



UNIVERSIDAD DE MURCIA
Facultad de Matemáticas

TRABAJO FIN DE GRADO

Ecuación de campo de Einstein: Desarrollo y soluciones exactas

Realizado por:
Iván García Brao

Declaración de originalidad

Yo, Iván García Brao, autor del TFG Ecuación de campo de Einstein: Desarrollo y soluciones exactas, bajo la tutela del profesor D. Miguel Ángel Meroño Bayo, declaro que este trabajo es original en el sentido de que he puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 26 de junio de 2018.

A handwritten signature in black ink, consisting of several loops and a final flourish, representing the name Iván García Brao.

Iván García Brao.

Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración

Put your hand on a hot stove for a minute, and it seems like an hour. Sit with a pretty girl for an hour, and it seems like a minute. That's relativity.— Albert Einstein

Resumen

Desde el principio de los tiempos, el hombre, maravillado, ha mirado al cielo intentando comprender y explicar los fenómenos que surgían a su alrededor y, ante la imposibilidad de encontrarles una justificación, acabar asociándolos con la magia, superstición e incluso con la religión, algo que perduraría a lo largo de muchos siglos.

Posteriormente, y tras incontables años de observación, las bases científicas de la astronomía comenzaron a asentarse, llegando a razonamientos mucho más detallados y realistas sobre el universo.

En este avance, cobran gran relevancia las contribuciones aportadas por las matemáticas, siendo estas la base de la que partió Einstein para poder desarrollar su teoría de la relatividad.

El cometido de esta memoria consiste en llegar al desarrollo de la ecuación de campo de Einstein y explicar algunas de sus soluciones exactas.

Para ello, el trabajo se dividirá en tres partes. La primera, tendrá el objetivo de establecer los conocimientos y definiciones previas sobre geometría semi-riemanniana, y en particular, lorentziana, necesarias para poder desarrollar los siguientes capítulos, los cuales supondrán el grueso del trabajo.

Entre estos conceptos previos, destacan la definición de los tensores que caracterizan la curvatura en las variedades semi-riemannianas: el tensor curvatura de Riemann, el tensor curvatura de Ricci y la curvatura escalar, todos ellos fundamentales en el estudio de la teoría de la relatividad de Einstein.

Además, ya que nuestro estudio estará integrado en las variedades lorentzianas, se dedica parte del capítulo a destacar los elementos y las particularidades que pueden aparecer.

A todo esto se añade el tensor tensión-energía, el cual describe el flujo de energía y momento, actuando como la fuente de la curvatura del espacio-tiempo, en particular, este tensor lo desarrollaremos en el marco de los fluidos perfectos.

La segunda parte del trabajo tendrá el objetivo de llegar a la ecuación de campo de Einstein, para ello se realizará un recorrido por la historia, comenzando por la ecuación de campo de Newton de la física clásica, $\Delta\phi = 0$ (ecuación de Laplace), la cual se puede generalizar a la ecuación de Poisson $\Delta\phi = 4\pi\rho$ donde ρ representa la densidad

de materia. En la sección siguiente se desarrolla la ecuación de campo de Einstein en el vacío, suponiendo el caso de un campo gravitacional fuera de una masa aislada, esféricamente simétrica. Un ejemplo de este sistema es el campo producido por el sol (ignorando las perturbaciones de los planetas en ese campo).

Para poder llegar a dicha ecuación en el vacío, es necesario utilizar dos lemas, los cuales se encuentran en el capítulo primero y cuya finalidad consiste en facilitar el manejo de las herramientas de las que disponemos. La ecuación en el vacío termina siendo $Ric = 0$ donde Ric se corresponde con el tensor curvatura de Ricci definido en el primer capítulo.

Finalmente, en la última parte del capítulo se desarrolla la ecuación de campo de Einstein general, la cual contará de dos componentes, por un lado definimos lo que llamaremos el tensor curvatura de Einstein, denotado por $G = Ric - \frac{1}{2}Sg$ donde S es la curvatura escalar y g la métrica, y por otro, T el tensor tensión-energía desarrollado en el capítulo primero.

La ecuación de campo de Einstein se lee $G = \kappa T$, donde κ es una constante que, para determinar se compara por una parte el modelo de la física clásica de Newton y por otra la relatividad general de Einstein, concluyendo que la constante debe de ser $\kappa = 8\pi$. En definitiva, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$G = 8\pi T$$

El mismo Einstein, ya anciano, declaró lo siguiente sobre las ecuaciones de campo: “son similares a un edificio una de cuyas alas [el primer miembro de la ecuación] es de fino mármol, mientras que la otra es madera de baja calidad [el segundo miembro]”.

En un primer momento, la teoría de la relatividad de Einstein no fue aceptada y para que se pudiera demostrar su validez tuvieron que pasar algunos años. Es durante el eclipse de 1919 cuando Einstein se une a la expedición de Sir Arthur Eddington, a la isla Príncipe en África para fotografiar las estrellas del fondo durante el eclipse y mostrar que la luz se curva en presencia de un objeto masivo, en este caso, el Sol. Este evento hizo que Einstein se convirtiera en toda una celebridad.

Además de esto, logró explicar la precesión del perihelio Mercurio, un fenómeno que las leyes de Newton no habían podido aclarar hasta el momento y, más recientemente, con los aparatos GPS se ha confirmado la dilatación del tiempo en presencia de campos gravitacionales.

Finalmente, en el tercer capítulo se desarrollan las siguientes soluciones exactas a la ecuación:

- Espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski.
- Espacio-tiempo de Robertson-Walker.
- Modelos de Friedmann.
- Modelo de Schwarzschild.

La primera solución, es la más simple y corresponde con la variedad en la que se desarrolla la teoría de la relatividad especial desarrollada por Einstein en 1905, es decir, el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski.

Dicha teoría parte de los siguientes postulados:

Postulado 1. Todos los sistemas de referencia inerciales son idénticos para la formulación de las leyes de la física. En otras palabras, es imposible distinguir un sistema de referencia inercial privilegiado con respecto a los otros realizando experimentos físicos.

Postulado 2. La velocidad de la luz en el vacío es una constante universal y siempre es la misma con independencia de la fuente y el estado físico del observador que la mide.

Y consigue obtener conclusiones asombrosas que hicieron temblar el mundo de la física, como por ejemplo, que el tiempo y la longitud son cantidades relativas, no absolutas como se afirmaba en la física clásica newtoniana, llegando a situaciones tan peculiares como la paradoja de los gemelos.

La segunda solución, consiste en los espacio-tiempos de Robertson-Walker, el primer modelo que intenta explicar el sistema más grande que nos rodea, es decir, nuestro universo.

Para ello, supone el hecho de que existe isotropía en la distribución de las galaxias, lo que le permite definir lo que se conoce como fluido de Robertson-Walker.

Además, se utiliza el concepto de producto torcido, el cual introduce una función f diferenciable que aparece en la métrica de la variedad.

Por último, para simplificar el problema se toman tres hipersuperficies estándar como posibles formas del universo, estas son las que tienen curvatura $K = -1, 0, 1$, es decir, el hiperboloide, el plano o la esfera, determinando incluso que, en los tres casos, un big bang originó toda la materia y que en el caso de la esfera, el universo tendría un final denominado big crunch.

La tercera solución, consiste en un caso particular de un espacio-tiempo de Robertson-Walker, en el que se supone que la presión μ es nula. Esta hipótesis se conjetura con el objetivo de simplificar el modelo y poder llegar a soluciones explícitas para la función f que aparecía en el producto torcido de la solución anterior, permitiéndonos calcular la edad de varios universos.

Para concluir el trabajo, se desarrolla la solución de Schwartzchild, la cual ajusta sistemas tan habituales como el campo que produce el Sol. Por otro lado, también conforma el modelo más sencillo de agujero negro.

Esta solución es una de las más conocidas, ya que fue la primera solución exacta de las ecuaciones de campo.

Abstract

Ever since the beginning of time, human being have looked up to the sky, trying to comprehend and explain all the phenomena happenings around them and, in the face of the impossibility of finding an explanation, they ended up associating those events to magic, superstition or even religion. These beliefs would last for centuries.

subsequently, after many years of observation, the scientific bases of astronomy began to settle, allowing humans reasonings about the universe become more accurate and realistic.

In this progress, mathematical contributions acquired great importance, being Einstein's basis to develop the relativity theory.

The aim of this memory is to conclude on Einstein's field equations development and to explain some of its exact solutions.

In order to do it, the work will be divided into three parts. The objective of the first one is establishing the previous knowledge and definitions about semi-Riemannian geometry and, particularly Lorentzian geometry, required to develop the next chapters which will be the majority of the work.

Among these previous concepts, it is important to underline the definitions of tensors that characterize the curvature in semi-Riemannian manifolds: The Riemann curvature tensor, the Ricci curvature tensor and the escalar curvature, being all of them essential in the study of Einstein's relativity theory.

Furthermore, as this study is integrated in the Lorentzian manifolds, part of the chapter is dedicated to underlining the elements and particularities that can appear.

In addition to all of this, the stress-energy tensor, which describes the flow of energy, is studied, working as the source of space-time curvature. In particular, this tensor will be developed in the context of perfect fluids.

The second part of the work has the objective of reaching Einstein's fields equations. For this, we will go through a walk along history, beginning with the Newton field equation in classical physics, $\nabla\phi = 0$ (Laplace's equation), which can be generalize to the Poisson's equation $\nabla\phi = 4\pi\rho$ where ρ represents the density of matter.

In the next section, Einstein's field equations are developed in the void, supposing the case of the gravitational field on an isolated spherically symmetric mass, for example, the field produced by the sun, ignoring the perturbing effects of the planets on this field.

In order to reach this equation, it is necessary to use two lemmas, which are found in the first chapter, and whose finality consists on easing the use of the tools we have. This equation in a void context culminates being $Ric = 0$, where Ric is the Ricci curvature tensor defined earlier.

Finally, in the last part of the chapter, general Einstein's field equations are developed, which will have two components. On one hand, we defined what we will call the Einstein's curvature tensor, expressed as $G = Ric - \frac{1}{2}Sg$, where S is the scalar curvature and g is the metric tensor, and on the other hand, and T the stress-energy tensor developed in the first chapter.

Einstein's field equations is read $G = \kappa T$, where κ is a constant that so as to be determined, it is compared with Newton's classical physics and the general Einstein's relativity theory, arriving at a conclusion that the constant has to be $\kappa = 8\pi$. In the end, the equation stays:

$$G = 8\pi T$$

Einstein himself, as an old man, declared this about field equations: "it is similar to a building, one wing of which is made of fine marble (left part of the equation), but the other wing of which is built of low grade wood (right side of equation)."

At first, the Einstein relativity theory was not accepted, and it took several years for its validity to be proven, it was in the eclipse in 1919 when Einstein joined the Sir Arthur Eddington expedition to the prince island in Africa, with the objective of photographing the background stars during the eclipse and showing that light bends in presence of a massive object, in this case, the sun. This event made Einstein a great celebrity.

Besides, he managed to explain the advance of Mercury's perihelion, a phenomenon that Newton's laws had not been able to explain up to that moment. More recently, time dilatation in presence of gravitational fields has been proven using GPS devices.

Finally, in the three chapter the following exact solutions are develop:

- Lorentz-Minkowsky spacetime
- Robertson-Walker spacetime
- Friedmann models
- Schwarzschild model

The first solution is the simplest one, and it corresponds with the manifold in which special relativity theory is develop, in 1905, that is the Lorentz-Minkowski spacetime.

That theory is starts with the next postulates:

Postulate 1. The laws of physics are the same in all inertial frames of reference. In other words, is impossible to distinguish one inertial frame from another doing physical experiments.

Postulate 2. As measured in any inertial frame of reference, light is always propagated in empty space with a definite velocity c that is independent of the source and the state of motion of the observer.

And manages to reach amazing conclusions that made the world of physics tremble, for example, time and lenght being relative quantities, not absolute as newtonian classical physics stated, reaching peculiar situations such as the twin paradox.

The second solution consist of the Robertson-Walker spacetimes, the first model that tries to adjust the biggest system surrounding us, that is to say, our universe.

To do that, the fact that no large asymmetry can be observed in the distribution of the galaxies, makes us suppose that isotropy exists in the disposition of them, allowing to define what is called the Robertson-Walker flow.

In addition, the concept of warped product is used, which introduces a differentiable function f that appears in the metric tensor associated with the manifold.

Lastly, it arrives to the conclusion that the unique hypersurfaces that could coincide with the shape of the universe are those with $K = -1, 0, 1$ curvature, that is to say, the hyperbolic, the plane or the sphere, even determining that, in all three cases, a big bang originated all the matter and, in the case of the sphere, the universe would have an ending called the big crunch.

The third solution, consist of a particular case of a Robertson-Walker spacetime, in which pressure μ is zero. This hypothesis is conjectured aiming to simplify the model and to be able to reach explicit solutions for the f function that appeared in the warped product in the previous solution, allowing us to calculate the age of several universes.

In conclusion, Schwarzschild solution is develop, which adjusts to systems as habitual as the field produced by the sun.

On the other hand, it also defines the easiest model of black hole.

This solution is one of the most known because it was the first exact solution of field equations.

Índice general

1. Conceptos previos sobre geometría de Lorentz	12
1.1. Algunas definiciones previas	12
1.1.1. Carácter causal de un subespacio	13
1.1.2. Conos temporales	14
1.2. Algunas propiedades	17
1.2.1. Elementos básicos	19
2. La ecuación de campo de Einstein	26
2.1. Ecuación de campo de Newton	26
2.2. Ecuación de campo de Einstein en el vacío	28
2.3. Ecuación de campo de Einstein general	31
2.4. Constante Cosmológica	33
3. Soluciones exactas de la ecuación de campo de Einstein	35
3.1. Espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski	35
3.1.1. Paradoja de los gemelos	36
3.2. Espacio-tiempos de Robertson-Walker	37
3.2.1. Definición del modelo	37
3.2.2. Fluido de Robertson-Walker	40
3.2.3. Cosmología de Robertson-Walker	40
3.3. Modelos de Friedmann	44
3.3.1. Desplazamiento al rojo	46
3.4. Espacio-tiempo de Schwarzschild	48
3.4.1. Definición del modelo	49

3.4.2. Observadores de Schwarzschild	50
3.4.3. Geodésicas de Schwarzschild	51
3.4.4. Órbitas en caída libre de partículas materiales	53
3.4.5. Precesión del perihelio de Mercurio	54
3.4.6. Órbitas luminosas	55

Índice Alfabético	57
--------------------------	-----------

Capítulo 1

Conceptos previos sobre geometría de Lorentz

Antes de comenzar con el grueso del trabajo, es necesario definir unas consideraciones iniciales, ya sea para fijar algunos conceptos fundamentales que se irán utilizando, como para establecer una notación.

