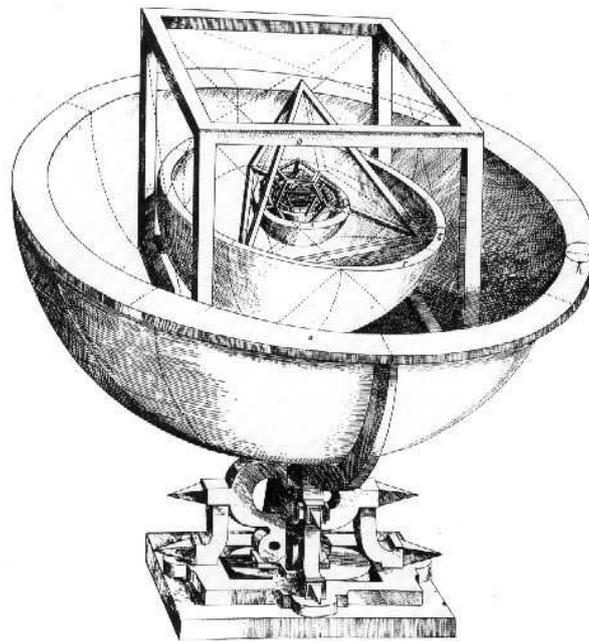




UNIVERSIDAD DE MURCIA  
Facultad de Matemáticas  
Grado en Matemáticas



## Un inicio a la teoría de politopos

**Tutores:** María de los Ángeles Hernández Cifre y Jesús Yepes Nicolás

---

Pedro Sánchez Legaz



# Declaración de originalidad

Pedro Sánchez Legaz, autor del Trabajo Fin de Grado “**Un inicio a la teoría de politopos**”, bajo la tutela de la profesora **María de los Ángeles Hernández Cifre** y **Jesús Yepes Nicolás**, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas<sup>1</sup>.

*En Murcia, a 5 de septiembre de 2017*

---

<sup>1</sup>En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.



*“Cuando quieres algo todo el Universo conspira  
para que realices tu deseo”,*  
**-Paulo Coelho-**



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>1</b>
<b>Résumé</b>	<b>5</b>
<b>1. Preliminares. Los conjuntos convexos</b>	<b>9</b>
1.1. Los conjuntos convexos. Primeras propiedades . . . . .	10
1.2. Los hiperplanos soporte. Separación . . . . .	14
1.3. Dualidad . . . . .	16
1.4. Representaciones extremales . . . . .	19
1.5. La función soporte . . . . .	21
1.6. La suma de Minkowski . . . . .	23
<b>2. Los politopos</b>	<b>27</b>
2.1. La estructura facial de un cuerpo convexo . . . . .	27
2.2. Los politopos en la historia . . . . .	31
2.3. Los politopos. Primeras propiedades . . . . .	34
2.4. La estructura facial de los politopos . . . . .	36
2.5. Ejemplos de la importancia de los politopos . . . . .	39
<b>3. Teorema fundamental de los politopos</b>	<b>45</b>
3.1. Algunos resultados auxiliares . . . . .	45
3.2. El teorema fundamental de los politopos . . . . .	48
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>



# Resumen

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado es aprender qué entendemos por *politopo* y estudiar algunas de sus propiedades, así como ciertos resultados fundamentales a los que dan lugar. Veremos que un politopo en dimensión 2 y 3 no es más que un polígono y un poliedro usuales, respectivamente. Por ello, cuando en primaria y secundaria aprendemos estos conceptos, sería más apropiado usar el término politopo para luego particularizar en los dos casos de las dimensiones anteriores. Si bien es cierto, a una edad temprana es más complejo poder imaginarse la existencia de alguna dimensión mayor a las que conocemos de manera intuitiva. Aún así, sería una forma de empezar a familiarizarnos con una idea general (politopo) para luego centrarnos en casos particulares (polígono y poliedro).

Para alcanzar nuestra meta, en el primer capítulo vamos a empezar introduciendo la notación que emplearemos a lo largo de toda la memoria junto con los conceptos y resultados de geometría convexa que necesitaremos. Veremos qué es un conjunto convexo, así como los tipos de combinaciones y envolturas que pueden aparecer. Diremos que un conjunto es convexo si dados dos puntos del mismo, el segmento que los une se queda contenido dentro de él. También hablaremos de envoltura convexa de un conjunto cualquiera para referirnos al menor subconjunto convexo que lo contiene. De esta forma, un conjunto  $K$  se dirá que es convexo si, y sólo si,  $K$  coincide con la envoltura convexa del propio conjunto, es decir, si  $\text{conv } K = K$ .

Llegados a este punto introduciremos el concepto de politopo: un politopo no es más que la envoltura convexa de una cantidad finita de puntos. Como caso particular de los politopos veremos los  $k$ -símplices, que serán la envoltura convexa de  $k + 1$  puntos que tienen la característica de ser afinmente independientes.

Otro concepto crucial con el que vamos a trabajar será el de hiperplano soporte a un conjunto por un punto del mismo. Recibe este nombre por ser

un hiperplano que “soporta” al conjunto en un punto de su frontera. Dicho hiperplano, digamos  $H$ , determinará a su vez dos semiespacios cerrados,  $H^+$  y  $H^-$ , que serán los semiespacios que quedan por “encima” y por “debajo” de  $H$ . Veremos que los hiperplanos son una herramienta muy útil dentro de la geometría convexa, pues nos van a permitir “separar” (estricta y fuertemente) conjuntos convexos. Esto nos llevará a enunciar el teorema de separación de conjuntos convexos, resultado por el cual vamos a tener la condición necesaria que deben cumplir dos conjuntos convexos no vacíos  $K$  y  $K'$  para poder separarse mediante un hiperplano  $H$ .

Posteriormente, veremos qué es la dualidad dentro de la geometría convexa. Dicho concepto se aplica a numerosas ramas de las matemáticas, aunque nosotros nos vamos a centrar en el término asociado a los conjuntos convexos, pues es el fin de nuestro trabajo. Así mismo, veremos una serie de propiedades, de fácil comprobación, que pueden deducirse de la propia definición de dualidad e ilustraremos dicho concepto con el ejemplo del cubo y del octaedro, donde uno es el conjunto dual del otro y viceversa.

Por otra parte, hablaremos de los puntos extremos de un conjunto convexo (que en cualquier polígono de  $\mathbb{R}^2$  no son más que sus vértices) y llegaremos a uno de los resultados más importantes de nuestro trabajo: el teorema de Minkowski y Krein-Milman. Dicho teorema nos asegura que cualquier cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^n$  puede expresarse como la envoltura convexa de sus puntos extremos. Cabe destacar la pluralidad de nombres de este teorema. En primer lugar, el matemático ruso Minkowski se encargó, en el año 1911, de enunciar y probar este resultado para cualquier cuerpo convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Más tarde, en 1940, los ucranianos Krein y Milman generalizaron el teorema anterior para dimensión infinita.

Para finalizar esta primera parte, estudiaremos una de las funciones convexas más relevantes para los resultados que vamos a probar, la función soporte, así como varias propiedades que se pueden deducir de su definición y que necesitaremos posteriormente. Por último, veremos brevemente el concepto de suma de Minkowski, que nos permitirá dotar a la familia de los conjuntos convexos compactos de una estructura de semigrupo (conmutativo), con elemento neutro, y verificando la ley de la cancelación.

En el segundo capítulo nos vamos a centrar totalmente en los politopos. Empezaremos por estudiar la estructura facial de un cuerpo convexo cualquiera. Definiremos qué entendemos por cara, diferenciando entre propia e impropia, y hablaremos de  $i$ -caras para referirnos a caras de dimensión  $i$ . De dicha de-

finición se pueden deducir ciertas propiedades interesantes que darán mucho juego a la hora de probar determinados resultados. Por ejemplo, demostraremos que la intersección de una colección de caras vuelve a ser una cara, y que la intersección del conjunto con un hiperplano soporte siempre es una cara. Muy importante también es el hecho de que al quitarle una cara al conjunto, éste sigue siendo convexo.

Por otra parte, veremos un poco de historia sobre los politopos. Hablaremos sobre la relación que se establecía siglos atrás entre los 5 sólidos platónicos y los elementos de la naturaleza y el Universo. De hecho podemos encontrar vestigios de estas creencias incluso anteriores a Platón o Pitágoras. Además, probaremos que sólo hay 5 poliedros regulares (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

A continuación veremos algunos ejemplos de politopos, como los  $k$ -símplices ya mencionados anteriormente o los cross-politopos  $k$ -dimensionales. Comprobaremos que se conserva la suma y el producto por escalares dentro de la familia de politopos, es decir, tanto la suma de politopos como el producto de un escalar por un politopo nos da de nuevo un politopo.

También hablaremos de la estructura facial de los politopos, utilizando conceptos ya conocidos de manera intuitiva: vértices, aristas y caras. Gracias a ellos recuperaremos algunas propiedades de los conjuntos convexos pero aplicadas a los politopos, pues en muchas ocasiones resulta más fácil trabajar con los mismos. Además, veremos la condición que debe cumplir cualquier subconjunto de vértices de un politopo para determinar una de sus caras.

Para acabar este capítulo, nos vamos a encargar de mostrar algunos ejemplos en los que se pueden aplicar los politopos con el fin de simplificar la prueba de ciertos resultados. Veremos el teorema de aproximación por politopos, por el que podemos garantizar que todo cuerpo convexo puede aproximarse mediante politopos. Para un segundo resultado, el teorema de Minkowski, definiremos previamente el concepto de volumen, y veremos que el volumen de un politopo  $P$  (conteniendo al origen) se corresponde con la suma de los volúmenes de las pirámides interiores al politopo cuya base será cada una de las caras  $(n - 1)$ -dimensionales y altura la distancia del origen a dichas caras. Esta fórmula permitirá demostrar el mencionado teorema de Minkowski, el cual nos asegura que la suma de los vectores normales a las caras de un politopo, moduladas por la correspondiente medida de cada cara, siempre es el vector nulo.

Finalmente, en el último capítulo de nuestro trabajo, llegamos al objetivo principal de nuestra memoria: demostrar el llamado teorema fundamental de

los polítopos. Gracias a este resultado podemos garantizar que un polítopo, definido como la envoltura convexa de una cantidad finita de puntos, también puede verse como la intersección acotada de una colección de semiespacios cerrados. Es decir, vamos a probar que ambas cosas son equivalentes, siempre y cuando la intersección sea acotada. Esta condición es primordial, pues de lo contrario no existiría el recíproco.

La implicación directa hará uso del famoso teorema de Carathéodory, que nos dice, dado un conjunto  $A$ , cuál es la cantidad máxima de puntos de  $A$  necesarios para expresar cualquier  $x \in \text{conv } A$  como combinación convexa de dichos puntos. Demostraremos este teorema en la primera sección del capítulo, donde se recogen los resultados auxiliares que se necesitarán para la prueba del teorema fundamental de los polítopos.

Para ver el recíproco, esto es, que la intersección (acotada) de una cantidad finita de semiespacios cerrados es un polítopo (envoltura convexa de puntos), vamos a plantear dos demostraciones alternativas: en una de ellas emplearemos un resultado auxiliar sobre dualidad, mientras que en la segunda haremos uso de los puntos extremos y sus propiedades.

Una vez llegados a este punto, tendremos una cierta soltura y un gran manejo de los polítopos junto con sus propiedades fundamentales. Como habremos visto a lo largo del trabajo, los polítopos son una herramienta muy potente, tanto en la geometría convexa como en otros muchos campos de las matemáticas. Ya no sólo por los conceptos en sí mismos y propiedades que se derivan de ellos, sino por la capacidad de ser aplicados a otras disciplinas con el fin de simplificar determinados problemas. Tienen un interés especial en aspectos de tipo combinatorio, algorítmico o algebraico. En las últimas décadas, toda la teoría que se ha desarrollado para polítopos se aplica también en áreas como la optimización lineal y la geometría algebraica.

Si nos paramos a pensar, tiene sentido que sean herramientas tan curiosas y espectaculares, ya que fascinaron a los primeros matemáticos siglos atrás y siguen haciéndolo en la actualidad por las distintas facetas en las que se pueden aplicar con el fin de resolver problemas de una mayor complejidad.

# Résumé

L'objectif principal de ce projet de fin d'études est d'apprendre ce que nous entendons par *polytope* et étudier certaines de leurs propriétés, ainsi que certains résultats clés qui résultent. Nous allons voir qu'une polytope en dimension 2 et 3 n'est pas plus qu'un polygone et un polyèdre comme d'habitude, respectivement. Par conséquent, quand dans la primaire et la secondaire nous apprenons ces notions, il serait plus approprié d'utiliser le terme polytope puis particulariser dans les deux cas des dimensions précédentes. S'il est vrai, à un âge précoce est plus difficile d'imaginer l'existence d'une dimension supérieure à laquelle nous savons intuitivement. Malgré cela, serait un début de nous familiariser avec une idée générale (polytope) pour se concentrer sur cas individus (polygone et polyèdre).

Pour atteindre notre objectif, dans le premier chapitre nous allons commencer à introduire la notation que nous utilisons le long de toute la mémoire ainsi que les concepts et les résultats de la géométrie convexe que nous aurons besoin. Nous allons voir ce qui est un ensemble convexe, ainsi que les types de combinaisons et d'enveloppe qui peuvent apparaître. Nous dirons qu'un ensemble est convexe si donnés deux points du même, le segment qui les unit est contenu sur lui. Aussi nous parlerons de l'enveloppe convexe de n'importe quel ensemble pour désigner le plus petit sous-ensemble convexe qui le contient. De cette façon, un ensemble  $K$  sera dit convexe si, et seulement si,  $K$  coïncide avec l'enveloppe convexe de l'ensemble propre, c'est-à-dire, si  $\text{conv } K = K$ .

En ce moment nous introduirons le concept de polytope: un polytope n'est pas plus que l'enveloppe convexe d'une quantité finie de points. Comme cas particulier des polytopes nous verrons les  $k$ -simplexes, lesquels seront l'enveloppe convexe de  $k + 1$  points qui ont la caractéristique d'être affinement indépendants.

Un autre concept essentiel avec lequel nous allons travailler sera l'hyperplan d'appui d'un ensemble par un point de celui-ci. Il est nommé ainsi par être un

hyperplan qui “soutient” l’ensemble dans un point de sa frontière. Cet hyperplan, disons  $H$ , déterminera au même temps deux demi-espaces fermés,  $H^+$  et  $H^-$ , qui seront les demi-espaces qui sont “au-dessus” et “au-dessous” de  $H$ . Nous verrons que les hyperplans sont un outil très utile dans la géométrie convexe, car nous allons permettre de “séparer” (strict et fortement) ensembles convexes. Cela conduira à énoncer le théorème de séparation des ensembles convexes, résultat par lequel nous aurons la condition nécessaire que doit respecter deux ensembles convexes non vide  $K$  y  $K'$  pour être capable de se séparer par un hyperplan  $H$ .

Plus tard, nous verrons ce qu’est la dualité en géométrie convexe. Ce concept s’applique à beaucoup de branches des mathématiques, mais nous nous allons mettre l’accent sur le terme associé à les ensembles convexes, parce que c’est la fin de notre travail. De même, nous allons voir une série de propriétés, de facile vérification, qui peut être déduit de la définition de la dualité et illustrerons ce concept avec l’exemple du cube et l’octaèdre, dont l’un est l’ensemble polaire de l’autre et vice versa.

D’autre part, nous parlerons des points extrêmes d’un ensemble convexe (qui dans n’importe quel polygone de  $\mathbb{R}^2$  n’est pas plus que leurs sommets) et arriverons à l’un des théorèmes principaux de notre travail: le théorème de Minkowski et Krein-Milman. Ce théorème nous assure que tout corps convexe  $\mathbb{R}^n$  peut s’exprimer comme l’enveloppe convexe de leurs points extrémaux. Notez la pluralité des noms de ce théorème. Tout d’abord, le mathématicien russe Minkowski a été commandée, dans l’année 1911, pour affirmer et prouver ce résultat pour n’importe quel corps convexe dans  $\mathbb{R}^n$ . Plus tard, en 1940, les ukrainiens Krein et Milman ont généralisé le théorème précédent pour dimension infinie.

