UNIVERSIDAD DE MURCIA
Facultad de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas

Análisis de Fourier en grupos

Antonio Ismael Cano Mármol

dirigido por
Matías Raja Baño
Luis Carlos García Lirola

Curso 2017-18

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Antonio Ismael Cano Mármol, autor del TFG “*Análisis de Fourier en grupos*”, bajo la tutela de los profesores Matías Raja Baño y Luis Carlos García Lirola, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 25 de Junio de 2018

Antonio Ismael Cano Mármol

Quisiera dedicar este trabajo a mi familia, y especialmente a mis padres, que se dieron cuenta de que quería estudiar Matemáticas cuando ni siquiera yo lo sabía.

También quiero dar las gracias a mis tutores. A Luis Carlos García Lirola, por su tiempo, su empeño y nuestras fructíferas discusiones, y a Matías Raja Baño, por su intuición y buenas ideas que han sido condición necesaria para la existencia de algunas secciones de este trabajo, y por el tiempo que me ha dedicado a lo largo de estos años.

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es generalizar el Análisis de Fourier o Análisis Armónico a ámbitos más amplios de los estudiados a lo largo del Grado, en el que se han visto técnicas de Series de Fourier para funciones periódicas en la recta real, o funciones en el toro $\mathbb{T}$. Esta generalización se hace a grupos topológicos localmente compactos de Hausdorff, y nos permitirá extender resultados ya conocidos para la teoría clásica del Análisis de Fourier. El Análisis Armónico Abstracto nació en los años 30, gracias al trabajo de numerosos matemáticos, y en particular, André Weil, fundador del grupo Bourbaki, y Lev Semenovich Pontryagin. Aunque la potencia de la teoría se aprecia principalmente desde la perspectiva general de los grupos localmente compactos Hausdorff (e incluso en el caso de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$), hemos incluido algunos comentarios en ejemplos de grupos "clásicos", y aplicaciones en grupos finitos, en los que, a pesar de de tener una construcción más sencilla, hemos intentado aplicar los resultados de la teoría abstracta.

En el Capítulo 1, se introducen los conceptos fundamentales para entender nuestro trabajo. Se comienza con el estudio de algunas nociones de Teoría de la Medida como la medida exterior, medidas complejas y resultados de topología y medida en espacios localmente compactos, haciendo especial hincapié en: el concepto de medida de Radon, dos teoremas de representación, resultados de densidad del conjunto de las funciones continuas con soporte compacto $C_c(X)$ como subespacio de otros espacios de funciones, así como la construcción del producto de Radon de dos medidas y el enunciado del Teorema de Fubini-Tonelli para medidas de Radon. A continuación, se hace un resumen de propiedades de redes en espacios topológicos, y como aplicación, se caracteriza la topología débil y débil* en espacios normados, destacando dos teoremas que utilizaremos para construir la medida de Haar en grupos compactos. A esto le sigue una introducción a la Teoría de Álgebras de Banach, donde destaca el conjunto de los funcionales multiplicativos no nulos en un álgebra A, $\Delta(A)$, así como la definición de la Topología de Gelfand, por el papel que jugarán más adelante. Por último, se introduce la noción de grupo topológico, demostrando algunos resultados, hasta definir los *grupos LCA*, es decir, los grupos topológicos localmente compactos de Hausdorff, la estructura algebraica y topológica fundamental en la que desarrollamos nuestro trabajo.

Para construir la Teoría del Análisis Armónico en $\mathbb{T}$, necesitamos el concepto de integral, de medida, en particular, la medida de Lebesgue. En el caso de los grupos LCA, esta medida es la medida de Haar. El Capítulo 2 está dedicado a esto. Demostraremos la existencia de la medida de Haar por la izquierda en grupos LCA no conmutativos, una medida de Radon positiva e invariante

por traslaciones por la izquierda, esto es $\mu(xA) = \mu(A)$ para todo conjunto medible Borel A y todo x elemento del grupo. Es evidente que si el grupo es conmutativo, μ es también una medida de Haar por la derecha, y por tanto una medida de Haar. Probaremos que en este caso la medida de Haar es única salvo multiplicación por una constante $c > 0$, restringiéndonos al caso conmutativo por la simplificación que supone respecto al caso no conmutativo, ya que desarrollaremos la teoría en grupos LCA. Además, se tratan algunas propiedades de la medida de Haar y funciones continuas en grupos topológicos localmente compactos, y se hace una breve mención a la aplicabilidad del Teorema de Fubini-Tonelli para funciones de $C_c(G)$ y $L^1(G)$, pues este teorema exige que las medidas sean $\sigma-$finitas, y la medida de Haar no lo es en general.

La prueba incluida de la existencia de la medida de Haar por la izquierda se basa en un argumento que trata de comparar el "tamaño" de los conjuntos compactos respecto a otro compacto fijo con interior no vacío, para luego construir una medida exterior que, restringida a la $\sigma-$álgebra de Borel, es una medida de Radon. Debido a esta construcción un tanto técnica de la medida de Haar, hemos decidido incluirla en un apéndice, y en su lugar, añadir dos construcciones para grupos compactos bajo distintas hipótesis. La primera se basa en el artículo [9] y es válida para grupos compactos metrizables (no conmutativos). Por otro lado, la segunda es un resultado propio, y se hace en grupos compactos abelianos. Ya que toda medida de Radon es finita en un compacto, podemos buscar una medida de Haar en el conjunto de las medidas de probabilidad

$$P(G) = \{\mu \in M(G) : ||\mu|| = \mu(1) = 1\}.$$

En estas dos construcciones utilizaremos nociones de convexidad, funciones semicontinuas, y aplicaremos lo visto sobre topología débil*. En particular, demostraremos que aunque $P(G)$ sea un subconjunto de $M(G)$ (el conjunto de medidas de Radon complejas), es un conjunto de medidas positivas. Aunque no hemos encontrado ninguna prueba de este hecho, sí hemos leído numerosas referencias a este resultado que sería usado en el capítulo siguiente, por lo que se ha incluido una prueba de elaboración propia.

El Capítulo 3 constituye el núcleo del trabajo. Comenzamos definiendo la operación convolución, ya conocida debido al estudio de las Series de Fourier a lo largo del Grado, y demostramos algunas de sus propiedades. En particular, tenemos especial cuidado con la convolución de dos funciones de $L^1(G)$, pues demostrar que converge absolutamente para casi todo punto, y que pertenece a $L^1(G)$ necesita del Teorema de Fubini-Tonelli para la medida de Haar, para lo que debemos tener en cuenta la observación sobre el uso de este resultado para funciones de $L^1(G)$. Esta propiedad nos permite ver $L^1(G)$ como un álgebra de Banach conmutativa que supondremos no unitaria, hecho que probaremos más adelante. Acto seguido, introducimos el concepto de *grupo dual*. Dado un grupo G LCA, consideramos aquellas funciones $\gamma : G \to \mathbb{C}$ tales que

$$\gamma(x_1 + x_2) = \gamma(x_1)\gamma(x_2) \quad \text{y} \quad |\gamma(x)| = 1 \text{ para cada } x_1, x_2, x \in G.$$

Llamaremos *caracter* a una función que cumpla dichas condiciones. El grupo dual es precisamente el grupo formado por los caracteres continuos definidos en G, y nos referiremos a él como Γ o

$\widehat{G}$. Estas funciones nos permiten definir la *Transformada de Fourier* en $L^1(G)$. Si $f \in L^1(G)$, la Transformada de Fourier de f es

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx,$$

donde $(x,\gamma) = \gamma(x)$. Estos dos conceptos (grupo dual y Transformada de Fourier) están fuertemente relacionados, ya que, como demostraremos, existe una biyección entre Γ y el conjunto de aplicaciones $f \mapsto \hat{f}(\gamma)$. Este conjunto de aplicaciones no es sino $\Delta(L^1(G))$, por lo que, utilizando resultados de Teoría de Álgebras de Banach conmutativas, podemos deducir que Γ es localmente compacto y de Hausdorff. Esta es la aplicación más importante de las álgebras de Banach en este trabajo, y la principal razón por la que hemos usado esta teoría. Esto supone el primer paso significativo en el estudio las propiedades del grupo dual. Después de esto, estudiamos los grupos duales de grupos compactos y grupos discretos, y a continuación, damos una caracterización de la topología de Γ que nos permite demostrar que la aplicación $(\gamma',\gamma'') \mapsto \gamma' - \gamma''$ es continua, y que por tanto Γ es un grupo LCA. Como aplicación, estudiamos los grupos duales de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}$.

Antes de dedicarnos a los teoremas principales de este capítulo, introducimos algunas herramientas: extendemos la convolución y la Transformada de Fourier a $M(G)$, también conocida como la *Transformada de Fourier-Stieltjes*, y estudiamos en profundidad las *funciones definidas positivas*, dando una caracterización a través del Teorema de Bochner, que nos permite concluir que las funciones que se pueden representar a través de la fórmula

$$f(x) = \int_\Gamma (x,\gamma)d\mu(\gamma),$$

son combinaciones $\mathbb{C}-$lineales de funciones continuas definidas positivas. Nos referiremos a este conjunto de funciones como $B(G)$. Este conjunto es esencial en lo posterior, pues si $f \in L^1(G) \cap B(G)$, existe *una* medida de Haar en Γ convenientemente normalizada tal que se verifica la igualdad

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)(x,\gamma)d\gamma.$$

Este resultado se conoce como Teorema de Inversión, y es fundamental porque permite recuperar el valor de una función a partir de su Transformada de Fourier. Aquella medida de Haar de Γ para la que se cumple esta fórmula es la *medida dual de* Γ, y calcularemos cuál es en algunos casos concretos.

En lo que resta de capítulo, extendemos la Transformada de Fourier a $L^2(G)$ mediante el Teorema de Plancherel, y obtenemos la conocida identidad de Parseval. La estructura de espacio de Hilbert de $L^2(G)$ permite demostrar, entre otras cosas, que en un grupo LCA los caracteres continuos son una base hilbertiana de $L^2(G)$. Por último, demostramos el Teorema de dualidad de Pontryagin que, informalmente, establece que el dual del dual de un grupo LCA es él mismo. Esto permite caracterizar los grupos topológicos compactos y los discretos, e implica que los caracteres continuos aproximan a la totalidad de los caracteres (compactificación de Bohr).

Estos teoremas tienen una traducción clara para grupos finitos, y nos permiten considerar algunas aplicaciones. En particular, en el Capítulo 4 demostraremos el Teorema de Dirichlet (1837) que afirma que

> Si q y l son dos enteros positivos primos entre sí, entonces hay infinitos primos de la forma $l+kq$ con $k \in \mathbb{Z}$.

y que supone históricamente el primer resultado en Teoría Analítica de Números, así como una increíble aplicación del Análisis de Fourier. La demostración de este resultado ha supuesto un esfuerzo considerable, pues aunque se puede encontrar una demostración completa en [23], hemos considerado que esta prueba no es del todo satisfactoria en el sentido de que para evitar utilizar herramientas de Análisis Complejo, se vuelve innecesariamente artificiosa. Esto nos ha llevado a utilizar el artículo [26], y estudiar algunas nociones de Series de Dirichlet. Por ello, incluimos algunos resultados de Análisis Complejo en un apéndice.

En el Capítulo 5 estudiamos algunas propiedades del Análisis de Fourier de funciones booleanas, es decir, funciones definidas en el cubo booleano que toman dos posibles valores, y demostraremos un resultado de *property testing*, un área de Ciencias de la Computación cuya filosofía es verificar que cierta propiedad se cumple con probabilidad alta mediante métodos más eficientes. En nuestro caso, la propiedad que queremos verificar para una función $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ es “ser lineal”. El estudio de funciones booleanas es un tema de investigación actual de relevancia y cuenta con numerosas aplicaciones en diversas áreas (Teoría de la elección social, teoría de grafos, procesamiento de señales, etc.) que, aunque no hemos podido incluir en este trabajo, pueden usarse para un futuro proyecto.

Por último, debemos destacar que en el presente trabajo, además de consultar y recopilar resultados de diversas referencias bibliográficas, hemos incluido algunos artículos de investigación, y añadido un resultado propio y algunas demostraciones de elaboración propia. Creemos que esta memoria nos ha servido como introducción al Análisis Harmónico Abstracto, así como un primer contacto con otras áreas y herramientas como la Teoría de la Medida, álgebras de Banach, topología débil, Teoría Analítica de Números, y Ciencias de la Computación. Esperamos continuar estudiando Análisis Armónico y todas estas áreas en el futuro, y en particular, en los estudios de posgrado, por lo que enumeramos algunas posibles líneas de trabajo en el Capítulo 6.

Abstract

THE main objective of this project is to generalize Fourier Analysis or Harmonic Analysis to wider scopes than those studied along the degree, in which we studied Fourier Series techniques for periodic functions on the real line, or functions on the torus $\mathbb{T}$. We develop this generalization on locally compact Hausdorff topological groups, and it will allow us to extend some well-known Fourier Analysis classical theory results. Abstract Harmonic Analysis appeared for the first time in the $30'$s, due to many some mathematicians' work, and in particular, André Weil, founder of Bourbaki group, and Lev Semenovich Pontryagin. Although the power of the theory is mainly valued from the general perspective of locally compact Hausdorff groups (and even in $\mathbb{R}$ and $\mathbb{T}$), we have included some comments about "classic" examples, and some applications to finite groups in which, despite having a simpler construction, we have tried to apply abstract results.

In Chapter 1, we introduce some fundamental concepts which are necessary in order to understand our work. We start by studying some Measure Theory notions as exterior measures, complex measures and some topology and measure results on locally compact spaces, specially: Radon measures, two representation theorems, density results for the space of compact supported continuous functions $C_c(X)$ as a subspace of another functions spaces, as well as the construction of the Radon product and the Fubini-Tonelli's Theorem. Then, a brief abstract of nets in topological spaces is included, with an application to weak and weak* topologies in normed spaces, which will be useful to set up Haar measure in compact groups. In the next place, an introduction to Banach Algebras Theory can be found, highlighting the set of nonzero multiplicative linear functionals on the algebra A, $\Delta(A)$, as well as the Gelfand Topology definition, which will play an important role later. Finally, the notion of topological group is introduced, proving some results, and we define *LCA groups*, i.e. locally compact Hausdorff topological groups, the fundamental topological and algebraic structure in which we'll develop our work.

In order to set up Harmonic Analysis theory on $\mathbb{T}$, we need the concept of integral, of measure, in particular, Lebesgue measure. In the LCA groups case, this measure is the Haar measure. Chapter 2 is dedicated to it. We will show the existence of left Haar measure in nonconmmutative locally compact groups, a positive Radon measure which is invariant under left translations, that is, $\mu(xA) = \mu(A)$ for every Borel measurable set A and every element x of the group. It is clear that if the group is commutative, μ is also invariant under right translations, and therefore, a Haar measure. We will prove, that the Haar measure is unique up to multiplication by a constant $c > 0$,

but we will only do it in the commutative case, since it results a simplification with respect to the noncommutative case and because we will develop Harmonic Analysis on LCA groups. Moreover, in this chapter some properties related to Haar measure and spaces of continuous functions on locally compact groups are treated, and a note about the Fubini-Tonelli's Theorem applicability for functions in $C_c(G)$ and $L^1(G)$ is included, since this theorem requires the $\sigma-$finiteness of measures involved, and Haar measure isn't $\sigma-$finite in general.

The proof of existence of the left Haar measure is based on an argument that pretends to compare the size of compact sets with respect to another fixed compact set with nonempty interior. Then, an exterior measure is obtained, and restricting its domain to the Borel $\sigma-$algebra, it turns out to be a Radon measure. Due to this construction is a bit technical, we have decided to include it in a appendix, and add two smart proofs for compact groups under different hypothesis. The first is based on the article [9] and it is valid for metrizable compact groups (not necessarily commutative). On the other hand, the second one is an own result, which works for compact abelian groups. Since every Radon measure is finite on compact sets, it is enough to search for a measure in the probability measures set

$$P(G) = \{\mu \in M(G) : ||\mu|| = \mu(1) = 1\}.$$

For these two constructions, we will use convexity and semicontinuous functions notions, and we will apply some facts about weak* topology. In particular, we will show that $P(G)$ is a set of positive measures, although we define it as a subset of $M(G)$. Even though we have not found any proof of this fact, we have read many allusions to this result which is used in the next chapter, so that an own proof is included.

Chapter 3 constitutes the core of the project. We begin by defining the convolution operation, already known due to the study of Fourier Series along the degree, and we prove some of its properties. In particular, we take care about convolution of two functions from $L^1(G)$, since proving the absolute convergence almost everywhere of this convolution, and that it is an element of $L^1(G)$ requires the Fubini-Tonelli's Theorem for the Haar measure, so we consider the observation about the use of this theorem for $L^1(G)$. This property allows us to interpret $L^1(G)$ as a commutative Banach algebra which we suppose nonunital, fact that we will prove later. Next, we introduce the concept of *dual group*. Given a LCA group G, we consider those functions $\gamma : G \to \mathbb{C}$ such that

$$\gamma(x_1 + x_2) = \gamma(x_1)\gamma(x_2) \quad \text{and} \quad |\gamma(x)| = 1 \text{ for all } x_1, x_2, x \in G.$$

A *character* is a function satisfying these conditions. The dual group is precisely the group of the continuous characters defined on G, and we will refer to it as Γ or $\widehat{G}$. These functions allow us to define the *Fourier Transform* on $L^1(G)$. If $f \in L^1(G)$, the Fourier Transform of f is

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx,$$

where $(x,\gamma) = \gamma(x)$. The dual group is strongly related to the Fourier Transform, since there exists a bijection between Γ and the set of maps $f \mapsto \hat{f}(\gamma)$. This set is $\Delta(L^1(G))$, so that, using some results from commutative Banach algebras, we can conclude that Γ is locally compact and Hausdorff. This is the most important application of Banach algebras in this project, and the main reason why we have used this theory. This turns out to be the first meaningful step in order to study the dual group properties. After this, we study dual groups of compact and discrete groups respectively, and give a characterization of the topology of Γ which allows us to show that the map $(\gamma', \gamma'') \mapsto \gamma' - \gamma''$ is continuous, so Γ is a LCA group. As an application, we study the dual group of $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{T}$.

Before dedicating ourselves to the principal theorems of this chapter, we introduce some tools: we extend convolution and Fourier Transform to $M(G)$, also known as *Fourier-Stieltjes Transform*, and we deeply study *definite positive functions*, giving a characterization through Bochner's Theorem, which allows us to conclude that the functions that can be represented as

$$f(x) = \int_\Gamma (x, \gamma) d\mu(\gamma),$$

are $\mathbb{C}-$linear combinations of definite positive functions. We denote the set of these functions as $B(G)$. This set is essential in the later, since if $f \in L^1(G) \cap B(G)$, there exists *a* Haar measure conveniently normalized so that the following equality is verified

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)(x, \gamma) d\gamma.$$

This result is known as the Inversion Theorem, and is a fundamental one because enables to recover the value of a function from its Fourier Transform. That Haar measure in Γ for which the inversion formula is satisfied is the *dual measure of* Γ, and we will calculate it in some concrete cases.

In the final part of the chapter, we extend the Fourier Transfrom to $L^2(G)$ by Plancherel's Theorem, and we obtain the famous Parseval identity. $L^2(G)$'s Hilbert space structure enables to show that the continuous characters on a LCA group constitutes a Hilbert basis of $L^2(G)$. Lastly, we prove Pontryagin's Duality Theorem which, informally, claims that the dual of the dual of a LCA group is itself. This enables to characterize compact topological groups and discrete topological groups, and implies that continuous characters approximate the set of all characters (*Bohr compactification*).

These theorems have a clear translation for finite groups, and allow us to consider some applications. In particular, in Chapter 4 we will prove Dirichlet's Theorem (1837) which states that

> If q and l are relatively prime positive integers, then there are infinitely many primes of the form $l + kq$ with $k \in \mathbb{Z}$.

and historically supposes the first result on Analytic Number Theory, as well as an amazing Fourier Analysis application. The proof of this result has supposed an important effort, since, although a complete proof can be found at [17], we have considered that this proof in not satisfactory enough in the sense that in order to avoid using Complex Analysis tools, it gets unnecessarily obscure. For that reason, we have followed [26] and we have studied something about Dirichlet Series. We have added an appendix about Complex Analysis for that purpose.

In Chapter 5 we study some Fourier Analysis properties for boolean functions, i.e. functions defined on the boolean cube that have two possible values, and we will prove a result related to *property testing*, a Computer Sciences area whose philosophy is to verify that some property is satisfied with high probability through more efficient methods. In our case, we want to verify if a given function $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ "is linear". The study of boolean functions is a current research topic and has many applications to different areas (Social choice theory, Graph theory, signal processing, etc.) which, although we have not included here, they could be used in future projects.

Finally, we have to highlight that in this project, in addition to reading and collecting results from many bibliographic references, we have included some research articles, and an own result and some own elaboration proofs. We believe that this project has been useful as an introduction to Abstract Harmonic Analysis, as well as a first contact with other areas and tools like Measure Theory, Banach algebras, weak topology, Analytic Number Theory and Computer Science. We hope to continue studying Harmonic Analysis and all of these areas in the future, and in particular, during postgraduate studies, so we enumerate some possible future projects in Chapter 6.

Contenidos

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo constituye una revisión de algunos conceptos, a la vez que se introducen otros nuevos. Entre estos destacamos el estudio de medidas en espacios localmente compactos, redes en espacios topológicos, álgebras de Banach, y grupos topológicos.

1.1. Medida

Para esta sección, se ha consultado mayoritariamente [3] y [8]. El objetivo principal es estudiar las medidas en espacios localmente compactos, herramienta principal para el Análisis de Fourier en grupos.

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Una colección Σ de subconjuntos de X es una *σ-álgebra en X* si:

(i) $X \in \Sigma$.

(ii) $A \in \Sigma \Longrightarrow A^c \in \Sigma$.

(iii) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Diremos que el par (X,Σ) es un *espacio medible*, y sus elementos, los *conjuntos medibles* respecto Σ. Dada una familia de conjuntos $\mathscr{A}$, llamaremos *σ-álgebra generada por $\mathscr{A}$*, $\sigma(\mathscr{A})$, a la menor σ-álgebra que contiene a $\mathscr{A}$. Si X es un espacio topológico, la *$\sigma-$álgebra de Borel de X*, $\mathscr{B}(X)$, es la $\sigma-$álgebra generada por la topología de X. A los elementos de $\mathscr{B}(X)$ los llamaremos *conjuntos de Borel* en X.

Definición 1.2. Llamaremos *espacio de medida* a la terna (X,Σ,μ), donde X es un conjunto, Σ una σ-álgebra y μ una medida, es decir, una función $\mu : \Sigma \longrightarrow [0,+\infty]$ que cumple:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Es *numerablemente aditiva*, es decir, si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Diremos que μ es *finita* si $\mu(X) < \infty$, o $\sigma - finita$ si X es unión numerable de conjuntos medibles con medida finita.

Ahora podemos considerar el conocido concepto de función medible.

Definición 1.3. Sean (X, Σ_x) y (Y, Σ_Y) dos espacios de medida. Una función $f : X \to Y$ es *medible con respecto a* Σ_X *y* Σ_Y si $f^{-1}(B) \in \Sigma_X$ siempre que $B \in \Sigma_Y$.

Ejemplos 1.4. Algunos ejemplos conocidos de funciones medibles son:

- Una función continua $f : X \to Y$ es medible respecto de las $\sigma-$álgebras $\mathscr{B}(X)$ y $\mathscr{B}(Y)$.
- La función característica de un conjunto medible A, χ_A.
- Una función simple $f : X \to [-\infty, +\infty]$, esto es una función de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ donde $\{A_i\}_i$ es una partición de X formada por conjuntos medibles.

Observación 1.5. Si $f : X \to Y$ es una función medible respecto $\mathscr{B}(X)$ y $\mathscr{B}(Y)$, diremos que es una función *medible Borel*, si está implícito qué espacios topológicos son X e Y. El caso más común a lo largo de esta memoria es el de una función $f : G \to \mathbb{C}$ medible respecto $\mathscr{B}(G)$ y $\mathscr{B}(\mathbb{C})$, donde G es un grupo topológico.

Un *espacio normado* X es un espacio vectorial provisto de una norma. Si con la topología asociada a la norma es *completo* (toda sucesión de Cauchy es convergente), diremos que X es un *espacio de Banach*. Un *funcional lineal* (o simplemente funcional) sobre un espacio normado X es una aplicación lineal continua $f : X \to \mathbb{K}$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. El espacio normado de los funcionales lineales sobre X es el *espacio dual de* X, X^*, con la norma $||f|| = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$, donde B_X es la bola cerrada unidad de X. Con estas definiciones, podemos construir los espacios $L^p(\mu)$.

Si μ es una medida positiva, y $1 \leq p < +\infty$, definimos el espacio $\mathscr{L}^p(X, \Sigma, \mu, \mathbb{C})$ como el conjunto de funciones medibles $f : X \to \mathbb{C}$ tales que $\int |f|^p d\mu < +\infty$. El caso $p = 1$ representa el espacio de las funciones μ-integrables. Podemos considerar en $\mathscr{L}^p(X, \Sigma, \mu, \mathbb{C})$ la relación de equivalencia según la cual dos funciones son equivalentes si coinciden en todo X salvo en un conjunto de medida μ nula. Este espacio cociente lo denotaremos por $L^p(\mu)$ o $L^p(X)$, que es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, y de hecho, un espacio de Banach con la norma $||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$.

1.1.1. Medida exterior

Si en la definición de medida sustituimos la condición de aditividad numerable por la de subaditividad numerable, podemos obtener nuevas aplicaciones definidas en las partes de X, $\mathscr{P}(X)$: las medidas exteriores. Por otro lado, restringir el dominio de una medida exterior de cierta forma constituye una herramienta para construir una medida.

Definición 1.6. Sea X un conjunto, y $\mathscr{P}(X)$ el conjunto de las partes de X. Una *medida exterior en* X es una aplicación $\mu^* : \mathscr{P}(X) \to [0, +\infty]$ que satisface

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
(ii) Si $A \subseteq B \subseteq X$, entonces $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(iii) Si $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathscr{P}(X)$, entonces $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

Por tanto una medida exterior μ^* en X es una aplicación de $\mathscr{P}(X)$ en $[0,+\infty]$ que es monótona, numerablemente subaditiva y vale 0 en $\emptyset$.

Ya que definimos la medida exterior en las partes de X, podríamos preguntarnos si se cumplen las condiciones de medida en una familia más pequeña de subconjuntos de X. Esto nos lleva al concepto de conjunto μ^*-medible, que nos permite dar una respuesta satisfactoria a través del teorema posterior, cuya demostración se puede consultar en [3, p. 15-17].

Definición 1.7. Sea X un conjunto, y μ^* una medida exterior en X. Diremos que $B \subseteq X$ es μ^*-*medible* si $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$ para todo $A \subseteq X$.

Observación 1.8. Por la subaditividad de μ^* es suficiente comprobar que $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c)$ para todo $A \subseteq X$ tal que $\mu^*(A) < +\infty$.

Teorema 1.9. Sea X un conjunto, μ^* una medida exterior en X y denotemos por $\mathscr{M}_{\mu^*}$ a la colección de subconjuntos μ^*-medibles de X. Entonces

(i) $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una $\sigma-$álgebra.

(ii) La restricción de μ^* a $\mathscr{M}_{\mu^*}$ es una medida en $\mathscr{M}_{\mu^*}$.

1.1.2. Medidas complejas

Atendiendo a la Definición 1.1, tiene sentido ampliar el ámbito en el que una medida toma valores si en él se pueden considerar series convergentes, por ejemplo, medidas con valores en $\mathbb{C}$, o en espacios normados... En nuestro caso, nos referiremos al caso de medidas con valores complejos.

Definición 1.10. Sea (X,Σ) un espacio medible. Diremos que $\mu : \Sigma \to [-\infty,+\infty]$ es una *medida con signo* si es numerablemente aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$. Del mismo modo, $\mu : \Sigma \to \mathbb{C}$ es una *medida compleja* si es numerablemente aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$.

Se puede demostrar (*Teorema de descomposición de Hahn*) que dado un espacio de medida (X,Σ) y una medida con signo μ, existen dos conjuntos disjuntos, cuya unión es X, tales que todo subconjunto medible de uno tiene medida positiva (conjunto P), y todo subconjunto medible del segundo tiene medida negativa (conjunto N). De esta forma, pueden definirse dos medidas positivas μ^+, μ^- (siendo al menos una de ellas finitas) tales que $\mu^+(A) = \mu(A \cap P)$ y $\mu^-(A) = -\mu(A \cap N)$ para todo conjunto medible A. La prueba de este resultado y de la siguiente consecuencia se puede consultar en [3, p. 116-117].

Teorema 1.11 (Teorema de descomposición de Jordan)**.** Toda medida con signo es diferencia de dos medidas positivas, siendo alguna de ellas finita.

Toda medida compleja se puede escribir como $\mu = \mu' + i\mu''$, donde μ' y μ'' son medidas con signo (necesariamente finitas). Por tanto, por el Teorema 1.11,

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4,$$

donde μ_1, μ_2, μ_3 y μ_4 son medidas positivas finitas.

Definición 1.12. Sea μ una medida compleja. La *variación de* μ, $|\mu|$, es la medida positiva tal que, para todo A medible, $|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\mu(A_j)| : \{A_j\}_{j=1}^{n} \text{ es una partición de } A\right\}$. Llamaremos *variación total de* μ a $||\mu|| = |\mu|(X)$.

Si $\mu = \mu^+ - \mu^-$ es una medida con signo, definimos $L^1(\mu) = L^1(\mu^+) \cap L^1(\mu^-)$, y si $f \in L^1(\mu)$, $\int f d\mu = \int f d\mu^+ - \int f d\mu^-$. Del mismo modo, si $\mu = \mu' + i\mu'' = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, definimos $L^1(\mu) = L^1(\mu') \cap L^1(\mu'')$ de forma que $\int f d\mu = \int f d\mu' + i \int dd\mu'' = \int f d\mu_1 - \int f d\mu_2 + i \int f d\mu_3 - i \int f d\mu_4$.