1.1. Algunas definiciones previas

Definición 1.1.1. El **índice de un producto escalar** \langle, \rangle sobre un espacio vectorial, es la dimensión del subespacio maximal W (con respecto a la inclusión) donde \langle, \rangle es **definida negativa**.

Esta elemental definición es importante, ya que para poder medir en nuestras variedades vamos a considerar productos escalares de índice uno, los cuales están definidos sobre los espacios tangentes a la variedad.

La primera piedra a colocar, la cual servirá de sustento de la teoría, es el concepto de tensor métrico.

Definición 1.1.2. Un **tensor métrico** g en una variedad diferenciable M es un tensor de tipo $(0,2)$ simétrico, no degenerado en M con índice constante.

En otras palabras, podemos decir que $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ asigna, para cada punto p de M , un producto escalar g_p en el espacio tangente $T_p M$, cumpliendo que el índice de g_p se mantiene constante para todo p .

Definición 1.1.3. Una **variedad semi-riemanniana** es un par ordenado (M, g) , donde M es una variedad diferenciable y g un tensor métrico.

El índice v de g_p en una variedad semi-riemanniana se denomina el **índice de M** , el cual cumple que

$$0 \leq v \leq n = \dim(M).$$

Si $v = 0$, M es una **variedad riemanniana**, si $v = 1$ y $n \geq 2$, M es una **variedad lorentziana**.

Estrictamente hablando, podríamos generalizar y definir los conceptos en variedades semi-riemannianas. Sin embargo, como nuestro objetivo reside en la teoría de la relatividad de Einstein y esta se encuentra contenida en el ámbito de la geometría lorentziana, nos limitaremos a desarrollar el capítulo en variedades semi-riemannianas de índice uno, es decir, en variedades lorentzianas.

1.1.1. Carácter causal de un subespacio

Definición 1.1.4. Sea (V, \langle, \rangle) un espacio vectorial con un producto escalar de índice uno, en adelante *espacio vectorial lorentziano*. El *carácter causal* de un vector $v \in V$ se define como

espacial si $\langle v, v \rangle > 0$ ó $v = 0$,

temporal si $\langle v, v \rangle < 0$,

nulo (o luminoso) si $\langle v, v \rangle = 0$ y $v \neq 0$.

Cuando el vector es temporal o nulo también se dice que es *causal*.

De la misma forma podemos definir el carácter causal de un subespacio.

Definición 1.1.5. Sea $W \subset V$ un subespacio de un espacio vectorial lorentziano. Decimos que W es

espacial si \langle, \rangle es definido positivo en W ,

temporal si \langle, \rangle es un producto escalar de índice uno sobre W ,

nulo (o luminoso) en otro caso.

Podemos observar una primera propiedad sobre el carácter causal de un subespacio.

Proposición 1.1.1. Sea $W \subset V$ un subespacio de un espacio vectorial lorentziano. Se cumple

W es temporal si, y solo si, W^\perp es espacial,

W es espacial si, y solo si, W^\perp es temporal,

W es nulo si, y solo si, W^\perp es nulo.

Se puede observar que esta última afirmación es equivalente a $W \cap W^\perp \neq 0$.

Demostración. Probaremos solo la primera puesto que las demás son similares. Suponemos que W es temporal, por la definición sabemos que W es no degenerado y con índice uno, además W^\perp es no degenerado y se tiene que $W \cap W^\perp = \{0\}$, es decir $V = W \oplus W^\perp$, por consiguiente, se cumple que $\text{ind}(V) = \text{ind}(W) + \text{ind}(W^\perp)$, lo que implica que $\text{ind}(W^\perp) = 0$, de tal modo que W^\perp es espacial.

Ejemplo 1.1.1. El ejemplo más simple de variedad lorentziana es el espacio de **Lorentz-Minkowski**, denotado por \mathbb{L}^n , que no es más que \mathbb{R}^n dotado con el producto

$$\langle v, w \rangle = -v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

Este espacio es el que modela la teoría de la relatividad especial de Einstein y será abordado con más profundidad en el capítulo 3.

□

1.1.2. Conos temporales

A continuación, definiremos el concepto de cono temporal. Sea \mathcal{J} el conjunto de todos los vectores temporales en un espacio vectorial lorentziano.

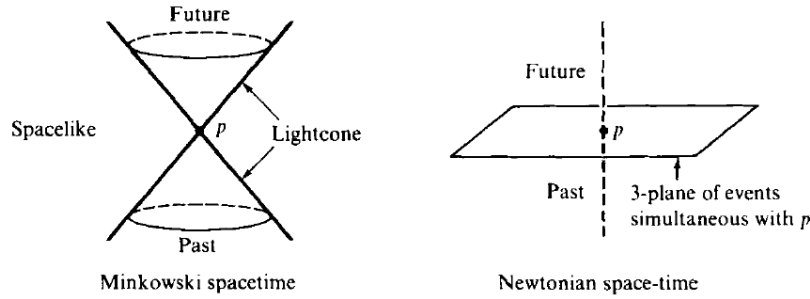
Definición 1.1.6. Sea $u \in \mathcal{J}$, definimos el **cono temporal** de V conteniendo a u como

$$C(u) = \{v \in \mathcal{J} : \langle u, v \rangle < 0\}.$$

El **cono opuesto temporal** es

$$C(-u) = -C(u) = \{v \in \mathcal{J} : \langle u, v \rangle > 0\}.$$

Ambos conos son disjuntos, además \mathcal{J} es la unión disjunta de los conos temporales.



Una propiedad básica de los conos temporales es la siguiente:

Proposición 1.1.2. Sean v, w dos vectores temporales en un espacio vectorial lorentziano, dichos vectores están en el mismo cono temporal si, y solo si, $\langle v, w \rangle < 0$.

Demostración. Vamos a ver que si $v \in C(u)$ y w es temporal, entonces $w \in C(u)$ si, y solo si, $\langle v, w \rangle < 0$. Debido a que se cumple que $C(\frac{u}{|u|}) = C(u)$ podemos asumir que u es un vector temporal unitario.

A continuación, escribimos $v = au + v^\perp$ y $w = bu + w^\perp$ donde v^\perp, w^\perp corresponden con la parte ortogonal a u de v y w respectivamente. Ambos vectores v, w son temporales, de forma que $|a| > |v^\perp|$ y $|b| > |w^\perp|$. Ahora $\langle v, w \rangle = -ab + \langle v^\perp, w^\perp \rangle$ y, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\langle v^\perp, w^\perp \rangle| \leq |v^\perp||w^\perp| < |ab|.$$

Por otro lado, al cumplirse que $v \in C(u)$ entonces $a > 0$. Así pues, $\text{sgn}(\langle v^\perp, w^\perp \rangle) = \text{sgn}(-ab) = -\text{sgn}(b)$ y con esto llegamos al resultado. \square

De la misma forma se cumple que los conos temporales son conexos, ya que para todo $v, w \in C(u)$ y $a, b \geq 0$ (no ambos nulos), $av + bw \in C(u)$.

Definición 1.1.7. Una *orientación temporal* de V es una elección de uno de los dos conos temporales de V , denotado por \mathcal{T} . Cuando está fijado el cono temporal, decimos que V está **orientado temporalmente**. El cono elegido \mathcal{T} se denomina *futuro* y el otro $(-\mathcal{T})$ *pasado*. El correspondiente cono causal (que incluye a \mathcal{T}) lo denotaremos por $\overline{\mathcal{T}}$.

Es conocido que en un espacio vectorial dotado de un producto interior disponemos de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En espacios vectoriales lorentzianos también se da la desigualdad, pero en este caso es justo en el sentido opuesto. Como este resultado es peculiar, vamos a enunciarlo y demostrarlo.

Proposición 1.1.3. Sean $v, w \in V$ dos vectores temporales en un espacio vectorial lorentziano, entonces se tiene

$$|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|,$$

dándose la igualdad si, y solo si, v y w son colineales.

Demostración. Escribimos $w = av + w^\perp$, donde w^\perp corresponde con la parte ortogonal a v de w . Como w es un vector temporal, $\langle w, w \rangle < 0$. Por tanto,

$$\langle w, w \rangle = \langle av + w^\perp, av + w^\perp \rangle = a^2 \langle v, v \rangle + \langle w^\perp, w^\perp \rangle < 0.$$

Ahora bien,

$$\langle v, w \rangle^2 = \langle v, av + w^\perp \rangle^2 = a^2 \langle v, v \rangle^2 = (\langle w, w \rangle - \langle w^\perp, w^\perp \rangle) \langle v, v \rangle \geq \langle w, w \rangle \langle v, v \rangle = |v|^2 |w|^2.$$

Por lo que $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$ y se da la igualdad si, y solo si, $\langle w^\perp, w^\perp \rangle = 0$, lo cual equivale a que $w^\perp = 0$, que equivale a su vez a que $w = av$. \square

Una consecuencia de este hecho es que la desigualdad triangular también se invierte.

Corolario 1.1.1. Si v y w son dos vectores temporales en el mismo cono temporal entonces

$$|v| + |w| \leq |v + w|,$$

dándose la igualdad si, y solo si, v y w son colineales.

Demostración. Al estar v y w en el mismo cono temporal, se tiene que $\langle v, w \rangle < 0$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos da $|v||w| \geq -\langle v, w \rangle$. Por tanto

$$(|v| + |w|)^2 = |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 \geq -\langle v + w, v + w \rangle = |v + w|^2,$$

cumpléndose la igualdad si, y solo si, $|v||w| = -\langle v, w \rangle$ pero, el último término es $|\langle v, w \rangle|$ de modo que usando la proposición anterior se llega al criterio de la colinealidad. \square

Volviendo al estudio de las variedades lorentzianas, cada $T_p M$ es un espacio vectorial de Lorentz y podemos preguntarnos si es posible asignar a cada $p \in M$ una orientación temporal $\mathcal{T}_p \subset T_p M$ de manera que esa aplicación $p \rightarrow \mathcal{T}_p$ sea “buena”, es decir, en algún sentido diferenciable. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición 1.1.8. Una aplicación $p \rightarrow \mathcal{T}_p$ que a cada $p \in M$ le asigna un cono temporal en $T_p M$ es diferenciable si, para todo $p \in M$ existe U entorno de p y $X \in \mathfrak{X}(U)$ campo de vectores tal que, $X_q \in \mathcal{T}_q$ para todo $q \in U$.

Una aplicación de este tipo se llama **orientación temporal de M** . Se dice que M es **orientable temporalmente** si admite una orientación temporal y, si ya está fijada la orientación, decimos que M está **orientada temporalmente**.

Nos podemos preguntar si todas las variedades lorentzianas son orientables temporalmente. Un resultado aclaratorio respecto a esta cuestión es el siguiente.

Proposición 1.1.4. Una variedad de Lorentz M es orientable temporalmente si, y solo si, existe un campo de vectores temporales $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Una consecuencia inmediata de esta proposición es que, en una variedad de Lorentz que admite una orientación temporal, elegir una orientación temporal es lo mismo que fijar un campo de vectores temporales $X \in \mathfrak{X}(M)$, el cual se puede tomar unitario sin pérdida de la generalidad.

Por otra parte, el hecho de que una variedad admita una métrica de Lorentz es una condición muy restrictiva topológicamente hablando. Por ejemplo, las únicas superficies compactas que admiten métricas lorentzianas son el toro y la botella de Klein. Además, la esfera S^n admite una métrica de Lorentz si, y solo si, n es impar. Para un desarrollo más extenso se puede consultar [4].

Ejemplo 1.1.2. Volviendo al espacio de Lorentz-Minkowski, tenemos que es orientable temporalmente.

Su orientación temporal usual es la que contiene el campo vectorial temporal y unitario ∂_0

Cabe destacar que para una variedad lorentziana, no hay relación entre **orientabilidad** y **orientabilidad temporal**.

Ejemplo 1.1.3. Es posible asignar una métrica lorentziana orientable temporalmente a la banda $S^1 \times I$ y una métrica no orientada temporalmente a la banda de Möbius. La situación contraria puede verse en la siguiente imagen:

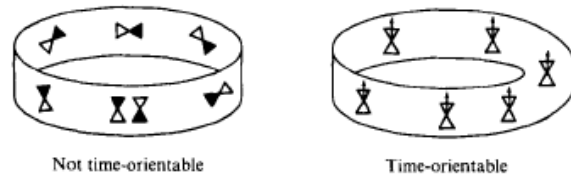


Figura 1.1: Orientaciones temporales

1.2. Algunas propiedades

En esta sección, comenzaremos definiendo algunas curvas importantes que podemos encontrar en las variedades de Lorentz y, posteriormente a explicar un resultado que se utilizará en siguientes capítulos.

Definición 1.2.1. Una curva diferenciable a trozos $\alpha : I \rightarrow M$, se dice que es una curva **temporal (nula o causal)** si su velocidad $\alpha'(t)$ es un vector temporal (nulo o causal) en los puntos que no son vértices y, en los vértices $\alpha'(t_i^-)$ y $\alpha'(t_i^+)$ son vectores temporales (nulos o causales) en el mismo cono temporal.

Definición 1.2.2. Sea M una variedad de Lorentz orientada temporalmente por \mathcal{T} . Diremos que un vector causal $v \in T_p M$ **apunta hacia el futuro** si $v \in \overline{\mathcal{T}}_p$. De forma dual, diremos que v apunta hacia el pasado si $v \in -\overline{\mathcal{T}}_p$.

Una curva $\alpha : I \rightarrow M$ **apunta hacia el futuro** si $\alpha'(t)$ apunta hacia el futuro para todo $t \in I$. Respectivamente, α apunta al pasado si $\alpha'(t)$ **apunta al pasado**, para todo $t \in I$.

Definición 1.2.3. Una **partícula material** en una variedad lorentziana M es una curva $\alpha : I \rightarrow M$ parametrizada por el arco¹, temporal y apuntando hacia el futuro. El parámetro τ se denomina **tiempo propio** de la partícula y físicamente representa el tiempo que mide un observador que se mueve siguiendo la trayectoria de α .

