



FACULTAD DE MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE GRADO:

# EL TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN Y EL TEOREMA DE SCHÖNFLIES

Trabajo realizado por Francisco Marín Sola

---

Dirigido por:  
Luis José Alías Linares y  
Verónica López Cánovas

## DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

Yo, Francisco Marín Sola, declaro ser el autor original del trabajo “El Teorema de la curva de Jordan y el Teorema de Schönflies” bajo la tutela del profesor D. Luis José Alías Linares y Verónica López Cánovas, habiendo reflejado en la bibliografía y referenciado convenientemente todas las fuentes empleadas para su elaboración.<sup>1</sup>

En Murcia, a 26 de Junio de 2018.

---

<sup>1</sup>Nota: En la Secretaría de la Facultad de Matemáticas se ha presentado una copia firmada de esta declaración.

# Resumen

Es bien conocido que en todas las ramas de las matemáticas podemos encontrar resultados que a priori e intuitivamente parecen sencillos, pero a la hora de probarlos de una forma rigurosa resultan ser realmente complejos. Uno de los máximos exponentes de esto es, posiblemente, el Teorema de la curva de Jordan, el cual establece que una curva plana, cerrada y sin autointersecciones divide el plano en dos componentes, el interior y el exterior de la curva. En la senda de lo afirmado anteriormente, casi con total seguridad, si preguntamos a alguien con una formación matemática básica sobre la veracidad de lo que afirma el teorema, nos dirá sin apenas dudar que los hechos expuestos en el teorema son claramente ciertos. Sin embargo, dar una demostración rigurosa del teorema está lejos de ser tan fácil y sencillo como a primera instancia se podría pensar.

El objetivo de este trabajo es dar una prueba rigurosa y lo más general posible de este resultado tan intuitivo. Además, abordaremos otro teorema que es tanto o más difícil de probar, el Teorema de Schönflies. Este teorema establece que la clausura del interior de una curva de Jordan (curva plana, cerrada y sin autointersecciones) es homeomorfa a un disco cerrado.

Para alcanzar los objetivos planteados, en una primera aproximación abordaremos una demostración del Teorema de la curva de Jordan para curvas planas, regulares y diferenciables haciendo uso de la teoría del grado y la teoría global de curvas. A continuación, estudiaremos una demostración para el caso continuo, basada fundamentalmente en teoría de grafos. Después, aprovechando las herramientas desarrolladas anteriormente, abordaremos la demostración del Teorema de Schönflies. Además, veremos las ideas que hay detrás de las generalizaciones de ambos teoremas en dimensión mayor.

Antes de entrar en los objetivos expuestos anteriormente, en el Capítulo 1 haremos una revisión de los conceptos fundamentales del trabajo, es decir, una revisión de nociones básicas de topología, teoría de grafos y geometría global de curvas planas. Después de esta introducción, en el Capítulo 2 abordaremos la prueba del Teorema de la curva de Jordan para curvas diferenciables en dos partes; probaremos que el

complementario de la imagen de la curva tiene a lo sumo dos componentes conexas con la imagen de la curva como frontera común y después, para completar la prueba del teorema, demostraremos que el complementario de la imagen de la curva tiene como mínimo dos componentes conexas. Para probar la primera parte, introduciremos el concepto de entorno tubular de una curva diferenciable y probaremos su existencia usando fundamentalmente herramientas de topología, análisis y geometría global de curvas planas. Por otro lado, para probar la segunda parte, introduciremos el concepto de número de vueltas de una curva alrededor de un punto apoyándonos en la teoría del grado de una curva.

Una vez visto esto pasamos al Capítulo 3, en el cual desarrollaremos nuestro siguiente objetivo, dar una demostración del Teorema de la curva de Jordan para curvas continuas generalizando así el resultado visto previamente. En primer lugar, abordaremos el caso en el que la curva de Jordan es una curva poligonal. Para probar este caso simplemente usaremos propiedades de la topología del plano ya que, debido a que la curva es poligonal, la prueba es significativamente más sencilla. De hecho, Camille Jordan en su *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (ver [10]), donde presentó por primera vez la prueba del teorema (bastante criticada por algunos matemáticos; en [7] se puede consultar con detalle la prueba original y ver que esencialmente es correcta), daba por trivial el caso en el que la curva fuese poligonal.

Continuaremos desarrollando un marco teórico sobre grafos planares ya que, como hemos dicho antes, usaremos principalmente resultados de teoría de grafos para probar el teorema. El resultado fundamental necesario para la prueba es que el grafo denominado como  $K_{3,3}$  es no planar. Una vez visto esto y algunos resultados técnicos previos, continuaremos con el denominado Teorema del arco de Jordan, el cual establece que el complemento de un arco de Jordan es conexo. Después de esto, introduciremos el concepto de punto accesible y demostraremos el Teorema de la curva de Jordan para curvas continuas haciendo uso de que el grafo  $K_{3,3}$  no es planar y de varios resultados técnicos expuestos previamente. Entre ellos cabe destacar un corolario que obtenemos inmediatamente después de probar que  $K_{3,3}$  es no planar, el cual establece que el complemento de una curva de Jordan es desconexo.

Para finalizar el Capítulo 3, abordaremos las ideas que hay detrás de las generalizaciones del Teorema de la curva de Jordan. En primer lugar, veremos que el teorema también se cumple en la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Después, trataremos el caso del toro  $\mathbb{T}^2$  en el cual, como veremos, no se cumple el teorema. Finalmente, expondremos la generalización del teorema a la esfera  $n$ -dimensional  $\mathbb{S}^n$ , es decir, que cualquier subespacio de  $\mathbb{S}^n$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$  separa  $\mathbb{S}^n$  en dos componentes conexas, y veremos las ideas que hay detrás de la generalización del teorema para hipersuperficies compactas y conexas embebidas en  $\mathbb{R}^n$ .

El siguiente objetivo es demostrar el Teorema de Schönflies; en particular, en el Capítulo 4 trataremos de desarrollar una prueba del teorema dada por Thomassen en [15]. Además, obtendremos de dicho teorema una especie de extensión del Teorema de la curva de Jordan. Para ello, comenzaremos generalizando algunos de los resultados técnicos vistos anteriormente. A continuación, introduciremos un concepto fundamental en la demostración del teorema, el concepto de  $\mathbb{R}^2$ -isomorfismo. Una vez visto esto, abordaremos la prueba del teorema dada por Thomassen en [15]. Esta prueba se basa fundamentalmente en extender el homeomorfismo existente entre la imagen de una curva de Jordan y la circunferencia unidad al homeomorfismo buscado entre la clausura del interior de la curva y el disco cerrado.

Después de esto, obtendremos la mencionada extensión del Teorema de la curva de Jordan, la cual dice que dado un conjunto cerrado en el plano con al menos tres puntos curvo-accesibles, entonces el complemento de dicho conjunto cerrado tiene a lo sumo dos componentes conexas. Empezaremos introduciendo el concepto de punto curvo-accesible y probando, a partir del Teorema de Schönflies, que todo punto de una curva de Jordan es curvo-accesible. A continuación, daremos una prueba de dicha extensión la cual es esencialmente igual a la dada para el Teorema de la curva de Jordan para curvas continuas, es decir, hace uso de los mismos resultados técnicos previos y de que el grafo  $K_{3,3}$  es no planar.

Para finalizar el Capítulo 4, veremos las ideas que hay detrás de las generalizaciones del Teorema de Schönflies en dimensión mayor, tal y como hicimos para el Teorema de la curva de Jordan. En primer lugar, nos plantearemos la siguiente cuestión: sabiendo que cualquier subespacio de  $\mathbb{S}^n$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$  separa  $\mathbb{S}^n$  en dos componentes conexas, ¿la clausura de las componentes conexas es homeomorfa a la bola  $n$ -dimensional cerrada? Como veremos, la respuesta es que “en general” no. El contraejemplo que expondremos es el de la esfera cornuda de Alexander. Esta es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$  tal que la componente conexa no acotada de su complemento no es simplemente conexa y por tanto, no puede ser homeomorfa a la componente conexa no acotada del complemento de la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

Una vez visto que la cuestión planteada anteriormente no tiene respuesta afirmativa “en general”, nos planteamos otra cuestión: ¿qué condiciones adicionales se necesitan para generalizar el teorema? La respuesta la da Mazur en [11]. Las dificultades encontradas en un intento de generalización del teorema vienen derivadas de los embebimientos de  $\mathbb{S}^{n-1}$  en  $\mathbb{S}^n$ , luego imponiendo una condición de buen comportamiento a los embebimientos se puede generalizar el teorema. Finalmente, sin entrar en materia específica que escaparía a los objetivos de este trabajo, expondremos la generalización del Teorema de Schönflies en dimensión  $n$  dada por Mazur en [11].

# Abstract

In all the mathematic's branches its well-known that we can find a wide range of theoretical results that at a first see and intuitively can seem truly simple but when you try to make a rigorous proof it is harder than it seems. One of the greatest exponents of this is possibly the Jordan curve theorem, which says that a plane, closed and without self-intersections curve divides the plane in two components, the interior and the exterior of the curve. As we said, if we asked somebody, who has a basic mathematic education, about the veracity of what the theorem says he would say without hesitations the facts that the theorem exposes are true. However, to give a rigorous proof of the theorem is so far from being easy and simple like at a first see we could think.

The aim of this work is to give a rigorous proof and as general as we can of this intuitive result. In addition, we will approach other theorem that is as hard to proof as the Jordan curve theorem, the Schönflies theorem. This theorem says that the closure of a Jordan curve interior (plane, closed and without self-intersections curve) is homeomorphic to a closed disk.

In order to reach our aims, in a first approach we will try to give a proof of the Jordan curve theorem for plane, smooth and regular curves using the curve degree theory and global curve theory. Then, we will study a proof for the continuous case based fundamentally on graphs theory. After this, using the tools that we have developed, we will try to give a proof of the Schönflies theorem. In addition we will see the ideas under the generalizations of both theorems.

Before entering into the aims previously displayed, in Chapter 1 we will do a revision of the fundamentals work's concept, this is, a revision of the basic concepts of topology, graph theory and global geometry of plane curves. After this introduction, in Chapter 2 we will approach the proof of the Jordan curve theorem for smooth curves in two parts; we will prove that the complement of the curve support has at most two connected components having the curve support as their boundary and then, in order to complete the proof, we will prove the the complement of the curve support has at least two connected components. In order to prove the first

part, we will introduce the tubular neighborhoods of a smooth curve and we will prove their existence using topology, calculus and global geometry of plane curve tools. On the other hand, in order to prove the second part, we will introduce the winding number of a curve with respect to a point using the degree theory of a curve.

Once seen this we pass to the Chapter 3, in which we will develop our next aim, giving a proof of the Jordan curve theorem for continuous curves generalizing the previous result. At first, we will approach the case of a polygonal Jordan curve. In order to prove this, we will only use topology properties of the plane as, due to the fact the the curve is polygonal, the proof is significantly simpler. In fact, Camille Jordan in *Cours d'analyse de l'École polytechnique* (see [10]), where he shows the proof for the first time (criticized by a dawn of mathematics; in [7] we can consult with a lot of details the Jordan's proof and see that it is essentially correct), he assume as trivial the case in which the curve was a polygonal.

We will continue developing a theoretical context about planar graphs because, as we said before, we will use results of graphs theory in order to prove the theorem. The fundamental result that we need for the proof is that the graph known as  $K_{3,3}$  is not planar. After we had seen this and others technical results we will continue with the Jordan arc theorem, which says that the complement of a Jordan arc is connected. After that we will introduce the concept of accessible point and finally we will prove the Jordan curve theorem for continuous curves using that the graph  $K_{3,3}$  is not planar and other technical results. The most important of them is a corolary which we will deduce immediately after prove that  $K_{3,3}$  is not planar. The corolary says that the complement of a Jordan curve is disconnected.

In order to finish the Chapter 3 we will talk about the ideas behind the generalizations of the Jordan curve theorem. At first, we will see that the theorem works in the sphere  $\mathbb{S}^2$ . After that, we will see the case of the torus  $\mathbb{T}^2$  in which the theorem does not work. Finally, we will see the generalization of theorem for the  $n$ -dimensional sphere  $\mathbb{S}^n$ , i.e that every subspace of  $\mathbb{S}^n$  homeomorphic to  $\mathbb{S}^{n-1}$  divides  $\mathbb{S}^n$  in two connected components, and the ideas behind the generalization of theorem for compact and connected hypersurface embedded in  $\mathbb{R}^n$ .

The next aim is to prove the Schönflies theorem; in particular, in the Chapter 4 we will try to develop a proof of the theorem given by Thomassen in [15]. In addition, We will get from the theorem a generalization of the Jordan curve theorem. For that, we will start generalizing some of the previous results that we have seen in the Chapter 3. After that, we will introduce a fundamental concept for the proof of the theorem, the concept of  $\mathbb{R}^2$ -isomorphism. Once we have seen that, we will approach the proof given by Thomassen in [15]. This proof is fundamentally based on extend the isomorphism between the complement of the curve and the unit circle to the

isomorphism that we were looking for between the closure of the curve interior and the closed disk.

After that, we will get the mentioned generalization of the Jordan curve theorem, which says that the complement of a closed set in the plane with at least three curve-accessible points has at most two connected components. We will start introducing the concept of curve-accessible point and proving using the Schönflies theorem that all the points in a Jordan curve are curve-accessible. After this, we will give a proof of the mentioned generalization which essentially is the same that we gave for the Jordan curve theorem for continuous curves, i.e the proof uses the same technical previous results and that the graph  $K_{3,3}$  is not planar.

In order to finish the Chapter 4, we will see the ideas behind the generalizations of the Schönflies theorem in higher dimension as we did in the previous chapter for the Jordan curve theorem. At first we will ask to ourself the next question: knowing that every subspace of  $\mathbb{S}^n$  homeomorphic to  $\mathbb{S}^{n-1}$  separates  $\mathbb{S}^n$  in two connected components, is the closure of the connected components homeomorphic to a  $n$ -dimensional closed ball? As we will see the answer is no “in general”. The counterexample that we will show is the Alexander’s horned sphere. This is a subspace of  $\mathbb{R}^3$  homeomorphic to  $\mathbb{S}^2$  such that the unbounded connected component of its complement is not simply connected and then, it can not be homeomorphic to the unbounded connected component of the complement of the sphere  $\mathbb{S}^2$ .

Once we have seen that the question before has not got an affirmative answer, we asked to ourself other question: what additional conditions need we in order to generalize the theorem? The question is answered by Mazur in [11]. The difficulties that we find when we are trying to generalizing the theorem are caused by the embeddings of  $\mathbb{S}^{n-1}$  in  $\mathbb{S}^n$ , then if we set a good behavior condition to the embeddings we will can generalize the theorem. Finally, we will present the generalization of the Schönflies theorem given by Mazur in [11].

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>X</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Conceptos previos de topología . . . . .	1
1.1.1. Conexión y compacidad . . . . .	2
1.1.2. Propiedad Hausdorff . . . . .	6
1.1.3. Homeomorfismos . . . . .	6
1.2. Conceptos previos de teoría local de curvas planas . . . . .	8
1.3. El grado de una curva en $\mathbb{S}^1$ . . . . .	10
1.4. Conceptos previos de teoría de grafos . . . . .	14
<b>2. Teorema de la curva de Jordan para curvas diferenciables</b>	<b>18</b>
2.1. Entornos tubulares . . . . .	18
2.2. El número de vueltas de un curva . . . . .	23
2.3. Demostración del teorema . . . . .	26
<b>3. Teorema de la curva de Jordan para curvas continuas</b>	<b>30</b>
3.1. Teorema de la curva de Jordan para curvas poligonales . . . . .	30
3.2. Grafos planares . . . . .	35
3.3. Demostración del teorema . . . . .	40
3.4. Generalizaciones del teorema en dimensión mayor . . . . .	43
<b>4. Teorema de Schönflies</b>	<b>46</b>
4.1. Demostración del teorema . . . . .	46
4.2. Extensión del teorema de la curva de Jordan . . . . .	51
4.3. Generalizaciones del teorema en dimensión mayor . . . . .	52
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>

Índice alfabético

56

# Índice de figuras

1.1.	$(a)$ , $(b)$ son curvas no simples; $(c)$ es una curva simple; $(d)$ es una curva de Jordan . . . . .	8
1.2.	Representación de un grafo con cuatro vértices y cuatro aristas. . . . .	15
1.3.	$(b)$ es un subgrafo de $(a)$ . . . . .	15
1.4.	$(a)$ es un camino de ocho vértices y $(b)$ es un ciclo formado a partir de $(a)$ . . . . .	16
1.5.	Grafo bipartito. . . . .	16
1.6.	Grafo completo bipartito $K_{3,3}$ . . . . .	17
2.1.	Entorno tubular de una curva. . . . .	19
2.2.	$T_+$ y $T_-$ son conexos por arcos. . . . .	22
2.3.	Número de vueltas de una curva. . . . .	24
2.4.	Ilustración de la prueba de (II). . . . .	25
3.1.	Ilustración de la prueba anterior. . . . .	31
3.2.	Definición de la función de paridad $i$ . . . . .	32
3.3.	Imagen guía para la prueba. . . . .	33
3.4.	Ilustración del enunciado. . . . .	34
3.5.	Ejemplo de grafo planar. . . . .	36
3.6.	Ejemplo de la afirmación anterior. . . . .	36
3.7.	Ilustración de la afirmación anterior. . . . .	37
3.8.	$K_{3,3}$ . . . . .	37
3.9.	Imagen para ilustrar la demostración. . . . .	38
3.10.	Grafos planares $X_{j-1}$ , $X_j$ y $X_{j+1}$ . . . . .	41
3.11.	Ejemplo de punto accesible desde un conjunto cerrado. . . . .	41
3.12.	Modificación del arco poligonal $L_{i2}$ . . . . .	42
3.13.	Curvas de Jordan en la esfera. . . . .	44
3.14.	Curvas de Jordan en el toro. . . . .	44
4.1.	Imagen para ilustrar el enunciado. . . . .	46
4.2.	El grafo $(b)$ es una subdivisión del grafo $(a)$ . . . . .	48
4.3.	Esfera cornuda de Alexander. . . . .	52

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo vamos a revisar algunos de los conceptos fundamentales de nuestro trabajo. Tratará principalmente de algunas nociones básicas de topología, teoría de grafos y geometría de curvas planas. Todas ellas orientadas hacia nuestros objetivos.

### 1.1. Conceptos previos de topología

Durante todo el trabajo haremos uso de diversos conceptos topológicos que serán fundamentales a la hora de entender todos los resultados que se exponen. Nuestro objetivo aquí es revisar todos estos conceptos necesarios de manera ordenada para así facilitar la comprensión de los resultados posteriores.

Empezaremos con el concepto de espacio topológico para, a partir de éste, revisar algunas propiedades fundamentales.

**Definición 1.1.1.** Una **topología** sobre un conjunto  $X$  es una colección  $\tau$  de subconjuntos de  $X$  que cumple lo siguiente:

1.  $\emptyset, X \in \tau$ .
2. La unión de elementos de cualquier subcolección de  $\tau$  está en  $\tau$ .
3. La intersección de cualquier subcolección finita de elementos de  $\tau$  está en  $\tau$ .

