UNIVERSIDAD DE MURCIA
Departamento de Matemáticas

Trabajo Fin de Grado

INTEGRALES DE DANIELL Y MCSHANE

Souleymane Ndiaye

dirigido por Bernardo Cascales Salinas y
Luis Carlos García Lirola.

Curso 2017-18

Mathematics is a form of poetry which transcends poetry in that it proclaims a truth; a form of reasoning which transcends reasoning in that it wants to bring about the truth it proclaims; a form of action, of ritual behaviour, which does not find fulfilment in the act but must proclaim and elaborate a poetic form of truth.

Salomon Bochner

Declaración de originalidad

Souleymane Ndiaye, autor del TFG **"Integral de Daniell y Mcshane"**, bajo la tutela de los profesores **Antonio José Pallarés Ruiz, Bernardo Cascales Salinas**[*] **y Luis Carlos García Lirola**, declara que el trabajo que presenta es original, en el sentido de que ha puesto el mayor empeño en citar debidamente todas las fuentes utilizadas.

En Murcia, a 19 de junio de 2018

[*]El profesor B.Cascales falleció el pasado 5 de abril y el profesor A. Pallarés ha asumido su tutoría para la finalización del trabajo

Introduction

THE origin of the integral goes back more than 2000 years, when the Greeks tried to solve the problem of the area by devising the procedure they called the method of exhaution. They knew that, for certain curves such as semiellipse or parabolic segments, the area under the curve could be defined as the integral and calculated using techniques of approximation of the region by means of rectangles or polygons. Gradually, the exhaution method was transformed into what is now known as integral calculus, a new and powerful discipline that has numerous applications not only in problems related to areas and volumes, but also in problems of other sciences. This method, which maintains some of the original characters of the exhaution method, received its greatest impulse in the $XVII$ century, due to the efforts of Isaac Newton $(1642-1727)$ and Gottfried Leibniz $(1646-1716)$.
But, as it was necessary to consider more irregular functions, it became evident that a more careful approach was necessary to define an integral that would adjust to these problems.

THE integration was rigorously formalized for the first time by Riemann $(1826-1866)$, using limits. Although, all the piecewise continuous functions that are bounded and defined on a bounded interval are integrable, later more general functions were considered for which the Riemann'definition was not applicable, and therefore were not integrable in the Riemann sense. Subsequently, Lebesgue $(1875-1941)$ gave a different definition of the integral based on measure theory that generalized the definition of Riemann's integral, thus any function that is integrable in the sense of Riemann is also integrable in the in the sense of Lebesgue, although there are some integrable functions in the sense of Lebesgue that are not in the sense of Riemann. For example, the Dirichlet function, which is 0 when its argument is irrational and 1 otherwise (rational), has Lebesgue integral, but not Riemann integral.

TRADITIONALLY, the Lebesgue integral is exposed by defining a measure, measurable set, measurable function, and finally integrable function. One of the main difficulties with the traditional formulation of the Lebesgue integral is that it requires an initial deve-

lopment of measure theory before useful results can be obtained for the integral.
However, an alternative approach is available, developed by Percy J. Daniell (1918) that does not suffer from this deficiency. In effect, it reduces the measure theory to a much simpler concept to understand: the idea of a null set. In this way, the usual construction of the Lebesgue integral is inverted, defining first, the integrable functions, then those that are measurable, and finally the measurable sets, in this order.
This new way of proceeding is very advantageous because apart from avoiding complicated concepts of measure theory, we reach the conclusion that both approaches [2] are equivalent.

IN the first chapter of this work, we begin by exposing the concept of a null set. Then, we define the Daniell integral of real functions of real variable and we study some of its properties. The Daniell's integral is defined as follows:
First, we introduce the definition of integral for step functions. Next, we define the space L of the functions that are limits (pointwise) of increasing sequences of step functions $(\phi_n)_n$ for which the numerical sequences $(\int \phi_n)_n$ are bounded, then we approximate the integral of an element f of L as the limit of a increasing and bounded sequence $(\int \phi_n)_n$ of integrals of step functions $(\phi_n)_n$ which approaches f. This might sounds exactly like the classical approach to Riemann integral using sequences of "upper and lower sums", but a fundamental difference is that the sequence $(\phi_n(x))_n$ converges to $f(x)$ for almost all x, i.e. there is a null set N such that $\phi_n(x) \to f(x)$ for all x outside N.
Afterwards, we will define the space L^1 of the integrable functions in the sense of Daniell whose elements are those that can be written as a difference of two elements of L. In addition, we define the integral of an element f of L^1 as the difference of integrals of two elements of L whose difference is f. Finally, we finish this chapter by stating some of the elementary properties of the functions which are integrable in the sense of Daniell.

IN the second chapter, we demonstrate the two most important convergence theorems of the Lebesgue integral: the monotone convergence theorem and the dominated convergence theorem. The first convergence theorem deals with monotone sequences of functions $(f_n)_n$ for which the numerical sequence $(\int f_n)_n$ is bounded. We will prove the dominated convergence theorem using monotone convergence. The latter guarantees the completeness of the space of the integrable functions in the sense of Daniell that we have denoted by L^1. We finish this chapter by defining the spaces $\mathscr{M}$ and $\mathbb{S}$ of the measurable functions and measurable sets in Daniell's sense, and we will study some of their properties that will be used in the next chapter to prove the equivalence of the Lebesgue's

[2] the usual method of constructing Lebesgue's integral through measure theory and Daniell's approach.

integral and the Daniell's integral.

IN the third chapter, we present the fundamental concepts of measure theory and Lebesgue'integral, but in a pretty general form of exposition. In effect, all theorems and propositions are enunciated without proof. The Lebesgue integral can be developed in several different ways. Here, we only study one of these modes.
For other procedures, the reader can consult the following books: [3], [7].
Finally, we finish this chapter by providing one of the most important results of this work: the equivalence of Lebesgue and Daniell's integrals.

At this point, we have achieved the first objective: to introduce the Lebesgue integral without using the abstract concepts of measure theory. However, another issue of interest is the problem we face with the Riemann integral. In fact, the Riemann'integral, although it is intuitive, it has important limitations, for example its bad behavior with convergence theorems. In addition, the class of functions that are integrables in the sense of Riemann is very small. For example, functions as simple as Dirichlet function, mentioned above, is not integrable in the sense of Riemann.

IN the fourth chapter, we propose a solution to the apparent problem of the Riemann's integral by exposing a simple method due to McShane $(1904-1989)$, which is equivalent to the Lebesgue integral over the measurable functions defined over compact intervals of the real line. Roughly speaking, the McShane integral is a modification, both formal and simple of the Riemann's definition of integral, but conceptually deeper.
We begin this chapter by defining what we mean by a McShane partition and demonstrate the Cousin' lemma $(1867-1933)$ that guarantees us the existence of enough McShane partitions as long as we have a positive function defined on the domain of the function that we want to integrate. This positive function we will called a caliber. Next, we present the McShane's integral and study some of its properties. Finally, we adapt the classical monotone convergence theorem of the Lebesgue integral to the McShane'integral and we will use it to prove another of the important results of this work: the equivalence of the Lebesgue's integral and the McShane's integral over the measurable functions defined on compact intervals of $\mathbb{R}$.

IN short, we point out that the work carried out to elaborate the memory has consisted in compiling, understanding, translating and completing the knowledge acquired in the books and notes mentioned in the bibliography. We highlight the propositions 3.2.2, 3.2.3 and 3.2.4; the corollaries 3.2.1, 3.2.2; and the theorem 3.2.5 that we have written ourselves because many of the books we have consulted, for example William Johnston's book [5], the author only discuss the equivalence of Lebesgue and Daniell's integral, but

no proof of this fact is offered. In contrast, other books such as Eddward Melvin Wadsworth [15], the equivalence is deduced using a more abstract and general approach to the Daniell integral.
Also, we have written some results that have been left as exercises in some books mentioned in the bibliography, for example the proposition 1.3.6 has been left as an exercise in Weir's book [16], the theorem 4.4.2 in Gordon's book [4].
In addition, throughout this work, we have worked with real functions of real variable, but all the results obtained can be generalized without any difficulty to real functions defined on subsets of $\mathbb{R}^n$ (compact in the case of the McShane integral). We have decided to work with functions whore domain and range are subsets of $\mathbb{R}$ in order to improve the clarity of the exposition.

Introducción

EL origen del cálculo integral se remonta a más de 2000 años, cuando los griegos intentaban resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron método de exhaución. Ellos sabían que, para ciertas curvas como las semielipses o segmentos parabólicos, el área bajo la curva podía definirse como la integral y calcularse usando técnicas de aproximación de la región mediante rectángulos o polígonos. Gradualmente, el método de exhaución fue transformándose en lo que hoy se conoce como Cálculo integral, nueva y potente disciplina que tiene numerosas aplicaciones no sólo en problemas relativos a áreas y volúmenes, sino también en problemas de otras ciencias. Este método, que mantiene alguno de los caracteres originales del método de exhaución, recibió su mayor impulso en el siglo $XVII$, debido a los esfuerzos de Isaac Newton $(1642 - 1727)$ y Gottfried Leibniz $(1646 - 1716)$.
Pero, como se necesitaba considerar funciones más irregulares, se hizo evidente que una aproximación más cuidadosa era necesaria para definir una integral que se ajustara a dichos problemas.

