4.2. Algoritmo de aproximación por puntos . . . . .	41
<b>A. Espacios métricos</b>	<b>49</b>
A.1. Distancia y espacio métrico. . . . .	49
A.2. Compacidad y compacidad secuencial . . . . .	50
A.3. Sucesiones y completitud . . . . .	51



<b>B. Teoría de la medida</b>	<b>53</b>
<b>C. Código JAVA del algoritmo de aproximación por puntos</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>63</b>

# Capítulo 1

## Introducción a los fractales

En este primer capítulo vamos a repasar brevemente los hechos y descubrimientos que llevaron a Benoît Mandelbrot, en 1975, a utilizar una nueva palabra, fractal, para referirse a cierta clase de conjuntos. Los datos históricos y fechas están tomados de [Man], [Fal] y [Bin], en los que se puede encontrar mucha más información sobre el tema, junto con la página *The MacTutor History of Mathematics*<sup>1</sup>.

Muchos autores, al introducir lo que hoy conocemos como fractales suelen comenzar hablando de Karl Weierstrass. La razón es la publicación que realizó en el año 1872 de una función, conocida como función de Weierstrass, que tenía la peculiaridad de ser continua pero no diferenciable en ningún punto. Hasta el siglo XIX las matemáticas solo se habían centrado en estudiar funciones continuas y diferenciables, lo que provocó que este tipo de funciones fueran catalogadas como “patológicas” o “monstruos” e ignoradas por la mayoría.

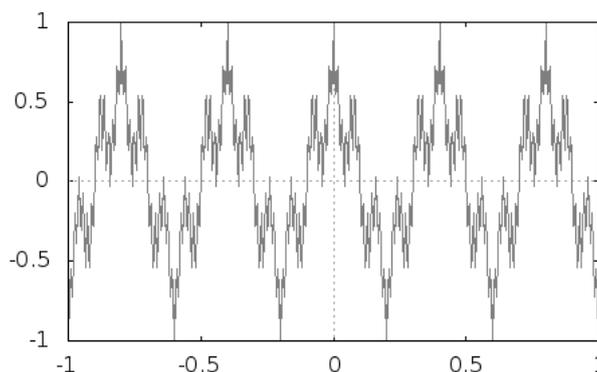


Figura 1.1: Función de Weierstrass:  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi t)$ , con  $a = 5$  y  $b = \frac{1}{2}$

<sup>1</sup><http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/fractals.html>

En los años siguientes autores como Helge von Koch, que buscaba otras formas de ver que estas “patologías” no eran tan extrañas, presentaron diferentes funciones y curvas de este estilo. Una de ellas fue introducida en 1883 por Georg Cantor (bautizada como función de Cantor) junto con el conjunto que también llevaría su nombre. Este conjunto es lo hoy reconocemos como un fractal. Su construcción es sencilla: partiendo de un segmento (lo habitual es comenzar con el  $[0, 1]$ ), se divide en tres partes iguales y se elimina el tercio central; luego, con cada uno de los dos segmentos resultantes (en este caso,  $[0, \frac{1}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$ ) se repite el mismo procedimiento. Si este proceso se itera indefinidamente, en el límite obtenemos el conjunto de Cantor. Una de las pro-

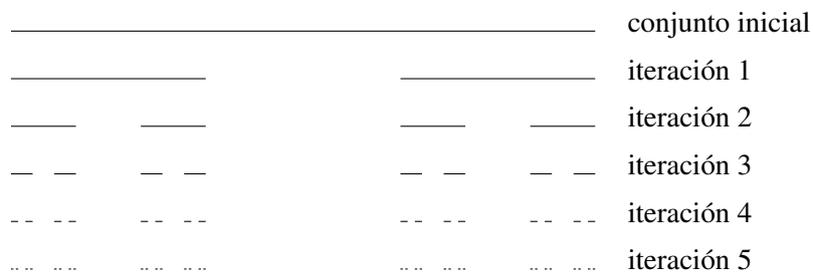


Figura 1.2: Primeras iteraciones del conjunto de Cantor

iedades de este conjunto es que tiene longitud nula (en cada iteración  $k$  la longitud es  $(\frac{2}{3})^k$  veces la longitud inicial), y en cambio, consta de una cantidad no numerable de puntos<sup>2</sup>, esto es, tantos como el segmento inicial desde el que se construye.

En 1904, von Koch presenta otro ejemplo, una curva continua y sin tangentes con una propiedad similar: tiene longitud infinita y área nula. Igual que el conjunto de Cantor, para construirla se parte de un segmento que se divide en tres partes iguales; pero en lugar de eliminar el tercio central, este se reemplaza por otros dos de igual longitud formando un ángulo de  $60^\circ$  (en forma de triángulo equilátero). El límite de este proceso es la curva de von Koch (ver figura 1.3). Partiendo de un triángulo equilátero e iterando en cada uno de los tres segmentos obtenemos el famoso copo de nieve de Koch (ver figura 1.6, página 4). Efectivamente, la curva de Koch tiene longitud infinita. En cada iteración la longitud aumenta en un factor de  $\frac{4}{3}$ , luego en la iteración  $k$  su longitud será  $l \cdot (\frac{4}{3})^k$  donde  $l$  es la del segmento inicial. Es claro entonces, que tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$  la longitud diverge a infinito. Con este conjunto, además, se empieza a reconocer otra propiedad

<sup>2</sup>Una prueba de este hecho se basa en tomar la representación numérica en base 3 y se puede encontrar en [http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor\\_set#Cardinality](http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set#Cardinality) o en [http://cosmos.ucdavis.edu/archives/2011/cluster6/Cannon\\_Casey.pdf](http://cosmos.ucdavis.edu/archives/2011/cluster6/Cannon_Casey.pdf)

que caracteriza a los fractales: la autosimilitud, el hecho de que una parte sea similar al conjunto entero.

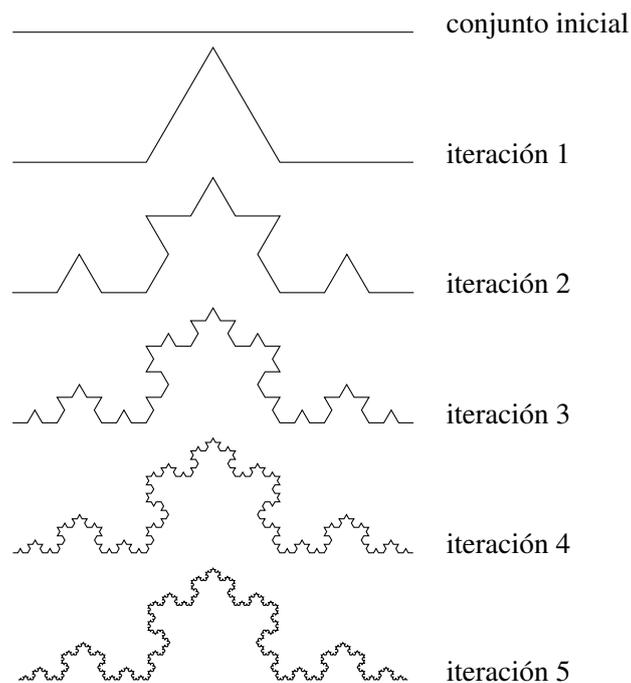


Figura 1.3: Primeras iteraciones de la curva de von Koch

La aparición de conjuntos con estas propiedades destacó la necesidad de revisar y formalizar la noción que se tenía de dimensión. Sobre todo después de la aparición de curvas (dimensión 1) que lograban rellenar el plano (dimensión 2), como las de Giuseppe Peano (en 1890) o David Hilbert (en 1891).

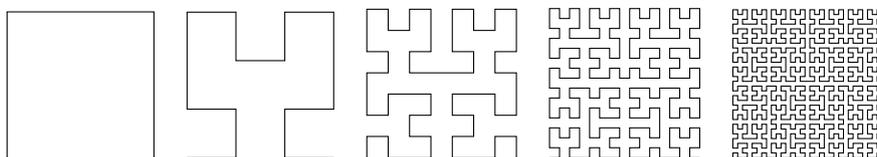


Figura 1.4: Construcción de la curva de Hilbert

En 1918, Félix Hausdorff presenta su concepto de dimensión (revisado después por Besicovitch). Con esta nueva definición aparece la posibilidad de que un conjunto pueda tener una dimensión no entera. Son los casos del conjunto de Cantor o la curva de Koch como veremos más

en profundidad en el capítulo 2. Por otro lado, Paul Lévy aborda el tema de la autosimilitud y presenta otra curva conocida como curva de Lévy.



Figura 1.5: B. Mandelbrot

Fue entonces cuando Benoît Mandelbrot (un alumno de Lévy) se interesa por estas “patologías”. En 1967 publica un ensayo en la revista “Science” titulado “¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?”, donde empieza a exponer sus ideas sobre los fractales. En 1975 publica el libro “Fractales: forma, azar y dimensión” y en 1982 “La geometría fractal de la naturaleza” (ver [Man]). Mandelbrot lo que hace es conectar todos estos conjuntos considerados extraños con el mundo real. Propone el término “fractal” para referirse a ellos (del latín “fractus”, que significa

roto, fracturado o irregular) y los vuelve útiles para representar fenómenos naturales como costas, nubes, árboles o grietas. Consigue relacionar esta nueva geometría con la física, la medicina (área de pulmones o cerebro), los estudios de población o la economía (movimiento browniano). Como él mismo comenta:

*“Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta.”*

Aunque muchos autores han tratado de precisar la definición de fractal (incluso Mandelbrot propone una en [Man]) ninguna ha resultado totalmente satisfactoria. Cada intento deja sin considerar conjuntos que por sus propiedades deberían serlo. Así, como se comenta en [Fal] nos referimos como fractal a un conjunto que cumple algunas de las propiedades descritas anteriormente:

- es demasiado irregular para ser descrita en términos de la geometría convencional (euclídea),
- tiene una estructura, de algún modo, autosimilar (exacta o aproximada),
- tiene dimensión no entera o su dimensión de Hausdorff es distinta de la topológica (ver capítulo 2),
- o bien, se obtiene mediante el paso al límite de procesos iterativos (no constantes).

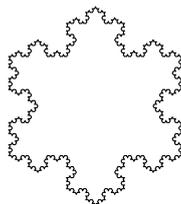


Figura 1.6: Copo de nieve de Koch

En este texto nos centraremos en los fractales denominados sistema de funciones iteradas (o IFS, por las siglas en inglés) que se desarrollarán en el capítulo 3. Estos vienen a ser los conjuntos que se obtienen como puntos fijos de determinados procesos iterativos. Para ello, nos basaremos principalmente en los libros [Fal] y [Bar] (que están, en parte, basados en [Hut]).

No hablaremos, en cambio, de los fractales tipo Julia (que juegan un papel importante en el estudio de Mandelbrot) o del propio conjunto de Mandelbrot. Los interesados en estos pueden consultar el capítulo 7 de [Bar] o el capítulo 13 de [Fal].



# Dimensión fractal

## «CONTENIDOS»

- Introducción
- Dimensión topológica
- Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Como ya hemos comentado en el capítulo anterior, la aparición de curvas que de alguna manera rellenan el plano (como la curva de Hilbert o la de Peano) hace replantear a los matemáticos la noción de dimensión de un conjunto.

Formalizar el concepto de dimensión no fue tarea fácil, así, a lo largo del tiempo fueron apareciendo diferentes “tipos” de dimensiones: dimensión topológica, de Hausdorff (o de Hausdorff-Besicovitch), autosemejante, de Minkowski (o Minkowski-Bouligard), de empaquetado, etc. Muchas de estas coinciden en los casos habituales, pero en general, solo se cumplen ciertas desigualdades entre ellas (como la de Szpilrajn, que afirma que la dimensión topológica es menor o igual que la de Hausdorff <sup>1</sup>).

Uno de los intentos de dar una definición concreta al término fractal fue la propuesta por Mandelbrot en [Man], basándose en las dimensiones topológica y de Hausdorff:

*“Un fractal es un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor que su dimensión topológica.”*

Con tal de entender esta propuesta de definición en la primera sección de este capítulo repasaremos brevemente el concepto de dimensión topológica, que es la que intuitivamente solemos utilizar, y en la segunda sección nos centraremos en la de Hausdorff.

<sup>1</sup>En [Man] se da la referencia: W. Hurewicz & H. Wallman, Dimension Theory, 1941, capítulo 4

La ventaja que tiene la dimensión de Hausdorff y la razón por la que la estudiamos más en profundidad se debe a que está definida para cualquier conjunto en un espacio métrico y que su definición se basa en una medida (interesante desde el punto de vista teórico). Como mayor desventaja tiene que en muchos casos no es tan fácil de calcular como otras, sin embargo, para los fractales que más nos interesan (los sistemas de funciones iteradas o IFS, que estudiaremos en profundidad en el próximo capítulo) tendremos resultados que nos facilitarán esta tarea.

Para la redacción de este capítulo nos basamos principalmente en los libros [Rog], [Fal] (capítulo 2) y en menor medida [WhZyg]. Para más información sobre las restantes dimensiones remitimos a [Fal] (capítulos 3 y 4) o [Bar] (capítulo 5).

## 2.1. Dimensión topológica

La dimensión topológica será, a fin de cuentas, la dimensión con la que estamos acostumbrados a trabajar. El concepto de dimensión nace con Euclides y sus “Elementos”, en los que afirma:

*“Se dice que una figura es unidimensional si su frontera está compuesta de puntos; bidimensional, si está compuesta de curvas; y tridimensional, si está compuesta de superficies.”*

Esta definición la intentaron precisar Poincaré (que la bautiza como dimensión topológica), Brouwer (en 1913), Urysohn o Lebesgue. Remarcamos aquí tres de estas definiciones: la inductiva de Urysohn (y Menger), la inductiva de Brouwer (y Cech) y la de recubrimiento de Lebesgue (ver [Man], capítulo 41, página 409).

Para nosotros la noción de dimensión topológica será la dimensión de recubrimiento de Lebesgue. Para definirla necesitamos antes un par de definiciones sobre recubrimientos (ver definición A.2.1, página 50).

**Definición 2.1.1.** Sea  $\mathcal{A}$  un recubrimiento de un conjunto de un espacio métrico  $X$ . Un **refinamiento** de  $\mathcal{A}$  es otro recubrimiento  $\mathcal{B}$  del conjunto tal que si  $B \in \mathcal{B}$  entonces existe un  $A \in \mathcal{A}$  con  $B \subset A$ .

**Definición 2.1.2.** Sea  $n \geq -1$  un entero. El **orden** de una colección de conjuntos  $\mathcal{A}$  es menor o igual que  $n$  si cada colección de  $n + 2$  conjuntos de esta tiene intersección vacía.

Para  $n \geq 0$ , decimos que  $\mathcal{A}$  tiene orden  $n$  si tiene orden menor o igual que  $n$  pero no tiene orden menor o igual que  $n - 1$ .

Con estas definiciones ya estamos en condiciones de definir la dimensión topológica dada por Lebesgue.

**Definición 2.1.3** (Dimensión de recubrimiento de Lebesgue). *Sea  $X$  un espacio métrico y  $n \geq -1$  un entero. Decimos que  $X$  tiene **dimensión topológica** menor o igual que  $n$  si cada recubrimiento abierto finito admite un refinamiento de orden menor o igual que  $n$ . La **dimensión topológica** será  $n$  si es menor o igual que  $n$  pero no menor o igual que  $n - 1$ .*

*Si  $X$  es vacío su dimensión será  $-1$ .*

La dimensión topológica, por tanto, siempre toma valores enteros (por la propia definición). No es difícil demostrar que un intervalo de la recta real (o una curva regular sobre  $\mathbb{R}$ ) tienen dimensión  $1^2$ .

## 2.2. Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

Pasamos ahora a estudiar la dimensión de Hausdorff, también conocida como dimensión de Hausdorff-Besicovitch (debido a que este último la dejó en la forma en la que se estudia actualmente). En esta sección trabajaremos sobre un espacio métrico  $(X, d)$ . Recordemos que el diámetro de un conjunto no vacío  $A \subset X$  se define como

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$$

**Definición 2.2.1.** *Si  $\{A_i\}$  es una sucesión de conjuntos que recubren  $A$ , esto es, que cumplen  $A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ , y cuyos diámetros no superan un valor real dado  $\delta > 0$ , entonces diremos que  $\{A_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$ .*

**Definición 2.2.2.** *Sea  $A$  es un subconjunto de  $X$ , dados dos valores reales  $s \geq 0$  y  $\delta > 0$  se define*

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} (\text{diam}(A_i))^s : \{A_i\} \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } A \right\}$$

donde suponemos que  $\inf \emptyset = +\infty$  (en el caso de no existir tal recubrimiento).