Un **espacio topológico** es un par ordenado  $(X, \tau)$  formado por un conjunto  $X$  y un topología  $\tau$  sobre  $X$ . Un subconjunto  $U$  de  $X$  es un conjunto abierto si pertenece a la topología  $\tau$ . Usando esta terminología podemos decir que un espacio topológico es un conjunto  $X$  junto con una colección de subconjuntos de  $X$ , llamados conjuntos abiertos, tal que  $\emptyset$  y  $X$  son ambos abiertos y es cerrada para uniones arbitrarias e intersecciones finitas.

Generalmente dar la especificación completa de los elementos de una topología es bastante complejo. En la mayoría de los casos se describe una colección de subconjuntos de  $X$  más pequeña que define la topología.

**Definición 1.1.2.** Si  $X$  es un conjunto, una base para una topología sobre  $X$  es una colección  $\mathcal{B}$  de subconjuntos de  $X$  (llamados **elementos básicos**) tales que:

1. Para cada  $x \in X$  existe un elemento básico  $B$  que contiene a  $x$ .
2. Si  $x$  pertenece a dos elementos básicos  $B_1$  y  $B_2$  entonces existe un tercer elemento básico  $B_3$  tal que  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ .

Si  $\mathcal{B}$  satisface estas condiciones, se define la topología  $\tau$  generada por  $\mathcal{B}$  como sigue: un subconjunto  $U$  de  $X$  se dice que es abierto en  $X$  (es decir, pertenece a  $\tau$ ), si para cada  $x \in U$  existe  $B \in \mathcal{B}$  tal que  $x \in B \subset U$ .

### 1.1.1. Conexión y compacidad

La conexión es un concepto central del trabajo. Es por ello que revisaremos la definición, varias propiedades importantes y algún ejemplo sencillo.

Empezamos con la definición de espacio conexo.

**Definición 1.1.3.** Sea  $X$  un espacio topológico. Una **separación** de  $X$  es un par  $U, V$  de abiertos disjuntos no triviales de  $X$  cuya unión es  $X$ . El espacio  $X$  se dice que es **conexo** si no existe ninguna separación de  $X$ .

Otro modo de formular la conexión es el siguiente:

**Proposición 1.1.1.** Un espacio  $X$  es conexo si, y solo si, los únicos subconjuntos abiertos y cerrados son el conjunto vacío y el propio  $X$ .

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [14, pág 168]. □

A continuación vamos a citar algunos resultados que nos permiten construir espacios conexos a partir de espacios conexos dados de antemano. Además, estos resultados nos serán de gran utilidad en la demostración de varios resultados expuestos en el trabajo.

**Lema 1.1.1.** Si los conjuntos  $U$  y  $V$  forman una separación de  $X$ , y además  $Y$  es un subespacio conexo de  $X$ , entonces  $Y$  está contenido en  $U$  ó en  $V$ .

*Demostración.* La demostración puede consultarse en [14, pág 170]. □

A partir de una colección de conjuntos conexos, no disjuntos, podemos construir otro conjunto conexo.

**Teorema 1.1.1.** La unión de una colección de subespacios conexos de  $X$  cuya intersección es no vacía es conexa.

*Demostración.* La demostración puede consultarse en [14, pág 170].  $\square$

Otro resultado que nos será de utilidad es el siguiente:

**Teorema 1.1.2.** Sea  $A$  un subespacio conexo de  $X$ . Si  $A \subset B \subset \bar{A}$ , entonces  $B$  es también conexo. En particular, la clausura de un subespacio conexo es también conexa.

*Demostración.* La demostración puede consultarse en [14, pág 170].  $\square$

Finalmente tenemos el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.3.** La imagen de un espacio conexo por una aplicación continua es un espacio conexo.

*Demostración.* La demostración puede consultarse en [14, pág 171].  $\square$

Pasamos ahora a otro concepto íntimamente relacionado con el de conexión y especialmente importante en el Capítulo 2 y el Capítulo 3 del trabajo, las **componentes conexas**.

**Definición 1.1.4.** Sea  $X$  un espacio topológico. La relación dada por “ $x \sim y$  si y solo si existe un subespacio conexo de  $X$  que contiene a  $x$  e  $y$ ” define una relación de equivalencia. Definimos las **componentes conexas** de  $X$  como las clases de equivalencia de esta relación.

Las componentes conexas de  $X$  forman una partición de  $X$  en conjuntos maximales en el siguiente sentido: cualquier subespacio conexo de  $X$ , no vacío, está enteramente contenido en una única componente conexa.

Citamos a continuación algunas de las propiedades más importantes:

**Proposición 1.1.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Se cumple que:

- Si  $x$  es un punto de  $X$ , la componente conexa que contiene a  $x$  es el mayor subespacio conexo de  $X$  que contiene a  $x$ . En otras palabras, la componente conexa que contiene a  $x$  es la unión de todos los subespacios conexos de  $X$  que contienen a  $x$ .
- Las componentes conexas son siempre cerradas en  $X$ .
- $X$  es conexo si y solo si tiene una única componente conexa (él mismo).

Finalmente, revisaremos otros dos conceptos relacionados con la conexión: **conexión por caminos** y **conexión local**. Vamos a ver su definición, algún ejemplo y propiedades de ambos.

Empezamos con la definición de **conexo por caminos**.

**Definición 1.1.5.** Dados dos puntos  $x$  e  $y$  del espacio  $X$ , un camino que une  $x$  con  $y$  es una aplicación continua  $f : [a, b] \rightarrow X$  de modo que  $f(a) = x$  y  $f(b) = y$ . Un espacio  $X$  se dice **conexo por caminos** si cada par de puntos de  $X$  se pueden unir mediante un camino en  $X$ .

Veamos ahora la siguiente propiedad de los espacios conexos por caminos:

**Proposición 1.1.3.** Todo espacio  $X$  conexo por caminos es conexo.

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [14, pág 176].

□

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco del resultado anterior no es cierto:

**Ejemplo 1.1.1.** Sea  $S = \{x \operatorname{sen}(1/x) \mid 0 < x \leq 1\}$ . Como  $S$  es la imagen bajo una aplicación continua del intervalo  $(0, 1]$ ,  $S$  es conexo. De esta forma la curva seno del topólogo  $\bar{S}$  también es conexa por ser su clausura. Sin embargo, no es conexo por arcos. La demostración de la última afirmación se puede consultar en [14, pág 178].

Pasamos ahora a la definición de otro tipo de conexión, la conexión local.

**Definición 1.1.6.** Un espacio  $X$  se dice que es **localmente conexo** en  $x$  si para cada entorno  $U$  de  $x$ , existe un entorno conexo  $V$  contenido en  $U$ . Si  $X$  es localmente conexo en todos sus puntos, se dice que es localmente conexo.

Veamos el siguiente teorema de caracterización de espacios localmente conexos:

**Teorema 1.1.4.** Un espacio  $X$  es localmente conexo si, y solo si, para cada conjunto abierto  $U$  de  $X$ , cada componente de  $U$  es abierta en  $X$ .

Usando el teorema anterior podemos demostrar fácilmente que  $\mathbb{R}^2$  es localmente conexo:

**Ejemplo 1.1.2.** ( $\mathbb{R}^2$  es localmente conexo.)

Dado  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $U$  un entorno cualquiera de  $x$  existe una bola centrada en  $x$  y de radio  $R$  totalmente contenida en  $U$ . Usando que las bolas de la distancia euclídea en  $\mathbb{R}^2$  son conexas obtenemos el resultado.

Otro concepto topológico esencial del que haremos uso a lo largo del trabajo es el de **compacidad**. Para poder hablar de él empezaremos revisando el concepto de **recubrimiento abierto** de un espacio topológico.

**Definición 1.1.7.** Dado un espacio topológico  $X$ , un **recubrimiento abierto** de  $X$  es una colección  $\mathcal{A}$  de subconjuntos abiertos de  $X$  tal que su unión es todo  $X$ . De esta forma, un **subrecubrimiento** de un recubrimiento abierto es una subcolección  $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$  tal que su unión sigue siendo  $X$ .

Ahora podemos definir un espacio topológico **compacto**.

**Definición 1.1.8.** Un espacio topológico  $X$  es **compacto** si todo recubrimiento abierto de  $X$  admite un subrecubrimiento finito.

Veamos un ejemplo de espacio compacto y un ejemplo de espacio no compacto:

**Ejemplo 1.1.3.** El intervalo cerrado  $[0, 1]$  es compacto.

**Ejemplo 1.1.4.** La recta real  $\mathbb{R}$  no es un espacio compacto. Esto se debe a que el recubrimiento abierto  $\{(-n, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  no admite ningún subrecubrimiento finito.

A continuación, vamos a ver un resultado que usaremos en capítulos posteriores:

**Lema 1.1.2.** La circunferencia  $\mathbb{S}^1$  es compacta.

*Demostración.* ver [2, pág 46]. □

Una vez vista la definición de espacio compacto pasamos a ver algunas propiedades importantes que cumplen estos espacios.

**Proposición 1.1.4.** Sea  $f : X \rightarrow Y$  un aplicación continua. Si  $X$  es compacto, entonces  $f(X)$  es compacto.

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede consultar en [2, pág 48]. □

Otro resultado importante que usaremos posteriormente es el siguiente:

**Teorema 1.1.5.** Todo subespacio cerrado de un espacio compacto es también compacto.

*Demostración.* La prueba de esta resultado se puede ver en [2, pág 65]. □

Para finalizar, veamos el Teorema de Heine-Borel.

**Teorema 1.1.6.** Un subespacio  $X \subset \mathbb{R}^n$  es compacto si y solo si  $X$  es cerrado (como subespacio de  $\mathbb{R}^n$ ) y acotado.

*Demostración.* La prueba de esta resultado se puede consultar en [2, pág 49]. □

### 1.1.2. Propiedad Hausdorff

Otra propiedad topológica de la que haremos uso en el trabajo es la propiedad Hausdorff o segundo axioma de separación. A continuación revisaremos la definición, algunas propiedades y ejemplos que usaremos en capítulos posteriores. Podemos encontrar una descripción con más detalle de lo que aquí se expone en [2].

Vamos a empezar con la definición de propiedad Hausdorff.

**Definición 1.1.9.** Decimos que un espacio topológico  $X$  es **Hausdorff** si, para todo par de puntos distintos  $x$  e  $y$  en  $X$ , existe entornos  $U$  y  $V$  de  $x$  e  $y$  respectivamente tales que  $U \cap V = \emptyset$ .

En otras palabras, para cualquier par de puntos distintos podemos encontrar dos entornos disjuntos de ambos puntos.

Veamos el siguiente ejemplo que nos será de utilidad posteriormente:

**Ejemplo 1.1.5.**  $\mathbb{R}^n$  es Hausdorff para cualquier  $n$ . Fundamentalmente esto se debe a que la topología de  $\mathbb{R}^n$  coincide con la topología asociada a la distancia usual ya que, para cualquier par de puntos, podemos encontrar dos bolas abiertas centradas en dichos puntos y que sean disjuntas.

La siguiente propiedad también nos será de utilidad:

**Proposición 1.1.5.** Sea  $X$  un espacio topológico que cumple la propiedad Hausdorff. Entonces cualquier subconjunto  $Y \subset X$  cumple la propiedad Hausdorff.

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede consultar en [2, pág 51].  $\square$

Para finalizar veamos el siguiente teorema:

**Teorema 1.1.7.** Todo subespacio compacto de un espacio Hausdorff es cerrado

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [2, pág 65].  $\square$

### 1.1.3. Homeomorfismos

Pasamos ahora al concepto de homeomorfismo. En esta parte de la sección revisaremos la definición, algunos ejemplos y propiedades que usaremos en capítulos posteriores. Para una descripción más detallada del tema que aquí se presenta se puede ver [2].

Empezamos con la definición de espacios topológicos homeomorfos y homeomorfismo.

**Definición 1.1.10.** Dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  se dicen **homeomorfos** si existen aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que

$$(f \circ g) = id_Y \text{ y } (g \circ f) = id_X.$$

Si  $f$  y  $g$  cumplen esto diremos que son **homeomorfismos**. En otras palabras,  $f$  es un homeomorfismo si, y solo si, es una aplicación continua, biyectiva y con inversa continua.

Veamos un ejemplo concreto de homeomorfismo.

**Ejemplo 1.1.6.** Dos intervalos cualesquiera de la recta real son homeomorfos. Tomemos  $X = (-1, 1)$  e  $Y = (0, 5)$  y definimos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  de la siguiente forma

$$f(x) = \frac{5}{2}(x + 1), \quad g(x) = \frac{2}{5}x - 1.$$

Estas aplicaciones son claramente continuas y una es la inversa de la otra. Por tanto  $f$  y  $g$  son homeomorfismos.

A continuación exponemos una caracterización de los homeomorfismos:

**Proposición 1.1.6.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  un aplicación continua y biyectiva se tiene que:

- (I)  $f$  es un homeomorfismo si y solo si es una aplicación abierta.
- (II)  $f$  es un homeomorfismo si y solo si es una aplicación cerrada.

Para finalizar, veamos algunas propiedades de espacios topológicos que se conservan por homeomorfismos.

**Proposición 1.1.7.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos homeomorfos. Entonces

- (I) Si  $X$  es conexo, entonces  $Y$  es conexo.
- (II) Si  $X$  es compacto, entonces  $Y$  es compacto.
- (III) Si  $X$  es Hausdorff, entonces  $Y$  es Hausdorff.

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede consultar en [2, pág 62].  $\square$

## 1.2. Conceptos previos de teoría local de curvas planas

En esta sección vamos a introducir las curvas y arcos de Jordan y revisaremos algunos conceptos y resultados fundamentales de teoría local de curvas planas. Entre estos conceptos se encuentra el de vector tangente, vector normal y curvatura, así como el diedro de Frenet y las fórmulas de Frenet en el plano.

Empezaremos definiendo las curvas que manejaremos durante nuestro trabajo.

**Definición 1.2.1.** Un **arco de Jordan** (o simple) de clase  $C^k$  en  $\mathbb{R}^n$  es una curva  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo, que es un homeomorfismo con su imagen.

**Definición 1.2.2.** Una **curva de Jordan** de clase  $C^k$  en  $\mathbb{R}^n$  es una curva  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^k$ , inyectiva en  $[a, b]$  y en  $(a, b)$ . En particular, su imagen es homeomorfa a una circunferencia.

Veamos algún ejemplo concreto de curva de Jordan y de arco de Jordan:

**Ejemplo 1.2.1.** Algunos ejemplos notables de arcos de Jordan son los segmentos de recta y las hélices. Por otro lado, un ejemplo claro de curva de Jordan es la circunferencia pero pueden no ser tan sencillos como vemos en la Figura 1.1.

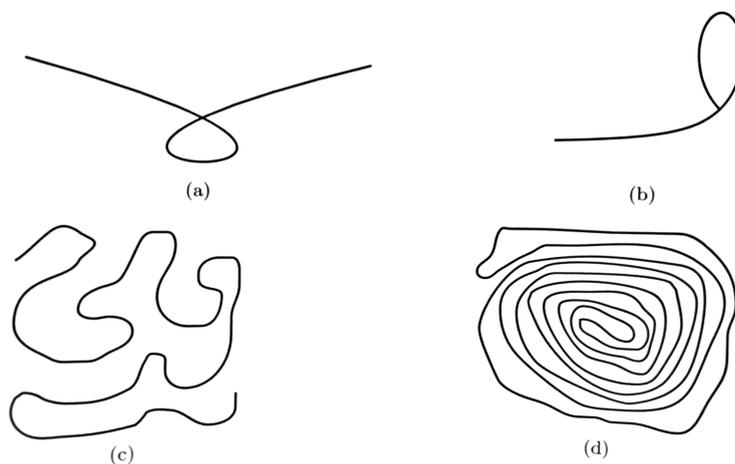


Figura 1.1: (a), (b) son curvas no simples; (c) es una curva simple; (d) es una curva de Jordan

Otros conceptos básicos que usaremos en posteriores capítulos son el de vector tangente y vector normal. Además, relacionados con estos conceptos encontramos el de curva regular y el de curva parametrizada por el arco.

**Definición 1.2.3.** Sea  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva de clase al menos  $C^1$ . Denominamos **vector tangente** de la curva en el punto  $\sigma(s)$  a  $\sigma'(s)$  y lo denotamos por  $\mathbf{t}(s)$ . Finalmente, si  $\sigma'(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$  decimos que  $\sigma$  es regular.

No todas las curvas son regulares:

**Ejemplo 1.2.2.** La curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\sigma(s) = (s^2, s^3)$  no es regular ya que  $\sigma'(0) = 0$ .

Pasamos ahora al concepto de **longitud de arco** y de curva **parametrizada por el arco**.

**Definición 1.2.4.** Sea  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva de clase  $C^k$  con  $k \geq 1$ . Fijado  $t_0 \in I$ , la **longitud de arco** de  $\sigma$  es la función  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\sigma'(u)\| du.$$

Diremos que  $\sigma$  está **parametrizada por el arco** si  $\|\sigma'\| = 1$ . En otras palabras,  $\sigma$  está parametrizada por el arco si y solo si su longitud de arco es igual al parámetro  $t$  salvo una translación, esto es  $s(t) = t - t_0$ .

Una curva parametrizada por el arco es claramente regular. Un resultado fundamental es que la implicación inversa es cierta:

**Teorema 1.2.1.** Toda curva regular admite una parametrización por el arco. De forma más precisa sea  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva regular de clase  $C^k$ . Fijado  $t_0 \in I$ , denotamos por  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  la longitud de arco de  $\sigma$  desde  $t_0$ . Entonces,  $\tilde{\sigma} = \sigma \circ s^{-1}$  es la única reparametrización (salvo reparametrizaciones afines) de  $\sigma$  por el parámetro arco.

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [9, pág 35] □

En el siguiente ejemplo práctico veremos como se calcula la reparametrización por el arco de una curva regular.

**Ejemplo 1.2.3. (La catenaria).** Tomemos la curva parametrizada  $\sigma(t) = (t, \cosh t)$ . Esta curva recibe el nombre de *catenaria*, pues adopta la forma de una cadena suspendida en el aire sujeta por sus extremos. En primer lugar calculamos su parámetro arco:

$$s(t) = \int_0^t \|\sigma'(u)\| du = \int_0^t \cosh u \, du = \sinh t;$$

luego el cambio de parámetro que reparametriza  $\sigma$  por la longitud de arco viene dado por  $t = h(s) = \arg \sinh s$ . Por tanto,

$$\hat{\sigma}(s) = \sigma(h(s)) = (\arg \sinh s, \cosh(\arg \sinh s)) = (\arg \sinh s, \sqrt{1 + s^2})$$

es la reparametrización por la longitud de arco de la catenaria.

Para finalizar revisaremos los conceptos de vector normal y curvatura y, ligados a ellos, el diedro de Frenet.

**Definición 1.2.5.** El **vector normal** a una curva plana regular  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  p.p.a, es el vector  $\mathbf{n}(s) = J(\mathbf{t}(s))$ , donde  $J$  corresponde a una rotación positiva de  $\pi/2$  radianes.