LA integración fue, rigurosamente, formalizada por primera vez por Riemann $(1826 - 1866)$, empleando límites. A pesar de que todas las funciones continuas por trozos y acotadas son integrables en un intervalo acotado, más tarde se consideraron funciones más generales para las cuales la definición de Riemann no era aplicable y, por tanto, no eran integrables en el sentido de Riemann. Posteriormente, Lebesgue $(1875 - 1941)$ dio una definición diferente de la integral basada en la teoría de la medida que generalizaba la definición de Riemann, así toda función integrable en el sentido de Riemann también lo es en el sentido de Lebesgue, aunque existen algunas funciones integrables en el sentido de Lebesgue que no lo son en el sentido de Riemann. Por ejemplo, la función de Dirichlet, que es 0 cuando su argumento es irracional y 1 en otro caso (racional), tiene integral de Lebesgue, pero no de Riemann.

TRADICIONALMENTE, se expone la integral de Lebesgue definiendo una medida, un conjunto medible, una función medible y, finalmente, una función integrable. Una de las principales dificultades con la formulación tradicional de la integral de Lebesgue es

que requiere el desarrollo inicial de una teoría de la medida viable antes de que se puedan obtener resultados útiles para la integral.
Sin embargo, un enfoque alternativo está disponible, desarrollado por Percy J. Daniell (1918) que no sufre de esta deficiencia. En efecto, reduce la teoría de la medida a un concepto mucho más simple de entender: la idea de un conjunto nulo. De esta manera, se invierte la construcción habitual de la integral de Lebesgue, definiendo, primeramente, las funciones integrales, luego, las que son medibles y, por último, los conjuntos medibles, en este orden.
Esta nueva forma de proceder es muy ventajosa porque aparte de esquivar complicados conceptos de la teoría de la medida, se llega a la conclusión de que ambos enfoques [3] son equivalentes.

EN el primer capítulo de esta memoria, comenzamos exponiendo el concepto de conjunto nulo. Luego, definimos la integral de Daniell de funciones reales de variable real y estudiamos algunas de sus propiedades. El proceso para definir la integral de Daniell es el siguiente:
Primero, introducimos la definición de integral para funciones escalonadas. A continuación, definimos el espacio L de las funciones que son límites (puntual) de sucesiones $(\phi_n)_n$ crecientes de funciones escalonadas cuyas sucesiones numéricas $(\int \phi_n)_n$ están acotadas y, luego aproximamos la integral de un elemento f de L como el límite de una sucesión creciente y acotada de integrales $(\int \phi_n)_n$ de funciones escalonadas $(\phi_n)_n$ que aproxima a f. Lo anterior puede parecer bastante a la aproximación clásica de la integral de Riemann usando "sumas superiores e inferiores", pero una diferencia fundamental es que la sucesión $(\phi_n(x))_n$ converge a $f(x)$ en casi todo x, es decir, existirá un conjunto nulo N, de manera que, $\phi_n(x) \to f(x)$ para todo x que esté en el complementario de N.
Posteriormente, definiremos el espacio de L^1 de la funciones integrables en el sentido de Daniell cuyos elementos son aquellas funciones que se puede escribir como diferencia de dos elementos de L. Además, definiremos la integral de un elemento f de L^1 como la diferencia de integrales de dos elementos de L cuya diferencia es f. Finalmente, acabamos este capítulo, enunciando algunas de las propiedades elementales de la integral de Daniell.

EN segundo capítulo, demostramos los dos teoremas de convergencia más importantes de la integral de Lebesgue: el teorema de la convergencia monótona y el de la convergencia dominada. El primer teorema de convergencia se da para sucesiones monótonas de funciones $(f_n)_n$ de forma que la sucesión numérica $(\int f_n)_n$ esté acotada. De él se demuestra el teorema de la convergencia dominada. Este último garantiza la completitud

[3] el método habitual de contruir la integral de Lebesgue a través de la teoría de la medida y el de Daniell.

del espacio de las funciones integrables en el sentido de Daniell que hemos denotado por L^1. Terminamos este capitulo, definiendo los espacios $\mathscr{M}$ y $\mathbb{S}$, de las funciones de los funciones medibles y conjuntos medibles en el sentido de Daniell y estudiaremos algunas de sus propiedades que usaremos en el siguiente capítulo para probar la equivalencia de la integral de Lebesgue y la Daniell.

EN el tercer capítulo, presentamos los conceptos fundamentales de la teoría de la medida y de la integral de Lebesgue, pero en una forma de exposición bastante general. En efecto, todos los teoremas y proposiciones se enuncian sin demostración. La teoría de la integral de Lebesgue puede ser desarrollada de varios modos distintos. Aquí, solo estudiamos uno de estos modos.
Para otros procedimientos, se puede consultar los siguientes libros: [3], [7].
Finalmente, acabamos este capítulo demostrando uno de los resultados más importantes de este trabajo: la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de Daniell.

Llegado a este punto, hemos logrado el primer objetivo: introducir la integral de Lebesgue sin utilizar los conceptos abstractos de la teoría de la medida.
Sin embargo, otro tema de interés, es el problema que nos enfrentamos con la integral de Riemann. En efecto, esta última, aun siendo intuitiva, tiene importantes limitaciones, por ejemplo su mal comportamiento con los teoremas de convergencia. Además, la clase de funciones que son Riemann integrables es muy pequeña. Por ejemplo, funciones tan simples como la de Dirichlet, mencionado anteriormente, no es Riemann integrable.

EN el cuarto capitulo, proponemos una solución al aparente problema de la integral de Riemann, exponiendo un método simple debido a McShane $(1904-1989)$, que es equivalente a la integral de Lebesgue sobre las funciones medibles definidas sobre intervalos compactos de la recta real. En el fondo, la integral de McShane es una modificación, a la vez, formal y simple de la definición de la integral de Riemann, pero, conceptualmente profunda.
Empezamos este capitulo, definiendo lo que entendemos por una partición de McShane y demostramos el lema de Cousin $(1867-1933)$ que nos asegura la existencia de suficientes particiones de McShane siempre que tengamos una función positiva definida sobre el dominio de la función que queremos integrar, dicha función positiva la llamaremos un calibre. A continuación, presentamos la integral de McShane y estudiamos algunas de sus propiedades. Finalmente, adaptamos el clásico teorema de la convergencia monótona de la integral de Lebesgue a la integral de McShane y lo utilizaremos para probar otro de los resultados importantes de esta memoria: la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de McShane sobre las funciones medibles definidas sobre intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

PARA terminar, señalamos que el trabajo realizado para elaborar la memoria ha consistido en recopilar, entender, traducir y completar los conocimientos adquiridos en los libros y apuntes mencionados en la bibliografía. Destacamos las proposiciones 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4; los corolarios 3.2.1, 3.2.2; y el teorema 3.2.5 que hemos escrito nosotros mismos porque muchos de los libros que hemos consultado, por ejemplo el libro de William Johnston [5], solo se comenta la equivalencia de la integral de Lebesgue y de Daniell, pero no se ofrece ninguna prueba de este hecho. En cambio, otros libros como el libro de Eddward Melvin Wadsworth [15], la equivalencia se deduce usando una aproximación más abstracta y general de la integral de Daniell.
También, hemos redactado algunos resultados que en algunos libros mencionados en la bibliografía se habían dejado como ejercicios, por ejemplo la proposición 1.3.6 se había dejado como ejercicio en el libro de Weir [16] y el teorema 4.4.2 en el libro de Gordon [4].
Además, a lo largo de esta memoria, hemos trabajado con funciones reales de variable real, pero todos los resultados que se obtienen se pueden generalizar sin ninguna dificultad a funciones reales definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ (compactos en el caso de la integral de McShane). Se ha decidido limitarse al caso real para mejorar la claridad de la exposición.

Contenidos

Capítulo 1

La Integral de Lebesque por el método de Daniell en $\mathbb{R}$

EL objetivo de este capítulo es presentar la construcción de la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}$ utilizando un método conocido como "Integral de Daniell". En primer lugar, exponemos, brevemente, la idea conjunto nulo. Luego, introducimos la integral de funciones escalonadas. A continuación, definimos el espacio L de las funciones que son limites de sucesiones $(\phi_n)_n$ crecientes de funciones escalonadas cuyas sucesiones numéricas $(\int \phi_n)_n$ estás acotadas. Después, definimos el espacio L^1 de las funciones Daniell integrables cuyos elementos son aquellas funciones que se puede escribir como diferencia de dos elementos de L. Además, definimos la integral de un elemento f de L^1 como diferencia de integrales de dos elementos de L cuya diferencia es f. Finalmente, acabamos el capitulo, enunciando algunas propiedades elementales de los elementos de L^1.

Para elaborar este capitulo, nos hemos basado, especialmente, en los siguientes libros: [16], [12], [1] y [13].

1.1. Algunas observaciones previas

RECORDEMOS que un conjunto A (no vacío) es numerable si existe una aplicación biyectiva $h : A \to B \subset \mathbb{N}$. Además si $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales creciente y acotada superiormente, entonces, converge a un número a $\in \mathbb{R}$. La demostración de la afirmación anterior se puede consultar en cualquier libro de Análisis Matemático de primer año de carrera. Mis preferidos son [1], [12].
Otra opción es tomarlo como un axioma, tal y como se ha hecho en [16].
También, para cualquier intervalo I acotado de $\mathbb{R}$, definimos la longitud de dicho intervalo $\ell(I)$ como el valor absoluto de la la diferencia de sus puntos extremos, es decir,

$$\ell([a,b]) = \ell([a,b)) = \ell((a,b]) = \ell((a,b)) = |a-b|$$

con $a,b \in \mathbb{R}$. Además, si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces,
la función $f^+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es definida por:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$$

De manera similar la función $f^- : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es definida por:

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$

Asimismo, recordemos que una función función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puede extenderse a toda la recta real $\mathbb{R}$, sin más que asignar el valor cero a la función en los puntos que no pertenecen a su dominio. Por esta razón, a lo largo de este capítulo, asumimos que todas las funciones que consideremos tienen dominio $\mathbb{R}$ y toman valores en $\mathbb{R}$. Además, la función característica de un conjunto cualquiera S se define como

$$\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S \\ 0 & \text{si } x \notin S. \end{cases}$$

Finalmente, si A y B son dos conjuntos, entonces, $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B$ siempre y cuando $A \cap B = \emptyset$.