Además se puede consultar en [3, p. 118-121], que:

- Si μ es una medida compleja, $|\mu|$ es finita.
- Si A es un conjunto medible, $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$, y $|\mu|$ es la medida positiva más pequeña que cumple la desigualdad.
- Si μ es una medida compleja y $f \in L^1(\mu)$, $|\int f d\mu| \leq \int |f| d|\mu|$.

1.1.3. Medida en espacios localmente compactos

Decimos que un espacio topológico X es de *Hausdorff* si dados $x, y \in X$, $x \neq y$, existen dos abiertos U y V tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Por otro lado, X es *localmente compacto* si para cada $x \in X$ existe un entorno de x con clausura compacta. El principal objetivo de este trabajo, el Análisis de Fourier en grupos, necesita de espacios con estas dos propiedades. A continuación, enunciamos algunos resultados puramente topológicos. Sus demostraciones se pueden encontrar en [3, cap. 7].

Proposición 1.13. Sea X un espacio topológico Hausdorff. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

(i) Sean K y L dos compactos disjuntos de X. Entonces existen dos abiertos disjuntos de X, U y V tales que $K \subseteq U$ y $L \subseteq V$.

(ii) Si X es localmente compacto y $x \in X$, entonces, dado U un entorno de x, existe un entorno de x con clausura compacta contenida en U.

(iii) Si X es localmente compacto, K es un compacto de X, y U un abierto de X tal que $K \subseteq U$, entonces existe un abierto V en X con clausura compacta tal que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(iv) Si K es un compacto de X, y U_1 y U_2 son dos abiertos de X tales que $K \subseteq U_1 \cup U_2$, entonces existen dos compactos K_1 y K_2 tales que $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \subseteq U_1$ y $K_2 \subseteq U_2$.

Si X es un espacio localmente compacto Hausdorff, podemos considerar los siguientes espacios de funciones: el conjunto de las funciones continuas que se anulan en el infinito

$$C_0(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continua } : \forall \varepsilon > 0 \text{ existe un compacto } K \subseteq X \text{ tal que } |f(x)| < \varepsilon \text{ si } x \in X \setminus K\},$$

y el conjunto de funciones continuas de soporte compacto,

$$C_c(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ continua } : \text{ existe un compacto } K \text{ tal que } \operatorname{supp}(f) = K\}.$$

Estos espacios son espacios normados con la norma del infinito definida por $||f||_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, de hecho, $C_0(X)$ es un espacio de Banach, mientras que $C_c(X)$ no lo es [8, p. 217].

Proposición 1.14. Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, entonces $C_c(X)$ es un subespacio denso de $C_0(X)$.

Es espacios localmente compactos, ciertas medidas que guardan relación con estos espacios de funciones continuas.

Definición 1.15. Sea X es un espacio localmente compacto Hausdorff, y $\mathscr{B}(X)$ es la $\sigma-$álgebra de Borel. Una medida $\mu : \mathscr{B}(X) \to [0,+\infty]$ es una *medida de Radon* si cumple las siguientes condiciones:

(i) $\mu(K) < +\infty$ para todo K compacto de X.
(ii) $\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subseteq U$ y U es abierto$\}$ para todo $A \in \mathscr{B}(X)$ (es *regular exterior*),
(iii) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U$ y K es compacto$\}$ para todo abierto U (es *regular interior*).

Asímismo, diremos que μ es una *medida de Radon con signo* si es una medida de Borel con signo que es diferencia de dos medidas de Radon positivas; y que es una *medida de Radon compleja* si es una medida de Borel compleja cuya parte real y parte imaginaria son medidas de Radon con signo finitas. Diremos que μ es *regular* si además (iii) se cumple para todo conjunto medible Borel.

Observación 1.16. Ya que toda medida compleja es $\sigma-$finita (de hecho, finita), se puede demostrar que toda medida compleja de Radon es regular (ver [8, p. 216]).

El primer de los teoremas que nos permite relacionar espacios de funciones y medidas es el siguiente.

Teorema 1.17 (Teorema de Representación de Riesz)**.** Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff. Si I es un funcional lineal positivo ($I(f) \geq 0$ siempre que $f \geq 0$) definido en $C_c(X)$, existe una única medida de Radon μ en X tal que $I(f) = \int f d\mu$ para toda $f \in C_c(X)$.

Denotaremos por $M(X)$ al conjunto de las medidas de Radon complejas definidas en X. Se puede demostrar que es un espacio de Banach con la norma de la variación total, y que $\mu \in M(X)$ si y solo si $|\mu| \in M(X)$ [8, p. 222]. Este conjunto es de especial relevancia por el siguiente resultado [8, p. 223].

Teorema 1.18 (Teorema de Representación de Riesz, versión compleja)**.** Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, $\mu \in M(X)$, $f \in C_0(X)$ y definamos el funcional $I_\mu(f) = \int f d\mu$. Entonces la aplicación $\mu \mapsto I_\mu$ es un isomorfismo isométrico de $M(X)$ en $C_0(X)^*$.

Es decir, podemos identificar los funcionales de $C_0(G)$ con los elementos de $M(X)$. Que la aplicación del enunciado sea una isometría significa que $||\mu|| = ||I_\mu||$, donde $||I_\mu|| = \sup\{|I_\mu(x)| : x \in B_{C_0(X)}\}$.

Si μ y ν son dos medidas positivas en (X,Σ), decimos que ν es *absolutamente continua respecto a* μ ($\nu << \mu$) si para todo $A \in \Sigma$ para el que $\mu(A) = 0$, entonces se cumple $\nu(A) = 0$. Si

ν es una medida compleja, decimos que ν es absolutamente continua respecto a μ si $|\nu| << \mu$. A continuación enunciamos dos resultados relacionados con este concepto. La demostración de estos resultados se puede encontrar en [3, p. 126] y [3, p. 205] respectivamente.

Proposición 1.19. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, f una función perteneciente a $L^1(\mu)$ y sea ν una medida con signo finita o compleja tal que $\nu(A) = \int_A f d\mu$. Entonces $|\nu|(A) = \int_A |f| d\mu$ para todo $A \in \Sigma$.

Proposición 1.20. Sea X un espacio localmente compacto, y se μ una medida de Radon en X. Dada $f \in L^1(\mu)$, definimos la medida compleja ν_f a través de la fórmula $\nu_f(A) = \int_A f d\mu$ para todo $A \in \mathscr{B}(X)$. Entonces la aplicación induce una isometría lineal entre $L^1(\mu)$ y el subespacio de $M(X)$ formado por las medidas absolutamente continuas respecto a μ.

El espacio de funciones $C_c(X)$ también se puede ver como subespacio de $L^p(\mu)$ para $p \in [1, +\infty)$.

Teorema 1.21. Sea X un espacio localmente compacto Hausdorff, y μ una medida de Radon. Entonces $C_c(X)$ es denso en $L^p(\mu)$ donde $1 \leq p < \infty$.

Demostración. La demostración de este resultado se puede consultar en [8, p.217]. □

Dados dos espacios localmente compactos de Hausdorff X e Y con dos medidas de Radon μ y ν respectivamente, podríamos considerar el producto de estas medidas $\mu \times \nu$. Sin embargo, si X o Y no cumplieran el segunda axioma de numerabilidad (tener una base de la topología numerable), podría ocurrir que $\mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(Y) \subsetneq \mathscr{B}(X \times Y)$, y ya que el producto está definido en $\mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(Y)$, $\mu \times \nu$ no sería una medida de Borel, y por tanto, no sería de Radon.

Sin embargo, por el Teorema 1.17, el funcional $I(f) = \int f d(\mu \times \nu) = \int \int f d\mu d\nu = \int \int f d\nu d\mu$ definido en $C_c(X \times Y)$ (se puede demostrar que, efectivamente, está bien definido) determina una medida, el *producto de Radon de* μ *y* ν, cuyo dominio es $\mathscr{B}(X \times Y)$. De ahora en adelante, escribiremos $\mu \times \nu$ para referirnos a esta medida. Con esta definición, podemos establecer un resultado similar al Teorema de Fubini. Para ello, dada una función $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ definimos f^x y f^y las aplicaciones determinadas por $f^x(y) = f(x,y)$ y $f^y(x) = f(x,y)$ respectivamente.

Teorema 1.22 (Teorema de Fubini-Tonelli)**.** Sean μ y ν dos medidas de Radon $\sigma-$finitas en X e Y respectivamente, y sea f una función medible Borel en $X \times Y$.

(i) Entonces las aplicaciones f^x y f^y son medibles Borel para cada x e y.
(ii) Si $f \geq 0$, entonces las aplicaciones $x \mapsto \int f^x d\nu$ y $y \mapsto \int f^y d\mu$ son medibles Borel en X e Y respectivamente.
(iii) Si $f \in L^1(\mu \times \nu)$, entonces $f^x \in L^1(\nu)$ salvo en un conjunto de medida μ nula, $f^y \in L^1(\mu)$ salvo en un conjunto de medida ν nula, y $x \mapsto \int f^x d\nu$ y $y \mapsto f^y d\mu$ están en $L^1(\mu)$ y $L^1(\nu)$ respectivamente.
(iv) Si se cumplen las hipótesis del apartado (ii) o del (iii), entonces

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \int f d\mu d\nu = \int \int f d\nu d\mu.$$

1.2. Redes y topología débil y débil*

Por los conocimientos adquiridos a lo largo del Grado, sabemos que podemos caracterizar la topología a través de sucesiones en espacios normados, espacios métricos, etc., en general, espacios topológicos en los que todo punto tiene una base de entornos numerable. Sin embargo, en otros casos, podemos estudiar la topología a través de *redes*, una generalización de las sucesiones. En particular, caracterizaremos la topología débil y débil* en espacios normados.

Definición 1.23. Un *conjunto dirigido I* es un conjunto no vacío con un orden parcial $\leq$ que satisface que para cada $\alpha, \beta \in I$, existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leq \gamma$ y $\beta \leq \gamma$.

Sea X un conjunto no vacío y I un conjunto dirigido, una *red* en X es una aplicación $\phi : I \to X$. En lugar de $\phi(\alpha)$, escribiremos x_α, y denotaremos a la red por $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Sea J otro conjunto dirigido y $\psi : J \to I$ una aplicación que satisface que para todo $\alpha_0 \in I$, existe $\beta_0 \in J$ tal que $\alpha_0 \leq \phi(\beta)$ siempre que $\beta_0 \leq \beta$. Diremos entonces que $\{x_{\phi(\beta)}\}_{\beta\in J}$ es una *subred de* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Si X es un espacio topológico, diremos que la red $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *converge a* $x \in X$ ($x_\alpha \to x$) si para cada entorno U de x existe $\alpha_0 \in I$ tal que si $\alpha_0 \leq \alpha$ entonces $x_\alpha \in U$. En este caso, diremos que x es un *límite de* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$, y $x_\alpha \to x$.

Diremos que x es un *punto de aglomeración de* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ si para cada entorno $U(x)$ de x y cada $\alpha_0 \in I$, existe $\alpha \in I$ tal que $\alpha_0 \leq \alpha$ y $x_\alpha \in U(x)$.

A continuación, enunciamos algunas propiedades de redes en espacios topológicos, cuya demostración se puede consultar en [11, p. 143-152].

Proposición 1.24. Sea X un espacio topológico. Entonces se cumple:

(i) X es Hausdorff si y sólo si toda red convergente en X tiene un único límite.

(ii) Un punto $x \in X$ es un punto de aglomeración de una red si y sólo si esa red posee una subred convergente a x.

(iii) Un subconjunto S de X es cerrado si y sólo si para cada red contenida en S convergente, su límite pertenece a S.

(iv) Un subconjunto S de X es compacto si y sólo si cada red de S tiene un punto de aglomeración en S.

Para el estudio de la topología débil, se ha seguido [6].

Definición 1.25. Sea X un espacio normado. La *topología débil* (denotada por w) en X es la topología generada por los conjuntos

$$U(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

para cualesquiera $x_0 \in X$, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Del mismo modo, la *topogía débil** (denotada por w^*) en X^* es la topología generada por los conjuntos

$$U(f_0, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{f \in X^* : |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$$

para cualesquiera $f_0 \in X^*$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Proposición 1.26. Sea X un espacio normado.

(i) Si $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una red en X^*, $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f_0$ si y sólo si $f_\alpha(x) \to f_0(x)$ para todo $x \in X$.
(ii) Si $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es una red en X, $x_\alpha \xrightarrow{w} x_0$ si y sólo si $f(x_\alpha) \to f(x_0)$ para todo $f \in X^*$.

Demostración. (i) Supongamos que $f_\alpha(x) \to f_0(x)$ para todo $x \in X$. Si U es un entorno de f_0 en la topología w^*, entonces existe un abierto $U(f_0,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon) \subseteq U$. Como $f_\alpha(x_i) \to f_0(x_i)$ para cada $i = 1,\ldots,n$, existe un α_i tal que para todo $\beta \geq \alpha_i$ se tiene $|f_\alpha(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon$. Por inducción y la definición de red, podemos encontrar un $\alpha_0 \geq \alpha_1,\ldots,\alpha_n$. De este forma, para todo $\beta \geq \alpha_0$, $|f_\alpha(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon$ para $i = 1,\ldots,n$, es decir, si $\beta \geq \alpha$ $f_\alpha \in U(f_0,x_1,\ldots,x_n,\varepsilon) \subseteq U$. Como U era arbitrario, esto demuestra que $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f_0$.

Recíprocamente, supongamos que $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f_0$ y fijemos $x \in X$. Dado $\varepsilon > 0$, $U(f_0,x,\varepsilon)$ es un entorno de f_0 de la topología w^*. Ya que $f_\alpha \xrightarrow{w^*} f_0$, existe un α_0 tal que si $\beta \geq \alpha_0$ entonces $f_\alpha \in U(f_0,x,\varepsilon)$, es decir, $|f_\alpha(x) - f_0(x)| < \varepsilon$, y por tanto, $f_\alpha(x) \to f_0(x)$.

La prueba de (ii) es similar a la de (i), pero usando los w-abiertos $U(x_0,f_1,\ldots,f_n,\varepsilon)$. □

Por último, enunciamos dos resultados que utilizaremos en las demostraciones de la medida de Haar en grupos compactos [6, p.71-72]. Para introducir estos resultados, recordamos dos conceptos. Decimos que un espacio topológico X es *separable* si tiene un subconjunto denso y numerable, es decir, existe $Y \subseteq X$ numerable tal que $\overline{Y} = X$. Por otro lado, diremos que un espacio topológico es *metrizable* si su topología puede ser inducida por una métrica.

Teorema 1.27 (Alaoglu)**.** Sea X un espacio de Banach. Entonces B_{X^*} es w^*-compacto.

Proposición 1.28. Sea K un espacio métrico compacto. El espacio de Banach $C(K)$ es separable si y sólo si K es metrizable.

1.3. Álgebras de Banach

Esta sección está dedicada al estudio de las álgebras de Banach sobre $\mathbb{C}$. Suponer que las álgebras son complejas en lugar de ser reales constituye un importante beneficio, pues la teoría sobre $\mathbb{C}$ es más rica: podemos aplicar la teoría de funciones holomorfas, y nos aseguramos que el espectro es no vacío.

Definición 1.29. Un *álgebra A sobre* $\mathbb{C}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ en el que se define un producto que cumple para todos $x,y,z \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$:

(i) $x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$.
(ii) $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$.
(iii) $(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$.
(iv) $\alpha(x\cdot y) = (\alpha x)\cdot y = x\cdot(\alpha y)$.

Si $x\cdot y = y\cdot x$ para todo $x,y \in A$, diremos que A es *conmutativa*. Por otro lado, si A contiene un elemento unidad e tal que $xe = ex = x$ para todo $x \in A$, diremos que es *unitaria*. Diremos que A es un *álgebra normada* si está provista de una norma tal que $||x\cdot y|| \leq ||x||||y||$ para todo $x,y \in A$.

Si con esta norma, $(A, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach, entonces diremos que A es un *álgebra de Banach*.

Si A es un álgebra sobre $\mathbb{C}$, podemos considerar un tipo especial de aplicación que, aunque será referida pocas veces a lo largo de este trabajo, nos será útil más adelante. Una *involución sobre* A es una aplicación $*: A \to A$, $x \mapsto x^*$ que cumple

(i) $(x+y)^* = x^* + y^*$ y $(\alpha x)^* = \overline{\alpha} x^*$.
(ii) $(xy)^* = y^* x^*$ y $(x^*)^* = x$.

Una subálgebra de A es *autoadjunta* si es cerrada para la involución.

Generalmente, en el estudio de álgebras de Banach, se supone la existencia de un elemento unidad [18], y luego se pueden extender los resultados al caso no unitario [8]. Sin embargo, nosotros seguiremos la línea más general de [10], para lo que tendremos que relacionar cualquier álgebra no unitaria con otra que sí lo sea. Si A es un álgebra de Banach, entonces $A_e = A \times \mathbb{C}$ es un álgebra conmutativa con unidad $e = (0,1)$ con las operaciones suma definida componente a componente y el producto

$$(x,\lambda)(y,\mu) = (xy + \lambda y + \mu x, \lambda \mu)$$

para todo $x, y \in A$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Además, si A es un álgebra normada, podemos definir una norma dada por $||(x,\lambda)|| = ||x|| + |\lambda|$. Es fácil comprobar que con esta norma, A_e es de Banach si A lo es. Ahora, podemos introducir los conceptos básicos.

Definición 1.30. Sea A un álgebra sobre $\mathbb{C}$ con elemento unidad e. Un elemento $x \in A$ se dice *invertible* si existe $y \in A$ tal que $xy = yx = e$. En este caso diremos que y es el *inverso de* x, y lo denotaremos por x^{-1}. De este modo, podemos considerar el *espectro de* x *en* A:

$$\sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ no es invertible}\}.$$

Si A es no unitaria, definimos $\sigma_A(x) = \sigma_{A_e}(x)$. Por otro lado, si A es un álgebra normada, definimos el *radio espectral de* $x \in A$ como

$$r_A(x) = \operatorname{ínf}\{||x^n||^{1/n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Esta definición de radio espectral es la dada por [10], y no coincide con la de [18] y [8], que lo definen como el máximo del módulo de los elementos del espectro. El siguiente resultado establece que son equivalentes.

Teorema 1.31. Sea A un álgebra de Banach y sea $x \in A$. Entonces el espectro $\sigma(x)$ de x es un subconjunto no vacío compacto de $\mathbb{C}$, y $r(x) = \operatorname{lím}_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} = \operatorname{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$.

Definición 1.32. Dada una álgebra de Banach conmutativa A, definimos el conjunto $\Delta(A)$ como el conjunto de los funcionales multiplicativos no idénticamente nulos.

Si $\phi \in \Delta(A)$, donde A es un álgebra con unidad e es fácil comprobar que $\phi(x) \neq 0$ para todo x invertible y $\phi(e) = 1$. Por esta razón, si A es un álgebra no unitaria, cada $\phi \in \Delta(A)$ tiene una única extensión a un elemento $\tilde{\phi} \in \Delta(A_e)$. Si además consideramos el homomorfismo $\phi_\infty : A_e \to \mathbb{C}$ dado por $\phi_\infty(x+\lambda e) = \lambda$, e identificamos cada elemento $\phi \in \Delta(A)$ con su extensión, podemos escribir

$$\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\phi_\infty\}.$$

A continuación, enunciamos un resultado que nos será útil más adelante.

Lema 1.33. Sea A un álgebra de Banach. Todo $\phi \in \Delta(A)$ es un funcional lineal acotado en A, y $|\phi(x)| \leq r_A(x)$ para todo $x \in A$. Por tanto, $||\phi|| \leq 1$ y $||\phi|| = 1$ si A es unitaria.

Por último, demostraremos el teorema fundamental de esta sección.

Definición 1.34. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. La fórmula

$$\hat{x}(\phi) = \phi(x)$$

asigna a cada $x \in A$ la función $\hat{x} : \Delta(A) \to \mathbb{C}$, que llamaremos la *Transformada de Gelfand de x*.

La *topología de Gelfand de* $\Delta(A)$ es la topología más fina para la que cada $\hat{x}$ es continuo. A veces nos referiremos a la Transformada de Gelfand como la aplicación $x \mapsto \hat{x}$. Diremos que A es *semisimple* si $x \neq 0$ implica $\hat{x} \neq 0$.

Observación 1.35. La topología de Gelfand coincide con la topología relativa que tiene $\Delta(A)$ como subconjunto de A^* con la topología w^*.

Teorema 1.36. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces

(i) $\Delta(A)$ es Hausdorff.
(ii) $\Delta(A)$ es compacto si A es unitaria.
(iii) $\Delta(A)$ es un espacio localmente compacto.
(iv) $\Delta(A_e) = \Delta(A) \cup \{\phi_\infty\}$ es la compactificación de Alexandrov de $\Delta(A)$.

Dado un espacio topológico X, una compactificación es un par (Y,c) donde Y es un compacto, $c : X \to Y$ es una embebimiento, es decir, una función continua de forma que $c' : X \to c(X)$, donde $c'(x) = c(x)$ para todo $x \in X$, es un homeomorfismo, y $c(X)$ es denso en Y. Una compactificación relevante es la de Alexandrov, o compactificación por un punto: si X es un espacio localmente compacto de Hausdorff, existe una compactificación (Y,c) tal que $\overline{c(X)} \setminus c(X)$ es un conjunto unipuntual $\{\infty\}$. Por construcción, los entornos de ∞ son de la forma $\{\infty\} \cup (X \setminus F)$, donde F es un compacto de X. Los detalles de estos hechos no entran dentro de este trabajo, pero se pueden consultar en [5]. Ahora que hemos resuelto esta cuestión, continuamos con la prueba del teorema.

Demostración. Utilizaremos la notación de los entornos de la topología w^* (ver Definición 1.25).
(i) Veamos primero que $\Delta(A)$ es un espacio Hausdorff. Si $\phi_1, \phi_2 \in \Delta(A)$, $\phi_1 \neq \phi_2$, entonces para algún $x \in A$, $\delta = \frac{1}{2}|\phi_1(x) - \phi_2(x)| > 0$, por lo que $U(\phi_1, x, \delta) \cap U(\phi_2, x, \delta) = \emptyset$.

(ii) Por el Lema 1.33, el Teorema 1.27 y la Observación 1.35, es suficiente con demostrar que $\Delta(A)$ es un w^*-cerrado. Sea φ un elemento de la clausura (con la topología w^* de $\Delta(A)$). Fijados $x, y \in A$ y $\varepsilon > 0$, tomamos el entorno $U := U(\varphi, e, x, y, xy, \varepsilon)$ que debe cumplir $U \cap \Delta(A) \neq \emptyset$ (por estar φ en la clausura). Sea $\psi \in U \cap \Delta(A)$. Entonces $|1-\varphi(e)| = |\psi(e)-\varphi(e)| < \varepsilon$, y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, debe cumplirse $\varphi(e) = 1$. Por otro lado, se tiene

$$\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y) = (\varphi(xy) - \psi(xy)) + (\psi(y) - \varphi(y))\psi(x) + (\psi(x) - \varphi(x))\varphi(y),$$

que implica que $|\varphi(xy) - \varphi(x)\varphi(y)| < (1 + ||x|| + |\varphi(y)|)\varepsilon$, es decir, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. En definitiva, $\varphi \in \Delta(A)$.

(iii) Dado $\phi \in \Delta(A)$, $\varepsilon > 0$ y $F \subseteq A$ finito, los entornos básicos de $\Delta(A_e)$ son

$$U_e(\phi, F, \varepsilon) = \begin{cases} U(\phi, F, \varepsilon) \cup \{\phi_\infty\} & \text{si } |\phi(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in F \\ U(\phi, F, \varepsilon) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es evidente que entonces la topología relativa en $\Delta(A)$ coincide con la topología de Gelfand en $\Delta(A)$. Además, $\{\phi_\infty\}$ es cerrado en $\Delta(A_e)$, por lo que $\Delta(A)$ es abierto en $\Delta(A_e)$ y $\Delta(A)$ es localmente compacto.

(iv) Dado $x \in A$ y $\varepsilon > 0$, entonces $U_e(\phi_\infty, x, \varepsilon) = \{\phi_\infty\} \cup \{\phi \in \Delta(A) : |\phi(x)| < \varepsilon\} = \Delta(A_e) \setminus \{\phi \in \Delta(A_e) : |\phi(x)| \geq \varepsilon\}$. Por tanto, un entorno básico de ϕ_∞ es el complementario de la unión finita de conjuntos compactos, por lo que $\Delta(A_e)$ es la compactificación de Alexandrov de $\Delta(A)$. $\square$

Lema 1.37. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces, para cada $x \in A$,

$$\sigma_A(x) \setminus \{0\} \subseteq \hat{x}(\Delta(A)) \subseteq \sigma_A(x).$$

Además, si A es unitaria, $\hat{x}(\Delta(A)) = \sigma_A(x)$.

El Teorema 1.36 implica un resultado que resultará de gran importancia para determinar algunas cuestiones topológicas en el Capítulo 3. Sin embargo, antes incluimos una definición para entender su enunciado.

Definición 1.38. Sea A un conjunto y B un conjunto de funciones sobre A. Diremos que B *separa puntos de* A si dados $x, y \in A$, $x \neq y$, existe $f \in B$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Si B es un conjunto de funciones complejas, diremos que B *separa fuertemente puntos de* A si separa puntos de A y además, si dado $x \in A$, existe una función $f \in B$ tal que $f(x) \neq 0$.

Teorema 1.39. Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Entonces se cumple:

(i) La Transformada de Gelfand es una aplicación de A en $C_0(\Delta(A))$ tal que $||\hat{x}||_\infty \leq ||x||$.

(ii) La imagen de A por la Transformada de Gelfand separa fuertemente puntos de $\Delta(A)$.

Demostración. (i) Por el Teorema 1.36, $\Delta(A_e)$ es la compactificación de Alexandrov de $\Delta(A)$, y $\hat{x}(\phi_\infty) = 0$ para todo $x \in A$, por lo que $\hat{x} \in C_0(\Delta(A))$. Por el Lema 1.37, para todo $x \in A$,

$$||\hat{x}||_\infty = r_A(x) \leq ||x||.$$

(ii) Si $\hat{x}(\phi) = \phi(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces $\phi = 0$ y $\phi \notin \Delta(A)$. Si $\phi_1, \phi_2 \in C_0(\Delta(A))$, $\phi_1 \neq \phi_2$, existe $x \in A$ tal que $\hat{x}(\phi_1) \neq \hat{x}(\phi_2)$, pues si no, ϕ_1 y ϕ_2 serían iguales. $\square$

1.4. Grupos topológicos

Definición 1.40. Un *grupo* es un un conjunto no vacío G con una operación $\cdot$ que cumple las siguientes condiciones:

(i) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ si $a,b,c\in G$.
(ii) Existe un elemento $e\in G$ tal que $e\cdot a=a\cdot e=a$ para todo $a\in G$.
(iii) Para cada $a\in G$ existe un elemento $a^{-1}\in G$ tal que $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$.

Además, diremos que G es un grupo *abeliano o conmutativo* si $a\cdot b=b\cdot a$ si $a,b\in G$. Un *subgrupo* de un grupo G es un subonjunto de G que contiene a e y es cerrado para la operación $\cdot$ y para inversos.

Definición 1.41. Un *grupo topológico* es un grupo G en el que las aplicaciones $(x,y)\mapsto xy$ y $(x,y)\mapsto x^{-1}$ son continuas.

Observación 1.42. Aunque hemos enunciado las propiedas de grupo con notación multiplicativa, usaremos la notación aditiva si el grupo es abeliano. En este caso, el inverso de $a\in G$ se denotará por $-a$, y la condición de que un grupo sea un grupo topológico, será únicamente que la aplicación $(x,y)\to x-y$ sea continua.

A continuación, demostramos algunos resultados que nos serán útiles más adelante. Recordamos que si X es un espacio topológico y $x\in X$, una familia de abiertos es un *base de entornos de* x si cada $U\in\mathscr{U}$ es un entorno de x, y si V es un entorno de x, existe $U\in\mathscr{U}$ tal que $U\subseteq V$. Si G es un grupo topológico y $x\in G$, diremos que un entorno U de x es *simétrico* si $U=U^{-1}$.

Proposición 1.43. Sea G un grupo topológico y a un elemento de G. Entonces:

(i) Las aplicaciones $x\mapsto ax$, $x\mapsto xa$, y $x\mapsto x^{-1}$ son homeomorfismos de G en G.
(ii) Si $\mathscr{U}$ es una base de entornos de e, entonces $\{aU : U\in\mathscr{U}\}$ y $\{Ua : U\in\mathscr{U}\}$ son bases de entornos de a.
(iii) Si K y L son subconjuntos compactos de G, entonces aK, Ka, KL y K^{-1} son subconjuntos compactos de G.

Demostración. (i) Por continuidad de las aplicaciones $x\mapsto(x,a)$ y $x\mapsto(a,x)$, las aplicaciones del enunciado son continuas. Las funciones inversas son respectivamente $x\mapsto a^{-1}x$, $x\mapsto xa^{-1}$ y $x\mapsto x^{-1}$ que son continuas, por lo que son homeomorfismos. (ii) Es consecuencia de la continuidad de las traslaciones $x\mapsto ax$ y $x\mapsto xa$. (iii) aK, Ka y K^{-1} son compactos de G por la continuidad de las aplicaciones de (i), y KL es compacto por el Teorema A.1. □

Proposición 1.44. Sea G un grupo topológico, y sea U un entorno de e. Entonces:

(i) Existe un entorno de V de e tal que $VV\subseteq U$.
(ii) Existe un entorno simétrico de e contenido en U.

Demostración. (i) La aplicación $(x,y)\mapsto xy$ es continua, por lo que $W=\{(x,y) : xy\in U\}$ es un entorno de (e,e) en $G\times G$. Por tanto, existen dos entornos V_1 y V_2 de e tales que $V_1\times V_2\subseteq W$ (los conjuntos de esa forma son una base de la topología). Si definimos $V=V_1\cap V_2$, V es un entorno de

e en G que cumple $VV \subseteq U$. (ii) Ya que U es un entorno de e y la aplicación $x \mapsto x^{-1}$ es continua, U^{-1} es un entorno de e. De esta forma, $U \cap U^{-1}$ es un entorno simétrico de e y está contenido en U. □

Proposición 1.45. Sea G un grupo topológico, K un compacto de G y U un abierto de G que contiene a K. Entonces existen dos entornos V_R y V_L de e tales que $KV_R \subseteq U$ y $V_L K \subseteq U$.