Por tanto, los vectores  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  forman una base ortonormal del plano euclídeo para cada  $s$ , que recibe el nombre de **diedro de Frenet**. Nos hacemos la siguiente pregunta: ¿cómo varían los vectores tangente y normal a una curva? Claramente, por ser  $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s)\}$  una base ortonormal,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) \text{ y} \\ \mathbf{n}'(s) &= \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s) + \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s).\end{aligned}$$

Además, como  $\|\mathbf{t}(s)\|^2 = 1 = \|\mathbf{n}(s)\|^2$ , es evidente que  $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle = 0 = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ . En definitiva,

$$\begin{aligned}\mathbf{t}'(s) &= \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle \mathbf{n}(s) \text{ y} \\ \mathbf{n}'(s) &= \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{t}(s) \rangle \mathbf{t}(s).\end{aligned}$$

Por otro lado, la ortogonalidad de los vectores  $\mathbf{t}(s)$  y  $\mathbf{n}(s)$  nos permite asegurar que  $\langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = -\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}'(s) \rangle$ , lo que conduce a la siguiente definición:

**Definición 1.2.6.** Se denomina **curvatura** de una curva plana regular  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada por el arco a la función  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$k(s) := \langle \sigma''(s), J(\sigma'(s)) \rangle.$$

En definitiva hemos obtenido que

$$\begin{cases} \mathbf{t}'(s) = k(s)\mathbf{n}(s), \\ \mathbf{n}'(s) = -k(s)\mathbf{t}(s), \end{cases}$$

ecuaciones que reciben el nombre de **fórmulas de Frenet** de una curva plana.

### 1.3. El grado de una curva en $\mathbb{S}^1$

En la sección anterior hemos introducido algunas propiedades locales de las curvas planas, esto es, propiedades que pueden ser estudiadas atendiendo al comportamiento de la curva en un entorno de un punto. En esta sección queremos revisar

algunos resultados de teoría global de curvas planas, esto es, resultados que involucran propiedades del soporte de la curva como un todo.

Principalmente tratará de una revisión de la teoría del grado de una curva. Esta teoría es fundamental en el desarrollo del Capítulo 2 ya que, como veremos posteriormente, los conceptos aquí expuestos serán usados en los dos resultados más importantes de dicho capítulo.

Denotaremos por  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  a la circunferencia unidad en el plano, esto es, el conjunto de puntos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  a distancia 1 del origen:

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Identificando  $\mathbb{R}^2$  con el plano complejo de forma usual, esto es, identificando  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  con el par  $(x, y) = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z) \in \mathbb{R}^2$ , podemos describir  $\mathbb{S}^1$  como el conjunto de números complejos de módulo 1:

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Una de las herramientas fundamentales para el estudio de  $\mathbb{S}^1$  es la parametrización periódica  $\hat{\pi} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por:

$$\hat{\pi}(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x),$$

o, si consideramos  $\mathbb{S}^1$  en el plano complejo, por  $\hat{\pi}(x) = \exp(ix)$ . Considerando la parametrización de esta forma es fácil comprobar que se cumple que

$$\hat{\pi}(x_1) = \hat{\pi}(x_2) \iff x_1 - x_2 \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

A partir de la parametrización periódica  $\hat{\pi}$  podemos transferir problemas de  $\mathbb{S}^1$  a  $\mathbb{R}$  usando el levantamiento de aplicaciones.

**Definición 1.3.1.** Si  $\phi : X \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una aplicación continua de un espacio topológico  $X$  a  $\mathbb{S}^1$ , un **levantamiento** de  $\phi$  es una aplicación continua  $\tilde{\phi} : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\hat{\pi} \circ \tilde{\phi} = \phi$ , es decir, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{\phi} & \downarrow \hat{\pi} \\ X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

es conmutativo.

No todas las aplicaciones con valores en  $\mathbb{S}^1$  admiten un levantamiento. Sin embargo, existe un tipo importante de aplicaciones que siempre admiten un levantamiento, las curvas.

**Proposición 1.3.1.** Sea  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  una curva continua, y  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $\hat{\pi}(x_0) = \phi(a)$ . Entonces existe un único levantamiento  $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\phi$  tal que  $\tilde{\phi}(a) = x_0$ .

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede consultar en [1, pág 69].  $\square$

Una vez encontrado un levantamiento de una aplicación continua es fácil encontrar todos los demás.

**Proposición 1.3.2.** Sean  $\tilde{\phi}_1, \tilde{\phi}_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  dos levantamientos de una aplicación continua  $\phi : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ , donde  $X$  es un espacio topológico conexo. Entonces existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\tilde{\phi}_2 - \tilde{\phi}_1 \equiv 2\pi k$ .

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [1, pág 70].  $\square$

En particular, si  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  es una curva continua, entonces el número

$$\tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(a)$$

es el mismo para cualquier levantamiento  $\hat{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de  $\phi$ . Además, si  $\phi$  es una curva cerrada, esto es  $\phi(a) = \phi(b)$ , entonces se tiene que  $\tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(a)$  es necesariamente un múltiplo entero de  $2\pi$  ya que

$$\hat{\pi}(\tilde{\phi}(b)) = \phi(b) = \phi(a) = \hat{\pi}(\tilde{\phi}(a)).$$

A partir de esto podemos introducir el grado de una curva.

**Definición 1.3.2.**  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  una curva cerrada y continua. El **grado** de  $\phi$  es el número entero

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\phi}(b) - \tilde{\phi}(a)) \in \mathbb{Z}$$

donde  $\tilde{\phi} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es un levantamiento cualquiera de  $\phi$ .

En otras palabras, el grado mide el número de total de vueltas que realiza la curva antes de cerrarse. Veamos dos ejemplos prácticos de cálculo del grado de una curva:

**Ejemplo 1.3.1.** Una curva constante tiene grado cero ya que cualquier levantamiento es constante.

**Ejemplo 1.3.2.** Dado  $k \in \mathbb{Z}$ , sea  $\phi_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por

$$\phi_k(t) = (\cos(2k\pi t), \sin(2k\pi t)).$$

Un levantamiento de  $\phi_k$  viene dado por  $\tilde{\phi}_k(t) = 2k\pi t$ , por tanto

$$\deg \phi_k = \frac{1}{2\pi}(\tilde{\phi}_k(1) - \tilde{\phi}_k(0)) = k.$$

Posteriormente (Proposición 1.3.4) veremos fórmulas para calcular el grado de una curva cerrada y  $C^1$  a trozos con valores en  $\mathbb{S}^1$ . Pero antes, vamos ver una condición necesaria y suficiente para que dos curvas cerradas en  $\mathbb{S}^1$  tengan el mismo grado. Para poder verlo necesitamos el concepto de homotopía entre aplicaciones.

**Definición 1.3.3.** Una **homotopía** entre dos aplicaciones continuas entre espacios topológicos  $\phi_0, \phi_1 : Y \rightarrow X$  es una aplicación continua  $\Phi : [0, 1] \times Y \rightarrow X$  tal que  $\Phi(0, \cdot) \equiv \phi_0$  y  $\Phi(1, \cdot) \equiv \phi_1$ . Si existe una homotopía entre  $\phi_0$  y  $\phi_1$ , diremos que  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son homotópicas. Si  $Y = [a, b]$  y las curvas  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son cerradas, esto es,  $\phi_0(a) = \phi_0(b)$  y  $\phi_1(a) = \phi_1(b)$ , entonces diremos que  $\Phi$  es una homotopía de curvas cerradas con  $\Phi(t, a) = \Phi(t, b)$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

En otras palabras, dos aplicaciones  $\phi_0$  y  $\phi_1$  son homotópicas si es posible ir de forma continua de una a la otra, esto es, si  $\phi_0$  puede ser deformada de forma continua para obtener  $\phi_1$ .

Veamos el siguiente ejemplo de aplicaciones homotópicas:

**Ejemplo 1.3.3.** Si  $X$  es un espacio conexo por arcos, dos aplicaciones constantes con valores en  $X$  son siempre homotópicas. Sean  $\phi_0 : Y \rightarrow X$  y  $\phi_1 : Y \rightarrow X$  dadas por  $\phi_j(y) = x_j$  para todo  $y \in Y$ , donde  $x_0$  y  $x_1$  son puntos arbitrarios de  $X$ . Sea  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  una curva continua con  $\sigma(0) = x_0$  y  $\sigma(1) = x_1$ ; entonces una homotopía  $\Phi : [0, 1] \times Y \rightarrow X$  entre  $\phi_0$  y  $\phi_1$  viene dada por

$$\text{para todo } t \in [0, 1], \text{ y para todo } y \in Y \quad \Phi(t, y) = \sigma(t).$$

**Ejemplo 1.3.4.** Existen curvas continuas, cerradas y sobreyectivas que son homotópicas a una constante. Sea  $\phi_0 : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por

$$\phi_0(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t) & \text{para } t \in [0, \pi], \\ (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) & \text{para } t \in [\pi, 3\pi], \\ (\cos(t - 4\pi), \sin(t - 4\pi)) & \text{para } t \in [3\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

Entonces  $\Phi : [0, 1] \times [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{S}^1$ , dado por

$$\Phi(s, t) = \begin{cases} (\cos[(1-s)t], \sin[(1-s)t]) & \text{para } t \in [0, \pi], \\ (\cos[(1-s)(2\pi - t)], \sin[(1-s)(2\pi - t)]) & \text{para } t \in [\pi, 3\pi], \\ (\cos[(1-s)(t - 4\pi)], \sin[(1-s)(t - 4\pi)]) & \text{para } t \in [3\pi, 4\pi]. \end{cases}$$

es una homotopía de curvas cerradas entre  $\phi_0$  y la curva constante  $\phi_1 \equiv (1, 0)$ .

Una de los principales motivos por los que el grado es importante es que *dos curvas cerradas en  $\mathbb{S}^1$  son homotópicas si y solo si tienen el mismo grado*.

**Teorema 1.3.1.** Dos curvas cerradas  $\phi_0, \phi_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  son homotópicas si y solo si tienen el mismo grado. En particular, una curva cerrada es homotópica a una constante si y solo si tiene grado 0.

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [1, pág 73].  $\square$

Concluiremos esta sección viendo una fórmula para calcular el grado de curvas diferenciables. Esta fórmula nos será de gran utilidad más tarde.

**Definición 1.3.4.** Una curva continua  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es  $C^k$  a trozos si existe una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_r = b$  de  $[a, b]$  tal que  $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$  es de clase  $C^k$  para  $j = 1, \dots, r$

Las siguientes proposiciones nos dan una fórmula para calcular el grado de una curva:

**Proposición 1.3.3.** Sea  $\phi = (\phi_1, \phi_2) : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  una curva cerrada, continua y  $C^1$  a trozos. Entonces

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi} \int_a^b (\phi_1(t)\phi_2'(t) - \phi_2(t)\phi_1'(t))dt.$$

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [1, pág 74].  $\square$

**Proposición 1.3.4.** Sea  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$  una curva cerrada, continua y  $C^1$  a trozos. Entonces

$$\deg \phi = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\phi'(t)}{\phi(t)} dt.$$

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [1, pág 74].  $\square$

## 1.4. Conceptos previos de teoría de grafos

La teoría de grafos tiene un papel fundamental en el trabajo. Es por ello que hemos creído oportuno introducir algunas nociones básicas de cara a algunos resultados centrales que hacen uso de ellas.

Nuestro objetivo en esta sección será introducir las definiciones más básicas para después introducir algunos resultados que serán usados en los Capítulos 3 y 4.

Empezamos con las definiciones de grafo y subgrafo.

**Definición 1.4.1. Grafo.** Un grafo  $G$  es un par  $(V(G), E(G))$  donde  $V(G)$  es un conjunto finito de puntos, llamados *vértices* del grafo, y  $E(G)$  es un conjunto no ordenado de pares de puntos de  $V(G)$ , llamados *aristas* del grafo.

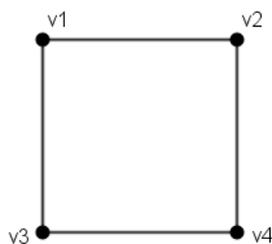
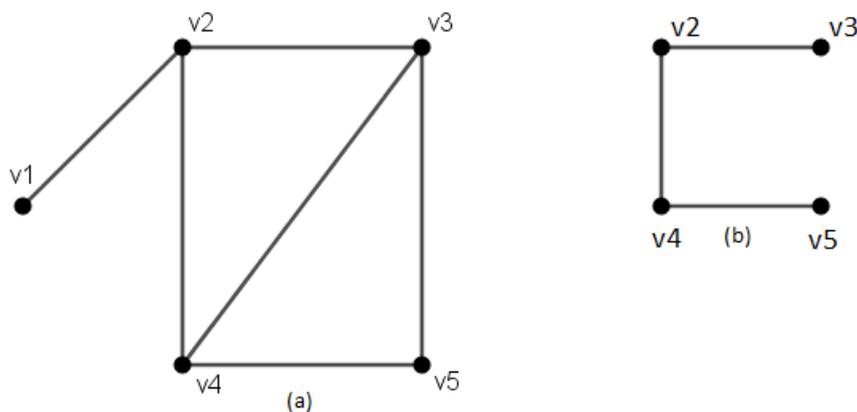
**Ejemplo 1.4.1.**

Figura 1.2: Representación de un grafo con cuatro vértices y cuatro aristas.

**Nota 1.4.1.** Si  $e = \{v, w\} \in E(G)$  es una arista del grafo  $G$ , diremos que  $e$  une los vértices  $v$  y  $w$  o que incide en  $v$  y  $w$ .

**Definición 1.4.2. Subgrafo.** Un subgrafo  $H$  de un grafo  $G$  viene dado por los subconjuntos  $V(H) \subset V(G)$  y  $E(H) \subset E(G)$  tal que todas las aristas de  $E(H)$  unen vértices de  $V(H)$ .

Veamos un ejemplo de subgrafo.

**Ejemplo 1.4.2.**Figura 1.3:  $(b)$  es un subgrafo de  $(a)$ .

Pasamos a la definición de dos tipos de grafos notables, los caminos y los ciclos.

**Definición 1.4.3. Camino.** Un camino  $L$  en un grafo  $G$  es una sucesión ordenada de vértices  $v_1, \dots, v_k \in V(G)$ ,  $v_1, \dots, v_{k-1}$  distintos entre sí, tal que  $\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}$  son aristas de  $G$ . Si  $v_1 = v_k$ , decimos que  $L$  es un **ciclo**.

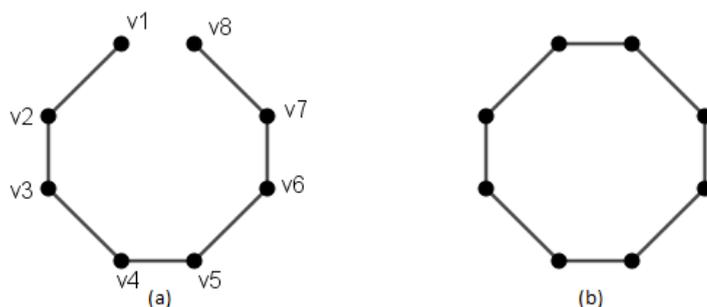
**Ejemplo 1.4.3.**

Figura 1.4: (a) es un camino de ocho vértices y (b) es un ciclo formado a partir de (a).

Veamos el concepto de isomorfismo de grafos.

**Definición 1.4.4. Isomorfismo de grafos.** Sean dos grafos  $G = (V(G), E(G))$  y  $G' = (V(G'), E(G'))$ . Decimos que  $G$  y  $G'$  son isomorfos, y escribimos  $G \simeq G'$ , si existe una biyección  $\phi : V(G) \rightarrow V(G')$  tal que  $e = \{v, w\} \in E(G)$  si y solo si  $e' = \{\phi(v), \phi(w)\} \in E(G')$  para todo  $v, w \in V(G)$ .

Introducimos ahora un tipo especial de grafo del que haremos uso en el Capítulo 3:

**Definición 1.4.5. Grafo bipartito.** Un grafo  $G = (V(G), E(G))$  se dice bipartito si existe una partición  $V_1, V_2$  de  $V(G)$  tal que cualquier arista de  $G$  tiene un extremo en  $V_1$  y otro en  $V_2$ .

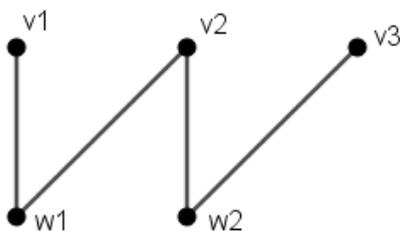
**Ejemplo 1.4.4.**

Figura 1.5: Grafo bipartito.

Para finalizar definimos el concepto de grafo completo bipartito.

**Definición 1.4.6. Grafo completo bipartito.** Sea  $G = (V(G), E(G))$  un grafo bipartito. Decimos que  $G$  es completo bipartito si  $E(G) = V_1 \times V_2$ , es decir, contiene todas las aristas posibles con un extremo en  $V_1$  y otro en  $V_2$ . Los grafos completos bipartitos se denotan por  $K_{n,m}$  donde  $n$  y  $m$  son el número de vértices en  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente.

**Ejemplo 1.4.5.**

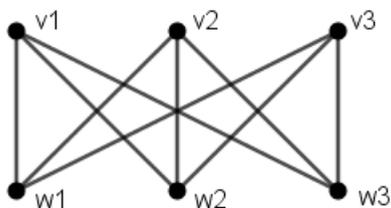


Figura 1.6: Grafo completo bipartito  $K_{3,3}$ .

El grafo de la figura anterior, conocido como  $K_{3,3}$ , tendrá un papel fundamental en demostración del teorema de la curva de Jordan en el Capítulo 3.

# Capítulo 2

## Teorema de la curva de Jordan para curvas diferenciables

Una de las propiedades principales de las curvas de Jordan es el denominado *Teorema de la curva de Jordan*, que establece que la imagen de una curva plana, cerrada y simple divide el plano en dos componentes conexas. Este resultado parece obvio a simple vista pero su prueba no es algo trivial, de hecho, dicha prueba requiere de resultados profundos y difíciles de demostrar.

En esta sección introduciremos dichos resultados previos y finalizaremos con un demostración del teorema de la curva de Jordan para curvas de clase  $C^2$ . Para ello usaremos únicamente herramientas de topología y geometría diferencial. Como veremos, necesitamos principalmente dos ingredientes para la prueba: entornos tubulares de la imagen de la curva (para probar que el complementario de la imagen de la curva tiene a lo sumo dos componentes conexas) y el número de vueltas de una curva (para probar que el complementario de la imagen de la curva tiene como mínimo dos componentes conexas).

Nuestro primer objetivo es introducir los entornos tubulares y probar su existencia.

### 2.1. Entornos tubulares

Si  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una curva plana regular entonces, dado  $\varepsilon > 0$ , para todo  $s \in I$  podemos tomar un segmento de recta de longitud  $2\varepsilon$  con centro en  $\sigma(s)$  y ortogonal a  $\sigma'(s)$ . La unión de estos segmentos es un entorno de la imagen de la curva; sin embargo, puede ocurrir que para distintos valores de  $s$  los segmentos intersequen.