1.2. Conjuntos nulos en $\mathbb{R}$

En esta sección, definimos el concepto de conjunto nulo. Además, demostramos que una unión numerable de conjuntos nulos es, a su vez, un conjunto nulo y se finalizamos la sección dando un ejemplo de conjunto nulo.

Definición 1.2.1. *Decimos que un conjunto $N \subset \mathbb{R}$ es un conjunto nulo si para cada $\varepsilon > 0$:*

(I) *Existe una sucesión $(I_n)_n$ de intervalos abiertos y acotados que cubre N, es decir, $N \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$.*

(II) $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \varepsilon$.

A continuación, vamos a ver una propiedad importante que nos dice que la unión numerable de conjuntos nulos de $\mathbb{R}$ es, a su vez, un conjunto nulo de $\mathbb{R}$.

Proposición 1.2.2. *Si $(N_n)_n$ es una sucesión de conjuntos nulos de $\mathbb{R}$, entonces,*

$$N := \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$$

es un conjunto nulo de $\mathbb{R}$.

Demostración. Tenemos que ver que, dado $\varepsilon > 0$, existe una sucesión de intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R}$ $(I_n)_n$ que cubre N y que $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \varepsilon$.
Como N_1 es un conjunto nulo de $\mathbb{R}$, entonces, existe una sucesión de intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R}$ $(I_{1n})_n$, tal que, $N_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{1n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{1n}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
De nuevo, como N_2 es un conjunto nulo de $\mathbb{R}$, entonces, existe una sucesión de intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R}$ $(I_{2n})_n$, tal que, $N_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{2n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{1n}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$. Siguiendo el mismo razonamiento se llega a que, para cada $m \geq 1$, existe una sucesión de intervalos abiertos y acotados de $\mathbb{R}$ $(I_{mn})_n$, tal que, $N_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{mn}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_{mn}) \leq \frac{\varepsilon}{2^m}$.
Para ver con más detalles lo que está ocurriendo vamos a escribir lo anterior en forma de tabla:

$$
\begin{tikzcd}
I_{11} & I_{12} \arrow[dl] & I_{13} \arrow[dl] & I_{14} \cdots \arrow[dl] \\
I_{21} & I_{22} \arrow[dl] & I_{23} \arrow[dl] & I_{24} \cdots \\
I_{31} & I_{32} \arrow[dl] & I_{33} & I_{34} \cdots \\
I_{41} & I_{42} & I_{43} & I_{44} \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

La primera fila de la tabla anterior es la sucesión de intervalos abiertos y acotados $(I_{1n})_n$ que cubre N_1, la segunda fila es la sucesión de intervalos abiertos y acotados $(I_{2n})_n$ que cubre N_2, y en general, la m-ésima ($m \geq 1$) fila es la sucesión de intervalos abiertos y acotados $(I_{mn})_n$ que cubre N_m. Ahora, podemos construir una sucesión de intervalos abiertos y acotados $(I_n)_n$ que cubre N de la siguiente manera:
$I_1 := I_{11},\ I_2 := I_{12},\ I_3 := I_{21},\ I_4 := I_{13},\ I_5 := I_{22},\ I_6 := I_{31},\ I_7 := I_{14},\ I_8 := I_{23},\ I_9 := I_{32},\ I_{10} := I_{41}, \cdots$, es decir, siguiendo las flechas en la tabla anterior.
Por un lado, tenemos

$$N = \cup_{n=1}^{\infty} N_n \subset \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} I_{nm} = \cup_{n=1}^{\infty} I_n. \tag{1.1}$$

Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl}\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k) & = & \ell(I_1)+\ell(I_2)+...+\ell(I_n)\\ & \leq & [\ell(I_{11})+...+\ell(I_{1n})]+[\ell(I_{21})+...+\ell(I_{2n-1})]+...+\ell(I_{n1})\\ & \leq & \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2^2}+...+\frac{\varepsilon}{2^{n-1}}+\frac{\varepsilon}{2^n}\\ & = & \varepsilon(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n})\\ & = & \varepsilon(1-\frac{1}{2^n}).\end{array}$$

Por consiguiente, $\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k)\leq\varepsilon(1-\frac{1}{2^n})$, y por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ell(I_k)\leq\lim_{n\to\infty}[\varepsilon(1-\frac{1}{2^n})]=\varepsilon,$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\leq\varepsilon. \tag{1.2}$$

□

Por (1.1) y (2.3) se concluye que N es un conjunto nulo.

Vamos a acabar esta sección dando un ejemplo de un conjunto nulo en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2.1. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un conjunto nulo.*

Demostración. Si $N_1:=\mathbb{Q}\cap[0,1], N_2:=\mathbb{Q}\cap[-1,0], N_3:=\mathbb{Q}\cap[1,2], N_4:=\mathbb{Q}\cap[-2,-1]$, $\cdots$, respectivamente, entonces, tenemos que $\mathbb{Q}=\cup_{n=1}^{\infty}N_n$. Por la proposición 1.2.2, para ver que $\mathbb{Q}$ es un conjunto nulo, lo único que tenemos que ver es que $(N_n)_n$ es una sucesión de conjuntos nulos. Nosotros vamos a ver que N_1 es un conjunto nulo. Se puede aplicar el mismo razonamiento para ver que N_n es un conjunto nulo con $n\geq 2$. Utilizando una tabla parecida al que usamos en la proposición 1.2.2 se puede ver que:

$$N_1=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\frac{1}{6},\frac{5}{6}\cdots\right\},$$

y por lo tanto, N_1 es numerable.

Ahora, dado $\varepsilon>0$, para cada $r_n\in N_1$ definimos:

$$I_n=(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}),\ n\geq 1.$$

Tenemos que

$$N_1\subset\cup_{n=1}^{\infty}I_n. \tag{1.3}$$

Además, como $\ell(I_n) = \frac{\varepsilon}{2^n}$, entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \tag{1.4}$$

Por (1.3) y (1.4), se sigue que N_1 es un conjunto nulo. □

1.3. Construcción de la integral de Lebesque por el método de Daniell

El objetivo de esta sección es construir la integral de Lebesgue por el método de Daniell. Es un procedimiento que consiste en definir la integral en clases cada vez más amplias de funciones: funciones características, funciones escalonadas, funciones que son límites crecientes de sucesiones crecientes de funciones escalonadas, y finalmente, funciones que son diferencias de las anteriores.
A continuación, empezamos la construcción de la integral de Lebesgue por el método de Daniell.

Definición 1.3.1. *Sea I un intervalo acotado. La integral de Lebesque de la función $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se define como*

$$\int \chi_I = \ell(I).$$

Vamos a extender el conjunto de todas las funciones características de intervalos acotados en $\mathbb{R}$ a un nuevo conjunto cuyos elementos se llamarán funciones escalonadas, por dos razones:

(I) El conjunto de todas las funciones características de intervalos acotados definidas en $\mathbb{R}$ no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (por ejemplo la suma de dos funciones características no es, en general, una función característica).
(II) Queremos que el operador integral $\int$ actúe sobre un espacio lineal.

Definición 1.3.2. *Una función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice escalonada si se puede expresar de la siguiente manera:*

$$\phi = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \chi_{I_j},$$

donde c_j son números reales y I_j son intervalos acotados.

Se puede comprobar muy fácilmente que el conjunto de todas las funciones escalonadas definidas en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (con las correspondientes operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número y una

función).
Por esta razón, podemos ya extender nuestra definición de integral en las funciones escalonadas de la siguiente forma

Definición 1.3.3. *Dada una función escalonada $\phi = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \chi_{I_j}$, definimos su integral de Lebesgue como*

$$\int \phi = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \ell(I_j).$$

Como se puede apreciar, la forma en que hemos definido la integral de Lebesgue de una función escalonada ϕ implica, automáticamente, (usando la propiedad distributiva de los números reales) que el operador integral $\int$ es lineal sobre el conjunto de las funciones escalonadas definidas en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}$. Además, si ϕ es una función escalonada no negativa, su integral se adapta, perfectamente, a la idea intuitiva de lo que sería "el área de la parte del plano bajo la curva".

Ahora, vamos a ocuparnos de la consistencia del operador integral $\int$. El problema aquí es que una función escalonada ϕ puede expresarse como una combinación $\mathbb{R}-$lineal de funciones características de muchas maneras diferentes, y en un principio, no podemos afirmar que la integral de cada representación de ϕ da el mismo valor. La prueba de lo anterior es técnica, pero vale la pena hacerla porque nos encontremos más de una vez este tipo de problema a lo largo de este capítulo. Vamos a apoyarnos del siguiente lema para confirmar que la integral de Lebesgue está "bien definida."

Lema 1.3.1. *Una función escalonada $\phi = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \chi_{J_i}$ puede siempre escribirse como*

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \chi_{I_j},$$

donde, $I_s \cap I_t = \emptyset, \forall s \neq t$. Además, dicha representación es única si se combinan los intervalos adyacentes.