Demostración. Dado $x \in K$, existe un entorno W_x de e tal que $xW_x \subseteq U$ (por la Proposición 1.43), y un entorno V_x de e tal que $V_x V_x \subseteq W_x$ (por la Proposición 1.44). Por tanto, $\{xV_x\}_{x \in K}$ es un recubrimiento de K, y por compacidad existe $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq K$ tal que $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$ cubren K. Si definimos $V_R = \cap_{i=1}^n V_{x_i}$, y $x \in K$, sabemos que existe un índice i tal que $x \in x_i V_{x_i}$, por lo que $xV_R \subseteq x_i V_{x_i} V_{x_i} \subseteq x_i W_{x_i} \subseteq U$. En definitiva, $KV_R \subseteq U$. El argumento para V_L es similar. □

Nosotros trabajaremos con una clase particular de grupos topológicos, que por sus propiedades, nos permitirán definir una medida invariante por traslaciones cuyo dominio es el $\sigma-$álgebra de Borel.

Definición 1.46. Un *grupo topológico localmente compacto* es un grupo topológico que es localmente compacto y Hausdorff. Asímismo, diremos que un grupo topológico es un *grupo topológico compacto* si es compacto y Hausdorff. Si un grupo topológico localmente compacto es conmutativo, diremos que es un *grupo LCA (locally compact abelian)*.

Decimos que una función $f : G \to \mathbb{C}$ es *uniformemente continua por la izquierda* si dado $\varepsilon > 0$, existe un entorno U de e tal que si $y \in xU$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. De forma análoga se define que una función sea *uniformemente continua por la derecha*.

Proposición 1.47. Sea G un grupo localmente compacto. Entonces, si $f \in C_c(G)$, f es uniformemente continua por la izquierda y por la derecha.

Demostración. Demostraremos la continuidad uniforme por la izquierda, pues la demostración de la continuidad uniforme por la derecha es análoga. Sea $f \in C_c(G)$ con soporte compacto K, y $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in K$ existe un entorno U_x de e tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ si $y \in xU_x$, y existe un entorno V_x de e tal que $V_x V_x \subseteq U_x$ por la Proposición 1.44 (i). Por compacidad, $K \subseteq \cup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$. Además por la Proposición 1.44 (ii), existe un entorno simétrico V de e tal que $V \subseteq \cap_{i=1}^n V_{x_i}$. Ahora, distinguimos varios casos. Si $x, y \notin K$, se cumple trivialmente $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Por otro lado, si $x \in K$ y $y \in xV$, entonces $y \in x_i V_i \subseteq x_i U_i$ para cierto i y $x \in x_i V_{x_i} \subseteq x_i U_{x_i}$. Por tanto $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(y)| < \varepsilon$. El último caso es el de $y \in K$ e $y \in xV$, pero por ser simétrico V, este es el caso en el que $y \in K$ y $x \in yV$, es decir, el caso anterior. □

Capítulo 2

La medida de Haar

El propósito principal de este capítulo es estudiar la medida de Haar en grupos localmente compactos. La existencia de una medida con estas propiedades fue probada por primera vez por Haar en 1933 para grupos con base numerable de la topología, y la unicidad fue probada por Von Neumann. Más tarde, el matemático francés André Weil probó que no es necasario suponer el segundo axioma de numerabilidad [27]. Debido a que la demostración de la existencia de la medida de Haar en grupos topológicos localmente compactos es un poco técnica, incluimos esta prueba en el Apéndice A. Sin embargo, en este capítulo demostramos la unicidad de la medida de Haar en grupos LCA, damos algunas propiedades, y desarrollaremos dos construcciones en grupos compactos bajo ciertas hipótesis.

Definición 2.1. Sea G un grupo localmente compacto, y μ una medida de Radon. Diremos que μ es una *medida de Haar por la izquierda* si es invariante por traslaciones por la izquierda, es decir, $\mu(xA) = \mu(A)$ para todo $x \in G$ y $A \in \mathscr{B}(G)$. Del mismo modo, μ es una *medida de Haar por la derecha* si $\mu(Ax) = \mu(A)$ para todo $x \in G$ y $A \in \mathscr{B}(G)$.

Observación 2.2. Tiene sentido considerar $\mu(Ax)$ y $\mu(xA)$ por la Proposición 1.43 y porque la continuidad implica ser medible Borel.

Sea $f : G \to \mathbb{C}$, y $x \in G$, entonces definimos la *trasladada por la izquierda de f* por x, ${}_xf : G \to \mathbb{C}$ dada por ${}_xf(t) = f(x^{-1}t)$, y la *trasladada por la derecha de f* por x dada por $f_x(t) = f(tx^{-1})$. Es fácil comprobar que si $x, y \in g$ entonces ${}_{xy}f =_x ({}_yf)$ y $f_{xy} = (f_x)_y$.

Proposición 2.3. Si G es un grupo localmente compacto, μ es una medida de Haar por la izquierda en G, y $f : G \to [0, +\infty]$ y $\mu-$integrable, entonces $\int {}_xf d\mu = \int f d\mu$. De la misma forma, si μ es una medida de Haar por la derecha, entonces $\int f_x d\mu = \int f d\mu$. Por tanto, $||f_x||_p = ||{}_xf||_p = ||f||_p$.

Demostración. Es evidente que $\int_x \chi_A d\mu = \mu(xA) = \mu(A) = \int \chi_A d\mu$ si A es un conjunto medible Borel. Por el Teorema de la Convergencia Monótona, esta igualdad se tiene para toda función f del enunciado. $\square$

2.1. Unicidad y propiedades

Ahora probamos la unicidad de la medida de Haar salvo producto por una constante positiva. Vemos el resultado para el caso conmutativo (por lo que adoptamos notación aditiva), pues el estudio del Análisis de Fourier que desarrollaremos es sobre grupos conmutativos, y la prueba en este caso es mucho más simple.

Observación 2.4. En las hipótesis del Teorema 1.22 se exige que las medidas en cuestión sean $\sigma-$finitas, condición que no se cumple en general para la medida de Haar. Una condición suficiente sería que G fuera $\sigma-$*compacto*, es decir, unión numerable de compactos. En general, esto no es así, pero podemos aplicar el Teorema 1.22 a la integral $\int_G \int_G f(x,y)dxdy$ si f se anula fuera de un $\sigma - compacto$. Un caso particular es el de las funciones de $C_c(G)$, y $L^1(G)$ [3, p. 299].

Teorema 2.5. Sea G un grupo localmente compacto conmutativo, y sean μ y ν dos medidas de Haar en G. Entonces existe $c > 0$ tal que $\nu = c\mu$.

Demostración. Sean $f, g \in C_c(G)$, entonces

$$\begin{aligned}
\int f d\mu \cdot \int g d\nu &= \int\int f(x)g(y)d\mu(x)d\nu(y) = \int\int f(x+y)g(y)d\mu(x)d\nu(y) \\
&= \int\int f(y)g(y-x)d\nu d\mu(x) = \int\int f(y)g(-x)d\mu(x)d\nu(y) \\
&= \int f(y)d\nu(y) \cdot \int g(-x)d\mu(x)
\end{aligned}$$

Si además $g \geq 0$ y no es idénticamente nula, podemos definir $c = \int g(y)d\nu(y) / \int g(-x)d\mu(x)$, y entonces $\int f d\nu = c \int f d\nu$, por lo que $\nu = c \cdot \mu$. $\square$

Corolario 2.6. Sea m una medida de Haar en G, y $E \in \mathscr{B}(G)$. Entonces $m(E) = m(-E)$.

Demostración. Si tomamos $m'(E) = m(E^{-1})$, m' es una medida de Haar en G, por lo que existe una constante c tal que $m(E^{-1}) = c \cdot m(E)$ para todo conjunto de Borel E. Tomando E un conjunto de Borel simétrico, tenemos que $c = 1$. $\square$

Por último, demostramos algunos resultados que utilizaremos en el siguiente capítulo, y que justifica el razonamiento del Teorema anterior.

Proposición 2.7. Sea G un grupo localmente compacto y μ una medida de Haar por la izquierda en G. Entonces $\mu(U) > 0$ para todo abierto de G, y para toda $f \in C_c(G)$ no negativa y no idénticamente nula se cumple $\int f d\mu > 0$.

Demostración. Por construcción de la medida de Haar, existe un compacto K tal que $\mu(K) > 0$. Dado una abierto no vacío U, $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} x_i U$ para ciertos $x_i \in G$ por compacidad. Por tanto, $\mu(K) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(x_i U) = n\mu(U)$, es decir, $\mu(U) > \mu(K)/n > 0$.

Sea f como en el enunciado. Por continuidad de f existe $\varepsilon > 0$ y un abierto no vacío tal que $f \geq \varepsilon \chi_U$, por lo que $\int f d\mu \geq \varepsilon\mu(U) > 0$. $\square$

Corolario 2.8. Sean G un grupo localmente compacto, $f,g : G \to \mathbb{C}$ funciones continuas, y μ una medida de Haar por la izquierda en μ. Si $f = g$ salvo en un conjunto de medida μ nula, entonces $f = g$.

Demostración. Por continuidad de f y g, el conjunto $U := \{x \in G : f(x) \neq g(x)\}$ es abierto. Si $U = \emptyset$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in G$, y en otro caso $f(x) \neq g(x)$ para todo $x \in U$, pero por la Proposición 2.7, $\mu(U) > 0$, en contradicción con el enunciado. □

2.2. Dos construcciones de la medida de Haar en grupos compactos

Debido a la construcción un tanto tediosa de la medida de Haar en grupos localmente compactos, en esta sección daremos dos elegantes demostraciones de la medida de Haar en grupos compactos bajo ciertas hipótesis, cada una de las cuales puede resolverse en poco más de una página.

Como veremos más adelante, podemos suponer que la medida de Haar en un compacto es una medida de probabilidad. Necesitaremos algunas nociones de convexidad [21] y funciones semicontinuas [1], para extraer propiedades del conjunto

$$P(G) = \{\mu \in M(G) : ||\mu|| = \mu(1) = 1\},$$

y además debemos introducir alguna notación. Dada $\mu \in M(G)$, $f : G \to \mathbb{C}$ y $g \in G$, consideramos la medida $\tau_g\mu$ dada por $\tau_g\mu(f) = \mu({}_gf)$. Asímismo, definimos la medida $\mu\tau_g$ determinada por la expresión $(\mu\tau_g)(f) = \mu(f_g)$. Antes de estudiar el conjunto $P(G)$, introducimos los conceptos necesarios.

Definición 2.9. Sea X un espacio vectorial, y $C \subseteq X$. Diremos que C es convexo si para cualesquiera $x,y \in C$, si $\theta \in [0,1]$, entonces $\theta x + (1-\theta)y \in C$.

Definición 2.10. Sea X un espacio vectorial, y $C \subseteq X$. Una función $f : C \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* si para todo $x,y \in C$ y $\theta \in [0,1]$ se cumple

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta f(x) + (1-\theta)f(y). \tag{2.1}$$

Diremos que $f : C \to \mathbb{R}$ es *estrictamente convexa* si la desigualdad (2.1) es estricta siempre que $x \neq y$ y $\theta \in (0,1)$.

Definición 2.11. Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \to [-\infty, +\infty]$ es:

(i) *inferiormente semicontinua* (l.s.c., lower semicontinuous function) si para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \leq c\}$ es cerrado.
(ii) *superiormente continua* (u.s.c., upper semicontinuous functions) si para cada $c \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in X : f(x) \geq c\}$ es cerrado.

Es evidente que una función continua es l.s.c. y u.s.c.

Proposición 2.12. Sea $\{f_i\}_{i\in I}$ una familia de funciones l.s.c., $f_i : X \to \mathbb{R}$, y sea $f : X \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sup\{f_i(x) : i \in I\}$. Entonces f es una función l.s.c.

Demostración. Basta comprobar que $f^{-1}((-\infty, c])$ es cerrado. Observemos que

$$\{x \in X : f(x) \leq c\} = \bigcap_{i\in I}\{x \in X : f_i(x) \leq c\},$$

que es una interesección arbitraria de cerrados, y por tanto, es cerrado. □

Proposición 2.13. Sea K un espacio topológico compacto, y $f : K \to \mathbb{R}$ una función l.s.c.. Entonces f alcanza un mínimo en el compacto.

Demostración. Definamos para cada $c \in f(K)$ el conjunto $F_c = \{x \in K : f(x) \leq c\}$. Como f es l.s.c., cada conjunto F_c es cerrado, y como cada c pertenece a $f(K)$, la familia $\{F_c : c \in f(K)\}$ tiene la propiedad de la intersección finita (cualquier intersección de un número finito de elementos en no vacía). Por ser K compacto, $\cap_{c\in f(K)} F_c$ es un conjunto no vacío y compacto, por lo que existe un mínimo. □

Consideraremos el conjunto de medidas de probabilidad de G:

$$P(G) = \{\mu \in M(G) : ||\mu|| = \mu(1) = 1\}.$$

Demostraremos que este es un conjunto w^*-compacto y convexo. Veamos que primero que es w^*-cerrado. Por la Proposición 1.24, es equivalente a que toda red convergente que esté contenida en $P(G)$ sea convergente en $P(G)$. Sea $(\mu_\alpha)_{\alpha\in I}$ una red contenida en $P(G)$, convergente a $\mu \in M(G)$. Por la Proposición 1.26 (i), $\mu_\alpha(f) \to \mu(f)$ para toda $f \in C(G)$. En particular, $\mu_\alpha(1) = 1 \to \mu(1)$, por lo que $\mu(1) = 1$, y $\mu \in P(G)$. Por otro lado, ya que $P(G) \subseteq B_{M(G)}$, por el Teorema 1.27, $P(G)$ es w^*-compacto. La convexidad se sigue de que si $\mu, \nu \in P(G)$ y $0 \leq \lambda \leq 1$, entonces $(1-\lambda)\mu(1) + \lambda\nu(1) = (1-\lambda) + \lambda = 1$.

Por otro lado debemos comprobar que las medidas de probabilidad aquí definidas, coinciden con las de la definición tradicional. Esto lo asegura el siguiente lema, cuya demostración es de elaboración propia.

Lema 2.14. Sea G un grupo localmente compacto, y sea $\mu \in M(G)$, tal que $\mu(G) = ||\mu|| = 1$. Entonces $\mu \geq 0$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$, y A un conjunto medible Borel. Por el Teorema 1.21, existe $\phi \in C_0(G)$ tal que $\int|\chi_A - \phi|d|\mu| < \varepsilon$. Entonces, $\int|\chi_A - |\phi||d|\mu| \leq \int|\chi_A - \phi|d|\mu| < \varepsilon$, y

$$\left|\int|\chi_A - |\phi||d\mu\right| \leq \int|\chi_A - |\phi||d|\mu| < \varepsilon.$$

Llamamos $\psi = |\phi|$. Entonces $\psi \in C_0(G)$ y $\psi \geq 0$, y

$$||\psi||_\infty - Im\left(\int \psi d\mu\right) = Im\left(\int(||\psi||_\infty - \psi)d\mu\right) \leq ||||\psi||_\infty - \psi||_\infty||\mu|| \leq ||\psi||_\infty, \tag{2.2}$$

es decir, $Im(\int \psi d\mu) \geq 0$. Además, $Im(\int \psi - \chi_A d\mu) \leq \int |\chi_A - \psi| d|\mu| < \varepsilon$. Como $Im(\int \chi_A d\mu) = Im(\int \chi_A - \psi d\mu) + Im(\int \psi d\mu) \geq Im(\int \chi_A - \psi d\mu)$ y ε es arbitrario, $Im(\mu(A)) \geq 0$. Si consideramos la descomposición $\mu = \mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$, lo anterior implica que $\mu_3 - \mu_4 \geq 0$, y por la consideración anterior al Teorema 1.11, $\mu_4(A) = 0$ para todo conjunto A medible Borel. Por hipótesis, $\mu_3(G) - \mu_4(G) = 0$, por lo que $\mu_3(G) = \mu_4(G) = 0$, que implica $\mu_3 = \mu_4 = 0$. En resumen, μ debe ser real.

Un argumento similar a (2.2) demuestra que $Re(\int \psi d\mu) \geq 0$, y que $\mu(A) \geq 0$ para todo A medible Borel. □

2.2.1. Medida de Haar en un grupo compacto metrizable

En esta subsección, construiremos la medida de Haar en un grupo topológico compacto y metrizable, siguiendo el artículo [9], y añadiendo algunos detalles. No se asume la conmutatividad del grupo. Debemos observar que si G es compacto, entonces $C_0(G) = C_c(G) = C(G)$.

Teorema 2.15. Sea G un grupo topológico compacto metrizable. Entonces existe una medida de probabilidad en G invariante por traslaciones por la izquierda.

Demostración. Ya que G es metrizable, por la Proposición 1.28, $C(K)$ es separable. Por tanto existe una sucesión $(f_k)_{k\geq 1}$ de funciones continuas en G tal que $\overline{\text{span}\{f_k : k \geq 1\}} = C(G)$. Tras un proceso de normalización, podemos suponer que $||f_k||_\infty < 2^{-k}$.

Ahora definimos la función $\varphi : P(G) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(\mu) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f_i)^2,$$

que está bien definida ya que

$$|\varphi(\mu)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(f_i)^2 \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} ||\mu||^2 ||f_i||_\infty^2 < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} < \infty,$$

y es no negativa por el Lema 2.14, w^*-continua por ser límite uniforme de funciones w^*-continuas, y estrictamente convexa. Sabemos que es convexa pues si $\lambda \in [0,1]$, entonces $((1-\lambda)\mu + \lambda\nu)(f_i)^2 \leq (1-\lambda)\mu(f_i)^2 + \lambda\nu(f_i)^2$. Además, la desigualdad es estricta si $\lambda \in (0,1)$, pues en ese caso, $\lambda^2 < \lambda$.

Ahora, sean $\lambda \in (0,1)$, $\mu, \nu \in P(G)$, y supongamos $\mu \neq \nu$. Entonces debe existir $i \geq 1$ tal que $\mu(f_i) \neq \nu(f_i)$. Si no fuera así, μ y ν coincidirían en todo punto de $\overline{\text{span}\{f_k : k \geq 1\}} = C(G)$, es decir, $\mu = \nu$. Por tanto, si $\lambda \in (0,1)$, existe un $i \geq 1$ tal que $\mu(f_i) \neq \nu(f_i)$, por lo que por el párrafo anterior, $((1-\lambda)\mu + \lambda\nu)(f_i)^2 < (1-\lambda)\mu(f_i)^2 + \lambda\nu(f_i)^2$, y $\varphi((1-\lambda)\mu + \lambda\nu) < (1-\lambda)\varphi(\mu) + \lambda\varphi(\nu)$. Ahora, definimos la función $\Phi : P(G) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(\mu) = \sup\{\varphi(\tau_g \mu) : g \in G\}.$$

Esta función es w^*-l.s.c. por la Proposición 2.12, y convexa por ser el supremo de funciones convexas. De hecho, veamos que es estrictamente convexa. Sea $\lambda \in (0,1)$, y $\mu, \nu_1, \nu_2 \in P(G)$ tales que $\mu = (1-\lambda)\nu_1 + \lambda\nu_2$ y $\Phi(\mu) = (1-\lambda)\Phi(\nu_1) + \lambda\Phi(\nu_2)$.

Ya que la aplicación $g \mapsto \tau_g\mu$ es continua de G a $(P(G), w^*)$, y φ es w^*-continua, existe por compacidad un $h \in G$ tal que $\Phi(\mu) = \varphi(\tau_h\mu)$. Por la condición de supremo de Φ, se tiene

$$\varphi(\tau_h\mu) \geq (1-\lambda)\varphi(\tau_h\nu_1) + \lambda\varphi(\tau_h\nu_2).$$

Como φ es estrictamente convexa, debe tenerse la igualdad y $\tau_h\mu = \tau_h\nu_1 = \tau_h\nu_2$, y por tanto, $\mu = \nu_1 = \nu_2$. En definitiva, Φ es estrictamente convexa.

La función Φ alcanza un mínimo $m \in P(G)$ por la Proposición 2.13, y este es único por ser estrictamente convexa. Si alcanzara el mínimo en $m, m' \in P(G)$ y $m \neq m'$, entonces se tendría $\Phi((1-\lambda)m + \lambda m') < (1-\lambda)\Phi(m) + \lambda\Phi(m') = \Phi(m) = \text{mín}(\Phi)$ para todo $\lambda \in (0,1)$, pero esto entra en contradicción con la condición de mínimo. Como además,

$$\Phi(\tau_g\mu) = \Phi(\mu)$$

para todo $g \in G$ y $\mu \in P(G)$, pues la composición de dos traslaciones es una traslación, se debe cumplir $\tau_g m = m$ para todo $g \in G$ por la unicidad del mínimo. □

2.2.2. Medida de Haar en un grupo abeliano compacto

Ahora, presentamos una prueba de la existencia de la medida de Haar en grupos topológicos abelianos compactos. Esta demostración es de elaboración propia, y depende fuertemente de la compacidad del grupo.

Teorema 2.16. Sea G un grupo abeliano compacto. Entonces existe una medida de probabilidad invariante por traslaciones.

Demostración. Dado $S \subseteq G$, consideramos el conjunto

$$I(S) = \bigcap_{s\in S}\{\mu \in P(G) : \tau_s\mu = \mu\}.$$

Veamos que $\{\mu \in P(G) : \tau_s\mu = \mu\}$ es w^*-cerrado. Por la Proposición 1.26, es equivalente a demostrar que si $\mu_\alpha(f) \to \mu(f)$ para todo $f \in C(G)$, entonces $\mu(f_s) = \mu(f)$ para todo $f \in C(G)$. Pero esto es evidente ya que

$$\mu(f_s) = \lim_\alpha \mu_\alpha(f_s) = \lim_\alpha \mu_\alpha(f) = \mu(f).$$

Además, ya que $I(S) \subseteq P(G)$, es w^*-compacto. Si $I(S) \neq \emptyset$, es convexo, pues si $\mu, \nu \in I(S)$, para todo $s \in S$, todo $\lambda \in [0,1]$ y toda $f \in C(G)$, se cumple $((1-\lambda)\mu + \lambda\nu)(f_s) = (1-\lambda)\mu(f_s) + \lambda\nu(f_s) = (1-\lambda)\mu(f) + \lambda\nu(f) = ((1-\lambda)\mu + \lambda\nu)(f)$.

Ahora, consideramos el conjunto $A = \{S \subseteq G : I(S) \neq \emptyset\}$. Este conjunto es no vacío, pues $\{0\} \in A$. Sea $\{S_j\}_{j\in J}$ una cadena (subconjunto totalmente ordenado por cierta relación de orden, en este caso, $\subseteq$) contenida en A. Entonces $\cup_{j\in J} S_j \in A$, pues

$$I\left(\bigcup_{j\in J} S_j\right) = \bigcap_{j\in J} I(S_j),$$

y este conjunto es no vacío por el Teorema A.2 y la compacidad de $P(G)$, pues si elegimos $S_1,\ldots,S_n \in \{S_i\}_{j\in J}$, podemos suponer que que $S_1 \subseteq \ldots \subseteq S_n$, entonces $I(S_n) \subseteq \ldots \subseteq I(S_1)$ y $\cap_{i=1}^n I(S_i) = I(S_n) \neq \emptyset$. Por el Lema de Zorn, A tiene un elemento maximal G'. Si $G' \neq G$, entonces existiría $b \in G \setminus G'$. Vamos a demostrar que $I(G' \cup \{b\}) \neq \emptyset$.

Por ser $I(G')$ no vacío, existe $\mu \in I(G')$, y por convexidad de $I(G')$, las medidas $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

$$\mu_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu(f_{kb}) \text{ para toda } f \in C(G),$$

pertenecen a $I(G')$. Por compacidad, y la Proposición 1.24 (iv) y (ii), la sucesión $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posee una subred $(\mu_{n_\alpha})_\alpha$ tal que $\mu_{n_\alpha} \xrightarrow{w^*} \nu \in I(G')$. Vamos a ver que $\nu \in I(G \cup \{b\})$ también. Por la Proposición 1.26 (i),

$$\tau_b\nu(f) = \nu(f_b) = \lim_\alpha \mu_{n_\alpha}(f_b).$$

Desarrollando, obtenemos

$$\begin{aligned}\nu(f_b) &= \lim_\alpha \frac{1}{n_\alpha}\sum_{k=0}^{n_\alpha-1}\mu(f_{(k+1)b}) = \lim_\alpha \frac{1}{n_\alpha}\left(\sum_{k=0}^{n_\alpha-1}\mu(f_{kb}) - \mu(f) + \mu(f_{(n_\alpha)b})\right)\\ &= \lim_\alpha \mu_{n_\alpha}(f) - \frac{\mu(f)}{n_\alpha} + \frac{\mu_{(n_\alpha)b}(f)}{n_\alpha} = \nu(f).\end{aligned}$$

En definitiva, $\nu \in I(G' \cup \{b\})$, por lo que G' no es maximal, que es una contradicción con lo supuesto. G debe ser el elemento maximal, y existe una medida $\mu \in I(G)$, la medida que estábamos buscando. □

Capítulo 3

Análisis de Fourier en grupos LCA

A partir de los años 30, se empezó a extender en la comunidad matemática la idea de que el contexto más adecuado para el desarrollo del Análisis de Fourier eran los grupos localmente compactos. Se considera que la primera obra en la que se desarrolla la teoría abstracta es *L'Integration dans les Groupes Topologiques et ses Applications* [27] de André Weil, de 1940, aunque el Teorema de Dualidad de Pontryagin (anterior a esta obra), es reconocido como un hito de las matemáticas del siglo XX, y un logro excepcional en Álgebra Topológica [13]. Este resultado fue demostrado por el matemático soviético Lev Pontryagin en 1934 para grupos compactos con base numerable [16], y un año más tarde por Egbert Rudolf van Kampen [25] para el caso general, y constituye un resultado fundamental de esta teoría.

En este capítulo, seguiremos la línea principal de [17] complementada con [7] y [10, p. 89-93]. Los resultados aquí presentados se han extraído de estas referencias aunque hemos completado algunos detalles. Estudiaremos el grupo dual y la Transformada de Fourier, estableceremos resultados conocidos en la teoría clásica, para terminar con el Teorema de dualidad de Pontryagin y una aplicación. Finalmente, se incluye un resumen de varios teoremas para grupos finitos. En todo el capítulo, supondremos que G es un grupo LCA (ver Definición 1.46).

3.1. La operación convolución

Antes de definir la convolución, demostraremos un resultado auxiliar.

Teorema 3.1. Sean p, $1 \leq p < \infty$ y $f \in L^p(G)$. La aplicación $x \mapsto f_x$ es uniformemente continua de G en $L^p(G)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por el Teorema 1.21, existe $g \in C_c(G)$ con soporte compacto K tal que $||g - f||_p < \varepsilon/3$. Además, por la Proposición 1.47 g es uniformemente continua, así que existe un entorno V del origen en G tal que $||g - g_x||_\infty < (\varepsilon/3)m(K)^{-1/p}$ para todo $x \in V$. Por tanto, si $x \in V$,

$$||g - g_x||_p = \left(\int_K |g(y) - g(y-x)|^p dy\right)^{1/p} \leq \left(m(K)^{-1} m(K) \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^p\right)^{1/p} = \frac{\varepsilon}{3},$$

y $||f - f_x||_p \leq ||f - g||_p + ||g - g_x||_p + ||g_x - f_x||_p < \varepsilon$. Como $f_x - f_y = (f - f_{y-x})_x$, $||f_x - f_y||_p = ||f - f_{y-x}||_p < \varepsilon$ si $y - x \in V$. □

Definición 3.2. Dadas dos funciones $f, g \in L^1(G)$. Definimos la *convolución de f y g*, $f * g$, por

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 3.3. Las siguientes propiedades para la convolución son ciertas.

(i) Si $f, g \in C_c(G)$ con soporte compacto A y B respectivamente, entonces $f * g \in C_c(G)$, y su soporte está contenido en $A + B$.
(ii) Si $1 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in L^p(G)$ y $g \in L^q(G)$, entonces $f * g \in C_0(G)$.
(iii) Si $f, g \in L^1(G)$, $\int |f(x-y)g(y)|dx$ converge para casi todo $x \in G$, $f * g \in L^1(G)$, y se tiene $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.
(iv) Si $f, g, h \in L^1(G)$, entonces $f * g = g * f$ y $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Demostración. (i) $f(x-y)g(y) \neq 0$ sólo si $y \in B$ y $x - y \in A$, es decir, sólo si $x \in A + B$. Por tanto, $f * g = 0$ fuera de $A + B$.

(ii) Tomamos dos sucesiones $(f_n)_n, (g_n)_n \subseteq C_c(G)$ que aproximen a f y g respectivamente, esto es, $||f_n - f||_p \to 0$, $||g_n - g||_p \to 0$. Por la desigualdad de Hölder, y la Proposición 2.3, para todo $x \in G$ se cumple

$$\begin{aligned} |(f_n * g_n)(x) - (f * g)(x)| &\leq \int_G |f_n(x-y)g_n(y) - f(x-y)g(y)|dy \\ &= \int_G |(f_n(x-y) - f(x-y))(g_n(y) - g(y))|dy \\ &= ||(f_n - f)_x \cdot (g_n - g)||_1 \leq ||f_n - f||_p ||g_n - g||_q, \end{aligned}$$

por lo que $f_n * g_n \to f * g$ uniformemente. Por el apartado anterior, $f_n * g_n \in C_c(G)$, por lo que $f * g \in C_0(G)$ (ver la Proposición 1.14).