El resultado principal de esta sección nos asegura que si  $\sigma$  es una curva simple de clase  $C^2$  entonces, podemos encontrar un  $\varepsilon > 0$  tal que dichos segmentos son disjuntos dos a dos, formando un entorno particular de la imagen de la curva, llamado

**entorno tubular.**

**Definición 2.1.1.** Sea  $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana, regular y simple con imagen  $C = \sigma([a, b])$ . Dado  $\varepsilon > 0$  y  $p = \sigma(s) \in C$ , denotamos por  $I_\sigma(p, \varepsilon)$  al segmento

$$\sigma(s) + (-\varepsilon, \varepsilon)\mathbf{n}(s)$$

con amplitud  $2\varepsilon$ , centrado en  $p$  y ortogonal a  $\sigma'(s)$ , donde  $\mathbf{n}(s)$  es el vector normal de  $\sigma$  en  $\sigma(s)$ . Es decir,  $I_\sigma(p, \varepsilon) = \{\sigma(s) + \lambda\mathbf{n}(s) : \text{con } -\varepsilon < \lambda < \varepsilon\}$ . Denotamos por  $N_\sigma(\varepsilon)$  a la unión de los segmentos  $I_\sigma(p, \varepsilon)$ , con  $p \in C$ . El conjunto  $N_\sigma(\varepsilon)$  es un **entorno tubular** de  $\sigma$  si  $\varepsilon$  es tal que  $I_\sigma(p_1, \varepsilon) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon) = \emptyset$  para todo  $p_1 \neq p_2$ .

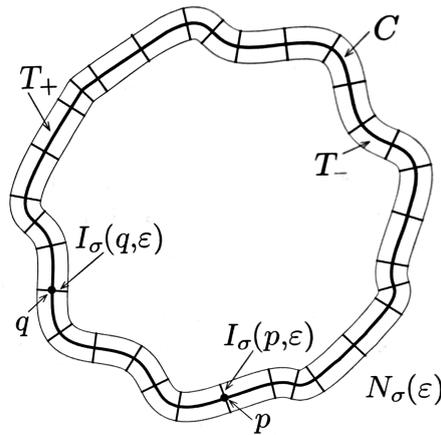


Figura 2.1: Entorno tubular de una curva.

Para probar la existencia de los entornos tubulares necesitamos un teorema clásico de cálculo diferencial, el teorema de la función inversa.

**Teorema 2.1.1. (Teorema de la función inversa).** Sea  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación de clase  $C^k$ , con  $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , donde  $\Omega$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $p_0 \in \Omega$  tal que  $\det \text{Jac}F(p_0) \neq 0$ , donde  $\text{Jac}F$  es la matriz jacobiana de  $F$ . Entonces existe un entorno  $U \subset \Omega$  de  $p_0$  y un entorno  $V \subset \mathbb{R}^n$  de  $F(p_0)$  tal que  $F|_U : U \rightarrow V$  es un difeomorfismo de clase  $C^k$ .

Además, necesitamos un resultado de topología general y el concepto de **número de Lebesgue**:

**Teorema 2.1.2.** Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un recubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto  $(X, d)$ . Entonces existe un número  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in X$ , existe un  $\alpha \in A$  tal que  $B_d(x, \delta) \subset U_\alpha$ , donde  $B_d(x, \delta)$  es la bola abierta con centro  $x$  y radio  $\delta$  respecto a la distancia  $d$ .

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede consultar en [1, pág 69].  $\square$

**Definición 2.1.2.** Sea  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  un recubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto  $(X, d)$ . El mayor  $\delta > 0$  tal que, para todo  $x \in X$  podemos encontrar un  $\alpha \in A$  con  $B_d(x, \delta) \subset U_\alpha$ , se denomina **número de Lebesgue** del cubrimiento  $\mathcal{U}$ .

Entonces:

**Teorema 2.1.3. (Existencia de entornos tubulares).** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  la imagen de una curva plana, regular y simple  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^2$ . Entonces existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $N_\sigma(\varepsilon)$  es un entorno tubular de  $\sigma$  para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . En particular,  $N_\sigma(\varepsilon)$  es un entorno de  $C$ .

*Demostración.* Como  $\sigma$  es una curva regular podemos suponer que está parametrizada por el arco, de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \sigma'(s), \\ \mathbf{n}(s) &= J\sigma'(s).\end{aligned}$$

Por ser  $\sigma$  una curva de clase  $C^2$  en  $[a, b]$  podemos extenderla a una función de clase  $C^2$  en  $I \supset [a, b]$  con  $I$  abierto. Además, si  $\sigma$  es cerrada podemos extenderla de forma periódica a una aplicación definida en todo  $\mathbb{R}$ .

Tomando  $T = b - a > 0$  y  $I_0 = [a, b], I_1 = [a + T, a + 2T], \dots, I_k = [a + kT, a + (k + 1)T]$ . Si  $s \in I_k \Rightarrow a + kT \leq s \leq a + (k + 1)T \Rightarrow a \leq s - kT \leq a + T = b$ . Por tanto, podemos definir

$$\hat{\sigma}(s) = \sigma(s - kT)$$

de forma que  $\hat{\sigma}$  sigue siendo de clase  $C^2$ .

Podemos considerar, por tanto, un abierto  $I \supset [a, b]$  y extender  $\sigma$  a  $I$  de forma que sigue siendo de clase  $C^2$ . Para probar la existencia local de entornos tubulares definimos la función  $F: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  como:

$$F(s, x) = \sigma(s) + x\mathbf{n}(s), \quad \sigma \text{ ppa.}$$

de tal forma que  $N_\sigma(\varepsilon) = F([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$ .

Por hipótesis  $\sigma$  es de clase  $C^2$ , luego  $\mathbf{n}(s)$  será de clase  $C^1$  y por tanto,  $F$  es una función de clase  $C^1$ . Ahora, el determinante Jacobiano de  $F$  en  $(s, 0)$  es:

$$\det \begin{vmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_2 \\ n_1 & n_2 \end{vmatrix} = (\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 = 1$$

donde  $\mathbf{t} = (\sigma'_1, \sigma'_2)$  y  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ .

Por tanto, para todo  $s_0 \in [a, b]$  el Teorema 2.1.1 nos asegura que existen  $\delta_{s_0}, \varepsilon_{s_0} > 0$  tal que  $F$  restringida a  $(s_0 - \delta_{s_0}, s_0 + \delta_{s_0}) \times (-\varepsilon_{s_0}, \varepsilon_{s_0})$  es invertible, y por tanto,  $I_\sigma(p_1, \varepsilon_{s_0}) \cap I_\sigma(p_2, \varepsilon_{s_0}) = \emptyset$  para todo  $p_1 = \sigma(s_1) \neq \sigma(s_2) = p_2$  con  $s_1, s_2 \in (s_0 - \delta_{s_0}, s_0 + \delta_{s_0}) = U_{s_0}$ . Además,  $\sigma(U_{s_0})$  es un subconjunto abierto de  $C$  ya que su complementario  $\sigma([a, b] \setminus U_{s_0})$  es un subconjunto compacto de  $C$  y en consecuencia cerrado.

Por tanto, tenemos un cubrimiento abierto  $\{U_s\}_{s \in [a, b]}$  de  $[a, b]$ , que es un conjunto compacto y, en consecuencia, podemos extraer un subcubrimiento finito  $\{U_{s_1}, \dots, U_{s_r}\}$ . Entonces,  $\mathcal{U} = \{\sigma(U_{s_1}), \dots, \sigma(U_{s_r})\}$  es un cubrimiento por abiertos de  $C$ , que es compacto, y por tanto existe  $\delta > 0$  su número de Lebesgue. Queremos probar que  $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_k}, \delta/2\}$  es el buscado.

Para probarlo vamos a tomar  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  y dos puntos distintos  $p, q \in C$  y supongamos que existe  $p_0 \in I_\sigma(p, \varepsilon) \cap I_\sigma(q, \varepsilon)$ . Por la desigualdad triangular tenemos que:

$$\|p - q\| \leq \|p - p_0\| + \|p_0 - q\| < 2\varepsilon \leq \delta,$$

luego  $p$  y  $q$  tienen que estar en el mismo  $\sigma(U_{s_j})$ , pero como  $F$  es inyectiva en  $U_{s_j} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ , la condición  $I_\sigma(p, \varepsilon) \cap I_\sigma(q, \varepsilon) = \emptyset$  implica que  $p = q$ , lo cual es una contradicción.

Sea  $I_0 = U_{s_1} \cup U_{s_2} \cup \dots \cup U_{s_r}$ ,  $I_0$  es abierto y  $[a, b] \subset I_0$ . Por ser  $F$  una aplicación abierta en  $I_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  (es un difeomorfismo) e  $I_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  ser abierto, tenemos que  $F(I_0 \times (-\varepsilon, \varepsilon))$  es un abierto de  $C$ . En particular  $N_\sigma(\varepsilon) = F([a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$  es un entorno tubular.  $\square$

Como podemos ver en la prueba, la hipótesis de que  $\sigma$  es de clase  $C^2$  es esencial. Veamos el siguiente ejemplo en el que la curva no es de clase  $C^2$ :

**Ejemplo 2.1.1.** Fijado  $2 < \alpha < 3$ , sea  $\sigma_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva dada por  $\sigma_\alpha(s) = (s, f_\alpha(s))$ , donde  $f_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función:

$$f_\alpha(s) = \begin{cases} s^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{s} & \text{si } s > 0, \\ 0 & \text{si } s \leq 0 \end{cases}$$

Como

$$\frac{d}{ds} \left( s^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{s} \right) = \alpha s^{\alpha-1} \operatorname{sen} \frac{1}{s} - s^{\alpha-2} \cos \frac{1}{s},$$

la función  $f_\alpha$  y la curva  $\sigma_\alpha$  son de clase  $C^1$ , pero no son de clase  $C^2$ . Queremos ver que  $\sigma_\alpha$  (restringida a un intervalo cerrado que contiene el origen) no tiene un entorno tubular. En primer lugar, tenemos que el vector normal de  $\sigma_\alpha$  viene dado por

$$\mathbf{n}(s) = \frac{(s^{\alpha-2}(\cos \frac{1}{s} - \alpha s \operatorname{sen} \frac{1}{s}), 1)}{\sqrt{1 + s^{2(\alpha-2)}(\cos \frac{1}{s} - \alpha s \operatorname{sen} \frac{1}{s})^2}}$$

para  $s \geq 0$ , y por  $\mathbf{n}(s) = (0, 1)$  para  $s \leq 0$ .

Si la curva  $\sigma_\alpha$  tuviese un entorno tubular, existiría un  $\varepsilon > 0$  tal que, para todo  $s > 0$  suficientemente pequeño, el segmento paralelo a  $\mathbf{n}(s)$  conectando  $\sigma_\alpha(s)$  con el eje  $y$  debe tener longitud  $\varepsilon$  al menos. Pero la longitud de este segmento es

$$l(s) = s^{3-\alpha} \frac{\sqrt{1 + s^{2(\alpha-2)}(\cos \frac{1}{s} - \alpha s \operatorname{sen} \frac{1}{s})^2}}{|\cos \frac{1}{s} - \alpha s \operatorname{sen} \frac{1}{s}|},$$

y para todo  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar un valor de  $s$  arbitrario cercano a cero tal que  $l(s) < \varepsilon$ , lo cual es una contradicción.

Ahora tenemos las herramientas necesarias para probar la primera parte del teorema de la curva de Jordan:

**Proposición 2.1.1.** Sea  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana, regular y simple de clase  $C^2$  y  $C = \sigma([a, b])$  su imagen. Entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene a lo sumo dos componentes conexas siendo  $C$  la frontera de ambas.

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$  tal que  $N_\sigma(\varepsilon)$  es un entorno tubular de  $\sigma$ . Denotamos por  $T_+$  y  $T_-$  a los conjuntos de puntos de  $N_\sigma(\varepsilon)$  de la forma  $\sigma(s) + \delta \mathbf{n}(s)$  con  $\delta > 0$  y con  $\delta < 0$  respectivamente, donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal usual de la curva  $\sigma$ .

Es claro que  $N_\sigma(\varepsilon) \setminus C = T_+ \cup T_-$ . Además,  $T_+$  y  $T_-$  son conexos por arcos. Veámoslo para  $T_+$  ya que el argumento es el mismo para  $T_-$ .

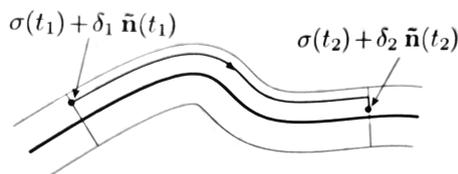


Figura 2.2:  $T_+$  y  $T_-$  son conexos por arcos.

Sean  $\sigma(t_1) + \delta_1 \mathbf{n}(t_1)$  y  $\sigma(t_2) + \delta_2 \mathbf{n}(t_2) \in T_+$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\delta_1 > \delta_2$ . El camino  $\alpha(s) = \sigma(t_2 + s(t_1 - t_2)) + (s(\delta_1 - \delta_2) + \delta_2) \mathbf{n}(t_2 + s(t_1 - t_2))$  con  $s \in [0, 1]$  cumple que

$$\alpha(0) = \sigma(t_2) + \delta_2 \mathbf{n}(t_2),$$

$$\alpha(1) = \sigma(t_1) + \delta_1 \mathbf{n}(t_1)$$

y además está íntegramente contenido en  $T_+$  ya que  $s(\delta_1 - \delta_2) + \delta_2 > 0$  para todo  $s \in [0, 1]$ .

Sea ahora  $K$  una componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Por ser  $\mathbb{R}^2$  conexo  $K$  no puede ser abierto y cerrado a la vez, luego  $\emptyset \neq \partial K$ . Además,  $\mathbb{R}^2$  es localmente conexo y por tanto las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  son abiertas.

Por otro lado, tenemos que  $\mathbb{R}^2 \setminus C = K \cup K'$ , con  $K'$  la unión de las componentes conexas distintas de  $K$ . Además,  $K'$  es abierto por ser unión de abiertos y por tanto,  $K \cup C = \mathbb{R}^2 \setminus K'$  es cerrado, luego  $\overline{K} \subset K \cup C$  y por tanto  $\partial K = \overline{K} - K \subset C$ .

Acabamos de ver que la frontera de  $K$  es un cerrado no vacío de  $C$ . Por tanto, para probar que la frontera de  $K$  coincide con  $C$  es suficiente ver que es un subconjunto abierto de  $C$ , ya que por ser  $C$  conexo los únicos conjuntos abiertos y cerrados son el vacío y el total y como hemos visto antes, la frontera de  $K$  es no vacía.

Sea  $p \in \partial K \subset C$  por el teorema de existencia de entornos tubulares (Teorema 2.1.3) existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $N_\sigma(\varepsilon)$  es un entorno tubular que contiene a  $p$ . Como hemos visto antes,  $N_\sigma(\varepsilon) = T_+ \cup T_- \cup C$  luego  $T_+, T_- \subset N_\sigma(\varepsilon) \setminus C \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ . Además, como hemos visto en la primera parte de la prueba,  $T_+$  y  $T_-$  son conexos y por tanto han de estar contenidos en alguna componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Supongamos que no están contenidos en  $K$ , es decir,  $T_+ \cap K = T_- \cap K = \emptyset$ , luego  $K \cap (T_+ \cup T_-) = \emptyset$ . Esto implica que  $K \cap (N_\sigma(\varepsilon) \setminus C) = \emptyset$  y debido a que  $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$  entonces,  $K \cap N_\sigma(\varepsilon) = \emptyset$ .

Hemos encontrado un entorno de  $p$  ( $N_\sigma(\varepsilon)$ ) tal que  $K \cap N_\sigma(\varepsilon) = \emptyset$ . Por tanto,  $p \notin \overline{K}$ , lo cual es una contradicción ya que  $p \in \partial K \subset \overline{K}$ . Luego, podemos suponer que  $T_+ \subset K \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ .

Veamos ahora que  $\partial K$  es un abierto en  $C$ . Tenemos que

$$N_\sigma(\varepsilon) \cap C = N_\sigma(\varepsilon) \cap \partial T_+ \subset \overline{T_+} \subset \overline{K} = K \cup \partial K. \text{ Por lo tanto, } N_\sigma(\varepsilon) \cap C \subset \partial K.$$

Como  $p \in N_\sigma(\varepsilon) \cap C$  y  $N_\sigma(\varepsilon) \cap C$  es abierto en  $C$ , dado un punto  $p \in \partial K$  podemos encontrar un entorno ( $N_\sigma(\varepsilon) \cap C$ ) de  $p$  contenido en  $\partial K$  y, en consecuencia,  $\partial K$  es abierto en  $C$ .  $\square$

## 2.2. El número de vueltas de un curva

En esta sección vamos a introducir la herramienta necesaria para completar el Teorema de la curva de Jordan. Para ello usaremos el grado de una curva, introducido

en el Capítulo 1. Finalmente, completaremos la demostración del Teorema de la curva de Jordan probando que el complemento de la imagen de una curva de Jordan de clase  $C^2$  tiene al menos dos componentes conexas.

Dada una curva continua, plana y cerrada, hay al menos dos formas de asociar a dicha curva valores en  $\mathbb{S}^1$ . En esta sección usaremos la siguiente:

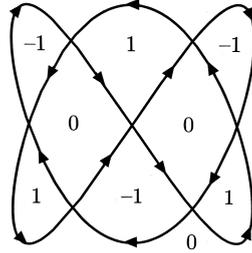


Figura 2.3: Número de vueltas de una curva.

**Definición 2.2.1.** Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana, continua y cerrada. Dado un punto  $p \notin \sigma([a, b])$  podemos definir  $\phi_p : [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  de la siguiente forma:

$$\phi_p(s) = \frac{\sigma(s) - p}{\|\sigma(s) - p\|}.$$

El **número de vueltas**  $\iota_p(\sigma)$  de  $\sigma$  con respecto a  $p$  es, por definición, el grado de  $\phi_p$ . Luego, el número de vueltas mide el número de veces que  $\sigma$  se mueve alrededor de  $p$ .

La Figura 2.3 muestra el número de vueltas de una curva respecto a varios puntos, calculado como veremos en el Ejemplo 2.2.1.

El siguiente lema es clave para completar la demostración del teorema:

**Lema 2.2.1.** Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva plana, continua y cerrada, y sea  $K$  una componente conexa del conjunto abierto  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \sigma([a, b])$ . Entonces:

- (I)  $\iota_{p_0}(\sigma) = \iota_{p_1}(\sigma)$  para todo par de puntos  $p_0, p_1 \in K$ .
- (II)  $U$  tiene una componente conexa no acotada  $K_0$ , y  $\iota_p(\sigma) = 0$  para cualquier punto  $p \in K_0$ .

*Demostración.* (I) Sea  $\alpha : [0, 1] \rightarrow K$  una curva tal que  $\alpha(0) = p_0$  y  $\alpha(1) = p_1$ .

Definimos  $\Phi : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  como

$$\Phi(t, s) = \frac{\sigma(s) - \alpha(t)}{\|\sigma(s) - \alpha(t)\|}.$$

Como la imagen de  $\alpha$  es disjunta de la imagen de  $\sigma$ , la aplicación  $\Phi$  está bien definida y es una homotopía de curvas cerradas entre  $\phi_{p_0}$  y  $\phi_{p_1}$ . Aplicando el Teorema 1.3.1 tenemos que  $\phi_{p_0}$  y  $\phi_{p_1}$  tienen el mismo grado y por tanto,  $\iota_{p_0}(\sigma) = \iota_{p_1}(\sigma)$ .

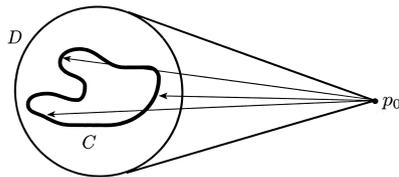


Figura 2.4: Ilustración de la prueba de (II).