Demostración. La demostración, explícitamente, describe la construcción de los intervalos $I_1, I_2, ..., I_m$ en la segunda representación de ϕ. En efecto, como existe un número finito de intervalos $J_1, J_2, ..., J_n$, entonces, existe un número finito de puntos extremos distintos, digamos $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_r$ (sin pérdida de generalidad). Ahora, podemos construir $m = 2r - 1$ intervalos I_j de la siguiente manera:
Los primeros r de dichos intervalos van a ser intervalos triviales de la forma $[p_j, p_j]$, $j = 1, 2, ..., r$ y los $r - 1$ intervalos restantes son los intervalos abiertos (p_j, p_{j+1}), $j = 1, 2, ..., r - 1$. Por construcción, los intervalos I_j que hemos construido son disjuntos dos a dos.

Además, como para cualquier intervalo I_j, y para cualquier intervalo J_i, sabemos que, o $I_j \subset J_i$, o $I_j \cap J_i = \emptyset$. Por consiguiente, sea

$$A_{ij} = \{i : I_j \subseteq J_i\}$$

y definimos

$$c_j = \sum_{i \in A_{ij}} k_i.$$

Ahora, vamos a demostrar que la función $\phi = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \chi_{J_i}$ coincide con $\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \chi_{I_j}$. En efecto, si x un punto entre los dos puntos extremos p_1 y p_r, entonces, $x \in I_s$ para algún $1 \leq s \leq m$. Como los I_j son disjuntos, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \chi_{I_j}(x) = c_s. \tag{1.5}$$

Pero, por definición

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \chi_{J_i}(x) = \sum_{i \in A_{is}} k_i = c_s. \tag{1.6}$$

Por (1.5) y (1.6), tenemos que

$$\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \chi_{I_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \chi_{J_i}(x)$$

para cada x entre los puntos extremos p_1 y p_r y eso completa la prueba porque es lo que queríamos ver. □

Observemos en la prueba del lema anterior que hemos construido una representación de la función escalonada ϕ como una combinación $\mathbb{R}-$lineal de funciones características de intervalos disjuntos utilizando, solamente, intervalos triviales (que contienen solo un punto) e intervalos abiertos. Esta representación no es, todavía, única. Pero, combinando en la suma términos con intervalos adyacentes que tienen mismo coeficiente, se obtiene una representación única de la función escalonada ϕ.

Si $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces, la función $f \vee g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es definida por

$$(f \vee g)(x) = \text{máx}(f(x), g(x)).$$

Análogamente, La función $f \wedge g : \mathbb{R} :\longrightarrow \mathbb{R}$ es definida por

$$(f \wedge g)(x) = \text{mín}(f(x), g(x)).$$

Los operadores $\vee$ y $\wedge$ son conmutativos y asociativos. Por lo anterior, podemos escribir $f_1 \vee \cdots \vee f_n$ y $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$ sin paréntesis.

Proposición 1.3.4. *Si ϕ y Φ son dos funciones escalonadas, entonces, las funciones $\phi \vee \Phi$ y $\phi \wedge \Phi$ son funciones escalonadas.*
Además, por inducción tanto $\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n$ como $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ son funciones escalonadas si $\phi_1, \ldots, \phi_n$ son funciones escalonadas.

La demostración de la proposición anterior, aunque, no la detallamos aquí, no presenta ningún misterio, se basa principalmente, en el lema 1.3.1 y el hecho de que

$$\phi \vee \Phi = \frac{\phi + \Phi + |\phi - \Phi|}{2},$$

$$\phi \wedge \Phi = \frac{\phi + \Phi - |\phi - \Phi|}{2}.$$

A continuación, veamos la consistencia de la integral de Lebesgue de una función escalonada.

Teorema 1.3.5. *La integral de Lebesque de una función escalonada está bien definida. En otras palabras, si una función escalonada ϕ tiene dos representaciones*

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \chi_{J_i} = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \chi_{I_j},$$

entonces, tenemos

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \ell(J_i) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \ell(I_j).$$

Demostración. En primer lugar, vamos a demostrar que la integral de cualquier representación de la función escalonada ϕ es igual a la integral de la representación (única) de ϕ construida en el lema 1.3.1, como combinación $\mathbb{R}-$lineal de funciones características de intervalos disjuntos. En segundo lugar, probaremos el caso que nos ocupa, es decir, el valor de la integral de dos representaciones de ϕ es siempre el mismo.

(1) Supongamos que la segunda representación $\sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \chi_{I_j}$ de la función ϕ se ha obtenido a partir de la primera representación $\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \chi_{J_i}$ de la misma función utilizando el lema 1.3.1, por lo tanto, los intervalos $(I_j)_{j=1}^{m}$ son disjuntos dos a dos y

$$c_j = \sum_{i \in A_{ij}} k_i,$$

donde

$$A_{ij} = \{i : I_j \subseteq J_i\}.$$

Usando la primera representación de ϕ, por definición, tenemos

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \ell(J_i).$$

Como el conjunto $\{I_j\}$ es una partición del conjunto de intervalos $\{J_i\}$, entonces, sumando sobre los intervalos $I_j \subset J_i$, se tiene que

$$k_i \cdot \ell(J_i) = \sum_{i \in A_{ij}} k_i \cdot \ell(I_j).$$

Ahora, sumando sobre los intervalos J_i, equivale a sumar sobre los $r-1$ intervalos no triviales $I_j \subset J_i$, y por consiguiente,

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \ell(J_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{i \in A_{ij}} k_i \cdot \ell(I_j)) = \sum_{j=1}^{r-1} c_j \cdot \ell(I_j).$$

Como $\ell(p) = 0, \forall p \in \mathbb{R}$, podemos incluir todos los intervalos triviales en la suma $\sum_{j=1}^{r-1} c_j \cdot \ell(I_j)$ obteniendo, finalmente, que

$$\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \ell(J_i) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \ell(I_j).$$

(2) Ahora, volvemos al caso que nos ocupa. Si

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \chi_{J_i},$$

podemos usar el lema 1.3.1 y reescribir

$$\phi = \sum_{l=1}^{s} a_l \cdot \chi_{G_l}, \tag{1.7}$$

donde, $G_1, ..., G_s$ son intervalos disjuntos dos a dos, y $a_1, ..., a_s \in \mathbb{R}$. Por la parte (1), tenemos que:

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \ell(J_i) = \sum_{l=1}^{s} a_l \cdot \ell(G_l). \tag{1.8}$$

Por el mismo razonamiento que el anterior, si

$$\phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \chi_{I_j}$$

podemos usar el lema 1.3.1 y reescribir

$$\phi = \sum_{q=1}^{t} b_q \cdot \chi_{F_q}, \tag{1.9}$$

donde, $F_1, ..., F_t$ son intervalos disjuntos dos a dos, y $b_1, ..., b_t \in \mathbb{R}$. De nuevo, por la parte (1), tenemos que:

$$\int \phi = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \ell(I_j) = \sum_{q=1}^{t} b_q \cdot \ell(F_q). \tag{1.10}$$

Por el lema 1.3.1 solo existe una (única) manera de expresar ϕ como una combinación $\mathbb{R}-$lineal de funciones características de intervalos disjuntos, luego, las dos representaciones de ϕ dadas en (1.7) y (1.9) son idénticas. Por consiguiente,

$$\sum_{l=1}^{s} a_l \cdot \ell(G_l) = \sum_{q=1}^{t} b_q \cdot \ell(F_q). \tag{1.11}$$

Finalmente, por (1.8), (1.10) y (1.11) se deduce que

$$\int \phi = \sum_{i=1}^{n} c_j \cdot \ell(I_i) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot \ell(I_j)$$

que es lo que queríamos ver. □

El hecho de que el conjunto de las funciones escalonadas forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ es muy importante, ya que, nos permite discutir la linealidad y monotonía de la integral de Lebesque.

Proposición 1.3.6. *Para cada par de funciones escalonadas ϕ y Φ, y para cada par de números reales a y b, la función $a \cdot \phi + b \cdot \Phi$ es una función escalonada, y*

$$\int (a \cdot \phi + b \cdot \Phi) = a \cdot \int \phi + b \cdot \int \Phi.$$

Demostración. Supongamos que,

$$\phi = c_1 \cdot \chi_{I_1} + ... + c_r \cdot \chi_{I_r},$$

donde $I_1, ..., I_r$ son intervalos acotados de $\mathbb{R}$ y $c_1, ..., c_r$ son números reales. Además,

$$\Phi = k_1 \cdot \chi_{J_1} + ... + k_s \cdot \chi_{J_s},$$

donde $J_1,...,J_s$ son intervalos acotados de $\mathbb{R}$ y $k_1,...,k_s$ son números reales. Entonces,

$$a\cdot\phi+b\cdot\Phi=(a\cdot c_1\cdot\chi_{I_1}+...+a\cdot c_r\cdot\chi_{I_r})+(b\cdot k_1\cdot\chi_{J_1}+...+b\cdot k_s\cdot\chi_{J_s}),$$

es una función escalonada y

$$\begin{aligned}\textstyle\int(a\cdot\phi+b\cdot\Phi) &= (a\cdot\ell(I_1)+...+a\cdot\ell(I_r))+(b\cdot\ell(J_1)+...+b\cdot\ell(J_s))\\ &= a\cdot(\ell(I_1)+...+\cdot\ell(I_r))+b(\ell(J_1)+...+\cdot\ell(J_s))\\ &= a\cdot\textstyle\int\phi+b\cdot\int\Phi.\end{aligned}$$

□

Proposición 1.3.7. *Si ϕ y Φ son funciones escalonadas con $\phi\geq\Phi$* [1]*, entonces, $\int\phi\geq\int\Phi$.*

Demostración. En primer lugar, vamos a probar que si $\phi\geq 0$ es una función escalonada, entonces $\int\phi\geq 0$, y en segundo lugar, demostramos el caso que nos ocupa.