Pour conclure cette première partie, nous allons étudier une des fonctions convexes plus remarquable pour les résultats que nous allons prouver, la fonction d’appui, ainsi que certaines propriétés que peuvent être déduites de sa définition et que nous aurons besoin d’elles ensuite. Enfin, nous verrons brièvement le concept de somme de Minkowski, qui nous permettrons doter à la famille des ensembles convexes compacts avec une structure de demi-groupe (commutatif), avec élément neutre, et en vérifiant la loi de l’annulation.

Dans le deuxième chapitre nous nous concentrerons entièrement sur les polytopes. Nous commencerons par étudier la structure facial de n’importe quel corps convexe. Nous définirons ce que nous entendons par face, en distinguant entre propre et impropre, et parlerons de  $i$ -faces pour nous référer

aux faces de dimension  $i$ . Á partir de cette définition nous pouvons déduire certaines propriétés intéressantes qui serviront pour prouver certains résultats. Par exemple, nous prouverons que l'intersection d'une collection de faces est autre fois une face, et que l'intersection d'ensemble avec un hyperplan d'appui est toujours une face. Très important également est le fait qu'en retirant une face d'ensemble, celui-ci est convexe.

D'autre part, nous allons voir un peu d'histoire sur les polytopes. Nous parlerons sur la relation qui établissaient il y a quelques siècles entre les 5 solides de Platon et les éléments de la nature et l'Univers. En fait, nous pouvons trouver trace de ces croyances avant même de Platon ou de Pythagore. En outre, nous prouverons qu'il n'y a plus que 5 polyèdres réguliers (tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre).

Tout de suite nous allons voir aussi quelques exemples de polytopes, comme les  $k$ -simplexes déjà mentionnés ci-dessus ou les cross-polytopes  $k$ -dimensionnels. Nous vérifierons qu'il conserve la somme et le produit par scalaires dans la famille des polytopes, c'est-à-dire, à la fois la somme des polytopes et le produit d'un scalaire par un polytope nous redonne une polytope.

Nous parlerons aussi de la structure facial des polytopes, en utilisant des concepts déjà connus intuitivement: sommets, arêtes et faces. Grâce à eux nous allons récupérer certaines propriétés des ensembles convexes mais appliquées aux polytopes, car dans de nombreux cas il est plus facile de travailler avec eux. En outre, nous verrons la condition laquelle doit satisfaire n'importe quel sous-ensemble de sommets d'un polytope pour déterminer un de leurs faces.

Pour conclure ce chapitre, nous nous occuperons de donner quelques exemples dans lesquels les polytopes peuvent être appliqués afin de simplifier la preuve de certains résultats. Nous verrons le théorème d'approximation de polytopes par lequel nous pouvons garantir que tout corps convexe peut être approché par polytopes. Pour un deuxième résultat, le théorème de Minkowski, nous définirons précédemment la notion de volume et nous verrons que le volume d'un polytope  $P$  (en contenant l'origine) correspond avec la somme des pyramides qu'il y a dans l'intérieur du polytope dont la base sera chaque face  $i$ -dimensional et l'hauteur sera la distance entre l'origine et ces faces. Cette formule permettra de prouver le mentionné théorème de Minkowski, lequel nous assure que la somme des vecteurs normaux aux faces d'un polytope, modulées par la mesure correspondante de chaque face, c'est toujours le vecteur nul.

Enfin, pour finaliser ce travail, nous arrivons à l'objectif principal de notre mémoire: le théorème fondamental des polytopes. Grâce à ce résultat nous pou-

vons garantir qu'un polytope, vu comme l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points, peut également être considéré comme l'intersection délimitée d'une collection de demi-espaces fermés. C'est-à-dire, nous prouverons que les deux sont équivalents, à condition que l'intersection soit délimitée. Cette condition est indispensable, car sinon il n'aurait pas d'inverse.

L'implication directe utilisera le célèbre théorème de Carathéodory, lequel nous dit, donné un ensemble  $A$ , quel est le nombre maximum de points de  $A$  nécessaires pour exprimer n'importe quel  $x \in \text{conv } A$  comme combinaison convexe de points de  $A$ . Nous prouverons ce théorème dans la première section du chapitre, où se trouvent les résultats auxiliaires qui nous aurons besoin pour la preuve du théorème fondamental des polytopes.

Pour voir le réciproque, c'est-à-dire, que l'intersection (délimité) d'une quantité finie de demi-espaces fermés est un polytope (enveloppe convexe de points), nous allons poser deux preuves alternatives: dans l'une nous utiliserons un résultat auxiliaire sur dualité, alors que dans le deuxième nous utiliserons des points extrémaux et leurs propriétés.

Une fois à ce stade, nous aurons une certaine aisance et une grande mania-bilité des polytopes avec leurs propriétés fondamentales. Comme nous avons vu tout au long du travail, les polytopes sont un outil très puissant, aussi bien en géométrie convexe et autres nombreux domaines des mathématiques. Non seulement par les concepts en eux-mêmes et les propriétés qui dérivent de leur part, mais par la capacité à s'appliquer à d'autres disciplines afin de simplifier certains problèmes. Ils ont un intérêt particulier dans les aspects de type combinatoire, algébrique et algorithmique. Ces dernières décennies, toute la théorie qui a été développée pour les polytopes s'applique aussi dans des domaines comme la géométrie algébrique et optimisation linéaire.

Si nous pensons, il est logique qu'ils soient des outils si étranges et spectaculaires, puis ils ont fasciné aux premiers mathématiciens il y a quelques siècles et ils continuent de le faire aujourd'hui par les différentes facettes dans lesquelles peuvent être appliquées pour résoudre des problèmes un plus complexe.

# Capítulo 1

## Preliminares. Los conjuntos convexos

El concepto de *convexidad* existe de manera intuitiva dentro del razonamiento matemático desde hace muchos siglos. Si echamos la vista atrás en busca de un origen, automáticamente aparecen figuras trascendentales para las distintas ramas de las matemáticas y que hicieron lo propio para este campo. En “*Los Elementos*” de Euclides podemos encontrar algunas propiedades sobre polígonos y poliedros, aunque tuvimos que esperar unos años más para que Arquímedes diese la primera noción precisa y rigurosa de lo que era la *convexidad* de una curva o una superficie. Es entonces cuando entran en juego también los 13 *sólidos arquimedianos* o *poliedros semirregulares*, probando Kepler siglos más tarde que existían única y exclusivamente 13.

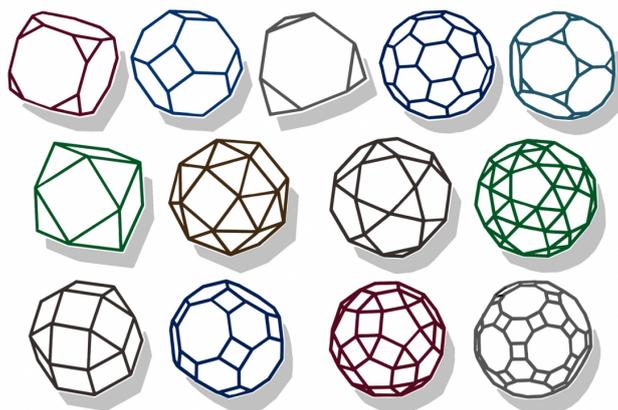


Figura 1.1: Los 13 sólidos arquimedianos (figura obtenida de [5])

Posteriormente, surgen nombres como Minkowski, Krein o Milman, matemáticos que también aparecerán a lo largo de esta memoria, pues probaron, entre otros, un resultado fundamental para la geometría convexa.

En este primer capítulo del trabajo nos encargamos de desarrollar los conceptos básicos de la geometría convexa, así como los principales resultados a los que dan lugar y que necesitaremos más adelante. De esta forma, construiremos la base para los otros dos capítulos, pues ambos se nutrirán de las nociones aquí desarrolladas de manera recurrente. Dado que no son el objetivo de nuestro trabajo, sólo demostraremos aquéllos que tengan relevancia directa para los posteriores resultados, y que no necesiten de conceptos/propiedades adicionales que no serán de utilidad en el objetivo marcado para el trabajo: los politopos. El contenido del capítulo se ha estudiado en [4] y [6].

Así pues, antes de entrar en materia, vamos a introducir la nomenclatura estándar que emplearemos a lo largo de todo el trabajo. Como es habitual, denotaremos por  $\mathbb{R}^n$  el espacio euclídeo  $n$ -dimensional, dotado con el producto escalar usual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  y la norma euclídea  $|\cdot|$ . Representaremos los vectores de la base canónica por  $e_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Por otro lado, escribiremos  $B_n$  para representar la bola euclídea  $n$ -dimensional (cerrada) de radio 1 y  $S^{n-1}$  para referirnos a su frontera, esto es, a la esfera unidad  $(n-1)$ -dimensional de  $\mathbb{R}^n$ .

Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , representaremos por  $\text{int } A$ ,  $\text{cl } A$  y  $\text{bd } A$ , el interior, la clausura y la frontera de  $A$ , respectivamente, en  $\mathbb{R}^n$ . Además, si  $A$  está contenido en un subespacio (afín) de  $\mathbb{R}^n$ , el interior y la clausura de  $A$  respecto a dicho subespacio se denominan interior relativo y clausura relativa de  $A$ , y se denotarán por  $\text{relint } A$  y  $\text{relbd } A$ . Por último, representaremos por  $\text{dim } A$  la dimensión de  $A$ , esto es, la dimensión del menor subespacio afín que lo contiene.

## 1.1. Los conjuntos convexos. Primeras propiedades

Empezamos la sección introduciendo algunos conceptos sobre las distintas combinaciones que podemos encontrar. Esta sección se ha estudiado en [4].

**Definición 1.1.** *Sea  $x$  un vector de  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que dicho vector es una **combinación lineal** de los vectores  $x_1, \dots, x_k$  si existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  tales que  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k$ . Además, tenemos que:*

- Si los  $\lambda_i$  cumplen que  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ , entonces se dice que  $x$  es una **combinación afín** de los  $x_i$ .

- Si los  $\lambda_i$  cumplen que  $\lambda_i \geq 0$ , con  $i = 1, \dots, k$ , entonces se dice que  $x$  es una **combinación positiva** de los  $x_i$ .
- Si se cumplen ambas condiciones para los escalares  $\lambda_i$ , esto es,  $\lambda_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1$ , entonces se dice que  $x$  es una **combinación convexa** de los  $x_i$ .

Llegados a este punto tenemos las herramientas necesarias para poder definir qué entendemos por conjunto convexo:

**Definición 1.2.** Sea  $K$  un conjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $K$  es **convexo** si, dados dos puntos cualesquiera de  $K$ , el segmento que los une se queda totalmente contenido en  $K$ , esto es, si la combinación convexa  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ , para  $x, y \in K$ , y  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Algunos ejemplos de conjuntos convexos y no convexos serían los siguientes (véase la figura 1.2):

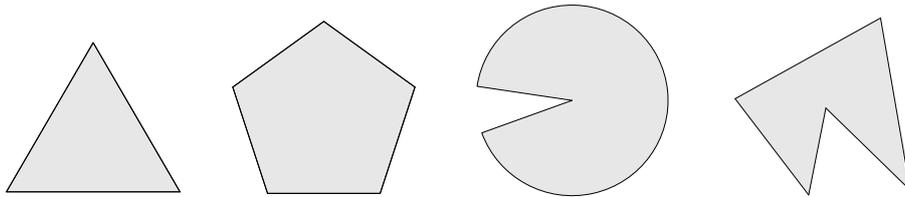


Figura 1.2: Dos conjuntos convexos y dos conjuntos no convexos

De esta definición se puede deducir que un conjunto  $K$  será convexo si, y sólo si, cualquier combinación convexa que podamos hacer con puntos de  $K$  se queda dentro de  $K$ . De igual forma, también concluimos que la intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo, lo que nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.3.** Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto cualquiera. Definimos la **envoltura convexa** de  $K$ , que representaremos por **conv  $K$** , como la intersección de todos los subconjuntos convexos de  $\mathbb{R}^n$  que contienen a  $K$ . De la misma forma podemos definir en  $\mathbb{R}^n$ :

- La **envoltura afín** de  $K$ , que representaremos por **aff  $K$** , como la intersección de todos los subespacios afines que contienen a  $K$ .
- La **envoltura positiva** de  $K$ , que representaremos por **pos  $K$** , como la intersección de todos los conos<sup>1</sup> convexos que contienen a  $K$ .

<sup>1</sup>Un cono convexo es un subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  convexo, no vacío y tal que si  $x \in K$ , entonces  $\lambda x \in K$ , para todo  $\lambda \geq 0$ .

Por tanto, podemos pensar en la envoltura convexa  $\text{conv } K$  como el menor conjunto convexo que contiene a  $K$  (véase la figura 1.3). Así mismo, podemos ver  $\text{aff } K$  y  $\text{pos } K$  como el menor subespacio afín y el menor cono convexo que contienen a  $K$ , respectivamente. Además, podemos asegurar que un conjunto  $K \subset \mathbb{R}^n$  será convexo si, y sólo si, la envoltura convexa de  $K$  es el propio  $K$ , esto es,  $\text{conv } K = K$ .

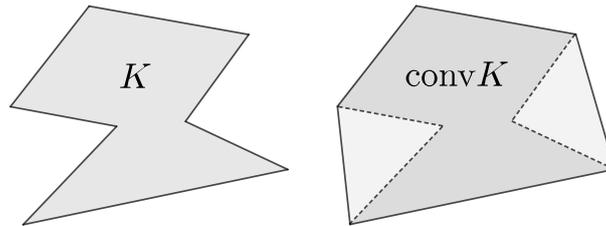


Figura 1.3: La envoltura convexa

Además, si tenemos un subconjunto cualquiera  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv } K$  será el conjunto formado por todas las combinaciones convexas de una cantidad finita de elementos de  $K$ . De forma similar se puede concluir lo correspondiente para  $\text{aff } K$  y  $\text{pos } K$ . Luego, si un punto  $x \in \text{conv } K$ , entonces es combinación convexa de una cantidad finita de puntos de  $K$ . Pero, ¿cuántos puntos de  $K$  son necesarios? La respuesta a esta pregunta la da el teorema de Carathéodory: a lo sumo,  $n + 1$  puntos (véase el teorema 3.1 de la sección 3.1).

De hecho, se puede comprobar fácilmente que los  $n + 1$  puntos no se pueden reducir. Por ejemplo, si pensamos en 4 puntos de  $\mathbb{R}^2$ , cuya envoltura convexa es un cuadrilátero, un punto cualquiera de dicha figura que no esté sobre una diagonal o un lado será combinación convexa de, necesariamente, 3 de dichos puntos (seleccionados de manera conveniente). Similarmente, tomando 3 puntos de  $\mathbb{R}^2$  cuya envoltura convexa es un triángulo, cualquier punto que no esté sobre un lado necesita los 3 vértices para poder expresarse como combinación convexa de ellos (véase la figura 1.4).

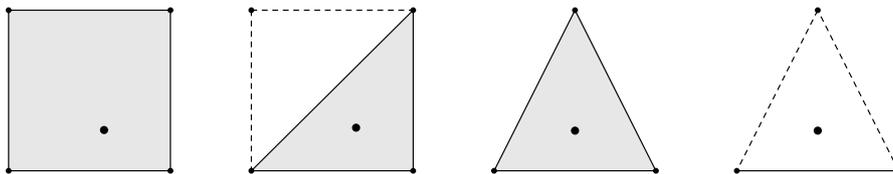


Figura 1.4: Ejemplos de que en  $\mathbb{R}^2$  no podemos tomar menos de 3 puntos

Si nos fijamos en los conjuntos obtenidos a partir de la envoltura convexa de una cantidad finita de puntos, surge el concepto fundamental en torno al cual gira este trabajo y sobre el que se desarrollarán algunos resultados principales:

**Definición 1.4.** Se llama **politopo** a la envoltura convexa de una cantidad finita de puntos de  $\mathbb{R}^n$ . En  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  se denominan simplemente **polígono** y **poliedro**, respectivamente.

Además, llamaremos  **$k$ -símplice**, con  $k \leq n$ , a la envoltura convexa de  $k + 1$  puntos afínmente independientes.