Definición 1.2.4. Veamos algunos términos relacionados con las partículas materiales.

- Una partícula material está en **caída libre** si es una geodésica.
- Una **partícula luminosa** es una geodésica nula apuntando hacia el futuro.
- Un **observador** es una partícula material con ese rol. Puede o no estar en caída libre. Si lo está, se dice que es un observador en caída libre.
- Un **observador instantáneo** de M es un par (p, u) donde $p \in M$ es un evento y $u \in T_p M$ es un vector temporal, unitario apuntando hacia el futuro.

Por lo que, un observador $\omega : I \rightarrow M$ lleva asociado un conjunto de observadores instantáneos indexados por el tiempo propio.

Un hecho que nos resulta habitual es que, bajo ciertas condiciones, las geodésicas minimizan la distancia entre dos puntos de una variedad.

En espacios lorentzianos, para geodésicas temporales esto no es así, como muestra el resultado siguiente.

Proposición 1.2.1. Sean p, q dos puntos pertenecientes a U , un entorno normal de p en una variedad lorentziana M . Si existe una curva temporal en U , uniendo p y q , entonces, el segmento de geodésica radial γ uniendo p y q es la única curva temporal en U que maximiza la distancia.

Ejemplo 1.2.1. Volviendo al espacio de Lorentz-Minkowski, la totalidad de la variedad es un entorno normal de cada punto.

Por lo tanto, la proposición anterior implica que cualquier segmento de geodésica temporal es la única curva temporal que maximiza la distancia entre sus puntos extremos.

¹Esto significa que $|\alpha'(t)| = 1, \forall t \in I$

Definición 1.2.5. Para $p, q \in M$, al número $pq = \|\vec{p}\vec{q}\| \geq 0$ se le llama, la **separación** entre p y q .

Significado físico de la separación. Sea $p, q \in M$.

- Si $\vec{p}\vec{q}$ es un vector temporal, apuntando al futuro, entonces pq es el tiempo propio transcurrido de una partícula material en caída libre desde p a q .
- $\vec{p}\vec{q}$ es un vector luminoso si, y solo si, $pq = 0$
- Si $\vec{p}\vec{q}$ es un vector espacial, entonces $pq \geq 0$ es la distancia de p a q medida por cualquier observador en caída libre ortogonal a $\vec{p}\vec{q}$.

Un resultado que nos será de gran utilidad en capítulos posteriores es el siguiente:

Proposición 1.2.2. Sean p y q eventos en el mismo cono temporal de 0 y tales que $\vec{op} \perp \vec{p}\vec{q}$, entonces

1. $op^2 = op^2 - pq^2$.
2. $op = op \cdot \cosh(\phi)$, $pq = op \cdot \sinh(\phi)$, donde $\phi = \angle(\vec{op}, \vec{o}\vec{q})$

1.2.1. Elementos básicos

Una de las operaciones más destacables que podemos hacer con un tensor es contraerlo, lo que supone la transformación de un tensor de tipo (r, s) en un tensor de tipo $(r - 1, s - 1)$.

Definición 1.2.6. Se define la **contracción** $(1,1)$, como la única aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal $C : \mathcal{T}_1^1 \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$ tal que

$$C(X \otimes \omega) = \omega(X).$$

A partir de esta operación, dado un tensor T de tipo (r, s) , si $1 \leq a \leq r$ y $1 \leq b \leq s$, se puede definir la **contracción sobre los índices** (a, b) como la contracción del tensor resultante al mantener fijos todos los índices salvo el a-ésimo y el b-ésimo.

El tensor obtenido de tipo $(r - 1, s - 1)$ se denota por $C_b^a(T)$ y la aplicación así definida $C_b^a : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow \mathcal{T}_{s-1}^{r-1}(M)$, es $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal.

Conexión de Levi-Civita

Sea X e Y dos campos de vectores en una variedad lorentziana M . El objetivo de esta sección consiste en definir un nuevo campo de vectores $\nabla_X Y$ en M , cuyo valor en cada punto p mida la tasa de cambio de Y en la dirección de X_p .

En \mathbb{R}^n hay una manera natural de hacer esto, se la conoce como **derivada covariante**. Para poder generalizar este concepto a variedades lorentzianas comenzaremos definiendo lo que es una conexión afín, para posteriormente poder establecer la **conexión de Levi-Civita**

Definición 1.2.7. Una **conexión afín** ∇ sobre una variedad diferenciable M es una aplicación

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M).$$

Denotada por $\nabla_X Y = \nabla(X, Y)$, verificando las siguientes propiedades:

- $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$,
- $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,
- $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ y $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Se dice que $\nabla_X Y$ es la **derivada covariante** de Y con respecto a X (para la conexión ∇). La primera propiedad nos asegura que $\nabla_X Y$ es un tensor en X , sin embargo, la tercera propiedad nos muestra que no es un tensor en Y .

Definición 1.2.8. La **torsión** de una conexión afín ∇ se define como el tensor T de tipo (1,2) dado por

$$T(X, Y) = [X, Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X.$$

Se dice que una conexión afín es **simétrica** o **libre de torsión** cuando su torsión es cero. Así, la torsión mide la falta de simetría de una conexión.

Definición 1.2.9. Sea (M, g) una variedad lorentziana M , y ∇ una conexión afín sobre M . Se dice que ∇ es **compatible con la métrica** si verifica la condición

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

Finalmente, se puede probar que existe una única conexión afín sobre M , simétrica y compatible con la métrica, la llamaremos **conexión de Levi-Civita** y la denotaremos por ∇ .

Tensor curvatura de Riemann

En la teoría de superficies enmarcada en \mathbb{R}^3 , la noción de curvatura aportó una descripción de la manera en la que una superficie se curvaba en el espacio.

Riemann fue quien generalizó el concepto de curvatura a variedades riemannianas.

A continuación establecemos el concepto de tensor curvatura de Riemann, el cual es esencial a la hora de estudiar la ecuación de campo de Einstein.

Definición 1.2.10. Sea M una variedad lorentziana y ∇ su conexión de Levi-Civita. El **tensor curvatura de Riemann** R asociado a M es el tensor de tipo $(1, 3)$ dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ se puede ver como una aplicación $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineal llamada **operador curvatura**.

El tensor curvatura de Riemann goza de importantes propiedades y posee diferentes simetrías, las cuales resultan muy útiles para su manipulación.

Unas de las más conocidas son la primera y segunda identidad de Bianchi.

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0.$$

Por otro lado, podemos escribir $R(X, Y, V, W) = \langle R(X, Y)V, W \rangle$ y, bajo esta notación se puede ver que el tensor R disfruta de las siguientes simetrías.

$$R(X, Y, V, W) = -R(Y, X, V, W),$$

$$R(X, Y, V, W) = -R(Y, X, W, V),$$

$$R(X, Y, V, W) = R(V, W, X, Y).$$

En coordenadas locales, las componentes de R^l_{ijk} de R

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \sum_{l=1}^n R^l_{ijk}\partial_l,$$

se expresan en función de los símbolos de Christoffel de la siguiente forma

$$R^l_{ijk} = \sum_s \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{js} - \sum_s \Gamma^s_{jk}\Gamma^l_{is} + \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i}.$$

Una consecuencia de esto es que debido a que los símbolos de Christoffel se escriben en términos de la métrica, es posible (al menos teóricamente) calcular el tensor curvatura de Riemann a partir de las componentes de la métrica.

Este tensor, resulta muy complicado de manejar debido a su naturaleza. Por consiguiente, a continuación, vamos a considerar una función real mucho más sencilla que determina R y que además le da un significado geométrico.

Definición 1.2.11. Dado un punto $p \in M$ y dos vectores $v, w \in T_p M$ linealmente independientes, se define la **curvatura seccional** $K(\Pi)$ del plano no degenerado Π generado por v y w como

$$K(\Pi) \equiv K(v, w) = \frac{R_p(v, w, v, w)}{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2}.$$

Este valor es independiente de la elección de las bases v, w de Π .

Así, la curvatura seccional K de M es una función real en el conjunto de todos los planos tangentes no degenerados a M . Además, se dice que una variedad lorentziana tiene **curvatura constante** si su función curvatura seccional es constante.

Tensor curvatura de Ricci y curvatura escalar

También resulta muy útil introducir nuevos tensores invariantes asociados al tensor curvatura de Riemann con el fin de ganar simplicidad, teniendo en cuenta el handicap de perder parte de la información.

Estos tensores vienen dados a partir de contracciones del tensor curvatura de Riemann.

Definición 1.2.12. Sea R el tensor curvatura de Riemann de M . Se define el **tensor curvatura de Ricci**, denotado por Ric , como la contracción $\text{Ric} = \mathcal{C}_2^1(R) \in \mathcal{T}_2^0(M)$.

El tensor Ric es simétrico y, dado un punto $p \in M$ y una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en $T_p M$ se tiene que

$$\text{Ric}_p(v, w) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \langle R_p(v, e_i)w, e_i \rangle,$$

donde $\varepsilon_1 = -1$ y $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$.

Ejemplo 1.2.2. En el caso de variedades lorentzianas (M, g) , se tiene $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 1$ y $\varepsilon_1 = -1$, luego

$$\text{Ric}(X, Y) = -\langle R(X, e_1)Y, e_1 \rangle + \sum_{j=2}^4 \langle R(X, e_j)Y, e_j \rangle.$$

Si el tensor curvatura Ricci es idénticamente nulo, se dice que M es **Ricci llano**. Una variedad llana es Ricci llana, pero el recíproco no es cierto.

Por otro lado, dado un vector unitario $v \in T_p M$, se define la **curvatura de Ricci** en el punto p y en la dirección v como $\text{Ric}_p(v, v)$.

Anteriormente, se ha mencionado que la curvatura seccional determina el tensor curvatura R , de modo que también determina Ric . Además, este puede ser reconstruido

en cada punto p por sus valores $\text{Ric}(u, u)$ en los vectores unitarios en p . Si e_1, e_2, \dots, e_n es un sistema de coordenadas en p tal que $u = e_1$, entonces

$$\text{Ric}(u, u) = \langle u, u \rangle \sum K(u, e_m).$$

Así $\text{Ric}(u, u)$ es, excepto por el signo de $\langle u, u \rangle = \pm 1$, la suma de la curvatura seccional en cualquiera de $n - 1$ planos ortogonales no degenerados en u .

Definición 1.2.13. Sea Ric el tensor curvatura de Ricci. Se define la **curvatura escalar** S de M como la contracción $S = C(\text{Ric}) \in \mathcal{T}_0^0(M)$.

En coordenadas

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,k} g^{ij} R_{ijk}^k.$$

Tensor tensión-energía

Para terminar este primer capítulo, vamos a estudiar un tensor que se usa para describir el flujo de energía y de momento en el contexto de la teoría de la relatividad, el cual se convierte en una pieza fundamental en nuestro estudio de la ecuación de campo de Einstein en el capítulo siguiente.

Definición 1.2.14. Un **tensor tensión-energía** es un tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ que cumple

$$T(X, X) \geq 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M),$$

donde X es causal, es decir $\langle X, X \rangle \leq 0$

El estudio del tensor tensión-energía vamos a realizarlo en el marco de los **fluidos perfectos**.

El flujo de un fluido, puede describirse como un gran enjambre de partículas en un espacio-tiempo M , pero, en lugar de considerar este modelo discreto, es más sencillo tratar con un modelo continuo donde la velocidad del flujo venga determinada por un campo de vectores temporal unitario U en M .

El tensor tensión-energía mide las fuerzas internas de un cuerpo en un espacio. Sean $p \in M$ y $v \in T_p M$ un punto de la variedad y un vector unitario respectivamente, entonces, en una hipersuperficie conteniendo a p , perpendicular a v , definimos $B(v)$ un pequeño cubo coordenado, centrado en p y denotaremos por P_B^+ , a la energía-momento total de las moléculas en $B(v)$ que están cruzando desde el lado $-v$ al v de $B(v)$.

De la misma forma definimos P_B^- como la energía total de las moléculas en $B(v)$ que cruzan desde el lado v al $-v$ de $B(v)$.

Entonces para otro vector unitario $w \in T_p M$, denotamos $T(v, w)$ como el límite cuando $\text{vol}(B(v)) \rightarrow 0$ de la componente w de $P_B = P_B^+ - P_B^-$.

Ahora sea $u = U_p$ y consideremos las siguientes elecciones de v, w .

1. $T(u, u) = \rho(p)$, densidad en p

Un observador infinitesimal u solidario con el fluido, puede considerar $B(u)$ como el espacio en reposo ya que su espacio tangente en p es u^\perp . Entonces $P_B^- = 0$, y la descomposición $P_B^+ = P_B = E_B u + \vec{P}_B$ da la energía E_B y el momento \vec{P}_B del cubo B medido por u . Entonces

$$T(u, u) = \lim_{Vol(B) \rightarrow 0} \frac{E_B}{Vol(B)}.$$

Esta es la densidad del fluido medida por u .

2. Si $x, y \in u^\perp$, entonces $T(x, y) = \mu(p)\langle x, y \rangle$, donde $\mu(p)$ es la presión en p

Como $x \perp u$, el cubo $B(x)$ es un espacio-tiempo tridimensional.

Sea $B(x) = \Sigma \times I$, donde Σ es un trozo de superficie espacial conteniendo a p e I es un intervalo de tiempo de longitud ∇t . Entonces, siendo A el área de Σ :

$$T(x, y) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \left\{ \lim_{\nabla t \rightarrow 0} \frac{\langle P_B, y \rangle}{\nabla t} \right\}.$$

denotando por $\vec{P}_B = \vec{P}_B^+ - \vec{P}_B^-$, y una molécula de fluido contribuye a \vec{P}_B^+ si cruza Σ desde $-x$ a x durante el intervalo de tiempo I .

El segundo límite muestra que $T(x, y)$ es la componente y de la tensión (fuerza por unidad de área) cruzando Σ en la x dirección. Así, T restringido a u^\perp es el tensor tensión-energía medido por u en su espacio de reposo $u^\perp \approx B(u)$.

La tensión a la que se encuentra sometido se puede escribir como $\mu_x x$. La presión μ_x es la misma en todas las direcciones del espacio, por lo tanto, $T(x, y) = \mu(p)\langle x, y \rangle$ (válido para todo $x, y \in u^\perp$ pues T es bilineal).