(iii) Primero, demostramos que el integrando $f(x-y)g(y)$ es una función medible Borel en $G \times G$. Fijemos un abierto V de $G \times G$ y definimos $E = f^{-1}(V)$, $E' = E \times G$, y $E'' = \{(x,y) \in G \times G : x - y \in E\}$. E' es un conjunto de Borel en $G \times G$ porque es el producto cartesiano de dos conjuntos de Borel en G. Además, el homeomorfismo de $G \times G$ en sí mismo dado por $(x,y) \mapsto (x+y, y)$ transforma E' en E'', por lo que E'' es también un conjunto de Borel. Como $f(x-y) \in V$ si y sólo si $(x,y) \in E''$, $f(x-y)$ es una función medible Borel definida en $G \times G$, y por tanto el producto $f(x-y)g(y)$ lo es. Además, por la Observación 2.4, f y g se anulan fuera de un $\sigma-$compacto, digamos A y B respectivamente. Entonces $f(x-y)g(y)$ se anula fuera de $(A+B) \times B$ que es $\sigma-$compacto. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 1.22, obteniendo:

$$\int_G \int_G |f(x-y)g(y)|dxdy = ||f||_1 \cdot ||g||_1.$$

Por tanto, $\phi(x) = \int_G |f(x-y)g(y)|dy \in L^1(G)$ y es finita para casi todo x en G. Por último, $|(f * g)(x)| \leq \phi(x)$, lo que implica que $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$.

(iv) Para demostrar la conmutatividad, basta hacer el cambio de y por $y+x$ y tener en cuenta la Corolario 2.6

$$(f*g)(x)=\int_G f(-y)g(y+x)dy=\int_G f(y)g(y+x)dy=(g*f)(x)$$

Para la asociatividad, aplicamos el Teorema 1.22:

$$\begin{aligned}(f*(g*h)) &= \int_G (f(x-z)(g*h))(z)dz=\int_G f(x-z)\left(\int_G g(z-y)h(y)dy\right)dz \\ &= \int_G\left(\int_G f(x-z)g(z-y)dz\right)h(y)dy=\int_G\left(\int_g f(x-z-y)g(z)dz\right)h(y)dy \\ &= \int_G (f*g)(x-y)h(y)dy=((f*g)*h)(x).\end{aligned}$$

□

Gracias a la asociatividad, la conmutatividad de la convolución y la desigualdad del apartado (iii) del Teorema 3.3 en el espacio $L^1(G)$, podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 3.4. Dado un grupo LCA G, $L^1(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa con la operación convolución. Además, si G es discreto, $L^1(G)$ tiene un elemento neutro para esta operación.

Demostración. La distributividad es evidente por la linealidad de la integral. Ahora, si G es discreto y consideramos la medida de Haar normalizada de forma que cada conjunto unipuntual tiene medida 1, $(f*g)(x)=\sum_{y\in G} f(x-y)g(y)$, y si consideramos la función $e: G\to\mathbb{C}$ dada por $e(0)=1$ y $e(x)=0$ para todo $x\neq 0$ entonces $f*e=e*f=f$. □

3.2. El grupo dual y la Transformada de Fourier

Definición 3.5. Sea G un grupo LCA. Decimos que una función $\gamma: G\to\mathbb{C}$ es un *caracter de G* si $|\gamma(x)|=1$ para todo $x\in G$ y cumple

$$\gamma(x+y)=\gamma(x)\gamma(y)$$

para todo $x,y\in G$, es decir, si es un homomorfismo de grupos de G en $\mathbb{T}$. El conjunto de todos los caracteres continuos forman un grupo Γ o $\widehat{G}$, que llamaremos *grupo dual de G*, con la suma definida por

$$(\gamma_1+\gamma_2)(x)=\gamma_1(x)\gamma_2(x)$$

para $x\in G$, $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ cualesquiera. Es evidente que Γ es conmutativo si G lo es. El elemento neutro para la suma, que denotaremos por 0, es el caracter contantemente 1.

Debido a la dualidad existente entre G y Γ que demostraremos más adelante, establecemos la notación

$$(x,\gamma)=\gamma(x).$$

Así, las propiedades de los caracteres se traducen en $(x+y,\gamma) = (x,\gamma)(y,\gamma)$ y $(x,\gamma_1+\gamma_1) = (x,\gamma_1)(x,\gamma_2)$. Además, es fácil ver que $(0,\gamma) = (x,0) = 1$. De esto y del hecho de que $|\gamma(x)| = 1$ deducimos las igualdades

$$(-x,\gamma) = (x,-\gamma) = (x,\gamma)^{-1} = \overline{(x,\gamma)}.$$

Teorema 3.6. Si $\gamma \in \Gamma$ y definimos para todo $f \in L^1(G)$

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx,$$

la aplicación $f \mapsto \hat{f}(\gamma)$ es un funcional multiplicativo no nulo de $L^1(G)$. Recíprocamente, cualquier funcional multiplicativo no nulo de $L^1(G)$ es de esta forma, y los distintos caracteres inducen distintos funcionales.

Antes de comenzar la demostración, definimos el espacio $L^\infty(\mu)$, en el sentido de [3]. Diremos que $E \subseteq X$ es *localmente de medida nula* si para todo $F \in \Sigma$ tal que $\mu(F) < \infty$, entonces $\mu(E \cap F) = 0$. Además, diremos que una propiedad se cumple *localmente en casi todo punto*, si se cumple en todo X salvo en un conjunto localmente de medida nula. Ahora, definimos el espacio $\mathscr{L}^\infty(X,\Sigma,\mu,\mathbb{C})$ como el conjunto de funciones complejas acotadas y medibles respecto Σ, y a partir de esto, definimos $L^\infty(\mu)$ como el espacio cociente que resulta de identificar en $\mathscr{L}^\infty(X,\Sigma,\mu,\mathbb{C})$ dos funciones si y sólo si coinciden localmente en casi todo punto. Con la norma $||f||_\infty = \text{ínf}\{c : \{x \in X : |f(x)| > M\}$ es localmente de medida nula$\}$, $L^\infty(\mu)$ es un espacio de Banach. Esta definición permite demostrar que la aplicación $T : L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)^*$ dada por $f \mapsto \int_G fgdx$, es un isomorfismo (de espacios de Banach) isométrico, es decir, $L^\infty(\mu) = L^1(\mu)^*$ [3, p. 303-304]. En particular, esto se cumple para la medida de Haar.

Demostración. Por la linealidad de la integral, la aplicación es lineal, y es continua ya que γ es continuo y $f \in L^1(G)$. Además, la aplicación es multiplicativa. Sean $f,g \in L^1(G)$, y definamos $k = f * g$, entonces

$$\hat{k}(\gamma) = \int_G (f*g)(x)(-x,\gamma)dx = \int_G \left(\int_G f(x-y)g(y)dy\right)(-x,\gamma)dx$$

$$= \int_G \left(\int_G f(x-y)(-x+y,\gamma)dx\right) g(y)(-y,\gamma)dy = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma).$$

La aplicación $f \mapsto \hat{f}(\gamma)$ es no nula ya que si $f \in C_c(G)$ y f es no negativa y no idénticamente nula, entonces $\int_G f(x)|(x,\gamma)|^2 dx > 0$ por la Proposición 2.7.

Veamos el recíproco. Sea h un funcional multiplicativo no nulo de $L^1(G)$. Entonces

$$h(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx$$

para cierto $\phi \in L^\infty(G)$ y $||\phi||_\infty = ||h||_1 \leq 1$ por el Lema 1.33 . Si $f,g \in L^1(G)$,

$$\begin{aligned}\int_G h(f)g(y)\phi(y)dy &= h(f)h(g) = h(f*g) = \int_G (f*g)(x)\phi(x)dx \\ &= \int_G g(y)\left(\int_G f(x-y)\phi(x)dx\right)dy = \int_G g(y)h(f_y)dy,\end{aligned}$$

por lo que

$$h(f)\phi(y) = h(f_y) \tag{3.1}$$

se cumple para casi todo $y \in G$. Por el Teorema 3.1 y la continuidad de h, $h(f_y)$ es una función continua definida en G para cualquier $f \in L^1(G)$. Tomando f tal que $h(f) \neq 0$, deducimos que ϕ es una función continua en casi todo punto, y podemos asumir que es continua, pues redefinirla en un conjunto de medida nula no altera la definición de $h(f)$. Por tanto, (3.1) se cumple en todo G.

Aplicando la igualdad, tenemos $h(f)\phi(x+y) = h(f_{x+y}) = h((f_x)_y) = h(f_x)\phi(y) = h(f)\phi(x)\phi(y)$, por lo que $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ para todo $x,y \in G$. De esto último deducimos que $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$, por lo que $\phi(nx) = \phi(x)^n$ y $\phi(-nx) = \phi(x)^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y como ϕ es acotado, se cumple necesariamente que $|\phi(x)| = 1$ para todo $x \in G$. En definitiva, $\phi \in \Gamma$.

Por último, queda ver que distintos caracteres inducen funcionales distintos. Si $\hat{f}(\gamma_1) = \hat{f}(\gamma_2)$ para toda $f \in L^1(G)$ entonces, $(-x,\gamma_1) = (-x,\gamma_2)$ para casi todo x, pero al ser los caracteres continuos y ya que $L^\infty(G) = L^1(G)^*$, $\gamma_1 = \gamma_2$ (ver Proposición 2.7). □

Dada $f \in L^1(G)$, llamaremos *Transformada de Fourier de* f a la función $\hat{f} : \Gamma \to \mathbb{C}$ dada por

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)dx.$$

EL conjunto de todas las funciones $\hat{f}$ se denota por $A(\Gamma)$. El Teorema 3.6 establece una biyección entre $\Delta(L^1(G))$ y Γ, por lo que identificando estos dos conjuntos, $\hat{f}$ es la Transformada de Gelfand de f. Por el Teorema 1.36 (iii), $\Delta(L^1(G))$ es localmente compacto y de Hausdorff, y por tanto Γ también lo es con la *topología débil inducida por* $A(\Gamma)$ *en* Γ, cuyos entornos básicos son de la forma $\{\gamma \in \Gamma : |\hat{f}_i(\gamma - \gamma_0)| < \varepsilon \text{ para } i = 1,\dots,n\}$. En cierto modo, *trasladamos* la Topología de Gelfand de $\Delta(L^1(G))$ a Γ. La teoría de álgebras de Banach conmutativas permite establecer algunas importantes consecuencias. Pero antes, enunciamos un resultado crucial.

Teorema 3.7 (Teorema de Stone-Weierstrass)**.** Sea X un espacio localmente compacto de Hausdorff. Sea A una subálgebra de $C_0(X)$ que separa fuertemente puntos de X y es autoadjunta. Entonces A es denso en $C_0(X)$.

Demostración. Su demostración se puede encontrar en [20, p.167]. Aunque el enunciado difiere del considerado en esta referencia, es fácil ver que el de [20] implica el nuestro. □

Teorema 3.8. Se cumplen las siguientes propiedades sobre la Transformada de Fourier.

(i) $A(\Gamma)$ es un subálgebra de $C_0(\Gamma)$ autoadjunta y que separa fuertemente elementos de Γ. Además, $A(\Gamma)$ es denso en $C_0(\Gamma)$.

(ii) La transformada de Fourier de $f*g$ es $\hat{f}\hat{g}$.

(iii) $A(\Gamma)$ es invariante por traslaciones y por multiplicación por (x,γ) para cualquier $x\in G$.

(iv) La transformada de Fourier, vista como aplicación $L^1(G)\to C_0(\Gamma)$, es continua ya que $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$.

(v) Para toda $f\in L^1(G)$ y $\gamma\in\Gamma$, $(f*\gamma)(x)=(x,\gamma)\hat{f}(\gamma)$.

Demostración. (i) Definamos, para toda $f\in L^1(G)$, la función $\tilde{f}$ dada por $\tilde{f}(x)=\overline{f(-x)}$. Es fácil comprobar que la aplicación $f\mapsto\tilde{f}$ es una involución. Entonces

$$\widehat{\tilde{f}}(\gamma)=\int_G \overline{f(-x)}(-x,\gamma)dx=\overline{\int_G f(-x)\overline{(-x,\gamma)}dx}=\overline{\int_G f(-x)(x,\gamma)dx}=\overline{\hat{f}(\gamma)}$$

$A(\Gamma)=\Delta(L^1(G))$ separa fuertemente puntos por el Teorema 1.39 (ii), y es una subálgebra con la suma y el producto usuales. Por el Teorema 3.7, $A(\Gamma)$ es denso en $C_0(\Gamma)$.

(ii) Se demuestra en la prueba del Teorema 3.6.

(iii) Si definimos $g(x)=(x,\gamma_0)f(x)$ para un cierto $\gamma_0\in\Gamma$, $\hat{g}(\gamma)=\int_G f(x)(x,\gamma_0)(-x,\gamma)dx=\int_G f(x)(-x,-\gamma_0)(-x,\gamma)dx=\int_G f(x)(-x,\gamma-\gamma_0)dx=\hat{f}(\gamma-\gamma_0)\in A(\gamma)$.

Por otro lado, si definimos $g=f_x$, entonces $\hat{g}(\gamma)=\int_G f(y-x)(-y,\gamma)dy=(-x,\gamma)\int_G f(y-x)(x-y,\gamma)dy=(-x,\gamma)\hat{f}(\gamma)$.

(iv) es consecuencia de Teorema 1.39 (i). El apartado (v) es trivial y nos permite interpretar la transformada de Fourier como la convolución $\hat{f}(\gamma)=(f*\gamma)(0)$. □

En algunos casos, puede decirse más sobre la topología de Γ, además de que es localmente compacto y de Hausdorff.

Teorema 3.9. Si G es discreto, Γ es compacto. Y si G es compacto, Γ es discreto.

Demostración. Por el Teorema 3.4, sabemos que si G es discreto entonces $L^1(G)$ tiene unidad, por lo que $\Delta(L^1(G))$ es compacto (por el Teorema 1.36 (ii)), y Γ es compacto.

Si G es compacto y consideramos su medida de Haar normalizada ($m(G)=1$), se tienen las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\int_G (x,\gamma)dx=\begin{cases}1 & \text{si } \gamma=0\\ 0 & \text{si } \gamma\neq 0\end{cases}$$

El primer caso es obvio. Pero si $\gamma\neq 0$, entonces (x_0,γ) debe ser distinto de 1 para algún $x_0\in G$, y $\int_G(x,\gamma)dx=(x_0,\gamma)\int_G(x-x_0,\gamma)dx=(x_0,\gamma)\int_G(x,\gamma)dx$, por lo que la integral debe valer 1. Si tomamos la función f constante igual a 1, podemos deducir de las relaciones de ortogonalidad que $\hat{f}(0)=1$ y $\hat{f}(\gamma)=0$ para todo $\gamma\neq 0$. Ahora, como $\hat{f}:\Gamma\to\mathbb{C}$ es continua, $\{0\}$ es un abierto en Γ, así que todo conjunto unipuntual es abierto, por lo que Γ es discreto. □

Hemos demostrado que Γ es un grupo y es un espacio Hausdorff localmente compacto. Ahora demostraremos que esas dos condiciones implican que es también un grupo LCA. Para ello, empleamos otra descripción de la topología de Γ.

Teorema 3.10. Sea G un grupo LCA, y Γ su grupo dual.

(i) $(x,\gamma) : G\times\Gamma \to \mathbb{C}$ es una función continua.

(ii) Dados dos conjuntos compactos $K\subseteq G$ y $C\subseteq\Gamma$, definimos $U_r = \{z\in\mathbb{C} : |1-z| < r\}$, y

$$N(K,r) = \{\gamma\in\Gamma : (x,\gamma)\in U_r\ \forall x\in K\}$$
$$N(C,r) = \{x\in G : (x,\gamma)\in U_r\ \forall\gamma\in C\}.$$

$N(K,r)$ y $N(C,r)$ son dos conjuntos abiertos de Γ y G respectivamente.

(iii) La familia de los conjuntos $N(K,r)$ y sus trasladados son una base para la topología de Γ.

(iv) Γ es un grupo LCA.

Demostración. De la ecuación (3.1) del Teorema 3.6, deducimos que si $f\in L^1(G)$, $\hat{f}(\gamma)(x,\gamma) = \widehat{f_x}(\gamma)$ para todo $x\in G$ y $\gamma\in\Gamma$. Ya que $\hat{f} : \Gamma\to\mathbb{C}$ es continua, bastará probar que $\widehat{f_x}(\gamma)$ es una función continua en $G\times\Gamma$. Fijemos $x_0\in G$, $\gamma_0\in\Gamma$ y $\varepsilon>0$. Por el Teorema 3.1, existe un entorno V tal que $||f_x - f_{x_0}||_1 < \varepsilon$ para todo $x\in V$. Por la continuidad de $\widehat{f_{x_0}}$, existe un entorno W tal que $|\widehat{f_{x_0}}(\gamma)-\widehat{f_{x_0}}(\gamma_0)| < \varepsilon$ para todo $\gamma\in W$. Además, por el Teorema 3.8, $|\widehat{f_x}(\gamma)-\widehat{f_{x_0}}(\gamma)| \le ||f_x - f_{x_0}||_1$. En definitiva,

$$|\hat{f}_x(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| \le |\hat{f}_x(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma)| + |\hat{f}_{x_0}(\gamma)-\hat{f}_{x_0}(\gamma_0)| < 2\varepsilon.$$

Esto prueba (i).

Veamos ahora (ii). Tomamos un compacto K de G, $r>0$ y fijamos $\gamma_0\in N(K,r)$. Por (i), para cada $x_0\in K$, existen entornos V de x_0 y W de γ_0 tales que $(x,\gamma)\in U_r$ si $x\in V$ y $\gamma\in W$. Por ser K compacto, sabemos que basta un número finito de entornos V para cubrirlo. Es evidente que si llamamos W_0 a la intersección de los W que se corresponden con los V del recubrimiento finito, $W_0\subseteq N(K,r)$, es decir, hemos encontrado un entorno W_0 de γ_0 contenido en $N(K,r)$. Concluimos que $N(K,r)$ es abierto. Un razonamiento similar prueba que $N(C,r)$ es abierto.

Ahora, sea V un entorno de γ_0. Demostraremos que existen K y $r>0$ tales que $\gamma_0+N(K,r)\subseteq V$. Sin pérdidad de generalidad, podemos asumir que $\gamma_0=0$. Por la definición de la topología de Gelfand, existen ciertas funciones $f_1,\ldots,f_n\in L^1(G)$ y $\varepsilon>0$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{\gamma : |\hat{f}_i(\gamma)-\hat{f}_i(0)| < \varepsilon\}\subseteq V.$$

Por el Teorema 1.21, podemos suponer que $f_1,\ldots,f_n$ se anulan fuera de un compacto K de G. Si tomamos r tal que $r<\varepsilon/\text{máx}_i\{||f_i||_1\}$ y $\gamma\in N(K,r)$, tenemos

$$|\widehat{f_i}(\gamma)-\widehat{f_i}(0)| \le \int_K |(-x,\gamma)-1||f_i(x)|dx \le r||f_i||_1 < \varepsilon,$$

por lo que $N(K,r)\subseteq V$.

Por último, sean γ',γ'' dos caracteres. Es fácil comprobar que

$$(\gamma'+N(K,r/2)) - (\gamma''+N(K,r/2)) \subseteq \gamma'-\gamma''+N(K,r)$$

se cumple para todo K compacto de G y $r>0$. Como la familia de abiertos $N(K,r)$ es una base para la topología de Γ, hemos probado que la aplicación $(\gamma',\gamma'')\mapsto\gamma'-\gamma''$ es continua. □

3.2.1. Ejemplos clásicos

La teoría general para grupos LCA tiene una aplicación directa en algunos casos clásicos. Estos son: $\mathbb{R}$ como grupo aditivo con la topología usual y la medida de Lebesgue; el toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como grupo aditivo con la topología cociente y la medida inducida por $\mathbb{R}$ (aunque se puede identificar con $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, por lo que es compacto); y $\mathbb{Z}$ como grupo aditivo, con la topología discreta y la medida del cardinal. Empecemos con $\mathbb{R}$.

Si $\widehat{\mathbb{R}}$ es el dual de $\mathbb{R}$, fijamos $\gamma \in \widehat{\mathbb{R}}$. Ya que γ es continua y $(0,\gamma) = 1$, existe $a > 0$ tal que $A = \int_0^a (x,\gamma)dx \neq 0$. Si imponemos la condición

$$(x+t,\gamma) = (x,\gamma)(t,\gamma) \tag{3.2}$$

para todo $x,t \in \mathbb{R}$, obtenemos que

$$A \cdot (x,\gamma) = (x,\gamma)\int_0^a (t,\gamma)dt = \int_x^{x+\delta} \gamma(t)dt.$$

La última integral es diferenciable, por lo que γ es diferenciable. Derivando respecto de t en (3.2), tenemos $\gamma'(x+t) = \gamma(x)\gamma'(t)$. Haciendo $t = 0$, tenemos una ecuación diferencial ordinaria $\gamma'(x) = \gamma'(0)\gamma(x)$ que junto con la condición inicial $\gamma(0) = 1$ nos da la solución $\gamma(x) = e^{\gamma'(0)x}$, pero como $|\gamma(x)| = 1$ debe cumplirse que $\gamma(x) = e^{i\xi x}$ para algún $\xi \in \mathbb{R}$.

Una pregunta natural es si la topología que $\mathbb{R}$ tiene como grupo dual coincide con la topología usual. Si $r > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $V(n,r) = \{\xi \in \mathbb{R} : |1 - e^{i\xi x}| < r$ siempre que $|x| \leq n\}$. Por el Teorema 3.10 y el hecho de que $\mathbb{R}$ cumpla el Primer Axioma de Numerabilidad, implica que $V(n,r)$ es una base de entornos de la topología de Gelfand. Sin embargo, $y \in V(n,r)$ es equivalente a que $|1 - e^{i\xi x}| < r$ siempre que $|x| \leq r$ y

$$|1 - e^{i\xi x}| < r \Longleftrightarrow |e^{(i\xi x)/2}(e^{(-i\xi x)/2} - e^{(-i\xi x)/2})| < r \Longleftrightarrow \left|\sin\left(\frac{yx}{2}\right)\right| < \frac{r}{2},$$

y esto sucede si y sólo si

$$\sin\left(\frac{yx}{2}\right) < \frac{r}{2},\ \sin\left(-\frac{yx}{2}\right) < \frac{r}{2} \Longleftrightarrow \frac{yx}{2} < \arcsin(r/2),\ -\frac{yx}{2} < \arcsin(r/2) \Longleftrightarrow |y| \leq \frac{2}{|x|}\arcsin(r/2),$$

y como $|x| \leq n$, también se cumple $|y| < \frac{2}{n}\arcsin(r/2)$. Esta es la expresión de una bola de la topología dual. Recíprocamente, si $|x| \leq n$, entonces $|y| < \frac{2}{n}\arcsin(r/2) < \frac{2}{|x|}\arcsin(r/2)$ y se pueden interpretar las equivalencias en el orden inverso en que están escritas. En definitiva, la topología de Gelfand en $\mathbb{R}$ y la topología usual coinciden. Esto implica que $\mathbb{R}$ y $\widehat{\mathbb{R}}$ son isomorfos como grupos topológicos (isomorfos como grupos y homeomorfos).

En el caso de $\mathbb{T}$, los mismos argumentos para $\mathbb{R}$ demuestran que los caracteres continuos en $\mathbb{T}$ son de la forma $\gamma(x) = e^{i\xi x}$ con la condición adicional de que $\gamma(x+1) = \gamma(x)$, es decir,

$e^{i\xi x} = e^{i\xi(x+1)} = e^{i\xi x} \cdot e^{i\xi}$, que implica $e^{i\xi} = 1$ que es posible solo cuando $\xi \in 2\pi\mathbb{Z}$. Hay por tanto un isomorfismo entre $\mathbb{T}$ y $\mathbb{Z}$, que es un grupo discreto, como afirma el Teorema 3.9.

Por otro lado, si $\gamma \in \widehat{\mathbb{Z}}$ entonces $|(1,\gamma)| = 1$, y $(1,\gamma) = e^{2\pi i\xi}$ para cierto $\xi \in \mathbb{R}$, por lo que $(n,\gamma) = e^{2\pi in\xi}$. La correspondencia entre ξ y γ nos da un isomorfismo entre $\widehat{\mathbb{Z}}$ y $\mathbb{T}$, un grupo compacto, en consonancia de nuevo con el Teorema 3.9.

Como consecuencia del Teorema 3.8 (i), obtenemos un resultado conocido.

Corolario 3.11 (Lema de Riemann-Lebesgue)**.** Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ entonces $\hat{f}(n) \to 0$ cuando $|n| \to \infty$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\hat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to 0$.

Por último, extenderemos el fruto de esta discusión a otros grupos.

Proposición 3.12. Si $G_1, \dots, G_n$ son grupos LCA. entonces el grupo dual de $G_1 \times \dots G_n$ es $\widehat{G}_1 \times \dots \widehat{G}_n$.

Demostración. Cada $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \prod_{i=1}^n \widehat{G}_i$ define un caracter continuo en $\prod_{i=1}^n G_i$ a través de la ecuación $((x_1, \dots, x_n), (\gamma_1, \dots, \gamma_n)) = ((x_1, \gamma_1), \dots, (x_n, \gamma_n))$. Además, cualquier caracter continuo en $\prod_{i=1}^n G_i$ es de esta forma, definiendo $(x, \gamma_j) = ((1, \dots, 1, x_j, 1, \dots, 1), \gamma)$. $\square$

Por tanto, el dual de $\mathbb{R}^n$ es él mismo, el de $\mathbb{Z}^n$ es $\mathbb{T}^n$, y el de $\mathbb{T}^n$ es $\mathbb{Z}^n$.

3.3. Transformada de medidas

Dado un grupo G LCA, consideramos el conjunto $M(G)$ de las medidas de Radon complejas. En este espacio podemos definir también la operación convolución para dotarlo de una estructura de álgebra de Banach. Sean $\mu, \nu \in M(G)$. Definimos un funcional lineal $I : C_0(G) \to \mathbb{C}$ dado por $I(f) = \int\int \phi(x+y)d\mu(x)d\nu(y)$, que satisface $|I(f)| \leq ||f||_\infty ||\mu|| ||\nu||$, por lo que $||I|| \leq ||\mu|| ||\nu||$. Por el Teorema 1.18, este funcional define una medida $\mu * \nu$ que llamaremos la *convolución de* μ *y* ν, y satisface $||\mu * \nu|| \leq ||\mu|| ||\nu||$.

Teorema 3.13. (i) Si $\mu \in M(G)$ y $\nu \in M(G)$, entonces $\mu * \lambda \in M(G)$.

(ii) La convolución es asociativa y conmutativa.

(iii) $||\mu * \nu|| \leq ||\mu|| \cdot ||\nu||$.

Demostración. (i) Es consecuencia de la discusión anterior.

(ii) Por definición, la convolución de $\mu * \nu$ es la medida que satisface

$$\int\int f d(\mu * \nu) = \int\int f(x+y) d\mu(x) d\nu(y) \tag{3.3}$$

para toda $f \in C_0(G)$. Sean $\mu, \nu, \lambda \in M(G)$ y $f \in C_c(G)$, entonces

$$\begin{aligned} \int f d(\mu * (\nu * \lambda)) &= \int\int f(x+y) d\mu(x) d(\nu * \lambda)(y) = \int\int\int f(x+y+z) d\mu(x) d\nu(y) d\lambda(z) \\ &= \int\int f(y+z) d(\mu * \nu)(y) d\lambda(z) = \int f d((\mu * \nu) * \lambda). \end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el Teorema 1.22. Además, por el Teorema 1.14, se tiene la igualdad para cada $f \in C_0(G)$. Como G es conmutativo, $f(x+y) = f(y+x)$, por lo que la conmutatividad se sigue de (3.3). $\square$

Esta definición de la convolución de medidas se puede encontrar en [7]. Otra definición alternativa, aunque menos elegante, se puede encontrar en [17] y [3]: $(\mu * \nu)(E) = \int \nu(E-x)d\mu(x) = \int \mu(E-y)d\nu(y)$ para todo $E \in \mathscr{B}(G)$. Sin embargo, [24] demuestra que estas dos definiciones son equivalentes, lo que permite extender la fórmula (3.3) para funciones medibles Borel acotadas.

Corolario 3.14. $M(G)$ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad con la operación convolución.

Demostración. Del Teorema 3.13, se deduce la distributividad de la convolución respecto de la suma. Si δ_0 es la medida concentrada en $x = 0$ tal que $\delta_0(E) = 1$ si $0 \in E$ y $\delta_0(E) = 0$ si no. Entonces

$$\delta_0 * \mu = \mu * \delta_0(E) = \int_G \chi_E d(\mu * \delta_0) = \int_G \int_G \chi_E(x+y)d\mu(x)d\delta_0(y) = \int_G \chi_E(x)d\mu(x) = \mu(E)$$

para toda $\mu \in M(G)$. $\square$

De la misma forma que extendemos la convolución para medidas de Radon complejas, podemos considerar la Transfromada de Fourier de elementos de $M(G)$.

Definición 3.15. Dada $\mu \in M(G)$, definimos la *Transformada de* μ, $\hat{\mu} : \gamma \to \mathbb{C}$, dada por

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G (-x, \gamma)d\mu(x).$$

Denotaremos por $B(\Gamma)$ al conjunto de todas estas funciones $\hat{\mu}$.

Teorema 3.16. Si $\mu \in M(G)$, entonces:

(i) Toda $\hat{\mu} \in B(\Gamma)$ es acotada y uniformemente continua.

(ii) Si $\sigma = \mu * \lambda$, $\hat{\sigma} = \hat{\mu} \cdot \hat{\lambda}$. Por tanto, la aplicación $\mu \mapsto \hat{\mu}(\gamma)$ es un funcional multiplicativo no nulo de $M(G)$ para todo $\gamma \in \Gamma$.

(iii) $B(\Gamma)$ es invariante por traslaciones, por producto por (x, γ) para todo $x \in G$, y por conjugación compleja.

Demostración. (i) Se puede comprobar fácilmente que $|\hat{\mu}(\gamma)| \leq ||\mu||$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Dado $\varepsilon > 0$, existe un compacto K de G tal que $|\mu|(G \setminus K) < \varepsilon$. Para cualesquiera $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$:

$$|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| \leq \int_G |(-x, \gamma_1 - \gamma_2)|d|\mu|(x) = \int_G |1 - (x, \gamma_1 - \gamma_2)|d|\mu|(x).$$

Si $\gamma_1 - \gamma_2 \in N(K, \varepsilon)$, entonces $\int_K |1-(x, \gamma_1 - \gamma_2)|d|\mu|(x) < \varepsilon \cdot ||\mu||$, y $\int_{G \setminus K} |1-(x, \gamma_1 - \gamma_2)|d|\mu|(x) \leq \int_{G \setminus K} 2d|\mu|(x) = 2|\mu|(G \setminus K) < 2\varepsilon$. Por tanto $|\hat{\mu}(\gamma_1) - \hat{\mu}(\gamma_2)| < (2 + ||\mu||)\varepsilon$, y $\hat{\mu}$ es uniformemente continua.