Así pues, un ejemplo de 0-símplice es un punto, un 1-símplice es un segmento de recta, un 2-símplice un triángulo y un 3-símplice un tetraedro (véase la figura 1.5).

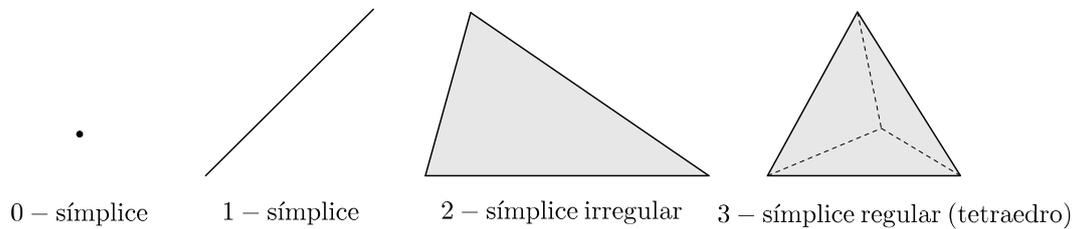


Figura 1.5: Ejemplos de  $k$ -símplices en  $\mathbb{R}^3$

Una simple observación que nos resultará de gran utilidad posteriormente, y en la cual la convexidad juega un papel fundamental, es la siguiente:

**Lema 1.1.** Dado un conjunto convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$ , si  $x \in \text{int } K$  e  $y \in \text{cl } K$ , entonces el segmento semiabierto  $[x, y)$  está contenido en el interior de  $K$ .

**Demostración.** Sea  $z = (1 - \lambda)y + \lambda x \in (x, y)$ , con  $0 < \lambda < 1$ . Dado que  $x \in \text{int } K$ , existen  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\rho > 0$  tales que  $x + \text{int}(\rho B_n) \subset K$ .

Supongamos primero que  $y \in K$ , y veamos que  $z + \text{int}(\lambda\rho B_n) \subset K$ , lo que probará que  $z \in \text{int } K$ . Para ello, si  $w \in z + \text{int}(\lambda\rho B_n)$ , entonces  $w = z + \lambda u$ , con  $u \in \text{int}(\rho B_n)$ . Como  $x + u \in x + \text{int}(\rho B_n) \subset K$ , se tiene que

$$w = (1 - \lambda)y + \lambda(x + u) \in K,$$

por ser combinación convexa de elementos de  $K$ , lo que concluye la prueba.

Supongamos finalmente que  $y \in \text{cl } K \setminus K$ . Entonces, por la definición de clausura, existe

$$v \in K \cap \left[ y + \text{int} \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} \rho B_n \right) \right],$$

de donde  $v = y + \frac{\lambda}{1-\lambda}u$ , con  $u \in \text{int}(\rho B_n)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} z &= (1-\lambda)y + \lambda x = (1-\lambda)\left(v - \frac{\lambda}{1-\lambda}u\right) + \lambda x = (1-\lambda)v - \lambda u + \lambda x \\ &= (1-\lambda)v + \lambda(x-u) \in K, \end{aligned}$$

ya que  $v \in K$  y  $x-u \in x + \text{int}(\rho B_n) \subset K$ . Esto demuestra que  $[x, y] \subset K$ , lo cual implica a su vez que  $(x, y) \subset \text{int} K$ . Finalmente, como  $x \in \text{int} K$ , podemos concluir que  $[x, y] \subset \text{int} K$ .  $\square$

Desde este momento llamaremos **cuerpo convexo** a cualquier conjunto convexo y *compacto* de  $\mathbb{R}^n$  que sea distinto del vacío. Vamos a representar por  $\mathcal{K}^n$  el conjunto de todos los cuerpos convexos del espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ .

## 1.2. Los hiperplanos soporte. Separación

El contenido de esta sección se ha estudiado en [4]. Un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  se puede expresar como  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$ , donde  $u$  es un vector unitario que es normal a  $H$  y  $c$  es una constante. De igual forma, representaremos por  $H^+$  y  $H^-$  los dos semiespacios cerrados que determina el hiperplano  $H$ , es decir,

$$H^+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq c\} \quad \text{y} \quad H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq c\}.$$

Cuando sea de utilidad, denotaremos por  $H_{u,c} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$ .

Dentro de los hiperplanos cabe destacar los *hiperplanos soporte*, pues sus aplicaciones son muy diversas, a la par que útiles, para la geometría convexa.

Dado un conjunto convexo y cerrado  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ , diremos que un hiperplano  $H$  *soporta al conjunto  $K$  en un punto  $x \in K$*  si  $x \in K \cap H$  y  $K$  está contenido en  $H^+$  o  $H^-$ . Esto nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 1.5.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto convexo y cerrado. Diremos que  $H$  es un **hiperplano soporte a  $K$**  si  $H$  soporta a  $K$  en algún punto  $x$  de dicho conjunto, el cual será, necesariamente, un punto de la frontera. Así mismo, si  $H$  es un hiperplano soporte a  $K$  y  $K \subset H^-$ , entonces diremos que  $H^-$  es un **semiespacio soporte a  $K$**  (análogamente para  $H^+$ ).*

El siguiente teorema tiene una gran importancia y utilidad, aunque no lo demostraremos pues su prueba requiere de técnicas y resultados que no son el objetivo de esta memoria, y cuyo estudio alargaría el trabajo de forma innecesaria.

**Teorema 1.1.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  convexo y cerrado. Entonces por cada  $x \in \text{bd } K$  existe un hiperplano soporte a  $K$ . Además, si el conjunto  $K$  es acotado, para cada  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$  existe un hiperplano soporte a  $K$  con normal exterior  $u$ .*

Como decíamos al principio de este capítulo, los hiperplanos son una herramienta muy importante dentro del campo de la convexidad. Sin ir más lejos, nos van a permitir separar conjuntos. Para ello, empezamos por definir lo que entendemos por separación de conjuntos y los tipos que pueden darse.

**Definición 1.6.** *Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  subconjuntos cualesquiera (distintos) y sea  $H$  un hiperplano. Se dice que  $H$  **separa**  $A$  y  $B$  si  $A \subset H^-$  y  $B \subset H^+$ , o viceversa. Llamaremos a  $H$  el **hiperplano de separación** de  $A$  y  $B$ .*

La separación que acabamos de definir se dirá **propia** si tanto  $A$  como  $B$  no están contenidos en  $H$ . En caso contrario, la separación se llamará **impropia**. Además, podemos definir los tipos de separación que se describen:

**Definición 1.7.** *Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  dos subconjuntos cualesquiera (distintos) y sea  $H_{u,c} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$  un hiperplano. Diremos que:*

- $A$  y  $B$  están **estrictamente separados** por  $H_{u,c}$  si  $A \subset \text{int } H_{u,c}^-$  y  $B \subset \text{int } H_{u,c}^+$ , o viceversa.
- $A$  y  $B$  están **fuertemente separados** por  $H_{u,c}$  si existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $H_{u,c-\varepsilon}$  y  $H_{u,c+\varepsilon}$  separan  $A$  y  $B$ .

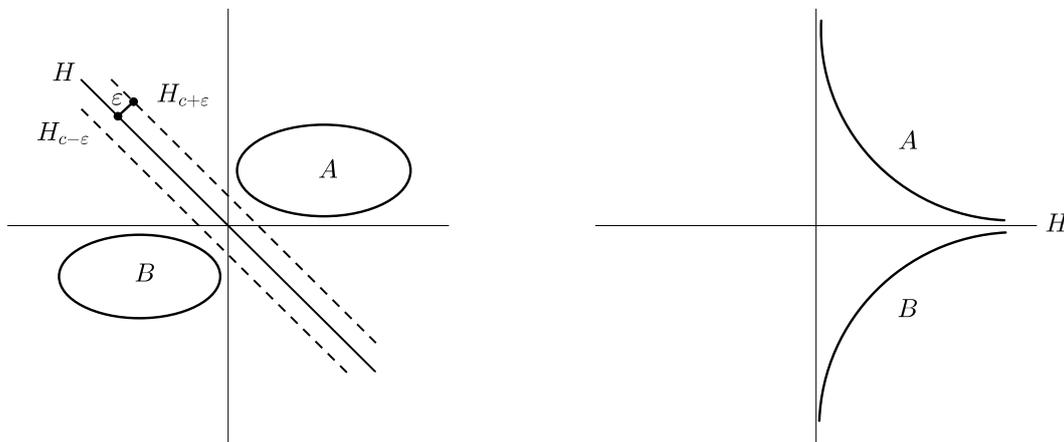


Figura 1.6: Ejemplos de separación de conjuntos

Así por ejemplo, como se puede ver en la figura 1.6, los conjuntos  $A$  y  $B$  de la izquierda están fuertemente separados por  $H$ , mientras que los de la

derecha están estricta pero no fuertemente separados por  $H$ , pues no podemos encontrar un tal  $\varepsilon$ .

Para cerrar esta sección vamos a enunciar el *teorema de separación de conjuntos convexos*, en cuya demostración no nos vamos a centrar, pues de nuevo necesita de diversos resultados previos que no son el objetivo principal de este trabajo. Gracias a este teorema tenemos la condición que deben cumplir dos conjuntos convexos para poder separarse.

**Teorema 1.2 (Teorema de separación).** *Si  $K, K' \subset \mathbb{R}^n$  son conjuntos convexos no vacíos tales que  $K \cap K' = \emptyset$ , entonces  $K$  y  $K'$  pueden separarse. Además, si  $K$  es compacto y  $K'$  es cerrado, entonces  $K$  y  $K'$  pueden separarse fuertemente.*

### 1.3. Dualidad

El concepto de *dualidad* aparece en muchas ramas de las matemáticas aplicado de diversas formas. En nuestro caso, nos vamos a centrar en este término asociado a los conjuntos convexos con los que estamos trabajando. Esta sección se ha estudiado en [6].

**Definición 1.8.** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un subconjunto cualquiera no vacío. Definimos el **conjunto polar** o **dual** de  $A$  como*

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 1, \text{ para todo } a \in A\}.$$

**Ejemplo 1.1.** *Algunos ejemplos del concepto de dualidad serían los siguientes (véase la figura 1.7):*

1. *El conjunto polar del origen de coordenadas no es más que todo el espacio  $\mathbb{R}^n$ , pues para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  tenemos que  $\langle 0, x \rangle = 0 \leq 1$ .*
2. *En  $\mathbb{R}^2$ , el dual del eje de abscisas  $X$  es el eje de ordenadas (y viceversa), ya que si  $(a, b) \in X^*$ , entonces debe cumplirse que  $\langle (a, b), (x, 0) \rangle \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , es decir, debe ser  $ax \leq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , lo cual sólo se tiene si  $a = 0$ .*
3. *El polar de cualquier punto  $y \in \mathbb{R}^n$ , con  $y \neq 0$ , es el semiespacio que determina el hiperplano  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 1\}$  y que contiene al 0. Como se puede observar, si  $|y| = 1$ , el hiperplano  $H$  pasa por  $y$ . En otro caso,  $H$  estará “más alejado” o “más cerca” del origen (en la dirección de  $y$ ) dependiendo de si  $|y| < 1$  o  $|y| > 1$ , respectivamente.*

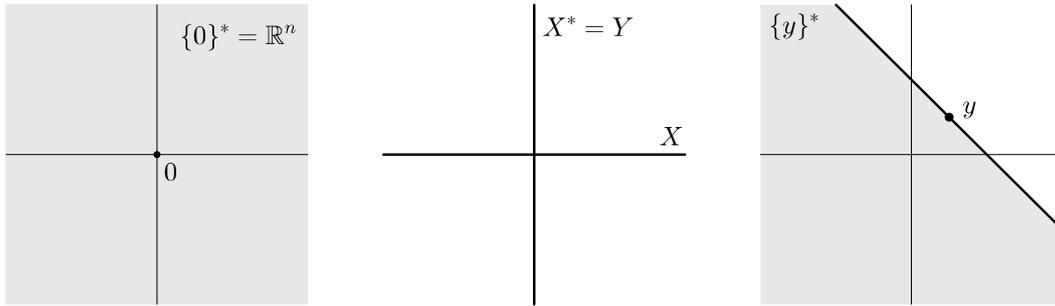


Figura 1.7: El dual de algunos conjuntos

Del concepto de dualidad se pueden deducir las propiedades que vamos a enunciar y demostrar a continuación:

**Proposición 1.1.** Sean  $A, B, A_i \subset \mathbb{R}^n$ , con  $i \in \mathbb{N}$ , subconjuntos no vacíos. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

- (i)  $[\bigcup_{i \in I} A_i]^* = \bigcap_{i \in I} A_i^*$ .
- (ii)  $A^*$  siempre es cerrado y convexo, y  $0 \in A^*$ .
- (iii) Si  $A \subset B$ , entonces  $B^* \subset A^*$ .
- (iv) Si  $\lambda > 0$ , entonces  $(\lambda A)^* = (1/\lambda)A^*$ .
- (v)  $A \subset (A^*)^* =: A^{**}$ .

**Demostración.** (i) Aplicando la definición de conjunto polar tenemos que

$$\begin{aligned} \left[ \bigcup_{i \in I} A_i \right]^* &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 1, \text{ para todo } a \in \bigcup_{i \in I} A_i \right\} \\ &= \bigcap_{i \in I} \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, a \rangle \leq 1, \text{ para todo } a \in A_i\} = \bigcap_{i \in I} A_i^*. \end{aligned}$$

(ii) Gracias a (i) tenemos que

$$A^* = \left[ \bigcup_{a \in A} \{a\} \right]^* = \bigcap_{a \in A} \{a\}^*$$

y, dado que el conjunto polar de un punto es  $\mathbb{R}^n$  o un semiespacio cerrado que contiene el origen, entonces  $A^*$  es intersección de una familia de conjuntos convexos y cerrados (semiespacios) conteniendo a 0. Por tanto,  $A^*$  es convexo y cerrado y contiene al origen.

(iii) Si  $A \subset B$ , entonces  $B = A \cup (B \setminus A)$ . Luego,  $B^* = [A^* \cap (B \setminus A)^*] \subset A^*$ .

(iv) Sea  $x \in (\lambda A)^*$ . Entonces se tiene que  $\langle \lambda a, x \rangle \leq 1$  para todo  $a \in A$  o, lo que es lo mismo,  $\langle a, \lambda x \rangle \leq 1$ , para todo  $a \in A$ . Esto implica que  $\lambda x \in A^*$  y, por tanto,  $x \in (1/\lambda)A^*$ . Recíprocamente, si  $x \in (1/\lambda)A^*$ , entonces  $x = (1/\lambda)y$  con  $y \in A^*$ , de donde tenemos que  $\langle y, a \rangle \leq 1$ , para todo  $a \in A$ . En consecuencia,  $\langle x, \lambda a \rangle = \langle \lambda x, a \rangle = \langle y, a \rangle \leq 1$ , para todo  $a \in A$ , lo cual implica que  $x \in (\lambda A)^*$ .

(v) Si  $a \in A$ , para todo  $x \in A^*$  se tiene que  $\langle x, a \rangle \leq 1$ , lo cual es válido para todo  $a \in A$ . Luego, si  $x \in A^*$ , como  $\langle x, a \rangle \leq 1$ , entonces  $a \in (A^*)^* = A^{**}$ .  $\square$

Veamos como ejemplo el modo de obtener el conjunto polar del cubo  $n$ -dimensional.

**Ejemplo 1.2.** Sea  $C_n$  el cubo  $n$ -dimensional de lado 2 definido de la siguiente forma:

$$C_n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}.$$

Tomamos  $y = (y_1, \dots, y_n) \in C_n^*$  y elegimos un punto  $x = (x_1, \dots, x_n) \in C_n$  verificando que  $x_i = 1$  si  $y_i \geq 0$  ó  $x_i = -1$  si  $y_i < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ . Entonces, se tiene que

$$|y_1| + \dots + |y_n| = \langle x, y \rangle \leq 1,$$

por lo que  $C_n^* \subset \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_1| + \dots + |y_n| \leq 1\}$ . Vamos a ver el otro contenido para probar que es en realidad una igualdad.