(a) Supongamos que $\phi\geq 0$ es una función escalonada. Por el lema 1.3.1, podemos expresar ϕ como una combinación $\mathbb{R}-$lineal de funciones características de intervalos acotados disjuntos

$$\phi=c_1\cdot\chi_{I_1}+...+c_r\cdot\chi_{I_r},$$

donde $I_1,...,I_r$ son intervalos acotados disjuntos dos a dos y $c_1,...,c_r\in\mathbb{R}$.
Como $\phi\geq 0$, entonces, $c_i\geq 0$ para todo $i=1,2,...,r$. Como consecuencia,

$$\int\phi=c_1\cdot\ell(I_1)+...+c_r\cdot\ell(I_r)\geq 0.$$

(b) Ahora si $\phi\geq\Phi$, entonces, $\phi-\Phi\geq 0$ y la parte (a) muestra que

$$\int(\phi-\Phi)\geq 0.$$

Por la linealidad de la integral (proposición 1.3.6)

$$\int\phi-\int\Phi\geq 0,$$

es decir,

$$\int\phi\geq\int\Phi.$$

[1] $\phi(x)\geq\Phi(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

$\square$

El siguiente teorema es fundamental en lo que queda de este capítulo. Básicamente, muestra la importancia de la idea de conjunto nulo (que introducimos en la sección 1.2) en la integral de Lebesgue (cuando utilizamos el método de Daniell).

Antes de enunciar y demostrar el teorema, veamos una definición previa con la finalidad de generalizar la definición de integral de Lebesgue dada en la definición 1.3.1.

Definición 1.3.8. *Si I es una unión de intervalos acotados y disjuntos, es decir, $I = I_1 \cup \ldots \cup I_n$ con $I_1, \ldots, I_n$ intervalos acotados disjuntos. Como $\chi_I = \chi_{I_1} + \ldots + \chi_{I_n}$, entonces, definimos:*

$$\ell(I) = \int \chi_I.$$

Teorema 1.3.9. *Sea $(\phi_n)_n$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas [2] tal que la sucesión numérica $(\int \phi_n)_n$ es convergente. Entonces, el conjunto de los puntos x en los cuales la sucesión $(\phi_n(x))_n$ diverge forma un conjunto nulo.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, vamos a suponer que $\phi_n \geq 0$, en caso contrario, aplicamos el mismo razonamiento a la sucesión $(\phi_n - \phi_1)_n$ y dándonos cuenta de que $\int(\phi_n - \phi_1) = \int \phi_n - \int \phi_1$ por la la proposición 1.3.6.
Como la sucesión $(\int \phi_n)_n$ es convergente, entonces, está acotada. Luego, existe un número real $K > 0$ tal que

$$\int \phi_n \leq K \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Ahora dado $\varepsilon > 0$, definimos:

$$S_n^\varepsilon = \left\{ x \in \mathbb{R} : \phi_n(x) \geq \frac{K}{\varepsilon} \right\}.$$

Por el lema 1.3.1, podemos expresar cada ϕ_n como una combinación $\mathbb{R}-$lineal de funciones características de intervalos acotados y disjuntos, es decir, existen números reales $c_1, \ldots, c_r$ y intervalos acotados disjuntos (dos a dos) $I_1, I_2, \ldots, I_r$ tal que

$$\phi_n = c_1 \cdot \chi_{I_1} + \ldots + c_n \cdot \chi_{I_r}.$$

Como consecuencia, S_n^ε es una unión finita de intervalos acotados y disjuntos. Utilizando funciones características podemos escribir

$$\frac{K}{\varepsilon} \cdot \chi_{S_n^\varepsilon} \leq \phi_n$$

[2] $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x), \forall x \in \mathbb{R}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$.

(usando $\phi_n \geq 0$). Por la monotonía de la integral (proposición 1.3.7),

$$\frac{K}{\varepsilon} \cdot \ell(S_n^\varepsilon) \leq \int \phi_n.$$

Además, como

$$\int \phi_n \leq K,$$

tenemos que

$$\frac{K}{\varepsilon} \cdot \ell(S_n^\varepsilon) \leq K,$$

o sea,

$$\ell(S_n^\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

ya que, $K > 0$.
Ahora, como $\phi_n \leq \phi_{n+1}$, entonces, $S_n^\varepsilon \subset S_{n+1}^\varepsilon$. Si definimos:

$$S^\varepsilon = \cup_{n=1}^\infty S_n^\varepsilon,$$

observamos que S^ε contiene todos los puntos x en los cuales la sucesión $(\phi_n(x))_n$ es divergente. En efecto, si para algún x, la sucesión $(\phi_n(x))_n$ es divergente, entonces, existe un número natural n_0 (que depende de x y ε) tal que $\phi_{n_0}(x) \geq \frac{K}{\varepsilon}$. Por lo tanto, $x \in S_{n_0}^\varepsilon$, y como consecuencia, $x \in S^\varepsilon$. Nuestro teorema quedará demostrado cuando demostremos que S^ε se puede expresar como unión de intervalos disjuntos y acotados $(I_n)_n$ tal que $\sum_{n=1}^\infty \ell(I_n) \leq \varepsilon$.
Pero esto no es difícil, ya que, como S_n^ε es una unión finita de intervalos acotados y disjuntos, entonces, S^ε es una unión (infinita) de intervalos acotados y disjuntos. Por lo tanto, se puede formar una sucesión $(J_n)_n$ de intervalos acotados y disjuntos que cubre S^ε, es decir,

$$S^\varepsilon = \cup_{n=1}^\infty J_n \tag{1.12}$$

de manera que la enumeración sea tal que los n primeros términos de la sucesión $(J_n)_n$ sean subconjuntos de S_n^ε, o sea,

$$J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_n \subset S_n^\varepsilon.$$

Además, como

$$\ell(S_n^\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

se tiene que

$$\ell(J_1) + \ldots + \ell(J_n) \leq \varepsilon,$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^\infty \ell(J_n) = \lim_{n\to\infty} (\ell(J_1) + \ldots + \ell(J_n)) \leq \varepsilon \tag{1.13}$$

Por (1.12) y (1.13) el teorema queda demostrado. □

En general, una propiedad $P(x)$ que es cierta para todo $x \in \mathbb{R}$ salvo en un conjunto nulo, se dice que es cierta en casi todo punto $(c.t.p)$.

Además, denotaremos por L al conjunto de todas las funciones f que son límites puntuales de sucesiones escalonadas que satisfacen el teorema 1.3.9. En otras palabras, si $f \in L$, entonces, existe una sucesión $(\phi_n)_n$ creciente de funciones escalonadas tal que $\phi_n(x) \to f(x)$ $c.t.p$ tal que la sucesión numérica $(\int \phi_n)_n$ esté acotada.

Definición 1.3.10. *Dada una función $f \in L$, definimos la integral de f como*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n(x),$$

donde $(\phi_n)_n$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas que converge puntualmente hacia f y cuya sucesión numérica $(\int \phi_n)_n$ está acotada.

Observamos que en la definición anterior, siempre existe el límite de la parte derecha de la igualdad porque $(\int \phi_n)_n$ es una sucesión creciente y acotada de números reales, por lo tanto, converge. Los dos siguientes lemas van a ser de gran utilidad para ver la consistencia del operador integral $\int$ sobre los elementos de L.

Lema 1.3.2. *Si $(\phi_n)_n$ es una sucesión decreciente de funciones escalonadas positivas tal que $\phi_n(x) \to 0$ $c.t.p$, entonces,*

$$\int \phi_n(x) \to 0.$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, queremos ver que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\int \phi_n \leq \varepsilon$ si $n \geq M$.
Consideramos un intervalo acotado $[a,b]$ tal que ϕ_1 toma el valor cero fuera de él y $K > 0$ tal que $\phi_1 \leq K$, entonces, lo mismo es cierto para ϕ_n (porque la sucesión $(\phi_n)_n$ es decreciente). Denotamos por A_1 al conjunto de los puntos donde alguna ϕ_n es discontinua. Por lo anterior, A_1 es un conjunto numerable, por tanto, lo tanto es un conjunto nulo (para verlo se puede usar el mismo razonamiento que hicimos en el ejemplo 1.2.1 para demostrar que $\mathbb{Q}$ es un conjunto nulo). Sea A_2 el conjunto de los $x \in \mathbb{R}$ en los cuales la sucesión $(\phi_n(x))_n$ es divergente. Consideramos $A = A_1 \cup A_2$, que es un conjunto nulo por la proposición 1.2.2. Supongamos que $(I_n)_n$ es una sucesión de intervalos abiertos y acotados que cubre A y que $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \varepsilon$.
Sea $p \in [a,b]$ y $p \notin A$, entonces, $\phi_n(p) \to 0$, y por lo tanto, existe un $N = N(p) \in \mathbb{N}$ (que depende de p) tal que $\phi_N \leq \varepsilon$. Como p no es un punto de discontinuidad de ϕ_N, entonces, un intervalo abierto J_p conteniendo al punto p y sobre el cual ϕ_N es constante. En otras palabras, $\phi_N(x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in J_p$. Además, como $(\phi_n)_n$ es una sucesión decreciente, entonces, $\phi_n(x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in J_p$ si $n \geq N$. La sucesión de intervalos $(I_n)_n$ junto a los intervalos $(J_p)_{p \notin A}$ forma un cubrimiento de intervalos abiertos del intervalo $[a,b]$.