(ii) Sea $\sigma = \mu * \lambda$,

$$\hat{\sigma}(\gamma) = \int_G \int_G (-x-y,\gamma) d\mu(x) d\lambda(y) = \left(\int_G (-x,\gamma) d\mu(x) \right) \left(\int_G (-y,\gamma) d\lambda(y) \right) = \hat{\mu}(\gamma)\hat{\lambda}(\gamma)$$

(iii) Dada una medida μ, si tomamos otra medida λ tal que $d\lambda(x) = (x,\gamma_0)d\mu(x)$, entonces $\hat{\lambda}(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma-\gamma_0)$ (invariancia por traslaciones), ya que

$$\hat{\lambda}(\gamma) = \int_G (-x,\gamma) d\lambda(x) = \int_G (-x,\gamma)(x,\gamma_0) d\mu(x) = \int_G (-x,\gamma-\gamma_0) = \hat{\mu}(\gamma-\gamma_0).$$

Si $\lambda(E) = \mu(E-x)$ para todo conjunto medible E,

$$\hat{\lambda}(\gamma) = \int_G (-y,\gamma) d\lambda(y) = \int_G (-y+x,\gamma) d\mu(y) = (x,\gamma)\hat{\mu}(\gamma).$$

Por último, para la medida $\tilde{\mu}$ definida por $\tilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$,

$$\int_G (-x,\gamma) d\tilde{\mu}(x) = \int_G (-x,\gamma) d\overline{\mu}(-x) = \int_G (x,\gamma) d\overline{\mu}(x) = \overline{\int_G (-x,\gamma) d\mu(x)}$$

□

A continuación, demostramos un resultado que resultará fundamental más adelante, que establece la relación unívoca entre la Transformada de una medida y la medida.

Teorema 3.17. Si $\mu \in M(\Gamma)$ satisface $\int_\Gamma (x,\gamma) d\mu(\gamma) = 0$ para todo $x \in G$, entonces necesariamente $\mu = 0$.

Demostración. Dada una función $f \in L^1(G)$,

$$\int_\Gamma \hat{f} d\mu(\gamma) = \int_G \int_G f(x)(-x,\gamma) dx d\mu(\gamma) = \int_G f(x) \left(\int_\Gamma (-x,\gamma) d\mu(\gamma) \right) dx = 0.$$

Por el Teorema 3.8 $A(\Gamma)$ es denso en $C_0(\Gamma)$, por lo que $\int_\Gamma \phi d\mu = 0$ para todo $\phi \in C_0(\Gamma)$ y $\mu = 0$. □

3.4. Funciones definidas positivas

Ahora, introducimos una familia de funciones que nos será útil para demostrar el Teorema de Bochner, herramienta necesaria para probar algunos teoremas fundamentales, como el Teorema de Inversión y el Teorema de Plancherel.

Definición 3.18. Una función $\phi : G \to \mathbb{C}$ se dice *definida positiva* si para cualesquiera $x_1, \ldots, x_n \in G$ y $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ se cumple

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n \overline{c_m} \phi(x_n - x_m) \geq 0. \tag{3.4}$$

Vemos algunas de sus propiedades.

Proposición 3.19. Si $\phi : G \to \mathbb{C}$ es definida positiva, entonces cumple las siguientes propiedades:

(i) $\phi(-x) = \overline{\phi(x)}$.

(ii) $|\phi(x)| \leq \phi(0)$.

(iii) $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2\phi(0)Re(\phi(0) - \phi(x-y))$.

Además, (ii) implica que $\phi(0) \geq 0$ y ϕ es acotada; y por (iii), ϕ es uniformemente continua si es continua en 0.

Demostración. (i) En la fórmula (3.4) tomamos $N = 2$, $x_1 = 0, x_2 = x, c_1 = 1, c_2 = c$, que implica que

$$(1 + |c|^2)\phi(0) + c\phi(x) + \overline{c}\phi(-x) \geq 0 \tag{3.5}$$

Ahora, elegimos $c = 1$. Si $x = 0$, $4\phi(0) \geq 0$, es decir, $\phi(0) \geq 0$. Como $\phi(0) \in \mathbb{R}$, entonces $\phi(x) + \phi(-x) \in \mathbb{R}$ para todo x. Si $c = i$, entonces $2\phi(0) + i\phi(x) - i\phi(-x) \geq 0$, y como $\phi(0)$ es real, $i(\phi(x) - \phi(-x))$ tiene que serlo también. Además,

$$\phi(x) + \phi(-x) = \overline{\phi(x) + \phi(-x)} = \overline{\phi(x)} + \overline{\phi(-x)} \tag{3.6}$$

$$i(\phi(x) - \phi(-x)) = \overline{i(\phi(x) - \phi(-x))} = -i(\overline{\phi(x)} - \overline{\phi(-x)})$$

por lo que $\phi(-x) - \phi(x) = \overline{\phi(x)} - \overline{\phi(-x)}$, que sumada a (3.6) nos da la igualdad buscada.

(ii) Tomamos α tal que $e^{i\alpha}\phi(x) = -|\phi(x)|$. Si $c = e^{i\alpha}$ en la ecuación (3.5), entonces $2\phi(0) - |\phi(x)| + \overline{e^{i\alpha}\phi(x)} = 2\phi(0) - 2|\phi(x)| \geq 0$.

(iii) La ecuación (3.4) con $N = 3$, $x_1 = 0, x_2 = x, x_3 = y, c_1 = 1, c_2 = (\lambda|\phi(x) - \phi(y)|)/(\phi(x) - \phi(y))$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$, y $c_3 = -c_2$ resulta

$$\phi(0) + \overline{c_2}\phi(-x) - \overline{c_2}\phi(-y) + c^2\phi(x) + |c_2|^2\phi(0) - |c_2|^2\phi(x-y) - c_2\phi(y) - |c_2|^2\phi(y-x) + |c_2|^2\phi(0) =$$

$$= (1 + 2\lambda^2)\phi(0) - 2\lambda^2 Re(\phi(x-y)) + 2\lambda|\phi(x) - \phi(y)| \geq 0.$$

Esta expresión se puede interpretar como una ecuación de segundo grado con incógnita λ con una o ninguna solución, es decir, con discriminante negativo o cero: $4|\phi(x) - \phi(y)|^2 - 4 \cdot 2Re(\phi(0) - \phi(x-y)) \cdot \phi(0) \leq 0$, es decir, $|\phi(x) - \phi(y)|^2 \leq 2 \cdot \phi(0) \cdot Re(\phi(0) - \phi(x-y))$. □

Ejemplo 3.20. Sea $f \in L^2(G)$, $\tilde{f}$ la función definida como $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, y $\phi = f * \tilde{f}$. Entonces $\hat{\phi}$ es continua (por el Teorema 3.3 (ii)) y definitiva positiva pues

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\phi(x_n - x_m) = \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\left(\int_G f(x_n - x_m - y)\overline{f(-y)}dy\right) =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\left(\int_G f(x_n - y)\overline{f(x_m - y)}dy\right) = \int_G \left|\sum_{n,m=1}^{N} c_n f(x_n - y)\right|^2 dy \geq 0.$$

Ejemplo 3.21. Los caracteres son funciones definidas positivas ya que

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}(x_n - x_m, \gamma) = \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}(x_n, \gamma)\overline{(x_m, \gamma)} = |\sum_{n=1}^{N} c_n(x_n, \gamma)|^2 \geq 0$$

Por tanto, toda combinación lineal de caracteres con coeficientes positivos es definida positiva. Podemos considerar una generalización de este resultado. *Dada una medida $\mu \in M(G)$, $\mu \geq 0$, entonces la función $\phi : G \to \mathbb{C}$ definida por la expresión $\phi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)d\mu(\gamma)$ es continua y definida positiva.* En primer lugar, es definida positiva porque

$$\sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}\phi(x_n - x_m) = \int_\Gamma \sum_{n,m=1}^{N} c_n\overline{c_m}(x_n - x_m, \gamma)d\mu(\gamma) = \int_\Gamma |\sum_{n=1}^{N} c_n(x_n, \gamma)|d\mu(\gamma) \geq 0.$$

Como los conjuntos $N(C, r)$ del Teorema 3.9 son abiertos en G, imitando la prueba del Teorema 3.16(i), podemos demostrar que ϕ es continua.

Este ejemplo constituye la parte más directa del siguiente teorema, a través del cual caracterizaremos las funciones definidas positivas. Este resultado lleva el nombre del matemático americano Solomon Bochner, que lo probó en el caso $G = \mathbb{R}$, aunque fue probado en el caso general por André Weil [27].

Teorema 3.22 (Bochner)**.** Una función continua $\phi : G \to \mathbb{C}$ es definida positiva si y sólo si existe una medida positiva (finita) $\mu \in M(\Gamma)$ tal que

$$\phi(x) = \int_\Gamma (x, \gamma)d\mu(\gamma) \text{ para todo } x \in G. \tag{3.7}$$

Demostración. Por el Teorema 3.17, la representación del enunciado es única. Si $\phi(0) = 0$, es trivial por la Proposición 3.19. Pero si $\phi(0) > 0$, entonces sabemos que $\phi(0)^{-1}\phi$ es una función continua y definida positiva, por lo que podemos suponer que $\phi(0) = 1$.

Sea $f \in C_c(G)$ con soporte compacto K. Entonces la función que a cada par $(x, y) \in K \times K$ le asigna $f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)$ es uniformemente continua. Podemos encontrar un partición de K tal que la suma $\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i)\overline{f(x_j)}\phi(x_i - x_j)m(E_i)m(E_j) \geq 0$ con $x_i \in E_i$ aproxima a la integral $\int_G f(x)\overline{f(y)}\phi(x-y)dxdy \geq 0$. La no negatividad se debe a que ϕ es definida positiva, e implica que la integral es no negativa para toda función $f \in C_c(G)$, y por densidad, para toda $f \in L^1(G)$.

Ahora, definimos el funcional $T_\phi : L^1(G) \to \mathbb{C}$ dado por la expresión

$$T_\phi(f) = \int_G f(x)\phi(x)dx, \tag{3.8}$$

y definimos también $[f, g] = T_\phi(f * \tilde{g}) = \int_G \int_G f(x)\overline{g(y)}\phi(x-y)dxdy$ para $f, g \in L^1(G)$. Se puede comprobar fácilmente que $[f, g]$ es lineal en la variable f, $[g, f] = \overline{[f, g]}$ (usando la Proposición 3.19 (i)), y por el párrafo anterior, $[f, f] \geq 0$. Con todo esto, $[f, g]$ es un producto escalar hermitiano por lo que podemos probar la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|[f, g]|^2 \leq [f, f] \cdot [g, g]. \tag{3.9}$$

Si $g = \frac{\chi_V}{m(V)}$ donde V es un entorno simétrico del origen, entonces

$$[f,g] - T_\phi(f) = \frac{1}{m(V)} \int_G f(x) \left(\int_V (\phi(x-y) - \phi(x)) dy \right) dx$$

y además

$$[g,g] - 1 = \frac{1}{m(V)^2} \int_V \int_V (\phi(x-y) - 1) dx dy.$$

Por la Proposición 3.19, $[f,g] - T_\phi(f)$ y $[g,g] - 1$ tienden a 0 cuando $m(V) \to 0$, por lo que, sustituyendo en la igualdad (3.9), obtenemos:

$$|T_\phi(f)|^2 \leq T_\phi(f * \tilde{f}).$$

Definimos por comodidad $h = f * \tilde{f}$, y $h^{(n)} = h^{(n-1)} * h$ para $n \geq 2$. Se puede comprobar que $h = \tilde{h}$. Por la Proposición 3.19 (i), $||\phi||_\infty = \phi(0) = 1$, por lo que aplicando sucesivamente (3.9), obtenemos

$$|T_\phi(f)|^2 \leq |T_\phi(h)| \leq |T_\phi(h^{(2)})|^{1/2} \leq \ldots \leq |T_\phi(h^{(2^n)})|^{2^{-n}} \leq ||h^{2^n}||_1^{2^{-n}}.$$

El último miembro de la desigualdad tiende a $||\hat{h}||_\infty$ cuando $n \to \infty$. En resumen, para toda $f \in L^1(G)$, $|T_\phi(f)|^2 \leq ||\hat{h}||_\infty = ||\hat{f} \cdot \overline{\hat{f}}||_\infty = |||\hat{f}|^2||_\infty = ||\hat{f}||_\infty^2$, y por tanto $|T_\phi(f)| \leq ||\hat{f}||_\infty$. Esta desigualdad implica que el funcional $T_\phi(f)$ induce un funcional $\hat{f} \mapsto T_\phi(f)$ en $A(\Gamma)$, que por densidad, se puede extender a un funcional lineal de norma no mayor que 1 en $C_0(\Gamma)$. Por el Teorema 1.18, existe una medida $M(\Gamma)$ tal que $||\mu|| \leq 1$ y

$$T_\phi(f) = \int_\Gamma \hat{f}(-\gamma) d\mu(\gamma) = \int_G f(x) \left(\int_\Gamma (x,\gamma) d\mu(\gamma) \right) dx. \tag{3.10}$$

Comparando (3.8) y (3.10), y por continuidad, $\phi(x) = \int_\Gamma (x,\gamma) d\mu(\gamma)$. Tomando $x = 0$, obtenemos que $1 = \phi(0) = \int_\Gamma d\mu(\gamma) = \mu(\Gamma) \leq ||\mu|| \leq 1$. Por tanto, $\mu(\Gamma) = ||\mu||$ y por el Lema 2.14, $\mu \geq 0$. $\square$

De este modo, el Teorema 3.22 da una representación de las funciones definidas positivas continuas como una especie de combinación lineal positiva de caracteres continuos.

3.5. Teorema de Inversión

Denotamos por $B(G)$ al conjunto de funciones $f : G \to \mathbb{C}$ que se pueden representar por la fórmula

$$f(x) = \int_\Gamma (x,\gamma) d\mu(\gamma) \tag{3.11}$$

para alguna medida $\mu \in M(G)$. Por el Teorema 3.22 y el Teorema 1.11, $B(G)$ es el conjunto de combinaciones $\mathbb{C}-$lineales finitas de funciones $G \to \mathbb{C}$ continuas y definidas positivas.

Lema 3.23. Si $K \subseteq \Gamma$ es un compacto, existe una función $f \in C_c(G) \cap B(G)$ tal que $\hat{f} \geq 0$ en Γ y $\hat{f} > 0$ en K.

Demostración. Por la Proposición 1.21, existe una función $h \in C_c(G)$ y $\hat{h}(0) \neq 0$. Si tomamos $g = h * \tilde{h} \in C_c(G)$ (por el Teorema 3.3 (i)), sabemos que $\hat{g} = |\hat{h}|^2$, por lo que $\hat{g} \geq 0$ y $\hat{g}(0) > 0$, por lo que existe un entorno V de 0 en Γ tal que $\hat{g} > 0$ en V. Por compacidad, K se puede cubrir con un número finito de estos abiertos, por lo que existen funciones $u_1, \ldots, u_n \in C_c(G)$ tales que $f = u_1 * \tilde{u_1} + \ldots + u_n * \tilde{u_n}$ cumple $\hat{f} > 0$ en K y $\hat{f} \geq 0$ en todo Γ. Como $f \in C_c(G)$, por el Ejemplo 3.20, $f \in B(G) \cap L^1(G)$. □

Teorema 3.24 (Teorema de Inversión)**.** Si $f \in L^1(G) \cap B(G)$ entonces:

(i) $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$.

(ii) Fijada la medida de Haar de G, se puede normalizar la medida de Haar de Γ de forma que se cumpla la fórmula de inversión

$$f(x) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)(x,\gamma)d\gamma. \tag{3.12}$$

Demostración. Dada $f \in L^1(G) \cap B(G)$, denotaremos por μ_f a la medida correspondiente tal que se cumple la fórmula (3.11). Si $h \in L^1(G)$, entonces

$$(h*f)(0) = \int_G h(-x)f(x)dx = \int_\Gamma \left(\int_G h(-x)(x,\gamma)dx \right) d\mu_f(\gamma) = \int_\Gamma \hat{h}(\gamma)d\mu_f(\gamma). \tag{3.13}$$

Si $g \in B(G) \cap L^1(G)$, aplicando (3.13) tenemos

$$\int_\Gamma \hat{h}\hat{g}d\mu_f = ((h*g)*f)(0) = ((h*f)*g)(0) = \int_\Gamma \hat{h}\hat{f}d\mu_g.$$

Por el Teorema 3.8 (i) se cumple

$$\hat{g}d\mu_f = \hat{f}d\mu_g$$

para cualesquiera $f, g \in B(G) \cap L^1(G)$.

Sea $\psi \in C_c(\Gamma)$ con soporte compacto $K \subseteq \Gamma$. Por el Lema 3.23, existe una función $g \in B(G) \cap L^1(G)$ tal que $\hat{g} > 0$ en K. De este modo, podemos definir el siguiente operador en $C_c(\Gamma)$,

$$T\psi = \int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{g}} d\mu_g.$$

Comprobemos algunas propiedades de T:

- Está bien definido. Si sustituimos g por otra función $f \in B^1$ tal que $\hat{f} \neq 0$ en K, no cambia el valor de $T\psi$ pues
$$\int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{f} d\mu_g = \int_\Gamma \frac{\psi}{\hat{f}\hat{g}} \hat{g} d\mu_f.$$
- T es lineal por la linealidad de la integral.

- Ya que $g \in B(G) \cap L^1(G)$, por el Teorema 3.22 $\mu_g \geq 0$. Por tanto, si $\psi \geq 0$, el Teorema 1.17, entonces $T\psi \geq 0$.
- T no es idénticamente nulo. Existe una función ψ y una medida μ_f tales que $\int_\Gamma \psi d\mu_f \neq 0$, y por tanto, $T(\psi \hat{f}) = \int_\Gamma \frac{\psi \hat{f}}{\hat{g}} d\mu_g = \int_\Gamma \psi d\mu_f \neq 0$.
- T es invariante por traslaciones. Sean $\psi \in C_c(\Gamma)$ y $\gamma_0 \in \Gamma$. Podemos construir como se ha hecho antes una función g tal que $\hat{g} > 0$ en el compacto $K \cup (\gamma_0 + K)$. Ahora, definimos la función f dada por la expresión $f(x) := (-x, \gamma_0) g(x)$. Sabemos por la demostración del Teorema 3.8 que $\hat{f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma + \gamma_0)$. Además, de la definición de f es evidente que $d\mu_g(x, \gamma_0) = d\mu_f$, por lo que por el Teorema 3.16, $\mu_f(E) = \mu_g(E - \gamma_0)$. Si definimos $\psi_0(\gamma) := \psi(\gamma - \gamma_0)$,

  $$T\psi_0 = \int_\Gamma \frac{\psi(\gamma - \gamma_0)}{\hat{g}(\gamma)} d\mu_g(\gamma) = \int_\Gamma \frac{\psi(\gamma)}{\hat{f}(\gamma)} d\mu_f(\gamma) = T\psi.$$

  La invarianza por traslaciones implica que $T\psi = \int_\Gamma \psi(\gamma) d\gamma$ donde $d\gamma$ es una medida de Haar de Γ.

Si tomamos $f \in B(G) \cap L^1(G)$ y $\psi \in C_c(\Gamma)$, sabemos que se tiene la igualdad

$$\int_\Gamma \psi d\mu_f = T(\psi \hat{f}) = \int_\Gamma \psi \hat{f} d\gamma.$$

Como esto se cumple para todo $\psi \in C_c(\Gamma)$, deducimos que $\hat{f} d\gamma = d\mu_f$ para toda $f \in B(G) \cap L^1(G)$. Ya que μ_f es una medida finita, $\int_\Gamma |\hat{f}| d\gamma = |\mu_f|(\Gamma) < +\infty$ (por la Proposición 1.19), es decir, $\hat{f} \in L^1(\Gamma)$. Finalmente, podemos concluir la fórmula del enunciado

$$f(x) = \int_\Gamma (x, \gamma) d\mu_f(\gamma) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)(x, \gamma) d\gamma.$$

□

Además de una fórmula para expresar una función $G \to \mathbb{C}$ con ciertas propiedades en términos de su transformada, este teorema tiene importantes consecuencias sobre el comportamiento de los caracteres y la topología de G.

Corolario 3.25. Los conjuntos $N(C, r)$ y su trasladados del Teorema 3.9 son una base de la topología de G.

Demostración. Por ser G un grupo topológico, existe un entorno W de 0 tal que $\overline{W} - \overline{W} \subseteq V$. Si $f = \frac{\chi_{\overline{W}}}{m(\overline{W})^{1/2}}$, f está en $L^2(G)$ y por el Ejemplo 3.20, $g = f * \tilde{f}$ es continua y definida positiva, y por su forma integral, vale 0 fuera de $\overline{W} - \overline{W}$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema 3.24 a g.

$$\int_\Gamma \hat{g}(\gamma) d\gamma = g(0) = \int_G |f(-y)|^2 dy = \int_G |f(y)|^2 dy = \int_{\overline{W}} \frac{1}{m(\overline{W})} dy = 1.$$

Debe existir un compacto C en Γ tal que $\int_C \hat{g}(\gamma) d\gamma > \frac{2}{3}$. Supongamos que $x \in N(C, 1/3)$ y distingamos dos casos:

- Si $\gamma \in C$, entonces $|1-(x,\gamma)| < 1/3 \Rightarrow Re(1-(x,\gamma)) < 2/3 \Rightarrow Re(x,\gamma) > 2/3$. Por tanto, $\int_C \hat{g}(\gamma)(x,\gamma)d\gamma > \int_C \hat{g}(\gamma)Re(x,\gamma)d\gamma > \frac{2}{3}\int_C \hat{g}(\gamma)d\gamma > \frac{4}{9}$.
- Si $\gamma \in \gamma \backslash C$, y como $\hat{g} = |\hat{f}|^2 \geq 0$, entonces $\left|\int_{\Gamma\backslash C} \hat{g}(\gamma)(x,\gamma)d\gamma\right| \leq \int_{\Gamma\backslash C} |\hat{g}(\gamma)|d\gamma = \int_{\Gamma\backslash C} \hat{g}(\gamma)d\gamma = 1 - \int_C \hat{g}(\gamma)d\gamma < \frac{1}{3}$.

En definitiva, si $x \in N(C,1/3)$, $g(x) > \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$, y ya que g se anula fuera de $\overline{W} - \overline{W}$, $x \in V$, es decir, $N(C,1/3) \subseteq V$, lo que concluye la prueba. □

Como resultado de esto último, obtenemos una propiedad importante de los caracteres.

Corolario 3.26. Γ separa puntos de G.

Demostración. Sea $x_0 \in G$, $x_0 \neq 0$. Podemos tomar un entorno de 0, V, como el del Corolario 3.25 tal que $x_0 \notin V$. Es decir, para cierto $\gamma \in \Gamma$ se cumple $|1-(x_0,\gamma)| > 1/3$, por lo que $(x_0,\gamma) \neq 0$. El enunciado resulta de sustituir $x - y$ por x_0. □

3.5.1. Normalización de la medida de Haar

Dada una medida de Haar m o dx en G, el Teorema de Inversión nos da una medida de Haar en Γ para la que la fórmula de inversión (3.12) se cumple, que llamaremos la *medida dual* de Γ, $d\gamma$ o m_Γ. Al hacer Análisis de Fourier en un grupo concreto, es importante conocer la normalización de la medida de Haar dual, para poder aplicar el Teorema de Inversión. Primero establecemos un resultado general, y luego, algunos casos particulares.

Proposición 3.27. Si G es compacto y tomamos la medida de Haar en G de forma que $m(G) = 1$, la medida dual en γ es la medida del cardinal. Si G es discreto y elegimos la medida del cardinal, entonces la medida de Γ satisface $m_\Gamma(\Gamma) = 1$.

Demostración. Sea G compacto, $m(G) = 1$ y tomemos la función $f = 1$. Por la demostración del Teorema 3.9, $\hat{f} = \chi_{\{0\}}$ siempre que $\gamma \neq 0$. Evidentemente, $f \in L^1(G)$, y $f \in B(G)$, pues $f(x) = (x,0)$. Suponiendo que m_Γ sea la medida dual de m, por el Teorema de Inversión,

$$1 = f(0) = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)d\gamma = m_\Gamma(\{0\}).$$

La invarianza por traslaciones implica que todo conjunto unipuntual de Γ tiene medida 1.

Recíprocamente, si G es discreto y cada conjunto unipuntual tiene medida 1, tomemos $f = \chi_{\{0\}}$, entonces $\hat{f}(\gamma) = \sum_{x\in G}(x,\gamma)f(x) = f(0) = 1$. Además, $f \in L^1(G)$ y $f \in B(G)$ pues $f(x) = \int_\Gamma (x,\gamma)dm_\Gamma$ si m_Γ cumple $m_\Gamma(\Gamma) = 1$ (ver demostración Teorema 3.9). □

Ya vimos en la subsección 3.2.1 que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{T}$ son duales el uno de lo otro. La medida *natural* en $\mathbb{Z}$ es la medida del cardinal por lo que la medida en $\mathbb{T}$ debe cumplir $m(\mathbb{T}) = 1$. Por tanto, si $f \in L^1(G)$, la Transformada de Fourier de f es

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(\theta)e^{-2\pi i n\theta}d\theta,$$

y si además $f \in B(\mathbb{T})$, del Teorema 3.24 obtenemos que

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \hat{f}(n) e^{-2\pi i n\theta}.$$

Por otro lado, si $f \in L^1(\mathbb{Z}) \cap B(\mathbb{Z})$,

$$\hat{f}(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) e^{-2\pi i\theta n} \quad \text{y} \quad f(n) = \int_0^1 \hat{f}(\theta) e^{2\pi i\theta n}.$$

Observación 3.28. Si identificamos $\mathbb{T}$ con el intervalo $[0,2\pi)$, se puede calcular como hicimos en la subsección 3.2.1, que los caracteres son la familia son $\{e^{in\theta}\}_{n\in\mathbb{Z}}$, por lo que, suponiendo que se tomara la medida del cardinal en $\mathbb{Z}$, se debería cumplir que $m(\mathbb{T}) = 1$. Por tanto se debería elegir la medida de Lebesgue normalizada, $\frac{d\theta}{2\pi}$, y en ese caso las fórmulas anteriores quedarían:

$$\hat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{y} \quad f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{in\theta}.$$

Si identificamos $\widehat{\mathbb{R}}$ con $\mathbb{R}$ a través de los caracteres $e^{2\pi i\xi x}$, la medida dual es la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}$. Para ver esto, consideramos la función $g(x) = e^{-\pi x^2}$. Esta función pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, pues $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$. Como $\hat{g}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i\xi x} dx$, derivando respecto de ξ tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{g}'(\gamma) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i\chi x}(-2\pi i x) dx = i\int_{\mathbb{R}} (e^{-\pi x^2})' e^{-2\pi i\xi x} dx \\ &= i[[e^{-2\pi i\xi x} e^{-\pi x^2}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i\xi x}(-2\pi i\xi) dx] = -2\pi\xi\hat{g}(\gamma). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx = 1$, y que $(\hat{g}(\gamma) e^{\pi\xi^2})' = \hat{g}'(\gamma) e^{\pi\xi^2} - \hat{g}(\gamma) 2\pi\xi e^{\pi\xi^2} = 0$, deducimos que $\hat{g}(\gamma) e^{\pi\xi^2} = \hat{g}(0) e^{\pi 0^2} = 1$, por lo que $\hat{g}(\gamma) = e^{-\pi\xi^2}$, es decir, la Transformada de Fourier de g es ella misma. Como g es par, $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i\xi x - \pi x^2} d\xi$, es decir, $g \in B(\mathbb{R})$. Aplicando el Teorema 3.24, deducimos que la fórmula (3.12) se cumple cuando dx y $d\xi$ son ambas la medida de Lebesgue. Por tanto, si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap B(\mathbb{R})$,

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i\xi x} dx, \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi.$$

Si hubieramos considerado los caracteres $e^{i\xi x}$, la medida dual sería $d\xi/2\pi$. Esta función $g(x) = e^{-\pi x^2}$ tiene una relevancia especial en Análsiis de Fourier sobre $\mathbb{R}$, pues la familia de funciones $x \mapsto e^{-ax^2}$ con $a \in \mathbb{R}$, es la clave para demostrar el Teorema 3.24 en el caso particular de la recta real.

Observación 3.29. En lo que queda de capítulo supondremos que la medida del grupo dual está normalizada de forma que se cumpla (3.12).

3.6. Teorema de Plancherel e identidad de Parseval

El espacio $L^2(G)$, que es un espacio de Hilbert dotado del producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx,$$

es estudiado en la teoría clásica de Análisis de Fourier pues permite deducir útiles fórmulas que relacionan una función con sus coeficientes de Fourier. Hasta ahora, hemos estudiado la Transformada de Fourier en el álgebra de Banach $L^1(G)$, sin embargo, el Teorema 3.24 nos permite extender la Transformada de Fourier a $L^2(G)$.

Teorema 3.30 (Teorema de Plancherel)**.** La transformada de Fourier en $L^1(G)\cap L^2(G)$ se extiende de manera única a una isometría entre $L^2(G)$ y $L^2(\Gamma)$.

Demostración. Sea $f \in (L^1\cap L^2)(G)$ y definamos $g = f * \tilde{f}$. Entonces $g \in L^1(G)$, y por el Ejemplo 3.20 es continua y definida positiva, $\hat{g} = |\hat{f}|^2$, y es una isometría por el Teorema 3.24:

$$||f||_2^2 = \int_G |f(x)|^2dx = \int_G f(x)\tilde{f}(-x)dx = g(0) = \int_\Gamma \hat{g}(\gamma)d\gamma = \int_\Gamma |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma = ||\hat{f}||_2^2.$$

Consideramos el conjunto $\Phi = \{\hat{f} \in A(\Gamma) : f \in (L^1\cap L^2)(G)\}$. Por un argumento similar al de la demostración del Teorema 3.8, la invarianza por traslaciones de $(L^1\cap L^2)(G)$ implica la invarianza por producto por (x,γ) para cualquier $x \in G$ de Φ.