Sea  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$  tal que  $|y_1| + \dots + |y_n| \leq 1$  y sea  $x \in C_n$  arbitrario. Entonces, al ser  $|x_i| \leq 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ , se tiene que

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq |x_1| |y_1| + \dots + |x_n| |y_n| \leq |y_1| + \dots + |y_n| \leq 1,$$

lo que prueba que  $y \in C_n^*$ . Por tanto, el dual del cubo  $n$ -dimensional de lado 2 es el conjunto que se denomina en geometría convexa  $n$ -cross-politopo regular:

$$C_n^* = \{y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : |y_1| + \dots + |y_n| \leq 1\} = \text{conv} \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}.$$

Si pensamos en dimensión 3, este conjunto no es más que el octaedro regular (véase la figura 1.8).

Por último, vamos a ver que si calculamos el polar de  $C_n^*$  recuperamos el cubo del principio, es decir,  $C_n^{**} = C_n$ . Sea  $z = (z_1, \dots, z_n) \in C_n^{**}$ . Elegimos los puntos  $y_i = (0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0) \in C_n^*$ , con  $i = 1, \dots, n$ , donde  $\pm 1$  está en la coordenada  $i$ -ésima, y de forma que elegimos 1 si  $z_i \geq 0$  y  $-1$  si  $z_i < 0$ . Entonces, es claro que  $|z_i| = \langle y_i, z \rangle \leq 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , ya que  $z \in C_n^{**}$  e  $y_i \in C_n^*$ . De ahí se obtiene que  $z \in C_n$ . Puesto que siempre se tiene que  $C_n \subset C_n^{**}$  (propiedad (v) de la proposición 1.1), deducimos que  $C_n = C_n^{**}$ .

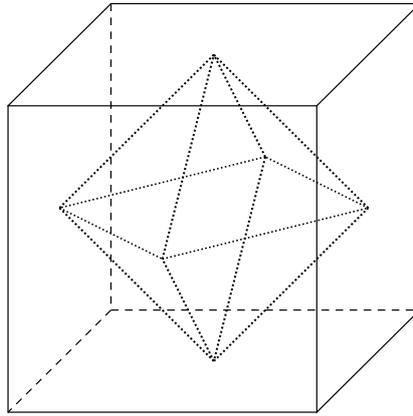


Figura 1.8: Ejemplo de conjunto polar: el cubo y el octaedro

El caso del cubo se extrapola a cualquier cuerpo convexo. Es decir, la propiedad  $K^{**} = K$  se va a dar siempre y cuando  $K$  sea un cuerpo convexo (conteniendo el origen).

**Proposición 1.2.** *Sea  $K \subset \mathbb{R}^n$  un cuerpo convexo con  $0 \in \text{int } K$ . Entonces*

$$K^{**} = K.$$

**Demostración.** Ya sabemos que siempre se verifica la inclusión  $K \subset K^{**}$  (proposición 1.1, propiedad (v)). Veamos por tanto la inclusión contraria.

Para ello, supongamos que  $z \notin K$ . El teorema 1.2 de separación nos asegura la existencia de un hiperplano  $H_{u,c}$  separando fuertemente  $z$  y  $K$ , y por tanto, tal que  $\langle z, u \rangle > c$ , y  $\langle x, u \rangle < c$ , para todo  $x \in K$ . Como  $H$  no puede pasar por el origen, ya que  $0 \in \text{int } K$ ,  $c \neq 0$ . Entonces, tomando el vector  $v := u/c$ , tendremos que  $\langle z, v \rangle > 1$  y  $\langle x, v \rangle < 1$ , para todo  $x \in K$ . Esto demuestra que  $v \in K^*$  y, así, al ser  $\langle z, v \rangle > 1$ ,  $z \notin K^{**}$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

## 1.4. Representaciones extremales. El teorema de Minkowski, Krein-Milman

Una vez familiarizados con la envoltura convexa de un conjunto  $K$ , parece razonable plantearse la siguiente cuestión: ¿será posible expresar cualquier conjunto convexo como la envoltura convexa de cierto subconjunto propio del mismo? Y en tal caso, ¿cuál sería el menor subconjunto de  $K$  que satisface dicha condición? Para encontrar respuesta a estas preguntas necesitamos un concepto nuevo. En este caso, el contenido de la sección se ha estudiado en [4].

**Definición 1.9.** Sea  $K$  un conjunto no vacío. Se dice que un punto  $x \in K$  es un **punto extremo** de  $K$  si no existe ningún segmento en  $K$  que contenga a  $x$  en su interior relativo; o dicho de otro modo, si  $x$  no puede escribirse como  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ , con  $y, z \in K$  y  $0 < \lambda < 1$ . El conjunto de los puntos extremos de  $K$  se denota como  $\text{ext } K$  y se denomina el **perfil** de  $K$ .

Algunos ejemplos ilustrando la noción anterior se muestran en la figura 1.9.

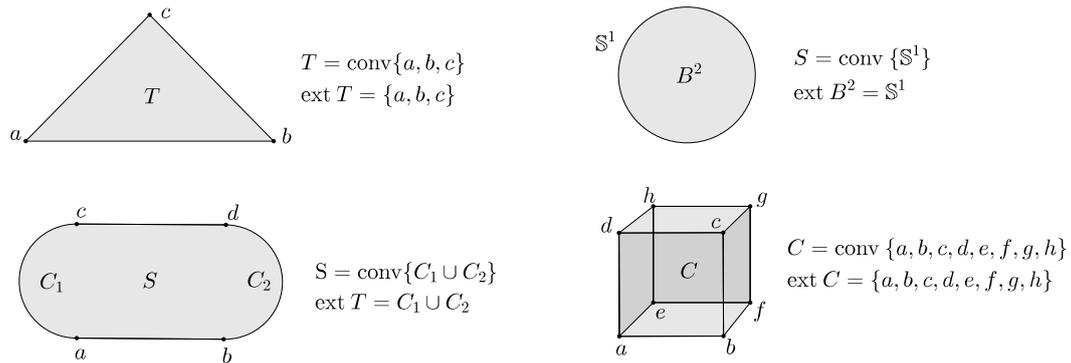


Figura 1.9: Envoltura convexa y perfil de algunos conjuntos convexos

En conclusión, el perfil de cualquier polígono de  $\mathbb{R}^2$  será el conjunto formado por sus vértices. Si se trata de un conjunto convexo abierto, dicho conjunto no tendrá puntos extremos y, por tanto, su perfil será vacío.

De la definición se deduce que un punto  $x$  de un conjunto convexo  $K$  será un punto extremo de  $K$  si, y sólo si, el conjunto  $K \setminus \{x\}$  sigue siendo convexo. Además, cualquier subconjunto  $S \subset K$  para el que  $\text{conv } S = K$  contiene al perfil de  $K$ . Si ahora nos fijamos en la familia de los cuerpos convexos, la compacidad de los mismos nos asegurará la existencia de, al menos, un punto extremo. En ese caso, la respuesta a la pregunta que nos hacíamos al principio de la sección reside en el teorema que enunciamos a continuación.

**Teorema 1.3 (Minkowski, Krein-Milman).** *Todo cuerpo convexo  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  es la envoltura convexa de sus puntos extremos, es decir,  $K = \text{conv ext } K$ .*

Además, el perfil de  $K$  no puede reemplazarse por otro subconjunto más pequeño.

El teorema anterior fue demostrado por Minkowski en el año 1911 para  $\mathbb{R}^n$ . Posteriormente, en 1940, Krein y Milman extendieron este resultado para espacios de dimensión infinita. Para probar dicho teorema necesitamos la siguiente propiedad previa:

**Lema 1.2.** *Sea  $H$  un hiperplano soporte a  $K$  por un punto  $x$ . Entonces  $x$  es un punto extremo de  $H \cap K$  si, y sólo si,  $x$  es extremo de  $K$ .*

**Demostración.** Para la implicación directa, supongamos que  $x$  es un punto extremo de  $H \cap K$  que no es punto extremo de  $K$ . Entonces, existen puntos  $y, z \in K$  tales que  $x \in \text{relint}[y, z]$ . Dado que  $H$  es un hiperplano soporte a  $K$  por  $x$ ,  $H$  no corta a  $\text{int} K$  y, por tanto,  $[y, z] \subset H$ , luego  $y, z \in H \cap K$ . De aquí se deduce que  $x$  no sería un punto extremo de  $H \cap K$ , una contradicción.

Recíprocamente, si  $x \in \text{ext} H$ , entonces  $x$  no se encuentra en el interior de ningún segmento de  $K$ , luego menos aún en el interior de algún segmento de  $H \cap K$ , por lo que  $x \in \text{ext}(H \cap K)$ .  $\square$

Ahora sí tenemos las herramientas necesarias para probar el teorema 1.3.

**Demostración del teorema 1.3.** De forma trivial,  $\text{conv ext} K \subset K$ . Para ver el otro contenido, la demostración se sigue por inducción a partir de la dimensión  $k$  de  $K$ . Los casos en los que  $K$  es un punto o un segmento cerrado de recta, esto es,  $k = 0$  y  $k = 1$ , respectivamente, son triviales. Por tanto, supongamos que el teorema se cumple para cualquier cuerpo convexo  $K$  de dimensión, a lo sumo,  $k - 1$ , donde  $k \leq n$ , y asumamos que  $\dim K = k$ .

Tomamos un punto  $x \in K$ . Si  $x \in \text{relbd} K$ , viendo  $K$  como un subconjunto de  $\text{aff} K$ , el teorema 1.1 nos asegura la existencia de un hiperplano  $H$  de dimensión  $k - 1$  soporte a  $K$  por el punto  $x$ . Entonces, el conjunto  $K \cap H$  es convexo, compacto y tiene dimensión, a lo sumo,  $k - 1$  (ya que ésta es la dimensión de  $H$ ). Por hipótesis de inducción,  $x$  es una combinación convexa de puntos extremos de  $K \cap H$  y, como consecuencia del lema 1.2, también lo es de puntos extremos de  $K$ .

Supongamos ahora que  $x \in \text{relint} K$ . Sea  $L$  una recta en  $\text{aff} K$  que pasa por  $x$ . Entonces,  $L \cap K$  es un segmento de recta con extremos, por ejemplo  $y$  y  $z$ , en  $\text{relbd} K$ . Por lo que acabamos de demostrar, tanto  $y$  como  $z$  son combinaciones convexas de puntos extremos de  $K$ , por lo que  $x$  también lo será. De este modo,  $x \in \text{conv ext} K$ , lo que demuestra el otro contenido y concluye la prueba.  $\square$

## 1.5. La función soporte

Las funciones convexas aparecen en diversos contextos y tienen numerosas aplicaciones. Para nuestro trabajo hay una función de este tipo que tiene especial interés, pues guarda una estrecha relación con la geometría de los conjuntos convexos. El estudio de la función soporte se ha llevado a cabo en [6].

**Definición 1.10.** Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  un cuerpo convexo. Se define la **función soporte de  $K$**  como

$$h(K, u) = \text{máx} \{ \langle x, u \rangle : x \in K \}, \quad \text{con } u \in \mathbb{S}^{n-1}$$

La interpretación geométrica de la función soporte de un conjunto  $K$  es la siguiente. Dado un cuerpo convexo  $K$ , si  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ , entonces existe  $x_0 \in K$  tal que  $h(K, u) = \langle x_0, u \rangle$ , lo que demuestra que el hiperplano

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = h(K, u) \}$$

soporta  $K$  en  $x_0$ ; y claramente, la distancia de  $H$  al origen es  $|h(K, u)|$ . Por tanto, la función soporte nos da la distancia *con signo* del hiperplano soporte a  $K$  determinado por  $u$ , al origen de coordenadas. En ese caso, la distancia será positiva (respectivamente negativa) si, y sólo si, el vector  $u$  apunta hacia el exterior (respectivamente interior) del semiespacio abierto que contiene a  $0$ .

De la definición de función soporte se deducen, entre otras, las siguientes consecuencias:

**Proposición 1.3.** La función soporte  $h(K, \cdot)$  de un conjunto convexo y cerrado  $K$  cumple las siguiente propiedades:

(i)  $h(K + t, u) = h(K, u) + \langle t, u \rangle$  para todo  $t \in \mathbb{R}^n$  y todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

(ii)  $h(K, \cdot)$  es sublineal, es decir: dados  $u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $\lambda \geq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} h(K, \lambda u) &= \lambda h(K, u) \quad (\text{positivamente homogénea}) \text{ y} \\ h(K, u + v) &\leq h(K, u) + h(K, v) \quad (\text{subaditividad}); \end{aligned}$$

por tanto, la función soporte es convexa.

(iii)  $h(\lambda K, u) = \lambda h(K, u)$  para todo  $\lambda \geq 0$  y todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Además, para escalares negativos se tiene que  $h(-K, u) = h(K, -u)$ .

**Demostración.** Tomamos  $t \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$  un escalar con  $\lambda \geq 0$ .

(i) es consecuencia directa de la definición: para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} h(K + t, u) &= \text{máx} \{ \langle z + t, u \rangle : z + t \in K \} = \text{máx} \{ \langle z, u \rangle + \langle t, u \rangle : z \in K \} \\ &= \text{máx} \{ \langle z, u \rangle : z \in K \} + \langle t, u \rangle = h(K, u) + \langle t, u \rangle. \end{aligned}$$

Veamos ahora (ii). Para la homogeneidad, obsérvese que

$$\begin{aligned} h(K, \lambda u) &= \text{máx} \{ \langle z, \lambda u \rangle : z \in K \} = \text{máx} \{ \lambda \langle z, u \rangle : z \in K \} \\ &= \lambda \text{máx} \{ \langle z, u \rangle : z \in K \} = \lambda h(K, u). \end{aligned}$$

Para probar que es subaditiva,

$$\begin{aligned} h(K, u + v) &= \max \{ \langle z, u + v \rangle : z \in K \} = \max \{ \langle z, u \rangle + \langle z, v \rangle : z \in K \} \\ &\leq \max \{ \langle z, u \rangle : z \in K \} + \max \{ \langle z, v \rangle : z \in K \} \\ &= h(K, u) + h(K, v). \end{aligned}$$

(iii) En cuanto a la primera parte, tenemos que

$$\begin{aligned} h(\lambda K, u) &= \max \{ \langle \lambda z, u \rangle : z \in K \} = \max \{ \lambda \langle z, u \rangle : z \in K \} \\ &= \lambda \max \{ \langle z, u \rangle : z \in K \} = \lambda h(K, u). \end{aligned}$$

Por último, para ver que  $h(-K, u) = h(K, -u)$  basta observar que

$$h(-K, u) = \max \{ \langle -z, u \rangle : z \in K \} = \max \{ \langle z, -u \rangle : z \in K \} = h(K, -u). \quad \square$$

La función soporte tiene una gran importancia para la geometría convexa. Determina de forma única al conjunto tal y como muestra el teorema que vamos a enunciar a continuación, cuya demostración no vamos a desarrollar y puede encontrarse en [4], pues requiere de otros conceptos y técnicas que se alejan de los objetivos de nuestro trabajo.

**Teorema 1.4.** *Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función sublineal, entonces existe un único cuerpo convexo  $K \in \mathcal{K}^n$  cuya función soporte es  $f$ .*

Del teorema anterior se deduce la siguiente propiedad, la cual utilizaremos más adelante: Sean  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  dos cuerpos convexos. Entonces

$$h(K, u) = h(L, u) \text{ para todo } u \in \mathbb{S}^{n-1} \implies K = L. \quad (1.1)$$

## 1.6. La suma de Minkowski

Para cerrar este primer capítulo, nos vamos a centrar en la suma vectorial de conjuntos o *suma de Minkowski*. Esta operación tiene numerosas propiedades cuando se aplica a cuerpos convexos. Nosotros estudiaremos las pocas que vamos a necesitar para el desarrollo de los capítulos posteriores, y pueden encontrarse en [4].

**Definición 1.11.** *Sean  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  dos subconjuntos no vacíos. Se llama **suma de Minkowski** de  $A$  y  $B$  al conjunto*

$$A + B = \{ a + b : a \in A, b \in B \} = \bigcup_{b \in B} (A + b).$$

La interpretación geométrica de la suma de Minkowski que acabamos de definir es sencilla tal y como se puede observar a continuación para dos conjuntos cualesquiera (véase la figura 1.10).