$\mathcal{H}_\delta^s(A)$  será un valor comprendido entre cero e infinito, pudiendo darse ambas posibilidades.

Es importante destacar que tal y como se ha definido un  $\delta$ -recubrimiento, si tomamos un  $\varepsilon$  tal que  $0 < \varepsilon < \delta < +\infty$  se tendrá que un  $\varepsilon$ -recubrimiento será también un  $\delta$ -recubrimiento (si los diámetros de los conjuntos que lo forman son menores que  $\varepsilon$ , entonces serán menores que  $\delta$ ).

<sup>2</sup>Un posible razonamiento para demostrar esto sería tomar intervalos diádicos convenientemente, ya que son una base de entornos, y ver que el orden es 1.

Así tenemos que si  $\delta$  decrece entonces el ínfimo  $\mathcal{H}_\delta^s(A)$  crecerá (se reducen los posibles recubrimientos de  $A$ ) y existe el límite

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \in [0, +\infty]$$

Esto nos lleva a la definición siguiente.

**Definición 2.2.3.** Se denomina *medida  $s$ -dimensional de Hausdorff* del conjunto  $A$  al valor

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

De acuerdo a las definiciones B.1.5 y B.1.10 (página 53) del apéndice tenemos que:

**Proposición 2.2.4.** La medida  $s$ -dimensional de Hausdorff,  $\mathcal{H}^s$ , es una *medida exterior métrica* sobre los subconjuntos de  $X$ .

*Demostración.* Hacemos la demostración en dos pasos.

*Paso 1:* Veamos que cumple las condiciones de medida exterior

- (i) Es claro que  $\mathcal{H}^s \geq 0$  por ser el diámetro no negativo y que  $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$ , ya que, todo conjunto contiene al conjunto vacío.
- (ii) Si  $A_1 \subset A_2$  son conjuntos de  $X$  entonces todo recubrimiento de  $A_2$  lo será de  $A_1$  y se tendrá que  $\mathcal{H}_\delta^s(A_1) \leq \mathcal{H}_\delta^s(A_2)$ . Así, basta tomar límites cuando  $\delta \rightarrow 0$  para obtener  $\mathcal{H}^s(A_1) \leq \mathcal{H}^s(A_2)$ .
- (iii) Sean  $\{A_n\}$  conjuntos de  $X$ . Si probamos que  $\mathcal{H}_\delta^s(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_n)$ , entonces tomando límites cuando  $\delta \rightarrow 0$  se obtendría

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathcal{H}^s(A_i)$$

que es lo que buscamos.

Veamos por tanto que se cumple la desigualdad  $\mathcal{H}_\delta^s(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^s(A_n)$ .

Supongamos que  $\mathcal{H}_\delta^s(A_n) < +\infty$  para cada  $n$  (en caso contrario la desigualdad es clara) y sea  $\{A_{i_n}\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $A_n$ . La unión de los recubrimientos de todos los  $A_n$  será también un recubrimiento de  $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n$

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_{i_n}))^s = \sum_n \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(A_{i_n}))^s \right)$$

y por ser ínfimo

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mathcal{H}_\delta^s(A_n)$$

*Paso 2:* Queda ver la condición adicional de medida exterior métrica, esto es, que si  $A$  y  $B$  son dos conjuntos tales que  $d(A, B) > 0$  entonces  $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ <sup>3</sup>.

Por ser medida exterior tenemos la desigualdad  $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ . Para la desigualdad contraria supongamos que  $d(A, B) = \varepsilon > 0$  y veamos que si  $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$  entonces los  $\delta$ -recubrimientos de  $A$  y  $B$  no se cortan (su intersección es vacía).

Sean  $\{A_i\}$  y  $\{B_j\}$  dos  $\delta$ -recubrimientos de  $A$  y  $B$  respectivamente. Si existiera un elemento  $\alpha \in A_i \cap B_j$  para algunos  $i, j$  se tendría que  $d(A, \alpha) < \delta$  y  $d(B, \alpha) < \delta$  y entonces

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \text{ (por definición)} \\ &\leq \inf\{d(x, \alpha) + d(\alpha, y) : x \in A, y \in B\} \leq d(A, \alpha) + d(\alpha, B) < \varepsilon \end{aligned}$$

lo que es una contradicción con la suposición  $d(A, B) = \varepsilon$ .

Así, si tenemos  $\{C_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $A \cup B$  y denotamos por

$$I_A = \{i : C_i \cap A = \emptyset\} \text{ e } I_B = \{i : C_i \cap B = \emptyset\}$$

hemos probado que  $I_A \cap I_B = \emptyset$ , luego

$$\sum_i (\text{diam}(C_i))^s \geq \sum_{I_A} (\text{diam}(C_i))^s + \sum_{I_B} (\text{diam}(C_i))^s$$

y de aquí obtenemos

$$\mathcal{H}_\delta^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}_\delta^s(A) + \mathcal{H}_\delta^s(B)$$

Por tanto, tomando  $\delta \rightarrow 0$  conseguimos la desigualdad.  $\square$

La  $\sigma$ -álgebra de Borel de un espacio métrico es la mínima  $\sigma$ -álgebra que contiene a todos los abiertos. El Teorema B.1.11 (página 54) y su corolario B.1.12 nos permiten afirmar

**Corolario 2.2.5.** *Los subconjuntos de la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $X$  son  $\mathcal{H}^s$ -medibles y  $\mathcal{H}^s$  es una medida en esta  $\sigma$ -álgebra.*

Una propiedad básica de esta medida que nos permitirá definir el concepto de dimensión de Hausdorff es la siguiente (ver teorema 11.13 de [WhZyg]).

**Teorema 2.2.6.** *Para un subconjunto  $A \subset X$  cualquiera se cumple:*

- (i) Si  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$  entonces  $\mathcal{H}^r(A) = 0$  para  $r > s$ .
- (ii) Si  $\mathcal{H}^s(A) > 0$  entonces  $\mathcal{H}^r(A) = +\infty$  para  $r < s$ .

<sup>3</sup>Donde  $d(A, B)$  es la distancia usual entre dos conjuntos, definida como  $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$

*Demostración.* Negando una y teniendo en cuenta que  $\mathcal{H}^s(A) \geq 0$  es claro que ambas afirmaciones son equivalentes. Supongamos entonces que  $r > s$  y fijemos  $\delta > 0$ .

Si  $\{A_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$  entonces tenemos que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} (\text{diam}(A_i))^r = \sum_{i=1}^{+\infty} (\text{diam}(A_i))^s (\text{diam}(A_i))^{r-s} \leq \delta^{r-s} \sum_{i=1}^{+\infty} (\text{diam}(A_i))^s$$

y tomando ínfimos  $\mathcal{H}_\delta^r(A) \leq \delta^{r-s} \mathcal{H}_\delta^s(A)$ .

Y como por hipótesis se tiene  $r - s > 0$  y que  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$  basta hacer  $\delta \rightarrow 0$  en la desigualdad anterior para finalmente obtener que  $\mathcal{H}^r(A) = 0$ .  $\square$

Con este teorema en mente, para cada  $A \subset X$  tendremos un punto crítico  $s$  donde  $\mathcal{H}^s(A)$  pasa de ser nulo a ser infinito. Este valor crítico  $s$  es el que se denomina **dimensión de Hausdorff** del conjunto  $A$  y lo denotaremos por  $\dim_{\text{H}}(A)$ .

**Definición 2.2.7.** *La dimensión de Hausdorff se define como*

$$\dim_{\text{H}}(A) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\} = \inf\{r : \mathcal{H}^r(A) = 0\}$$

*es decir, como el único número  $d = \dim_{\text{H}}(A)$  para el que  $0 < \mathcal{H}^d(A) < +\infty$ .*

Adelantamos unas observaciones sobre esta medida para el caso en que  $X = \mathbb{R}^n$ .

**Observación 2.2.8.** *Si  $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$  para  $m = 1, 2, \dots$  entonces la dimensión de  $A$  es el supremo  $s$  de las dimensiones de los  $A_m$  (véase el Teorema 2.2.6). Por ser medida exterior la dimensión de la unión será mayor o igual que  $s$  (ver apartado (i) de 2.2.13), y por otro lado, si  $r$  es un valor tal que  $r > s$  entonces  $\mathcal{H}^r(A_i) = 0$  para cada  $i$  y por tanto  $\mathcal{H}^r(A) = 0$  luego  $\dim_{\text{H}}(A) \leq s$ .*

**Observación 2.2.9.** *Sea  $X = \mathbb{R}^n$  (o  $X$  un abierto en  $\mathbb{R}^n$ ) con la distancia euclídea usual.*

1.  $\mathcal{H}^s$  en  $\mathbb{R}^n$  es una medida invariante por traslaciones (como se generalizará en la proposición 2.2.10).
2.  $\mathcal{H}^n(B(0, 1)) \leq 2^n \leq +\infty$ , por ser el diámetro de la bola unidad igual a dos.
3. La medida de Lebesgue<sup>4</sup>  $\lambda_n$  en los borelianos de  $\mathbb{R}^n$  es la única medida invariante por traslaciones salvo homotecias, es decir, existe un  $c_n \in [0, +\infty)$  tal que

$$\mathcal{H}^n(A) = c_n \lambda_n(A)$$

para cada boreliano  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>4</sup>Para más información sobre la medida de Lebesgue ver el capítulo 3 de [WhZyg].

4. Usando un lema de simetrización de Steiner que asegura que

$$\lambda_n(A) \leq \lambda_n\left(B\left(0, \frac{\text{diam}(A)}{2}\right)\right)$$

para cada boreliano  $A$ , se puede calcular  $c_n = \lambda_n(B(0, \frac{1}{2}))^{-1}$ , en particular,  $0 < \mathcal{H}^n(B(0, 1)) < +\infty$  y la dimensión de  $\mathbb{R}^n$  es igual a  $n$  (véase la sección 19 de [Bil]).

Recordemos que la dimensión topológica siempre toma valores enteros. Esta dimensión, al contrario, puede tomar valores reales. Más adelante veremos, por ejemplo, que la dimensión de Hausdorff del conjunto de Cantor (ver figura 1.2) es igual a

$$\frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,6309$$

o que la de la curva de von Koch (ver figura 1.3) es igual a

$$\frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,2619$$

(véanse los ejemplos 2.2.15 y 3.4.7).

### Propiedades

Pasamos a ver algunas propiedades útiles a la hora de calcular (o acotar) la dimensión de Hausdorff de un conjunto sobre un espacio métrico  $(X, d)$ . Estos resultados pueden encontrarse en el capítulo 2 de [Fal].

**Proposición 2.2.10.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\lambda > 0$ . Si  $f : X \rightarrow X$  es una función tal que*

$$d(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in A$$

(se dice que  $f$  es una **similitud**), entonces para cada  $A \subset X$  se tiene

$$\mathcal{H}^s(f(A)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$$

*Demostración.* Se cumple la cadena de igualdades

$$\begin{aligned} \text{diam}(f(A)) &= \sup\{d(x, y) : x, y \in f(A)\} = \sup\{d(f(x), f(y)) : x, y \in A\} \\ &= \sup\{\lambda d(x, y) : x, y \in A\} = \lambda \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} = \lambda \text{diam}(A) \end{aligned}$$

Así, si  $\{A_i\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$ , entonces  $\{f(A_i)\}$  será un  $\lambda\delta$ -recubrimiento de  $f(A)$  y tendremos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(f(A)) &= \inf\left\{\sum(\text{diam}(B_i))^s : B_i \text{ es un } \lambda\delta\text{-recubrimiento de } f(A)\right\} \\ &= \inf\left\{\sum(\text{diam}(f(A_i)))^s : f(A_i) \text{ es un } \lambda\delta\text{-recubrimiento de } f(A)\right\} \\ &= \inf\left\{\lambda^s \sum(\text{diam}(A_i))^s : A_i \text{ es un } \delta\text{-recubrimiento de } A\right\} \\ &= \lambda^s \mathcal{H}_\delta^s(A)\end{aligned}$$

luego tomando  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos lo que queríamos.  $\square$

**Proposición 2.2.11.** Sean  $A \subset X$  y  $f : A \rightarrow X$  una función tal que  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)^\alpha$  para ciertas constantes  $c, \alpha > 0$ . Entonces para cada  $s$  se cumple

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(A) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(A)$$

(se dice que  $f$  cumple la **condición de Hölder** con ese parámetros).

*Demostración.* Si  $A_i$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$ , entonces

$$\begin{aligned}\text{diam}(f(A \cap A_i)) &= \sup\{d(x, y) : x, y \in f(A \cap A_i)\} = \sup\{d(f(x), f(y)) : x, y \in A \cap A_i\} \\ &\leq \sup\{cd(x, y)^\alpha : x, y \in A_i\} = c(\text{diam}(A_i))^\alpha\end{aligned}$$

luego  $f(A \cap A_i)$  es un  $c\delta^\alpha$ -recubrimiento de  $f(A)$ . Así tenemos

$$\sum_i (\text{diam}(f(A \cap A_i)))^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_i (\text{diam}(A_i))^s$$

que tomando ínfimos se convierte en

$$\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

y haciendo por último  $\delta \rightarrow 0$  nos da la desigualdad

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(A)$$

lo que termina la prueba.  $\square$

De las anteriores proposiciones podemos deducir fácilmente el corolario siguiente.

**Corolario 2.2.12.** Sea  $A \subset X$  un subconjunto y  $f : A \rightarrow X$  una función.

(i) Si  $f$  es de **Lipschitz**,  $d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$  entonces  $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq c^s \mathcal{H}^s(A)$

(ii) Si  $f$  es una *isometría*,  $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$  entonces  $\mathcal{H}^s(f(A)) = \mathcal{H}^s(A)$

*Demostración.* (i) Se deduce directamente de la proposición anterior tomando  $\alpha = 1$ .

(ii) Por la proposición 2.2.10 tomando  $\lambda = 1$ .

□

Con estas propiedades sobre la medida de Hausdorff obtenemos finalmente propiedades sobre la dimensión de Hausdorff de un conjunto.

**Proposición 2.2.13** (Propiedades de la dimensión). *Sea  $f : A \rightarrow X$  una función. Se tiene que:*

(i) si  $A \subset B$  entonces  $\dim_{\text{H}}(A) \leq \dim_{\text{H}}(B)$

(ii) si  $f$  es de Hölder entonces  $\dim_{\text{H}}(f(A)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\text{H}}(A)$ .

(iii) si  $f$  es de Lipschitz entonces  $\dim_{\text{H}}(f(A)) \leq \dim_{\text{H}}(A)$ .

(iv) si  $f$  cumple

$$c_1 d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq c_2 d(x, y)$$

para cada  $x, y \in A$ , donde  $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$  (se dice que  $f$  es **bi-Lipschitz**)

entonces  $\dim_{\text{H}}(f(A)) = \dim_{\text{H}}A$ .

*Demostración.* (i) Es inmediato a partir de las propiedades de la medida:  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$  para cada  $s$ .

(ii) Por la proposición 2.2.11 se tiene que:

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(A)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(f(A)) = 0$$

ya que  $s > \dim_{\text{H}}(A)$ . Por tanto,  $\dim_{\text{H}}(f(A)) \leq \frac{s}{\alpha}$  para todo  $s > \dim_{\text{H}}(A)$ .

(iii) Es el caso anterior tomando  $\alpha = 1$ .

(iv)  $f$  es un isomorfismo entre  $A$  y  $f(A)$ , ya que, si  $d(f(x), f(y)) = 0$  entonces  $d(x, y) = 0$ .

Aplicando el caso (iii) a  $f$  y a la función  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  obtenemos ambas desigualdades.

□

**Ejemplo 2.2.14.** Por el caso (i) de la proposición 2.2.13, cualquier conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}^n$  que contenga un abierto tiene dimensión de Hausdorff  $n$ ,  $\dim_{\text{H}}(A) = n$ , ya que, por la observación 2.2.9 el abierto tiene dimensión  $n$ .