Pero, como el intervalo $[a,b]$ es compacto, existe un número finito de intervalos $I_1,...,I_r$ y $J_{p_1},...,J_{p_s}$ que también cubre el intervalo $[a,b]$. Tomando $M = N(p_1) \vee ... \vee N(p_s)$, se tiene que

$$\phi_n(x) \leq \varepsilon, \forall x \in \cup_{j=1}^{s} J_{p_j}$$

si $n \geq M$. Si escribimos

$$S = \cup_{i=1}^{r} I_{n_i} \cap [a,b],$$
$$T = \cup_{j=1}^{s} J_{p_j} \cap [a,b],$$

entonces, cada uno de los conjuntos S y T puede expresarse como unión de un número finito de intervalos disjuntos. También observamos que:

$$\ell(S) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \leq \varepsilon$$

y

$$\ell(T) \leq b-a.$$

Como (por construcción)

$$\phi_n \leq K \cdot \chi_S + \varepsilon \cdot \chi_T$$

para $n \geq M$, entonces,

$$\int \phi_n \leq K \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot (b-a) = \varepsilon \cdot (K+b-a)$$

para todo $n \geq M$. Esto concluye la prueba. □

Lema 1.3.3. *Supongamos que las funciones f y $g \in L$ y que $(\phi_n)_n$ y $(\Phi_n)_n$ son las correspondientes sucesiones crecientes de funciones escalonadas que convergen a f y g, respectivamente, en casi todas partes. Si $f \geq g$ en casi todas partes, entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n \geq \lim_{n\to\infty} \int \Phi_n.$$

Demostración. Para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo, la sucesión de funciones escalonadas $(\Phi_m - \phi_n)_n$ es decreciente y converge a un límite negativo en casi todo punto. Por consiguiente la sucesión $(\Phi_m - \phi_n)_n^+$ satisface las condiciones del lema 1.3.2, y por lo tanto,

$$\int (\Phi_m - \phi_n)^+ \to 0.$$

cuando $n \to \infty$ y m fijo. Pero, como

$$\Phi_m - \phi_n \leq (\Phi_m - \phi_n)^+,$$

entonces, por la proposición 1.3.7

$$\int (\Phi_m - \phi_n) \leq \int (\Phi_m - \phi_n)^+.$$

Por la proposición 1.3.6

$$\int (\Phi_m - \phi_n) = \int \Phi_m - \int \phi_n.$$

Luego,

$$\int \Phi_m - \lim_{n\to\infty} \int \phi_n \leq 0.$$

Como m era arbitrario, ahora podemos hacer $m \to \infty$ y concluimos que:

$$\lim_{m\to\infty} \int \Phi_m \leq \lim_{n\to\infty} \int \phi_n.$$

□

Finalmente, podemos ver que la integral definida en la definición 1.3.9 no depende de la sucesión de funciones elegida.

Teorema 1.3.11. *Sean $(\phi_n)_n$ y $(\Phi_n)_n$ dos sucesiones crecientes de funciones acotadas tal que las sucesiones $(\int \phi_n)_n$ y $(\int \Phi_n)_n$ están acotadas superiormente. Si $(\phi_n)_n$ y $(\Phi_n)_n$ convergen a la función f en casi todo punto, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n = \lim_{n\to\infty} \int \phi_n.$$

Demostración. Por el lema 1.3.3, tomando $f = g$, se tiene, por un lado,

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n \geq \lim_{n\to\infty} \int \Phi_n,$$

y por otro lado

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n \leq \lim_{n\to\infty} \int \Phi_n,$$

por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n = \lim_{n\to\infty} \int \Phi_n.$$

□

Llegado a esta altura, lo primero que observamos es que espacio L que hemos definido y que acabamos de ver la consistencia del operador integral $\int$ sobre sus elementos, tiene una estructura llamada Cono Convexo, es decir, si $a, b \geq 0$ y f y $g \in L$, entonces, $a \cdot f + b \cdot g \in L$. Este hecho, lo vamos a demostrar en la siguiente proposición que se había dejado como ejercicio en el libro de Weir [16].

Proposición 1.3.12. *Supongamos que f y g son dos elementos de L y que a y b son dos números reales positivos, entonces, $a\cdot f+b\cdot g$ es un elemento de L, y además,*

$$\int(a\cdot f+b\cdot g)=a\cdot\int f+b\cdot\int g.$$

El resultado anterior se puede extender a n funciones $f_1,\cdots,f_n\in L$ usando inducción.

Demostración. Como $f\in L$, entonces, existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $(\phi_n)_n$ tal que $\phi_n\to f$ en casi todo punto, la sucesión numérica $(\phi_n)_n$ está acotada y por definición $\int f=\lim_{n\to\infty}\int\phi_n$.
Análogamente, como $g\in L$, entonces, existe una sucesión creciente de funciones escalonadas $(\Phi_n)_n$ tal que $\Phi_n\to f$ en casi todo punto, la sucesión numérica $(\Phi_n)_n$ está acotada y por definición $\int g=\lim_{n\to\infty}\int\Phi_n$.
Ahora, como $a,b\geq 0$, entonces, $(a\cdot\phi_n+b\cdot\Phi_n)_n$ también es una sucesión creciente de funciones escalonadas, así que, por la proposición 1.3.6

$$\int(a\cdot\phi_n+b\cdot\Phi_n)=a\cdot\int\phi_n+b\cdot\int\Phi_n$$

para cada $n\in\mathbb{N}$. Por consiguiente,

$$\int(a\cdot\phi_n+b\cdot\Phi_n)\leq a\cdot\lim_{n\to\infty}\int\phi_n+b\cdot\lim_{n\to\infty}\int\Phi_n=a\cdot\int f+b\cdot\int g,$$

es decir, la sucesión $\int(a\cdot\phi_n+b\cdot\Phi_n)_n$ está acotada, por lo tanto, converge, ya que, es creciente.
Por el teorema 1.3.9

$$a\cdot\phi_n+b\cdot\Phi_n\to a\cdot f+b\cdot g$$

c.t.p cuando $n\to\infty$, luego, $a\cdot f+b\cdot g\in L$. Además como las sucesiones numéricas $(\int\phi_n)_n$ y $(\int\Phi_n)_n$ convergen a $\int f$ y $\int g$, entonces,

$$\lim_{n\to\infty}\int(a\cdot\phi_n+b\cdot\Phi_n)=a\cdot\lim_{n\to\infty}\int\phi_n+b\cdot\lim_{n\to\infty}\int\Phi_n=a\cdot\int f+b\cdot\int g=\int(a\cdot f+b\cdot g).$$

□

Pero, desgraciadamente, L no satisface las propiedades que queramos que tenga un espacio de funciones integrables, es decir, no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ (por ejemplo la diferencia de dos elementos de L no es, necesariamente, un elemento de L). Este hecho lo vamos a probar en el siguiente ejemplo que es un ejercicio que hemos sacado en el libro de Weir [16].

Ejemplo 1.3.1. *Sea $(I_n)_n$ una sucesión de intervalos abiertos en $(0,1)$ que cubre el conjunto de los números racionales contenidos en $(0,1)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)\leq\frac{1}{2}$.*
Sea $S=\cup_{n=1}^{\infty}I_n$ y definimos:

$$f=\chi_{(0,1)}-\chi_S.$$

Entonces, f es diferencia de dos elementos de L, pero, no es un elemento de L. Para verlo, vamos a proceder de la siguiente manera.
Por un lado, tenemos que para cada número racional $q\in(0,1)$, existe un intervalo abierto I_n que contiene a q y sobre el cual $f\equiv 0$, es más, cualquier intervalo $I\subset(0,1)$ con $\ell(I)>0$ satisface la condición anterior. Ahora bien, si $(\phi_n)_n$ fuese una sucesión creciente de funciones escalonadas que satisface $\phi_n\leq f c.t.p$, entonces, se debe cumplir que $\phi_n\leq 0\ c.t.p$.
Por un lado, si f fuese un elemento de L, entonces, tendríamos que

$$\int f\leq 0. \tag{1.14}$$

Por otro lado, si $S_n=I_1\cup\ldots\cup I_n$, entonces, $(\chi_{S_n})_n$ es una sucesión creciente de funciones escalonadas que converge hacia χ_S y $\int\chi_{S_n}\leq\frac{1}{2}\Rightarrow\chi_S\in L$ (por el teorema 1.3.7) y $\int\chi_S\leq\frac{1}{2}$. Por consiguiente,

$$\int f=\int\chi_{(0,1)}-\int\chi_S=1-\int\chi_S\geq\frac{1}{2}. \tag{1.15}$$

Por (1.14) y (1.15) llegamos a una contradicción ($f\leq 0$ y $\int f\geq\frac{1}{2}$). Esta contradicción viene del hecho de suponer que $f\in L$.

Aunque L no es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, vamos a utilizarlo para definir un espacio de funciones denotado por L^1 que como veremos en el siguiente capítulo es equivalente al espacio de las funciones integrables sobre $\mathbb{R}$ en el sentido Lebesque (usando la teoría de la medida).

Definición 1.3.13. *Decimos que una función $f\in L^1$ si puede escribirse como diferencia de dos elementos de L, es decir,*

$$f=g-h$$

donde, $g,h\in L$. Además, definimos la integral de f como:

$$\int f=\int g-\int h.$$

Observemos en la definición anterior que haciendo $h=0$, se tiene que si $g\in L$, entonces $g\in L^1$, es decir, $L\subset L^1$.

De nuevo, tenemos que ver la consistencia del operador integral $\int$ sobre los elementos de L^1. Pero, esta vez, es muy fácil. Pues, si $f = g_1 - h_1 = g_2 - h_2$ con $g_1, h_1, g_2, h_2 \in L$, entonces,

$$g_1 + h_2 = g_2 + h_1,$$

así que, por la proposición 1.3.11, tenemos que

$$\int g_1 + \int h_2 = \int g_2 + \int h_1,$$

equivalentemente,

$$\int g_1 - \int h_1 = \int g_2 - \int h_2$$

y eso es exactamente la consistencia que se quería ver.