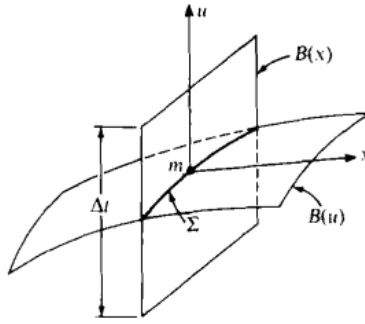


Figura 1.2: Las dimensiones se han reducido, realmente $\dim(\Sigma) = 2$ y $\dim(B(x)) = \dim(B(u)) = 3$

3. Si $x \in u^\perp$, entonces $T(x, u) = T(u, x) = 0$

Razonando como en el segundo caso, $T(x, u)$ da, para u , el flujo de energía que cruza en un trozo de superficie espacial perpendicular a x , y $T(u, x)$ mide la densidad. Para un fluido perfecto, ambos valen 0.

Todo este desarrollo puede resumirse en la siguiente definición:

Definición 1.2.15. Un **fluido perfecto** en un espacio-tiempo M es una terna (U, ρ, μ) donde

1. U es un campo de vectores temporal unitario apuntando al futuro en M llamado **el campo de vectores del flujo**,
2. $\rho \in C^\infty(M)$ es la **función densidad**; $\mu \in C^\infty(M)$ es la **función presión**.
3. El tensor tensión-energía viene dado por

$$T = (\rho + \mu)U^* \otimes U^* + \mu g,$$

donde U^* es la uno-forma metricamente equivalente a U .

Esta fórmula para T es equivalente a las tres ecuaciones descritas arriba para $X, Y \perp U$

$$T(U, U) = \rho, \quad T(X, U) = T(U, X) = 0, \quad T(X, Y) = \mu \langle X, Y \rangle.$$

Capítulo 2

La ecuación de campo de Einstein

Poco después de la formulación de la teoría de la relatividad especial en 1905, Albert Einstein comenzó a investigar en la descripción de los fenómenos gravitatorios.

En 1907 se embarcó en la búsqueda de una nueva teoría relativista de la gravedad y después de numerosos desvíos y falsos comienzos, su trabajo culminó en noviembre de 1915 con la presentación a la Academia Prusiana de las Ciencias de su artículo “**The foundation of the general theory of relativity**” (véase [1]), que contenía la que hoy es conocida como **ecuación de campo de Einstein**. Esta ecuación forma el núcleo de la teoría y especifica de que manera la densidad local de materia y energía determinan la geometría del espacio-tiempo.

La ecuación de campo de Einstein son no lineales y son muy difíciles de resolver.

El objetivo de este capítulo es llegar a obtener dicha ecuación de campo, la cual busca relacionar los coeficientes de la métrica g_{ij} con la distribución de la materia.

En esta primera parte parte, vamos a considerar el caso de un campo gravitacional fuera de una masa aislada esféricamente simétrica M . Un ejemplo de este sistema es el campo producido por el sol (ignorando las perturbaciones de los planetas en este campo).

Con el fin de obtener una idea de por que Einstein eligió dichas ecuaciones, vamos a hacer una breve revisión a la Ley de Gravitación universal de Newton.

2.1. Ecuación de campo de Newton

Suponemos una masa puntual M_1 situada en el origen de coordenadas de \mathbb{R}^3 , y consideramos un objeto de masa M_2 situado en un punto con coordenadas $X = (x_1, x_2, x_3)$, tomamos

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \|X\|.$$

Sea u_r el “vector radial” unitario X/r .

Por otro lado, por la ley de la gravitación Newton, la fuerza F en una partícula en X es (en unidades geométricas)

$$F = -\frac{M_1 M_2}{r^2} u_r.$$

Combinando esto con la segunda ley de Newton

$$F = m \frac{d^2 X}{dt^2},$$

tenemos que

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{M}{r^2} u_r,$$

A continuación, definimos la **función potencial**

$$\phi = -\frac{M}{r}, \quad r > 0,$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{dr}{dx_i} = \frac{d}{dx_i} \langle X, X \rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{2x_i}{2\langle X, X \rangle^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{r}, \quad i = 1, 2, 3,$$

utilizando la regla de la cadena $\frac{d\phi}{dx_i} = \frac{d\phi}{dr} \frac{dr}{dx_i}$, llegamos a que

$$-\nabla\phi = -\left(\frac{d\phi}{dx}, \frac{d\phi}{dy}, \frac{d\phi}{dz}\right) = -\frac{M}{r^2} \left(\frac{x_1}{r}, \frac{x_2}{r}, \frac{x_3}{r}\right) = -\frac{M}{r^2} u_r = \frac{d^2 X}{dt^2},$$

o, en coordenadas

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{d\phi}{dx_i}, \quad (2.1)$$

y diferenciando la relación $\frac{d\phi}{dx_i} = \frac{Mx_i}{r^3}$ obtenemos lo siguiente

$$\frac{d^2 \phi}{d^2 x_i} = M \left[\frac{r^3 - 3x_i^2 r}{r^6} \right] = \frac{M}{r^5} (r^2 - 3x_i^2),$$

y sumando en i , finalmente llegamos a la ecuación de Laplace.

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \frac{d^2 \phi}{d^2 x_1} + \frac{d^2 \phi}{d^2 x_2} + \frac{d^2 \phi}{d^2 x_3} = 0. \quad (2.2)$$

Válida excepto en el origen (donde la masa está localizada).

De la ecuación (2.2), se deduce que la gravedad newtoniana no es consistente con la relatividad especial ya que esta ecuación no tiene dependencia explícita con el tiempo.

A continuación, vamos a analizar cómo se dispersan dos trayectorias cercanas. Tomamos $X(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s), x_3(t, s))$ la trayectoria de una partícula. Ambas deben satisfacer la ecuación (2.1), es decir

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2}(t, s) = -\frac{d\phi}{dx_i} X(t, s), \quad i = 1, 2, 3.$$

Sea ahora una trayectoria vecina $X(t, s + \Delta s)$, restando ambas y dividiéndolas por Δs se puede determinar su separación.

$$\frac{1}{\Delta s} \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}(t, s + \Delta s) - \frac{d^2 x_i}{dt^2}(t, s) \right) = -\frac{1}{\Delta s} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(X(t, s + \Delta s)) - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(X(t, s)) \right),$$

y tomando $\lim_{\Delta s \rightarrow 0}$ llegamos a que

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial x_i}{\partial s}(t, s) = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial x_i}(X(t, s)),$$

y por la regla de la cadena, el último miembro se transforma en

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial s \partial x_i}(X(t, s)) = -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Siendo estas últimas, tres ecuaciones que quedan resumidas de forma vectorial en la siguiente:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial X}{\partial s} + (Hess \phi) \frac{\partial X}{\partial s} = 0, \quad (2.3)$$

y sabemos por (2.1) que la traza de la matriz Hessiana es cero.

2.2. Ecuación de campo de Einstein en el vacío

Después de la obtención de la ecuación de campo de Newton, vamos a realizar un acercamiento a la ecuación de campo de Einstein bajo la condición de situarnos en el vacío, y posteriormente, en la siguiente sección, un desarrollo más general.

El siguiente paso que hay que realizar es intentar buscar analogías en el espacio-tiempo con curvatura, es decir, con masa (ya que la masa es la que genera la curvatura).

Recordemos, asimismo, que una partícula γ en caída libre en este espacio, digamos de coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4) se mueve siguiendo la trayectoria de una geodésica, cuya ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} + \sum_{i,j=1}^4 \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = 0, \quad (2.4)$$

la cual contiene las primeras derivadas parciales de los coeficientes de la métrica g_{ij} puesto que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right). \quad (2.5)$$

Entonces, de cierta forma, los coeficientes de la métrica juegan el rol de funciones potencia gravitacionales en la teoría de Einstein.

Teniendo en cuenta la sección anterior, se podría esperar que las ecuaciones de campo en el vacío fueran un sistema de ecuaciones de la forma $G = 0$. Donde G es una expresión que incluye las derivadas parciales segundas de las funciones “potenciales” g_{ij} . También cabe esperar que G tenga algo que ver con la curvatura.

Retomando el concepto de geodésica, recordemos que su aceleración es nula. Sea entonces $X(\tau, s)$ una variación por geodésicas de γ , donde cada $X(\tau, -)$ es una geodésica parametrizada por su tiempo propio. Luego, por ser geodésica

$$\frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial\tau} = 0.$$

Y $V = \frac{\partial X}{\partial s}(0, \tau)$ es el campo variacional de la variación por geodésicas $X(s, t)$.

Derivando con respecto a s a ambos lados de la última ecuación, llegamos a que

$$\frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial\tau} = 0.$$

A continuación, vamos aplicar la conocida fórmula

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial\tau} - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial X}{\partial\tau} = R \left(\frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial t} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau},$$

(así como la simetría del tensor R y la conmutatividad de las derivadas parciales),

$$0 = \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial\tau} = \frac{D}{\partial\tau} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial X}{\partial\tau} - R \left(\frac{\partial X}{\partial s}, \frac{\partial X}{\partial\tau} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau} = \frac{D}{\partial\tau} \frac{D}{\partial\tau} \frac{\partial X}{\partial s} + R \left(\frac{\partial X}{\partial\tau}, \frac{\partial X}{\partial s} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau}.$$

Y de aquí obtenemos la ecuación de Jacobi:

$$\frac{D^2}{\partial\tau^2} \frac{\partial X}{\partial s} + R \left(\frac{\partial X}{\partial\tau}, \frac{\partial X}{\partial s} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau} = 0. \quad (2.6)$$

Esta ecuación es cierta para cualquier variación por geodésicas $X(\tau, s)$ y el segundo sumando es una expresión tensorial.

Multiplicando la ecuación de forma escalar por un campo Z ,

$$0 = \left\langle \frac{D^2}{\partial\tau^2} \frac{\partial X}{\partial s}, Z \right\rangle + \left\langle R \left(\frac{\partial X}{\partial\tau}, \frac{\partial X}{\partial s} \right) \frac{\partial X}{\partial\tau}, Z \right\rangle = \left\langle \frac{D^2}{\partial\tau^2} \frac{\partial X}{\partial s}, Z \right\rangle + R(X, Y, Z, Y).$$

Por otro lado, la correspondiente ecuación clásica es:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial X}{\partial s} + (Hess \phi) \frac{\partial X}{\partial s} = 0.$$

Recordemos que en gravedad clásica, la ecuación de campo se corresponde con $tr(Hess \phi) = \nabla^2 \phi = 0$, luego, buscando analogías entre esta ecuación y la (2.6), parece razonable pedir lo mismo para el operador R siempre y cuando sea posible, por lo que, la ecuación de campo en el vacío se corresponde con la traza de R , y esta, por definición equivale a Ric.

Finalmente, de forma análoga con el caso clásico, hacemos

$$\text{Ric}(X, Z) \equiv 0$$

Como esto es válido para cualesquiera campos de vectores X y Z , obtenemos la **ecuación de campo de Einstein**:

$$\text{Ric} \equiv 0 \tag{2.7}$$

Se debe aclarar, como hemos mencionado previamente, que esta ecuación es sólo válida en el vacío. Es decir, para un punto en el espacio que se encuentra sometido a energía, pero en el cual no hay materia.

A lo largo de la siguiente sección estudiaremos la ecuación de campo de Einstein general.

2.3. Ecuación de campo de Einstein general

Vamos a concluir este capítulo con el desarrollo de la ecuación de campo de Einstein general.

El tensor tensión-energía T , definido en el primer capítulo, es el objeto físico que actúa como fuente de la gravedad. Este objeto simétrico no es un tensor métrico arbitrario, tiene que cumplir que su divergencia sea igual a 0, es decir

$$\nabla T = 0$$

Ya que solo así se cumplen las leyes de la conservación de la energía. Colocamos el tensor T , al lado derecho de la ecuación como fuente de la gravedad.

Al lado izquierdo va a aparecer un objeto geométrico que caracterice la gravedad y la curvatura, el cual, de la misma forma que T , debe de ser un tensor simétrico y con divergencia cero.

Por otro lado, si esperamos que caracterice la gravedad, este no debe de estar construido por nada que no sea geométrico.

Le daremos a este objeto el nombre de **tensor curvatura de Einstein** y lo denotaremos por G , por lo tanto, la ecuación queda de la siguiente forma:

$$G = \kappa T$$

Donde κ es un factor de proporcionalidad que evaluaremos luego.

Que la divergencia de G sea 0 (es decir $\nabla G = 0$) es una consecuencia de que $\nabla T = 0$.

A causa de esto, nuestro objetivo reside entonces en encontrar un tensor simétrico G de tipo $(0, 2)$ que sea una “medida de la curvatura del espacio-tiempo” en el siguiente sentido:

1. G se anula cuando el espacio-tiempo es llano.
2. G está construido a partir del tensor curvatura de Riemann R , de la métrica g , y de nada más.
3. G se distingue de otros tensores que pueden ser construidos de R y de g por lo siguiente:
 - Tiene que ser lineal en las segundas derivadas de las componentes de la métrica g .
 - De la misma forma que T , tiene que ser simétrico y de tipo $(0, 2)$.
 - Tiene que cumplir que $\nabla G = 0$.

Aparte de la constante multiplicativa κ , se puede demostrar que solo hay un tensor que satisfaga esos requisitos. Este es el tensor curvatura de Einstein G , el cual está expresado en términos del tensor curvatura de Ricci de la siguiente forma

$$G = \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg,$$

donde $S = C(\text{Ric})$ es la contracción del tensor curvatura de Ricci (la curvatura escalar).

Para evaluar la constante de proporcionalidad κ en la ecuación de Einstein $G = \kappa T$, vamos a compararla con la teoría newtoniana de la gravedad.

Para facilitar esta comparación, vamos a suponer un fluido perfecto en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski, tal que, su presión sea nula, es decir tomamos $\mu = 0$.

De acuerdo con Newton, la aceleración relativa está determinada por la densidad ρ , mientras que para Einstein, esta se encuentra determinada por la curvatura de Riemann del espacio-tiempo.

Una comparación directa de las predicciones de Newton y Einstein (usando coordenadas newtonianas) revela la siguiente relación,

$$\text{Ric}_{00} \equiv R_{0\alpha 0}^{\alpha} = 4\pi\rho,$$

la cual aparece como consecuencia de que para una distribución continua de la materia en toda una región del espacio, la ecuación de Laplace ($\nabla^2\phi = 0$) se reemplaza por la ecuación de Poisson.

$$\nabla^2\phi = 4\pi\rho$$

Y reescribiendo esta última con la ayuda del tensor curvatura de Ricci, llegamos a que

$$\text{Ric}_{00} = 4\pi\rho,$$

ya que todas las demás componentes Ric_{ij} se anulan.