**Ejemplo 2.2.15** (Dimensión del conjunto de Cantor). *Sea  $A$  el conjunto de Cantor (ver figura 1.2, página 2). Por ser autosimilar podemos escribir este conjunto como  $A = A_L \cup A_R$ , donde  $A_L = A \cap [0, \frac{1}{3}]$  y  $A_R = [\frac{2}{3}, 1]$ . Así definidas,  $A_L$  representa el conjunto de Cantor,  $A$ , al que le hemos aplicado una homotecia de radio  $\frac{1}{3}$ , y  $A_R$  el conjunto  $A$  al que le hemos aplicado esta homotecia y*

una translación de  $\frac{2}{3}$ . Esta unión además es disjunta, por lo que aplicando las propiedades de la medida de Hausdorff y la proposición 2.2.10 tenemos que

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(A_L) + \mathcal{H}^s(A_R) = \frac{1}{3^s} \mathcal{H}^s(A) + \frac{1}{3^s} \mathcal{H}^s(A) = \frac{2}{3^s} \mathcal{H}^s(A)$$

Si la dimensión de Hausdorff de  $A$  es igual a un cierto valor  $s$ , si suponemos<sup>5</sup> que se cumple  $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ . Dividiendo en la ecuación anterior por  $\mathcal{H}^s(A)$  nos queda

$$1 = \frac{2}{3^s}$$

de donde podemos despejar  $s$  tomando logaritmos

$$s = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0,6309$$

---

<sup>5</sup>Esta suposición se justificará más adelante en el teorema 3.4.6

# Capítulo 3

## Sistema de funciones iteradas

(IFS)

### «CONTENIDOS»

- Introducción.
- Espacio métrico  $(\mathcal{K}(X), h)$ . Completitud.
- Aplicaciones contractivas. IFS.
- Teorema del punto fijo de Banach.
- Dimensión de Hausdorff de los IFS (caso  $\mathbb{R}^n$ ).

En el ejemplo 2.2.15 del capítulo anterior hemos visto cómo el conjunto de Cantor, debido a la autosimilitud, puede ser descrito mediante la utilización de dos funciones (una homotecia y una homotecia con una traslación). En este capítulo vamos a centrarnos en los denominados sistemas de funciones iteradas (o IFS, por el inglés “iterated function system”), que serán conjuntos de transformaciones que al aplicarlas sucesivamente dan lugar, en el límite, a ciertos conjuntos fractales (como el conjunto de Cantor o la curva de von Koch).

El objetivo central de este capítulo consiste en establecer las condiciones necesarias para poder aplicar el Teorema del punto fijo de Banach (que recordaremos en 3.3.2) para describir fractales. Esto nos dará existencia y unicidad de un conjunto fractal a partir de un IFS, definido como el punto fijo de una familia de aplicaciones.

En la sección 3.1 se presenta un espacio métrico, denotado por  $\mathcal{K}$ , que consiste en los subconjuntos compactos no vacíos de un determinado espacio métrico. Por otro lado, se define una distancia (denominada de Hausdorff) entre dos conjuntos de este espacio. El resultado central de esta sección prueba que  $\mathcal{K}$  junto con la distancia de Hausdorff es un espacio métrico completo. Nuestros fractales, al ser límites de ciertas transformaciones, serán por tanto puntos fijos en este espacio. Hemos seguido el capítulo 2 de [Bar].

En la sección 3.2 formalizaremos las transformaciones que dan lugar a estos fractales. Recordaremos la definición de aplicación contractiva (3.2.2) y veremos cómo se definen sobre el espacio

$(\mathcal{K}(X), h)$ . Con estas condiciones estaremos en disposición de utilizar el Teorema del punto fijo de Banach sobre este espacio, que recordaremos en la sección 3.3.

Por último, en la sección 3.4, veremos una fórmula que nos facilitará el cálculo de la dimensión de Hausdorff en el caso de los sistemas de funciones iteradas.

### 3.1. Espacio métrico $(\mathcal{K}(X), h)$

En esta sección haremos uso de las definiciones y resultados dados en el apéndice A referente a espacios métricos (página 49). Empezamos definiendo nuestro espacio  $\mathcal{K}$ .

**Definición 3.1.1.** *Dado  $(X, d)$  un espacio métrico completo (definición A.3.3) denotamos por  $\mathcal{K}(X)$  el espacio cuyos elementos son los subconjuntos compactos (ver definición A.2.2) no vacíos de  $X$ .*

Como  $(X, d)$  es un espacio métrico, por el teorema A.2.8 que un subconjunto  $B$  sea compacto es equivalente a que sea secuencialmente compacto (definición A.2.6). Por esta razón, toda sucesión en subconjunto compacto posee una subsucesión que converge a un punto de  $B$ .

Sobre este espacio vamos a definir una distancia (definición A.1.1), que denominaremos distancia de Hausdorff y denotaremos por  $h$ . Esta está basada en otras dos que vemos a continuación, la primera de las cuales es la conocida distancia entre punto y conjunto.

**Definición 3.1.2.** *Sean  $(X, d)$  un espacio métrico completo,  $x \in X$  un punto del espacio y  $B \in \mathcal{K}(X)$  un subconjunto compacto. Definimos la distancia entre  $x$  y  $B$  como*

$$d(x, B) = \inf\{d(x, y) : y \in B\}$$

En la definición anterior, en lugar de poner ínfimo, podemos escribir mínimo. Esto se debe a la compacidad (compacidad secuencial) del conjunto  $B$ . Considerando la función continua  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(y) = d(x, y) \quad \text{para todo } y \in B$$

podemos afirmar que existe un punto  $\bar{y} \in B$  que cumple  $d(x, \bar{y}) = p := \inf\{f(y) : y \in B\}$ . Por ser  $p$  ínfimo podemos encontrar una sucesión  $\{y_n : n = 1, 2, \dots\} \subset B$  tal que  $d(f(y_n), p) < \frac{1}{n}$ . Usando que  $B$  es compacto, esta sucesión posee una subsucesión con límite  $\bar{y} \in B$  y por continuidad (ver definición A.2.10) tenemos que, efectivamente,  $d(x, \bar{y}) = p$ .

Los mismos argumentos pueden aplicarse a la siguiente definición donde escribimos supremo en lugar de máximo.

**Definición 3.1.3.** Dados  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $A, B \in \mathcal{K}(X)$  dos subconjuntos compactos de  $X$  definimos  $d(A, B)$  como

$$d(A, B) = \sup\{d(x, B) : x \in A\}$$

**Observación 3.1.4.** Así definida,  $d(\cdot, \cdot)$  no es una distancia (en el sentido de la definición A.1.1), ya que, en general  $d(A, B) \neq d(B, A)$ . Si tomamos como  $A$  la circunferencia de radio 3 centrada en el origen y como  $B$  el círculo de radio 1 centrado en el origen sobre  $\mathbb{R}^2$ , se puede ver fácilmente que  $d(A, B) = 2$  mientras que  $d(B, A) = 3$  (ver figura 3.1).

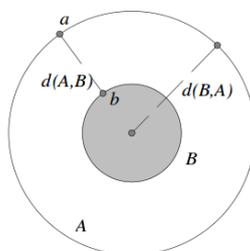


Figura 3.1:  $d(A, B) \neq d(B, A)$  (ejemplo e imagen tomados de [Bra])

**Nota:** Observar que si  $A$  se reemplaza por el círculo de radio 3 entonces  $d(A, B) = 2$  y  $d(B, A) = 0$ , ya que,  $B \subset A$ . Esta observación nos lleva finalmente a definir la distancia de Hausdorff entre dos conjuntos.

**Definición 3.1.5.** Dados  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $A, B \in \mathcal{K}(X)$  dos subconjuntos compactos de  $X$  definimos la **distancia de Hausdorff** entre  $A$  y  $B$  como

$$h(A, B) = \sup\{d(A, B), d(B, A)\}$$

Para ver que, efectivamente, es una distancia en el sentido de la definición necesitaremos de un lema previo.

**Lema 3.1.6.** Si  $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico, entonces se cumple que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

*Demostración.* Sea  $a \in A$  un punto de cualquiera de  $A$ , entonces para todo  $c \in C$  se cumple que

$$d(a, B) = \inf\{d(a, b) : b \in B\} \leq \inf\{d(a, c) + d(c, b) : b \in B\} = d(a, c) + d(c, B)$$

por tanto, como esto es cierto para cada  $c \in C$

$$d(a, B) \leq \inf\{d(a, c) : c \in C\} + \sup\{d(c, B) : c \in C\} = d(a, C) + d(C, B)$$

y al haber tomado  $a \in A$  un punto cualquiera de  $A$  se tiene que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

□

**Proposición 3.1.7.** *La distancia de Hausdorff es un distancia (en el sentido la definición A.1.1) en  $\mathcal{K}(X)$ .*

*Demostración.* Veamos que se cumplen las condiciones que definen una distancia: Sean  $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$  tres elementos cualesquiera del espacio.

(i) Usando la compacidad sabemos que los supremos e ínfimos se alcanzan, luego

$$h(A, B) = d(a, b)$$

para algún  $a \in A$  y algún  $b \in B$ . Por tanto,  $h(A, B) \geq 0$  para todo  $A, B \in \mathcal{K}(X)$ .

(ii) Claramente  $h(A, A) = \sup\{d(A, A), d(A, A)\} = d(A, A) = \sup\{d(x, A) : x \in A\} = 0$ . Por otro lado, si  $A \neq B$  entonces podemos suponer que existe un  $a \in A$  tal que  $a \notin B$ . Así,  $h(A, B) \geq d(a, B) > 0$ .

(iii)  $h(A, B) = \sup\{d(A, B), d(B, A)\} = h(B, A)$ .

(iv) Veamos que se cumple la desigualdad triangular. Por el lema anterior tenemos que

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$$

luego

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \sup\{d(A, B), d(B, A)\} \leq \sup\{d(B, C), d(C, B)\} + \sup\{d(A, C), d(C, A)\} \\ &= h(B, C) + h(A, C) \end{aligned}$$

lo que finaliza la prueba.

□

### 3.1.1. Completitud de $(\mathcal{H}(X), h)$

Veamos ahora que este espacio métrico, es además completo en el sentido de la definición A.3.3. Para probar la completitud de este espacio  $(\mathcal{H}(X), h)$  necesitaremos unos resultados previos. Todos estos se pueden encontrar en la sección 2.7 de [Bar], en la que está basada esta sección.

Volvemos a recordar que en espacios métricos, la compacidad secuencial es equivalente a la compacidad (por el teorema A.2.8). El siguiente teorema muestra que cuando trabajamos en espacios métricos completos, estas dos equivalen a su vez a que el conjunto sea cerrado y totalmente acotado (definición A.2.7).

**Teorema 3.1.8** (Teorema 4.1 de [Bar]). *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y sea  $S \subset X$ . Entonces  $S$  es secuencialmente compacto si, y solo si, es cerrado y totalmente acotado.*

*Demostración.* “ $\Leftarrow$ ” Supongamos que  $S$  es cerrado y totalmente acotado. Sea  $\{x_i \in S\}$  una sucesión cualquiera de puntos en  $S$ . Construyamos a continuación una subsucesión de Cauchy (definición A.3.1).

Como  $S$  es totalmente acotado podemos encontrar un número finito de bolas cerradas de radio 1 que recubran  $S$  ( $S$  contenido en la unión). Por el principio de Dirichlet (o del palomar) una de estas bolas, llamémosle  $B_1$ , contendrá un número infinito de puntos de la sucesión  $\{x_n\}$ . Consideremos ahora  $B_1 \cap S$ . Este conjunto es también totalmente acotado (está contenido en  $S$ ) por lo que podemos repetir el argumento anterior con bolas de radio  $\frac{1}{2}$ . Llamemos  $B_2$  a la bola que contiene infinitos puntos de la sucesión  $\{x_n\}$ . Así sucesivamente, podemos encontrar una sucesión de bolas cerradas

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots \supset B_n \supset \dots$$

donde cada  $B_n$  tiene radio  $\frac{1}{2^{n-1}}$ . Pasamos a construir la subsucesión de Cauchy.

Sea  $n_1$  un entero cualquiera tal que  $x_{n_1} \in B_1$ . Como en  $B_2$  hay infinitos términos de  $\{x_n\}$  existe un  $n_2 > n_1$  tal que  $x_{n_2} \in B_2$ . Procediendo de esta manera construimos una subsucesión  $\{x_{n_k}\}_k$  con  $x_{n_k} \in B_k$ . Si  $p, q$  son dos enteros positivos tales que  $p < q$ , como  $B_p \cap B_q$  es no vacío si  $y \in B_p \cap B_q$  se cumple

$$d(x_{n_p}, x_{n_q}) \leq d(x_{n_p}, y) + d(y, x_{n_q}) < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} < \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2^{p-1}}$$

Es claro que la subsucesión es de Cauchy, luego por completitud es convergente. Como  $S$  es cerrado, este límite pertenece a  $S$ . Por tanto,  $S$  es secuencialmente compacto.

“ $\Rightarrow$ ” Supongamos que  $S$  es secuencialmente compacto, y por tanto, compacto. Por el teorema A.2.4  $S$  es cerrado. Y por el teorema A.2.9 también es totalmente acotado.  $\square$

Para probar la completitud del espacio  $(\mathcal{H}(X), h)$  necesitamos, además del anterior teorema, los siguientes lemas.

**Definición 3.1.9.** Sea  $S \subset X$  un subconjunto de  $X$  y  $\varepsilon \geq 0$ . Entonces se define

$$S + \varepsilon := \{y \in X : d(x, y) \leq \varepsilon \text{ para algún } x \in S\}$$

La notación anterior está motivada por la suma de Minkowski

$$S + \varepsilon = S + B[0, \varepsilon] = \{s + y : s \in S, y \in B[0, \varepsilon]\}$$

en  $\mathbb{R}^n$  o un espacio vectorial.

**Lema 3.1.10.** Sean  $A, B \in \mathcal{K}(X)$  donde  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $\varepsilon > 0$  un real. Entonces  $h(A, B) \leq \varepsilon$  si, y solo si, se cumple  $A \subset B + \varepsilon$  y  $B \subset A + \varepsilon$ . En particular,

$$h(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset B + \varepsilon, B \subset A + \varepsilon\}.$$

*Demostración.* Probamos que se verifica  $d(A, B) \leq \varepsilon$  si, y solo si,  $A \subset B + \varepsilon$ :

“ $\Rightarrow$ ” Partimos de que  $\sup\{d(a, b) : a \in A\} \leq \varepsilon$  luego para todo  $a \in A$  se cumple  $d(a, B) \leq \varepsilon$ . Por tanto, para cada  $a \in A$  tenemos que  $a \in B + \varepsilon$ , lo que finalmente nos da que  $A \subset B + \varepsilon$ .

“ $\Leftarrow$ ” Sea  $a \in A$ . Como  $A \subset B + \varepsilon$  existirá un  $b \in B$  tal que  $d(a, b) \leq \varepsilon$ . Luego,

$$\inf\{d(a, b) : b \in B\} = d(a, B) \leq \varepsilon$$

y como esto es cierto para cada  $a \in A$  tendremos que  $d(A, B) \leq \varepsilon$ .

Análogamente se cumplirá que  $d(B, A) \leq \varepsilon$  si, y solo si,  $B \subset A + \varepsilon$ . Por tanto, juntando ambas equivalencias habremos probado lo que queríamos.  $\square$

**Lema 3.1.11** (Lema de extensión). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $\{A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$  una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{K}(X), h)$ . Sea una sucesión de enteros  $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$  tal que

$$0 < n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

Supongamos que  $\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1, 2, 3, \dots\}$  es una sucesión de Cauchy en  $(X, d)$ , entonces hay una sucesión de Cauchy  $\{\hat{x}_n \in A_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$  tal que  $\hat{x}_{n_j} = x_{n_j}$  para  $j = 1, 2, 3, \dots$

*Demostración.* Para cada  $n \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  elegimos  $\hat{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}$ , esto es, tomamos  $\hat{x}_n$  de entre los puntos más cercanos a  $x_{n_1}$  que pertenecen a  $A_n$ , que existirá debido a la compacidad de  $A_n$ .