- (II) Como  $[a, b]$  es compacto y  $\sigma$  es continua,  $\sigma([a, b]) \subset \mathbb{R}^2$  es compacto. Luego existe un disco cerrado  $D$  de radio  $R > 0$  con centro en el origen tal que  $\sigma([a, b]) \subset D$ . Por ser  $\mathbb{R}^2 \setminus D \subset U$  conexo, éste está contenido en una única componente conexa de  $U$  y por tanto,  $U$  tiene una única componente conexa no acotada.

Por otro lado, sea  $p_0 \in K_0 \setminus D$ , entonces los segmentos de recta que unen  $p_0$  con los puntos de la imagen de  $\sigma$  están contenidos en el sector de centro  $p_0$  cuyos lados están delimitados por las semirectas que salen de  $p_0$  tangentes a  $D$  (ver Figura 2.4). Esto implica que la imagen de  $\phi_{p_0}$  está contenida en un subconjunto propio de  $\mathbb{S}^1$  y por tanto, es homotópica a una curva constante (Ejemplo 1.3.4). Ahora, aplicando el Teorema 1.3.1 y que el grado de cualquier curva constante es cero, tenemos que  $\iota_{p_0}(\sigma) = 0$ .

□

Identificando  $\mathbb{R}^2$  con el plano complejo, la Proposición 1.3.4 nos permite obtener una fórmula para calcular el número de vueltas de una curva diferenciable. Esta fórmula simplificará algunas cuentas en la prueba del Teorema de la curva de Jordan.

**Lema 2.2.2.** Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva  $C^1$  a trozos, cerrada y continua, y  $p \notin C = \sigma([a, b])$ . Entonces, el número de vueltas de  $\sigma$  con respecto a  $p$  viene dado por

$$\iota_p(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p} ds.$$

*Demostración.* Es inmediato probar que

$$\frac{\phi'_p(s)}{\phi_p(s)} = i \operatorname{Im} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p};$$

entonces, por la Proposición 1.3.3, para terminar la prueba es suficiente comprobar que la parte real de  $\sigma'/(\sigma - p)$  es cero. Pero de hecho,

$$\frac{d}{ds} \log \|\sigma(s) - p\| = \operatorname{Re} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p},$$

y por tanto,

$$\int_a^b \operatorname{Re} \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p} ds = \log \|\sigma(b) - p\| - \log \|\sigma(a) - p\| = 0,$$

por ser  $\sigma$  cerrada. □

Para finalizar veamos un ejemplo práctico del cálculo del número de vueltas de una curva.

**Ejemplo 2.2.1.** La curva  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de la Figura 2.3 viene dada por

$$\sigma(s) = (\operatorname{sen}(2s), \operatorname{sen}(3s)).$$

La imagen  $C$  de la curva  $\sigma$  divide  $\mathbb{R}^2$  en nueve componentes conexas  $K_0, \dots, K_8$ , donde  $K_0$  es la componente no acotada.

Sea  $p_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ , nuestro objetivo es calcular  $\iota_{p_0}(\sigma)$ . Si  $p_0 \in K_0$ , sabemos que  $\iota_{p_0} = 0$  por el Lema 2.2.1. Luego, asumamos que  $p_0 = x_0 + iy_0$  pertenece a una de las otras componentes. Por el Lema 2.2.2

$$\iota_{p_0}(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma'}{\sigma - p} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3(\operatorname{sen}(2s) - x_0)\cos(3s) - 2(\operatorname{sen}(3s) - y_0)\cos(2s)}{(\operatorname{sen}(2s) - x_0)^2 - (\operatorname{sen}(3s) - y_0)^2} ds.$$

Evaluando esta integral obtenemos los valores del número de vueltas de  $\sigma$  que podemos ver en la Figura 2.3.

## 2.3. Demostración del teorema

Finalmente tenemos todo lo necesario para completar la prueba del teorema de la curva de Jordan.

**Teorema 2.3.1.** Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva regular de Jordan de clase  $C^2$ , y sea  $C = \sigma([a, b])$  su imagen. Entonces,  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene exactamente dos componentes conexas y  $C$  es la frontera común.

*Demostración.* Escogemos  $\varepsilon > 0$  tal que  $N_\sigma(\varepsilon)$  es un entorno tubular de  $\sigma$ , y denotamos por  $T_+$  (respectivamente  $T_-$ ) el conjunto de puntos de  $N_\sigma(\varepsilon)$  de la forma  $\sigma(s) + \delta \mathbf{n}(s)$ , con  $\delta > 0$  (respectivamente  $\delta < 0$ ), donde  $\mathbf{n}(s)$  es el vector normal de  $\sigma$ .

Sabemos por la Proposición 2.1.1 que el complementario de  $C$  tiene a lo sumo dos componentes conexas y que  $C$  es la frontera común. Por tanto, solo nos queda comprobar que hay al menos dos. Para ello elegimos  $s_0 \in (a, b)$  y una  $\delta$  tal que  $0 \leq \delta < \varepsilon$ . Sea  $p_{\pm\delta} = \sigma(s_0) \pm \delta \mathbf{n}(s_0)$ , claramente  $p_\delta \in T_+$  y  $p_{-\delta} \in T_-$  y, por ser  $T_\pm$  conexo, el valor de  $\iota_{p_{\pm\delta}}(\sigma)$  es independiente de  $\delta$  (Lema 2.2.1). En particular, el número entero

$$\Delta = \iota_{p_\delta}(\sigma) - \iota_{p_{-\delta}}(\sigma)$$

es independiente de  $\delta > 0$ . Por tanto, para concluir la prueba es suficiente ver que  $\Delta \neq 0$  ya que, por el Lema 2.2.1, sabemos que  $p_\delta$  y  $p_{-\delta}$  pertenecen a distintas componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ .

Ahora identificamos  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  y suponemos que  $\sigma$  está parametrizada por el arco. Entonces, el vector normal se obtiene aplicando una rotación de  $\frac{\pi}{2}$  radianes a  $\sigma'$ , lo cual es equivalente en el plano complejo a multiplicar por la unidad compleja  $i$ . En consecuencia, tenemos que  $\mathbf{n} = i\sigma'$ . Luego, para todo  $\delta > 0$  tenemos que

$$\frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} = \frac{2i\delta\sigma'(s_0)\sigma'(s)}{(\sigma(s) - \sigma(s_0))^2 + \delta^2\sigma'(s_0)^2}.$$

Como  $\sigma$  es de clase  $C^1$  y  $\sigma'(s_0) \neq 0$ , podemos escribir

$$\sigma(s) - \sigma(s_0) = (s - s_0)\sigma'(s_0)[1 + r(s)],$$

donde  $r(s) \rightarrow 0$  donde  $s \rightarrow s_0$ . Consecuentemente,

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} \\ &= \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2[1 + r(s)]^2 + \delta^2} \frac{\sigma'(s)}{\sigma'(s_0)} \\ &= \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} \frac{(s - s_0)^2 + \delta^2}{(s - s_0)^2[1 + r(s)]^2 + \delta^2} \left[1 + \frac{\sigma'(s) - \sigma'(s_0)}{\sigma'(s_0)}\right] \\ &= \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} + R(s), \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} \\ &\times [h(s) - r(s)(2 + r(s))(1 + h(s)) \frac{(s - s_0)^2}{(s - s_0)^2[1 + r(s)]^2 + \delta^2}], \end{aligned}$$

donde  $h(s) = (\sigma'(s) - \sigma'(s_0)) \setminus \sigma'(s_0) \rightarrow 0$  con  $s \rightarrow s_0$ . En particular, para todo  $\eta > 0$  existe  $\lambda > 0$  (independiente de  $\delta$ ) tal que

$$|R(s)| < \eta \frac{2\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2}$$

si  $|s - s_0| < \lambda$ .

Ahora elegimos un  $0 < \eta < 1/8$  y el correspondiente  $\lambda > 0$  y desarrollamos  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \iota_{p_\delta}(\sigma) - \iota_{p_{-\delta}}(\sigma) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^{s_0-\lambda} \left( \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0+\lambda}^b \left( \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} \left( \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} + R(s) \right) ds. \end{aligned}$$

Como hemos dicho antes,  $\Delta$  es un número entero independiente de  $\delta$ . Si hacemos tender  $\delta$  a cero en la parte derecha de la igualdad anterior las dos primeras integrales tienden a cero ya que sus argumentos no tienen ninguna singularidad salvo para  $s = s_0$ . Para la tercera integral, después del cambio de variable  $s - s_0 = \delta u$  tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} \left( \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} + R(s) \right) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\lambda/\delta}^{\lambda/\delta} \frac{1}{1 + u^2} du \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du$$

para  $\delta \rightarrow 0$ . Además,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} R(s) ds \right| < \frac{\eta}{\pi} \int_{-\lambda/\delta}^{\lambda/\delta} \frac{1}{1 + u^2} du < \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du = \eta.$$

Reuniéndolo todo, tenemos que para  $\delta$  suficientemente pequeño podemos estimar la diferencia  $\Delta - 1$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\Delta - 1| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_a^{s_0-\lambda} \left( \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} \right) ds \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{s_0+\lambda}^b \left( \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_\delta} - \frac{\sigma'(s)}{\sigma(s) - p_{-\delta}} \right) ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} \left( \frac{2i\delta}{(s - s_0)^2 + \delta^2} + R(s) \right) ds - 1 \right| \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2\pi} \left| \int_{s_0-\lambda}^{s_0+\lambda} R(s) ds \right| \leq 4\eta < \frac{1}{2}.$$

Pero  $\Delta$  es un número entero, luego  $\Delta = 1$  tal y como queríamos demostrar.  $\square$

**Nota 2.3.1.** El teorema de la curva de Jordan es válido para curvas continuas no necesariamente diferenciables. Además, la clausura de la componente conexa acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , siendo  $C$  la imagen de una curva de Jordan continua, es homeomorfa a un disco cerrado (*Teorema de Schönflies*). En los siguientes capítulos demostraremos ambos resultados, el Teorema de la curva de Jordan para curvas continuas y el Teorema de Schönflies.

**Nota 2.3.2.** El Teorema de la curva de Jordan describe una propiedad específica del plano, que no comparten todas las superficies. Una curva regular, cerrada y simple en una superficie no plana puede no dividir dicha superficie en dos componentes conexas. Es posible adaptar la noción de entorno tubular (ver [14, pág 237]) de tal forma que la prueba de la Proposición 2.1.1 sigue funcionando y por tanto, el complemento de la imagen de la curva tiene a lo sumo dos componentes conexas. Por otro lado, puede suceder que los  $T_+$  y  $T_-$  definidos en la prueba de la Proposición 2.1.1 pertenezcan a la misma componente conexa, que es lo que pasa en el toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (ver [1, pág 126]). En este caso el complemento de la imagen de la curva es conexo.

# Capítulo 3

## Teorema de la curva de Jordan para curvas continuas

En este capítulo daremos una demostración elemental del Teorema de la curva de Jordan debida a Thomassen (ver [15]). Dicha prueba se basa principalmente en un resultado sobre grafos planares el cual dice que el grafo completo bipartito  $K_{3,3}$  es no planar. A lo largo del capítulo introduciremos todas las herramientas teóricas necesarias para llegar a la demostración del teorema. En primer lugar, daremos la demostración del teorema para curvas de Jordan poligonales basada únicamente en argumentos topológicos. Posteriormente, introduciremos un marco teórico de grafos planares con el objetivo de demostrar que  $K_{3,3}$  no es planar. Posteriormente, una vez desarrolladas todas las herramientas, demostraremos el Teorema del arco de Jordan (el complemento de un arco de Jordan es conexo) y el Teorema de la curva de Jordan para curvas continuas. Para finalizar el capítulo, veremos las generalizaciones en dimensión mayor del Teorema de la curva de Jordan.

### 3.1. Teorema de la curva de Jordan para curvas poligonales

**Nota 3.1.1.** A lo largo del capítulo, por abuso de lenguaje, nos referiremos como curvas de Jordan y arcos de Jordan a las imágenes de dichos arcos y curvas. Esto simplificará de forma significativa la redacción de los resultados.

Empezamos definiendo las curvas que usaremos en la sección.

**Definición 3.1.1.** Un arco poligonal simple en el plano es un arco de Jordan formado por una yuxtaposición finita de segmentos de recta.

Pasamos a ver el Teorema de la curva de Jordan para curvas poligonales.

**Lema 3.1.1.** Si  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva poligonal, cerrada y simple, entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene exactamente dos componentes conexas con  $C$  como su frontera común.

*Demostración.* Primero demostraremos que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene a lo sumo dos componentes conexas. Procederemos por reducción al absurdo; supongamos que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene al menos tres componentes conexas.

Sean  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$  pertenecientes a diferentes componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  y un disco abierto  $D \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $D \cap C$  es un segmento de recta (y por tanto  $D \setminus C$  tiene dos componentes conexas). Como cada componente de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene a  $C$  como su frontera, para cada  $j = 1, 2, 3$  podemos encontrar una curva que sale de  $p_j$ , tan cercana a  $C$  como queramos, yendo de forma paralela a  $C$  hasta llegar a  $D$ . Como  $D \setminus C$  tiene dos componentes conexas, al menos dos de los  $p_j$ 's pueden ser conectados por una curva. Esto es una contradicción con que cada  $p_j$  pertenece a una componente conexa distinta. Por lo tanto  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.

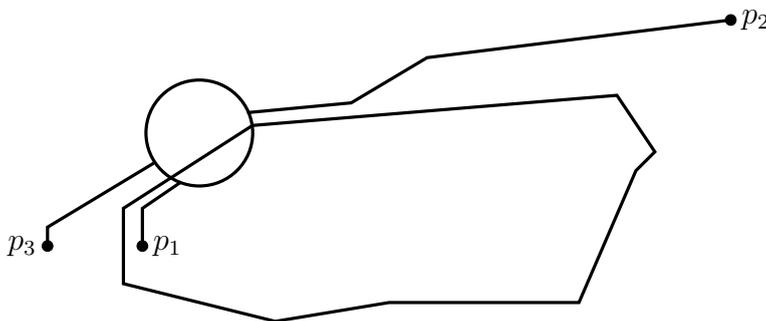
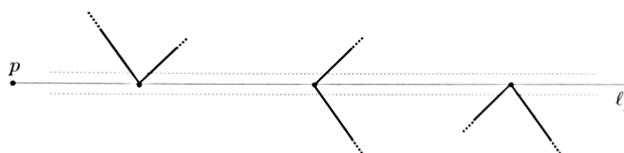


Figura 3.1: Ilustración de la prueba anterior.

Vamos a ver ahora que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es desconexo. Definimos la función  $i : \mathbb{R}^2 \setminus C \rightarrow \{0, 1\}$  de la siguiente forma: dado  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$ , denotamos por  $l_p$  la semirecta horizontal que va hacia la derecha partiendo desde  $p$ . Si  $l_p$  no contiene vértices de  $C$ , entonces  $i(p)$  es igual al número de intersecciones (módulo 2) de  $l_p$  con  $C$ . Si  $l_p$  contiene vértices de  $C$ , entonces  $i(p)$  es igual al número (módulo 2) de intersecciones con  $C$  de un segmento de recta paralelo a  $l_p$  tan cercano como queramos. La Figura 3.2 muestra los distintos casos que pueden ocurrir.

Figura 3.2: Definición de la función de paridad  $i$ .

La función  $i$  está claramente bien definida ya que si  $p = q$ , entonces  $i(p) = i(q)$  debido a que  $l_p = l_q$ . Por otro lado, por como se ha definido la función  $i$ , ésta es claramente continua y debido a la continuidad,  $i$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Como  $i$  toma el valor 0 en puntos suficientemente alejados de  $C$ , para probar que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es desconexo es suficiente comprobar que la función toma el valor 1 también. Para ello tomamos un punto  $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$  tal que la recta  $l_p$  interseca a  $C$  en puntos que no son vértices. Sea  $q_0 \in l_p \cap C$  el punto de la intersección más a la derecha, entonces  $i(q) = 1$  para todos los puntos  $q$  de  $l_p$  a la izquierda de  $q_0$  suficientemente próximos.

Pasamos ahora a demostrar que  $C$  es la frontera común de ambas componentes conexas. Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  las dos componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Como  $\mathbb{R}^2$  es localmente conexo  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  son abiertos de  $\mathbb{R}^2$ . Vamos ver que  $\Omega_2$  no contiene puntos límite de  $\Omega_1$ . Procedemos por reducción al absurdo: sea  $x \in \Omega_1$  un punto límite de  $\Omega_1$  y supongamos que  $x \in \Omega_2$ . Debido a esto  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  y como  $\mathbb{R}^2 \setminus C = \Omega_1 \cup \Omega_2$  sería conexo, lo cual es una contradicción.

Sea ahora  $x \in \overline{\Omega_1} \setminus \Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$  entonces  $x$  es un punto de acumulación y por tanto  $x \notin \Omega_2$ . Como  $x \in \mathbb{R}^2$  y  $x \notin \Omega_1, \Omega_2$ , entonces  $x \in C$  y por tanto,  $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_1 \subset C$  (respectivamente  $\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_2 \subset C$ )

Para probar la inclusión contraria, demostraremos que si  $x$  es un punto de  $C$  entonces cualquier entorno  $U$  de  $x$  corta al conjunto cerrado  $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_1$  y se seguirá que  $x$  pertenece al conjunto  $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_1$ .

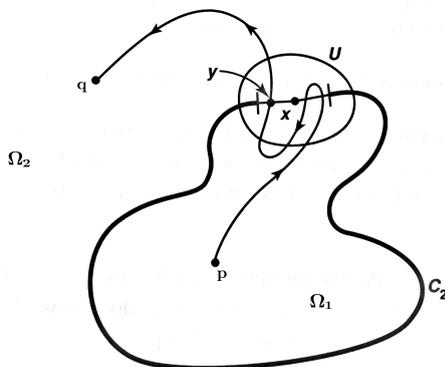


Figura 3.3: Imagen guía para la prueba.

Sea  $U$  un entorno de  $x$  en  $\mathbb{R}^2$ . Podemos dividir  $C$  en dos arcos  $C_1$  y  $C_2$ , que solo tienen en común sus puntos extremos. Además, podemos tomar  $C_1$  tal que sea suficientemente pequeño para que esté contenido en  $U$ . Por otro lado, sean  $p$  y  $q$  dos puntos de  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  respectivamente. Como  $C_2$  no separa  $\mathbb{R}^2$ , podemos encontrar un arco  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus C_2$  que conecta  $p$  con  $q$ , donde  $I$  es un intervalo abierto. El conjunto  $\alpha(I)$  debe contener un punto  $y$  de  $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_1$ , pues de lo contrario sería un conjunto conexo contenido en la unión de los conjuntos abiertos y disjuntos  $\Omega_1$  y  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega_1}$  e intersectando a ambos. El punto  $y$  pertenece a  $C$  ya que como hemos visto antes  $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_1 \subset C$ . Como el arco  $\alpha$  no corta a  $C_2$ , el punto  $y$  debe, por tanto, pertenecer al arco  $C_1$ , que está contenido en el conjunto abierto  $U$ . Entonces,  $U$  interseca a  $\overline{\Omega_1} \setminus \Omega_1$  en  $y$ , como queríamos probar.  $\square$

**Nota 3.1.2.** Como se puede ver, en la prueba de que  $C$  es la frontera común de las componentes conexas no hemos usado que  $C$  es una curva poligonal. Debido a esto, en la Figura 3.3 aparece una curva de Jordan que no es poligonal y de esta forma podremos usarla como guía en el caso más general del Teorema de la curva de Jordan.