Vamos a terminar esta sección enunciando algunas propiedades elementales de la integral de Lebesgue.

Teorema 1.3.14. *(I) Si $f, g \in L^1$ y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces, $a \cdot f + b \cdot g \in L^1$ y*

$$\int (a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot \int f + b \cdot \int g.$$

(II) Si $f \in L^1$ y $f \geq 0$ c.t.p, entonces,

$$\int f \geq 0.$$

En particular, si $f, g \in L^1$ y $f \leq g$ c.t.p, entonces, $\int f \leq \int g$.
(III) Si $f \in L^1$, entonces, $|f| \in L^1$ y

$$|\int f| \leq \int |f|.$$

(IV) Si $f, g \in L^1$, entonces, $f \vee g, f \wedge g \in L^1$.
El resultado anterior se puede extender a n funciones $f_1, \cdots, f_n \in L^1$ usando inducción.

La demostración de los apartados del teorema anterior no la detallamos aquí, son comprobaciones rutinarias que no presentan ninguna dificultad.

Capítulo 2

Teoremas de convergencia y conjuntos y funciones Daniell$-$medibles

2.1. Teoremas de convergencia

EN esta sección, vamos a enunciar y demostrar uno de los teoremas más importante en la integral de Lebesgue: el teorema de la convergencia monótona y el de la convergencia dominada. Además definimos las funciones y conjuntos medibles en el sentido de Daniell. Finalizamos el capítulo, analizando unas de las propiedades elementales de estos últimos.

Para escribir este capitulo, nos hemos basado, principalmente, en los siguientes libros: [16] y [14].

2.1.1. Algunas observaciones previas

Recordemos que si $(s_n)_n$ es una sucesión de números reales acotadas, es decir, existe un $K > 0$ tal que

$$-K \leq s_n \leq K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, podemos construir dos sucesiones monótonas de la siguiente manera:

$$\{s_n, s_{n+1}, \dots\}$$

es un conjunto (no vacío) de números reales y que está acotado, entonces,

$$u_n = \sup\{s_n, s_{n+1}, \dots\}$$

tiene sentido para cada $n \in \mathbb{N}$. Además,

$$u_n \geq u_{n+1},$$

es decir, la sucesión $(u_n)_n$ es decreciente. Por el mismo razonamiento que el anterior,

$$l_n = \text{ínf}\{s_n, s_{n+1}, \dots\}$$

también tiene sentido para cada $n \in \mathbb{N}$. Ademas,

$$l_n \leq l_{n+1},$$

decir, la sucesión $(l_n)_n$ es creciente. Por la definición, está claro que si $m \leq n$, entonces,

$$l_m \leq l_n \leq u_n \leq u_m.$$

Como $(u_n)_n$ es una sucesión decreciente de números reales y acotada, entonces, tiene límite u (que llamamos límite superior de la sucesión $(s_n)_n$), es decir,

$$u = \limsup s_n.$$

Por un razonamiento similar que al anterior la sucesión $(l_n)_n$ tiene límite l (que llamamos límite inferior de la sucesión $(s_n)_n$), es decir,

$$l = \liminf s_n.$$

Finalmente, recordamos que una sucesión $(s_n)_n$ acotada de números reales converge a un número $s \in \mathbb{R}$, si y solamente si, $\liminf s_n = \limsup s_n = s$.
La demostración de la última afirmación se puede consultar en el libro [16].

2.1.2. Teorema de la convergencia monótona

EL objetivo de esta sección es demostrar el clásico teorema de la convergencia monótono de Lebesgue adaptado a la integral de Daniell.

El siguiente teorema nos será de gran utilidad para la prueba del teorema de la convergencia monótona.

Teorema 2.1.1. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión creciente de funciones de L cuyas integrales están acotadas ($\int f_n \leq K$ para todo n). Entonces, $(f_n)_n$ converge en casi todo punto a una función $f \in L$, y*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demostración. Por definición de L, existen sucesiones crecientes $(\phi_{nm})_{n,m}$ de funciones escalonadas de modo que, para cada $m \in \mathbb{N}$, la sucesión $(\phi_{mn})_n$ de funciones escalonadas converge en casi todo punto a f_m, y además,

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_{mn} = \int f_m.$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\phi_n = \vee\{\phi_{ij} : 1 \le i, j \le n\}.$$

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n es una función escalonada por la proposición 1.3.14 y la sucesión $(\phi_n)_n$ es creciente. Como $\phi_n \le f_n$ en casi todo punto (por construcción) y, además,

$$\int f_n \le K, \forall n,$$

entonces,

$$\int \phi_n \le K$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, por el teorema 1.3.9,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = f \in L\ c.t.p \tag{2.1}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n = \int f. \tag{2.2}$$

Ahora falta por ver que

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f$$

en casi todo punto y que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

En efecto, por definición de ϕ_n,

$$\phi_{mn} \le \phi_n$$

con $m \le n$. Manteniendo la m fijo y haciendo $n \to \infty$, tenemos que $f_m \le f$ $(m = 1, 2, ...)$ en casi todo punto. Por lo tanto, tendremos,

$$\phi_n \le f_n \le f, \forall n$$

en casi todo punto, como consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n \le \lim_{n\to\infty} f_n \le f.$$

Por consiguiente, (2.1) implica que

$$f \le \lim_{n\to\infty} f_n \le f,$$

por el teorema de sándwich

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

De manera similar, tenemos que

$$\int \phi_n \leq \int f_n \leq \int f$$

y, por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int \phi_n = \int f$$

por (2.2). De nuevo, el teorema de sándwich implica que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

□

Para la prueba del teorema de la convergencia monótona, además del teorema anterior, vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sea $f \in L^1$. Dado $\varepsilon > 0$, existen $g, h \in L$ tal que $f = g - h$, donde h es una función positiva y*

$$\int h < \varepsilon.$$

Demostración. Como $f \in L^1$, entonces, $f = g_1 - h_1$, donde $g_1, h_1 \in L$. Por ser h_1 elemento de L, entonces, existe una sucesión creciente $(\phi_n)_n$ de funciones escalonadas que converge hacia h_1 en casi todo punto y, además, $\lim_{n\to\infty} \int \phi_n = \int h_1$, por lo tanto, existe un $M \in \mathbb{N}$ (suficientemente grande) tal que

$$0 \leq \int h_1 - \int \phi_M < \varepsilon.$$

Entonces,

$$h_2 = h_1 - \phi_M$$

es positiva en casi todo punto, $h_2 \in L$ y satisface

$$0 \leq \int h_2 < \varepsilon.$$

Además, $g_2 = g_1 - \phi_M \in L$ y $f = g_2 - h_2$.
Como h_2 es positiva casi en todo punto, $h = h_2$ y $g = g_2$ en casi todo punto, entonces, $g,\ h$ satisfacen las condiciones del lema. □

Ahora, podemos enunciar y demostrar el clásico teorema de la convergencia monótona de Lebesgue adaptado a la integral de Daniell.

Teorema 2.1.2. *Sea $(f_n)_n$ es una sucesión monótona de funciones en L^1 cuyas integrales están acotadas ($\int f_n \leq K, \forall n \in \mathbb{N}$). Entonces, $(f_n)_n$ converge casi en todo punto a una función $f \in L^1$, y*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que $(f_n)_n$ es una sucesión creciente de funciones positivas.
Si escribimos

$$a_1 = f_1 \ , a_n = f_n - f_{n-1}$$

con $n \geq 2$, entonces,

$$f_n = a_1 + ... + a_n$$

y

$$a_n \geq 0, \forall\ n \geq 1.$$

Aplicando al lema 2.1.1 a los a_n con $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ para cada $n \geq 1$, concluimos que existen funciones positivas $b_n, c_n \ \in L$ tal que $a_n = b_n - c_n$, y además,

$$0 \leq \int c_n < \frac{1}{2^n}.$$

Notemos que los b_n son funciones positivas porque $b_n = a_n + c_n$. Definiendo

$$g_n = b_1 + ... + b_n$$

$$h_n = c_1 + ... + c_n,$$

tenemos que

$$f_n = g_n - h_n, \tag{2.3}$$

donde $g_n, h_n \in L$. Claramente, $(g_n)_n$, $(h_n)_n$ son sucesiones crecientes (por sus definiciones) de elementos de L por la proposición 1.3.12. Por un lado,

$$\int h_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} < 1.$$

Por otro lado, por la igualdad dada en (2.3) y la proposición 1.3.12, tenemos que

$$\int g_n = \int f_n + \int h_n.$$

Por consiguiente, las sucesiones $(\int g_n)_n$, $(\int h_n)_n$ están acotadas. Ahora, por el teorema 2.1.1, existen funciones $g, h \in L$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \quad y \quad \lim_{n\to\infty} h_n = h.$$

Como consecuencia de lo anterior y por (2.3), tenemos que

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} (g_n - h_n) = g - h \in L^1. \tag{2.4}$$

Además, por el mismo teorema 2.1.1, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g$$

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n = \int h,$$

y por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f. \tag{2.5}$$

Por (2.4) y (2.5) el teorema queda demostrado. □

2.1.3. Teorema de la convergencia dominada

UNA vez demostrado el teorema de la convergencia monótona, vamos a utilizarlo para probar la versión de Daniell del clásico Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