Por otro lado, para cada  $j \in \{2, 3, \dots\}$  y cada  $n \in \{n_j + 1, \dots, n_{j+1}\}$  elegimos

$$\hat{x}_n \in \{x \in A_n : d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}$$

y así construido, veamos que  $\widehat{x}_n$  es la sucesión que buscábamos (es de Cauchy y extensión de la inicial). Claramente  $\widehat{x}_{n_j} = x_{n_j}$  y  $\widehat{x}_{n_j} \in A_n$  (por construcción).

Para ver que es una sucesión de Cauchy sea  $\varepsilon > 0$ . Por ser  $\{x_{n_i}\}$  de Cauchy existe un entero positivo  $N_1$  tal que para cada  $n_k, n_j \geq N_1$  se tiene que

$$d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \varepsilon/3.$$

Por otro lado, al ser  $\{A_n\}$  de Cauchy existe un entero positivo  $N_2$  tal que para cada  $m, n \geq N_2$  se tiene que

$$h(A_m, A_n) \leq \varepsilon/3$$

y tomando  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , para cada  $m, n \geq N$  se tiene

$$d(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) \leq d(\widehat{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \widehat{x}_n)$$

donde  $m \in \{n_{j-1} + 1, \dots, n_j\}$  y  $n \in \{n_{k-1} + 1, \dots, n_k\}$ .

Por un lado, se tendrá que  $d(x_{n_j}, x_{n_k}) \leq \varepsilon/3$ , y por otro lado  $h(A_m, A_{n_j}) \leq \varepsilon/3$ , luego existirá algún  $y \in A_m \cap (\{x_{n_j} + \varepsilon/3\})$  y tenemos que  $d(\widehat{x}_m, x_{n_j}) \leq \varepsilon/3$ . Análogamente obtenemos  $d(x_{n_k}, \widehat{x}_n) \leq \varepsilon/3$ .

Finalmente, juntando las desigualdades anteriores nos queda

$$d(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n) \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

y la sucesión es de Cauchy. □

Utilizando estos lemas previos pasamos a probar la completitud del espacio  $(\mathcal{H}(X), h)$ . Este teorema se corresponde con el 2.7.1 de [Bar], de donde hemos sacado esta demostración.

**Teorema 3.1.12.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo, entonces  $(\mathcal{H}(X), h)$  es también un espacio métrico completo.*

*Además, si  $\{A_n \in \mathcal{H}(X)\}_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy entonces*

$$A = \lim_n A_n \in \mathcal{H}(X)$$

*está caracterizado como*

$$A = \{x \in X : \text{hay una sucesión de Cauchy } \{x_n \in A_n\} \text{ que converge a } x\}$$

*Demostración.* Sean  $\{A_n\}$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{H}(X)$ , y  $A$  el conjunto definido como en la última parte del enunciado. Dividimos la demostración en cinco partes

- (a)  $A$  es no vacío;
- (b)  $A$  es cerrado;
- (c) para cada  $\varepsilon > 0$  existe un entero positivo  $N$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $A \subset A_n + \varepsilon$ ;
- (d)  $A$  es totalmente acotado, que junto con (b) por el teorema 3.1.8 es compacto,  $A \in \mathcal{K}(X)$ ;
- (e)  $\lim_n A_n = A$ .

Si demostramos estos apartados obtenemos que la sucesión de Cauchy  $\{A_n\}$  converge a  $A \in \mathcal{K}(X)$ , luego tendremos completitud (definición A.3.3).

(a) Como  $\{A_n\}$  es de Cauchy sobre  $\mathcal{K}(X)$  entonces existe un entero  $N_1$  tal que para  $m, n > N_1$  se cumple

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2}$$

y en general, existirá una sucesión de enteros  $N_1 < N_2 < N_3 < \dots$  tales que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i} \quad \text{para } m, n > N_i$$

Elegimos un  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  cualquiera. Como  $h(A_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$  podemos encontrar un  $x_{N_2} \in A_{N_2}$  tal que  $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}$ . Repitiendo el argumento, podemos suponer que tenemos  $x_{N_i} \in A_{N_i}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$  tales que  $d(x_{N_{i-1}}, x_{N_i}) < \frac{1}{2^{i-1}}$ . Como  $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$  y  $x_{N_k} \in A_{N_k}$  habrá un  $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$  tal que  $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) < \frac{1}{2^k}$ . Por tanto, por inducción existirá una sucesión  $\{x_{N_i} \in A_{N_i}\}$  tal que  $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$ .

Para ver que esta sucesión es de Cauchy sea  $\varepsilon > 0$  y un entero  $N_\varepsilon$  tal que  $\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$ , entonces para  $m > n \geq N_\varepsilon$  se cumple

$$d(x_{N_m}, x_{N_n}) \leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) < \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$$

Por último, aplicando el lema de extensión 3.1.11 existe una sucesión de Cauchy  $\{a_i \in A_i\}$  con  $a_{N_i} = x_{N_i}$ , y como  $(X, d)$  es completo será convergente. Luego  $\lim_i a_i$  existe y por definición de  $A$ ,  $\lim_i a_i \in A$ .

(b) Para ver que  $A$  es cerrado supongamos una sucesión  $\{a_i \in A\}$  que converge a un punto  $a$  y veamos que  $a \in A$ .

Para cada entero  $i$ , como  $a_i \in A$ , por definición de  $A$  existe una sucesión  $\{x_{i_n} \in A_n\}$  tal que  $\lim_n x_{i_n} = a_i$ . Como  $\{a_i\}$  converge a  $a$  existe una sucesión creciente de enteros positivos  $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que

$$d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$$

y de igual manera, como  $\{x_{i_n}\}$  converge a  $a_i$  para cada  $i$  hay una sucesión de enteros positivos  $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$  tal que

$$d(x_{N_i, m_i}, a_{N_i}) \leq \frac{1}{i}$$

. Por tanto, para cada  $i$  se cumple que

$$d(x_{N_i, m_i}, a) \leq d(x_{N_i, n_i}, a_{N_i}) + d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i} + \frac{1}{i} = \frac{2}{i}$$

Tomando ahora  $y_{m_i} := x_{N_i, m_i}$  para cada  $i$  tendremos una sucesión  $\{y_{m_i} \in A_{m_i}\}$  con  $\lim_i y_{m_i} = a$ . Luego por el lema de extensión 3.1.11 esta se puede extender a otra sucesión  $\{z_i \in A_i\}$  convergente al punto  $a$  y, por tanto,  $a$  pertenecerá a  $A$ .

(c) Como  $\{A_n \in \mathcal{K}(X)\}$  es una sucesión de Cauchy para cada  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $N > 0$  tal que

$$h(A_m, A_n) \leq \varepsilon \quad \text{para } m, n \geq N$$

Tomamos  $n \geq N$ , luego para  $m \geq n$  se cumple que  $A_m \subset A_n + \varepsilon$ . Para probar que  $A \subset A_n + \varepsilon$  sea  $a \in A$  un punto cualquiera y veamos que  $a \in A_n + \varepsilon$ . Por definición de  $A$  existe una sucesión  $\{a_i \in A_i\}$  tal que  $\lim_i a_i = a$ . Podemos suponer  $N$  suficientemente grande tal que se cumpla  $d(a_m, a) < \varepsilon$  para cada  $m \geq N$ . Como  $a_m \in A_m$  y  $A_m \subset A_n + \varepsilon$  se cumple que  $a_m \in A_n + \varepsilon$ . Por el teorema A.2.4 sabemos que  $A_n$  es cerrado (por ser compacto) y, por tanto,  $A_n + \varepsilon$  también es cerrado. Entonces, como  $a_m \in A_n + \varepsilon$  para  $m \geq N$  y  $\lim_i a_i = a$  tenemos que  $a \in A_n + \varepsilon$ .

(d) Supongamos que  $A$  no es totalmente acotado, entonces para algún  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar una sucesión  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  en  $A$  tal que  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  si  $i \neq j$ . Veamos que esto nos lleva a una contradicción.

Por (c) existe un  $n$  suficientemente grande para el que  $A \subset A_n + \frac{\varepsilon}{3}$ , luego para cada  $x_i$  hay un correspondiente  $y_i \in A_n$  para el que  $d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ . Como  $A_n$  es compacto alguna subsucesión  $\{y_{n_i}\}$  de  $\{y_i\}$  converge. Entonces podemos encontrar  $y_{n_j}$  e  $y_{n_k}$  tales que  $d(y_{n_j}, y_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{3}$ . Por tanto, se cumple

$$d(x_{n_j}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_j}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, y_{n_k}) + d(y_{n_k}, x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

que contradice la forma en que se ha tomado  $x_{n_i}$ .

(e) Por (d)  $A \in \mathcal{K}(X)$ . Por (c) para cada  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $N$  tal que para  $n \geq N$  se cumple  $A \subset A_n + \varepsilon$ . Por tanto, si demostramos que para cada  $\varepsilon > 0$  también existe un entero  $M$  tal que si  $n \geq M$  se cumpla  $A_n \subset A + \varepsilon$ , entonces tomando  $n \geq \max\{N, M\}$  y aplicando el lema 3.1.10  $h(A_n, A) \leq \varepsilon$  y habremos terminado.

Para probar esto sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario. Como  $\{A_n \in \mathcal{K}(X)\}$  es de Cauchy sea  $N$  tal que para  $m, n \geq N$  se cumple  $h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Entonces  $A_n \subset A_m + \varepsilon$  para  $m, n \geq N$ . Sea  $n \geq N$  e  $y \in A_n$ . De igual modo, podemos encontrar una sucesión de enteros  $n < N_1 < N_2 < \dots$  tales que

$$A_m \subset A_k + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \quad \text{para cada } m, k \geq N_j$$

Como  $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$  e  $y \in A_n$  existe  $x_{N_1} \in A_{N_1}$  tal que  $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . En general, podemos encontrar una sucesión  $\{x_{N_j} \in A_{N_j}\}$  con  $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ . Por tanto, se cumple

$$\begin{aligned} d(y, x_{N_j}) &\leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \dots + d(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} < \varepsilon, \quad \text{para todo } j > 0 \end{aligned}$$

y, además, la sucesión  $\{x_{N_j}\}$  es de Cauchy. Por completitud  $\{x_{N_j}\}$  converge a un punto  $x$  que entonces pertenece a  $A$ . Por otra parte,  $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$  implica que  $d(y, x) \leq \varepsilon$ . Por tanto,  $A_n \subset A + \varepsilon$  para  $n \geq N$  como queríamos ver. □

### 3.2. Aplicaciones contractivas

Recordemos ahora las definiciones de punto fijo y aplicación contractiva sobre un espacio métrico  $(X, d)$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una función sobre un espacio métrico  $(X, d)$ . Un punto  $\bar{x} \in X$  que cumple  $f(\bar{x}) = \bar{x}$  se denomina **punto fijo** de  $f$ .

**Definición 3.2.2.** Una función  $f : X \rightarrow X$  sobre un espacio métrico  $(X, d)$  se dice **contractiva** cuando existe una constante  $c$ ,  $0 < c < 1$ , verificando

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y) \quad \text{para cada } x, y \in X$$

Esta constante  $c$  se denomina constante de contractividad.

En el siguiente lema vemos cómo trasladar una aplicación contractiva sobre  $(X, d)$  al espacio  $(\mathcal{K}(X), h)$ .

**Lema 3.2.3.** Sea  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva sobre un espacio métrico  $(X, d)$  con constante de contractividad  $c$ . Entonces la aplicación  $f : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$  definida como

$$f(B) := \{f(x) : x \in B\}, \quad \text{para cada } B \in \mathcal{K}(X)$$

es contractiva en  $(\mathcal{K}(X), h)$  con constante de contractividad  $c$ .

*Demostración.* Por el teorema A.2.11 la aplicación  $f$  está bien definida, ya que, lleva compactos a compactos. Sean  $B, C \in \mathcal{K}(X)$ , entonces

$$\begin{aligned} d(f(B), f(C)) &= \sup\{\inf\{d(f(x), f(y)) : y \in C\} : x \in B\} \\ &\leq \sup\{\inf\{cd(x, y) : y \in C\} : x \in B\} = cd(B, C) \\ d(f(C), f(B)) &= (\text{análogamente}) \leq cd(C, B) \end{aligned}$$

y por tanto, juntando ambas desigualdades

$$\begin{aligned} h(f(B), f(C)) &= \sup\{d(f(B), f(C)), d(f(C), f(B))\} \\ &\leq c \sup\{d(B, C), d(C, B)\} = ch(B, C) \end{aligned}$$

□

Habitualmente, un conjunto fractal (pensemos en el conjunto de Cantor) vendrá definido por más de una aplicación (en ese caso, una homotecia y una homotecia con una traslación). Los siguientes lemas muestran cómo al combinar varias aplicaciones contractivas obtenemos otra aplicación contractiva.

**Lema 3.2.4.** *Para cada  $A, B, C, D \in \mathcal{K}(X)$  se cumple*

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \sup\{h(A, C), h(B, D)\}$$

donde  $h$  es la distancia de Hausdorff.

*Demostración.* Vamos a probarlo usando el lema 3.1.10. Sea  $\varepsilon > \sup\{h(A, C), h(B, D)\}$ . Entonces por un lado se cumple que  $C \subset A + \varepsilon$  y  $D \subset B + \varepsilon$ , luego  $C \cup D \subset (A \cup B) + \varepsilon$ ; y por otro lado  $A \subset C + \varepsilon$  y  $B \subset D + \varepsilon$  que implica que  $A \cup B \subset (C \cup D) + \varepsilon$ . Con ambas inclusiones deducimos que

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \varepsilon$$

y por tanto, tomando ínfimos para  $\varepsilon \searrow \sup\{h(A, C), h(B, D)\}$ , obtenemos lo que queríamos. □

**Lema 3.2.5.** *Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $\mathcal{S} = \{f_n : n = 1, 2, \dots, m\}$  un conjunto de aplicaciones contractivas en  $(\mathcal{K}(X), h)$  con constantes de contractividad  $c_n$  para cada  $f_n$ . La aplicación  $F : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$  definida como*

$$F(B) := \bigcup_{i=1}^m f_i(B), \quad \text{para cada } B \in \mathcal{K}(X)$$

*es contractiva con constante de contractividad  $c = \max\{c_n : n = 1, 2, \dots, m\}$ . Observar además que la unión finita de compactos es compacto y cada  $f_i(B)$  lo es.*

*Demostración.* Veámoslo para el caso  $m = 2$  y, por inducción, lo tendremos para cualquier  $m$ .

Sean  $B, C \in \mathcal{K}(X)$ . Se cumple que

$$\begin{aligned} h(F(B), F(C)) &= h(f_1(B) \cup f_2(B), f_1(C) \cup f_2(C)) \\ &\leq \sup\{h(f_1(B), f_1(C)), h(f_2(B), f_2(C))\} \text{ (por 3.2.4)} \\ &\leq \sup\{c_1 h(B, C), c_2 h(B, C)\} \leq ch(B, C) \end{aligned}$$

y, por tanto,  $F$  es contractiva con constante de contractividad  $c$ .

□

Con este resultado podemos considerar un fractal como el punto fijo de una sola función contractiva sobre el espacio  $(\mathcal{K}(X), h)$ . Esto nos lo asegurará el Teorema del punto fijo de Banach (3.3.2) que veremos en la sección siguiente. Volviendo una vez más sobre el conjunto de Cantor (ver ejemplo 2.2.15), este estará definido por la aplicación contractiva

$$F(A) = f_1(A) \cup f_2(A) \quad \text{siendo } A \text{ el conjunto de Cantor}$$

donde  $f_1(x) = \frac{1}{3}x$  y  $f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ . Muchos fractales en  $\mathbb{R}^2$ , como la curva de von Koch, estarán definidas a partir de transformaciones afines (homotecias, rotaciones, reflexiones y traslaciones) en el plano.

**Observación 3.2.6.** En  $\mathbb{R}^2$  recordemos que una aplicación afín  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es aquella que se puede escribir en forma matricial como

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta & -r \sin \theta \\ r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

donde  $(e, f) \in \mathbb{R}^2$  es una traslación;  $r \in \mathbb{R}$  es el factor de homotecia; y  $0 \leq \theta < 2\pi$  es el ángulo de rotación.