Pasamos a definir los conceptos de interior y exterior de una curva de Jordan:

**Definición 3.1.2.** El **exterior** de una curva de Jordan  $C \subset \mathbb{R}^2$ , denotado por  $\text{ext}(C)$ , es la única componente conexa no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Por otro lado, el **interior**, denotado por  $\text{int}(C)$ , es la unión de las componentes conexas acotadas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ .

El siguiente lema es clave para demostrar que  $K_{3,3}$  no es planar:

**Lema 3.1.2.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva poligonal, cerrada y simple. Dado un arco poligonal simple  $P \subset \text{int}(C)$  uniendo dos puntos  $p_1, p_2 \in C$  e intersectando  $C$  únicamente en dichos puntos. Entonces,  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$  tiene exactamente tres componentes

conexas con fronteras  $C$ ,  $P_1 \cup P$  y  $P_2 \cup P$ , respectivamente. En particular, toda curva en  $\overline{\text{int}(C)}$  uniendo un punto de  $P_1 \setminus \{p_1, p_2\}$  con un punto de  $P_2 \setminus \{p_1, p_2\}$  interseca a  $P$ .

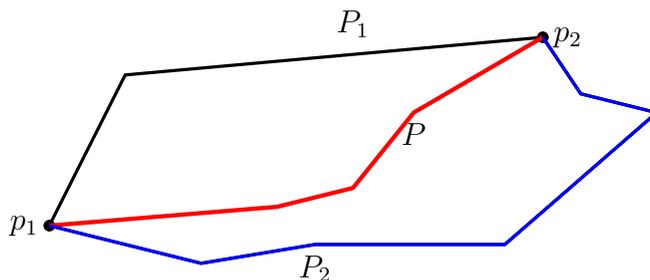


Figura 3.4: Ilustración del enunciado.

*Demostración.* Sabemos que una de las componentes conexas es  $\text{ext}(C)$  luego tenemos que demostrar que  $\text{int}(C) \setminus P$  tiene dos componentes conexas. Para ello podemos proceder como en el lema anterior: supongamos que  $\text{int}(C) \setminus P$  tiene tres componentes conexas y sean  $p_1, p_2, p_3 \in \text{int}(C) \setminus P$  pertenecientes a distintas componentes.

Como  $\text{int}(C)$  es abierto y  $P$  es una poligonal simple podemos encontrar un disco  $D \subset \text{int}(C)$  tal que  $D \cap P$  es un segmento de recta. De igual forma que en el lema anterior, para todo  $j = 1, 2, 3$  podemos encontrar una curva contenida en  $\text{int}(C)$  desde cada  $p_j$  hasta  $D$ . Debido a que  $D \cap C$  tiene dos componentes conexas podemos unir dos de los  $p_j$ 's mediante una curva, lo cual es una contradicción con que cada uno pertenece a una componente conexa distinta.

Para completar la demostración es suficiente probar que  $\text{int}(C) \setminus P$  es desconexo. Para ello se procede de igual forma que en el lema anterior con la función de paridad  $i$ .

Una vez demostrado que  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$  tiene tres componentes conexas, para probar que sus respectivas fronteras son  $C$ ,  $P_1 \cup P$  y  $P_2 \cup P$  es suficiente con aplicar el lema anterior a  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P)$  y a  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_2 \cup P)$  ya que es claro que la frontera de  $\text{ext}(C)$  es  $C$ .

Pasamos ahora a demostrar la última parte del lema. Sea  $\alpha : I \rightarrow \overline{\text{int}(C)}$  tal que

$$\alpha(0) = p \in P_1 \setminus \{p_1, p_2\},$$

$$\alpha(1) = q \in P_2 \setminus \{p_1, p_2\}.$$

Supongamos que  $\alpha$  no interseca a  $P$ , es decir,  $\alpha(I) \cap P = \emptyset$ , entonces  $\alpha(I) \subset \overline{\text{int}(C)} \setminus P$ . Como  $\overline{\text{int}(C)} \setminus P$  tiene dos componentes conexas,  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ , y  $\alpha(I)$  es conexo, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\alpha(I) \subset \Omega_1$ . Por tanto,  $\alpha$  es una curva uniendo puntos que están en distintas componentes conexas contenida en una única componente conexa, lo cual es una contradicción.  $\square$

## 3.2. Grafos planares

Como hemos dicho antes, vamos a dar una prueba del Teorema de la curva de Jordan basada principalmente en que el grafo  $K_{3,3}$  es no planar. Es por ello que necesitamos introducir un marco teórico sobre grafos planares para poder demostrar dicho resultado.

Como corolario de este resultado obtendremos que el complemento de una curva de Jordan es desconexo, el cual será la primera parte de la demostración que daremos en la sección posterior. Además, desarrollaremos en esta sección otros resultados complementarios sobre grafos (Lema 3.2.2, Lema 3.2.3 y Lema 3.2.4) que serán usados en las demostraciones de los teoremas de la sección posterior (Teorema 3.3.1 y Teorema 3.3.2).

A continuación vamos a introducir un concepto que dota de estructura de espacio topológico a un grafo.

**Definición 3.2.1.** Una **realización** de un grafo  $G$  es un espacio topológico  $X$  junto con un subconjunto finito de puntos  $V_X(G)$ , en correspondencia biyectiva con los vértices de  $G$ , y un conjunto finito  $E_X(G)$  de arcos de Jordan en  $X$ , en correspondencia biyectiva con las aristas de  $G$ , satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (a)  $X$  viene dado por la unión de la imagen de los arcos de Jordan de  $E_X(G)$ .
- (b) Si  $l \in E_X(G)$  corresponde a  $\{v, w\} \in E(G)$ , entonces  $l$  es un arco de Jordan uniendo el punto  $p_v \in V_X(G)$ , correspondiente a  $v$ , con  $p_w \in V_X(G)$ , correspondiente a  $w$ . Denotaremos  $l = p_v p_w$ .
- (c) Dos elementos distintos de  $E_X(G)$  intersecan a lo sumo en los puntos inicial o final.

Diremos que un grafo  $G$  es **planar** si admite una realización como subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ . En este caso, por abuso de lenguaje, nos referiremos como grafo planar a su realización en el plano.

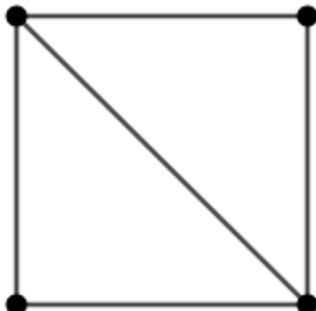
**Ejemplo 3.2.1.**

Figura 3.5: Ejemplo de grafo planar.

Vamos a ver el siguiente resultado que nos asegura que todo grafo planar admite una realización usando arcos poligonales:

**Lema 3.2.1.** Todo grafo planar  $G$  admite una realización  $X_0 \subset \mathbb{R}^2$  tal que los elementos de  $E_X(G)$  son arcos poligonales.

*Demostración.* Sea  $X \subset \mathbb{R}^2$  una realización de  $G$ . Para todo  $p \in V_X(G)$  escogemos un disco  $D_p \subset \mathbb{R}^2$  con un radio suficientemente pequeño para que solo interseccione a  $X$  en las aristas incidentes en  $p$ . Como  $V_X(G)$  es finito podemos asumir que  $D_p \cap D_q = \emptyset$  si  $p \neq q$ .

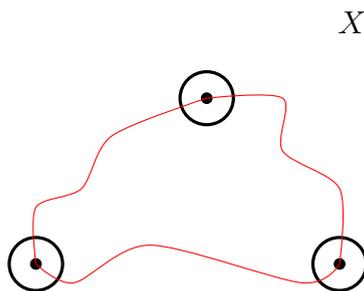


Figura 3.6: Ejemplo de la afirmación anterior.

Para toda  $pq \in E_X(G)$ , sea  $C_{pq} \subset pq$  un arco de Jordan uniendo  $\partial D_p$  con  $\partial D_q$  y solo intersecando  $\partial D_p \cup \partial D_q$  en los extremos. En primer lugar, sustituimos  $pq \setminus C_{pq}$  por dos segmentos, uno uniendo  $p$  con  $C_{pq} \cap \partial D_p$  y otro uniendo  $q$  con  $C_{pq} \cap \partial D_q$ . Como la distancia entre dos arcos de la forma  $C_{pq}$  es estrictamente positiva podemos

reemplazarlos por poligonales disjuntas contenidas en  $\mathbb{R}^2 \setminus \cup_{p \in V_X(G)} D_p$  obteniendo de esta forma la realización buscada.

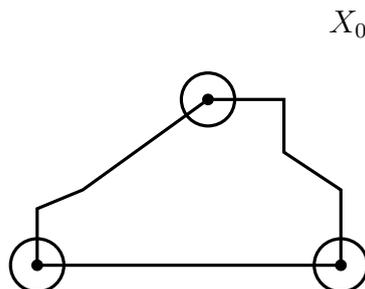


Figura 3.7: Ilustración de la afirmación anterior.

□

Ahora tenemos todas las herramientas necesarias para probar el resultado fundamental de esta sección.

**Proposición 3.2.1.**  $K_{3,3}$  no es planar.

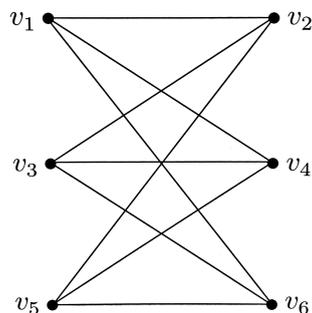


Figura 3.8:  $K_{3,3}$ .

*Demostración.* Las aristas de  $K_{3,3}$  vienen dadas por el ciclo  $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_1$ , añadiendo las aristas  $\{v_1, v_4\}$ ,  $\{v_2, v_5\}$  y  $\{v_3, v_6\}$ . Vamos a proceder por reducción al absurdo: supongamos que existe una realización  $X \subset \mathbb{R}^2$  de  $K_{3,3}$ . Por el Lema 3.2.1, podemos suponer que los elementos de  $E_X(G)$  correspondientes a las aristas del ciclo forman una curva poligonal cerrada  $C$ . Sea  $l \in E_X(G)$  correspondiente a la arista  $\{v_1, v_4\}$ ;  $l$  es un arco de Jordan uniendo los puntos  $p_{v_1}$  y  $p_{v_4}$  pertenecientes a  $C$ . Dicho arco de Jordan está contenido en  $\text{int}(C)$  y por el Lema 3.1.2, cualquier curva en  $\text{int}(C)$  uniendo un punto de  $\{v_2, v_3\}$  con un punto de  $\{v_5, v_6\}$  interseca a  $l$ .

Sea  $l' \in E_X(G)$  el elemento correspondiente a la arista  $\{v_2, v_5\}$ ; entonces  $l'$  interseca a  $l$ , lo cual es una contradicción con que  $K_{3,3}$  sea planar. □

Podemos obtener como corolario la primera parte del teorema.

**Corolario 3.2.1.** Si  $C \subset \mathbb{R}^2$  es una curva de Jordan, entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es disconexo.

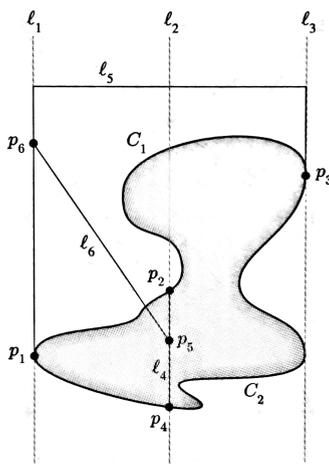


Figura 3.9: Imagen para ilustrar la demostración.

*Demostración.* Sabemos que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene al menos una componente conexa,  $\text{ext}(C)$ , luego para ver que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es disconexo es suficiente comprobar que  $\text{int}(C)$  es no vacío.

Sea  $l_1$  un segmento de recta vertical que interseca a  $C$  de tal forma que  $C$  está estrictamente contenido en el semiplano a la derecha de  $l_1$ . De igual forma  $l_3$  es un segmento de recta vertical que interseca a  $C$  de forma que  $C$  está contenido estrictamente en el semiplano a la izquierda de  $l_3$ . Sea ahora  $p_j \in C \cap l_j$   $j = 1, 3$  el punto con la coordenada "y" máxima y denotamos como  $C_1$  y  $C_2$  los dos arcos contenidos en  $C$  uniendo  $p_1$  y  $p_3$ . Sea ahora  $l_2$  un segmento de recta vertical tal que  $l_2 \cap C_1$  y  $l_2 \cap C_2$  son disjuntos. Por ser compactos y disjuntos podemos encontrar en  $l_2$  un subarco  $l_4$  uniendo  $C_1$  con  $C_2$  e intersectando a  $C$  en los puntos extremos que denotaremos como  $p_2$  y  $p_4$ . Ahora, sea  $l_5$  un arco poligonal simple uniendo  $p_1$  y  $p_3$  de la siguiente forma:  $l_5$  parte desde  $p_1$  a través de  $l_1$  y une  $l_1$  con  $l_3$  de manera que  $l_5 \cap C = \emptyset$  para acabar uniendo  $p_1$  con  $p_3$  a través de  $l_3$  (ver Figura 3.9). Por la construcción de  $l_5$ , éste está contenido en  $\text{ext}(C)$  (excepto en  $p_1$  y  $p_3$ ).

Para completar la demostración veamos que  $l_4$  está contenido en  $\text{int}(C)$ . Procedemos por reducción al absurdo: supongamos que  $l_4$  está contenido en  $\text{ext}(C)$ , entonces podríamos encontrar un arco simple  $l_6$  uniendo un punto interior,  $p_5$ , de  $l_4$  con un punto interior,  $p_6$ , de  $l_5$  en  $\text{ext}(C)$ . De esta forma,  $C \cup l_4 \cup l_5 \cup l_6$  sería una realización de  $K_{3,3}$  en el plano con  $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$  sus vértices. Por la Proposición 3.2.1, esto es una contradicción que viene de suponer que  $l_4$  no está en  $\text{int}(C)$ .  $\square$

Para continuar necesitamos algunos resultados y definiciones de teoría de grafos.

**Definición 3.2.2.** Un grafo  $G$  es **conexo** si cada par de vértices puede ser unido por un camino en  $G$ . Diremos que  $G$  es **2-conexo** si  $G - \{v\}$  es conexo para todo  $v \in V(G)$ .

**Nota 3.2.1.** A partir de la definición, es claro que un grafo es conexo si y solo si cada realización del grafo es conexa por caminos.

El siguiente lema caracteriza los grafos 2-conexos.

**Lema 3.2.2.** Sea  $H$  un subgrafo 2-conexo de una grafo  $G$  2-conexo. Entonces es posible construir una sucesión finita  $H = G_0, G_1, \dots, G_k = G$  de subgrafos de  $G$  tal que  $G_j$  es obtenido de  $G_{j-1}$  añadiendo un camino que une dos vértices distintos de  $G_{j-1}$  mientras que el resto de vértices del camino no pertenecen  $G_{j-1}$ .

*Demostración.* La demostración se puede consultar en [1, pág 112]. □

Vamos a ver un resultado sobre las componentes conexas de un grafo 2- conexo.

**Lema 3.2.3.** Sea  $G$  un grafo 2-conexo planar, y denotamos por  $v(G)$  y  $e(G)$  el número de vértices y aristas de  $G$ . Si  $X \subset \mathbb{R}^2$  es una realización de  $G$  cuyas aristas son arcos poligonales, entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  tiene exactamente  $e(G) - v(G) + 2$  componentes conexas, cada una de ellas rodeada por una curva poligonal, cerrada y simple en  $X$ .

*Demostración.* Sea  $C$  una curva poligonal cerrada en  $X$ . Si  $X = C$ , entonces  $X$  es un ciclo y, en consecuencia,  $e(G) = v(G)$ . Por el Lema 3.1.1, sabemos que  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  tiene dos componentes conexas. Añadiendo que  $e(G) = v(G)$ , obtenemos el resultado. Por otro lado, si  $X$  no coincide con  $C$ , podemos obtener  $X$  de  $C$  añadiendo caminos como en el lema anterior. Cada camino incrementa la diferencia entre el número de aristas y de vértices en uno, y subdivide (por el Lema 3.1.2) una componente existente en dos componentes de tal forma que su frontera sigue siendo una curva poligonal cerrada y simple en  $X$ . Entonces, por inducción en el número de caminos que añadimos obtenemos el resultado. □

Ahora podemos definir el concepto de **cara** de un grafo planar.

**Definición 3.2.3.** Si  $X \subset \mathbb{R}^2$  es una realización de un grafo planar, las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  son denominadas las **caras** de  $X$ . En particular, la cara no acotada es denominada la **cara exterior** y, si  $X$  es 2-conexo, la frontera de la cara exterior es el **ciclo exterior**.

**Nota 3.2.2.** Si  $X_1$  y  $X_2$  son grafos planares cuyas aristas son arcos poligonales, entonces  $X_1 \cup X_2$  es un grafo planar, teniendo como vértices los de  $X_1$  y  $X_2$  y las intersecciones de las aristas de ambos. Además, si  $X_1$  y  $X_2$  son grafos 2-conexos y tienen al menos dos puntos en común, entonces  $X_1 \cup X_2$  también es un grafo 2-conexo. A partir de ahora, cuando hablemos de unión de grafos planares nos referiremos a este grafo.

Necesitamos un último resultado técnico:

**Lema 3.2.4.** Sean  $X_1, \dots, X_k \subset \mathbb{R}^2$  grafos planares 2-conexos cuyas aristas son arcos poligonales. Asumimos como hipótesis que, para  $j = 2, \dots, k-1$ , cada  $X_j$  interseca en al menos dos puntos a  $X_{j-1}$  y  $X_{j+1}$  y no interseca con el resto de los  $X_i$ . Asumimos también que  $X_1 \cap X_k = \emptyset$ . Entonces, la intersección de las caras exteriores de  $X_1 \cup X_2, X_2 \cup X_3, \dots, X_{k-1} \cup X_k$  está contenida en la cara exterior de  $X_1 \cup \dots \cup X_k$ .