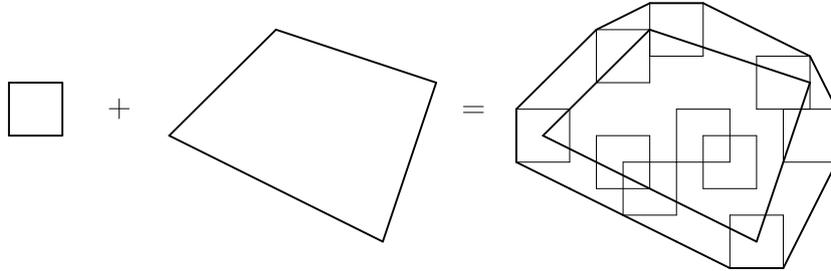


Figura 1.10: Interpretación geométrica de la suma de Minkowski

De la definición anterior se puede deducir la siguiente propiedad de fácil comprobación: *si  $A \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto no vacío, no necesariamente convexo, entonces, para cualesquiera  $\lambda, \mu \geq 0$ , se tiene que*

$$\lambda A + \mu A \supset (\lambda + \mu)A. \quad (1.2)$$

Para probarlo, basta tomar un punto  $(\lambda + \mu)a \in (\lambda + \mu)A$ . Entonces, tenemos que  $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \in \lambda A + \mu A$ .

Con el fin de ilustrar mejor que el contenido es estricto, véase la figura 1.11. En ella podemos observar cómo al sumar 3 veces un conjunto  $K$  mediante la suma de Minkowski se obtiene un resultado que contiene a  $3K$ , pero que es distinto a éste.

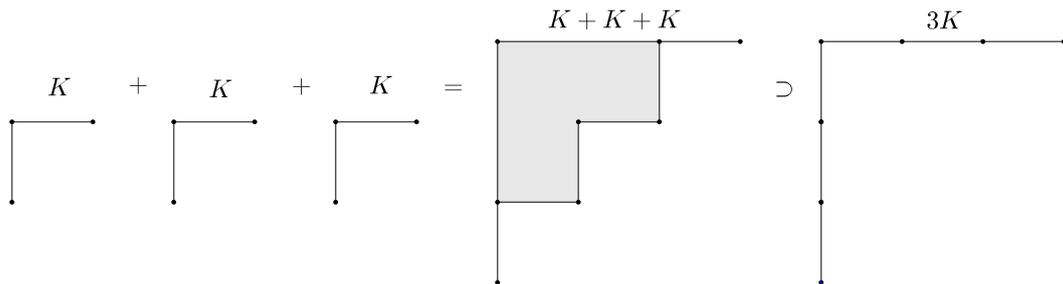


Figura 1.11: Un conjunto (no convexo) para el que  $K + K + K \neq 3K$

Cuando se trabaja con cuerpos convexos, la suma de Minkowski tiene mejores propiedades. En particular, se puede probar que el contenido (1.2) es una igualdad. Por tanto, la convexidad es fundamental:

**Lema 1.3.** *Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  un cuerpo convexo. Entonces*

$$\lambda K + \mu K = (\lambda + \mu)K.$$

***Demostración.*** Por (1.2) sabemos que  $\lambda K + \mu K \supset (\lambda + \mu)K$ . Para ver el contenido contrario, tomamos  $x \in \lambda K + \mu K$ . Entonces, se tiene que  $x = \lambda y + \mu z$  para ciertos  $y, z \in K$ . Ahora, la convexidad de  $K$  nos garantiza que

$$x = (\lambda + \mu) \left[ \frac{\lambda}{\lambda + \mu} y + \frac{\mu}{\lambda + \mu} z \right] \in (\lambda + \mu)K. \quad \square$$

Concluimos este capítulo demostrando otra propiedad importante de la suma de Minkowski cuando se trabaja con cuerpos convexos: la *ley de la cancelación*. Para ello necesitamos una cualidad muy importante de la función soporte: ser aditiva en su primer argumento respecto a la suma de Minkowski.

**Teorema 1.5.** *Sean  $K, L \in \mathcal{K}^n$ . Entonces, para todo  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,*

$$h(K + L, u) = h(K, u) + h(L, u). \quad (1.3)$$

***Demostración.*** Sea  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Gracias a que  $K$  y  $L$  son compactos, existen puntos  $x \in K$  e  $y \in L$  tales que  $h(K, u) = \langle x, u \rangle$  y  $h(L, u) = \langle y, u \rangle$ . Esto implica que

$$h(K, u) + h(L, u) = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle = \langle x + y, u \rangle \leq h(K + L, u).$$

Por otra parte, si tomamos un punto  $z \in K + L$ , entonces existen puntos  $x \in K$  e  $y \in L$  tales que  $z = x + y$ . Por tanto, se tiene que

$$\langle z, u \rangle = \langle x + y, u \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, u \rangle \leq h(K, u) + h(L, u).$$

Dado que  $z$  es un punto cualquiera del conjunto  $K + L$ , podemos deducir que  $h(K + L, u) \leq h(K, u) + h(L, u)$ . Por tanto, se tiene la igualdad en (1.3).  $\square$

**Corolario 1.1 (Ley de cancelación).** *Si  $K, L, M \in \mathcal{K}^n$  con  $K + M = L + M$ , entonces se tiene que  $K = L$ .*

***Demostración.*** Supongamos que  $K + M = L + M$ . Entonces, para todo vector  $u \in \mathbb{R}^n$ , se tiene que

$$h(K, u) + h(M, u) = h(K + M, u) = h(L + M, u) = h(L, u) + h(M, u),$$

de donde podemos deducir que  $h(K, u) = h(L, u)$  para todo  $u \in \mathbb{R}^n$ . Finalmente, gracias a (1.1), concluimos que  $K = L$ .  $\square$

Desde luego, es claro que si  $K, L$  son cuerpos convexos, entonces  $K + L$  es un cuerpo convexo. Así pues, la suma de Minkowski dota a la familia  $\mathcal{K}^n$  de los cuerpos convexos con una estructura de semigrupo conmutativo, con elemento neutro  $\{0\}$ , que satisface la ley de la cancelación.

# Capítulo 2

## Los politopos

En este segundo capítulo del trabajo nos vamos a centrar en propiedades de los politopos, así como en una serie de resultados de gran importancia para esta teoría. Por ejemplo, entre otros, probaremos que la intersección de caras (no vacías) de un politopo  $P$  es de nuevo una cara de  $P$ , y que si tenemos  $H$  un hiperplano soporte del politopo  $P$ , entonces la intersección de  $H$  con  $P$  es una cara de  $P$ . Algunas de estas propiedades serán de gran utilidad en las demostraciones de los resultados recogidos en el último capítulo de la memoria.

Además veremos teoremas con nombre propio como el de Minkowski, por el que podemos asegurar que dada una colección de caras  $(n-1)$ -dimensionales de un politopo y sus vectores normales exteriores, entonces la suma de la medida de cada cara multiplicada por el vector normal exterior correspondiente a dicha cara es siempre el origen. También probaremos el teorema de aproximación, que permite aproximar los cuerpos convexos mediante politopos de forma sencilla.

Todos los resultados desarrollados a lo largo de este capítulo se han estudiado en [6]. Los comentarios históricos los hemos extraído de [3].

### 2.1. La estructura facial de un cuerpo convexo

De forma intuitiva conocemos el concepto de *cara* desde secundaria e, incluso, desde primaria. Parece obvio hablar de la *cara* de un cubo, una pirámide o un prisma, por ejemplo. Antes de comenzar con el estudio de los politopos propiamente dicho, en este apartado vamos a tratar el concepto de *cara* de una forma más rigurosa aplicado a cualquier conjunto convexo (cerrado), lo que permitirá deducir una serie de propiedades interesantes de dichos conjuntos.

**Definición 2.1.** Sea  $K$  un conjunto convexo cerrado de  $\mathbb{R}^n$ . Llamaremos **cara** a un subconjunto convexo  $F$  de  $K$  de forma que, siempre que

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in F,$$

donde  $x, y \in K$  y  $0 < \lambda < 1$ , entonces  $x, y \in F$ .

Es decir, una cara de  $K$  no es más que un subconjunto convexo  $F \subset K$  tal que si cada segmento  $[x, y] \subset K$  con  $F \cap \text{relint}[x, y] \neq \emptyset$ , entonces  $[x, y] \subset F$ .

Vamos a denominar *caras impropias* del conjunto convexo  $K$  al conjunto vacío  $\emptyset$  y al propio  $K$ . El resto de caras de  $K$  distintas de las anteriores se denominarán *caras propias*. Si queremos especificar la dimensión de las caras hablaremos de  *$i$ -caras*, donde  $i$  indica la dimensión de la cara en cuestión. A partir de este momento, emplearemos la notación  $\mathcal{F}(K)$  y  $\mathcal{F}_i(K)$  para referirnos al conjunto formado por todas las caras y por todas las caras  $i$ -dimensionales de  $K$ , respectivamente. Vamos a ver algunos ejemplos de este concepto en la siguiente figura:

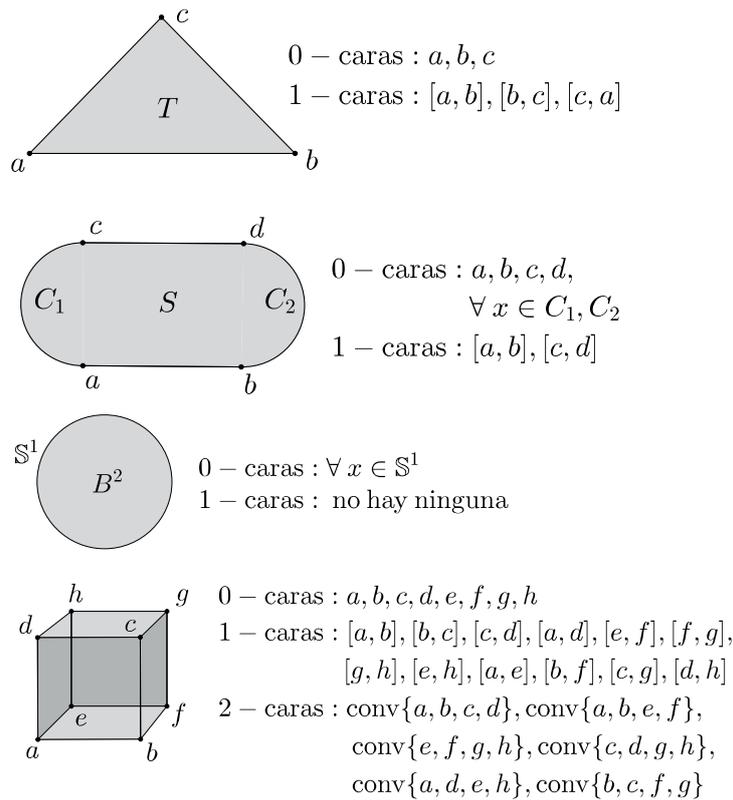


Figura 2.1: Caras  $i$ -dimensionales de algunos conjuntos convexos

De la definición anterior se pueden deducir las siguientes propiedades sobre caras de conjuntos convexos.

**Proposición 2.1.** *Si  $K$  es un conjunto convexo cerrado de  $\mathbb{R}^n$ , entonces se tienen las siguientes propiedades:*

- (i) *Las 0-caras son los puntos extremos del conjunto.*
- (ii) *Las caras de un conjunto convexo cerrado  $K$  son cerradas.*
- (iii) *Si  $F$  es una cara propia de  $K$ , entonces  $F \cap \text{relint } K = \emptyset$ . En particular,  $F \subset \text{relbd } K$  y  $\dim F < n$ .*
- (iv) *La intersección de cualquier colección de caras de  $K$  es una cara de  $K$ .*
- (v) *Si  $G$  es una cara de  $F$  y  $F$  es una cara de  $K$ , entonces  $G$  es cara de  $K$ .*
- (vi) *Sea  $H$  un hiperplano soporte a  $K$ . Entonces  $H \cap K$  es una cara de  $K$ .*
- (vii) *Si  $F_1$  y  $F_2$  son caras distintas de  $K$ , entonces  $\text{relint } F_1 \cap \text{relint } F_2 = \emptyset$ . Además, para todo  $x \in K$ , existe una única cara  $F$  tal que  $x \in \text{relint } F$ .*

**Demostración.** La propiedad (i) se deduce directamente de la propia definición de cara.

Para ver (ii), supongamos que  $F$  es una cara de  $K$ , (que suponemos no es un vértice, pues en ese caso el resultado sería trivial), y sea  $x \in \text{relbd } F$ . Entonces existe  $y \in \text{relint } F$  y, como  $F$  es convexo, el lema 1.1 nos asegura que el segmento semiabierto  $[y, x) \subset \text{relint } F \subset F$ . Finalmente, por ser  $F$  una cara de  $P$ , podemos concluir que  $x \in F$ , lo que prueba que  $F$  es cerrado.

La demostración de (iii) es similar a la anterior.

Para probar (iv), sea  $\{F_i : i \in I\}$  una familia no vacía de caras de  $K$ . Entonces, la intersección  $\bigcap_{i \in I} F_i$  es un subconjunto convexo de  $K$ . Para ver que es una cara, tomamos

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \bigcap_{i \in I} F_i, \quad \text{con } x, y \in K \text{ y } 0 < \lambda < 1.$$

Entonces  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F_i$ , para todo  $i \in I$ . Luego, ya que cada  $F_i$  es una cara de  $K$ , tenemos que  $x, y \in F_i$ , para todo  $i \in I$ , lo que implica que  $x, y \in \bigcap_{i \in I} F_i$ , de donde deducimos que esta intersección es una cara de  $K$ .

En cuanto a (v), si queremos ver que  $G$  es una cara de  $K$ , tomamos una combinación convexa  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in G$ , con  $x, y \in K$  y  $0 < \lambda < 1$ , y tenemos que ver que  $x, y \in G$ . Ahora bien, dado que  $G \subset F$ , se tiene que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ , con  $x, y \in K$ , y al ser  $F$  una cara de  $K$ , entonces deducimos

que  $x, y \in F$ . Así, tenemos que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in G$ , cara de  $F$ , con  $x, y \in F$  y  $0 < \lambda < 1$ , de donde se deduce finalmente que  $x, y \in G$ .

Para ver (vi), sea  $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = c\}$  un hiperplano soporte de  $K$ , para el cual podemos suponer, como viene siendo habitual, que  $K \subset H^-$ . Si  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in H \cap K$ , con  $x, y \in K$  y  $0 < \lambda < 1$ , entonces tenemos que

$$\begin{aligned} c &= \langle \lambda x + (1 - \lambda)y, u \rangle = \lambda \langle x, u \rangle + (1 - \lambda) \langle y, u \rangle \\ &\leq \lambda c + (1 - \lambda)c = \lambda c + c - \lambda c = c. \end{aligned}$$

Dado que  $\lambda, (1 - \lambda) > 0$ , se tiene que  $\langle x, u \rangle = \langle y, u \rangle = c$ , es decir,  $x, y \in H$  y, como  $x, y \in K$ , se deduce que  $x, y \in H \cap K$ , luego  $H \cap K$  es una cara de  $K$ .

Por último, para demostrar (vii), sean  $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(K)$  dos caras de  $K$  con  $F_1 \neq F_2$ . Supongamos que existe un  $z \in \text{relint } F_1 \cap \text{relint } F_2$  y lleguemos a una contradicción. Sea ahora, por ejemplo,  $x \in F_1 \setminus F_2$ . Entonces, podemos encontrar un  $y \in F_1$  tal que  $z$  está en el interior relativo del segmento que une  $x$  con  $y$ , esto es,  $z \in \text{relint } [x, y]$ . Ahora, como  $[x, y] \subset F_1 \subset K$  y, a su vez,  $z \in F_2$ , dado que  $F_2$  es una cara de  $K$ , entonces  $[x, y] \subset F_2 \subset K$ , lo cual es una contradicción. Luego hemos probado que  $z$  no puede estar en el interior relativo de  $F_1$  y  $F_2$  al mismo tiempo, por lo que  $\text{relint } F_1 \cap \text{relint } F_2 = \emptyset$ .