**Ejemplo 3.2.7.** La curva de von Koch (ver figura 1.3) está definida por cuatro aplicaciones afines sobre  $\mathbb{R}^2$ . Combinando homotecias de razón  $1/3$ , rotaciones de ángulos  $\pi/3$  o  $-\pi/3$  y las respectivas traslaciones en cada caso.

$$\begin{aligned} f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/6 & \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/6 \end{pmatrix} \\ f_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Que un fractal quede determinado por un espacio métrico y unas aplicaciones contractivas nos lleva, finalmente, a definir lo que es un sistema de funciones iteradas.

**Definición 3.2.8.** Denominaremos *sistema de funciones iteradas* o *IFS* (del inglés *Iterated function system*) a un conjunto de aplicaciones contractivas  $\mathcal{S} = \{f_n : n = 1, 2, \dots, m\}$  con constantes de contractividad  $\{c_n\}$  sobre un espacio métrico completo  $(X, d)$ . Lo denotaremos por

$$\{X; f_n, n = 1, 2, \dots, m\} = \{X; \mathcal{S}\}$$

y diremos que tiene constante de contractividad  $c = \max\{c_n : n = 1, 2, \dots, m\}$ .

**Ejemplo 3.2.9.** A partir del ejemplo 3.2.7 anterior podemos afirmar que el IFS  $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4\}$  genera o determina la curva de von Koch (como nos asegurará el teorema 3.3.2)

### 3.3. Teorema del punto fijo de Banach

Comenzamos esta sección recordando el Teorema del punto fijo de Banach, también conocido como Teorema de la aplicación contractiva, en su versión general (ver Teorema 6.1 de [Bar]).

**Teorema 3.3.1** (Teorema del punto fijo de Banach). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico completo y  $f : X \rightarrow X$  una aplicación contractiva con constante de contractividad  $c$ . Entonces la ecuación  $f(x) = x$  tiene una solución única  $\bar{x} \in X$ , esto es, un único punto fijo.

Esta solución se encuentra como el límite de la sucesión de iteradas

$$\bar{x} = \lim_n f^n(x_0)$$

para un  $x_0$  arbitrario y donde hemos utilizado la notación  $f^n(x_0) = f \circ f^{n-1}(x_0)$ . Además, el error en cada etapa está acotado por

$$e_n = d(x_n, \bar{x}) \leq \frac{c^n}{1-c} d(x_1, x_0)$$

*Demostración.* La unicidad del punto fijo (en caso de existencia) se obtiene por la contractividad de  $f$ . En efecto, si  $f(x) = x$  y  $f(y) = y$

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y)$$

y como  $0 < c < 1$  esto solo es posible cuando  $d(x, y) = 0$ , es decir,  $x = y$  (por definición A.1.1).

Como  $f$  es contractiva claramente es continua. Sea la sucesión  $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$ . Si la sucesión  $(x_n)$  converge, su límite es el punto fijo de  $f$

$$f(\bar{x}) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = \lim_n x_n = \bar{x}$$

Veamos que por contractividad de  $f$  la sucesión  $x_n$  es de Cauchy (definición A.3.1), y por tanto, al ser el espacio métrico completo (definición A.3.3), convergente. Se cumplen las desigualdades siguientes

$$d(x_n, x_{n-1}) \leq c d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq c^2 d(x_{n-2}, x_{n-3}) \leq c^{n-1} d(x_1, x_0)$$

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + d(x_{n+p-1}, x_n) \leq \dots \\ &\leq d(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (c^{n+p-1} + c^{n+p-2} + \dots + c^n) d(x_1, x_0) \\ &= \frac{c^n - c^{n+p}}{1 - c} d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

luego, tomando límites para  $n$  vemos que el último término converge a 0 y la sucesión es claramente de Cauchy (dado un  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar términos  $n$  y  $p$  para los que la distancia  $d(x_{n+p}, x_n)$  es menor que  $\varepsilon$ ). La cota para el error se deduce de la última desigualdad.  $\square$

En las secciones anteriores hemos probado que  $(\mathcal{K}(X), h)$  es un espacio métrico completo (teorema 3.1.12) y que la “unión” de un conjunto de aplicaciones contractivas es contractiva (lema 3.2.5), por tanto, podemos aplicar el Teorema del punto fijo de Banach al caso particular de un IFS (definición 3.2.8).

**Teorema 3.3.2.** *Dado un IFS  $\{X; f_n, n = 1, 2, \dots, m\}$  existe un único conjunto  $A \in \mathcal{K}(X)$  tal que  $F(A) = \cup_{i=1}^m f_i(A) = A$ . Este conjunto  $A$  también se denomina atractor del IFS.*

*Además, este conjunto se obtiene como*

$$A = \lim_n F^n(A_0)$$

*para cualquier conjunto inicial  $A_0 \in \mathcal{K}(X)$ .*

Destacamos el hecho el fractal que genera (atractor) un determinado IFS se puede obtener partiendo de cualquier conjunto. Por ejemplo, dado el IFS  $\{\mathbb{R}; f_1 = \frac{1}{3}x, f_2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\}$ , podemos partir de un segmento o de un cuadrado y en ambos casos obtendremos el conjunto de Cantor (por los comentarios de la página 28).

### 3.4. Dimensión de los IFS

Una vez formalizados los IFS y en relación con el capítulo 2, pasamos a ver una fórmula para calcular la dimensión de Hausdorff de estos fractales (los atractores de los IFS). Trabajamos ahora

sobre  $(\mathbb{R}^n, d)$  donde  $d$  es la distancia euclídea por ser el espacio habitual donde los definiremos. Esta parte se corresponde con la sección 9.2 de [Fal].

Sea  $\{\mathbb{R}^n; f_i, i = 1, 2, \dots, m\}$  un IFS. Supongamos que las contracciones  $f_i$  son similitudes con radios (o constantes) de similitud  $\lambda_i$  tales que  $0 < \lambda_i < 1$ , esto es,

$$d(f_i(x), f_i(y)) = \lambda_i d(x, y) \quad \text{para cada } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

El fractal (atractor) viene determinado por

$$A = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)$$

En el caso particular de que esta unión sea disjunta podemos calcular la dimensión de Hausdorff de este conjunto. Utilizando la proposición 2.2.10 tenemos que

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^m f_i(A)\right) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^s(f_i(A)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^s \mathcal{H}^s(A)$$

y si suponemos que  $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ , la dimensión del conjunto  $A$ ,  $s = \dim_{\text{H}} A$ , viene dada por la ecuación

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^s = 1 \quad (3.1)$$

Con el teorema 3.4.6 vamos a establecer que la fórmula 3.1 define la dimensión de Hausdorff de  $A$  (no importa que las uniones no sean disjuntas) y que  $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ . Para demostrar esto necesitaremos una condición adicional sobre las contracciones, además de unos lemas y resultados previos.

**Definición 3.4.1.** Sea  $\{\mathbb{R}^n; f_i, i = 1, 2, \dots, m\}$  un IFS. Decimos que el IFS (o el conjunto de contracciones) cumple la **condición del conjunto abierto** si existe un conjunto no vacío, acotado y abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  tal que

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(U) \subset U$$

con dicha unión disjunta.

**Lema 3.4.2.** En  $(\mathbb{R}^n, d)$  sean  $0 < a_1 < a_2 < \infty$  y  $0 < r < \infty$ . Supongamos  $\{U_i \subset \mathbb{R}^n\}$  una colección de subconjuntos abiertos disjuntos dos a dos tales que, cada  $U_i$  contiene una bola de radio  $a_1 r$  y está contenido en una bola de radio  $a_2 r$ . Entonces, cualquier bola  $B$  de radio  $r$  corta como mucho a  $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$  de las clausuras  $\bar{U}_i$ .

*Demostración.* Si algún  $\bar{U}_i$  corta a la bola  $B(0, r)$ , como  $U_i$  está contenido en una bola de radio  $a_2 r$ , entonces  $\bar{U}_i$  está contenida en la bola  $B(0, (1 + 2a_2)r)$ . Supongamos que  $k$  de estas clausuras cortan a  $B(0, r)$ . Como los  $U_i$  son disjuntos y cada uno contiene una bola de radio  $a_1 r$ , sumando los volúmenes obtenemos  $k(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$  de donde se obtiene el resultado.  $\square$

Definimos las nociones de distribución de masa en  $\mathbb{R}^n$  y de soporte de una medida exterior. Intuitivamente hablando el soporte de una medida exterior es el conjunto en el que la medida está concentrada.

**Definición 3.4.3.** *Formalmente, se llama soporte de una medida exterior  $\mu$  al complementario del mayor abierto  $U$  que es  $\mu$ -nulo en  $\mathbb{R}^n$ , esto es,  $\mu(U) = 0$ . El soporte de una medida es siempre cerrado y decir que  $x \in \mathbb{R}^n$  pertenece al soporte de  $\mu$  significa que  $\mu(B(x, r)) > 0$  para todo radio  $r > 0$ .*

*Decimos que  $\mu$  es una medida exterior en un conjunto  $A$ , si este contiene al soporte de  $\mu$ . Una medida exterior en un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  para el cual  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$  se dice una distribución de masa.*

**Proposición 3.4.4** (Principio de distribución de masa). *Sea  $\mu$  una distribución de masa en  $A \subset \mathbb{R}^n$  y supongamos que para  $s > 0$  existen  $\lambda > 0$  y  $\delta > 0$  tales que*

$$\mu(B) \leq \lambda (\text{diam}(B))^s \quad (3.2)$$

para cada subconjunto  $B \in \mathbb{R}^n$  con  $\text{diam}(B) < \delta$ . Entonces se tiene que

$$\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{\lambda} \quad \text{y} \quad s \leq \dim_{\text{H}}(A).$$

*Demostración.* Sea  $\{A_i\}$  un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$ , entonces

$$0 < \mu(A) = \mu(\cup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i) \leq \lambda \sum_i (\text{diam}(A_i))^s$$

donde la última desigualdad se obtiene de la fórmula 3.2. Tomando ínfimos queda  $\lambda \mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \mu(A)$ , luego  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{\lambda}$ . Y tomando límites cuando  $\delta \rightarrow 0$  obtenemos

$$\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\mu(A)}{\lambda} > 0$$

de donde, por la caracterización de la dimensión de Hausdorff (página 12), deducimos que  $s \leq \dim_{\text{H}}(A)$ .  $\square$

**Proposición 3.4.5.** Sea  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_m\}$  un conjunto de similitudes con radios  $\{r_1, \dots, r_m\}$  y sea  $\mathcal{S}_n$  el conjunto de todas las posibles combinaciones de la forma  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$  donde  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $A$  es el atractor del conjunto de similitudes  $\mathcal{S}$ , entonces para todo  $N \geq 1$ ,  $A$  también es el atractor de  $\mathcal{S}_N$ .

*Demostración.* Hacemos inducción sobre  $N$ . Para  $N = 1$  se cumple por ser  $A$  atractor de  $\mathcal{S}$ . Supongamos que se cumple para  $\mathcal{S}_{N-1}$ , esto es,

$$A = \bigcup_{f \in \mathcal{S}_{N-1}} f(A) = \bigcup_{i_1, \dots, i_{N-1}} f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{N-1}}(A)$$

con la unión sobre todas las posibles combinaciones  $i_1, \dots, i_{N-1} \in \{1, \dots, m\}$ .

Por tanto, aplicando la hipótesis de inducción tenemos

$$A = \bigcup_{j=1}^m f_j(A) = \bigcup_{j, i_1, \dots, i_{N-1}} f_j \circ f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{N-1}}(A) = \bigcup_{f \in \mathcal{S}_N} f(A)$$

□

Finalmente, pasamos a probar el resultado principal de esta sección, del cual obtendremos la fórmula para calcular la dimensión de Hausdorff. Nos basamos en el teorema 9.3 de [Fal], página 119 del mismo.

**Teorema 3.4.6.** Supongamos que se cumple la condición del conjunto abierto (3.4.1) para un conjunto de similitudes  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_m\}$  en  $\mathbb{R}^n$  con radios  $\lambda_i$  para cada  $i_1, \dots, m$ . Sea  $A$  el atractor de  $\mathcal{S}$ , esto es,

$$A = \bigcup_{i=1}^m f_i(A)$$

entonces  $\dim_{\text{H}}(A) = s$ , donde el valor de  $s$  viene determinado por la fórmula 3.1, es decir,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i^s = 1$$

Además, para este valor de  $s$ ,  $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ .

*Demostración.* Sea  $s$  el valor que viene dado por la fórmula 3.1 y veamos que así definido se cumple  $s = \dim_s(A)$ .

“ $\geq$ ”: Denotemos por  $f_{i_1, \dots, i_n} = f_{i_n} \circ \dots \circ f_{i_1}$  la función composición y recordemos que  $\mathcal{S}_N$  es el conjunto de todas las posibles combinaciones de la forma  $f_{i_1, \dots, i_n}$  donde  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ . Por la proposición 3.4.5 se cumple

$$A = \bigcup_{f \in \mathcal{S}_N} f(A) = \bigcup_{i_1, \dots, i_N} f_{i_1, \dots, i_N}(A)$$

Como cada  $f_j$  es una similitud de radio  $\lambda_j$  entonces  $f_{i_1, \dots, i_n}$  es una similitud de radio  $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_n}$ , por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{S}_N} (\text{diam}(f(A)))^s &= \sum_{i_1, \dots, i_N} (\text{diam}(f_{i_1, \dots, i_N}(A)))^s = \sum_{i_1, \dots, i_N} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_N})^s \cdot (\text{diam}(A))^s \\ &= \left( \sum_{i_1=1}^m \lambda_{i_1}^s \right) \cdots \left( \sum_{i_N=1}^m \lambda_{i_N}^s \right) \cdot (\text{diam}(A))^s = (\text{diam}(A))^s \end{aligned}$$

Como para cualquier  $\delta > 0$  podemos elegir  $N$  tal que

$$\text{diam}(f_{i_1, \dots, i_N}(A)) \leq (\max_i \lambda_i)^N \cdot \text{diam}(A) \leq \delta$$

entonces  $\{f_{i_1, \dots, i_N}(A) : i_1, \dots, i_N \in \{1, \dots, m\}\}$  es un  $\delta$ -recubrimiento de  $A$ . Por tanto, tomando ínfimos nos queda  $\mathcal{H}_\delta^s(A) \leq (\text{diam}(A))^s$ , y tomando límites cuando  $\delta \rightarrow 0$

$$\mathcal{H}^s(A) \leq (\text{diam}(A))^s < +\infty$$

En consecuencia,  $s \geq \dim_{\text{H}} A$ .

“ $\leq$ ”: Para ver esta desigualdad dividimos la prueba en dos partes. En la parte (a) definiremos una función de distribución  $\tilde{\mu}$  sobre  $A$  y en la parte (b) vemos que esta cumple las condiciones del principio de distribución de masa (proposición 3.4.4).

- (a) Sea el conjunto de sucesiones  $I = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq m\}$  y sea el subconjunto de  $I$  con los  $k$  primeros elementos  $(i_1, \dots, i_k)$  fijos  $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq m\}$ . Podemos poner una distribución de masa<sup>1</sup>  $\mu$  en  $I$  definiendo

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \lambda_{i_1}^s \cdots \lambda_{i_k}^s$$

Para ver que, en efecto, es una distribución de masa basta tener en cuenta que  $I_{i_1, \dots, i_k, i_{k+1}} \subset I_{i_1, \dots, i_k}$  y que para cada  $1 \leq i_n \leq m$  se cumple  $\lambda_{i_n} < 1$ , ya que, aplicando la fórmula 3.1 se da la igualdad

$$\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \lambda_{i_1}^s \cdots \lambda_{i_k}^s = \sum_{i=1}^m (\lambda_{i_1}^s \cdots \lambda_{i_k}^s \cdot \lambda_i^s) = \sum_{i=1}^m \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$$

<sup>1</sup>Extendiendo la definición a cualquier  $J \subset I$  como

$$\mu^*(J) = \inf \left\{ \sum_{(i_1, \dots, i_k) \in B} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) : J \in \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in B} I_{i_1, \dots, i_k} \right\}$$

$\mu^*$  es una medida exterior métrica en  $I = \prod_{k=1}^{\infty} C_k$  (espacio métrico con la distancia producto de las distribuciones discretas) donde  $C_k$  son copias de  $C = \{1, \dots, m\}$  (ver sección 1.3 de [Fal]).

con lo que tenemos  $\mu(I) = 1$ . A partir de esta  $\mu$  definimos nuestra distribución de masa  $\tilde{\mu}$  en  $A$  de manera natural como

$$\tilde{\mu}(B) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) : f_{i_1, i_2, \dots}(A) \in B\})$$

para cada subconjunto  $B \subset A$ , ya que, así definida  $\tilde{\mu}(A) = \mu(\{(i_1, \dots) : f_{i_1, \dots}(A) \in A\}) = \mu(I) = 1$ .