Sea $\psi \in L^2(G)$ y supongamos que $\int_\Gamma \phi\overline{\psi}d\gamma = 0$ para todo $\phi \in \Phi$. Reemplazando $\psi(\gamma)$ por $\psi\cdot(x,\gamma)$ para cualquier $x \in G$, comprobamos que se cumple

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}(x,\gamma)d\gamma = 0$$

para toda $\phi \in \Phi$ y para todo $x \in G$. Existe $f \in L^1(G)\cap L^2(G)$ tal que $\hat{f} = \phi$, $f * \tilde{f} \in L^1(G)\cap B(G)$ y $\widehat{(f*\tilde{f})} = |\phi|^2 \in L^1(\Gamma)$ por el Teorema 3.24. Por tanto, $\phi, \psi \in L^2(\Gamma)$ y $\phi\overline{\psi} \in L^1(\Gamma)$, por lo que $\phi\overline{\psi}d\gamma \in M(\Gamma)$ por la Proposición 1.20. El Teorema 3.17 implica que $\phi\overline{\psi} = 0$ en casi todo punto para toda $\phi \in \Phi$. Por el Lema 3.23, $\psi = 0$ por lo que $\Phi = 0$ es denso en $L^2(\Gamma)$.

La última afirmación sigue del hecho que $L^1(G)\cap L^2(G)$ es denso en $L^2(G)$, de que Φ es denso en $L^2(\Gamma)$, y de la unicidad de la extensión continua. □

Esta extensión de la Transformada de Fourier a $L^2(G)$ es conocida como la *Transformada de Plancherel*, y se denotará también con el símbolo $\hat{f}$. Como consecuencia de este teorema, obtenemos que cualquier función de $L^2(\Gamma)$ es la transformada de Plancherel de algún elemento de $L^2(G)$. Si $f, g \in L^2(G)$, por la identidad de polarización, tenemos

$$4f\overline{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2,$$

que junto con el hecho de que la Transformada de Plancherel es una isometría nos da la siguiente fórmula:

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}d\gamma. \tag{3.14}$$

Por otro lado, como consecuencia directa del Teorema 3.30 obtenemos una célebre fórmula.

Teorema 3.31 (Identidad de Parseval)**.** Si $f \in L^2(G)$, entonces

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_\Gamma |\hat{f}(\gamma)|^2 d\gamma.$$

El Teorema 3.30 describe expícitamente la imagen de $L^2(G)$ por la Transformada de Plancherel. Además, también permite dar una descripción de $A(\Gamma)$, el conjunto de Transformadas de Fourier de elementos de $L^1(G)$.

Corolario 3.32. $A(\Gamma)$ es el conjunto de convoluciones $F_1 * F_2$ donde $F_1, F_2 \in L^2(\Gamma)$.

Demostración. Supongamos que $f, g \in L^2(G)$. Sustituyendo en (3.14) $\overline{g}$ en lugar de g, obtenemos

$$\int_G f(x)g(x)dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(-\gamma)d\gamma. \tag{3.15}$$

Por otro lado, sustituyendo $(-x, \gamma_0)g(x)$ en lugar de g en (3.15), obtenemos

$$\int_G f(x)g(x)(-x, \gamma_0)dx = \int_\Gamma \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma_0 - \gamma)d\gamma = (\hat{f} * \hat{g})(\gamma_0). \tag{3.16}$$

Cada función $h \in L^1(G)$ se puede expresar como $h = fg$ donde $f, g \in L^2(G)$ ($f = \sqrt{h}$ y $g(x) = h(x)/\sqrt{|h(x)|}$ si $h(x) = 0$ y $g(x) = 1$ en otro caso), y por (3.16), $\hat{h} = \hat{f}\hat{g}$ y $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\Gamma)$ por el Teorema 3.30.

Recíprocamente, si $\hat{f}, \hat{g} \in L^2(\Gamma)$, de nuevo por (3.16), $\hat{f} * \hat{g} \in A(\Gamma)$ pues $fg \in L^1(G)$. □

Corolario 3.33. Sea E un abierto no vacío de Γ. Entonces existe $\hat{f} \in A(\Gamma)$ no nula tal que $\hat{f}(\gamma) = 0$ fuera de E.

Demostración. Sea K un compacto de E con medida no nula, y sea V un entorno de 0 con clausura compacta tal que $K + \overline{V} \subseteq E$ (Proposición 1.45 y Proposición 1.13 (ii)). Definimos $\hat{f} := \hat{g} * \hat{h}$ donde $\hat{g} = \chi_K$ y $\hat{h} = \chi_{\overline{V}}$. En este caso,

$$\hat{f}(\gamma_0) = (\hat{g} * \hat{h})(\gamma_0) = \int_\Gamma \hat{g}(\gamma_0 - \gamma)\hat{h}(\gamma)d\gamma,$$

por lo que si $\gamma \notin K + \overline{V}$ entonces $\hat{f}(\gamma) = 0$. Por otro lado, $\hat{f} \in A(\Gamma)$ por el Corolario 3.32, y $\int_\Gamma \hat{f}(\gamma)d\gamma = \int_{K+\overline{V}} \hat{f}(\gamma)d\gamma = \int_{K+\overline{V}} \int_\Gamma \chi_K(\gamma - \sigma)\chi_V(\sigma)d\sigma d\gamma = m(K)m(\overline{V}) > 0$, por lo que $\hat{f}$ no es idénticamente nula. □

En el Análisis de Fourier clásico, se demuestra que si $\mathbb{T}$ se identifica con $[0, 1)$, entonces el conjunto $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2([0, 1))$. El siguiente resultado es una generalización.

Corolario 3.34. Si G es compacto y $m(G) = 1$, Γ es una base ortonormal de $L^2(G)$.

Demostración. Por la demostración del Teorema 3.9, sabemos que Γ es un conjunto ortonormal de $L^2(G)$. Si $f \in L^2(G)$ es un elemento ortogonal a Γ, es decir, cumple que $(f, \gamma) = \int_G f(x)\overline{(x, \gamma)}dx = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $\hat{f}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, y por el Teorema 3.30, $f = 0$. Por tanto, Γ es denso en $L^2(G)$, y por tanto, una base (hilbertiana) de $L^2(G)$. □

3.7. Teorema de Dualidad de Pontryagin

Hemos demostrado que si G es un grupo LCA, entonces su dual Γ también es LCA. Del mismo modo, Γ tiene un grupo dual, que denotaremos por $\widehat{\Gamma}$. Por tanto, todo lo que hemos probado para G y Γ es válido para Γ y $\widehat{\Gamma}$. De la misma forma que hemos considerado la notación (x,γ), utilizaremos $(\gamma,\hat{\gamma})$ para denotar $\hat{\gamma}(\gamma)$ donde $\hat{\gamma}\in\widehat{\Gamma}$ y $\gamma\in\Gamma$. Por otro lado, por el Teorema 3.10 (i), cada $x\in G$ se puede interpretar como un caracter en Γ, por lo que induce una aplicación $\alpha : G\to\widehat{\Gamma}$ determinada por la ecuación

$$(x,\gamma) = (\gamma,\alpha(x)) \text{ para todo } x\in G \text{ y } \gamma\in\Gamma.$$

Antes de estudiar el teorema que da nombre a la sección, demostramos dos resultados auxiliares.

Proposición 3.35. Si X es un espacio Hausdorff e Y es un subconjunto denso de X que es localmente compacto con la topología relativa, entonces y es abierto en G.

Demostración. Que Y sea localmente compacto con la topología relativa, significa que para cada punto de Y exista un entorno suyo V tal que la clausura de $V\cap Y$ en Y sea compacta. Es decir, que $K = Y\cap\overline{(V\cap Y)}$ sea un compacto.

Si definimos $W := V\setminus K$, se cumple $W\cap Y\subseteq V\cap Y\subseteq K$. Por definición de W, $W\cap V = \emptyset$. Además, como Y es denso y W es un abierto, necesariamente $W=\emptyset$. Es decir, $V\subseteq K\subseteq Y$, lo que implica que Y es abierto. $\square$

Lema 3.36. Si H es un subgrupo de un grupo topológico G y H es localmente compacto con la topología relativa, entonces H es cerrado en G.

Demostración. Tomando $Y=H$ y $X=\overline{H}$ (la clausura de un subgrupo es un subgrupo por la continuidad de la operación) en la Proposición 3.35, se demuestra que H es un subgrupo abierto de $\overline{H}$. Sólo falta ver que H es cerrado.

Si H_0 es un subgrupo abierto de G, entonces $x+H_0$ es un abierto por lo que $C=\cup_{x\in G}(x+H_0)$ es abierto, y como $H_0 = C\setminus\cup_{x\in G\setminus\{0\}}$, H_0 es cerrado. $\square$

Teorema 3.37 (Teorema de Dualidad de Pontryagin)**.** Esta aplicación α es un isomorfismo de grupos topológicos (isomorfismo de grupos y homeomorfismo) entre G y $\hat{\Gamma}$.

Demostración. Primero demostraremos que es un homomorfismo inyectivo. Sean $x,y\in G$ y $\gamma\in\Gamma$, entonces

$$\begin{aligned}(\gamma,\alpha(x+y)) &= (x+y,\gamma) = (x,\gamma)(y,\gamma) = \\ &= (y,\alpha(x))(y,\alpha(y)) = (\gamma,\alpha(x+y)).\end{aligned}$$

Por tanto, α es un homomorfismo. Si $(\gamma,\alpha(x)) = (\gamma,\alpha(y))$ para todo γ, entonces $(x,\gamma)=(y,\gamma)$ para todo γ, y por el Corolario 3.26, α es inyectiva, por lo que es un homomorfismo inyectivo. Para probar que es un isomorfismo, seguiremos tres pasos:

(a) α es un homeomorfismo de G con la imagen.
(b) $\alpha(G)$ es cerrado en $\widehat{\Gamma}$.

(c) $\alpha(G)$ es denso en $\widehat{\Gamma}$.

(a) Sean C un compacto de Γ, $r > 0$, y definamos

$$\begin{aligned} V_r &:= \{x \in G : |1-(x,\gamma)| < r \text{ para todo } \gamma \in C\} \\ W_r &:= \{\hat{\gamma} \in \hat{\Gamma} : |1-(\gamma,\hat{\gamma})| < r \text{ para todo } \gamma \in C\}. \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.10 (iii) y el Corolario 3.25, los conjuntos V_r constituyen una base de entornos del 0 de G, y los W_r, del origen de $\hat{\Gamma}$. Es evidente, que por definición de α,

$$\alpha(V_r) = W_r \cap \alpha(G).$$

De esto se deduce que α y α^{-1} son continuas en 0, y como α es un isomorfismo de grupos, son continuas en todo punto de G y de $\alpha(G)$ respectivamente.

(b) Por (a), $\alpha(G)$ es localmente compacto con la topología relativa de $\hat{\Gamma}$. Sea $\hat{\gamma}_0$ un elemento de la clausura de $\alpha(G)$, y sea U un entorno de $\hat{\gamma}_0$ con clausura compacta. Por el Lema 3.36, $\alpha(G)$ es cerrado, por lo que $\alpha(G) \cap \overline{U}$ también lo es. Además, como $\alpha(G) \cap \overline{U} \subseteq \overline{U}$, $\alpha(G) \cap \overline{U}$ es compacto porque $\overline{U}$ es compacto. Por elección de U, $\hat{\gamma}_0$ está en la clausura de $\alpha(G) \cap \overline{U}$, y por ser compacto, $\hat{\gamma}_0 \in \alpha(G)$, es decir, α es cerrado.

(c) Si $\alpha(G)$ no fuera denso en $\widehat{\Gamma}$, existiría un abierto E no vacío de $\widehat{\Gamma}$ tal que $E \cap \alpha(G) = \emptyset$, y por el Teorema 3.33, existiría $F \in A(\hat{\Gamma})$, $F \neq 0$ tal que $F(\gamma) = 0$ fuera de E, en particular, $F = 0$ en $\alpha(G)$. Como $F \in A(\widehat{\Gamma})$, debe existir $\phi \in L^1(\Gamma)$ tal que

$$F(\hat{\gamma}) = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma,\hat{\gamma})d\gamma \text{ para todo } \hat{\gamma} \in \hat{\Gamma}.$$

Como $F(\alpha(x)) = 0$ para todo $x \in G$,

$$\int_\Gamma \phi(\gamma)(-x,\gamma)d\gamma = \int_\Gamma \phi(\gamma)(-\gamma,\alpha(x))d\gamma = 0 \text{ para todo } x \in G,$$

y por el Teorema 3.17 y la Proposición 1.20, $\phi = 0$, y $F = 0$, en contradicción con lo supuesto.

En resumen, α es un homomorfismo inyectivo, y es un homeomorfismo entre G y $\alpha(G)$, que por ser denso y cerrado, coincide con $\widehat{\Gamma}$. □

La interpretación informal de este resultado es: *dado un grupo LCA, el grupo dual de su grupo dual coincide con el original*. Este resultado es muy valioso, pues tiene numerosas consecuencias:

- Podemos establecer los recíprocos del Teorema 3.9: *todo grupo conmutativo compacto es el dual de un grupo conmutativo discreto, y todo grupo conmutativo discreto es el dual de un grupo conmutativo compacto*.
- Por dualidad entre G y Γ, se cumple el dual del Teorema 3.17: *si $\mu \in M(G)$ y $\hat{\mu}(\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $\mu = 0$.*
- *$M(G)$ es un álgebra de Banach semisimple*. Esto se sigue del punto anterior.
- *Si G no es discreto entonces $L^1(G)$ no tiene una unidad*: hemos demostrado que Γ no puede ser compacto, y como $A(\Gamma) \subseteq C_0(\Gamma)$, $A(\Gamma)$ no contiene constantes no nulas, en particular, no tiene unidad, y por ser isomorfa como álgebra a $L^1(G)$, esta tampoco tiene unidad.

3.8. La compactificación de Bohr

Sea Γ el grupo dual de un grupo LCA G, y sea Γ_d el grupo Γ provisto con la topología discreta, y $\overline{G}$ el dual de este último. Por el Teorema 3.9, sabemos que $\overline{G}$ debe ser un grupo abeliano compacto, y por ello, lo llamamos la compactificación de Bohr de G. De una forma análoga a la que definimos $\alpha : G \to \hat{\Gamma}$, consideramos la aplicación $\beta : G \to \overline{G}$ determinada por la ecuación

$$(x,\gamma) = (\gamma, \beta(x)) \text{ para todo } x \in G, \gamma \in \Gamma.$$

Esta aplicación nos proporciona una importante relación entre un grupo y su compactificación de Bohr. Debemos observar que β nos es una compactificación en el sentido usual, pues G no es un homeomorfo con la imagen. El nombre de esta “compactificación” se debe al matemático danés Harald Bohr. hermano del reconocido físico Niels Bohr, por la relación que guarda con las *funciones casi periódicas*.

Teorema 3.38. La compactificación $\beta : G \to \overline{G}$ es un isomorfismo de grupos continuo entre G y un subgrupo denso $\beta(G)$ de $\overline{G}$.

Demostración. Se puede demostrar que β es un homomorfismo inyectivo de la misma forma que en la demostración del Teorema 3.37.

Veamos ahora que β es continua. Sea W un entorno del origen de $\overline{G}$. Entonces, por el Teorema 3.10, contiene un entorno del origen de la forma $\{\overline{x} \in \overline{G} : |1-(\gamma,\overline{x})| < r \text{ para todo } \gamma \in C\}$ donde $r > 0$ y C es un compacto de Γ_d. Como Γ_d es discreto, C tiene que ser un conjunto finito, es decir, existe $r > 0$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tales que

$$\{\overline{x} \in \overline{G} : |1-(\gamma_i,\overline{x})| < r \text{ para } i = 1,\ldots,n\} \subseteq W.$$

Definamos $V = \{x \in G : |1-(x,\gamma_i)| < r \text{ para } i = 1,\ldots,n\}$. Evidentemente, V es un entorno del origen de G, y además si $x \in V$ entonces $\beta(x) \in W$, por la definición de β. Esto implica que β es continua en el 0, y por traslación, en todo punto de G.

Por último, probamos que $\beta(G)$ es un subconjunto denso de $\overline{G}$. Sea $H = \overline{\beta(G)}$, la clausura de $\beta(G)$ en $\overline{G}$. Si $H \neq \overline{G}$, $\overline{G}/H$ es un grupo no trivial y compacto, por la compacidad de $\overline{G}$ y la continuidad de la proyección canónica. Por ser no trivial, existe un caracter ϕ de $\overline{G}/H$ no trivial.

La aplicación $\Phi : \overline{G} \to \mathbb{C}$ dada por $\overline{x} \mapsto \phi(\overline{x}+H)$ es un caracter continuo en $\overline{G}$ (de nuevo, por la continuidad de la proyección canónica) no trivial tal que $\Phi(\overline{x}) = 1$ siempre que $\overline{x} \in H$. Por tanto, existe $\gamma_0 \in \Gamma$, γ_0 no trivial, tal que $1 = (\gamma_0, \beta(x)) = (x,\gamma_0)$ para todo $x \in G$ (esto sucede por que $\beta(x) \in H$), es decir, γ_0 es trivial, lo cual es una contradicción. □

Dados G y Γ, sabemos que G es el grupo de los caracteres continuos de Γ. Este teorema nos dice que $\overline{G}$ es el grupo de todos los caracteres de Γ (todos los caracteres definidos en Γ_d son continuos, por ser un grupo discreto) ya que la imagen de G a través de β es un conjunto denso de $\overline{G}$. Esto implica el siguiente teorema.

Teorema 3.39. Sean $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ y $\varepsilon > 0$. Dado un caracter ϕ definido en Γ, existe un caracter continuo ψ definido en Γ tal que

$$|\psi(\gamma_i) - \phi(\gamma_i)| < \varepsilon \text{ para } i = 1,\ldots,n. \tag{3.17}$$

Demostración. Por la observación anterior, $\phi \in \overline{G}$, y las condiciones (3.17) determinan un abierto no vacío de $\overline{G}$, que por tanto interseca a $\beta(G)$ (que se identifica con G). □

3.9. Análisis de Fourier en grupos finitos

Sea G un grupo finito. En primer lugar, todo grupo finito es un grupo discreto y compacto: todo subconjunto es un abierto, por lo que la $\sigma-$álgebra de Borel coincide con las partes de G, $\mathscr{P}(G)$. Por tanto, la medida de Haar μ de G es la medida de la cardinal, salvo producto por una constante, por lo que podemos suponer que μ está normalizada de forma que $\mu(G)$, es decir, si $E \subseteq G$ entonces $\mu(E) = \frac{|E|}{|G|}$.

De este modo, podemos definir la integral en este grupo. Si $f : G \to \mathbb{C}$ y $E \subseteq G$, entonces $\int_E f d\mu = \frac{1}{|G|} \sum\limits_{x \in E} f(x)$. Por esta razón, cualquier función $f : G \to \mathbb{C}$ es integrable en G.

Podemos definir un producto escalar hermitiano en $L^2(G)$, que en el caso finito coincide con el espacio vectorial V de todas las funciones complejas definidas en G, de la forma siguiente: si $f, g \in V$, entonces
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f(a)\overline{g(a)}.$$
El Corolario 3.34 implica que Γ es una base ortonormal de V.

Por otro lado, si $G = \mathbb{Z}_k$ y $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(0) = \gamma(k\mathbb{Z}) = 1$, por lo que $(1, \gamma) = e^{(2\pi i n)/k}$ para cierto $n \in \mathbb{Z}_k$, y $(m, \gamma) = e^{(2\pi i n m)/k}$ donde $m \in \mathbb{Z}_k$. Es decir, $\mathbb{Z}_k$ es su propio dual. Por tanto, como consecuencia de la Proposición 3.12 y la descomposición de los grupos finitos en grupos cíclicos, el dual de un grupo finito es él mismo, y en consecuencia $|G| = |\Gamma|$.

Debido a la normalización de la medida de Haar, si $f \in V$, la Transformada de Fourier de f está dada por la expresión
$$\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{|G|} \sum_{a \in G} f(a)\overline{\gamma(a)} = \langle f, \gamma \rangle.$$
Por otro lado, para toda $f \in V$, por ser los caracteres una base ortonormal de V, se debe cumplir la fórmula (3.12) del Teorema 3.24. Además, se cumple una especie de recíproco. Toda función $f \in V$ pertenece a $L^1(G)$ pues la medida es finita, y también a $B(G)$, pues la aplicación $\nu : \mathscr{P}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ dada por $\nu(E) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma)$ es una medida compleja (es obvio, pues es una suma finita y $\nu(\emptyset) = 0$), y $f(x) = \int_\Gamma (x, \gamma) d\nu = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma)(x, \gamma)$ para todo $x \in G$ y $f \in \Gamma$.

Por último, como consecuencia del Teorema 3.30, y por el Teorema 3.31, para todo $f, g \in V$ se cumple,
$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \hat{f}(\gamma)\overline{\hat{g}(\gamma)}, \quad \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(\gamma)|^2.$$

Capítulo 4

Teorema de Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) [14] desarrolló desde temprana edad una profunda pasión por las matemáticas. Con 16 años, decidió viajar a París para realizar sus estudios universitarios, debido al nivel insuficiente de las universidades alemanas de la época, lo que le permitió estar en contacto con grandes matemáticos como Fourier, Laplace, Poisson o Legendre. Ya durante este periodo, mostró interés por la Teoría de Números, y en particular, una ferviente admiración por el *Disquitisiones arithmeticae* de Gauss. De hecho, su primera publicación (1825) fue el estudio de un caso particular del Último Teorema de Fermat, lo que le reportaría fama instantánea. A finales de ese mismo año, se vio obligado a volver a Alemania, donde se le exigía una *habilitación* para enseñar en la universidad. Sin embargo, Dirichlet no podía optar a realizar una tesis de habilitación pues ni poseía un doctorado, ni era capaz de hablar latín, requisito de la época. Afortunadamente, le fue concedido un doctorado honorífico en la Universidad de Colonia, y se le permitió hacer su tesis de habilitación en la Universidad de Breslau. Más tarde, en 1828, publicaría su trabajo sobre Series de Fourier, y conseguiría trasladarse a Berlín, donde contrajo matrimonio con Rebeca Mendelssohn, hermana del compositor, y realizaría importantes aportaciones a las matemáticas (por orden cronológico): definición el concepto moderno de función, demostración de la infinitud de números primos en progresiones aritméticas,

Teorema 4.1 (1837, Dirichlet)**.** Si q y l son dos enteros positivos primos entre sí, entonces hay infinitos primos de la forma $l+kq$ con $k \in \mathbb{Z}$.

y el desarrollo de las Series de Dirichlet. En 1855, aceptaría una plaza en la Universidad de Gotinga, que quedó desierta tras la muerte de Gauss, donde trabajaría hasta el final de su vida.

Este capítulo está dedicado a demostrar el Teorema 4.1. Ha supuesto un esfuerzo importante elaborar una prueba de este resultado, porque aunque se puede encontrar una demostración completa en [23], consideramos que las técnicas utilizadas para demostrar que $L(1,\chi) \neq 0$ si χ es un caracter de Dirichlet real no trivial son demasiado artificiosas para evitar utilizar Análisis Complejo. En su lugar, para ese apartado hemos seguido [26], que sí usa variable compleja, y constituye una prueba más natural, e incluso, más elegante.

Por ello, aunque el comienzo de la prueba está inspirado en la línea de [23], la hemos modificado combinándola con [19]. La Sección 4.1 es enteramente de [23], para el estudio de las Series de Dirichlet hemos seguido [2], mientras que para la función ζ de Riemann y las L-funciones hemos utilizado mayoritariamente de [19] salvo en la holomorfía de las L-funciones, que se puede encontrar en [4]. La Subsección 4.3.1 es de [23] mientras que las Subsección 4.3.2 es del artículo [26]. El final de la prueba está basada en [19].

Para probar este teorema, Dirichlet se inspiró en la demostración del teorema de la infinitud de los números primos dada por Euler, que prueba que la serie de los inversos de los primos, $\sum_p 1/p$, diverge. Utilizó Análisis de Fourier para reducir el problema a estudiar los ceros de las L-funciones, y finalmente probar que la serie

$$\sum_{p \equiv l \text{ mod } q} \frac{1}{p}$$

diverge, lo que implica el enunciado del Teorema 4.1. En todo este capítulo trabajaremos con el grupo $G = \mathbb{Z}_q^*$ cuyo orden es la función de Euler evaluada en q, $\phi(q)$, y que se identifica con los elementos de $\mathbb{Z}$ comprimos con q.

Para dar el primer paso en la prueba del teorema, consideramos la función característica de l, $\delta_l : \mathbb{Z}_q^* \to \{0,1\}$ dada por

$$\delta_l(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv l \text{ mod } q \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos extender esta función δ_l a todo $\mathbb{Z}$ tomando $\delta_l(m) = 0$ si m y q no son coprimos. De la misma forma, podemos extender los caracteres de $\mathbb{Z}_q^*$, lo que nos lleva a la siguiente definición.

Definición 4.2. Llamaremos *caracteres de Dirichlet (módulo q)*, a las extensiones a todo $\mathbb{Z}$ de los caracteres $\gamma \in \Gamma$ determinados por la siguiente expresión

$$\chi(m) = \begin{cases} \gamma(m) & \text{si } m \text{ y } q \text{ son coprimos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La extensión del caracter trivial se denotará por χ_0.

La extensión de los caracteres junto con el desarrollo de la función δ_l nos permite demostrar el siguiente resultado.

Lema 4.3. Los caracteres de Dirichlet son multiplicativos, y para todo $m \in \mathbb{Z}$,

$$\delta_l(m) = \frac{1}{\phi(q)} \sum_{\chi} \overline{\chi(l)} \chi(m).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que q es coprimo con mn si y sólo si lo es con m y n, se deduce la primera afirmación. Ahora, calculamos la Transformada de Fourier de δ_l: $\widehat{\delta_l}(\gamma) = \frac{1}{|G|}\sum_{m\in G}\delta_l(m)\overline{\gamma(m)} = \frac{1}{|G|}\overline{\gamma(l)}$. Por tanto, por el Teorema 3.24, $\delta_l(n) = \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\overline{\gamma(l)}\gamma(n)$. Además, ya que hemos extendido δ_l a todo $\mathbb{Z}$, $\delta_l(m) = \frac{1}{\phi(q)}\sum_\chi\overline{\chi(l)}\chi(m)$ para $m\in\mathbb{Z}$. □

Utilizando este lema deducimos que

$$\sum_{p\equiv l}\frac{1}{p^s} = \sum_p\frac{\delta_l(p)}{p^s} = \frac{1}{\phi(q)}\sum_\chi\overline{\chi(l)}\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s} = \frac{1}{\phi(q)}\sum_p\frac{\chi_0(p)}{p^s} + \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(l)}\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}$$
$$= \frac{1}{\phi(q)}\sum_{p\nmid q}\frac{1}{p^s} + \frac{1}{\phi(q)}\sum_{\chi\neq\chi_0}\overline{\chi(l)}\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}.$$

Más adelante demostraremos que la serie $\sum_p\frac{1}{p}$ es divergente, y ya que $\sum_{p\nmid q}\frac{1}{p^s}$ cuando $s\to 1$ es esa serie salvo un número finito de términos, también diverge cuando s tiende a 1. Para ello será necesario estudiar la función ζ de Riemann. Una vez comprobado esto, para probar el Teorema de Dirichlet, será suficiente demostrar que la serie $\sum_p\frac{\chi(p)}{p^s}$ está acotada cuando $s\to 1$.

Deberemos estudiar una determinada familia de funciones: las L-funciones definidas para $Re(s)>1$ por $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}$. Dirichlet observó una fórmula en forma de producto para $s>1$, aunque nosotros la estableceremos para variable compleja con parte real mayor que 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}.$$

Suponiendo esta igualdad cierta, podemos tomar logaritmos formalmente

$$\log L(s,\chi) = \sum_p\log\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = \sum_p\frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{n\geq 2,p}\frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}, \tag{4.1}$$

y demostraremos que $\log L(s,\chi)$ y $\sum\limits_{n\geq 2,p}\frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}$ permanecen acotados cuando $s\to 1$, de lo que deduciremos que $\sum\limits_p\frac{\chi(p)}{p^s}$ también.

Para poder hacer este razonamiento, debemos resolver antes varios problemas.

- Necesitamos cierta rama del logaritmo, que llamaremos $\log_1$, para establecer la igualdad (4.1).
- Debemos obtener ciertas propiedades de la función ζ y las funciones $L(s,\chi)$: continuidad, expresión en forma de producto… Para ello, estudiaremos algunas propiedades de las conocidas Series de Dirichlet.
- Debemos probar que si χ es un caracter no trivial, entonces $\log L(s,\chi)$ está acotado cuando $s\to 1$. Veremos que es suficiente probar que $L(1,\chi)\neq 0$.

4.1. Logaritmos

Definimos la rama del logaritmo tal que si $|z| < 1$ entonces

$$\log_1\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

Proposición 4.4. El logaritmo $\log_1$ cumple las siguientes propiedades:

(i) Si $|z| < 1$, $e^{\log_1(1/(1-z))} = 1/(1-z)$.

(ii) Si $|z| < 1$, entonces $\log_1(1/(1-z)) = z + E_1(z)$ donde $|E_1(z)| < |z|^2$ si $|z| < 1/2$.

(iii) Si $|z| < 1/2$, entonces $|\log_1(1/(1-z))| \leq 2|z|$.

Demostración. (i) Sea $z = re^{i\theta}$, $0 \leq r \leq 1$. Queremos demostrar que $(1-z)e^{\log_1(1/(1-z)} = (1 - re^{i\theta})e^{\sum_{k=1}^{\infty}(re^{i\theta})^k/k}$ es constante e igual a 1.

Derivamos la expresión

$$\begin{aligned}\left[-e^{i\theta} + (1-re^{i\theta})(\sum_{k=1}^{\infty}(re^{i\theta})^k/k)'\right]e^{\sum_{k=1}^{\infty}(re^{i\theta})^k/k} &= -e^{i\theta} + (1-re^{i\theta})e^{i\theta}(\sum_{k=1}^{\infty}(re^{i\theta})^{k-1}) \\ &= -e^{i\theta} + (1-re^{i\theta})e^{i\theta}\frac{1}{1-re^{i\theta}} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto, hemos comprobado que es constante, y como para $r = 0$ la expresión vale 1, llegamos a la fórmula buscada.