Para probar la segunda parte de esta propiedad, sea  $x \in K$  y sea  $F$  la intersección de todas las caras que contienen a  $x$ , que sabemos que es una cara de  $K$  por (iv). Si  $x \notin \text{relint } F$ , entonces existe un hiperplano soporte  $H$  de  $F$  en  $x$  que no contiene a  $F$ , es decir, un hiperplano  $H$  tal que  $x \in H$  y  $H \cap F \neq F$ . Usando (vi) sabemos que  $H \cap F$  es una cara de  $F$  y, por (v), tomando  $G = H \cap F$ , tenemos que  $H \cap F$  también es una cara de  $K$ . Pero en ese caso,  $F \subset H \cap F$  por la forma en que hemos definido  $F$ , lo cual es una contradicción. Entonces,  $x \in \text{relint } F$  y, por la primera parte de esta propiedad, si  $x \in \text{relint } F$ , dado que  $\text{relint } F_1 \cap \text{relint } F_2 = \emptyset$  para cualesquiera  $F_1 \neq F_2$  caras de  $K$ , entonces  $x$  no puede pertenecer al interior relativo de ninguna otra cara de  $K$ , por lo que  $F$  es la única cara que cumple dicha propiedad.  $\square$

La propiedad (ii) de la proposición anterior también puede deducirse del siguiente teorema.

**Teorema 2.1.** *Sea  $F$  un subconjunto convexo de un conjunto convexo  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces,  $F$  es una cara de  $K$  si, y sólo si,  $K \setminus F$  es convexo y*

$$F = K \cap \text{aff } F. \quad (2.1)$$

*En particular, un punto  $x \in K$  es extremo de  $K$  si y sólo si  $K \setminus \{x\}$  es convexo.*

**Demostración.** Comencemos con la implicación directa, y supongamos pues que  $F$  es una cara de  $K$ . Para ver que  $K \setminus F$  es convexo, tomamos  $x, y \in K \setminus F$  y  $0 < \lambda < 1$ . Desde luego, por la convexidad de  $K$ ,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ . Además, si  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ , por ser  $F$  una cara de  $K$  obtendríamos que  $x, y \in F$ , lo cual no es posible. En consecuencia,  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K \setminus F$ , lo que nos asegura que  $K \setminus F$  es convexo.

Veamos ahora (2.1). Trivialmente,  $F \subset K \cap \text{aff } F$ . Para ver la inclusión contraria, sea  $x \in K \cap \text{aff } F$ , y tomemos  $z \in \text{relint } F$  (véase la figura 2.2).

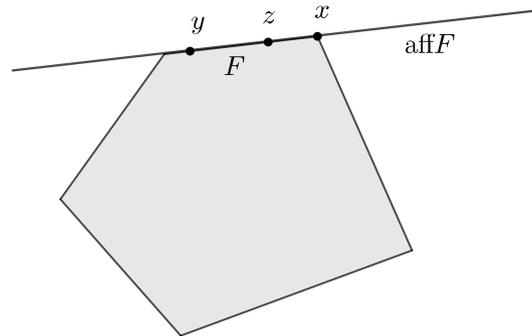


Figura 2.2: Demostrando que  $F = K \cap \text{aff } F$

Entonces, existen  $y \in F$  y  $0 < \lambda < 1$  tales que  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ . Como  $x, y \in K$  y  $F$  es una cara de  $K$ , ambos extremos están en  $F$  y, en particular,  $x \in F$ . Por tanto,  $K \cap \text{aff } F \subset F$  y se tiene la igualdad (2.1).

Demostramos ahora el recíproco. Para ello, supongamos que  $K \setminus F$  es convexo y que  $F = K \cap \text{aff } F$ . Si queremos ver que  $F$  es una cara de  $K$ , tomamos  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ , con  $x, y \in K$  y  $0 < \lambda < 1$ , y tenemos que probar que  $x, y \in F$ . Observamos que si ambos  $x, y \in K \setminus F$ , la convexidad de  $K \setminus F$  implicaría que  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K \setminus F$ , una contradicción. Así, podemos suponer, por ejemplo, que  $x \in F$  y, como  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ , se deduce que  $y \in \text{aff } F$ , lo que nos asegura que  $y \in \text{aff } F \cap K = F$ . Por tanto,  $x, y \in F$ , es decir,  $F$  es una cara de  $K$ .  $\square$

## 2.2. Los politopos en la historia

En el primer capítulo de este trabajo definíamos un *politopo* como la envoltura convexa de un conjunto finito de puntos de  $\mathbb{R}^n$ . Es decir, un politopo es la generalización de un polígono y de un poliedro en dimensiones 2 y 3, res-

pectivamente. Utilizaremos el término  $k$ -politopo para referirnos a un politopo de dimensión  $k$ .

En el famoso “*Los elementos*” de Euclides ( $\approx 325$ - $265$  a. C) podemos ver algunas referencias a estas figuras tan curiosas. Si nos fijamos concretamente en su “*Libro XIII*”, nos encontramos con la construcción de los cinco poliedros regulares en  $\mathbb{R}^3$ . Éstos reciben el nombre de *sólidos platónicos* dado que aparecen como tal en uno de los diálogos más importantes de Platón ( $\approx 427$ - $347$  a. C.), el “*Timeo*”. En dicho texto se puede encontrar la relación que establecía entre estos sólidos y los elementos de la naturaleza y el Universo:

- Fuego (tetraedro): es el elemento más “pequeño, ligero, móvil y agudo”.
- Tierra (cubo): está compuesta por átomos agrupados de esta forma y se consideraba el más “sólido”.
- Aire (octaedro): es el de “tamaño, peso y fluidez, en cierto modo intermedios”.
- Universo (dodecaedro): dicha figura “es la que los dioses emplean para disponer las constelaciones en los cielos”.
- Agua (icosaedro): de todos ellos, es el más “móvil y fluido de los elementos; es el sólido más cercano a la esfera y, por tanto, el que con mayor facilidad puede rodar”.

Dicha relación es aún más antigua que Euclides o Platón, pues ya se encontraron indicios de este hecho en un yacimiento de Escocia (7000-3000 a. C.), en el que se hallaron estos cinco sólidos en piedra como se puede observar en la siguiente figura:



Figura 2.3: De izquierda a derecha tierra, fuego, universo, agua y aire (figura obtenida de [1])

Ahora bien, la pregunta es clara: ¿existen sólo 5 poliedros regulares en  $\mathbb{R}^3$ ? La respuesta es afirmativa y la obtenemos gracias a los pitagóricos, encabezados por Pitágoras ( $\approx$  580-500 a. C.). Veamos el razonamiento para llegar a esta conclusión.

Sabemos que cada vértice debe ser común a tres o más caras para que se pueda formar un poliedro. A su vez, la suma de los ángulos internos (planos) que concurren en un mismo vértice ha de ser menor que  $360^\circ$ , pues queremos que la figura se cierre y no sea plana. Por lo tanto, teniendo en cuenta estas restricciones, nos quedan las siguientes posibilidades:

- Los ángulos de un triángulo equilátero miden  $60^\circ$ , por lo que en un vértice sólo pueden encontrarse 3, 4 ó 5 triángulos, lo que nos da el tetraedro, el octaedro y el icosaedro.
- Los ángulos de un cuadrado miden  $90^\circ$ , por lo que sólo pueden concurrir en un mismo vértice 3 de ellos, lo que da lugar al cubo.
- Los ángulos de un pentágono miden  $108^\circ$ , por lo que podemos poner 3 en cada vértice y obtenemos el dodecaedro.

Si tratásemos de formar otro poliedro, al tomar el siguiente polígono regular, es decir, el hexágono, dado que cada uno de sus ángulos mide  $120^\circ$  no pueden llegar a concurrir siquiera 3 de ellos pues alcanzaríamos el límite de los  $360^\circ$ . Por tanto, existen sólo 5 poliedros regulares, los que podemos ver en la siguiente figura:

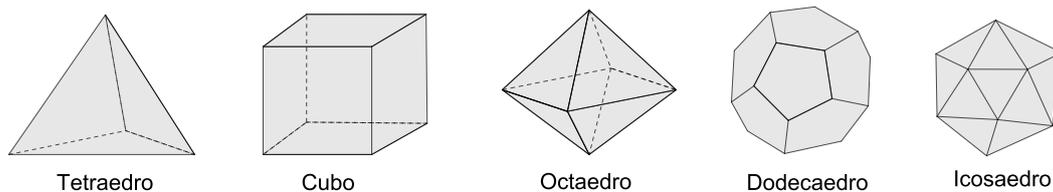


Figura 2.4: Los 5 sólidos platónicos

Aparte de los 5 sólidos platónicos que acabamos de ver en la figura 2.4, existen muchos más ejemplos de politopos:

- (i) *Paralelotopos*: son politopos generados por la suma de una cantidad finita de vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^n$ . Además, la suma vectorial de un número finito de segmentos de  $\mathbb{R}^n$  es un tipo de politopo que se denomina *zonotopo*.

- (ii) *k-símplices*: son politopos generados por la envoltura convexa de  $k + 1$  puntos que son afínmente independientes.
- (iii) *Cross-politopo*: se llama *cross-politopo k-dimensional* a la envoltura convexa de  $k$  segmentos linealmente independientes en  $\mathbb{R}^n$  cuyos puntos medios coinciden. Si todos los segmentos tienen la misma longitud y son ortogonales entre sí, entonces se trata de un *cross-politopo k-dimensional regular*. Algunos ejemplos se pueden observar en la figura 2.5.

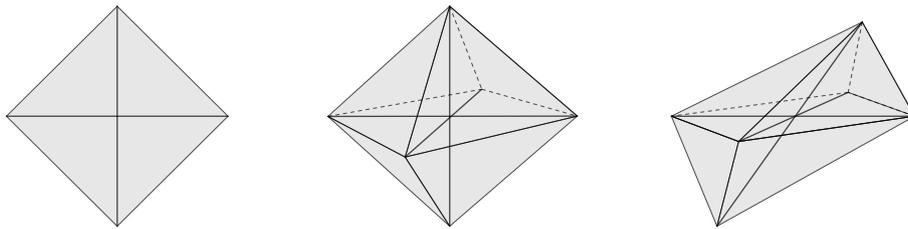


Figura 2.5: Cross-politopos 2 y 3-dimensionales regulares y 3-cross-politopo no regular

Ahora que conocemos mejor los politopos, vamos a estudiar algunas de sus propiedades más importantes.

### 2.3. Los politopos. Primeras propiedades

Otra propiedad interesante es la que nos muestra el siguiente teorema, por el cual podemos asegurar que la suma de politopos y el producto de un escalar por un politopo nos da de nuevo un politopo:

**Teorema 2.2.** Sean  $P, Q \in \mathcal{P}^n$  dos politopos y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Entonces  $P + Q$  y  $\alpha P$  son politopos.

**Demostración.** Sean  $P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_k\}$  y  $Q = \text{conv} \{y_1, \dots, y_m\}$ , con  $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m \in \mathbb{R}^n$ . Sea ahora  $C$  el conjunto finito formado por todos aquellos puntos de la forma  $x_i + y_j$ , con  $i = 1, \dots, k$  y  $j = 1, \dots, m$ , y sea  $D$  el conjunto finito formado por todos los puntos  $\alpha x_i$ . Para probar el teorema vamos a ver que  $P + Q = \text{conv} C$  y que  $\alpha P = \text{conv} D$ .

Es obvio que  $P + Q$  es un conjunto convexo que contiene a  $C$ , por lo que  $\text{conv} C \subseteq P + Q$ . Para probar la otra inclusión, sea  $z \in P + Q$ . Entonces  $z = x + y$  con  $x \in P$  e  $y \in Q$ , por lo que existen ciertos escalares

$\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m \geq 0$  que satisfacen

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^m \mu_j = 1,$$

y tales que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{j=1}^m \mu_j y_j.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \mu_j y_j = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{j=1}^m \mu_j \right) \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^m \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \mu_j y_j \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m \lambda_i \mu_j (x_i + y_j), \end{aligned}$$

de donde deducimos que  $z$  es una combinación convexa de puntos de  $C$ . Luego  $z \in \text{conv } C$ , es decir,  $P + Q \subseteq \text{conv } C$ , por lo que  $P + Q = \text{conv } C$ .

De igual forma, es evidente que  $\alpha P$  es un conjunto convexo que contiene a  $D$ , por lo que  $\text{conv } D \subseteq \alpha P$ . Si ahora suponemos que  $z \in \alpha P$ , entonces  $z = \alpha x$  para cierto  $x \in P$ , y por tanto, existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ , con

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

tales que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i,$$

de donde

$$z = \alpha \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\alpha x_i).$$

Esto prueba que  $z$  es una combinación convexa de puntos de  $D$ . En consecuencia,  $z \in \text{conv } D$  y, por tanto,  $\alpha P \subseteq \text{conv } D$ , esto es,  $\alpha P = \text{conv } D$ .  $\square$

Una generalización del teorema 2.2 es el siguiente resultado, el cual no vamos a probar pues su demostración es análoga a la anterior:

**Corolario 2.1.** Sean  $P_1, \dots, P_m \in \mathcal{P}^n$  y sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ . Entonces la combinación lineal  $\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_m P_m$  es un politopo.

Este resultado demuestra que los paralelotos y los zonotos, definidos en la sección anterior, son politopos por ser sumas (finitas) de segmentos.

## 2.4. La estructura facial de los politopos

Desde este momento vamos a emplear la siguiente nomenclatura, usual en este contexto. Si  $P \subset \mathbb{R}^n$  es un politopo, entonces denominaremos a sus elementos principales de la siguiente forma: **vértices** a las 0-caras, **aristas** o **lados** a las 1-caras y, siempre que no dé lugar a confusión, **caras** a las caras  $(n - 1)$ -dimensionales.

Volviendo a la proposición 2.1, vamos a escribir algunas de las propiedades más relevantes de la misma para  $k$ -politopos, pues el estudio de la estructura facial es mucho más claro cuando se trabaja con ellos.

**Proposición 2.2.** *Sea  $P \in \mathcal{P}^n$ . Se tienen las siguientes propiedades:*

- (i) *Los vértices son los puntos extremos del politopo.*
- (ii) *Las caras de un politopo  $P$  son cerradas.*
- (iii) *La intersección (no vacía) de caras de  $P$  es una cara de  $P$ .*
- (iv) *Si  $G$  es una cara de  $F$  y  $F$  es una cara de  $P$ , entonces  $G$  es cara de  $P$ .*
- (v) *Sea  $H$  un hiperplano soporte a  $P$ . Entonces  $H \cap P$  es una cara de  $P$ .*

Un resultado importante sobre la estructura facial de los politopos es el que hace referencia a la cantidad de caras del mismo:

**Teorema 2.3.** *Todo politopo  $P \in \mathcal{P}^n$  tiene sólo una cantidad finita de caras, y cada una de ellas es un politopo.*

**Demostración.** Sea  $P = \text{conv} \{x_1, \dots, x_m\}$ , con  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ . Por el teorema de Minkowski-Krein-Milman (teorema 1.3), cada cara  $F$  del politopo  $P$  (que es un cuerpo convexo), es la envoltura convexa de sus puntos extremos. Además, la propiedad (v) de la proposición 2.1 nos asegura que cada punto extremo de  $F$  es a su vez un punto extremo de  $P$ , de donde podemos concluir que  $F$  es la envoltura convexa de algún subconjunto de vértices de  $P$ . Finalmente, dado que  $\{x_1, \dots, x_m\}$  contiene los vértices de  $P$ , entonces  $F$  es la envoltura convexa de algún subconjunto de  $\{x_1, \dots, x_m\}$ , de donde se deduce el resultado buscado.  $\square$

Si denotamos por  $V$  el conjunto de los vértices de un politopo  $P \in \mathcal{P}^n$ , entonces por la demostración del teorema anterior tenemos que cada cara de  $P$  es la envoltura convexa de algún subconjunto de vértices de  $V$ . La pregunta ahora es clara: ¿qué subconjunto de vértices de  $V$  determina una cara de  $P$ ? Es

decir, queremos saber qué condición debe cumplir un determinado subconjunto de vértices de  $V$  para que su envoltura convexa sea una cara de  $P$ . Para dar respuesta a esta cuestión tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 2.4.** *Sea  $W$  un subconjunto del conjunto de los vértices  $V$  de un politopo  $P \in \mathcal{P}^n$ . Entonces  $\text{conv } W$  es una cara de  $P$  si, y sólo si,*

$$(\text{aff } W) \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset. \quad (2.2)$$

**Demostración.** Vamos a empezar probando que si  $\text{conv } W$  es una cara de  $P$ , entonces se cumple (2.2).

Si tomamos un  $v \in V \setminus W$ , por el teorema 2.1  $P \setminus \{v\}$  sigue siendo convexo, teniéndose además que  $W \subseteq P \setminus \{v\}$ . Esto que implica que  $\text{conv } W \subseteq P \setminus \{v\}$ , luego  $v \notin \text{conv } W$ . En consecuencia,  $v \in P \setminus \text{conv } W$ , de donde se deduce que  $V \setminus W \subseteq P \setminus \text{conv } W$ . De nuevo, por el teorema 2.1, podemos asegurar que  $P \setminus \text{conv } W$  es convexo, lo que implica a su vez que  $\text{conv}(V \setminus W) \subseteq P \setminus \text{conv } W$ . Además, al ser  $\text{conv } W$  una cara, el teorema 2.1 también asegura que

$$\text{conv } W = P \cap \text{aff}(\text{conv } W) = P \cap \text{aff } W,$$

luego  $P \setminus \text{conv } W = P \setminus (P \cap \text{aff } W)$ . Esto implica que

$$\text{conv}(V \setminus W) \subseteq P \setminus (P \cap \text{aff } W),$$

de donde se obtiene (2.2).