- (b) Veamos ahora que  $\tilde{\mu}$  cumple las condiciones del principio de distribución de masa (proposición 3.4.4). Sea  $U$  el conjunto que se obtiene de la condición del conjunto abierto 3.4.1, entonces

$$\bigcup_{i=1}^m f_i(U) \subset U \quad (\text{unión disjunta})$$

Así,  $F(\bar{U}) = \bigcup_{i=1}^m f_i(\bar{U}) \subset \bar{U}$  y como por el teorema del punto fijo de Banach (3.3.2) la sucesión  $F^k(\bar{U})$  converge a  $A$  y se cumple (inducción en  $k$ )

$$F^k(\bar{U}) = F^{k-1} \circ F(\bar{U}) = F^{k-1}(\bigcup_{i=1}^m f_i(\bar{U}) \subset F^{k-1}(\bar{U}) \subset \bar{U}$$

entonces  $A \subset \bar{U}$  y  $f_{i_1, \dots, i_k}(A) \subset f_{i_1, \dots, i_k}(\bar{U})$  para cada secuencia finita  $(i_1, \dots, i_k)$ .

Sea  $B$  una bola cualquiera de radio  $r < 1$  y veamos cómo podemos estimar  $\tilde{\mu}(B)$ . Como  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, r < 1$ , para cada sucesión  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  existe un primer término  $i_k$  que cumple

$$(\min_i \lambda_i)^k \cdot r \leq \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \leq r \quad (3.3)$$

y sea  $Q$  el conjunto de todas las posibles secuencias  $(i_1, \dots, i_k)$  obtenidas de esta manera. Así, para cada sucesión  $(i_1, i_2, \dots) \in I$  habrá un único entero  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$ . Como  $f_1(U), \dots, f_m(U)$  son disjuntos, también lo son  $f_{i_1, \dots, i_{k-1}, 1}(U), \dots, f_{i_1, \dots, i_{k-1}, m}(U)$  para cada  $(i_1, \dots, i_{k-1})$ , por tanto la colección de abiertos  $\{f_{i_1, \dots, i_k}(U) : (i_1, \dots, i_k) \in Q\}$  es disjunta. Además,  $A \subset \bigcup_Q f_{i_1, \dots, i_k}(A) \subset \bigcup_Q f_{i_1, \dots, i_k}(\bar{U})$ .

Sean ahora  $a_1$  y  $a_2$  tales que el abierto  $U$  contiene una bola de radio  $a_1$  y está contenida en una de radio  $a_2$ . Entonces por las desigualdades 3.3 para cada  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$  el conjunto  $f_{i_1, \dots, i_k}(U)$  contiene una bola de radio  $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \cdot a_1$ , y por tanto una de radio  $(\min_i \lambda_i)^k \cdot a_1 \cdot r$ , y está contenida en una bola de radio  $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} \cdot a_2$ , y por tanto en una de radio  $a_2 \cdot r$ . Si  $Q_1$  denota las secuencias  $(i_1, \dots, i_k) \in Q$  tales que  $B$  corta a  $f_{i_1, \dots, i_k}(\bar{U})$ , entonces por el lema 3.4.2 en  $Q_1$  hay como máximo  $q = (1 + a_2)^n \cdot a_1^{-n} \cdot (\min_i \lambda_i)^{-nk}$  elementos. Por tanto,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &= \tilde{\mu}(A \cap B) = \mu(\{(i_1, i_2, \dots) : f_{i_1, i_2, \dots}(A) \in A \cap B\}) \\ &\leq \mu(\{\bigcup_Q I_{i_1, \dots, i_k}\}) \end{aligned}$$

ya que, como  $f_{i_1, \dots}(A) \in A \cap B \subset \cup_{Q_1} f_{i_1, \dots, i_k}(\bar{U})$  por definición de  $Q_1$ , entonces existe un entero  $k$  tal que  $(i_1, \dots, i_k) \in Q_1$ . Luego

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &\leq \sum_{Q_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{Q_1} (\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k})^s \\ &\leq \sum_{Q_1} r^s \leq r^s \cdot q \end{aligned}$$

Finalmente, como cualquier conjunto  $C$  está contenido en una bola de radio  $\text{diam}(C)$  tenemos que

$$\tilde{\mu}(C) \leq \text{diam}(C)^s \cdot q$$

y, por tanto, estamos en condiciones de aplicar el principio de distribución de masa 3.4.4. Aplicando dicha proposición concluimos que se cumple

$$\mathcal{H}^s(A) \geq \frac{\tilde{\mu}(A)}{q} = \frac{1}{q} > 0$$

y, por tanto,  $s \leq \dim_{\text{H}} A$ .

□

**Ejemplo 3.4.7** (Curva de von Koch). *Para generar la curva de von Koch (ver figura 1.3) en cada iteración un segmento se sustituye por otros cuatro de longitud un tercio del anterior. Esto es equivalente (como hemos visto en el ejemplo 3.2.7) a aplicar cuatro funciones contractivas con factor de homotecia  $\frac{1}{3}$  en cada paso. Su dimensión de Hausdorff  $s$ , por el teorema 3.4.6, vendrá dada por la ecuación*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

y por tanto

$$s = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1,26186$$

**Ejemplo 3.4.8** (Curva cuadrática de von Koch tipo 1). *Esta curva es una modificación de la curva de von Koch con un ángulo recto. Partiendo de un segmento en cada iteración se sustituye el tercio central por otros tres formando un cuadrado como muestra la figura 3.2. Es el atractor del IFS  $\{\mathbb{R}^2; f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$  donde las aplicaciones vienen dadas por:*

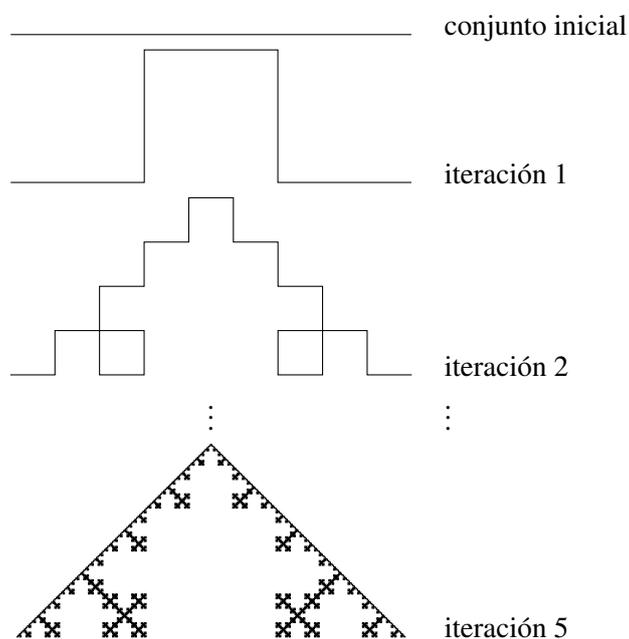


Figura 3.2: Curva cuadrática de von Koch tipo 1

$$\begin{aligned}
 f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
 f_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \\
 f_5 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Su dimensión de Hausdorff  $s$  cumple (por el teorema 3.4.6)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = 5 \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$$

y por tanto

$$s = \frac{\log(5)}{\log(3)} \approx 1,46497$$

**Ejemplo 3.4.9** (Curva cuadrática de von Koch tipo 2). *Este ejemplo es otra modificación de la curva de von Koch (ver la figura 3.3). Su construcción se advierte con la figura. La dimensión de Hausdorff  $s$  de este conjunto cumple*

$$8 \left(\frac{1}{4}\right)^s = 1$$

y por tanto

$$s = \frac{\log(8)}{\log(4)} = 1,5$$

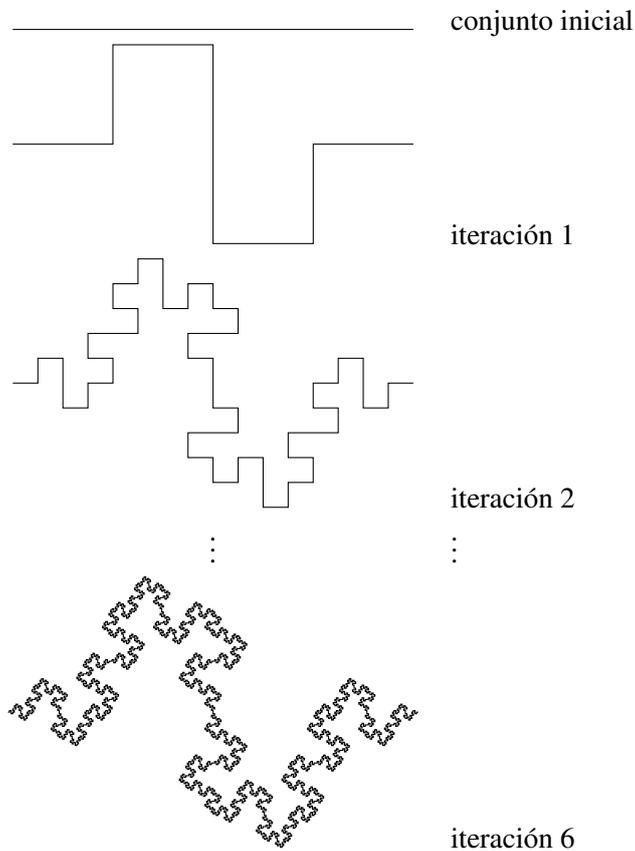


Figura 3.3: Curva cuadrática de von Koch (tipo 2)

# Cómo dibujar fractales

## «CONTENIDOS»

- Sistemas-L
- Algoritmo de aproximación por puntos

Una vez terminado el marco teórico donde formalizamos los IFS pasamos a estudiar dos alternativas (algoritmos) con los que dibujar o aproximar los fractales que generan. Con este objetivo dividimos el capítulo en dos secciones. En la primera sección veremos una manera sencilla e intuitiva que no requiere de grandes conocimientos de programación. Está basada en los denominados sistemas-L (o sistemas de Lindenmayer) que gracias a los paquetes TikZ y PGF de  $\text{\LaTeX}$  (ver [Tan]) es posible generar desde este. Esto nos va a permitir, entre otras cosas, dibujar distintas iteraciones en forma de tabla muy fácilmente.

En la segunda parte de este capítulo se presenta un algoritmo de aproximación por puntos tomado de [EdA] con un buen control sobre el error cometido en la aproximación. Con este método solo hay que conocer las aplicaciones que definen un IFS y el error que podemos admitir para llegar a dibujarlo de una manera rápida.

Los interesados en estudiar otros algoritmos distintos a este pueden ir a la sección 3.8 de [Bar] donde se pueden encontrar dos de ellos o al artículo [Dub] en el que se comparan varios en términos de tiempo de ejecución, puntos distintos calculados, etc.

## 4.1. Sistemas-L

Los sistemas-L o sistemas de Lindenmayer son un conjunto de reglas y símbolos que se usan habitualmente para describir el crecimiento de ciertas plantas y que resultan útiles para generar algunos fractales basados en IFS. Vamos a ver cómo se puede hacer esto último desde  $\text{\LaTeX}$

utilizando los paquetes TikZ y PGF (capítulo 37 del manual [Tan]). De hecho, todos los fractales que aparecen en los capítulos anteriores han sido realizados con estos.

La idea detrás de un sistema-L es muy sencilla: se fijan unos símbolos (por ejemplo, A y B), se define una regla para modificarlos (p.e.  $A \rightarrow AB$ ) y se da un conjunto inicial (p.e. A) denominado axioma; después a partir del axioma se itera el proceso mediante la regla (cada A se sustituye por AB). Así, las tres primeras iteración de este sistema-L serían AB, ABB y ABBB.

Los símbolos utilizados por defecto por los paquetes TikZ y PGF de  $\LaTeX$  para definir un sistema-L se corresponden a operaciones de dibujo:

- $F$  para mover hacia adelante una cierta distancia, dibujando una línea,
- $f$  para mover hacia adelante pero sin dibujar,
- $+$  para girar a la izquierda cierto ángulo,
- $-$  para girar a la derecha,
- $[$  para guardar la posición y dirección actual y
- $]$  para recuperar la posición y dirección anteriores.

Para generar la curva de von Koch (figura 1.3), por ejemplo, se comienza por un segmento  $F$  y la regla que se aplicada en cada paso es  $F \rightarrow F+F- -F+F$ , donde el ángulo de giro son  $60^\circ$ .

**Ejemplo 4.1.1.** Para generar la iteración 2 de la curva de von Koch basta con escribir el código

```
\begin{tikzpicture}
\pgfdeclarelindenmayersystem{Koch curve}{
\rule{F -> F+F--F+F}}
\draw [l-system={Koch curve, step=15pt, angle=60, axiom=F, order=2}]
lindenmayer system;
\end{tikzpicture}
```

donde se determinan la longitud de paso, el ángulo de giro o el conjunto inicial. Como el axioma es  $F$ , la primera iteración es  $F+F- -F+F$  y la segunda

$$F+F- -F+F+F+F- -F+F- -F+F- -F+F+F+F- -F+F.$$

Este código nos dibuja la siguiente figura



Una desventaja que podemos encontrar es que se necesita poder describir el fractal que queremos dibujar con estos símbolos, lo que resulta complicado en muchas ocasiones.

## 4.2. Algoritmo de aproximación por puntos

Siguiendo el artículo [EdA] en esta sección vamos a estudiar un algoritmo para aproximar el fractal de un IFS. Recordando la notación utilizada en las secciones 3.2, 3.3 y 3.4 denotamos por  $\mathcal{S}$  a un conjunto de aplicaciones contractivas  $\{f_1, \dots, f_m\}$  con constantes de contractividad  $\{c_1, \dots, c_m\}$  y por  $\mathcal{S}_n$  el conjunto de todas las posibles combinaciones de la forma  $f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n}$  donde  $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$ . Sea ahora  $\mathcal{S}^*$  el conjunto de todas las posibles combinaciones de funciones de  $\mathcal{S}$ , es decir,

$$\mathcal{S}^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_n.$$

Si  $A$  es el atractor de  $\mathcal{S}$  (lo será también de  $\mathcal{S}_n$  para cada  $n \geq 1$  por la Proposición 3.4.5) entonces se puede probar<sup>1</sup> que es igual a la clausura del conjunto  $\bigcup_{f \in \mathcal{S}^*} \text{fix}(f)$ , donde  $\text{fix}(f)$  representa el único punto fijo de la aplicación  $f$ . Esto implica que  $\text{fix}(f) \in A$  para cada entero  $n \geq 1$  y cada función  $f \in \mathcal{S}_n$ .

Por ser las aplicaciones de  $\mathcal{S}$  contractivas dado un  $\varepsilon > 0$  existe un entero  $N \geq 1$  tal que

$$c_{i_1} \cdots c_{i_N} \leq \varepsilon$$

para todas las posibles combinaciones  $i_1, \dots, i_N \in \{1, \dots, m\}$ . Denotamos por  $A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  el conjunto de todos los enteros  $N$  que cumplen esta condición. Entonces, existe un entero  $N_0 \geq 1$  tal que  $A(\mathcal{S}, \varepsilon) = \{N_0, N_0 + 1, \dots\}$ .

**Lema 4.2.1.** *A partir de  $\mathcal{S}$  y  $\varepsilon$  se puede estimar un entero  $N \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  del párrafo anterior como*

$$N \geq \frac{\log \varepsilon}{\log (\max_{1 \leq i \leq m} c_i)}.$$

*Demostración.* Basta considerar

$$\max\{c_{i_1} \cdots c_{i_N}\} \leq \left( \max_{1 \leq i \leq m} c_i \right)^N \leq \varepsilon$$

y tomar logaritmos. □

El algoritmo que vamos a ver se basa en el siguiente resultado tomado de [EdA]. Se trabaja en un espacio métrico completo  $(X, d)$ .