*Demostración.* Supongamos que  $p$  es un punto en una cara acotada de  $X_1 \cup \dots \cup X_k$ . Como  $X_1 \cup \dots \cup X_k$  es 2-conexo (Nota 3.2.2) se sigue del Lema 3.2.3 que existe un ciclo  $C$  de tal forma que  $p \in \text{int}(C)$ . Elegimos  $C$  tal que está en  $X_i \cup X_{i+1} \dots \cup X_j$  y  $j - i$  es mínimo. Nuestro objetivo es probar que  $j - i \leq 1$ . Para ello vamos a asumir que  $j - i \geq 2$  y llegaremos a una contradicción. De entre todos los ciclos contenidos en  $X_i \cup X_{i+1} \dots \cup X_j$  que contienen a  $p$  en su interior, podemos suponer que hemos escogido  $C$  de tal forma que el número de aristas en  $C$  que no están en  $X_{j-1}$  es mínimo. Como  $C$  interseca a  $X_j$  y a  $X_{j-2}$ ,  $C$  tiene al menos dos segmentos maximales disjuntos en  $X_{j-1}$ . Sea  $P$  uno de ellos y  $P'$  el camino más corto en  $X_{j-1}$  desde  $P$  a  $C - v(P)$ ;  $P$  divide  $C$  en dos arcos  $P_1$  y  $P_2$  que contienen segmentos que no están en  $X_{j-1}$ . Uno de los ciclos  $P' \cup P_1$  o  $P' \cup P_2$  contiene a  $P$  en su interior y tiene menos aristas no contenidas en  $X_{j-1}$  que  $C$ . Esto es una contradicción con la minimalidad de  $C$ , luego  $C$  no puede estar contenido en la unión  $X_i \cup X_{i+1} \dots \cup X_j$  con  $j - i \geq 2$ .  $\square$

### 3.3. Demostración del teorema

Ahora disponemos de todas las herramientas necesarias para probar el teorema del arco de Jordan:

**Teorema 3.3.1.** Si  $L \subset \mathbb{R}^2$  es un arco de Jordan, entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus L$  es conexo. Además, cada par de puntos  $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  pueden ser unidos mediante un arco poligonal simple en  $\mathbb{R}^2 \setminus L$ .

*Demostración.* Sean  $p, q \in \mathbb{R}^2 \setminus L$  y  $0 < 3\delta < \min\{d(p, L), d(q, L)\}$ , donde  $d$  es la distancia euclídea. Ahora, dividimos  $L$  en un número finito de subarcos  $L_1, \dots, L_k$  con diámetro menor que  $\delta$  para todo  $j = 1, \dots, k$  y denotamos por  $p_j$  y  $p_{j+1}$  a los puntos extremos de  $L_j$ . Sea  $\delta' = \min\{d(L_i, L_j) : |i - j| \geq 2\}$ ; como el diámetro de cada arco es menor que  $\delta$  es claro que  $\delta' \leq \delta$ .

Vamos a dividir cada  $L_i$  en subarcos  $L_{i1}, \dots, L_{ik}$  con un diámetro menor que  $\delta'/4$  y denotamos por  $p_{i,j}$  y  $p_{i,j+1}$  a los puntos extremos de  $L_{ij}$ .

Sea ahora  $X_i$  el grafo planar que consiste en la unión de las fronteras de los cuadrados centrados en  $p_{i,j}$  con lados de longitud  $\delta'/2$ . Entonces los grafos  $X_1, \dots, X_k$  satisfacen las hipótesis del Lema 3.2.4, y además,  $X_i \cup X_{i+1}$  está contenido en el

interior de un disco con centro  $p_i$  y radio  $5\delta'/2$ .

Por otro lado,  $3\delta < \min\{d(p, L), d(q, L)\}$ , luego la distancia de  $p_i$  a  $p$ , y a  $q$ , es mayor que  $3\delta$  y por tanto,  $p$  y  $q$  están fuera del disco centrado en  $p_i$  con radio  $3\delta$ . Esto significa que ambos puntos pertenecen a la cara exterior de  $X_i \cup X_{i+1}$ .

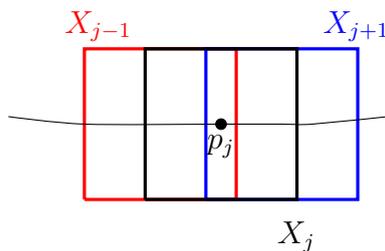


Figura 3.10: Grafos planares  $X_{j-1}$ ,  $X_j$  y  $X_{j+1}$ .

Como este argumento es válido para cualquier  $i$ , tenemos que  $p$  y  $q$  pertenecen a la intersección de las caras exteriores de  $X_1 \cup X_2$ ,  $X_2 \cup X_3, \dots, X_{k-1} \cup X_k$  y por el Lema 3.2.4, ambos puntos están en la cara exterior de  $X_1 \cup \dots \cup X_k$ . Por definición sabemos que las caras de un grafo planar  $X$  son las componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus X$ . Como  $p$  y  $q$  pertenecen a la misma cara, ambos pueden ser conectados por un arco poligonal simple.  $\square$

Nuestro objetivo es deducir a partir de este resultado el teorema de la curva de Jordan. Para ello necesitamos introducir el concepto de punto accesible.

**Definición 3.3.1.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto cerrado y  $\Omega$  una componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Decimos que un punto  $p \in C$  es **accesible** desde  $\Omega$  si existe un arco poligonal simple desde un punto  $q \in \Omega$  a  $p$  contenido en  $\Omega$  (excepto en uno de los extremos).

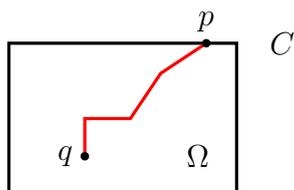


Figura 3.11: Ejemplo de punto accesible desde un conjunto cerrado.

Necesitamos un último lema antes del teorema:

**Lema 3.3.1.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan, y  $\Omega$  una componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . El conjunto de puntos de  $C$  accesibles desde  $\Omega$  es denso en  $C$ .

*Demostración.* Dado el conjunto  $A = \{q \in C \mid q \text{ es accesible desde } \Omega\}$  nuestro objetivo será demostrar que su intersección con cualquier subconjunto abierto de  $C$  es distinta del vacío.

Sea  $q \in \Omega$  y  $C_1 \subset C$  un subarco abierto de  $C$ , entonces  $C \setminus C_1$  es un arco de Jordan. Por el Teorema 3.3.1  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus C_1)$  es conexo y además dos puntos cualesquiera de  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus C_1)$  pueden ser unidos por una poligonal simple que no interseca a  $C \setminus C_1$ .

Como  $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \setminus C \subset \mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus C_1)$ , existe un arco poligonal simple en  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \setminus C_1)$  uniendo  $q$  con un punto de una componente conexa cualquiera de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  distinta de  $\Omega$ . Este arco interseca a  $C_1$  en un punto el cual, como hemos visto, es accesible desde  $\Omega$ . □

Finalmente hemos alcanzado la prueba del teorema la curva de Jordan.

**Teorema 3.3.2.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan. Entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene exactamente dos componentes conexas y  $C$  es la frontera común.

*Demostración.* Para completar la demostración del teorema tenemos que probar que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene a lo sumo dos componentes conexas, ya que por el Corolario 3.2.1 sabemos que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es desconexo.

Procedemos por reducción al absurdo: supongamos que  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  tiene al menos tres componentes conexas  $\Omega_1, \Omega_2$  y  $\Omega_3$ . Sea  $p_j \in \Omega_j$   $j = 1, 2, 3$  y  $C_1, C_2$  y  $C_3$  subarcos de  $C$  disjuntos dos a dos. Por el Lema 3.3.1, sabemos que todo subarco abierto de  $C$  tiene puntos accesibles, por tanto, existe un arco poligonal simple  $L_{ij}$  desde  $p_i$  a  $C_j$ . Además, podemos tomar los  $L_{ij}$  de forma que  $L_{ij} \cap L_{ij'} = \{p_i\}$   $j \neq j'$ . Veámoslo:

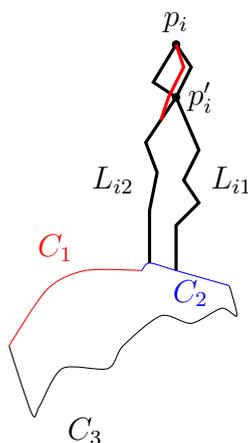


Figura 3.12: Modificación del arco poligonal  $L_{i2}$ .

Si partiendo desde  $C_2$  hasta  $p_i$ ,  $L_{i2}$  interseca con  $L_{i1}$  en un punto  $p'_i \neq p_i$ , podemos modificar  $L_{i2}$  substituyendo el último segmento desde  $p_i$  a  $p'_i$  por un nuevo segmento tan cercano como queramos al de  $L_{i1}$  pero que no pase por  $p'_i$  (ver Figura 3.12). De esta forma,  $L_{i2}$  solo tiene en común con  $L_{i1}$  y  $L_{i3}$  al punto  $p_i$ . Además, repitiendo el mismo procedimiento, también podemos modificar cualquier  $L_{ij}$  si fuera necesario.

Por otro lado, podemos asumir que  $L_{ij} \cap L_{i'j} = \emptyset$  si  $i \neq i'$ , ya que, si fuese de otro modo, podríamos modificar uno de los dos de la misma forma que antes para que su intersección sea vacía. Nuestro objetivo es construir a partir de lo anterior una realización planar de  $K_{3,3}$  y obtener así una contradicción.

Sean  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  puntos de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  respectivamente en los que inciden los  $(L_{ij})_{i,j=1}^3$ . Como  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son disjuntos dos a dos, es claro que los  $q_j$  para  $j = 1, 2, 3$  son distintos. Por tanto, hemos obtenido una realización planar en la que cada  $q_j$  está unido con  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  mediante poligonales simples cuya intersección es vacía, lo cual es una realización planar de  $K_{3,3}$ .

Finalmente, para demostrar que  $C$  es la frontera común de las componentes conexas se procede de igual forma que en el Lema 3.1.1.  $\square$

### 3.4. Generalizaciones del teorema en dimensión mayor

En esta sección intentaremos esbozar las ideas que hay detrás de las generalizaciones del teorema en dimensión  $n$ , así como algunos contraejemplos de superficies en las que no se cumple. Empezaremos con un caso que se deduce directamente del Teorema 3.3.2.

**Teorema 3.4.1.** Un subespacio de  $\mathbb{S}^2$ , homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ , separa  $\mathbb{S}^2$  en dos componentes conexas.

*Demostración.* Esto se deduce de que  $\mathbb{S}^2$  menos un punto (proyección estereográfica, ver [4, pág 78]) es homeomorfo al plano, y  $\mathbb{S}^1$  es homeomorfo a  $C$  siendo  $C$  una curva de Jordan.

Para ver una demostración más detallada del teorema anterior se puede consultar [14, pág 430]  $\square$

Veamos el siguiente ejemplo:

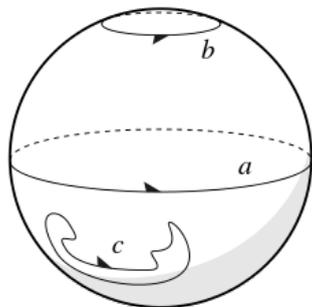


Figura 3.13: Curvas de Jordan en la esfera.

**Ejemplo 3.4.1.** Como podemos ver en la Figura 3.13, Las curvas  $a$ ,  $b$  y  $c$  son Curvas de Jordan (y en particular homeomorfas a  $\mathbb{S}^1$ ) que separan la esfera en dos componentes conexas.

En el siguiente ejemplo podemos ver una superficie en la que el Teorema de la curva de Jordan no se cumple:

**Ejemplo 3.4.2.** Consideramos el toro  $\mathbb{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$  y  $C$  la curva de Jordan de color rojo que aparece en la Figura 3.14. Como podemos ver en dicha figura,  $\mathbb{T}^2 \setminus C$  es conexo por caminos y por tanto, la curva no separa  $\mathbb{T}^2$  en dos componentes conexas.

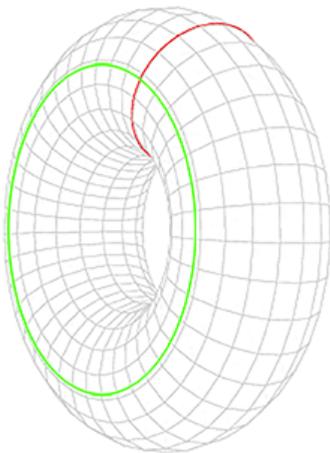


Figura 3.14: Curvas de Jordan en el toro.

El Teorema 3.4.1 se puede generalizar para dimensión  $n$ :

**Teorema 3.4.2.** Si  $S$  es un subespacio de  $\mathbb{S}^n$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $S$  separa  $\mathbb{S}^n$  en dos componentes conexas.

*Demostración.* La prueba de este resultado se puede consultar en [8, pág 169]  $\square$

Una vez visto el caso de  $\mathbb{S}^n$ , es natural preguntarse que ocurre en  $\mathbb{R}^n$  para un  $n > 2$  arbitrario. Esta situación es abordada en el teorema de separación de Jordan-Brower:

**Teorema 3.4.3.** Sea  $X$  una hipersuperficie compacta y conexa embebida en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $X$  separa  $\mathbb{R}^n$  en dos componentes conexas. Además,  $X$  es la frontera común de ambas.

*Demostración.* Las ideas de la prueba son similares a las usadas en el Capítulo 2 para demostrar el Teorema de la curva de Jordan. En primer lugar, se generaliza el concepto de número de vueltas de una curva para dimensión  $n$ . Usando esta herramienta se prueba que el complemento de  $X$  tiene a la sumo dos componentes conexas.

Posteriormente, se prueba que si dos puntos están en la misma componente conexa, entonces el número de vueltas de la curva alrededor de ellos es el mismo (Lema 2.2.1). Usando esto último y dos propiedades de dicha generalización del número de vueltas de una curva, se completa la primera afirmación demostrando que el complemento de  $X$  es desconexo.

Finalmente, se completa la prueba del teorema demostrando la segunda afirmación con argumentos similares a los usados en el Lema 3.1.1.  $\square$

En [6, pág 85] se puede consultar con más detalle la exposición de dichas ideas.

# Capítulo 4

## Teorema de Schönflies

El Teorema de Schönflies establece que la componente acotada del complemento de una curva de Jordan es homeomorfa al disco cerrado. En este capítulo vamos a desarrollar una prueba de dicho resultado dada por Thomassen (ver [15]). Para llegar hasta la prueba introduciremos algunos conceptos y resultados nuevos, y haremos uso de otros ya expuestos en el Capítulo 3. Además, a partir del teorema obtendremos una extensión del teorema de la curva de Jordan. Para finalizar, como ya hicimos en el Capítulo 3, veremos las generalizaciones del teorema de Schönflies en dimensión mayor.

### 4.1. Demostración del teorema

En primer lugar necesitamos una generalización del Lema 3.1.2.

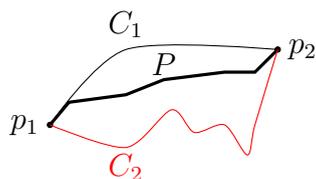


Figura 4.1: Imagen para ilustrar el enunciado.

**Lema 4.1.1.** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan. Dado un arco poligonal y simple  $P \subset \text{int}(\overline{C})$  uniendo dos puntos  $p_1, p_2 \in C$  e intersectando  $C$  únicamente en dichos puntos. Denotamos por  $C_1, C_2 \subset C$  los dos arcos en  $C$  uniendo  $p_1$  y  $p_2$ . Entonces,  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$  tiene exactamente tres componentes conexas con fronteras  $C$ ,  $C_1 \cup P$  y  $C_2 \cup P$ , respectivamente. En particular, toda curva en  $\text{int}(\overline{C})$  uniendo un punto de  $C_1 \setminus \{p_1, p_2\}$  con un punto de  $C_2 \setminus \{p_1, p_2\}$  interseca a  $P$ .

*Demostración.* Como en la prueba del Lema 3.1.2 la única parte no trivial de la demostración es probar que  $\text{int}(C) \setminus P$  tiene al menos dos componentes conexas.

Sea  $l \subset \text{int}(C)$  un segmento de recta intersecando a  $P$  en un único punto  $p$  el cual no es un vértice de  $P$ . Si los extremos de  $l$  estuviesen en la misma componente  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus (C \cup P)$ , entonces podemos encontrar en  $\Omega$  una arco poligonal simple  $L$  tal que  $L \cup l$  es una curva poligonal simple. En este caso, los extremos del segmento de  $P$  que contiene a  $p$  están en distintas componentes de  $\mathbb{R}^2 \cup (L \cup l)$ . Por otro lado, están unidos por una curva simple (contenida en  $P \cup C$ ) que no interseca a  $(L \cup l)$ , lo cual es una contradicción.

Para probar la última afirmación del lema se procede de igual forma que en el Lema 3.1.2.  $\square$

También necesitamos una generalización del Lema 3.2.3.

**Corolario 4.1.1.** Sea  $G$  un grafo planar 2-conexo y denotamos por  $e(G)$  y  $v(G)$  el número de aristas y de vértices de  $G$ . Si  $X \subset \mathbb{R}^2$  es una realización de  $G$  cuyas aristas son arcos poligonales, excepto el ciclo exterior que es una curva de Jordan, entonces  $X$  tiene exactamente  $e(G) - v(G) + 2$  caras y cada una ellas tiene como frontera un ciclo en  $X$ .

*Demostración.* La prueba es igual que la del Lema 3.2.3 usando el Lema 4.1.1 en lugar del Lema 3.1.2.  $\square$

Necesitamos dos últimas definiciones.

**Definición 4.1.1.** Dos grafos planares 2-conexos  $X, X' \subset \mathbb{R}^2$  son  $\mathbb{R}^2$ -**isomorfos** si existe un isomorfismo de grafos  $g$  entre  $X$  y  $X'$  llevando ciclos que son fronteras de caras a ciclos con la misma propiedad, y el ciclo exterior al ciclo exterior. Un isomorfismo  $g$  cumpliendo estas propiedades es un  $\mathbb{R}^2$ -**isomorfismo**.

**Nota 4.1.1.** Un  $\mathbb{R}^2$ -isomorfismo entre grafos planares  $X$  y  $X'$  se puede extender a un isomorfismo entre  $X$  y  $X'$  vistos como espacios topológicos. Pero a no ser que se indique previamente, solo lo consideraremos como una aplicación vértice a vértice entre grafos.

**Definición 4.1.2.** Una **subdivisión** de un grafo  $G$  es un grafo  $G'$  obtenido reemplazando algunas aristas de  $G$  por caminos con los mismos puntos extremos.

Veamos un ejemplo sencillo de subdivisión:

**Ejemplo 4.1.1.**

Figura 4.2: El grafo (b) es una subdivisión del grafo (a).

Finalmente, tenemos todo lo necesario para demostrar el teorema de Schönflies:

**Teorema 4.1.1. (Schönflies)** Sea  $C \subset \mathbb{R}^2$  una curva de Jordan. Entonces  $\overline{\text{int}(C)}$  es homeomorfo a un disco cerrado.

*Demostración.* Por hipótesis, tenemos un homeomorfismo  $f : C \rightarrow \mathbb{S}^1$ ; nuestro objetivo es extender  $f$  a un homeomorfismo entre  $\overline{\text{int}(C)}$  y  $\overline{\text{int}(\mathbb{S}^1)} = \overline{D}$ .

Sea  $B \subset \text{int}(C)$  un subconjunto denso y numerable, y  $A \subset C$  el conjunto de puntos accesibles desde  $\text{int}(C)$ , el cual es denso en  $C$  por el Lema 3.3.1. Elegimos una sucesión  $\{p_n\} \subset A \cup B$  tal que cada punto de  $A \cup B$  aparece infinitas veces y asumimos que  $p_0 \in A$ .