Recíprocamente, supongamos ahora que se cumple (2.2) y vamos a probar que  $\text{conv } W$  es una cara de  $P$ .

Si  $\text{conv } W = P$  (es decir,  $W = V$ ) o  $\text{conv } W = \emptyset$ , entonces  $\text{conv } W$  es una cara por definición (es una cara impropia), y el resultado es trivial. Supongamos pues que  $W = \{v_1, \dots, v_r\}$  y  $V \setminus W = \{v_{r+1}, \dots, v_s\}$  con  $1 \leq r < s$ .

Sean  $x, y \in P$  tales que  $w = \lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{conv } W$  con  $0 < \lambda < 1$ . Para probar que efectivamente  $\text{conv } W$  es una cara, tenemos que demostrar que  $x, y \in \text{conv } W$ . Como

$$P = \text{conv } V = \text{conv} \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_s\},$$

dado que  $x, y \in P$ , tenemos que:

$$x \in P \implies x = \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i \quad \text{con} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1,$$

$$y \in P \implies y = \sum_{i=1}^s \mu_i v_i \quad \text{con} \quad \mu_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^s \mu_i = 1.$$

Por tanto, de lo anterior deducimos que

$$\begin{aligned} w &= \lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \sum_{i=1}^s \lambda_i v_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^s \mu_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^s (\lambda \lambda_i) v_i + \sum_{i=1}^s ((1 - \lambda)\mu_i) v_i = \sum_{i=1}^s \underbrace{(\lambda \lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i)}_{\alpha_i} v_i = \sum_{i=1}^s \alpha_i v_i, \end{aligned}$$

donde estamos representando por  $\alpha_i = \lambda \lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Obsérvese que, además, se cumple

$$\sum_{i=1}^s \alpha_i = \sum_{i=1}^s (\lambda \lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i) = \lambda \sum_{i=1}^s \lambda_i + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^s \mu_i = \lambda + 1 - \lambda = 1,$$

y en consecuencia,  $w$  es un combinación convexa de  $\{v_1, \dots, v_s\}$ , es decir,

$$w = \sum_{i=1}^s \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_s v_s.$$

Sea ahora

$$\alpha = \alpha_{r+1} + \dots + \alpha_s.$$

Supongamos  $\alpha > 0$  y lleguemos a una contradicción. Puesto que podemos dividir por  $\alpha$ , tenemos que

$$\frac{w - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r}{\alpha} = \frac{\alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_s v_s}{\alpha} =: z.$$

Obsérvese por un lado que, como  $w \in \text{conv} W \subset \text{aff} W$ , el vector

$$z = \frac{w - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r}{\alpha} \in \text{aff} W.$$

Por otro lado, al ser  $\sum_{i=r+1}^s \frac{\alpha_i}{\alpha} = 1$ , el vector  $\sum_{i=r+1}^s \frac{\alpha_i}{\alpha} v_i$  es una combinación convexa de elementos de  $V \setminus W$ , de donde se deduce que

$$z = \frac{\alpha_{r+1} v_{r+1} + \dots + \alpha_s v_s}{\alpha} \in \text{conv}(V \setminus W).$$

En consecuencia,  $z \in \text{aff} W \cap \text{conv}(V \setminus W)$ , lo cual es una contradicción, ya que, por hipótesis,  $\text{aff} W \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset$ .

Esto demuestra que  $\alpha = 0$ , lo que implica que  $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_s = 0$ , es decir,  $\alpha_i = \lambda\lambda_i + (1 - \lambda)\mu_i = 0$ , para todo  $i = r + 1, \dots, s$ . Dado que ambos sumandos que forman  $\alpha_i$  son no-negativos y  $\lambda \neq 0, 1$ , se tiene que  $\lambda_i = \mu_i = 0$  para todo  $i = r + 1, \dots, s$ , por lo que

$$x = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i \quad \text{e} \quad y = \sum_{i=1}^r \mu_i v_i$$

y, por tanto,  $x, y \in \text{conv } W$ . Esto concluye la prueba.  $\square$

Para entender mejor la situación anterior podemos observar la figura 2.6:

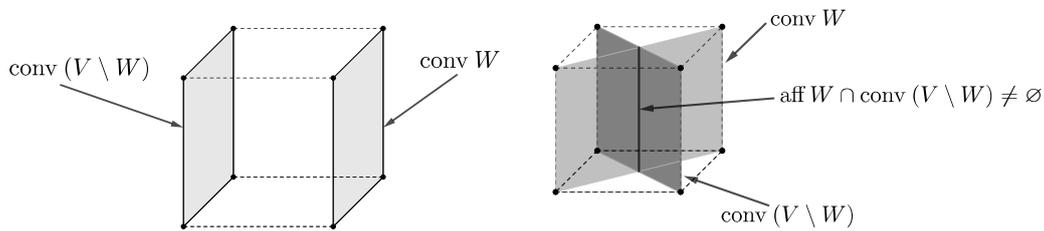


Figura 2.6: Ejemplo que ilustra el teorema 2.4: subconjuntos de los vértices de un cubo que determinan, y no determinan, caras del mismo

Obsérvese que en la prueba del recíproco en el teorema 2.4 se ha utilizado el hecho de que  $\text{conv } V = P$ , pero no el que cada elemento de  $V$  sea un vértice de  $P$ . Desde luego, la implicación directa es claramente falsa si no se asume que  $V$  sea el conjunto de los vértices. Por lo tanto, la demostración anterior permite demostrar el siguiente resultado, ligeramente más general que la correspondiente implicación:

**Teorema 2.5.** *Sea  $W$  un subconjunto de un conjunto finito  $V \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $(\text{aff } W) \cap \text{conv}(V \setminus W) = \emptyset$ . Entonces  $\text{conv } W$  es una cara del politopo  $\text{conv } V$ .*

## 2.5. Ejemplos de la importancia de los politopos en convexidad

Existen ocasiones en las que demostrar un resultado en convexidad resulta ser muy complejo (o incluso imposible) cuando se trabaja con cuerpos convexos generales, mientras que en el contexto de los politopos puede ser mucho más

asequible. Claro está, luego es necesario saber que cualquier cuerpo convexo puede aproximarse por una sucesión de politopos para poder “extrapolar” el resultado demostrado para politopos al caso general de los cuerpos convexos. A modo de ejemplo, una forma de definir el perímetro de un cuerpo convexo en  $\mathbb{R}^2$  es como el límite de los perímetros de una sucesión de polígonos que converge al conjunto.

Desde luego, cuando hablamos de *convergencia* en los cuerpos convexos, y de “extrapolar por continuidad” un resultado, necesitamos hacerlo respecto a una métrica definida en el espacio de los cuerpos convexos, que no es la euclídea, sino la llamada *métrica de Hausdorff*. No vamos a entrar aquí en este terreno, ya que necesitaríamos otra memoria para poder establecer los resultados principales al respecto. Sin embargo, sí que vamos a estudiar una herramienta muy práctica: la aproximación de cuerpos convexos mediante politopos. Empecemos por enunciar y demostrar el siguiente resultado auxiliar:

**Lema 2.1.** *Sean  $K \in \mathcal{K}^n$  un cuerpo convexo y  $\varepsilon > 0$ . Entonces, existe un politopo  $P \in \mathcal{P}^n$  que verifica que*

$$P \subset K \subset P + \varepsilon B_n. \quad (2.3)$$

***Demostración.*** Puesto que  $K$  es compacto, se puede cubrir todo el conjunto con una colección finita de bolas, todas con centro en cada uno de los puntos de  $K$ , y con el mismo radio  $\varepsilon$ . Entonces, el politopo  $P$  que buscamos no será más que la envoltura convexa de dichos centros.  $\square$

Estamos ya en disposición de probar el teorema por el cual sabemos que todo cuerpo convexo puede aproximarse a través de politopos:

**Teorema 2.6 (Teorema de aproximación por politopos).** *Sea  $K \in \mathcal{K}^n$  un cuerpo convexo con  $0 \in \text{int } K$ . Entonces, para todo  $\lambda > 1$ , existe un politopo  $P \in \mathcal{P}^n$  que verifica que*

$$P \subset K \subset \lambda P.$$

***Demostración.*** Sea un escalar  $\rho > 0$  tal que  $\rho B_n \subset K$  y sea  $\varepsilon = \rho(\lambda - 1)/\lambda$ , el cual verifica que  $0 < \varepsilon < \rho$ . Por el lema 2.1 podemos asegurar la existencia de un politopo  $P$  tal que  $P \subset K \subset P + \varepsilon B_n$ , de donde deducimos, gracias al lema 1.3, que

$$(\rho - \varepsilon)B_n + \varepsilon B_n = \rho B_n \subset K \subset P + \varepsilon B_n.$$

Entonces, por la ley de la cancelación (corolario 1.1), tenemos  $(\rho - \varepsilon)B_n \subset P$ . Por tanto, usando de nuevo el lema 1.3, podemos concluir el resultado:

$$\begin{aligned} P \subset K \subset P + \varepsilon B_n &= P + \frac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon}(\rho - \varepsilon)B_n \subset P + \frac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon}P \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon}{\rho - \varepsilon}\right)P = \lambda P. \end{aligned} \quad \square$$

El siguiente resultado que vamos a plantear necesita la noción de *volumen* de un conjunto. Dado  $A \subset \mathbb{R}^n$ , se define el **volumen** de  $A$ , y se representará como  $\text{vol}(A)$ , como su medida de Lebesgue  $n$ -dimensional. Si  $\dim A := j < n$ , escribiremos  $\text{vol}_j(A)$  para denotar la medida de  $A$  vista como subconjunto de  $\mathbb{R}^j$ . Obsérvese que podemos calcular el volumen de un politopo gracias a la siguiente expresión, asumiendo, sin pérdida de generalidad, que  $0 \in \text{int } P$ :

$$\text{vol}(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r h(P, u_i) \text{vol}_{n-1}(F_i). \quad (2.4)$$

Es decir, el volumen de  $P$  no es más que la suma de los volúmenes de las pirámides con base cada una de las caras  $F_i$  de  $P$  y altura la distancia de cada  $F_i$  al origen (esto es,  $h(P, u_i)$ , recuérdese la interpretación geométrica de la función soporte), como puede verse en la siguiente figura:

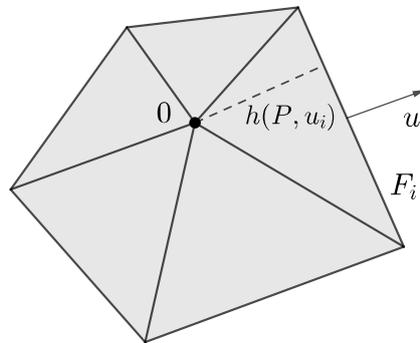


Figura 2.7: El volumen de un politopo

**Teorema 2.7 (Minkowski).** Sean  $F_1, \dots, F_r$  las caras  $(n-1)$ -dimensionales de un politopo  $P$ , con normales exteriores  $u_1, \dots, u_r$ . Entonces,

$$\sum_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(F_i) u_i = 0. \quad (2.5)$$

**Demostración.** Llamamos  $v := \sum_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(F_i)u_i$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $0 \in \text{int} P$  (de lo contrario podemos hacer una traslación adecuada, pues el volumen no se vería alterado ni en las caras del politopo ni en el propio politopo). Entonces, existe  $\lambda > 0$  suficientemente pequeño tal que  $0 \in \text{int}(P + \lambda v)$ , por lo que podemos aplicar (2.4) para obtener su volumen y, gracias a las propiedades de la función soporte (proposición 1.3), deducimos que

$$\begin{aligned} \text{vol}(P) &= \text{vol}(P + \lambda v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r h(P + \lambda v, u_i) \text{vol}_{n-1}(F_i + \lambda v) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r [h(P, u_i) + \lambda \langle v, u_i \rangle] \text{vol}_{n-1}(F_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r h(P, u_i) \text{vol}_{n-1}(F_i) + \frac{\lambda}{n} \sum_{i=1}^r \langle v, u_i \rangle \text{vol}_{n-1}(F_i) \\ &= \text{vol}(P) + \frac{\lambda}{n} \left\langle v, \sum_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(F_i)u_i \right\rangle = \text{vol}(P) + \frac{\lambda}{n} \langle v, v \rangle \\ &= \text{vol}(P) + \frac{\lambda}{n} |v|^2. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que  $\frac{\lambda}{n}|v|^2 = 0$ . Dado que  $\lambda \neq 0$ , se tiene que  $|v|^2 = 0$ , es decir,  $v = 0$ , lo que demuestra (2.5).  $\square$

Realmente, en 1903, Minkowski demostró que el teorema 2.7 proporciona una caracterización de los llamados *datos faciales* de un politopo. De forma precisa: dado un politopo  $P$  con caras  $(n-1)$ -dimensionales  $F_1, \dots, F_r$  y normales  $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{S}^{n-1}$ , si representamos por  $\phi_i = \text{vol}_{n-1}(F_i)$  para  $i = 1, \dots, r$ , el conjunto

$$\{(u_i, \phi_i) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ : i = 1, \dots, r\}$$

se denomina conjunto de **datos faciales** de  $P$ .

La pregunta natural que se plantea es la siguiente: ¿Qué condiciones deben verificar los pares  $(u_i, \phi_i) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ ,  $i = 1, \dots, r$ , para asegurar la existencia de un (único) politopo  $P$ , con  $r$  caras  $F_1, \dots, F_r$ , tal que  $u_i$  es el vector normal exterior a  $F_i$  y  $\phi_i = \text{vol}_{n-1}(F_i)$ ?

Esta cuestión se conoce como **el problema de Minkowski** para politopos. La respuesta la da el siguiente teorema. Su demostración es muy elaborada y requiere de técnicas que no hemos estudiado en esta memoria, por lo que no la incluimos aquí. Ésta puede consultarse en [4].

**Teorema 2.8 (Minkowski).** *El conjunto  $\{(u_i, \phi_i) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^+ : i = 1, \dots, r\}$  determina un politopo  $n$ -dimensional con  $r$  caras si, y sólo si*

- i)  $u_i \neq u_j$  para  $i \neq j$ ,*
- ii)  $\text{pos}\{u_1, \dots, u_r\} = \mathbb{R}^n$  y*
- iii)  $\sum_{i=1}^r \phi_i u_i = 0$ .*

*La solución es única (salvo traslaciones).*

Este resultado admite una versión para cuerpos convexos generales, cuya demostración pasa por el caso especial de politopos (teorema 2.8) y por el hecho de que todo cuerpo convexo puede aproximarse por politopos (teorema 2.6).