En componentes la ecuación de campo se escribe de la siguiente forma

$$G_{ij} = \text{Ric}_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}S = \kappa T_{ij},$$

y al calcular la traza, llegamos a la expresión

$$S - 2S = \kappa T,$$

y en consecuencia, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{00} &= \frac{1}{2}g_{00}S + \kappa T_{00} = \frac{1}{2}\kappa(2T_{00} - \underbrace{g_{00}}_{-1}T) = \\ &= \frac{1}{2}\kappa[2T_{00} + \sum_j (T_0^0 + T_j^j)] = \frac{1}{2}\kappa(T_{00} + \sum_j T_j^j). \end{aligned}$$

Por otro lado, por la definición de fluido perfecto, T_{00} es igual a ρ y $T_j^j = 0$ para todo j , ya que hemos supuesto que $\mu = 0$. Por lo que llegamos a que

$$\text{Ric}_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho,$$

Finalmente, hemos obtenido lo siguiente:

- Por un lado, la ecuación $\text{Ric}_{00} = 4\pi\rho$ derivada de la comparación de la teoría de Newton y de Einstein.
- Por otro lado, la ecuación $\text{Ric}_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho$ derivada directamente de la ecuación de campo de Einstein.

Ambas se cumplen si la constante de proporcionalidad κ es 8π .

La ecuación de campo de Einstein queda entonces de la siguiente forma

$$G = 8\pi T$$

2.4. Constante Cosmológica

En 1915, cuando Einstein desarrolló su teoría general de la relatividad, la permanencia del universo era un elemento fijo de creencia en la filosofía occidental. "Los cielos perduran desde los siglos y hasta los siglos".

Esto inquietó enormemente a Einstein tras descubrir que su ecuación de campo $G = 8\pi T$ predecía un universo no permanente; un universo dinámico; un universo que se originó en un **big-bang** o que será destruido eventualmente por una contracción, o ambas.

Enfrentado a esta contradicción entre su desarrollo y la firme creencia filosófica del momento, Einstein modificó su teoría.

El único cambio que no alteraba la estructura de su desarrollo consistió en modificar la parte izquierda de la ecuación de campo. Recordemos que el lado izquierdo está forzado a ser el tensor de Einstein, $G_{ij} = \text{Ric}_{ij} - \frac{1}{2}Sg_{ij}$.

Denotamos el nuevo lado izquierdo modificado por \hat{G} .

Recordemos que \hat{G} debía de cumplir las tres condiciones de la sección anterior, las cuales determinaban un único tensor G , el tensor curvatura de Einstein, por lo que debería desprenderse de una de ellas.

Abandonar $\nabla\hat{G} = 0$ no es compatible por motivos de dinámica. Cambiar la simetría o el tipo (0,2) de \hat{G} es imposible matemáticamente hablando, y, al igualarlo con T , es infactible dejar de considerarlo lineal en las derivadas de las componentes de la métrica.

Evadir la condición de que \hat{G} debe de ser construido a partir de R , g y nada más violaba el espíritu de la teoría.

La conclusión a la que llegó es que la condición que haría menos daño quitar para mantener lo mas bonita posible la teoría fue que \hat{G} se anula cuando el espacio-tiempo es plano.

Pero quitando esa condición aparecen problemas:

- A pesar de que \hat{G} debería seguir siendo en algún sentido una medida de la geometría, no podía seguir siendo una medida de la curvatura.
- El espacio-tiempo plano no es compatible con la ecuación de campo ($G \neq 0$ en plano, en el vacío, donde $T = 0$).

Sin embargo, esas consecuencias eran menos molestas para Einstein que un universo dinámico.

El único tensor que satisface (2) y (3) (habiendo abandonado (1)) es el tensor de Einstein G , mas un múltiplo de la métrica g :

$$\hat{G}_{ij} = Ric_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}S + \Lambda g_{ij} = G_{ij} + \Lambda g_{ij}.$$

Todo esto hizo que Einstein en 1917 cambiara su ecuación de campo por:

$$G + \Lambda g = 8\pi T.$$

En dicha ecuación, aparece una nueva magnitud Λ , denominada la **constante cosmológica** y tiene dimensiones cm^{-2} .

Esta ecuación de campo modificada, en contraste con la original, admite un universo estático como solución particular. Por esta razón, Einstein en 1917 se inclinó por esta ecuación, pero trece años después, Hubble descubrió la expansión del universo. La constante cosmológica dejó de ser necesaria.

Einstein, acabó denominando a la constante cosmológica “El mayor error de mi vida” y finalmente retomó su ecuación original $G = 8\pi T$.

Aunque esta teoría llegó a abandonarse de forma parcial, aparecieron algunas soluciones de esta variación de la ecuación de campo, como el universo de Gödel, una solución exacta, propuesta por Kurt Gödel en 1949. La cual describe un espacio-tiempo homogéneo, formado por materia en rotación.

Actualmente y casi cien años después, esta constante ha vuelto a cobrar importancia, ya que recientes experimentos han podido determinar que la energía oscura, que explica la expansión acelerada del universo, se comporta como la constante cosmológica.

Capítulo 3

Soluciones exactas de la ecuación de campo de Einstein

Matemáticamente, las ecuaciones de campo de Einstein son muy complicadas porque constituyen un sistema de 10 ecuaciones en derivadas parciales no lineales. La complejidad de dicho sistema de ecuaciones y las dificultades asociadas para plantear el problema como un problema de valor inicial bien definido, haciendo que el número de soluciones exactas encontradas sea bastante bajo, recurriendo entonces a métodos numéricos, encontrando soluciones mucho más complejas que están tan a la orden del día como son las ondas gravitacionales. En este último capítulo estudiaremos algunas de ellas, comenzando con la solución más básica, el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski.

3.1. Espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski

La teoría de la relatividad especial fue reformulada con el lenguaje de la geometría diferencial por Hermann Minkowski en 1907, unificando los conceptos de espacio y tiempo en una única realidad tetradimensional, el espacio-tiempo, dando el mismo tratamiento matemático a las tres coordenadas espaciales que a la dimensión temporal.

En la física clásica el tiempo es independiente de la posición y del estado de movimiento del sistema de referencia. Sin embargo, la relatividad establece un continuo tetradimensional en el que cada punto, denominado suceso o evento, se describe mediante tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal.

Esta estructura fue adoptada por Einstein en su estudio del movimiento de los cuerpos en los campos gravitatorios, que describe en su teoría general de la relatividad.

Definición 3.1.1. Definimos el **espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski**, denotado por L^4 , como la variedad \mathbb{R}^4 , donde el tensor métrico g toma, en coordenadas (t, x, y, z) la siguiente forma:

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

El tensor curvatura de Riemann del espacio-tiempo de Minkowski es idénticamente nulo, razón por la cual se dice que el espacio-tiempo es llano. Así, tanto el tensor curvatura de Ricci como la función curvatura escalar resultan nulos, siendo también nulo el tensor curvatura de Ricci, por lo tanto, esta variedad lorentziana es solución de la ecuación de campo de Einstein para $T = 0$.

Como ocurría en el caso newtoniano, las partículas materiales en \mathbb{L}^4 tienen masa positiva, pero esta es necesariamente cero para partículas luminosas.

Por otro lado, una hipótesis fundamental de la relatividad es que la trayectoria de una partícula luminosa γ es una geodésica y como para estas $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$, no se puede reparametrizar por tiempo propio.

Toda la teoría de la relatividad especial de Einstein se desarrolla en el espacio-tiempo de Lorentz-Minkowsky, donde aparecen situaciones interesantes como la paradoja de los gemelos.

3.1.1. Paradoja de los gemelos

Suponemos que dos gemelos, Pablo y Pedro, acaban de cumplir 21 años. Ese mismo día, Pedro parte en una nave espacial en un viaje de 7 años de su propio tiempo a una velocidad constante de $v = \frac{24c}{25}$ donde c representa la velocidad de la luz, en unidades geométricas ($c = 1$) $v = \frac{24}{25}$. Tras llegar a su destino decide volver, invirtiendo otros 7 años en el camino de vuelta.

En su llegada a la tierra Pedro tiene 35 años, mientras que Pablo tiene 71.

Podríamos preguntarnos que ha sucedido, el esquema de la situación es el siguiente:

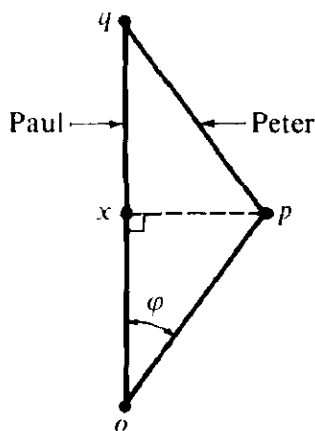


Figura 3.1: Paradoja de los gemelos

Para calcular la edad de Pablo, utilizamos la proposición 1.2.2

$$ox = op \cdot \cosh(\phi) = \frac{7}{\left[1 - \left(\frac{24}{25}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} = 25.$$

Simetricamente, $xq = 25$, por lo tanto la edad de Pablo cuando vuelve Pedro es $21 + 2(25) = 71$ años

La situación sería simétrica si tomáramos de sistema de referencia a Pedro en vez de a Pablo, por lo que la pregunta es ¿podemos distinguir entre los dos sistemas de referencia? El quid de la cuestión radica en que, aunque el sistema de referencia de Pablo es inercial, el de Pedro deja de serlo en el momento en el que tiene que frenar y dar la vuelta, por lo que realmente no hay simetría.

3.2. Espacio-tiempos de Robertson-Walker

En el siglo XVII Newton extendió el rango de la física desde la tierra al sistema solar. Dos siglos y medio después, la teoría de la relatividad, apoyada por el progreso en la astronomía, comenzó a estudiar el sistema físico más grande: nuestro universo.

Evidencias astronómicas indican que el universo puede ser modelado como un espacio-tiempo conteniendo un fluido perfecto cuyas “moléculas” son las galaxias.

El hecho decisivo es que no se ha observado una asimetría en la distribución de las galaxias, estas aparecen en cúmulos y esos cúmulos en otros cúmulos, pero a gran escala, el universo visto desde nuestra galaxia parece el mismo en todas direcciones.

Esta observación, apoya la hipótesis de que la misma isotropía es válida para todas las galaxias y esto hace posible construir un **modelo cosmológico**, cuyas propiedades sean realistas, físicamente hablando.

3.2.1. Definición del modelo

Definición 3.2.1. Sea S una variedad riemanniana conexa de dimensión tres con curvatura constante $k = 0, 1$ ó -1 . Tomamos $f > 0$ una función diferenciable en un intervalo abierto I en \mathbb{R} . Entonces el producto torcido

$$M(k, f) = I \times_f S,$$

se denomina **Espacio-tiempo de Robertson-Walker**.

- Explícitamente, $M(k, f)$ es la variedad $I \times S$ equipada con la métrica

$$g = -dt^2 + f^2(t)d\sigma^2,$$

donde t y σ son las proyecciones en I y S , respectivamente y $d\sigma^2$ denota la métrica sobre S .

- Decimos que el intervalo I es **maximal** siempre que f no pueda ser extendida a una función positiva diferenciable en un intervalo estrictamente más grande que I .
- La variedad riemanniana S es llamada el **espacio de** $M(k, f)$ y las elecciones estándar para S son las completas y simplemente conexas: \mathbb{H}^3 , \mathbb{R}^3 , \mathbb{S}^2 , con curvaturas $-1, 0$ y $+1$ respectivamente.

A partir de esto podemos obtener propiedades y consecuencias del modelo.

Tomamos $U = \partial_t$, y para cada $p \in S$ parametrizamos $I \times p$ como $\gamma_p(t) = (t, p)$, manteniendo la t constante, tenemos la hipersuperficie

$$S(t) = t \times S = \{(t, p) : p \in S\}.$$

La geometría del modelo es consecuencia de suposiciones sobre el “fluido galáctico”, cada γ_t es una partícula con su propio tiempo t y se tiene que

$$(1) \quad \langle U, U \rangle = -1.$$

Cómo podría esperarse por la isotropía, el movimiento relativo de las galaxias es despreciable a gran escala. Así, tomamos cada hoja $S(t)$ como un espacio en reposo, requiriendo:

$$(2) \quad U \perp S(t) \quad \forall t \in I.$$

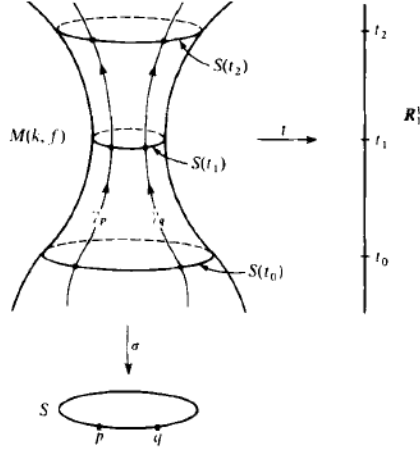
Por lo tanto, teniendo en cuenta la proposición 1.1.1, cada hoja se convierte en una hipersuperficie espacial.

Proposición 3.2.1. Bajo las condiciones descritas arriba

- Para cada $t \in I$, $S(t)$ tiene curvatura constante $C(t)$.
- Para cada $s, t \in I$, la función $\mu(s, p) = (t, p)$ de $S(s)$ a $S(t)$ es una homotecia.

Como la homotecia $\mu = \mu_{st}$ tiene factor de escala $h(s, t)$, se cumple que $h(s, t)C(t) = C(s)$ y, al tener que μ_{st} es un difeomorfismo, h nunca es cero por lo que la función C mantiene el signo $k = -1, 0$ ó 1 .

Tomando $a \in I$ definimos $f(a) > 0$ por $C(a)f(a)^2 = k$. Se puede comprobar que S tiene curvatura constante k . En particular, la curvatura de $S(t)$ es $\frac{k}{f(t)^2}$.