(ii) Utilizando la expresión en serie de potencias de $\log_1(1/(1-z))$ para $|z| < 1$, obtenemos que $E_1(x) = \log_1(1/(1-z)) - z = \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots$, que implica, por la desigualdad triangular, que si $|z| < 1/2$, entonces $|E_1(z)| \leq \frac{|z|^2}{2}(1 + |z| + |z|^2 + \ldots) < \frac{|z|^2}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots) \leq \frac{|z|^2}{2} \cdot 2 = |z|^2$.

(iii) Si $z = 0$, es inmediato, y en otro caso, $\left|\frac{E_1(z)}{z}\right| \leq \left|\frac{\log_1(1/(1-z))}{z}\right| \leq 1 + \left|\frac{E_1(z)}{z}\right| 1 + |z| \leq 2$, de donde sigue la desigualdad del enunciado. $\square$

4.2. Series de Dirichlet

Definición 4.5. Una *función aritmética* es una función definida en $\mathbb{N}$ y con valores reales o complejos. Diremos que una función aritmética f es *multiplicativa* si $f(mn) = f(m)f(n)$ siempre que $(m,n) = 1$. Diremos es *completamente multiplicativa* si $f(mn) = f(m)f(n)$ para todo $m,n \in \mathbb{N}$.

Definición 4.6. Llamaremos *Serie de Dirichlet* con coeficientes $f(n)$ a la función de variable compleja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Observación 4.7. Si $s = Re(s) + iIm(s)$, entonces $n^s = e^{s\log n} = e^{Re(s)\log n} \cdot e^{iIm(s)\log n} = n^{Re(s)}e^{iIm(s)\log n}$, por lo que $|n^s| = n^{Re(s)}$. Por tanto, si $Re(s) > a$,

$$\left|\frac{f(n)}{n^s}\right| = \frac{|f(n)|}{n^{Re(s)}} < \frac{|f(n)|}{n^a}.$$

Esto implica que si la serie converge para cierto $a+ib$, entonces converge para todo s tal que $Re(s)>a$. Esto nos conduce al concepto de *abcisa de convergencia absoluta*.

Teorema 4.8. Sea $\sum \frac{f(n)}{n^s}$ una serie de Dirichlet tal que $\sum |f(n)n^{-s}|$ converge para algún s y diverge para otro s. Entonces existe un número real σ_a, que llamaremos abcisa de convergencia absoluta, tal que:

- si $Re(s)>\sigma_a$, la serie converge, y
- si $Re(s)<\sigma_a$, la serie diverge.

Demostración. El conjunto $D=\{Re(s)\in\mathbb{R} : \sum |f(n)n^{-s}| \text{ diverge}\}$ es no vacío y está acotado superiormente por hipótesis y por la observación anterior. Por tanto, D posee un supremo que denotaremos σ_a. Por la condición de supremo, si $Re(s)<\sigma_a$, entonces $Re(s)\in D$, y si $Re(s)>\sigma_a$ entonces $Re(s)\notin D$. □

Si la serie $\sum |f(n)n^{-s}|$ diverge en todo $\mathbb{C}$, definimos $\sigma_a=+\infty$, y si diverge en todo $\mathbb{C}$, $\sigma_a=-\infty$. El concepto de abcisa de convergencia absoluta nos permite caracterizar una serie de Dirichlet por sus coeficientes, así como definir el producto de dos series de Dirichlet.

Teorema 4.9. Dadas dos series de Dirichlet $F(s)=\sum \frac{f(n)}{n^s}$ y $G(s)=\sum \frac{g(n)}{n^s}$ absolutamente convergentes para $\sigma>\sigma_a$, si $F(s_k)=G(s_k)$ para una sucesión infinita $\{s_k\}$ divergente, entonces $f(n)=g(n)$ para todo n.

Demostración. Se puede consultar en [2]. □

Teorema 4.10. Dadas dos funciones $F,G:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ tales que

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} \text{ para } Re(s)>a \quad \text{y} \quad G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s} \text{ para } Re(s)>b,$$

entonces, si $Re(s)>\text{máx}\{a,b\}$

$$F(s)G(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s},$$

donde $h=f*g$ es la convolución de Dirichlet dada por $h(n)=\sum_{d|n} f(d)g(n/d)$. Recíprocamente, si $F(s_k)G(s_k)=\sum a(n)n^{-s_k}$ para una sucesión divergente (s_k), entonces $a=f*g$.

Demostración. Si s es un punto del semiplano de convergencia absoluta, podemos reordenar los términos de la series $F(s)G(s)$ de cualquier manera sin alterar la suma de la serie. De este modo

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} f(n)g(m)(mn)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{mn=k} f(n)g(m)\right)k^{-s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{m|k}^{\infty} f(n)g(k/m)\right)k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} h(k)k^{-s}. \end{aligned}$$

El recíproco se cumple por el Teorema 4.9. □

A continuación, abordamos un resultado crucial para la demostración del Teorema de Dirichlet, pues de él se deduce la fórmula del producto de Dirichlet.

Teorema 4.11. Sea f una función aritmética multiplicativa tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es absolutamente convergente. Entonces esta serie se puede expresar como un producto convergente, es particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f(p^k) \right). \tag{4.2}$$

Si además f es completamente multiplicativa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \prod_{p} \frac{1}{1-f(p)}.$$

Demostración. Consideramos la función de variable real $P(x) = \prod_{p\leq x}(1+f(p)+f(p^2)+\ldots)$. Por la multiplicatividad de f y el Teorema Fundamental de la Aritmética, $P(x) = \sum_{n\in A} f(n)$ donde A es el subconjunto de los números naturales que pueden ser factorizados como producto de potencias de primos no mayores que x. Además, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) = \sum_{n\in B} f(n)$, donde B es el subconjunto de los números naturales con al menos un factor primo mayor que x. De este modo,

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) - P(x) \right| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \leq \sum_{n>x} |f(n)|.$$

El lado derecho de la desigualdad tiende a 0 cuando $x \to \infty$, por la convergencia absoluta de la serie. Por tanto $P(x) \to \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ cuando $x \to \infty$. Veamos que $\lim_{x\to\infty} P(x)$ está bien definido. Tenemos que

$$\sum_{p\leq x} |f(p)+f(p^2)+\ldots| \leq \sum_{p\leq x} (|f(p)|+|f(p^2)+\ldots|) \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)|.$$

Por la convergencia absoluta de $\sum f(n)$, las sumas parciales de la serie $\sum_{p} |f(p)+f(p^2)+\ldots|$ están acotadas, y por tanto converge. Ahora, por la Proposición B.1, tenemos la convergencia del producto (4.2). $\square$

Este teorema, junto con la fórmula de las series geométricas, implica el siguiente corolario.

Corolario 4.12. Sea f una función aritmética multiplicativa, y supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ converge para $\sigma > \sigma_a$. Entonces, si $\sigma > \sigma_a$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} (1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p)}{p^{2s}} + \ldots),$$

y si además f es completamente multiplicativa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1-f(p)p^{-s}}.$$

Ahora que hemos establecido algunos resultados para las Series de Dirichlet, estudiamos dos casos útiles para nuestro propósito, pues intervienen en la demostración del Teorema de Dirichlet.

4.2.1. La función ζ de Riemann y las L-funciones

En primer lugar, definimos las funciones que vamos a estudiar.

Definición 4.13. Llamamos *función ζ de Riemann* a la función definida en el semiplano $Re(s) > 1$ por la expresión
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Definición 4.14. Dado un caracter de Dirichlet χ, definimos la *L-función (asociada a χ)* para $Re(s) > 1$ como
$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(s)}{n^s}.$$

Es evidente que podemos estudiar estas funciones como series de Dirichlet. La función $\zeta(s)$ de Riemann es una serie de Dirichlet que converge absolutamente si $Re(s) > 1$ pues

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\delta}},$$

y el lado derecho de la desigualdad converge siempre que $\delta > 1$. Así, si $Re(s) \geq \delta > 1$, entonces la serie converge absolutamente. De hecho converge uniformemente pues la serie está acotada por un término que no depende de s. De la misma forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\chi(n)}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}},$$

por lo que por el argumento anterior, podemos asegurar la convergencia absoluta y uniforme de las L-funciones en el hiperplano $Re(s) > 1$.

Por otro lado, por el Corolario 4.12, obtenemos las siguientes igualdades para $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad L(s,\chi) = \prod_p \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}.$$

Por lo visto anteriormente, la función ζ de Riemann es límite uniforme de la sucesión $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donde $\zeta_n(s) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$. Estas funciones son holomorfas en $Re(s) > 1$, por tanto, por el Lema B.3, $\zeta(s)$ es holomorfa, en $Re(s) > 1$. Por un razonamiento prácticamente idéntico, $L(s,\chi)$ es holomorfa en $Re(s) > 1$ para todo χ.

Ahora, demostraremos que podemos extender la definición de estas funciones a un semiplano mayor. Trataremos primero el caso de la función ζ, y el de $L(s,\chi_0)$, por último el de $L(s,\chi)$ si $\chi \neq \chi_0$. Pero antes, vemos un resultado auxiliar [23].

Lema 4.15. Si χ es un caracter de Dirichlet no trivial, entonces $\left|\sum_{n=1}^{k} \chi(n)\right| \leq q$ para todo k.

Demostración. Llamamos S a $\sum_{n=1}^{q}\chi(n)$. Sea $a\in\mathbb{Z}_q^*$ de forma que $\chi(a)\neq 1$. entonces $\chi(a)S=\sum_{n=1}^{N}\chi(a)\chi(n)=\sum_{n=1}^{N}\chi(an)=\sum_{n=1}^{N}\chi(n)=S$, por lo que $S=0$. Ahora, escribimos $k=aq+b$ con $0\leq b<q$, de forma que $\sum_{n=1}^{k}\chi(n)=\sum_{n=1}^{aq}\chi(n)+\sum_{aq<n\leq aq+b}\chi(n)=\sum_{aq<n\leq aq+b}\chi(n)$. Utilizando que $|\chi(n)|\leq 1$ y que la última suma tiene q o menos términos, se deduce el resultado. □

Proposición 4.16. La función ζ de Riemann posee las siguientes propiedades.

(i) Es holomorfa y distinta de 0 en el hiperplano $Re(s)>1$.

(ii) Se cumple

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\phi(s), \tag{4.3}$$

donde ϕ es una función holomorfa en $Re(s)>0$.

(iii) Tiene un polo en $s=1$.

Demostración. (i) Ya hemos demostrado la holomorfía, y la segunda parte de la afirmación se deduce de la Proposición B.1 ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p}\frac{1}{1-p^{-s}}=\prod_{p}(1+\frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}),\quad \text{y}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p^{-s}}{1-p^{-s}}\right|\leq\sum_{n=1}^{\infty}p^{-\sigma}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{Re(s)}}.$$

(ii) Utilizaremos que $\frac{1}{s-1}=\int_1^{\infty}t^{-s}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}t^{-s}dt$. Aplicando esto:

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^s}-\int_n^{n+1}t^{-s}dt\right)=\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}(n^{-s}-t^{-s})dt.$$

Si definimos $\phi_n(s)=\int_n^{n+1}(n^{-s}-t^{-s})dt$, y $\phi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(s)$, las funciones ϕ_n están definidas y son holomorfas en $Re(s)>0$ por Lema B.4 . Por tanto, es suficiente con probar que la sucesión de las sumas parciales converge uniformemente a ϕ en $Re(s)>0$. Es evidente que

$$|\phi_n(s)|\leq\sup_{n\leq t\leq n+1}|n^{-s}-t^{-s}|,$$

y como la derivada (respecto de t) de $n^{-s}-t^{-s}$ es s/t^{s+1}, deducimos que $|\phi_n(s)|\leq\frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$.

Si $Re(s)\geq\varepsilon>0$, en cada compacto del hiperplano, $|\phi(s)|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C}{n^{1+\varepsilon}}$, donde C es una constante que depende del compacto. Como la acotación es uniforme, esto demuestra que la serie $\sum\phi_n(s)$ converge uniformemente a ϕ en cada compacto de $Re(s)\geq\varepsilon$ para cada $\varepsilon>0$, y por tanto, hay convergencia uniforme en cada compacto de $Re(s)>0$. Ahora, por el Lema B.3, hemos demostrado que ϕ es una función holomorfa en $Re(s)>0$.

(iii) Se deduce de la expresión (4.3). □

Con este resultado, hemos extendido la función ζ de Riemann al hiperplano $Re(s)>0$, salvo en $s=1$, donde la función tiene un polo simple. Además, podemos decir lo mismo de $L(s,\chi_0)$ gracias a la relación existente entre ambas funciones.

Proposición 4.17. Sea χ_0 el caracter de Dirichlet trivial, y $q=p_1^{a_1}\dots p_n^{a_n}$ la factorización en primos de q. Entonces $L(s,\chi_0)=(1-p_1^{-s})(1-p_2^{-s})\dots(1-p_N^{-s})\zeta(s)$, y en consecuencia, $L(s,\chi_0)$ es holomorfa en $Re(s)>0$ salvo en $s=1$, donde tiene un polo simple.

Demostración. Si p es primo, entonces $\chi_0(p)=0$ si y sólo si p y q no son coprimos, es decir, si p está en la factorización de q. Por tanto, el factor asociado a p_i ($i=1,\dots,N$) en la fórmula como producto de $L(s,\chi_0)$ es $\frac{1}{1-\chi_0(p_i)p_i^{-s}}=\frac{1}{1-0}=1$. Sin embargo, en la fórmula de $\zeta(s)$, sí aparece el factor $(1-p_i^{-s})^{-1}$, de lo que se deduce la igualdad. De esto y del hecho de que $\zeta(s)\to\infty$ cuando $s\to 1$ se deduce la segunda afirmación. □

Por último, estudiamos el caso de las funciones $L(s,\chi)$ cuando χ es no trivial.

Proposición 4.18. Si $\chi\neq\chi_0$, $L(s,\chi)$ es holomorfa en $Re(s)>0$.

Demostración. Si $Re(s)>1$,

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}S(n)(n^{-s}-(n+1)^{-s})=s\int_1^{\infty}S(x)x^{-s-1}dx=s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{[n,n+1)}S(n)x^{-s-1}dx.$$

La función $s\mapsto s\int_{[n,n+1)}S(n)x^{-s-1}dx$ es holomorfa en $Re(s)>0$ para todo n por el Lema B.4 . La integral impropia es absolutamente convergente ya que $|S(x)|\leq q$ por el Lema 4.15 . Además, la serie es uniformemente convergente sobre compactos de $Re(s)>\delta>0$ para todo δ, por lo que por el Lema B.3, $L(s,\chi)$ es holomorfa en el semiplano $Re(s)>0$. □

4.3. $L(1,\chi)\neq 0$ si $\chi\neq\chi_0$.

Nuestro objetivo es demostrar que la función $L(s,\chi)$ no se anula en 1 para todo caracter de Dirichlet no trivial. Para ello, debemos distinguir dos casos: el caracter toma valores complejos, o es real.

4.3.1. Caso complejo

En este epígrafe, consideraremos las funciones $\zeta(s)$ y $L(s,\chi)$ como funciones de variable real, que hemos definido para $s>1$ o $s>0$. Por lo demostrado anteriormente, podemos considerar que estas funciones de variable real, son continuas y de clase C^1. Esto será suficiente para probar el caso complejo. Antes de ello, demostraremos dos lemas sobre las $L-$funciones.

Lema 4.19. Si $s>1$, entonces $\prod_\chi L(s,\chi)\geq 1$.

Demostración. Ya sabemos que $L(s,\chi)=\exp\left(\sum_p\log_1\left(\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right)\right)$ por lo que

$$\prod_\chi L(s,\chi)=\exp\left(\sum_\chi\sum_p\log_1\left(\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right)\right)=\exp\left(\sum_\chi\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\frac{\chi(p^k)}{p^{ks}}\right)=\exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\sum_\chi\frac{1}{k}\frac{\chi(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

Por el Lema 4.3, se tiene $\sum_\chi \chi(p^k) = \phi(q)\delta_1(p^k)$, por lo que

$$\prod_\chi L(s,\chi) = \exp\left(\phi(q)\sum_p \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}\frac{\delta_1(p^k)}{p^{ks}}\right) \geq 1.$$

□

Lema 4.20. Sea χ un caracter de Dirichlet.

(i) Si $L(1,\chi) = 0$, entonces $L(1,\overline{\chi}) = 0$.

(ii) Si $\chi \neq \chi_0$ y $L(1,\chi) = 0$, entonces $|L(s,\chi)| \leq C|s-1|$ para s tal que $1 \leq s \leq 2$.

(iii) $|L(s,\chi_0)| \leq \frac{C}{|s-1|}$ para s tal que $1 < s \leq 2$.

Demostración. (i) Se cumple porque $L(1,\overline{\chi}) = \overline{L(1,\chi)}$.

(ii) Como $L(s,\chi)$ es de clase C^1 para $s > 0$, podemos aplicar el Teorema del Valor Medio que nos da la desigualdad buscada.

(iii) Por la Proposición 4.17 , $L(s,\chi_0) = (1-p_1^{-s})\dots(1-p_N^{-s})\zeta(s)$, y como $|\zeta(s)| \leq 1 + |\int_1^\infty x^{-s}| \leq 1 + \frac{1}{|s-1|}$, tenemos la desigualdad del enunciado. □

Utilizando estos lemas, demostramos que $L(1,\chi) \neq 0$ para todo caracter complejo no trivial. Si no fuera así, es decir, $L(1,\chi) = 0$, tendríamos $L(1,\overline{\chi}) = 0$. Como χ es un caracter complejo, $\chi \neq \overline{\chi}$, y por la tanto, hay dos o más términos del producto $\prod_\chi L(s,\chi)$ que tienden a 0 como $|s-1|$ (por el apartado (ii) del Lema 4.20) cuando $s \to 1^+$. Como únicamente el caracter trivial aporta un término que crece cuando $s \to 1^+$, y no crece más rápido que $1/|s-1|$, el producto tiende a 0 cuando $s \to 1^+$, en contradición con el Lema 4.19.

4.3.2. Caso real

Supongamos que $L(1,\chi) = 0$ donde χ es el caracter de Dirichlet real no trivial, y definamos $F(s) = \zeta(s)L(s,\chi)$. Sabemos que $F(s)$ es holomorfa en $Re(s) > 0$ salvo, posiblemente, en $s = 1$. Sin embargo el cero de $L(s,\chi)$ en 1 cancela el polo simple de $\zeta(s)$ por las proposiciones B.10 y B.12, por lo que $F(s)$ es holomorfa en el semiplano $Re(s) > 0$. En particular, $F(s)$ es holomorfa en un disco centrado en 2 que contiene a $1/2$, o equivalentemente, $F(2-s)$ es holomorfa en un disco centrado en 0 que contiene a $3/2$.

Por otro lado, multiplicando en $Re(s) > 1$ las funciones $\zeta(s)$ y $L(s,\chi)$, obtenemos una serie de Dirichlet $\sum c_n n^{-s}$ que representa a $F(s)$ en $Re(s) > 1$ (por el Teorema 4.10). Sus coeficientes c_n son la convolución de Dirichlet de 1 y χ, por lo que $c_n = \sum_{l|n}\chi(l)$, y por la multiplicatividad de χ, c_n es el producto de las expresiones de la forma $1+\chi(p)+\dots+\chi(p)^a$ donde p es un primo con exponente a en la factorización de n. Como χ es un caracter no trivial, $\chi(p)$ toma los valores $1,-1$ y 0, de lo que podemos deducir:

$$1+\chi(p)+\dots+\chi(p)^a = \begin{cases} 1+a, 0 \text{ o } 1 & \text{si } a \text{ es impar} \\ 1+a \text{ o } 1 & \text{si } a \text{ es par} \end{cases}$$

En cualquier caso, $c_n \geq 0$, y si además n es un cuadrado, todos los exponentes a son pares, por lo que $c_n \geq 1$. De esto se sigue que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-1/2}$ es divergente, pues tomando $n = m^2$, tenemos que $c_{m^2} \geq 1$ y por tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{1/2}} \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_{m^2}}{m} \geq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$.

Para $s \in [0,1)$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{2-s}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2}(e^{s\log(n)}-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2}\frac{s^k(\log(n))^k}{k!} + F(2) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2}\frac{(\log(n))^k}{k!} + F(2) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2}\frac{(\log(n))^k}{k!}\end{aligned}$$

Aquí hemos podido cambiar el orden de los sumatorios ya que, por consideraciones anteriores, todos los términos son positivos. La última expresión es una serie de potencias en s, que acabamos de demostrar que converge a $F(2-s)$ para $s \in [0,1)$. Por tanto, su radio de convergencia es por lo menos 1, por lo que define una función holomorfa para $|s| < 1$, y coincide con $F(2-s)$ en ese dominio por el Teorema B.8. Esto implica que esta serie de potencias es la serie de potencias de $F(2-s)$ centrada en 0.

Como $F(2-s)$ es holomorfa en un disco centrado en 0 que contiene a $3/2$, la serie de potencias centrada en 0 converge a $F(2-s)$ para todo s en el disco, y en particular, para $s = 3/2$. Sustituyendo $s = 3/2$, llegamos a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^{1/2}} = F(1/2),$$

pero esto es absurdo, pues la serie $\sum c_n n^{-1/2}$ diverge.

4.4. Final de la prueba

Volviendo al principio, ya podemos definir el logaritmo *Log* de $L(s,\chi)$, si $\chi \neq \chi_0$:

$$\operatorname{Log}(L(s,\chi)) = \sum_p \log_1 \frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = \sum_{n,p} \frac{\chi(p)^n}{p^{ns}}$$

donde la serie es convergente por la Proposición 4.4. Si dividimos en dos sumandos:

$$\operatorname{Log}(L(s,\chi)) = \sum_p \frac{\chi(p)}{p^s} + \sum_{n\geq 2,p} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}.$$

El segundo sumando está acotado cuando $s \to 1$, pues

$$\left|\sum_{n\geq 2,p} \frac{\chi(p)^n}{np^n}\right| \leq \sum_{n\geq 2,p} \frac{1}{np^n} \leq \sum_p \sum_{n\geq 2} (1/p)^n = \sum_p (1/p)^2 \frac{p}{1-p} \leq \sum_p (1/p^2)\cdot 2 \leq 2\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Por otro lado, como $L(s,\chi)$ es analítica y no nula en $s=1$, existe un disco de $L(1,\chi)$ que no contiene el origen, por lo que podemos elegir una rama del logaritmo tal que $\log(L(s,\chi))$ está bien definido en la preimagen del disco, y por continuidad, en un disco centrado en $s=1$. Por tanto $\log(L(1,\chi))$ está bien definido, y $\mathrm{Log}(L(s,\chi)) - \log(L(s,\chi)) = 2\pi i n$ para cierto $n \in \mathbb{Z}$ en ese disco, por lo que $\mathrm{Log}(L(s,\chi))$ permanece acotado cuando $s \to 1$. Esto junto con el comentario anterior, implica que $\sum_p \frac{\chi(p)}{p^s}$ está acotado cuando $s \to 1$, lo que prueba finalmente el Teorema de Dirichlet.

Capítulo 5

Análisis de Fourier de funciones booleanas

Las funciones booleanas constituyen una herramienta poderosa en numerosas áreas de las matemáticas: teoría de códigos, diseño de circuitos, teoría de grafos, etc. En este capítulo se estudiará el Análisis de Fourier aplicado a estas funciones, haciendo una interpretación probabilística que nos permitirá demostrar un resultado de una rama importante de las Ciencias de la Computación, el *property testing*. Intentaremos aplicar lo demostrado en la teoría general guiándonos por [15]. Para detalles de probabilidad, se puede consultar [29].

5.1. Análisis de funciones booleanas

Definición 5.1. Una *función booleana* es una función $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. La expresaremos como una función $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, $f : \mathbb{Z}_2^n \to \{0,1\}$. Además, diremos que f es una *función booleana real* si es una función booleana que toma valores en $\mathbb{R}$.

A lo largo de capítulo, trabajaremos con los grupos: $\mathbb{Z}_2^n$ como grupo aditivo, y $\{-1,1\}^n$ como grupo multiplicativo. Ambos con la medida de Haar $m(E) = 2^{-n}|E|$.

Para relacionar la probabilidad con el Análisis de Fourier en estos grupos, consideraremos la variable aleatoria $\mathbf{x}$ con distribución uniforme en $\{-1,1\}^n$ (escribiremos $\mathbf{x} \sim \{-1,1\}^n$), de forma que la probabilidad de que la variable aleatoria $\mathbf{x}$ tome el valor x es $\mathbf{Pr}[\mathbf{x} = x] = 2^{-n}$. La *esperanza* de $f(\mathbf{x})$, donde $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, es

$$\mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}}[f(\mathbf{x})] = \mathbf{E}[f(\mathbf{x})] = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{-1,1\}^n} f(x).$$

Así, el producto escalar definido en el espacio V de todas las funciones $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ viene dado por

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{-1,1\}^n} f(x)g(x) = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x}\in\{-1,1\}^n}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})].$$

A continuación, calculamos los caracteres de $\{-1,1\}^n$. En este grupo, podemos considerar para cada $S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ la función $\gamma_S : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ dada por

$$\gamma_S(x) = \prod_{i\in S} x_i \quad \text{para todo } x = (x_1,\ldots,x_n) \in \{1,1\}^n.$$

Si $x,y \in \{-1,1\}^n$, entonces $\gamma_S(x\cdot y) = \prod_{i\in S} x_i y_i = \prod_{i\in S} x_i \cdot \prod_{i\in S} y_i = \gamma_S(x)\gamma_S(y)$, y evidentemente, $|\gamma_S(x)| = 1$. Por tanto γ_S es un caracter de $\{-1,1\}^n$. Estas 2^n son todas distintas, ya que si $S,T \subseteq \{1,\ldots,n\}$ no vacíos y $S \neq T$, y tomamos $x \in \{-1,1\}^n$ tal que $x_i = 1$ si $i \notin S$ y $x_i = 1$ para todo $i \in S$ salvo un $i_0 \in S \setminus T$, entonces $\gamma_S(x) = -1 \neq 1 = \gamma_T(x)$. Por tanto, las funciones γ_S forman una base ortonormal de V, el conjunto de las funciones booleanas reales.

Observación 5.2. Si consideramos la expresión de las funciones booleanas reales como funciones $\mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$, y hacemos la identificación $\chi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{R}$ determinada por $\chi(0) = 1$ y $\chi(1) = -1$, entonces los caracteres son de la forma:

$$\gamma_S(x) = \prod_{i\in S} \chi(x_i) = (-1)^{\sum_{i\in S} x_i},$$

y cumple $\gamma_S(x+y) = \gamma_S(x)\gamma_S(y)$.

Ahora que conocemos todos los caracteres, podemos enunciar los resultados del Análisis de Fourier que sabemos que se cumplen en $\{-1,1\}^n$. Sea $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ y $g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$, entonces

Teorema 5.3. Sean $f,g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.

(i) Dado $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$, $\hat{f}(\gamma_S) = \langle f, \gamma_S\rangle = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n}[f(\mathbf{x})\gamma_S(\mathbf{x})]$.

(ii) (Teorema de Inversión) $f(x) = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)\gamma_S(x)$.

(iii) $\langle f,g\rangle = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n}[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)\hat{g}(\gamma_S)$.

(iv) (Identidad de Parseval) $\langle f,f\rangle = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x}\sim\{-1,1\}^n}[f(\mathbf{x})^2] = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)^2$.

Además, si $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ entonces

$$\sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)^2 = \langle f,f\rangle = 2^{-n} \sum_{x\in\{-1,1\}^n} f(x)^2 = 2^{-n}2^n = 1.$$

Dadas dos funciones $f,g : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, el producto escalar nos da información de cómo de similares son f y g. Ya que $f(x)g(x) = 1$ si $f(x) = g(x)$ y $f(x)g(x) = -1$ si $f(x) \neq g(x)$, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.4. Si $f,g : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, entonces

$$\langle f,g\rangle = \mathbf{Pr}[f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})] - \mathbf{Pr}[f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})].$$

De hecho, podemos considerar una distancia en el conjunto de funciones booleanas.

Definición 5.5. Si $f,g : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, definimos la *distancia de Hamming entre f y g* como

$$dist(f,g) = \mathbf{Pr}[f(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x})].$$

Corolario 5.6. Si $f,g : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, entonces $\langle f,g\rangle = 1-2dist(f,g)$.

Demostración. Es evidente, pues $\langle f,g\rangle = (1-dist(f,g)) - dist(f,g)$. □

La operación convolución que se define en todo V se puede interpretar como una esperanza de un producto de las dos funciones.

Definición 5.7. Sean $f,g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$. Su convolución $f*g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$ está definida por

$$(f*g)(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{y\in\mathbb{Z}_2^n} f(y)g(x-y) = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(\mathbf{y})g(x-\mathbf{y})] = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n}[f(x-\mathbf{y})g(\mathbf{y})].$$

De la misma forma que se demuestra para grupos en general, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.8. Sean $f,g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$. Para todo $S \subseteq \{1,\dots,n\}$,

$$\widehat{f*g}(\gamma_S) = \hat{f}(\gamma_S)\cdot\hat{g}(\gamma_S).$$

5.2. Funciones casi lineales y el test BLR

Una función $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ es lineal si satisface alguna de las condiciones equivalentes:

(1) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todo $x,y\in\mathbb{Z}_2^n$.

(2) $f(x) = a\cdot x$ para cierto $a\in Z_2^n$, es decir, $f(x) = \sum_{i\in S} x_i$ para algún $S\subseteq\{1,\dots,n\}$.