# Capítulo 3

## El teorema fundamental de los politopos

En este último capítulo del trabajo nos vamos a encargar de demostrar el que podríamos llamar el teorema fundamental de politopos, gracias al cual podemos ver un politopo como la envoltura convexa de sus vértices o como la intersección (acotada) de semiespacios, es decir, vamos a probar que ambas condiciones son equivalentes.

Para ver que la envoltura convexa implica la intersección de semiespacios procederemos de manera única, pues se puede probar directamente de forma sencilla. En cambio, para el recíproco, vamos a dar dos pruebas alternativas: por un lado demostraremos el resultado utilizando un lema sobre dualidad, mientras que en la segunda opción emplearemos el concepto de punto extremo que ya conocemos de capítulos anteriores. Los resultados recogidos en este capítulo se han estudiado en las referencias [4] y [2].

### 3.1. Algunos resultados auxiliares

En esta primera sección vamos a estudiar dos resultados adicionales que necesitaremos en la demostración de cada una de las equivalencias del teorema fundamental de los politopos, los cuales pueden encontrarse en [4].

El primero de ellos es el teorema de Carathéodory, demostrado en 1907, que, además de ser muy útil para la prueba que nos ocupa, es un resultado clave en lo que se conoce como geometría combinatoria.

**Teorema 3.1 (Carathéodory).** *Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  y sea  $x \in \text{conv } A$ . Entonces  $x$  puede expresarse como combinación convexa de, a lo sumo,  $n + 1$  puntos de  $A$ .*

**Demostración.** Dado que  $x \in \text{conv } A$ , entonces

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \text{ con } x_i \in A, \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

para cierto  $k \in \mathbb{N}$  y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $k$  es minimal. Debemos demostrar entonces que el conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_k\}$  es afínmente independiente, lo que implicará que  $k \leq n + 1$ . Procedamos por reducción al absurdo.

Supongamos pues que  $\{x_1, \dots, x_k\}$  son afínmente dependientes. Entonces, existirán ciertos escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , no todos nulos, tales que

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 0; \quad (3.1)$$

en efecto,  $\{x_1, \dots, x_k\}$  son afínmente dependientes si, y sólo si, reordenando los subíndices si fuera necesario, existen escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ , no todos nulos, con  $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i = 1$ , tales que  $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ , lo cual, llamando  $\alpha_k = -1$ , es equivalente a (3.1).

Puesto que todos los  $\lambda_i > 0$  y, al menos algún  $\alpha_i \neq 0$ , podemos elegir un  $t \in \{1, \dots, k\}$  conveniente tal que  $\frac{\lambda_t}{\alpha_t} > 0$  y  $\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \leq \frac{\lambda_t}{\alpha_t}$ , para todos los  $i$  para los que  $\alpha_i > 0$ . Tras reordenar los subíndices en caso de ser necesario, podemos suponer que  $t = k$ . Así pues, tenemos que

$$\frac{\lambda_k}{\alpha_k} > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \leq \frac{\lambda_i}{\alpha_i}. \quad (3.2)$$

Sean entonces  $\beta_i = \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i$ , para  $1 \leq i \leq k$ . Trivialmente se tiene que  $\beta_k = 0$  y, por tanto, gracias a (3.1),

$$\sum_{i=1}^{k-1} \beta_i = \sum_{i=1}^k \beta_i = \sum_{i=1}^{k-1} \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 - 0 = 1.$$

Además, tenemos que  $\beta_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ ; en efecto:

- si  $\alpha_i \leq 0$ , entonces  $\beta_i \geq \lambda_i > 0$ ;
- si  $\alpha_i > 0$ , entonces  $\beta_i = \alpha_i \left( \frac{\lambda_i}{\alpha_i} - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \right) \geq 0$  por (3.2).

Por tanto, usando de nuevo (3.1), deducimos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i x_i &= \sum_{i=1}^k \beta_i x_i = \sum_{i=1}^k \left( \lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \alpha_i \right) x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k} \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = x. \end{aligned}$$

De este modo hemos podido expresar  $x$  como una combinación convexa de  $k - 1$  puntos del conjunto  $\{x_1, \dots, x_k\}$ , lo que nos lleva a una contradicción con el hecho de que  $k$  era minimal.  $\square$

Además de la versión clásica dada en el teorema 3.1, el teorema de Carathéodory puede encontrarse en la literatura enunciado de dos formas adicionales, todas ellas equivalentes: si  $A \subset \mathbb{R}^n$ , entonces

v.1)  $\text{conv } A$  es la unión de todos los símlices con vértices en  $A$ ;

v.2)  $x \in \text{conv } A$  si, y sólo si,  $x$  está en algún símplex  $S$  cuyos vértices son puntos de  $A$ .

Ambas versiones son consecuencia de la siguiente propiedad de sencilla verificación: todo punto de un  $k$ -símplex  $S$  tiene una única representación como combinación convexa de sus vértices. En efecto, si existiese un punto  $x \in S = \text{conv}\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  que tiene dos representaciones como combinación convexa de los vértices de  $S$ ,

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i x_i, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 1, \quad \alpha_i, \beta_i \geq 0,$$

entonces, si representamos por  $\lambda_i := \alpha_i - \beta_i$ ,  $i = 1, \dots, k + 1$ , se tendría que  $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = 0$ ; además,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i - \sum_{i=1}^{k+1} \beta_i = 0,$$

lo cual aseguraría que los puntos  $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$  serían afínmente dependientes, una contradicción.

El segundo resultado adicional que necesitamos para demostrar una de las implicaciones del teorema fundamental de los politopos, es el siguiente lema de dualidad, del que puede deducirse, en particular, que el dual de un politopo (que contenga al origen) siempre es un politopo.

**Lema 3.1.** Sean  $u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Si

$$P := \bigcap_{i=1}^k H_{u_i, 1}^-$$

es acotado, entonces

$$P^* = \text{conv} \{u_1, \dots, u_k\}.$$

**Demostración.** Dado que  $0 \in \text{int } P$ , tenemos que  $P^*$  está bien definido. Sea ahora  $Q := \text{conv} \{u_1, \dots, u_k\}$ . Para todo  $x \in P$  tenemos que  $\langle x, u_i \rangle \leq 1$ , luego  $u_i \in P^*$ . De este modo,  $Q \subset P^*$ .

Sea  $v \in \mathbb{R}^n \setminus Q$ . El teorema de separación 1.2 nos asegura la existencia de un hiperplano  $H_{z,\alpha}$  que separa fuertemente  $Q$  y  $v$  y, tras una elección adecuada, podemos suponer que  $\langle z, u_i \rangle < \alpha$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , y que  $\langle z, v \rangle > \alpha$ .

Dado que  $P$  es acotado, se tiene que  $\text{pos} \{u_1, \dots, u_k\} = \mathbb{R}^n$ . En efecto, si esto no fuera así, el cono convexo cerrado  $\text{pos} \{u_1, \dots, u_k\}$  tendría un punto frontera y, por tanto, un hiperplano soporte, digamos  $H$ , que necesariamente pasaría por el origen. Entonces, si  $w$  es un vector normal exterior (no necesariamente unitario) a dicho hiperplano  $H$ , se tendría que  $\langle x, w \rangle \leq 0$  para todo  $x \in \text{pos} \{u_1, \dots, u_k\}$ , ya que  $H$  pasa por 0. En particular,  $\langle u_i, w \rangle \leq 0 < 1$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ , lo que implicaría que  $w \in P$ , ya que  $u_i \in P^*$ . Dado que este argumento sería válido para cualquier múltiplo  $\mu w$ , con  $\mu \geq 0$ , tendríamos que  $\mu w \in P$  para todo  $\mu \geq 0$ , es decir,  $P$  no sería acotado, una contradicción. Así pues, hemos probado que  $\text{pos} \{u_1, \dots, u_k\} = \mathbb{R}^n$ .

Por lo tanto, existe una representación del origen

$$0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i, \quad \text{con } \lambda_i \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i > 0.$$

Esto implica que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha > 0$  y, de este modo,  $\alpha > 0$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\alpha = 1$ . Pero entonces  $z \in P$ , luego  $v \notin P^*$ , lo que prueba la igualdad  $Q = P^*$ .  $\square$

## 3.2. El teorema fundamental de los politopos

Como hemos comentado al principio del capítulo, el llamado teorema fundamental de los politopos nos asegura que un politopo, definido como la envoltura convexa de una cantidad finita de puntos, puede verse también como una intersección (acotada) de semiespacios. Comencemos viendo la implicación directa, cuya prueba hemos estudiado en [4].

**Teorema 3.2.** *Todo politopo es la intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados.*

**Demostración.** Sea  $P \in \mathcal{P}^n$ . Dado que los  $k$ -planos con  $k \leq n$  y los semiespacios pueden representarse como intersecciones de una cantidad finita de semiespacios cerrados, podemos suponer que  $\dim P = n$ .

Sean  $F_1, \dots, F_k$  las caras de  $P$ . Entonces  $F_i = H_i \cap P$  (véase la proposición 2.2, propiedad (v)), donde el hiperplano soporte  $H_i$  de  $P$  es único ya que  $\dim F_i = n - 1$ . Sea entonces  $H_i^-$  el semiespacio cerrado determinado por  $H_i$  y que contiene a  $P$ , para  $i = 1, \dots, k$ . Vamos a demostrar que

$$P = H_1^- \cap \dots \cap H_k^-. \quad (3.3)$$

La inclusión  $P \subset H_1^- \cap \dots \cap H_k^-$  es inmediata, pues estamos asumiendo que  $P \subset H_i^-$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .

Para probar el otro contenido, sea  $x \in \mathbb{R}^n \setminus P$  y sea  $A$  la unión de las envolturas afines de  $x$  y cualesquiera  $n - 1$  vértices de  $P$ . Obsérvese que  $A$  es una unión finita de hiperplanos (alguno de ellos podría ser un  $(n - 2)$ -plano) afines. Tomamos un punto  $y \in (\text{int } P) \setminus A$ . Entonces existe un  $z \in \text{bd } P \cap [x, y]$  que se encuentra en algún hiperplano soporte de  $P$  y, por tanto, en alguna cara  $F$  de  $P$ . Supongamos que  $\dim F =: j \leq n - 2$ . Por el teorema de Carathéodory (teorema 3.1),  $z$  pertenece a la envoltura convexa de  $j + 1 \leq n - 1$  vértices de  $P$  y, por tanto,  $z$  está en  $A$ . Pero en ese caso  $y \in A$ , lo que nos lleva a una contradicción. Esto demuestra que  $j = n - 1$ , es decir,  $F$  es una cara  $(n - 1)$ -dimensional, luego  $F = F_i$  para cierto  $i \in \{1, \dots, k\}$ . De  $y \in \text{int } P \subset \text{int } H_i^-$  deducimos que  $x \notin H_i^-$ , lo que prueba (3.3).  $\square$

A partir de este momento utilizaremos la siguiente nomenclatura. Dados un politopo  $P \in \mathcal{P}^n$  con  $\dim P = n$  y una cara  $(n - 1)$ -dimensional  $F$  de  $P$ , sabemos que  $F = P \cap H_{u,\alpha}$  y  $P \subset H_{u,\alpha}^-$  para ciertos  $u \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el vector  $u$  es unitario, esto es,  $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Entonces  $u$  se denomina el **vector normal exterior unitario** de la cara  $F$  o, simplemente, **vector normal** de  $F$ .

Como consecuencia del teorema 3.2 obtenemos la siguiente forma de representar un politopo.

**Corolario 3.1.** *Sea  $P \in \mathcal{P}^n$  un politopo con  $\dim P = n$  y vectores normales  $u_1, \dots, u_k$ . Entonces*

$$P = \bigcap_{i=1}^k H_{u_i, h(P, u_i)}^-.$$

*En particular, los escalares  $h(P, u_1), \dots, h(P, u_k)$  determinan  $P$  unívocamente.*

**Demostración.** Si  $F_i$  es la cara  $((n - 1)$ -dimensional) de  $P$  cuyo vector normal es  $u_i$ , entonces  $F_i = P \cap H_{u_i, h(P, u_i)}$ . La afirmación ahora es evidente a partir de (3.3), ya que  $P$  es intersección de sus semiespacios soporte  $H_i^- = H_{u_i, h(P, u_i)}^-$ , para todo  $i = 1, \dots, k$ .  $\square$

Finalmente probamos que toda intersección acotada de semiespacios cerrados es siempre un politopo.

**Teorema 3.3.** *Cualquier intersección acotada de una cantidad finita de semiespacios cerrados es un politopo.*

Como hemos dicho al comienzo del capítulo, para esta implicación vamos a plantear dos pruebas alternativas. La primera de ellas está basada en la teoría de la dualidad y la hemos estudiado en [4].

**Primera demostración del Teorema 3.3.** Sea  $P = \bigcap_{i=1}^k H_i^-$  acotado, con  $H_i^- \subset \mathbb{R}^n$  un semiespacio cerrado,  $i = 1, \dots, k$ . En primer lugar podemos suponer que  $\dim P = n$  (si no trabajamos en  $\text{aff } P$ ) y, después de una traslación, que el origen  $0 \in \text{int } P$ . Entonces  $0 \in \text{int } H_i^-$ , luego  $H_i^-$  puede representarse de la forma  $H_i^- = H_{u_i,1}^-$ , para un vector  $u_i \in \mathbb{R}^n$  adecuado.

El lema 3.1 nos asegura entonces que  $P^* = \text{conv}\{u_1, \dots, u_k\}$  es un politopo, por lo que podemos aplicar el teorema 3.2 a  $P^*$  para deducir que éste es la intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados con  $0 \in \text{int } P^*$ . Ahora, el lema 3.1 demuestra que  $P^{**}$  es un politopo, y finalmente, la proposición 1.2 permite concluir que  $P = P^{**}$  es un politopo.  $\square$

La segunda demostración hace uso de las propiedades de los puntos extremos y la hemos estudiado en [2].

**Segunda demostración del Teorema 3.3.** Sea  $P = \bigcap_{i=1}^k H_i^-$  acotado, con  $H_i^- \subset \mathbb{R}^n$  un semiespacio cerrado,  $i = 1, \dots, k$ . Claramente,  $P$  es un cuerpo convexo, y por el teorema de Minkowski-Krein-Milman (teorema 1.3),  $P$  es la envoltura convexa de sus puntos extremos. Para demostrar que  $P$  es un politopo convexo basta ver que  $P$  tiene sólo una cantidad finita de puntos extremos. Para ello, es suficiente comprobar el siguiente resultado auxiliar:

*Sea  $p$  un punto extremo de  $P$ . Entonces  $p$  es la intersección de una subfamilia del conjunto de hiperplanos  $\{H_1, \dots, H_k\}$ .*

Tras reordenar los índices si fuera necesario podemos suponer que

$$p \in H_1 \cap \dots \cap H_m \cap \text{int } H_{m+1}^- \cap \dots \cap \text{int } H_k^-$$

para cierto  $m \leq k$ . Ahora basta comprobar que

$$\{p\} = H_1 \cap \dots \cap H_m. \tag{3.4}$$

Si esto no se cumple, el plano  $H = H_1 \cap \dots \cap H_m$  tendría al menos dimensión 1, y podríamos elegir  $u, v \in H \cap \text{int } H_{m+1}^- \cap \dots \cap \text{int } H_k^-$ , con  $u, v \neq p$ , tales que  $p = \frac{1}{2}(u + v)$ . Entonces  $u, v \in P$  y llegaríamos a una contradicción pues hemos supuesto que  $p$  es un punto extremo de  $P$ . Esto demuestra (3.4) y concluye la prueba.  $\square$



# Bibliografía

- [1] CRM Laboratories: [http://www.crm.umontreal.ca/~physmath/LabPhysMathEn/gallery/scottish\\_stones.html](http://www.crm.umontreal.ca/~physmath/LabPhysMathEn/gallery/scottish_stones.html). Mathematical Physics Laboratory, Montreal University, 2017.
- [2] P. M. Gruber: *Convex and Discrete Geometry*. Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [3] M. A. Pérez García: *Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes*. Vision Net, Madrid, 2da edición, 2007.
- [4] R. Schneider: *Convex bodies: The Brunn-Minkowski theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd expanded edition, 2014.
- [5] D. Wade: <http://geometricism.com/c/polyhedrality>. 2017.
- [6] R. Webster: *Convexity*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.