De esta forma el tensor curvatura de Riemann viene descrito de la siguiente forma

Proposición 3.2.2. Para campos de vectores X, Y, Z en $M(k, f)$ tangentes a todas las hojas $S(t)$, se tiene que

1. $R(X, Y)Z = [(f'/f)^2 + (k/f)^2][\langle X, Z \rangle Y - \langle Y, Z \rangle X]$,
2. $R(X, U)U = (f''/f)X$,
3. $R(X, Y)U = 0$,
4. $R(X, U)Y = (f''/f)\langle X, Y \rangle U$.

De aquí se obtiene que todo plano conteniendo un vector de U tiene curvatura $K_u = f''/f$, y todo plano tangente a una hoja $S(t)$ tiene curvatura $K_\sigma = f'^2 + k/f^2$.

Esas se denominan las **curvaturas seccionales principales** de $M(k, f)$. Un corolario inmediato es el cómputo de la curvatura de Ricci y de la curvatura escalar

Corolario 3.2.1. Para un espacio-tiempo de Robertson-Walker $M(k, f)$ con campo de vectores del fluido $U = \partial_t$

1. La curvatura de Ricci viene dada por:

$$Ric(U, U) = -\frac{3f''}{f}, \quad Ric(U, X) = 0,$$

$$Ric(X, Y) = \left\{ 2 \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right\} \langle X, Y \rangle \quad \text{si } X, Y \perp U.$$

2. La curvatura escalar es

$$S = 6 \left\{ \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right\}.$$

3.2.2. Fluido de Robertson-Walker

Nuestro objetivo en esta sección es ver que, para cada espacio-tiempo de Robertson-Walker, el fluido dado por el campo de vectores $U = \partial_t$ define un fluido perfecto, es decir, cumple la definición 1.2.15

Como el tensor tensión-energía T de $M(k, f)$ está determinado por la ecuación de Einstein, debemos encontrar funciones ρ y μ tales que T cumpla dicha definición.

Teorema 3.2.1. Si U es el campo de vectores del fluido en un espacio-tiempo de Robertson-Walker $M(k, f)$, entonces (U, ρ, μ) es un fluido perfecto con densidad ρ y presión μ dadas por

$$\begin{aligned}\frac{8\pi\rho}{3} &= \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}, \\ -8\pi\mu &= \frac{2f''}{f} + \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2}.\end{aligned}$$

Demostración. Por la ecuación de campo de Einstein, $T = \frac{1}{8\pi}[Ric - \frac{1}{2}Sg]$, el corolario anterior nos da que $T(U, X) = 0$, y

$$T(X, Y) = \frac{1}{8\pi} \left\{ \left[2 \left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{2k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right] \langle X, Y \rangle - 3 \left[\left(\frac{f'}{f}\right)^2 + \frac{k}{f^2} + \frac{f''}{f} \right] \langle X, Y \rangle \right\}.$$

Y esto se simplifica al μ escrito en el enunciado del teorema.

Si $\rho = T(U, U)$, entonces T tiene la forma requerida $(\rho + \mu)U^* \otimes U^* + \mu g$. Calculando $T(U, U)$ del corolario llegamos a la fórmula de ρ . \square

En particular, ρ y μ son funciones que solo dependen de t (constantes en cada $S(t)$).

Dos relaciones básicas entre f , ρ y μ son las siguientes:

Corolario 3.2.2. Para un fluido perfecto de Robertson-Walker, se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{3f''}{f} &= -4\pi(\rho + 3\mu), \\ \rho' &= -3(\rho + \mu)\frac{f'}{f}.\end{aligned}$$

3.2.3. Cosmología de Robertson-Walker

El espacio-tiempo de Robertson-Walker da un modelo relativista de un fluido perfecto. Para poder ajustar un sistema que represente nuestro universo, son necesarios datos relacionados con los parámetros físicos f , ρ y μ .

Observación: Datos astronómicos

(1) Según Hubble (en 1929), todas las galaxias distantes se están alejando de nosotros a una velocidad proporcional a su distancia. Para galaxias γ_p y γ_q la distancia entre $\gamma_p(t)$ y $\gamma_q(t)$ en $S(t)$ es $f(t)d(p, q)$, donde d es la distancia Riemanniana en el espacio S . El descubrimiento del Hubble, por estimaciones, consiste en

$$H_0 = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \quad \text{es} \quad \frac{1}{18r \pm 2 \times 10^9 \text{ años}}.$$

(2) Para toda forma de materia conocida, la densidad domina la presión, es decir $\rho > |\mu|$. Actualmente, la densidad ρ_0 de nuestro universo está estimada entre 10^{-31} y $5 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3$. La presión μ_0 es positiva pero mucho más pequeña: $\rho_0 \gg \mu_0 > 0$.

En particular, (1) muestra que f tiene derivada positiva, es decir: los espacios $S(t)$ están en expansión.

Este hecho fue suficiente para desmontar los modelos estáticos del universo, prevaleciendo en 1920.

La relatividad general tiene la siguiente interesante consecuencia.

Proposición 3.2.3. Sea $M(k, f) = I \times_f S$. Si $H_0 > 0$ para algún t_0 y $\rho + 3\mu > 0$, entonces I tiene un punto inicial t_* con $t_0 - H_0^{-1} < t_* < t_0$ y, además, se cumple solo una de las siguientes:

1. $f' > 0$,
2. f tiene un máximo en algún $t > t_0$ e I es un intervalo finito (t_*, t^*) .

Demostración. Por la fórmula del corolario 3.2.2, $\rho + 3\mu > 0$ implica que $f'' < 0$, por lo tanto, el grafo de f se encuentra, excepto en t_0 , debajo de su recta tangente en t_0 . Esta recta es el grafo de

$$F(t) = f(t_0) + H_0 f(t_0)(t - t_0).$$

Por lo tanto, el resultado de Hubble $H_0 > 0$ muestra que a medida que t decrece de t_0 , la función $f > 0$ debe de tener una singularidad en algún t_* antes de alcanzar el cero de F , situado en $t_0 - H_0^{-1}$.

Al tener que $f'' > 0$, se cumple una de dos, o $f' > 0$ en todo I , o f tiene un máximo y después $f' < 0$. En el último caso, un argumento como el anterior muestra que aparece una singularidad en $t^* > t_0$. \square

Tomando la estimación del Hubble H_0^{-1} vista anteriormente, se puede ver que el universo tuvo un comienzo hace unos diez o veinte millones de años, y si sigue expandiéndose del mismo modo, puede comenzar a contraerse desembocando en un final.

Si la densidad ρ se acerca al infinito cuando $t \rightarrow t_*$ (o t^*), decimos que $M(k, f)$ tiene una **singularidad física** en t_* (o t^*).

Definición 3.2.2. Una singularidad inicial de $M(k, f)$ en t_* es un **big bang** si se cumple que $f \rightarrow 0$ y $f' \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_*$. De la misma forma, una singularidad final es un **big crunch** si $f \rightarrow 0$ y $f' \rightarrow -\infty$ cuando $t \rightarrow t^*$.

El siguiente teorema es el núcleo de la teoría.

Teorema 3.2.2. Asumimos que $M(k, f) = I \times_f S$ tiene solo singularidades físicas y que I es maximal. Si $H_0 > 0$ para $t_0 \in I$, si $\rho > 0$, y para constantes $a, A \in \mathbb{R}$ se cumple que $\frac{-1}{3} < a \leq \frac{\mu}{\rho} \leq A$, entonces

1. La singularidad inicial es un big bang.
2. Si $k = 0, -1$ entonces $I = (t_*, \infty)$ y $t \rightarrow \infty$, $f \rightarrow \infty$ y $\rho \rightarrow 0$.
3. Si $k = 1$, entonces f alcanza un máximo, seguido por un big crunch, por lo tanto I es un intervalo finito (t_*, t^*) .

Demostración. Podemos tomar $\varepsilon > 0$ para que $\rho + 3\mu > \varepsilon\rho > 0$ y usando la primera ecuación del corolario anterior llegamos a que $f'' < 0$.

Para probar (1), hay que tener en cuenta que $f' > 0$ en el intervalo (t_*, t_0) ya que por la proposición anterior, en ambos casos se cumple que $f' > 0$, y como $\mu \leq A\rho$, por el corolario 3.2.1

$$\rho' \geq -C\rho\frac{f'}{f} \quad \text{donde } C = 3(A + 1) > 2.$$

Esto implica que $(\rho f^C)' \geq 0$, entonces $\rho f^C \leq \rho(t_0)f(t_0)^C$. Por hipótesis $\rho \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow t_*$ por lo tanto $f \rightarrow 0$. Por otro lado, la inequación $\rho - \varepsilon\rho \geq -3\mu$ nos conduce de la misma forma a

$$\rho' \leq -(2 + \varepsilon)\rho\frac{f'}{f}.$$

De manera que $(\rho f^{\varepsilon+2})' \leq 0$ en (t_*, t_0) , entonces $\rho f^{2+\varepsilon} \geq \rho(t_0)f(t_0)^{2+\varepsilon}$ en este intervalo. Cuando $t \rightarrow t_*$ tenemos que $f \rightarrow 0$ luego $\rho f^2 \rightarrow \infty$. Finalmente, por la fórmula del Teorema 3.2.1, $f'^2 + k \rightarrow \infty$ y esto implica que $f' \rightarrow \infty$.

A continuación encontramos dos casos distintos:

1. Caso 1: f tiene un máximo en t_m

Teniendo un máximo $f'(t_m) = 0$, se cumple que $0 < \rho(t_m) = \frac{3k}{8\pi f^2(t_m)}$ y esto fuerza a que $k = 1$. Al tener que $f'' < 0$, f' va a ser negativa para $t > t_m$, entonces la singularidad final en $t^* > t_m$ es un big crunch.

2. Caso 2: f no tiene máximo

Si f no tiene máximo se tiene que $f' > 0$ en todo el intervalo I , por lo que los resultados vistos antes del Caso 1 son válidos en I . Las inecuaciones $\rho > 0$ y $\rho + 3\mu > 0$ implican que $\rho + \mu > 0$ y por la proposición anterior $\rho' < 0$ y esto indica que no hay singularidades físicas cuando t crece. Luego $I = (t_*, +\infty)$.

- Subcaso A: $f \rightarrow \infty$ si $t \rightarrow \infty$

Cómo $(\rho f^{2+\varepsilon})' \leq 0$, $\rho f^{2+\varepsilon}$ está acotado para t grande. Y esto implica que $\rho f^2 \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$ y finalmente, $f'^2 + k \rightarrow 0$ y esto implica que $k = 0, -1$

- Subcaso B: f está acotada si $t \rightarrow \infty$.

(Es suficiente probar que es imposible que ocurra). Supongamos que $f \rightarrow b$ si $t \rightarrow \infty$ y, cómo $f'' < 0$, $f' \rightarrow 0$. Entonces $\rho f^2 \rightarrow \frac{3k}{8\pi}$ y k puede ser 0 o 1. ρf^C es no decreciente, por lo tanto $\rho f^2 \not\rightarrow 0$ y $k \neq 0$. Finalmente, si $k = 1$, entonces $\rho f^2 \rightarrow 3/8\pi$ y $\rho > \delta$ para cierto $\delta > 0$. Cómo $f' \rightarrow 0$, existe una sucesión $\{t_i\} \rightarrow \infty$ tal que $\{f''(t_i)\} \rightarrow 0$ y por la proposición anterior $\{(\rho + 3\mu)(t_i)\} \rightarrow 0$, pero esto contradice que $\rho + 3\mu \geq \varepsilon \rho \geq \varepsilon \delta \geq 0$.

□

El teorema predice que nuestro universo comenzó en una colosal explosión. El tiempo límite t_* no es parte del modelo, pero una fracción de segundo después, la materia para la construcción del universo ya está presente.

Bajo las hipótesis del teorema, el destino final de nuestro universo depende del signo k de la curvatura de S ; y esta a su vez depende de la densidad ρ_0 y de la constante de Hubble $H_0 = \frac{f'}{f}$.

Corolario 3.2.3. Llamamos **densidad crítica** a $\rho_c = \frac{3(H_0)^2}{8\pi}$. Si $\rho_0 \leq \rho_c$, entonces $k = 0, -1$ (y el universo se expande para siempre). Si $\rho_0 > \rho_c$, entonces $k = 1$ (y el universo eventualmente colapsa).

Demostración. Por el Teorema 3.2.1, $\rho - (\frac{3(H_0)^2}{8\pi}) = \frac{3k}{8\pi f^2}$, luego $k = \text{signo}(\rho_0 - \rho_c)$. □

En la práctica, la estimación de ρ_0 es difícil de conseguir y, para obtenerla con precisión, tendrían que ser analizadas regiones muy extensas del universo y muchas formas de la materia podrían contribuir al promedio de la densidad.

Por este motivo, incluso asumiendo que nuestro universo admite un excelente modelo de Robertson-Walker, todavía no podemos hacer predicciones precisas sobre el destino final del mismo.

3.3. Modelos de Friedmann

Excepto en los primeros momentos del universo y los últimos instantes (si los hubiera) la densidad domina a la presión. De manera que los modelos de Robertson-Walker con $\mu = 0$ deberían de ser razonablemente buenos para ese rango. Veamos una descripción de los que se denominan **modelos de Friedmann**.

Llamaremos **nube de polvo** a los fluidos perfectos con $\mu = 0$ y $\rho > 0$ y, suponemos la ausencia de cualquier influencia no gravitacional entre las “moléculas” del fluido.

Es claro que los modelos de Friedmann son un caso particular de los espacio-tiempos de Robertson-Walker. Estos modelos aparecen con la finalidad de simplificar lo anterior, calculando explícitamente el valor de la función f que utilizábamos en el producto torcido.

Lema 3.3.1. Sea $M(k, f)$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker con f no constante. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. El fluido perfecto U es una nube de polvo.
2. $\rho f^3 = C$, con C una constante positiva.
3. (Ecuación de Friedmann) $f'^2 + k = A/f$, donde $A = \frac{8\pi M}{3} > 0$.

Demostración. (2) \Leftrightarrow (3)

La equivalencia entre (2) y (3) es una consecuencia de la fórmula para ρ en el Teorema 3.2.1.

(1) \Rightarrow (2)

Supongamos que se cumple (1), por lo tanto $\mu = 0$ y $\rho > 0$, entonces, por el Corolario 3.2.2, $\rho'f + 3\rho f' = 0$ y esto implica que ρf^3 es constante, además positiva ya que ρ y f lo son.