<sup>1</sup>La prueba se puede encontrar en [Hut].

**Proposición 4.2.2.** Sean dos reales  $0 < \delta < 1$  y  $0 < \varepsilon < 1$  dados. Sea  $N \in A(\mathcal{S}, \delta)$  y consideramos el conjunto  $\mathcal{S}_N = \{h_1, h_2, \dots, h_u\}$ . Denotamos por  $x_i \in X$  el punto fijo de la aplicación contractiva  $h_i$  para cada  $i = 1, \dots, u$ , y sea  $B_1$  el conjunto finito formado por todos los  $x_i$ .

Si tomamos  $M \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  y definimos el conjunto  $B$  como

$$B = \{g(x) : g \in \mathcal{S}_M, x \in B_1\}$$

entonces, si  $A$  es el atractor de  $\mathcal{S}$ , se cumple que

$$h(A, B) \leq \varepsilon \delta \text{diam}(A).$$

*Demostración.* Por la Proposición 3.4.5 tenemos que

$$B = \bigcup_{g \in \mathcal{S}_M} g(B_1) = F^M(B_1) \quad \text{y} \quad A = F^M(A)$$

donde  $F^M$  es una aplicación contractiva con constante de contractividad menor o igual a  $\varepsilon$ , ya que,  $M \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$ . Esto implica que

$$h(A, B) = h(F^M(A), F^M(B_1)) \leq \varepsilon h(A, B_1).$$

El resto de la prueba lo dividimos en dos partes.

(a) Por definición de  $B_1$  tenemos que

$$d(B_1, A) = \sup\{d(x, A) : x \in B_1\} = \sup\{d(x_i, A) : i = 1, \dots, u\}$$

y como ya hemos comentado en esta sección se cumple que  $x_i \in A$  (por ser puntos fijos), luego

$$d(x_i, A) = 0 \quad \text{para cada } i = 1, \dots, u$$

lo que implica que  $d(B_1, A) = 0$ .

(b) Veamos ahora una acotación sobre  $d(A, B_1) = \sup\{d(a, B_1) : a \in A\}$ . Tomamos  $a \in A = F^N(A) = \bigcup_{i=1}^{\infty} h_i(A)$ , y sean  $1 \leq i \leq u$  y  $z \in A$  tales que  $a = h_i(z)$ . Entonces

$$d(a, B_1) \leq d(a, x_i) = d(h_i(z), h_i(x_i)) \leq \delta d(z, x_i) \leq \delta \text{diam}(A)$$

donde la última igualdad se obtiene de  $x_i, z \in A$ .

De (a) y (b) obtenemos que

$$h(A, B_1) = \sup\{d(A, B_1), d(B_1, A)\} \leq \delta \text{diam}(A)$$

y por tanto

$$h(A, B) \leq \varepsilon h(A, B_1) \leq \varepsilon \delta \text{diam}(A)$$

como queríamos probar. □

**Algoritmo** Aproximación por puntos de fractales

**Entrada:** Conjunto de aplicaciones contractivas  $\mathcal{S} = \{f_1, \dots, f_m\}$  con constantes de contractividad  $\{c_1, \dots, c_m\}$  y precisión en función de  $\varepsilon$ ,  $\delta$  y  $\text{diam}(A)$  (una estimación).

**Salida:** Un conjunto finito de puntos  $B$  tal que  $h(A, B) \leq \text{precision}$ , donde  $A$  es el fractal definido por  $\mathcal{S}$ .

- 1: A partir de  $\delta$  se calcula  $N \in A(\mathcal{S}, \delta)$  (Lema 4.2.1).
- 2: Se calculan todas las transformaciones  $\mathcal{S}_N = \{h_1, \dots, h_u\}$  y sus puntos fijos  $x_i$ .
- 3: A partir de  $\varepsilon$  (e igual que con  $\delta$ ) se calculan  $M \in A(\mathcal{S}, \varepsilon)$  y las transformaciones  $\mathcal{S}_M$ .
- 4: El conjunto  $B$  se obtiene aplicando las funciones de  $\mathcal{S}_M$  a los puntos  $x_i$ .

En el apéndice C adjuntamos el código que hemos desarrollado en Java de este algoritmo. Como trabajamos en  $\mathbb{R}^2$  con transformaciones afines  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  como

$$F(X) = F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = A \cdot X + C$$

los puntos fijos  $\bar{X} \in \mathbb{R}^2$  de estas son  $\bar{X} = C(I - A)^{-1}$ , donde  $I$  representa la matriz identidad. En nuestro código tomamos además  $\delta = \varepsilon$  y escribimos los métodos en función del número  $N$  de iteraciones (en este caso,  $N = M$ ). Veamos un ejemplo de cómo dibujar un fractal con este algoritmo. Las transformaciones las introducimos como matrices  $2 \times 3$

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Ejemplo 4.2.3** (Triángulo de Sierpinski). *Definimos un JFrame de 800 de ancho por 700 de alto. Este fractal está determinado por tres transformaciones afines*

$$f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,5 & 0,25\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si queremos que la distancia entre nuestra aproximación  $B$  y el fractal  $A$  sea menor a un píxel de una pantalla, estimamos que el gráfico está en una ventana de  $800 \times 600$  píxeles que se corresponde con un rectángulo del plano  $\mathbb{R}^2$  de dimensiones 2 unidades de ancho por 1,5 unidades de alto. Así, un píxel equivale a un cuadrado de dimensiones reales  $2/800 \times 1,5/600$  con diámetro  $\sqrt{(2/800)^2 + (1,5/600)^2} \leq 0,0036$ . Por otro lado, estimando que el diámetro de  $A$  está en el rectángulo donde dibujamos podemos acotarlo por

$$\text{diam}(A) \leq \sqrt{2^2 + 1,5^2} = 2,5$$

tomamos

$$\varepsilon \leq \sqrt{0,0036/2,5} \leq 0,038$$

y como el radio de contractividad de las transformaciones afines es menor o igual a 0,5 (usando, por ejemplo, la norma matricial subordinada del supremo) entonces

$$N \geq \frac{\log \varepsilon}{\log 0,5} = \frac{\log 0,038}{\log 0,5} \leq 5$$

Por tanto, con  $N = 5$  se obtiene una buena aproximación. La figura 4.1 muestra el resultado<sup>2</sup>.

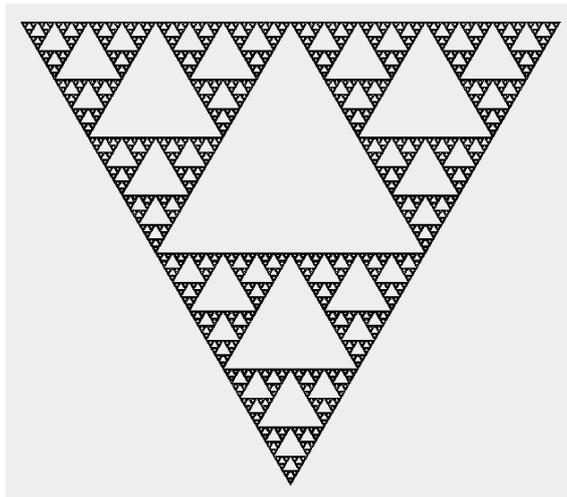


Figura 4.1: Triángulo de Sierpinski (0.3 segundos)

<sup>2</sup>Los tiempos que aparecen en las figuras son los empleados en un ordenador con procesador Intel Core Duo con sistema operativo Linux Mint 15 de 32 bits

Veamos algunos ejemplos más a partir del número de iteraciones, que se calculan del mismo modo que en el anterior ejemplo.

**Ejemplo 4.2.4** (Curva dragón). *La curva dragón viene determinada por dos transformaciones afines*

$$f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 1 \\ -0,5 & -0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La figura 4.2 muestra el resultado con  $N = 9$  iteraciones.

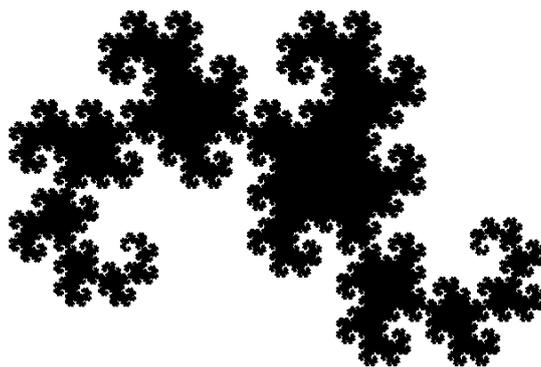


Figura 4.2: Curva dragón (0.5967 segundos)

**Ejemplo 4.2.5** (Hoja de arce). *El fractal que denominaremos “Hoja de arce” viene determinado por cuatro transformaciones afines*

$$f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,01 & -0,08 \\ 0 & 0,51 & -1,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,43 & 0,52 & 1,49 \\ -0,45 & 0,5 & -0,75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,45 & -0,49 & -1,62 \\ 0,47 & 0,47 & -0,74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,49 & 0 & 0,02 \\ 0 & 0,51 & 1,62 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La figura 4.3 muestra el resultado con  $N = 4$  iteraciones.

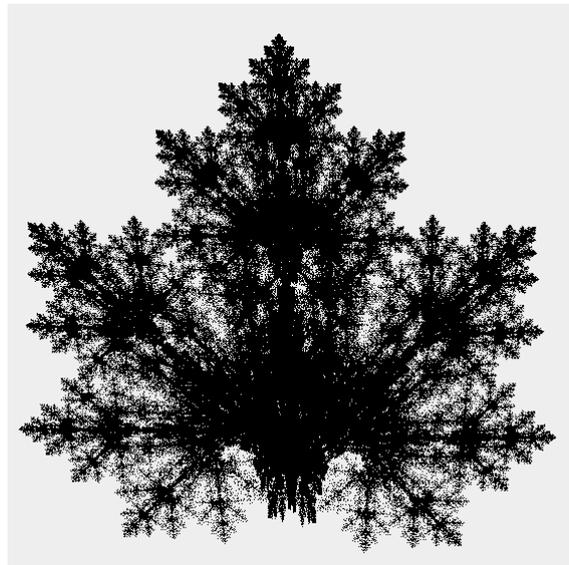


Figura 4.3: Hoja de arce (0.6142 segundos)

**Ejemplo 4.2.6** (Planta). *El siguiente fractal con forma de planta viene definido por tres transformaciones afines*

$$f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,1 & -0,5 \\ -0,5 & 0,6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,7 & -0,3 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La figura 4.2 muestra el resultado con  $N = 4$  iteraciones.



Figura 4.4: Planta (0.5967 segundos)



# Espacios métricos

## «CONTENIDOS»

- Distancia y espacio métrico.
- Compacidad y compacidad secuencial.
- Sucesiones y completitud.

En este apéndice repasamos los conceptos y resultados de Topología que hemos utilizado principalmente para el desarrollo del capítulo 3, referente a sistemas de funciones iteradas. Sobre todo para la sección 3.1 (página 18). Nos basamos en los apuntes de la asignatura “*Topología de espacios métricos*” (ver [Her]), al que remitiremos para ver las demostraciones, y en menor medida en el libro [Munk].

## A.1. Distancia y espacio métrico.

**Definición A.1.1.** Dado un conjunto  $X$ , una **distancia** sobre  $X$  es una aplicación  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que cumple:

- (i)  $d(x, y) \geq 0$  para todo  $x, y \in X$
- (ii)  $d(x, y) = 0$  si y solo si  $x = y$
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x)$  para todo  $x, y \in X$
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  para todo  $x, y, z \in X$

**Definición A.1.2.** Un **espacio métrico** es un par  $(X, d)$ , donde  $X$  es un conjunto y  $d$  una distancia definida sobre este.

## A.2. Compacidad y compacidad secuencial

Pasamos ahora a repasar las nociones de compacidad y compacidad secuencial.

**Definición A.2.1.** Sea  $X$  un conjunto y sea  $A \subset X$ . Un cubrimiento o recubrimiento de  $A$  es una familia  $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$  de subconjuntos de  $X$  tales que  $A \in \bigcup_{i \in I} A_i$ . Un subcubrimiento o subrecubrimiento es una subfamilia  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  que es también un recubrimiento de  $A$ . Un recubrimiento se dice que es finito si está formado por una cantidad finita de conjuntos. Cuando  $(X, d)$  es un espacio métrico y cada  $A_i$  es un abierto de  $X$ , se dice que  $\mathcal{A}$  es un recubrimiento abierto de  $A$ .

**Definición A.2.2.** Un espacio métrico  $(X, d)$  es compacto si todo recubrimiento abierto de  $X$  admite un subrecubrimiento finito. Un subconjunto  $K \subset X$  es compacto en  $(X, d)$  si con la topología inducida es un espacio compacto.

**Proposición A.2.3.** Sea  $K$  un subespacio de un espacio métrico  $(X, d)$ . Entonces  $K$  es compacto si, y solo si, para toda familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  de abiertos en  $X$  tal que  $K \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ , existe una subfamilia finita  $\{A_i\}_{i=1}^n$  tal que  $K \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ .

*Demostración.* Ver proposición 4.2.2 de [Her]. □

**Teorema A.2.4.** Todo subconjunto compacto de un espacio métrico  $(X, d)$  es cerrado y acotado.

*Demostración.* Ver teorema 4.2.5 de [Her]. □

**Teorema A.2.5.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$  una sucesión. Entonces  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $x \in X$  si, y solo si, cada subsucesión  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $x$ .

*Demostración.* Ver teorema 4.5.2 de [Her]. □

**Definición A.2.6.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y  $K \subset X$  un subconjunto. Diremos que  $K$  es secuencialmente compacto si cada sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  en  $K$  posee una subsucesión  $(x_{n_k})_k$  convergente a un punto de  $K$ .

**Definición A.2.7.** Dado un espacio métrico  $(X, d)$  y un subconjunto  $T \subset X$ , diremos que  $T$  es totalmente acotado si para cada  $r > 0$  existe un número finito de puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $T$  tales que  $T \subset B(x_1, r) \cup \dots \cup B(x_n, r)$ .

**Teorema A.2.8** (de Heine-Borel-Lebesgue). Sea  $(X, d)$  un espacio métrico y un subconjunto  $K \subset X$ .  $K$  es compacto si, y solo si,  $K$  es secuencialmente compacto.

*Demostración.* Ver teorema 4.6.2 de [Her]. □

**Teorema A.2.9.** Si  $(X, d)$  es un espacio métrico y  $K \subset X$  es secuencialmente compacto, entonces  $K$  es totalmente acotado.

*Demostración.* Teorema 4.3.6 de [Her]. □

**Definición A.2.10.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  dos espacios métricos. Una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  diremos que es continua en  $a \in X$  si para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d(x, a) < \delta$  implica que  $d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$ .

**Teorema A.2.11.** Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación continua entre espacios métricos y  $K \subset X$  es compacto en  $X$ , entonces  $f(K)$  es compacto en  $Y$ .

*Demostración.* Teorema 4.7.1 de [Her]. □

### A.3. Sucesiones y completitud

**Definición A.3.1.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Diremos que una sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  en  $X$  es una sucesión de Cauchy si dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n, m \geq n_0$ , entonces  $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Proposición A.3.2.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Si  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión de Cauchy que contiene una subsucesión  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  que converge a  $x$ , entonces la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a  $x$ .

*Demostración.* Ver proposición 5.1.5 de [Her]. □

**Definición A.3.3.** Un espacio métrico  $(X, d)$  es completo si toda sucesión de Cauchy en  $X$  es convergente.

**Corolario A.3.4.** Un espacio métrico  $X$  es completo si toda sucesión de Cauchy tiene una subsucesión convergente.



En el capítulo 2 vemos lo que se denomina *medida de Hausdorff* asociada a un conjunto. Por ello, en este apéndice repasamos los conceptos y resultados más importantes que allí utilizamos sobre teoría de la medida. Para más detalles ver [Rog], [WhZyg] o [Edg].

En lo sucesivo  $\Omega$  denotará un conjunto no vacío y  $\mathcal{P}(\Omega)$  la familia de los subconjuntos de  $\Omega$ .