La implicación (2) $\Rightarrow$ (1) es evidente porque si suponemos (2) se tendría $f(x+y) = a\cdot(x+y) = a\cdot x + a\cdot y = f(x)+f(y)$. La implicación opuesta no es tan sencilla. Si $x,y\in\mathbb{Z}_2^n$ podemos encontrar $a,b,c\in\mathbb{Z}_2^n$ tales que $f(x) = a\cdot x$, $f(y) = b\cdot y$ y $f(z) = c\cdot z$. Por (1), se cumpliría $a\cdot x + a\cdot y = b\cdot x + c\cdot y$, y por tanto, $(a+b)\cdot x + (a+c)\cdot y = 0$. Si suponemos además que x e y son elementos de la base de $\mathbb{Z}_2^n$, se debe cumplir $a=b=c$, es decir, el vector a de (2) es el mismo para todo elemento de la base. Ahora, sea $z = \sum_{i=1}^n c_i x^i$ donde $c_i\in\mathbb{Z}_2$ y $\{x^i\}_{i=1}^n$ es una base de $\mathbb{Z}_2^n$. Entonces

$$f(z) = \sum_{i=1}^n f(c_i x^i) = \sum_{i=1}^n c_i a\cdot x^i = a\cdot\sum_{i=1}^n c_i x^i = a\cdot z,$$

lo que demuestra (1) $\Rightarrow$ (2).

Esta definición nos da una idea de qué es una función $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ *aproximadamente* lineal, una función que cumpla alguna de las siguiente condiciones:

(1') $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para casi todo par $x,y\in\mathbb{Z}_2^n$.

(2') Existe $S \subseteq \{1,\dots,n\}$ tal que $f(x) = \sum_{i\in S} x_i$ *para casi todo* $x \in \mathbb{Z}_2^n$.

Observación 5.9. Aquí, la expresión *para casi todo* no tiene sentido si se interpreta como en Teoría de la Medida. En este caso, su significado es que la propiedad se cumple para suficientes $x \in \mathbb{Z}_2^n$, y lo concretaremos más adelante en términos probabilísticos.

Se puede probar fácilmente que $(2') \Rightarrow (1')$ utilizando la demostración de $(2) \Rightarrow (1)$. Sin embargo, la prueba de $(1) \Rightarrow (2)$ no se puede aprovechar. En esta sección demostraremos que $(1')$ implica $(2')$.

La motivación de este problema viene del área de las Ciencias de la Computación conocida como *property testing*. En nuestro caso, imaginemos que tenemos acceso a una función desconocida $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$, y podemos pedir el valor $f(x)$ para cada $x \in \mathbb{Z}_2^n$. Se cree que f es una función lineal, y queremos verificarlo. Podríamos pedir el valor de la función para cada $x \in \mathbb{Z}_2^n$, pero este proceso puede ser muy costoso. En lugar de esto, pedimos el valor de la función para unos cuantos datos de entrada aleatorios: ganamos eficiencia (menor coste) pero perdemos precisión, en el sentido de que solo estamos aproximadamente seguros de que la función cumple la propiedad buscada. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición 5.10. Sean $f,g : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$. Diremos que *$f$ y g están ε-cerca* si $dist(f,g) \leq \varepsilon$, y que están *$\varepsilon$-lejos* en otro caso. Si $\mathscr{P}$ es una propiedad (no vacía) de funciones booleanas definidas en $\mathbb{Z}_2^n$, definimos $dist(f,\mathscr{P}) = \text{mín}_{g\in\mathscr{P}}(dist(f,g))$. De este modo, diremos que *f está $\varepsilon-$cerca de $\mathscr{P}$* si $dist(f,\mathscr{P}) \leq \varepsilon$.

Diremos que f está $\varepsilon-$cerca de ser lineal si $dist(f,g) \leq \varepsilon$ para alguna función lineal $g(x) = \sum_{i\in S} x_i$.

En 1990, Blum, Luby y Rubinfield demostraron que $(1')$ implica $(2')$, dando el siguiente test.
(Test BLR) Suponiendo que se tiene acceso a la función $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$:

- Elegir $\mathbf{x} \sim \mathbb{Z}_2^n$ e $\mathbf{y} \sim \mathbb{Z}_2^n$ independientes.
- Pedir el valor de f en $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.
- 'Aceptamos' si $f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$.

Ahora demostraremos que si el Test BLR acepta f con probablidad alta, entonces f es casi lineal.

Teorema 5.11. Supongamos que el Test BLR acepta $f : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{Z}_2$ con probabilidad $1-\varepsilon$. Entonces f está ε-cerca de ser lineal.

Demostración. Codificamos los valores de f, como en la Observación 5.2, de forma que ahora toma valores 1 y -1. Por tanto la condición para aceptar f del Test BLR se convierte en $f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$. De esta forma,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \text{si } f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \\ 0 & \text{si } f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) \neq f(\mathbf{x}+\mathbf{y}). \end{cases}$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
1-\varepsilon &= \mathbf{Pr}[f(\mathbf{x})f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{y})] = \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x},\mathbf{y}}[(1/2)+(1/2)f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})f(\mathbf{x}+\mathbf{y})] \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})\cdot \mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{y}}[f(\mathbf{y})f(\mathbf{x}+\mathbf{y})]] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathop{\mathbf{E}}_{\mathbf{x}}[f(\mathbf{x})\cdot(f*f)(\mathbf{x})] \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)\widehat{f*f}(\gamma_S) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)^3,
\end{aligned}
$$

por el Teorema 5.3 (iii) y la Proposición 5.8. Simplicando la igualdad, obtenemos

$$
1-2\varepsilon = \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)^3 \leq \max_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}}(\hat{f}(\gamma_S))\cdot \sum_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}} \hat{f}(\gamma_S)^2 = \max_{S\subseteq\{1,\ldots,n\}}(\hat{f}(\gamma_S)).
$$

aplicando el Teorema 5.3 (iv).

Por la Proposición 5.6, $\hat{f}(\gamma_S) = \langle f,\gamma_S\rangle = 1-2dist(f,\gamma_S)$. Por tanto, existe $S'\subseteq\{1,\ldots,n\}$ tal que $1-2\varepsilon \leq 1-2dist(f,\gamma_{S'})$, esto es, $dist(f,\gamma_{S'})\leq\varepsilon$. □

Además, demostramos que podemos obtener con una probabilidad alta el valor $\gamma_{S'}(x)$ para cada $x\in\mathbb{Z}_2^n$, haciendo solo 2 evaluaciones.

Proposición 5.12. Sea $f:\mathbb{Z}_2^n\to\{-1,1\}$ una función que está $\varepsilon-$cerca de la función lineal $\gamma_{S'}$. Entonces, para cada $x\in\mathbb{Z}_2^n$ el siguiente algoritmo da como salida $\gamma_{S'}(x)$ con una probabilidad de al menos $1-2\varepsilon$:

- Elige $\mathbf{y}\sim\mathbb{Z}_2^n$.
- Evaluar f en $\mathbf{y}$ y $x+\mathbf{y}$.
- Devolver $f(\mathbf{y})f(x+\mathbf{y})$.

Demostración. Como $\mathbf{y}$ y $x+\mathbf{y}$ están uniformemente distribuidas en $\mathbb{Z}_2^n$, se cumple $\mathbf{Pr}[f(\mathbf{y})\neq\gamma_{S'}(\mathbf{y})]\leq\varepsilon$ y $\mathbf{Pr}[f(x+\mathbf{y})\neq\gamma_{S'}(x+\mathbf{y})]\leq\varepsilon$. La probabilidad de que ocurra uno u otro suceso no es mayor que 2ε, por lo que $f(\mathbf{y})f(x+\mathbf{y}) = \gamma_{S'}(\mathbf{y})\gamma_{S'}(x+\mathbf{y}) = \gamma_{S'}(x)$ ocurre con probabilidad $1-2\varepsilon$. □

Capítulo 6

Conclusiones y propuestas de futuro

A lo largo de esta memoria, hemos intentado fundamentar el Análisis Armónico en un marco más general, el de los grupos LCA, y hemos estudiado algunas aplicaciones. Sin embargo, planteamos algunos resultados que no han tenido cabida en este trabajo, y que pueden ser el inicio de un futuro proyecto.

1. Los resultados presentados en el Capítulo 3 constituyen una introducción al Análisis Armónico Abstracto. Destacamos dos posibles líneas para continuar este trabajo:
   - Teoría de Representación en grupos no compactos y no conmutativos [7].
   - El estudio de la estructura de grupos LCA [17, cap.2], siendo un resultado principal:

     Teorema 6.1. Sea G un grupo LCA. Entonces G tiene un subgrupo abierto que es suma directa de $\mathbb{R}^n$ y un grupo compacto H.

     Además, el Teorema 3.37 permite establecer una relación de dualidad entre los subgrupos y los grupos cociente de un grupo LCA G. Si H es un subgrupo cerrado definimos $H^{\perp} = \{\gamma \in \Gamma : (x,\gamma) = 1 \ \forall x \in H\}$. Entonces se cumple el siguiente teorema [7, p. 105]:

     Teorema 6.2. Sea H un subgrupo cerrado de G. Si $f \in C_c(G)$ y $F \in C_c(G/H)$ de forma que $F(xH) = \int_H f(x+y)dy$. Entonces $\hat{F} = \hat{f} \restriction_{H^{\perp}}$, identificando $\widehat{(G/H)}$ con $H^{\perp}$. Si además $\hat{f} \restriction_{H^{\perp}} \in L^1(H^{\perp})$, entonces $\int_H f(x+y)dy = \int_{H^{\perp}} \hat{f}(\gamma)(x,\gamma)d\gamma$.

     Se puede demostrar que basta suponer que $f \in L^1(G)$. Por tanto, este resultado implica la *fórmula de sumación de Poisson* tomando $G = \mathbb{R}$, $H = \mathbb{Z}$ y $H^{\perp} = \mathbb{Z}$. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces

     $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{2\pi inx}.$$

2. El Análisis de funciones booleanas es un tema de actualidad [28]. Además del *property testing*, algunas aplicaciones interesantes son: el procesamiento de señales, otras áreas de Teoría de la Computación, y la Teoría de la elección social, destacando el *Teorema de Arrow* (1950), que establece que ningún sistema de votación con tres o más alternativas es “ideal”. Este resultado le valió a Kenneth Arrow $(1921-2017)$ el Premio Nobel de Economía de 1972.

Apéndice A
Existencia de la medida de Haar

Seguiremos la prueba de [3], en la que utilizaremos dos conocidos teoremas. Sus demostraciones se puede encontrar en [12, p. 230-235] y [12, p.169-170] respectivamente.

Teorema A.1 (Teorema de Tychonoff)**.** El producto arbitrario de espacios compactos es compacto en la topología producto.

Teorema A.2. Sea X un espacio topológico. Entonces X es compacto si y sólo si, para cada colección de cerrados $\mathscr{C}$ de X con la propiedad de la intersección finita (cada subcolección finita tiene intersección no vacía), la intersección de todos los elementos de $\mathscr{C}$ es no vacía.

Teorema A.3. Si G es un grupo localmente compacto, existe una medida de Haar por la izquierda en G.

Sea K un compacto de G, y V un subconjunto de G con interior $\mathring{V}$ no vacío. Entonces $\{x\mathring{V}\}_{x\in G}$ es un recubrimiento de abiertos de K, por lo que existen sucesiones finitas $\{x_i\}_{i=1}^{n} \subseteq G$ tales que $K \subseteq \cup_{i=1}^{n} x_i V$ (pues $\mathring{V} \subseteq V$ evidentemente). Definimos $\#(K:V)$ como el menor número natural n tal que existe una sucesión finita de n elementos de este tipo. Es inmediato que $\#(K:V) = 0$ si y sólo si $K = \emptyset$.

Fijemos para toda la demostración un compacto K_0 con interior no vacío. Dado un compacto K de G mediremos su “tamaño" calculando el cociente $\#(K:U)/\#(K_0:U)$ para cada U entorno de e y observando que ocurre cuando tomamos U más pequeño, para construir una medida exterior μ^* en G que restringida a $\mathscr{B}(G)$ es la medida que buscamos.

Sea $\mathscr{C}$ la familia de los conjuntos compactos de G, y sea $\mathscr{U}$ la familia de entornos de e. Para cad $U \in \mathscr{U}$ definimos una función $h_U : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ dada por la expresión $h_U(K) = \#(K:U)/\#(K_0:U)$, que cumple las siguientes propiedades.

Lema A.4. Si $U \in \mathscr{U}$, y $K, K_1, K_2 \in \mathscr{C}$, y $x \in G$, se cumple:

(i) $0 \leq h_U(K) \leq \#(K:K_0)$.
(ii) $h_U(\emptyset) = 0$:
(iii) $h_U(K_0) = 1$.

(iv) $h_U(xK) = h_U(K)$.
(v) Si $K_1 \subseteq K_2$, entonces $h_U(K_1) \leq h_U(K_2)$.
(vi) $h_U(K_1 \cup K_2) \leq h_U(K_1) + h_U(K_2)$.
(vii) Si $K_1U^{-1} \cap K_2U^{-1} = \emptyset$, entonces $h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2)$.

Demostración. (i) Se deduce de la desigualdad $\#(K:U) \leq \#(K:K_0)\#(K_0:U)$. Si $\{x_i\}_{i=1}^m$ y $\{y_j\}_{j=1}^n$ son dos sucesiones finitas de G tales que $K \subseteq \cup_{j=1}^m x_i K_0$ y $K_0 \subseteq \cup_{j=1}^n y_j U$, entonces $K \subseteq \cup_{i=1}^m \cup_{j=1}^n x_i y_j U$.

(ii) y (iii) se cumplen por definición.

(iv) Es cierto porque si $K \subseteq \cup_{i=1}^n x_i U$ entonces $xK \subseteq \cup_{i=1}^n x x_i U$.

(v) Es cierto porque si $K_2 \subseteq \cup_{i=1}^n x_i U$ entonces $K_1 \subseteq \cup_{i=1}^n x_i U$.

(vi) Si $K_1 \subseteq \cup_{i=1}^m x_i U$ y $K_2 \subseteq \cup_{j=1}^n y_j U$, entonces $K_1 \cup K_2 \subseteq (\cup_{i=1}^m x_i U) \cup (\cup_{j=1}^n y_j U)$.

(vii) Por (vi), sólo falta comprobar que $\#(K_1 \cup K_2 : U) \geq \#(K_1 : U) + \#(K_2 : U)$. Sea $\{x_i\}_{i=1}^n$ una sucesión de G tal que $n = \#(K_1 \cup K_2 : U)$ y $K_1 \cup K_2 \subseteq \cup_{i=1}^n x_i U$. Por hipótesis $x_i U$ interseca como mucho a uno de los compactos K_1 o K_2, pues si $x_i U$ intersecara a K^1 y K_2 entonces tendríamos $x_i \in K_1 U^{-1} \cap K_2 U^{-1}$. Por tanto, podemos dividir la sucesión de $x_i' s$ en dos sucesiones $\{y_j\}_{j=1}^m$ y $\{z_k\}_{k=1}^p$ tales que $K_1 \subseteq \cup_{j=1}^m y_j U$ y $K_2 \subseteq \cup_{k=1}^p z_k U$. Esto implica la desigualdad buscada, pues podría existir algún elemento $x \in \{x_i\}_{i=1}^n$ tal que $xU \cap K_1 = \emptyset$ y $xU \cap K_2 = \emptyset$. $\square$

Ahora, consideramos para cada $K \in \mathscr{C}$ el intervalo $I_K = [0, \#(K:K_0)] \subseteq \mathbb{R}$. Como cada I_K es compacto el espacio producto $X = \prod_{K \in \mathscr{C}} I_K$ es compacto por el Teorema A.1. Por el Lema A.4(i), $h_U \in X$ para todo $U \in \mathscr{U}$. Si V un entorno de e, definimos $S(V) = \overline{\{h_U : U \in \mathscr{U}, U \subseteq V\}}$. Para $V_1, \ldots, V_n$ elementos arbitrarios de $\mathscr{U}$, $h_V \in \cap_{i=1}^n S(V_i)$ donde $V = \cap_{i=1}^n V_i$. Por tanto, $\cap_{i=1}^n S(V_i) \neq \emptyset$, y por el Teorema A.2, $\cap_{V \in \mathscr{U}} S(V) \neq \emptyset$. Este razonamiento nos permite elegir un elemento $h_\bullet$ de $\cap_{V \in \mathscr{U}} S(V)$, que cumple las siguientes condiciones.

Lema A.5. Si $K, K_1, K_2 \in \mathscr{C}$ y $x \in G$, entonces se cumple:

(i) $0 \leq h_\bullet(K)$.
(ii) $h_\bullet(\emptyset) = 0$.
(iii) $h_\bullet(K_0) = 1$.
(iv) $h_\bullet(xK) = h_\bullet(K)$.
(v) Si $K_1 \subseteq K_2$, $h_\bullet(K_1) \leq h_\bullet(K_2)$.
(vi) $h_\bullet(K_1 \cup K_2) \leq h_\bullet(K_1) + h_\bullet(K_2)$.
(vii) Si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $h_\bullet(K_1 \cup K_2) = h_\bullet(K_1) + h_\bullet(K_2)$.

Demostración. (i) se cumple por definición de $h_\bullet$ y por la Proposición A.4(i).

Para probar cada uno de los apartados del (ii) al (vi), utilizaremos que la topología de X (la topología producto) está definida de forma que la proyección de X en $\mathbb{R}$ dada por $h \mapsto h(K)$ es continua. A partir de esta proyección podemos construir aplicaciones continuas no negativas o idénticamente nulas para cada h_U. Consideramos el caso del apartado (vi). Por la continuidad de la proyección, la aplicación

$$h \mapsto h(K_1) + h(K_2) - h(K_1 \cup K_2)$$

es continua. Ya que la aplicación es no negativa para cada h_U por el Lema A.4(vi), es no negativa en cada $S(V)$, y en particular, en $h_\bullet$.

Por último, veamos (vii). Por la Proposición 1.13(i), existen dos abiertos disjuntos U_1 y U_2 tales que $K_1 \subseteq U_1$ y $K_2 \subseteq U_2$. Además, por la Proposición 1.45, existen entornos de e, V_1 y V_2, tales que $K_1V_1 \subseteq U_1$ y $K_2V_2 \subseteq U_2$. Tomemos $V = V_1 \cap V_2$. Entonces $K_1V \cap K_2V = \emptyset$, por lo que por la Proposición A.4(vii), para cada $U \in \mathscr{U}$ tal que $U \subseteq V^{-1}$ se tiene

$$h_U(K_1 \cup K_2) = h_U(K_1) + h_U(K_2).$$

Esto implica que la aplicación (A) se anula $S(V^{-1})$, y en particular, en $h_\bullet$. □

A partir de $h_\bullet$ y sus propiedades, podremos construir la medida exterior necesaria. Definamos μ^* a través de las expresiones

$$\mu^*(U) = \sup\{h_\bullet(K) : K \subseteq U, K \in \mathscr{C}\} \text{ para todo } U \text{ abierto de } G, \text{ y} \tag{A.1}$$

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\{\mu^*(U) : A \subseteq U, U \text{ abierto}\} \text{ para todo } A \subseteq G. \tag{A.2}$$

Por los apartados (i), (v) y (ii) del Lema A.5, μ^* es no negativa, monótona y $\mu^*(\emptyset) = 0$. Por (A.2), para probar que μ^* es contablemente aditiva es suficiente comprobar que si $(U_i)_{i=1}^\infty$ es una sucesión de abiertos entonces $\mu^*(\cup_{i=1}^\infty U_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(U_i)$. Sea K un subconjunto compacto de $\cup_{i=1}^\infty U_i$. Por compacidad, $K \subseteq \cup_{i=1}^n U_i$ para cierto n. Por la Proposición 1.13 (iv), existen compactos $K_1 \subseteq U_1, \ldots, K_n \subseteq U_n$ tales que $K = \cup_{i=1}^n K_i$. Por tanto, por el Lema A.5(vi) y (A.1),

$$h_\bullet(K) \leq \sum_{i=1}^n h_\bullet(K_i) \leq \sum_{i=1}^n \mu^*(U_i) \leq \sum_{i=1}^\infty \mu^*(U_i),$$

para todo K subconjunto compacto de $\cup_{i=1}^\infty U_i$, por lo que tomando supremos, se tiene $\mu^*(\cup_{i=1}^\infty U_i) \leq \mu^*\left(\sum_{i=1}^\infty U_i\right)$.

Ahora, probaremos que cada conjunto de Borel de G es μ^*-medible. Por la Observación 1.8 y por (A.1), basta comprobar que si U y V son abiertos de G y $\mu^*(V) < +\infty$ entonces

$$\mu^*(V) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c). \tag{A.3}$$

Sea $\varepsilon > 0$, y tomemos un subconjunto compacto K de $V \cap U$ tal que $h_\bullet(K) > \mu^*(V \cap U) - \varepsilon$ (se puede por la condición de supremo), y otro subconjunto compacto L de $V \cap K^c$ tal que $h_\bullet(L) > \mu^*(V \cap K^c) - \varepsilon$ (en un espacio Hausdorff, un compacto es cerrado). Por la forma en la que los hemos elegido, K y L son disjuntos, y ya que $V \cap U^c \subseteq V \cap K^c$, se cumple $h_\bullet(L) > \mu^*(V \cap U^c) - \varepsilon$. En definitiva, por estas desigualdades y el Lema A.5(vii) se tiene

$$h_\bullet(K \cup L) = h_\bullet(K) + h_\bullet(L) \geq \mu^*(V \cap U) + \mu^*(V \cap U^c) - 2\varepsilon.$$

Teniendo en cuenta que $h_\bullet(K \cup L) \leq \mu^*(V)$ y ε es arbitrario, queda demostrado (A.3). Podemos restringir μ^* a $\mathscr{B}(G)$, y por el Teorema 1.9, esta restricción es una medida en $\mathscr{B}(G)$, que denotaremos por μ.

Veamos que μ es una medida de Radon. Si K es un compacto contenido en un abierto U, entonces $h_\bullet(K) \leq \mu(U)$, y por (A.2),

$$h_\bullet(K) \leq \mu(K). \tag{A.4}$$

Si además U fuera un abierto con clausura compacta que contiene a K (existe por la Proposición 1.13 (iii)), entonces $h_\bullet(L) \leq h_\bullet(\overline{U})$ para todo subconjunto compacto L de U, y por tanto (por (A.1) y la monotonía),

$$\mu(K) \leq \mu(U) \leq h_\bullet(\overline{U}).$$

Como $h_\bullet$ es finita en los compactos, se deduce que μ también lo es.

Por otro lado, μ es regular exterior por (A.2), y regular interior por (A.1) y (A.4). Además, μ es no nula pues $\mu(K_0) \geq 1$ por (A.4) y el Lema A.5(iii), e invariante por traslaciones. Si U es un abierto, $\mu(xU) = \mu(U)$ por (A.1) y el Lema A.5(iv). La invariancia por traslaciones para cada conjunto de Borel se sigue de (A.2). En definitiva, μ es una medida de Haar por la izquierda.

Apéndice B

Resultados de Análisis Complejo

Este apéndice supone un suplemento para algunas demostraciones del Capítulo 4, en las que se hace referencia a algunos teoremas de Análisis de variable compleja sin llegar a enunciarlos. Las demostraciones de los siguientes resultados se pueden encontrar en [22].

Proposición B.1. Si $\sum |a_n| < \infty$, entonces el producto $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ converge. Este producto converge a 0 si y sólo si alguno de sus factores es 0.

Demostración. Por la convergencia de $\sum a_n$, podemos suponer que $|a_n| < 1/2$ para todo n. Definimos el logaritmo $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n}$. Sabemos que este logaritmo satisface $1+z = e^{\log(1+z)}$ siempre que $|z| < 1$. Por tanto:

$$\prod_{n=1}^{N}(1+a_n) = \prod_{n=1}^{N} e^{\log(1+a_n)} = e^{\sum_{n=1}^{N}\log(1+a_n)} = e^{B_n},$$

donde $B_N = \sum_{n=1}^{N}\log(1+a_n)$. Por definición (de una forma similar a en la Proposición 4.4), $|\log(1+a_n)| \leq 2|a_n|$, por lo que, por la convergencia de la serie $\sum |a_n|$, B_N converge a un número que llamamos B. Por la continuidad de la exponencial e^{B_N} converge a e^B.

Por otro lado, si $1+a_n \neq 0$ para todo n, el producto tiene límite no nulo por ser de la forma e^B. La otra implicación es evidente. □

Definición B.2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Diremos que f es *holomorfa en* $z_0 \in \Omega$ si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Lema B.3. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω de $\mathbb{C}$. Supongamos que la sucesión converge uniformemente a una función f en cada compacto de Ω. Entonces, f es holomorfa en Ω y la sucesión $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en cada compacto a f'.

Lema B.4. Sea $f(s,t) : \Omega \times [a,b]$ donde Ω es un abierto de $\mathbb{C}$. Supongamos que se cumple:

(i) La función $s \mapsto f(s,t)$ es holomorfa para todo $t \in [a,b]$.
(ii) f es continua en $\Omega \times [0,1]$.

Entonces la función $F(s) = \int_{[a,b]} f(s,t)dt$ es holomorfa en Ω.

Teorema B.5. Dada un serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, existe $R \in [0,+\infty]$ tal que la serie:

(i) converge absolutamente si $|z| < R$.
(ii) diverge si $|z| > R$.

En cualquier caso, $1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$, y R es el radio de convergencia de la serie de potencias.

Teorema B.6. La serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con radio de convergencia $R > 0$ es una función holomorfa en $D(z_0, R)$.

Teorema B.7. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa. Si D es un disco centrado en z_0 cuya clausura está contenida en Ω, entonces f posee un desarrollo en serie de potencias en z_0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

para todo $z \in D$ donde $a_n = (f^{(n)}(z_0))/n!$.

Teorema B.8 (Principio de acumulación de ceros)**.** Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que sus ceros tienen un punto de acumulación en Ω. Entonces $f = 0$.

Corolario B.9. Sean f y g dos funciones holomorfas en un abierto conexo $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, y supongamos que $f(z) = g(z)$ en un subconjunto abierto no vacío de Ω. Entonces $f(z) = g(z)$ en Ω.

Teorema B.10. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no idénticamente nula que tiene un cero en el punto $z_0 \in \Omega$. Entonces existe un entorno $U \subseteq \Omega$ de z_0, una función holomorfa g que no se anula en U, y un único $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(z) = (z-z_0)^n g(z) \text{ para todo } z \in U.$$

Definición B.11. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y U un entorno de z_0. Una función $f : U \setminus z_0 \to \mathbb{C}$ tiene un polo en z_0 si definiendo $1/f$ para que valga 0 en z_0, entonces es holomorfa en un entorno de z_0.

Teorema B.12. Sea Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$, y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa que tiene un polo en el punto $z_0 \in \Omega$. Entonces existe un entorno $U \subseteq \Omega$ de z_0, una función holomorfa g que no se anula en U, y un único $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(z) = (z-z_0)^{-n} g(z) \text{ para todo } z \in U.$$

Si en las condiciones de este teorema, $n = 1$, diremos que z_0 es un *polo simple*.

Bibliografía

[1] C. D. ALIPRANTIS AND K. C. BORDER, *Infinite dimensional analysis*, Springer, Berlin, third ed., 2006. A hitchhiker's guide.

[2] T. M. APOSTOL, *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. Undergraduate Texts in Mathematics.

[3] D. L. COHN, *Measure theory*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. [Birkhäuser Advanced Texts: Basel Textbooks], Birkhäuser/Springer, New York, second ed., 2013.

[4] H. DAVENPORT, *Multiplicative number theory*, vol. 74 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin, second ed., 1980. Revised by Hugh L. Montgomery.

[5] R. ENGELKING, *General Topology*, vol. 6 of Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann Verlag, 1989.

[6] M. FABIAN, P. HABALA, P. HÁJEK, V. MONTESINOS SANTALUCÍA, J. PELANT, AND V. ZIZLER, *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*, vol. 8 of CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer-Verlag, New York, 2001.

[7] G. B. FOLLAND, *A course in abstract harmonic analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[8] ——, *Real analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, second ed., 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.

[9] G. GODEFROY AND D. LI, *Strictly convex functions on compact convex sets and applications*, in Functional analysis, Narosa, New Delhi, 1998, pp. 182–192.

[10] E. KANIUTH, *A course in commutative Banach algebras*, vol. 246 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2009.

[11] R. E. MEGGINSON, *An introduction to Banach space theory*, vol. 183 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1998.

[12] J. R. MUNKRES, *Topology*, Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000. Second edition of [MR0464128].

[13] J. J. O'CONNOR AND E. F. ROBERTSON, *Lev Semenovich Pontryagin, Mactutor History of Mathematics*. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Pontryagin.html, (University of St Andrews, Scotland, January 1999). Accessed: 2018-06-25.

[14] ——, *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, Mactutor History of Mathematics*. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Dirichlet.html, (University of St Andrews, Scotland, May 2000). Accessed: 2018-06-26.

[15] R. O'DONNELL, *Analysis of Boolean functions*, Cambridge University Press, New York, 2014.

[16] L. PONTRJAGIN, *The theory of topological commutative groups*, Ann. of Math. (2), 35 (1934), pp. 361–388.

[17] W. RUDIN, *Fourier analysis on groups*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.

[18] ——, *Functional analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, second ed., 1991.

[19] J.-P. SERRE, *A course in arithmetic*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. Translated from the French, Graduate Texts in Mathematics, No. 7.

[20] G. F. SIMMONS, *Introduction to topology and modern analysis*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, Fla., 1983. Reprint of the 1963 original.

[21] B. SIMON, *Convexity*, vol. 187 of Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2011. An analytic viewpoint.

[22] E. M. STEIN AND R. SHAKARCHI, *Complex analysis*, vol. 2 of Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[23] ——, *Fourier analysis*, vol. 1 of Princeton Lectures in Analysis, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. An introduction.

[24] K. STROMBERG, *A note on the convolution of regular measures*, Math. Scand., 7 (1959), pp. 347–352.

[25] E. R. VAN KAMPEN, *Locally bicompact abelian groups and their character groups*, Ann. of Math. (2), 36 (1935), pp. 448–463.

[26] B. VEKLYCH, *A one-formula proof of the nonvanishing of L-functions of real characters at 1*, Amer. Math. Monthly, 122 (2015), pp. 484–485.

[27] A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Actual. Sci. Ind., no. 869, Hermann et Cie., Paris, 1940. [This book has been republished by the author at Princeton, N. J., 1941.].

[28] R. D. WOLF, *A Brief Introduction to Fourier Analysis on the Boolean Cube*, no. 1 in Graduate Surveys, Theory of Computing Library, 2008.

[29] P. ZOROA AND N. ZOROA, *Elementos de probabilidades*, Diego Marín, 2008.