(2) \Rightarrow (1)

Recíprocamente, si se cumple (2), $\rho f^3 = M$, derivando esta relación llegamos a

$$\rho' f^3 + 3\rho f^2 f' = 0 \Rightarrow \rho' = \frac{-3\rho f'}{f}$$

y sustituyendo en la fórmula del Corolario 3.2.2, llegamos a que $\mu = 0$, que es lo que queríamos probar. \square

En resumen, un **modelo cosmológico de Friedmann** es un espacio-tiempo de Robertson-Walker que cumple que el fluido galáctico es una nube de polvo y $H = \frac{f'}{f}$ es positiva para algún t_0 .

Modelos Cosmológicos de Friedmann.

Podemos encontrar la función f en los tres casos $k = 0, 1, -1$, suponiendo un big bang en $t_* = 0$.

1. $k = 0$. La ecuación de Friedmann $ff'^2 = A$ tiene de solución $f = Ct^{\frac{2}{3}}$, donde $4C^3 = 9A$. por lo tanto la expansión inicial continúa siempre, con $f \rightarrow \infty$ y $f' \rightarrow 0$.
2. $k=1$. La integración de la ecuación de Friedmann nos da la solución paramétrica

$$t = \frac{1}{2}A(\theta - \text{sen}(\theta)), \quad f = \frac{1}{2}A(1 - \text{cos}(\theta)) \quad (0 < \theta < 2\pi).$$

La gráfica de f es la cicloide barrida por un punto en el borde de una rueda rodante con diámetro A (Figura 3.2). La expansión alcanza un máximo $f = A$ en $t = \frac{A\pi}{2}$. Luego comienza una contracción, y f decrece hasta un colapso final en $t^* = \pi A$.

3. $k=-1$. La ecuación de Friedmann es ahora $f' = 1 + \frac{A}{f}$. Por lo que $f' \geq 1$ y el universo se expande para siempre con $f \rightarrow \infty$ y $f' \rightarrow 1$. Una integración como en (2) nos lleva a

$$t = \frac{1}{2}A(-\theta + \text{senh}(\theta)), \quad f = \frac{1}{2}A(-1 + \text{cosh}(\theta)) \quad (\theta > 0).$$

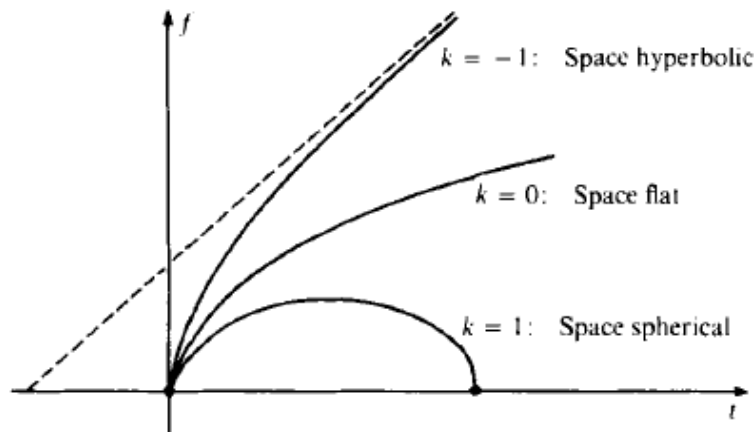


Figura 3.2: Funciones f de Friedmann

Estos modelos fueron propuestos por Friedmann muchos años antes del descubrimiento de la expansión del universo.

La ecuación de Friedmann es la misma que la ecuación diferencial que modela el

movimiento radial en la gravitación Newtoniana.

Así pues, un modelo de Friedmann 3-dimensional de un universo con $k = 1$ podría interpretarse en el espacio, detonando una bola de dinamita envuelta en una capa de ladrillos. Los fragmentos volarían en todas direcciones y, siempre que la carga sea insuficiente, alcanzar un radio máximo y, simétricamente volver a unirse.

Para cargas mas grandes, la velocidad de escape se alcanza y los fragmentos continuarían expandiéndose sin límite.

A continuación, y asumiendo que $H_0^{-1} = 18 \times 10^9$ años, veamos unos ejemplos de universos de Friedmann, y, usando las elecciones estándar para S calcularemos su edad

1. **El Modelo cosmológico de Einstein-de Sitter**, $M(0, t^{2/3}) = \mathbb{R}^+ \times_{t^{2/3}} \mathbb{R}^3$. La función Hubble $H = \frac{\dot{f}}{f}$ es $\frac{2}{3t}$, de manera que la edad del universo es

$$t_0 = \frac{2H_0}{3} = 12 \times 10^9 \text{ años.}$$

Como $k = 0$, $\rho = \frac{3H^2}{8\pi}$. En particular la densidad ρ_0 es, en el valor crítico $\rho_c = 5,5 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$.

2. $M(1, f) = (0, \pi A) \times_f S^3$. La hoja $S(t)$ es una esfera 3-dimensional de radio $f(t)$. La edad de este universo es

$$t_0 = \frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) \approx 10,3 \times 10^9 \text{ años.}$$

Menos de un décimo de su vida total πA .

3. $M(-1, f) = \mathbb{R}^+ \times_{f(t)} H^3$. En este último caso, la edad del universo es

$$t_0 = 13,5 \times 10^9 \text{ años.}$$

3.3.1. Desplazamiento al rojo

Cualquier curva α en $M(k, f) = I \times_f S$ puede escribirse de la forma $(t(s), \beta(s))$ donde $t(s)$ es el tiempo de $\alpha(s)$ y β es la proyección de α sobre S .

Proposición 3.3.1. Una curva $\alpha = (t, \beta)$ en $M(k, f)$ es una geodésicas si, y solo si

$$\frac{d^2t}{ds^2} + (\beta', \beta')f(t)\frac{df(t)}{dt} = 0$$

$$\beta'' + 2\left(\frac{df(t)}{dt}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)\beta' = 0$$

Corolario 3.3.1. Si $\alpha = (t, \beta)$ es una geodésica nula en $M(k, f)$, entonces la función $f(t)dt/ds$ es constante.

Este resultado nos conduce a una explicación relativista del fenómeno físico llamado **desplazamiento al rojo**.

Cuando la luz de una galaxia distante es analizada en un espectroscopio, se obtiene el patrón característico de las líneas espectrales, pero al estudiarlas, las longitudes de onda observadas λ_0 son más largas en proporción (dependiendo solo de la galaxia fuente) que las emitidas desde la tierra.

Como se supone que cada longitud de onda en emisión λ_p es la misma que en la tierra, la elongación que sufre durante la transmisión es uniforme.

El factor de crecimiento es

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_p}{\lambda_p}.$$

Se denomina el **parámetro del desplazamiento al rojo** de la fuente (el rojo tiene la longitud de onda mas larga en la banda visible).

Tal desplazamiento aparece en cualquier modelo de Robertson-Walker. En la figura siguiente, tomamos α un fotón (geodésica nula apuntando al futuro) emitido en un instante pasado $t_p \in I$ por una galaxia γ_p y recibida por otra γ_0 en el presente (en $t_0 \in I$).

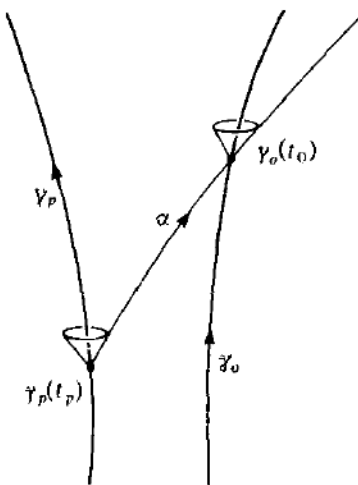


Figura 3.3: Desplazamiento al rojo

Tomando las galaxias como observadores tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.2. Sea $M(k, f)$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker, y sea α un fotón emitido en $\gamma_p(t_p)$ y recibido en $\gamma_0(t_0)$, entonces α sufre un desplazamiento al rojo

$$z = \frac{f(t_0)}{f(t_p)} - 1.$$

Como se puede ver en el siguiente corolario, en un espacio-tiempo de Robertson-Walker $M(k, f)$ con las elecciones usuales de S , los instantes de tiempo $t_p, t_o \in I$ determinan la distancia entre las galaxias γ_p y γ_0 .

Corolario 3.3.3. Sea $M(k, f)$ un espacio-tiempo de Robertson-Walker con $k = -1, 0, 1$ (las elecciones usuales). Si un fotón emitido en $\gamma_p(t_p)$ es recibido en $\gamma_0(t_0)$, entonces la distancia actual entre ambas galaxias γ_p y γ_0 es

$$f(t_0) \int_{t_p}^{t_0} \frac{dt}{f(t)}.$$

Para el caso de $k = 1$, la integral es menor o igual que π

3.4. Espacio-tiempo de Schwarzschild

Cuando Einstein obtuvo la ecuación de campo a finales de 1915, llegó a ciertas conclusiones, las cuales sirvieron para estudiar consecuencias observacionales, como el avance del perihelio de Mercurio o la expansión del universo.

De todos modos, Einstein mismo creyó que, dada la complejidad de sus ecuaciones (de carácter no lineal), nunca se encontraría una solución exacta.

Poco después, en 1916, fue Karl Schwarzschild quien fue capaz de hallar la primera solución exacta, la cual fue formulada en una carta a Einstein el 22 de diciembre de 1915. Dicho escrito fue redactado mientras Schwarzschild servía durante la Primera Guerra Mundial, en el frente ruso y concluía con la siguiente frase ([6]):

“Como ves, la guerra me trató con la amabilidad suficiente, a pesar de los fuertes disparos, para permitirme alejarme de todo y tomar este paseo en la tierra de tus ideas”

Usualmente, para poder resolver las ecuaciones de Einstein, se necesitan hacer algunas consideraciones que simplifican el problema como, por ejemplo, de simetría.

La solución de Schwarzschild corresponde a la única solución con simetría esférica de las ecuaciones de campo en el vacío, la cual describe la geometría del espacio-tiempo vacío alrededor de objetos esféricos, como estrellas y planetas, así como los agujeros negros sin rotación y sin carga.

3.4.1. Definición del modelo

Tomando las coordenadas (t, r, ϕ, θ) , la expresión que modela la métrica de Schwarzschild es la siguiente:

$$g = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2,$$

donde M es la masa de la fuente de la gravedad. Las condiciones de las que partió Schwarzschild para resolver las ecuaciones de Einstein son las siguientes:

- Es estática, es decir que existe al menos un sistema de coordenadas donde la métrica no depende de la coordenada temporal.
- Simetría esférica.
- Para grandes distancias a la fuente, la solución debe ser la métrica de Minkowski.

Encontramos dos singularidades, una en $r = 0$ y otra en $r = 2M$, por lo que el espacio-tiempo puede quedar dividido en dos partes, como veremos a continuación.

La singularidad en $r = 0$ es entendible teniendo en cuenta que ya aparecía un problema parecido en el origen de la masa en el modelo newtoniano.

Sin embargo, la singularidad en $r = 2M$ es mucho más interesante, ya que la métrica sufre algunos cambios

- el coeficiente $\left(1 - \frac{2M}{r}\right) > 0$ si se cumple que $2M < r < \infty$,
- si $0 < r < 2M$ entonces $\left(1 - \frac{2M}{r}\right) < 0$.

Esto implica que los conos de luz van a ser diferentes dependiendo del valor de r .

Denominaremos **horizonte de sucesos** a la hipersuperficie resultante de tomar $r = 2M$.

En 1960 Kruskal buscó una transformación de coordenadas de tal manera que la métrica mantuviera un comportamiento regular en el horizonte de sucesos. Para este fin se propone encontrar una transformación de coordenadas $(t, r) \rightarrow (u, v)$ de tal manera que la métrica tome la forma de

$$g = f^2(u, v)(dv^2 - du^2) - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2).$$

donde la función $f(u, v)$ no se anule para $r = 2M$.

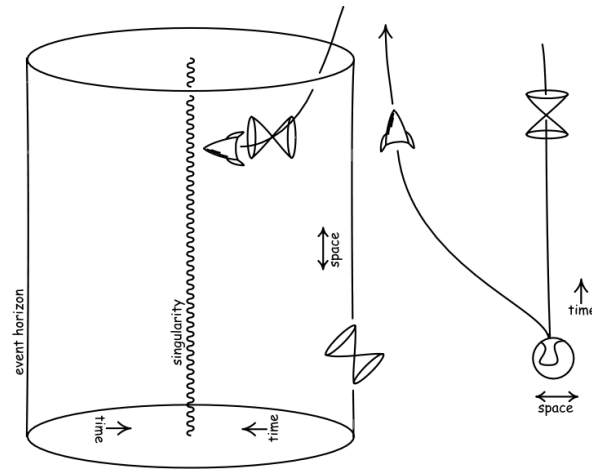


Figura 3.4: Conos de luz en el horizonte de sucesos

Normalmente, el radio del horizonte de sucesos es mas pequeño que el radio de la estrella, por ejemplo, para el Sol el horizonte de sucesos se sitúa en $r = 1,5$ km, por lo que en este caso el espacio-tiempo solo tiene una región, el exterior.

Sin embargo, si el radio de la estrella es menor que $2M$ sí que encontramos dos regiones diferentes.

Definición 3.4.1. Para $M > 0$, sean P_1 y P_2 las regiones $r > 2M$ y $0 < r < 2M$ respectivamente, definidas en el semi plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ equipado con la métrica g definida anteriormente. Si \mathbb{S}^2 es la esfera unidad, entonces el producto torcido $N = P_1 \times_r \mathbb{S}^2$ se denomina el **espacio-tiempo exterior de Schwarzschild** y $B = P_2 \times_r \mathbb{S}^2$ el **agujero negro de Schwarzschild**, ambos con masa M .

Podemos enunciar una propiedad destacable de la región B definida anteriormente.

Proposición 3.4.1. Ninguna partícula, material o luminosa, puede escapar del agujero negro B .

Se deduce de la naturaleza de los conos de luz en el interior de B . Este es el modelo mas simple de agujero negro, el cual es esféricamente simétrico y sin rotación.

3.4.2. Observadores de Schwarzschild

A continuación, vamos a ver algunas características del exterior de Schwarzschild N . El campo de vectores ∂_t es temporal en N , y está orientado temporalmente, requiriendo que ∂_t apunte al futuro.

Definición 3.4.2. Llamaremos **observadores de Schwarzschild** a las curvas integrales α de U , donde

$$U = \frac{\partial_t}{\sqrt{(1 - \frac{2M}{r})}}.$$

Estos están representados por líneas verticales en la imagen siguiente.