Sea  $X_0 \subset \overline{\text{int}(C)}$  un grafo planar 2-conexo que se obtiene de  $C$  añadiendo un arco poligonal simple uniendo  $p_0$  con otro punto de  $C$  e intersectando a  $C$  únicamente en los extremos. Claramente podemos encontrar otro grafo planar 2-conexo  $X'_0 \subset \overline{D}$ , que consiste en  $\mathbb{S}^1$  junto con un arco poligonal simple uniendo dos puntos de  $\mathbb{S}^1$ . Definiendo de esta forma  $X_0$  y  $X'_0$  son  $\mathbb{R}^2$ -isomorfos con  $g_0 : X_0 \rightarrow X'_0$  un  $\mathbb{R}^2$ -isomorfismo que coincide con  $f$  en los vértices de  $X_0$  en  $C$ .

Nuestro primer objetivo es construir dos sucesiones de grafos planares 2-conexos  $X_0, X_1, \dots, \subset \overline{\text{int}(C)}$  y  $X'_0, X'_1, \dots, \subset \overline{D}$  satisfaciendo las siguientes propiedades:

- (I)  $X_n$  (respectivamente  $X'_n$ ) contiene como subgrafo una subdivisión de  $X_{n-1}$  (respectivamente  $X'_{n-1}$ ),
- (II) Existe un  $\mathbb{R}^2$ -isomorfismo  $g_n : X_n \rightarrow X'_n$  que coincide con  $g_{n-1}$  en los vértices de  $X_{n-1}$  y con  $f$  en los vértices de  $X_n$  contenidos en  $C$ ,
- (III)  $X_n$  (respectivamente  $X'_n$ ) consiste en la unión de  $C$  (respectivamente  $\mathbb{S}^1$ ) con arcos poligonales contenidos en  $\overline{\text{int}(C)}$  (respectivamente en  $\overline{D}$ ),
- (IV)  $p_n \in X_n$ ,
- (V)  $X'_n \setminus \mathbb{S}^1$  es conexo.

Vamos a proceder por inducción: asumimos que ya hemos definido  $X_1, \dots, X_{n-1}$  y  $X'_1, \dots, X'_{n-1}$  de tal forma que cumplen (I) - (V).

Si  $p_n$  pertenece a  $A$ , sea  $P$  un arco poligonal simple desde  $p_n$  a un punto  $q_n \in X_{n-1} \setminus C$  (elegido de tal forma que  $p_n q_n$  no es una arista de  $X_{n-1}$ ) tal que  $X_{n-1} \cap P \subseteq \{p_n, q_n\}$ , y definimos el conjunto  $X_n$  como  $X_{n-1} \cup P$ . Sea  $S \subset X_{n-1}$  el ciclo (Corolario 4.1.1) que delimita la cara de  $X_{n-1}$  que contiene a  $P$ . Entonces, añadimos a  $X'_{n-1}$  un arco poligonal simple,  $P'$ , contenido en la cara acotada por  $g_{n-1}(S)$  y que une  $f(p_n)$  con  $g_{n-1}(q_n)$  si  $q_n$  es un vértice de  $X_{n-1}$ . Si no lo es, entonces  $P'$  lo une con otro punto de  $g_{n-1}(l)$  donde  $l$  es la arista de  $X_{n-1}$  que contiene a  $q_n$ . Definimos ahora  $X'_n$  como  $X'_{n-1} \cup P'$  y el  $\mathbb{R}^2$ -isomorfismo  $g_n : X_n \rightarrow X'_n$  de forma que coincide con  $g_{n-1}$  en los vértices de  $X_{n-1}$  y coincide con  $f$  en los vértices de  $P$ , es decir, en los vértices de  $X_n$  contenidos en  $C$ .

Por otro lado, si  $p_n$  pertenece a  $B$  tenemos que trabajar un poco más. Consideramos el cuadrado más grande con centro en  $p_n$  cuyos lados verticales y horizontales están contenidos en  $\overline{\text{int}(C)}$ . Dentro este cuadrado construimos un nuevo cuadrado con centro en  $p_n$  cuyos lados están a una distancia menor que  $1/n$  de los lados correspondientes del cuadrado más grande. Dividimos el segundo cuadrado con líneas verticales y horizontales en regiones con un diámetro menor que  $1/n$  de tal forma que ambas líneas pasan por  $p_n$ . Denotamos por  $Y_n$  a la unión de  $X_{n-1}$  con todos estos segmentos verticales, y si fuese necesario, es decir, si  $Y_n$  no fuese 2-conexo, añadimos un arco poligonal simple en  $\text{int}(C)$  de tal forma que  $Y_n$  es 2-conexo y  $Y_n \setminus C$  es conexo. Esto último se deduce del Lema 3.2.2 ya que  $Y_n$  es obtenido de  $X_{n-1}$  añadiendo caminos contenidos en caras. Añadiendo los correspondientes caminos a  $X'_{n-1}$  obtenemos un nuevo grafo  $Y'_n$  que es  $\mathbb{R}^2$ -isomorfo a  $Y_n$ . Esto último se hace añadiendo los correspondientes caminos que unen las imágenes de los vértices obtenidos en la construcción de  $Y_n$ . Ahora, añadimos segmentos verticales y horizontales en  $\overline{D}$  a  $Y'_n$  de forma que la cara acotada del grafo resultante tiene un diámetro menor que  $1/2n$ . Si fuese necesario, podemos trasladar estos segmentos de forma que intersequen a  $\mathbb{S}^1$  únicamente en  $f(A)$  y  $Y_{n-1}$  en una cantidad finita de puntos, manteniendo el diámetro de las caras acotadas menor que  $1/n$ ; de esta forma obtenemos un nuevo grafo al que llamaremos  $X'_n$ . Este nuevo grafo es 2-conexo ya que ha sido obtenido a partir de  $Y'_n$  añadiendo caminos contenidos en caras. Haciendo lo mismo para  $Y_n$  obtenemos un grafo  $X_n$  que es  $\mathbb{R}^2$ -isomorfo a  $X'_n$  y satisface (I)-(V).

De esta forma hemos extendido  $f$  a un aplicación biyectiva en  $C \cup V(X_0) \cup V(X_1) \cup \dots$  con valores en  $\mathbb{S}^1 \cup V(X'_0) \cup V(X'_1) \cup \dots$ . Estos conjuntos son densos en  $\overline{\text{int}(C)}$  y  $\overline{D}$  respectivamente. Ahora, queremos probar que  $f$  admite una extensión biyectiva de  $\overline{\text{int}(C)}$  a  $\overline{D}$  la cual será el homeomorfismo buscado.

Elegimos  $p \in \text{int}(C)$  donde  $f$  aún no está definido y una sucesión  $\{q_k\} \subset$

$V(X_0) \cup V(X_1) \cup \dots$  que converge a  $p$ . Sea  $\delta = d(p, C)$  y  $p_n \in B$  tal que  $\|p_n - p\| < \delta/3$ . Si  $n$  es suficientemente grande,  $p$  estará contenido en el cuadrado con centro  $p_n$  usado para contruir  $Y_n$ . En particular, cae en una cara de  $Y_n$  acotada por un ciclo  $S$  tal que  $S$  y  $f(S)$  están contenidos en un disco con radio menor que  $1/n$ . Como  $f$  conserva las caras de  $Y_n$ , lleva el interior de  $S$  al interior de  $f(S)$ . Pero  $\{q_k\}$  está en el interior de  $S$  para  $k$  suficientemente grande; por tanto,  $\{f(q_k)\}$  está en el interior de  $f(S)$  para un  $k$  suficientemente grande. De aquí deducimos que  $\{f(q_k)\}$  es una sucesión de Cauchy y por tanto convergente. De forma análoga podemos demostrar que el límite no depende de la sucesión elegida por lo que podemos extender  $f$  a un punto cualquiera de  $\text{int}(C)$ . Además, esta construcción muestra que  $f$  es inyectiva y continua en el interior de  $C$  debido a la densidad de  $V(X'_0) \cup V(X'_1) \cup \dots$  en  $D$ . De la misma forma,  $f^{-1}$  es continua en  $D$ , por lo que para completar la prueba es suficiente demostrar que  $f$  es continua en  $C$  ya que una aplicación continua y biyectiva entre un compacto y un espacio Hausdorff es un homeomorfismo.

Para probar esto último elegimos una sucesión  $\{q_k\} \subset \text{int}(C)$  convergente a un punto  $q \in C$ . Tenemos que demostrar que  $\{f(q_k)\}$  es convergente a  $f(q)$ . Supongamos que no lo es y trataremos de llegar a una contradicción. Como  $\bar{D}$  es compacto,  $\{f(q_k)\}$  tiene una subsucesión convergente, luego podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $\{f(q_k)\}$  es convergente a un punto  $q' \neq f(q)$ . Como  $f^{-1}$  es continua en  $D$  se sigue que  $q' \in \mathbb{S}^1$ . Por ser  $A$  denso en  $C$ , su imagen es densa en  $\mathbb{S}^1$ , luego en los arcos  $S_1$  y  $S_2$  desde  $q'$  a  $f(q)$  en  $\mathbb{S}^1$  podemos encontrar un punto  $f(p_j) \in S_j \cap f(A)$ . Por construcción, existe un  $n$  tal que  $Y_n$  contiene un camino  $P$  de  $p_1$  a  $p_2$  que interseca a  $C$  unicamente en los extremos. Por el Lema 4.1.1,  $P$  divide  $\text{int}(C)$  en dos componentes conexas. La aplicación  $f$ , por continuidad en  $\text{int}(C)$ , lleva estas componentes conexas a dos componentes conexas de  $D \setminus f(P)$  y por tanto, una de ellas contiene a  $f(q_k)$  para  $k$  suficientemente grande mientras que la otra contiene a  $f(q)$  en su frontera (pero no en la sección de la frontera en común con ambas componentes). Pero como  $\{q_k\}$  converge a  $q$ , podemos encontrar un conjunto conexo (unión infinita de curvas poligonales en  $\text{int}(C)$  conteniendo a  $\{q_k\}$ ) con  $q$  como su único punto de acumulación en  $C$ . Por esto, cualquier punto de  $\{f(q_k)\}$  tiene que estar en la intersección de  $\mathbb{S}^1$  con la frontera de la componente conexa que contiene a  $f(q)$  y esto es una contradicción.  $\square$

Con un poco más de esfuerzo se puede extender el homeomorfismo a un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  en si mismo. Enunciamos a continuación el resultado cuya prueba se puede consultar en [15].

**Teorema 4.1.2.** Si  $f$  es un homeomorfismo de una curva cerrada y simple  $C$  en otra curva cerrada y simple  $C'$ , entonces  $f$  puede extenderse a un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  en si mismo.

*Demostración.* Ver [15, pág 123].  $\square$

## 4.2. Extensión del teorema de la curva de Jordan

En esta sección usaremos el Teorema de Schönflies para obtener una especie de generalización del teorema de la curva de Jordan. Dicha generalización nos asegura que el complemento de un conjunto cerrado en el plano tiene a lo sumo dos componentes conexas.

Antes de los resultados necesitamos introducir el concepto de punto **curvo-accesible**:

**Definición 4.2.1.** Sea  $F \subset \mathbb{R}^2$  un conjunto cerrado. Decimos que un punto  $p \in F$  es **curvo-accesible** si, para cada punto  $q \notin F$ , existe un arco simple desde  $q$  a  $p$  teniendo a  $p$  como único punto en común con  $F$ .

A partir del Teorema de Schönflies podemos deducir el siguiente resultado:

**Lema 4.2.1.** Todo punto de una curva de Jordan es curvo-accesible

*Demostración.* Sea  $C$  una curva de Jordan. Por el Teorema 4.1.2 sabemos que existe un homeomorfismo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F(\bar{D}) = \text{int}(C)$  y  $F(\partial D) = C$ .

Sea ahora un punto  $p \in C$  y un punto  $q \notin C$ . Nuestro objetivo es encontrar un arco que una  $p$  con  $q$  y no contenga ningún punto más de  $C$ . Sabemos que por ser  $F$  un homeomorfismo existen  $p' \in \partial D$  y  $q' \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$  tales que  $F(p') = p$  y  $F(q') = q$ . Como  $\partial D$  es curvo accesible existirá  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  un arco simple, tal que  $\alpha(0) = p'$  y  $\alpha(1) = q'$  y solo tiene a  $p$  en común con  $\partial D$ .

Tomamos  $\beta = F \circ \alpha$ . Por definición,  $\beta(0) = p$  y  $\beta(1) = q$  y además es un arco simple por ser composición de un homeomorfismo con un arco simple. Falta probar que  $p$  es el único punto en común con  $C$ . Vamos a proceder por reducción al absurdo: supongamos que existe  $a \in \beta(I) \cap C$ , entonces existe  $a' \in \partial D$  tal que  $F(a') = a$ . Por otro lado,  $a \in B(I)$  luego existe  $s_0 \in I$  tal que  $F(\alpha(s_0)) = a$ . Ahora, por ser  $F$  inyectiva se tiene que  $\alpha(s_0) = a'$ . De esta forma,  $a'$  sería un punto del arco  $\alpha$  distinto de  $p'$  y perteneciente a  $\partial D$  lo cual es una contradicción ya que  $p'$  es el único punto de  $\partial D$  que contiene  $\alpha$ .

□

Finalmente, obtenemos la mencionada extensión.

**Teorema 4.2.1.** Si  $F \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto cerrado con al menos tres puntos curvo-accesible, entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus F$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.

*Demostración.* Vamos a proceder por reducción al absurdo: supongamos que  $\mathbb{R}^2 \setminus F$  tiene al menos tres componentes conexas.

Sean  $p_1, p_2$  y  $p_3$  puntos curvo-accesibles en  $F$  y  $q_1, q_2$  y  $q_3$  puntos pertenecientes a distintas componentes conexas de  $\mathbb{R}^2 \setminus F$ . Por ser  $p_1, p_2$  y  $p_3$  curvo-accesibles, para cada  $i \in \{1, 2, 3\}$  y para cada  $j \in \{1, 2, 3\}$  existe un arco simple uniendo  $p_i$  con  $q_j$ . Por el mismo procedimiento que usamos en la demostración del Teorema 3.3.2 podemos suponer que los arcos simples obtenidos no se intersecan entre sí. De esta forma obtenemos una realización como grafo planar de  $K_{3,3}$ , que es una contradicción con la Proposición 3.2.1 ( $K_{3,3}$  no es planar).  $\square$

### 4.3. Generalizaciones del teorema en dimensión mayor

Tal como hicimos con el Teorema de la curva de Jordan, en esta sección trataremos de exponer las generalizaciones del teorema de Schönflies en dimensión  $n > 2$ .

Como vimos en la Sección 3.4 del Capítulo 3, si  $S$  es un subespacio de  $\mathbb{S}^n$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , entonces  $S$  separa a  $\mathbb{S}^n$  en dos componentes conexas. Si estamos buscando una generalización del Teorema de Schönflies es natural preguntarse si la clausura de las componentes conexas es homeomorfa a la bola  $n$ -dimensional cerrada. La respuesta es no, ya que existen ejemplos donde una de estas componentes conexas no es simplemente conexa. Un ejemplo clásico donde esto no ocurre es el de la **esfera cornuda de Alexander**:



Figura 4.3: Esfera cornuda de Alexander.

**Ejemplo 4.3.1.** La esfera cornuda de Alexander es un subespacio  $S \subset \mathbb{R}^3$  homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$  tal que la componente conexa no acotada de  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  no es simplemente conexa y por tanto, no puede ser homeomorfa a la componente conexa no acotada del complemento de la esfera  $\mathbb{S}^2$ . En [8, pág 170] se puede consultar la construcción detallada de ésta y la prueba de la afirmación anterior.

Los problemas que se encuentran en una intento de generalización del teorema vienen derivados de los embebimientos de  $\mathbb{S}^{n-1}$  en  $\mathbb{S}^n$ . En [11], Mazur establece que para embebimientos bajo una condición de “buen comportamiento” la generalización del teorema sí se cumple:

**Teorema 4.3.1.** Si  $\mathbb{S}^{n-1}$  está embebido en  $\mathbb{S}^n$  de forma “*nice*” entonces la clausura de cada componente conexa de  $\mathbb{S}^n \setminus S$  (siendo  $S$  el embebimiento de  $\mathbb{S}^{n-1}$  en  $\mathbb{S}^n$ ) es homeomorfa al disco unidad  $n$ -dimensional.

*Demostración.* La definición de embebimiento “*nice*” y la prueba de este resultado puede consultarse en [11]. □

**Nota 4.3.1.** No hemos querido incluir aquí la definición de embebimiento “*nice*” ya que requiere de unos resultados previos que escapan a los objetivos de este trabajo

# Bibliografía

- [1] Abate, Marco & Tovena, Francesca. *Curves and surfaces*. Unitext, 55. Springer, Milan, 2012.
- [2] Crossley, Martin D. *Essential topology*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2005.
- [3] Diestel, Reinhard. *Graph theory*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 173. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [4] do Carmo, Manfredo P. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Traducido del inglés. Alianza Editorial, S.A, Madrid, 1994.
- [5] Franzosa, Robert & Adams, Colins. *Introduction to topology*. Prentice-Hall, Inc. 2008.
- [6] Guillemin, Victor & Pollack, Alan. *Differential topology*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1974.
- [7] Hales, Thomas C. *Jordan's Proof of the Jordan Curve Theorem*. Studies in logic, grammar and rethoric 10 (2007), no. 23, 45-60.
- [8] Hatcher, Allen. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [9] Hernández, María de los Ángeles y Pastor, José.A. *Un curso de geometría diferencial*. Ediciones Doce Calles, S.L. Madrid, 2010.
- [10] Jordan, Camille. *Cours d'analyse de l'École polytechnique*. Segunda edición. París, 1893.
- [11] Mazur, Barry. *On embeddings of spheres*. Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959) 59–65.
- [12] McCleary, John. *Geometry from a differentiable viewpoint*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

- [13] Montiel, Sebastián y Ros, Antonio. *Curvas y superficies*. Proyectos del sur ediciones, S.L, Granada, 1997.
- [14] Munkres, James.R. *Topología*. Traducido del inglés. Segunda edición. Pearson educación, S.A, Madrid, 2002.
- [15] Thomassen, Carsten. *The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces*. Amer. Math. Monthly 99 (1992), no. 2, 116–130.

# Índice alfabético

- $K_{3,3}$ , 17
- $\mathbb{R}^2$ -isomorfismo, 47
- 2-conexo, 39
- accesible, 41
- arco de Jordan, 8
- base para una topología, 2
- camino, 15
- ciclo, 15
- circunferencia, 11
- compacto, 5
- componentes conexas, 3
- conexo, 2, 39
- conexo por caminos, 4
- curva de Jordan, 8
- curvatura, 10
- curvo-accesible, 51
- diedro de Frenet, 10
- entorno tubular, 19
- esfera cornuda de Alexander, 52
- espacio topológico, 1
- exterior, 33
- fórmulas de Frenet, 10
- grado de una curva, 12
- grafo, 14
- grafo bipartito, 16
- grafo completo bipartito, 17
- grafo planar, 35
- homeomorfismo, 7
- homeomorfo, 7
- homotopía, 13
- interior, 33
- levantamiento, 11
- localmente conexo, 4
- longitud de arco, 9
- número de Lebesgue, 19
- número de vueltas de una curva, 24
- parametrización periódica, 11
- propiedad Hausdorff, 6
- realización, 35
- recubrimiento abierto, 5
- separación, 2
- subdivisión, 47
- subgrafo, 15
- teorema de la curva de Jordan, 26, 30, 42
- teorema de Schönflies, 48
- teorema del arco de Jordan, 40
- topología, 1
- vector normal, 10
- vector tangente, 9