**Definición B.1.5.** Una *medida exterior* sobre  $\Omega$  es una función  $\mu^*$  definida sobre todos los subconjuntos de  $\Omega$ ,  $\mathcal{P}(\Omega)$ , que toma valores sobre  $[0, +\infty]$ , y que cumple:

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$
- (ii) si  $A_1 \subset A_2$  son subconjuntos de  $\Omega$ , entonces  $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$
- (iii) si  $\{A_n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$  es una sucesión cualquiera de subconjuntos de  $\Omega$ , entonces

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(A_n)$$

**Definición B.1.6.** Si  $\mu^*$  es una medida exterior sobre  $\Omega$  un subconjunto  $A \subset \Omega$  se dice que es  $\mu^*$ -medible si y solo si para cada  $B \subset \Omega$  se cumple

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \setminus A)$$

o equivalentemente si para todo par de conjuntos  $B, C \subset \Omega$  donde  $B \subset A$  y  $C \subset \Omega \setminus A$  se tiene

$$\mu^*(B \cup C) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$$

**Definición B.1.7.** Una  $\sigma$ -álgebra de partes de  $\Omega$  es una familia  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  que cumple:

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{A}$
- (ii) si  $A \in \mathcal{A}$ , entonces  $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- (iii) si  $A_n \in \mathcal{A}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$

**Definición B.1.8.** Una función  $\mu$  definida en una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  contenida en las partes de  $\Omega$  sobre  $[0, +\infty]$  se dice que es una **medida** si cumple:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (ii) si  $\{A_n\}$  con  $n \in \mathbb{N}$  es una sucesión subconjuntos de  $\Omega$  disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n)$$

**Teorema B.1.9** (Teorema de Carathéodory). Si  $\mu^*$  es una medida exterior sobre  $\Omega$  entonces la familia de los conjuntos  $\mu^*$ -medibles es una  $\sigma$ -álgebra. Además, la restricción de  $\mu^*$  a esta  $\sigma$ -álgebra es una medida.

*Demostración.* Ver prueba en [Edg, Teorema 5.2.5]. □

Para el estudio de los fractales trabajaremos con subconjuntos de un espacio métrico. Los más usuales serán los abiertos, cerrados o los construidos a partir de estos; en particular, los conjuntos de Borel (los pertenecientes a la  $\sigma$ -álgebra generada por los abiertos, denominada  $\sigma$ -álgebra de Borel). Sería deseable por tanto, dar condiciones para que estos conjuntos fueran medibles.

**Definición B.1.10.** Una medida exterior  $\mu^*$  en un espacio métrico  $(X, d)$  se dice que es una **medida exterior métrica** si cumple que

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

para todo par de conjuntos  $A$  y  $B$  tales que  $d(A, B) > 0$ .

**Teorema B.1.11.** Dada  $\mu^*$  una medida exterior métrica sobre  $(X, d)$  espacio métrico se tiene que todo conjunto de Borel es  $\mu^*$ -medible.

*Demostración.* Ver prueba en [Edg, Teorema 5.4.2]. □

**Corolario B.1.12.** La restricción de la medida exterior métrica del teorema anterior en la  $\sigma$ -álgebra de Borel es una medida.



# Código JAVA del algoritmo de aproximación por puntos

```
package fractalsahv;

import auxiliar.TransAfin;
import java.awt.*;
import java.util.ArrayList;
import javax.swing.*;

/** @author alvarohv
 */

public class FractalsAHV2 extends JFrame {
    //Dimensiones ventana
    int ancho = 800;
    int alto = 700;

    public FractalsAHV2() {
        super("Algoritmo de aproximación de fractales IFS");
        setSize(ancho, alto);
        setVisible(true);
        getContentPane().setBackground(Color.WHITE);
    }

    /** Metodo para calcular los puntos fijos de una lista de transformaciones
     * afines. Las variables fa, x0 e y0 se utilizan para centrar el fractal
     * en la ventana.
     */
    public void puntos(Graphics g, ArrayList transformaciones, double fa,
        double x0, double y0){
        int n = transformaciones.size();

        for (int i = 0; i < n; i++) {
```

```

    TransAfin TA = (TransAfin) transformaciones.get(i);
    double[] punto = TA.puntoFijo;
    dibPunto(g, punto, fa, x0, y0);
    for (int j = 0; j < i; j++) {
        TA = (TransAfin) transformaciones.get(j);
        dibPunto(g, TA.eval(punto), fa, x0, y0);
    }
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {
        TA = (TransAfin) transformaciones.get(j);
        dibPunto(g, TA.eval(punto), fa, x0, y0);
    }
}

/** Metodo para dibujar los puntos en pantalla.
 */
public void dibPunto(Graphics g, double[] z, double fa, double x0, double y0){
    g.drawLine((int) (z[0]*fa+x0), (int) (z[1]*fa+y0),
        (int) (z[0]*fa+x0), (int) (z[1]*fa+y0));
}

/**Las siguientes funciones definen algunos fractales a partir de sus
 * transformaciones afines especificando el número de composiciones de estas
 * para tener una buena aproximación.
 */

//Conjunto de Cantor
public void Cantor(Graphics g, int iter){
    double fa=600;
    double x0=150;
    double y0=200;
    double [][] mT1={{1./3,0,0},{0,0,0}};
    TransAfin T1=new TransAfin(mT1);
    double [][] mT2={{1./3,0,2./3},{0,0,0}};
    TransAfin T2=new TransAfin(mT2);
    TransAfin[] generadores={T1,T2};
    ArrayList transformaciones = new ArrayList();
    transformaciones.add(T1);
    transformaciones.add(T2);

    for (int i = 0; i < iter; i++) {
        TransAfin.listacompuestas(transformaciones, generadores);
    }
}

```

```

    puntos(g, transformaciones ,fa ,x0,y0);
}

//Triangulo de Sierpinski
public void Sierpinski(Graphics g, int iter){
    double fa=600;
    double x0=130;
    double y0=130;
    double [][] mT1={{ 1./2 ,0 ,0 },{ 0 ,1./2 ,0 }};
    TransAfin T1 = new TransAfin(mT1);
    double [][] mT2={{ 1./2 ,0 ,1./4 },{ 0 ,1./2 ,Math.sqrt(3)/4 }};
    TransAfin T2 = new TransAfin(mT2);
    double [][] mT3={{ 1./2 ,0 ,1./2 },{ 0 ,1./2 ,0 }};
    TransAfin T3 = new TransAfin(mT3);
    TransAfin[] generadores = {T1, T2, T3};
    ArrayList transformaciones = new ArrayList();
    transformaciones.add(T1);
    transformaciones.add(T2);
    transformaciones.add(T3);

    for (int i = 0; i < iter; i++) {
        TransAfin.listacompuestas(transformaciones , generadores);
    }
    puntos(g, transformaciones ,fa ,x0,y0);
}

//Curva dragon
public void Dragon(Graphics g, int iter){
    double fa=400;
    double x0=250;
    double y0=410;
    double [][] mT1={{ 1./2 ,1./2 ,0 },{ -1./2 ,1./2 ,0 }};
    TransAfin T1=new TransAfin(mT1);
    double [][] mT2={{ -1./2 ,1./2 ,1 },{ -1./2 , -1./2 ,0 }};
    TransAfin T2=new TransAfin(mT2);
    TransAfin[] generadores={T1,T2};
    ArrayList transformaciones = new ArrayList();
    transformaciones.add(T1);
    transformaciones.add(T2);

    for (int i = 0; i < iter; i++) {
        TransAfin.listacompuestas(transformaciones , generadores);
    }
}

```

```

    puntos(g, transformaciones ,fa ,x0,y0);
}

//Helecho de Barnsley
public void Fern(Graphics g, int iter){
    double fa=-65;
    double x0=350;
    double y0=680;
    double [][] mT1 = {{0., 0., 0.}, {0., 0.16, 0.}};
    TransAfin T1 = new TransAfin(mT1);
    double [][] mT2 = {{0.85, -0.04, 0.}, {0.04, 0.85, 1.6}};
    TransAfin T2 = new TransAfin(mT2);
    double [][] mT3 = {{0.2, 0.26, 0.}, {-0.23, 0.22, 1.6}};
    TransAfin T3 = new TransAfin(mT3);
    double [][] mT4 = {{-0.15, -0.28, 0.}, {-0.26, 0.24, 0.44}};
    TransAfin T4 = new TransAfin(mT4);
    TransAfin[] generadores = {T1, T2, T3,T4};
    ArrayList transformaciones = new ArrayList();
    transformaciones.add(T1);
    transformaciones.add(T2);
    transformaciones.add(T3);
    transformaciones.add(T4);

    for (int i = 0; i < iter; i++) {
        TransAfin.listacompuestas(transformaciones , generadores);
    }
    puntos(g, transformaciones ,fa ,x0,y0);
}

//Planta
public void Plant(Graphics g, int iter){
    double fa=78;
    double x0=350;
    double y0=450;
    double [][] mT1 = {{0.5, -0.1, 0.}, {0.5, 0.5, 0.}};
    TransAfin T1 = new TransAfin(mT1);
    double [][] mT2 = {{-0.5, -0.1, -0.5}, {-0.5, 0.6, -2.}};
    TransAfin T2 = new TransAfin(mT2);
    double [][] mT3 = {{-0.7, -0.3, 0.}, {-0.5, 0.5, 1.}};
    TransAfin T3 = new TransAfin(mT3);
    TransAfin[] generadores = {T1, T2, T3};
    ArrayList transformaciones = new ArrayList();
    transformaciones.add(T1);

```

```

transformaciones.add(T2);
transformaciones.add(T3);

for (int i = 0; i < iter; i++) {
    TransAfin.listacompuestas(transformaciones, generadores);
}
puntos(g, transformaciones, fa, x0, y0);
}

//Hoja de arce
public void Leaf(Graphics g, int iter){
    double fa=-78;
    double x0=350;
    double y0=400;
    double [][] mT1 = {{0.14, 0.01, -0.08}, {0., 0.51, -1.3}};
    TransAfin T1 = new TransAfin(mT1);
    double [][] mT2 = {{0.43, 0.52, 1.49}, {-0.45, 0.5, -0.75}};
    TransAfin T2 = new TransAfin(mT2);
    double [][] mT3 = {{0.45, -0.49, -1.62}, {0.47, 0.47, -0.74}};
    TransAfin T3 = new TransAfin(mT3);
    double [][] mT4 = {{0.49, 0., 0.02}, {0., 0.51, 1.62}};
    TransAfin T4 = new TransAfin(mT4);
    TransAfin[] generadores = {T1, T2, T3, T4};
    ArrayList transformaciones = new ArrayList();
    transformaciones.add(T1);
    transformaciones.add(T2);
    transformaciones.add(T3);
    transformaciones.add(T4);

    for (int i = 0; i < iter; i++) {
        TransAfin.listacompuestas(transformaciones, generadores);
    }
    puntos(g, transformaciones, fa, x0, y0);
}

@Override //Metodo para dibujar
public void paint(Graphics g) {
    //Variable para estimar el tiempo de calculo
    long startTime = System.nanoTime();
    g.setColor(Color.BLACK);

    //Cantor(g,6);
    Sierpinski(g,5);
}

```

```

        //Leaf(g,5);
        //Dragon(g,9);
        //Fern(g,5);
        //Plant(g,4);

        long estimatedTime = System.nanoTime() - startTime;
        System.out.println("Tiempo_estimado_=_"+estimatedTime * 1E-9 + "_sec");
    }

    public static void main(String[] args) {
        FractalsAHV2 application = new FractalsAHV2();
        application.setDefaultCloseOperation(JFrame.EXIT_ON_CLOSE);
    }
}

```

```

package auxiliar;

import java.awt.Color;
import java.util.ArrayList;

/**Clase de transformaciones afines.
 * @author alvarohv
 */
public class TransAfin{
    public double [][] TA;
    public double [] puntoFijo;

    public TransAfin(){
        this.TA = new double [2][3];
        this.puntoFijo = new double [2];
    }

    public TransAfin(double [][] TA){
        this.TA = TA;
        this.puntoFijo = new double [2];
        this.puntoFijo[0] = (-TA[0][2] * (TA[1][1] - 1) + TA[1][2] * TA[0][1])
            / ((TA[0][0] - 1) * (TA[1][1] - 1) - TA[1][0] * TA[0][1])

        this.puntoFijo[1] = (-TA[0][0] - 1) * TA[1][2] + TA[1][0] * TA[0][2])
            / ((TA[0][0] - 1) * (TA[1][1] - 1) - TA[1][0] * TA[0][1]);
    }
}

```

```

public double[] eval(double[] x) {
    double[] eval = new double[2];
    eval[0] = this.TA[0][0] * x[0] + this.TA[0][1] * x[1] + this.TA[0][2];
    eval[1] = this.TA[1][0] * x[0] + this.TA[1][1] * x[1] + this.TA[1][2];
    return eval
}

public TransAfin compuesta(TransAfin TB) {
    double[][] compuesta = new double[2][3];
    compuesta[0][0] = this.TA[0][0]*TB.TA[0][0] + this.TA[0][1]*TB.TA[1][0];
    compuesta[0][1] = this.TA[0][0]*TB.TA[0][1] + this.TA[0][1]*TB.TA[1][1];
    compuesta[0][2] = this.TA[0][0]*TB.TA[0][2] + this.TA[0][1]*TB.TA[1][2]
        + this.TA[0][2];
    compuesta[1][0] = this.TA[1][0]*TB.TA[0][0] + this.TA[1][1]*TB.TA[1][0];
    compuesta[1][1] = this.TA[1][0]*TB.TA[0][1] + this.TA[1][1]*TB.TA[1][1];
    compuesta[1][2] = this.TA[1][0]*TB.TA[0][2] + this.TA[1][1]*TB.TA[1][2]
        + this.TA[1][2];
    return new TransAfin(compuesta);
}

public static void listacompuestas(ArrayList transformaciones ,
    TransAfin[] generadores) {
    ArrayList transAfines = new ArrayList(transformaciones);
    transformaciones.clear();
    int n = transAfines.size();
    int m = generadores.length;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        TransAfin TA = (TransAfin) transAfines.get(i);
        for (int j = 0; j < m; j++) {
            // TransAfin TB=(TransAfin) transAfines.get(j);
            transformaciones.add(TA.compuesta(generadores[j]));
        }
    }
}
}

```



# Bibliografía

- [Bar] Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., 1988.
- [Bil] Patrick Billingsley, *Probability and Measures*, Wiley series in probability and mathematical statistics, 1986.
- [Bin] María Isabel Binimelis, *Una nueva manera de ver el mundo. La geometría fractal*, RBA Coleccionables, S.A., 2010.
- [Bra] Dominic Braun, John Mayberry, Audrey Powers, Steven Schlicker, *The Geometry of the Hausdorff Metric*, 2003.
- [Dub] Serge Dubuc, Abdelkader Elqortobi *Aproximation of fractal sets* Journal of Computational and Applied Mathematics 29 (1990) 79-89, North- Holland.
- [EdA] E. de Amo, I. Chitescu, M. Díaz Carrillo, N.A. Secelean, *A new approximation procedure for fractals*, Journal of computational and Applied Mathematics 151 (2003) 355-370.
- [Edg] Gerald Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, (Second Edition), Springer, 2008.
- [Fal] Kenneth Falconer, *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley & Sons, 1990.
- [Her] Pedro José Herrero Piñeyro, Apuntes para la asignatura *Topología de Espacios Métricos*, OCW, 2011. Disponible online: <http://ocw.um.es/ciencias/topologia-de-espacios-metricos-1/material-de-clase>
- [Hut] John E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana University Mathematics Journal 30, 1981, 713-747
- [Man] Benoît B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company, 1983.
- [Munk] James R. Munkres, *Topology*, (Second Edition), Prentice Hall, 2000.
- [Rog] C. A. Rogers, *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, 1998.
- [Tan] Till Tantau, *The TikZ and PGF Packages. Manual for version 2.10*, 25 de octubre de 2010. Disponible en <http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf>
- [WhZyg] Richard L. Wheeden, Antoni Zygmund, *Measure and Integral. An Introduction to Real Analysis*, Marcel Dekker, Inc., 1977.