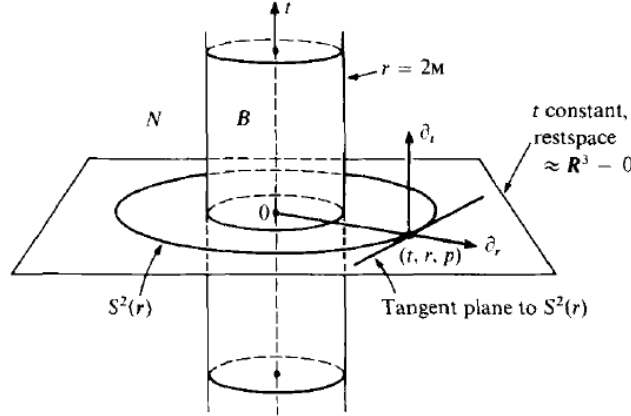


Figura 3.5: Espacio tiempo exterior N, agujero negro de Schwarzschild B

La relación que existe entre t , el tiempo en el espacio-tiempo de Schwarzschild y τ , el tiempo propio de un observador de Schwarzschild es

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{(1 - \frac{2M}{r})}}.$$

Esta dilatación temporal es constante a lo largo de α .

Como $0 < 1 - \frac{2M}{r} < 1$ en N , el tiempo de Schwarzschild t es siempre más rápido que el tiempo propio τ de α . Ambos tiempos son casi iguales si el observador se sitúa lejos de la estrella, donde el factor de dilatación es cercano a 1, pero, como $1 - \frac{2M}{r} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 2M$, el tiempo de Schwarzschild acelera de manera no acotada para observadores cada vez más cercanos a $2M$.

3.4.3. Geodésicas de Schwarzschild

Tomando las coordenadas ortogonales ($x_0 = t, x_1 = r, x_3 = \theta, x_4 = \phi$), las ecuaciones de las geodésicas se transforman en:

$$\frac{d}{ds} \left[g_{ii} \left(\frac{dx_i}{ds} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 \frac{\partial g_{jj}}{\partial x_i} \left(\frac{dx_j}{ds} \right)^2, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Donde $g_{00} = -(1 - \frac{2M}{r})$, $g_{11} = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = r^2 \sin^2(\theta)$.

Lema 3.4.1. Sea γ una geodésica en $N \cup B$, entonces para constantes E y L , se tiene

1. $(1 - \frac{2M}{r}) \frac{dt}{ds} = E$,
2. $r^2 \sin^2(\theta) \frac{d\phi}{ds} = L$,
3. $\frac{d}{ds} r^2 \frac{d\phi}{ds} = r^2 \sin(\theta) \cos(\theta) (\frac{d\phi}{ds})^2$.

Demostración. Las ecuaciones (1) y (2) son consecuencia de (3.1) para $i = 1, 3$, ya que ningún g_{jj} depende de t o ϕ .

Por otro lado, la ecuación (3), de nuevo, es consecuencia de (3.1), esta vez tomando $i = 2$ y simplificando. □

Definición 3.4.3. Una curva en $N \cup B$ se llama **inicialmente ecuatorial** relativa a las coordenadas ϕ, θ si cumple que $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{d\theta}{ds}(0) = 0$.

Proposición 3.4.2. Sea $\gamma \in N \cup B$ una partícula material en caída libre que es inicialmente ecuatorial, entonces

- I $(1 - \frac{2M}{r}) \frac{dt}{d\tau} = E$,
- II $r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = L$,
- III $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Donde E y L son constantes.

Demostración. Las ecuaciones I, II, III van a ser consecuencia directa de las fórmulas del lema 3.4.1, con el parámetro s cambiado por τ tiempo propio de γ .

La ecuación (1) es la misma que I.

De la misma forma II es consecuencia de (2) y, evidentemente $\theta = \pi/2$ es la única solución de (3) al poner de condiciones iniciales que γ sea inicialmente ecuatorial. □

Estas ecuaciones incluyen el principio de Galileo de que el movimiento de un objeto en caída libre es independiente de su masa.

En la región del espacio N , la ecuación II es formalmente idéntica a la segunda Ley de Kepler: “La línea que une un planeta al objeto respecto al que gira, barre áreas iguales en tiempos iguales”, por lo tanto, llamaremos a L el **momento angular por unidad de masa** de una partícula.

Finalmente, E se denomina la **energía por unidad de masa en el infinito** de una partícula.

3.4.4. Órbitas en caída libre de partículas materiales

Sea γ una partícula material en caída libre situada en el exterior de Schwarzschild N . La proyección $\vec{\gamma}$ sobre el espacio de reposo descansa en el plano orbital de γ , dado en coordenadas ecuatoriales por $\theta = \frac{\pi}{2}$. Entonces, podemos escribir $\vec{\gamma}(\tau) = (r(\tau), \phi(\tau))$.

Llamamos **órbita** de γ al camino recorrido por $\vec{\gamma}$ en el plano orbital. La partícula es **entrante** si $\frac{dr}{d\tau} < 0$, mientras que se dice **saliente**, si $\frac{dr}{d\tau} > 0$.

A continuación, vamos a describir los distintos tipos de órbitas que pueden aparecer.

Órbita de choque

En este tipo de órbita, las partículas entrantes chocan directamente con la estrella, sin embargo, partículas salientes se mueven hasta un punto de inflexión para volver hacia la estrella y acabar chocando contra ella.

Órbita de choque/escape

Partículas entrantes chocan contra la estrella, mientras que partículas salientes escapan al infinito.

Órbita acotada

La partícula se mantiene rotando con respecto a la estrella siguiendo una trayectoria cíclica.

Órbita de vuelo

En este último caso, las partículas tienen energía suficiente para escapar de la estrella, evitando una trayectoria de choque.

Todas estas aparecen recogidas en la siguiente imagen:

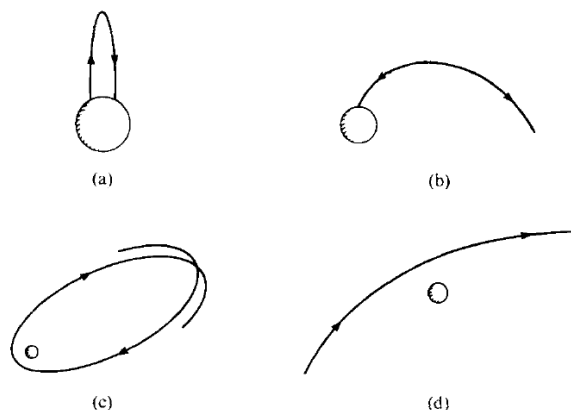


Figura 3.6: (a) Órbita de choque. (b) Órbita de choque/escape. (c) Órbita acotada. (d) Órbita de vuelo

3.4.5. Precesión del perihelio de Mercurio

La teoría de la gravitación newtoniana, presupone un universo plano. Dicha teoría, predice una órbita elíptica cerrada para cada planeta, con el Sol en uno de sus focos, denominándose perihelio a la distancia mínima al Sol.

Teniendo en cuenta las perturbaciones de los demás planetas y otros astros, la posición del perihelio no es fija y va oscilando a lo largo de los años. A este movimiento se le denomina precesión del perihelio.

Los cálculos basados en la mecánica clásica, dan como resultado una precesión de 531 segundos de arco por siglo ($531''$) para Mercurio, en cambio, los datos observacionales indicaban que era de $574''$. Había una discrepancia de $43''$.

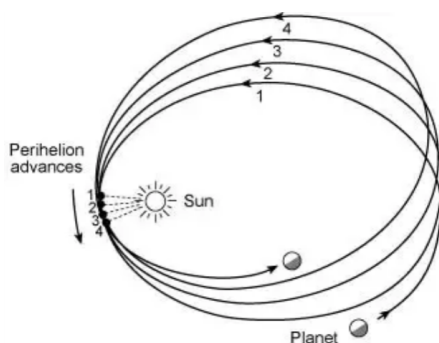


Figura 3.7: Precesión del perihelio de Mercurio

Para intentar explicar la precesión del perihelio de Mercurio, supusieron que existía un planeta que aún no se había descubierto, llamado Vulcano, el cual fue propuesto en septiembre de 1859 por el matemático y astrónomo francés Urbain Le Verrier.

Sin embargo, este planeta nunca fue encontrado, apareciendo en su lugar el problema de la anomalía de la precesión del perihelio de Mercurio.

Finalmente, en 1915, Einstein resolvió este problema, utilizando su teoría de la relatividad general, concluyendo que las variaciones en la órbita eran producidas por la fuerza gravitacional del Sol.

Este avance del perihelio medido en radianes/revolución es

$$\delta = \frac{6\pi M}{a(1 - \varepsilon^2)},$$

donde M es la masa de la estrella con respecto a la que gira la partícula, ε es la excentricidad de la órbita elíptica y a es el valor del semieje mayor de la órbita.

Cálculo de la precesión del perihelio de Mercurio

Tomaremos los siguientes datos:

$$M = \text{masa del Sol} = 1,48 \cdot 10^5$$

$$a = \text{semieje mayor para Mercurio} = 5,79 \cdot 10^{12}$$

Calculamos $\delta = \frac{6\pi M}{a(1-\varepsilon^2)} = 5,02 \cdot 10^{-7}$ radianes por revolución. Hay $2,06 \cdot 10^5$ segundos de arco por radián y, teniendo en cuenta que Mercurio tiene un periodo de 87.96 días, realiza 415.2 revoluciones por siglo.

Finalmente,

$$5,02 \cdot 10^{-2} \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot 415,2 \approx 43''$$

3.4.6. Órbitas luminosas

Ahora, vamos a considerar el comportamiento de una partícula luminosa γ en el exterior de Schwarzschild N . Por definición γ es una geodésica, por lo que las ecuaciones I-III de la proposición 3.4.2 se cumplen.

Una partícula luminosa con $L = 0$ tiene, $v\phi$ y θ constantes, por lo tanto se mueve radialmente.

Como en las partículas materiales, el recorrido de una partícula luminosa γ es su proyección $\vec{\gamma} = (r, \phi)$ en su plano orbital en el espacio en reposo.

En la teoría newtoniana, los rayos de luz siguen líneas rectas, sin embargo, en un ámbito relativista estas están influenciadas por la gravitación, produciéndose el fenómeno conocido como curvatura de la luz. Este fenómeno depende de $b = \frac{|L|}{E}$, a este número se le llama el **parámetro de impacto** de γ .

Dependiendo de la magnitud de b , y de las condiciones iniciales de γ , encontramos tres tipos de órbitas, las cuales se encuentran resumidas en la siguiente imagen.

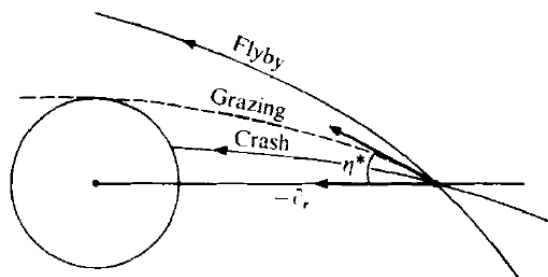


Figura 3.8: Partículas luminosas en un plano orbital

El impacto del parámetro b en γ , tiene una caracterización más geométrica en términos del ángulo entre la velocidad orbital $\vec{\gamma}'$ y la dirección radial $-\partial_t$.

Lema 3.4.2. Sea γ una partícula luminosa en N , con parámetro de impacto b , entonces

$$r \cdot \text{sen}(\eta) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{2M}{r}}, \text{ donde } \eta = \angle(-\partial_t, \vec{\gamma}').$$

Bibliografía

- [1] EINSTEIN, ALBERT *Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie*, Annalen der Physik, 354, (1916) no.7.
- [2] MISNER, C.W., K.S.THORNE, AND J.A.WHEELER., *Gravitation*, WH Freeman and Co. , San Francisco, 1973.
- [3] DO CARMO, MANFREDO PERDIGAO.*Riemannian geometry*, Birkhauser, 1992.
- [4] O'NEILL, B. *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, San Diego (California), 1983.
- [5] FABER, RICHARD L. *Differential geometry and relativity theory: an introduction.*, Marcel Dekker, New York, 1983.
- [6] KLEIN, M., KOX, A. J., RENN, J., & SCHULMANN, R., *The Collected Papers of Albert Einstein, vol.8a,doc.169*, Princeton: Princeton University Press, 1996.

Índice alfabético

- Índice de un producto escalar, 12
- Órbita, 53

- Agujero negro de Schwarzschild, 50

- Big bang, 42
- Big crunch, 42

- Caída libre, 18
- Carácter causal, 13
- Compatible con la métrica, 20
- Conexión afín, 20
- Conexión de Levi-Civita, 20
- Cono temporal, 14
- Constante Cosmológica, 34
- Contracción de un tensor, 19
- Curva temporal(nula o causal), 17
- Curvatura escalar, 23
- Curvatura seccional, 22
- Curvaturas seccionales principales, 39

- densidad crítica, 43
- Derivada Covariante, 20
- Desplazamiento al rojo, 47

- Ecuación de campo de Einstein, 33
- Ecuación de campo de Einstein en el vacío, 30
- Espacio de Lorentz-Minkowski, 14
- Espacio vectorial lorentziano, 13
- Espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski, 35
- Espacio-tiempo de Robertson-Walker, 37
- Espacio-tiempo exterior, 50

- Fluidos perfectos, 23
- Función potencial, 27

- Horizonte de sucesos, 49

- Identidad de Bianchi, 21
- Inicialmente ecuatorial, 52

- Modelo cosmológico, 37
- Modelo cosmológico de Friedmann, 44
- Momento angular por unidad de masa , 52

- Nube de polvo, 44

- Observador, 18
- Observadores de Schwarzschild, 51
- Operador curvatura, 21
- Orientación temporal, 15

- Parámetro de impacto de γ , 55
- Partícula luminosa, 18
- Partícula material, 18
- Precesión del perihelio, 54

- Ricci llano, 22

- Singularidad física, 42

- Tensor curvatura de Ricci, 22
- Tensor curvatura de Riemann, 20
- Tensor métrico, 12
- Tensor tensión-energía, 23
- Tiempo propio, 18
- Torsión de una conexión, 20

- Variedad lorentziana, 13
- Variedad riemanniana, 13
- Variedad semi-riemanniana, 12
- Vector causal, 13
- Vector espacial, 13
- Vector luminoso, 13
- Vector temporal, 13