Teorema 2.1.3. *Sea $(f_n)_n$ es una sucesión de función en L^1 que converge casi en todo punto hacia una función f. Supongamos, además, que existe una función $g \in L^1$ tal que*

$$|f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

entonces, $f \in L^1$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Demostración. Sea

$$N = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \neq f(x)\}.$$

y definimos:

$$l_n(x) = \text{ínf}\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\},$$

$$u_n(x) = \sup\{f_n(x), f_{n+1}(x), \ldots\}$$

si $x \notin N$ y $l_n(x) = u_n(x) = 0$ si $x \in N$. Ahora, ya tenemos dos sucesiones monótonas de funciones $(l_n)_n$ y $(u_n)_n$ que convergen hacia f en casi todo punto y que satisfacen

$$l_n \leq f_n \leq u_n \tag{2.6}$$

para todo n y casi todo punto. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, l_n y u_n fuesen elementos de L^1, entonces, el teorema 2.1.2 demuestra que $f \in L^1$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \int l_n = \int f,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int u_n = \int f.$$

Pero, por (2.6) y el teorema 1.3.14 se concluye que

$$\int l_n \leq \int f_n \leq \int u_n$$

y por el teorema del sándwich tendríamos que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Por el razonamiento anterior, para probar el teorema, lo único que tenemos que demostrar es que l_n y u_n son elementos de L^1 para todo n. En efecto, por el teorema 1.3.14 tenemos que

$$l_{nk} = f_n \wedge f_{n+1} \ldots \wedge f_{n+k},$$

$$u_{nk} = f_n \vee f_{n+1} \ldots \vee f_{n+k}$$

son elementos de L^1. Por éste último, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} l_{nk} = l_n,$$

además

$$\lim_{k\to\infty} u_{nk} = u_n.$$

Como $|f_n| \leq g$, se tiene que

$$|l_{nk}| \leq g$$

y

$$|u_{nk}| \leq g.$$

Ahora, el hecho de que $g \in L^1$ implica $\int g \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\int l_{nk} \leq \int g$$

y

$$\int u_{nk} \leq \int g,$$

. Luego, las sucesiones $(\int l_{nk})_k$ y $(\int u_{nk})_k$, además de ser monótonas, están acotadas. Finalmente, por el teorema 2.1.2 se deduce que

$$l_n, u_n \in L^1,$$

que es lo que queríamos ver. □

2.2. Conjuntos y funciones medibles

EN esta última sección, además de extender el espacio L^1 de las funciones integrables en el sentido de Daniell a un nuevo espacio $\mathscr{M}$ cuyos elementos se llamarán funciones medibles, vamos a definir el espacio $\mathbb{S}$ de los conjuntos medibles en el sentido de Daniell. En primer lugar, definiremos lo que entendemos por una función medible, y a partir de ésta última, un conjunto medible. Lo interesante de esta nueva forma de proceder es que las definiciones anteriores se consiguen sin el uso la teoría de la medida. Acabamos el capítulo, estudiando algunas propiedades elementales de las funciones y conjuntos medibles.

Definición 2.2.1. *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si la función $F = g \vee (f \wedge h) \in L^1$ para todo $g, h \in L^1$ con $g \leq 0 \leq h$.*

La definición anterior se puede comprender su significado observando que:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ h(x) & \text{si } h(x) < f(x) \\ g(x) & \text{si } f(x) < g(x). \end{cases}$$

A continuación, vamos a enunciar algunas propiedades elementales de las funciones y los conjuntos medibles.

Proposición 2.2.2. *Supongamos que $f, f_1, f_2 \in \mathscr{M}$ y c_1 $c_2 \in \mathbb{R}$, entonces,*

(a) $f_1 \vee f_2, f_1 \wedge f_2 \in \mathscr{M}$.
(b) $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \mathscr{M}$.
(c) Sea $(f_n)_n$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{M}$. Si $f_n(x) \to f(x)$ en casi todo punto, entonces, $f \in \mathscr{M}$.

Demostración. La prueba de los apartados (a) y (b) las vamos a omitir, ya que no presentan dificultades.
Para ver el apartado (c), procedemos de la siguiente manera:
Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que, $f_n \in \mathscr{M}$,y por consiguiente, $F_n = g \vee (f_n \wedge h) \in L^1$ para todo $g, h \in L^1$ con $g \leq 0 \leq h$.
Por tanto, como bien sabemos, si $(a_n)_n$ es una sucesión de números reales tal que $a_n \to a \in \mathbb{R}$, entonces, $a_n \wedge b \to a \wedge b$ y $a_n \vee b \to a \vee b$ para todo $b \in \mathbb{R}$.
Como $f_n(x) \to f(x)$ $c.t.p$, si $F = g \vee (f \wedge h)$, entonces, $F_n(x) \to F(x)$ $c.t.p$. Ahora, para ver que $f \in \mathscr{M}$, lo único que tenemos que demostrar es que $F \in L^1$. Pero, eso no es difícil, ya que, $(F_n)_n$ es una sucesión de elementos de L^1 y $g \leq F_n \leq h$, y por lo tanto, $|F_n| \leq (-g) \vee h$. Por consiguiente, por el teorema 2.1.3 se tiene que $F \in L^1$, ya que, $(-g) \vee h \in L^1$. □

A continuación, vamos a definir los conjuntos medibles en el sentido de Daniell y presentamos algunas de sus propiedades.

Definición 2.2.3. *Un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es medible, si y solamente si, $\chi_E \in \mathscr{M}$.*

Denotamos por $\mathbb{S}$ a la clase de los conjuntos medibles.

Proposición 2.2.4. *(a) La función característica de $\mathbb{R}$ $\chi_{\mathbb{R}} \equiv 1 \in \mathscr{M}$, es decir, $\mathbb{R} \in \mathbb{S}$.*
(b) Si $E_1, E_2 \in \mathbb{S}$, entonces, $E_1 \setminus E_2 \in \mathbb{S}$.
(c) Si $(E_n)_n$ es una sucesión de elementos de $\mathbb{S}$, entonces, $G = \cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbb{S}$.

Demostración. (a) Observamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n = \chi_{[-n,n]} \in L^1$, entonces, $f_n = \chi_{[-n,n]} \in \mathscr{M}$, es decir, $(f_n)_n$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{M}$ y $f_n \to \chi_{\mathbb{R}}$, por la proposición 2.2.2 $\chi_{\mathbb{R}} \in \mathscr{M}$, equivalentemente, $\mathbb{R} \in \mathbb{S}$.

(b) Sea $E_1, E_2 \in \mathbb{S}$. Como $\chi_{E_1 \setminus E_2} = f_1 - f_1 \wedge f_2$, donde $f_k = \chi_{E_k}$ con $k = 1, 2$, entonces, $\chi_{E_1 \setminus E_2} \in \mathscr{M}$ por la proposición 2.2.2, y como consecuencia de lo último, $E_1 \setminus E_2 \in \mathbb{S}$.

(c) Sea $E_1, E_2 \in \mathbb{S}$. Como $\chi_{E_1 \cup E_2} = f_1 \vee f_2$ donde $f_k = \chi_{E_k}$ con $k = 1, 2$, entonces, por el la proposición 2.2.2 se tiene que $\chi_{E_1 \cup E_2} \in \mathscr{M}$, ya que, $f_1, f_2 \in \mathscr{M}$, equivalentemente, $E_1 \cup E_2 \in \mathbb{S}$. Usando inducción, se ve que si $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathbb{S}$, entonces, $G_n = E_1 \cup E_2 \cdots E_n \in \mathbb{S}$, es decir, $\chi_{G_n} \in \mathscr{M}$. Como $(\chi_{G_n})_n$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{M}$ y que $\chi_{G_n}(x) \to \chi_G(x)$ $c.t.p$, donde $G = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, entonces, $\chi_G \in \mathscr{M}$ por la proposición 2.2.2, lo que es lo mismo que, $G \in \mathbb{S}$.

□

Capítulo 3

Coincidencia de construcción entre la integral de Daniell y la de Lebesgue

El propósito de este capítulo es probar la equivalencia de la integral de Daniell y la de Lebesgue sobre funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, en el sentido de que, los conjuntos medibles en el sentido de Daniell son los mismos que aquellos medibles en el sentido de Lebesgue, las funciones medibles en el sentido de Daniell son las mismas que aquellas medibles en el sentido de Lebesque y, finalmente, el espacio L^1 obtenido a partir de la integral de Daniell o la de Lebesque es siempre el mismo.

Para elaborar este capítulo, nos hemos basado, principalmente, en los siguientes libros: [7], [10], [14] y [11].

3.1. Algunas observaciones previas

Recordemos que dado un conjunto E, una clase $\mathscr{A}$ de subconjuntos de E es llamado $\sigma-$ álgebra si satisface las siguientes tres propiedades:

(I) Contiene $E : E \in \mathscr{A}$.
(II) Es cerrado por complementarios: $A \in \mathscr{A}$, si y solamente si, $A^c \in \mathscr{A}$.
(III) Es cerrado por uniones numerables: si $(A_n)_n$ es una sucesión de elementos de $A \in \mathscr{A}$ entonces, $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in A \in \mathscr{A}$.

En este caso, decimos que el par $(E, \mathscr{A})$ es un espacio medible.

En particular, si (E, τ) es un espacio topológico y la $\sigma-$ álgebra $\mathscr{A}$ fuese generada por los elementos de τ, entonces, $\mathscr{A}$ se llamará álgebra de Borel.
Los elementos del álgebra de Borel se llaman conjuntos de Borel o conjuntos borelianos en honor del matemático francés Émil Borel, que publicó en 1898 una primera exposición del algebra boreliana de los números reales.
Además, una medida sobre $(E, \mathscr{A})$ es una aplicación $\mu : \mathscr{A} \longrightarrow [0, \infty]$ que:

(I) asocia el valor 0 al conjunto vacio: $\mu(\emptyset) = 0$.

(II) es $\sigma-$ aditiva: para toda sucesión $(A_n)_n$ de elementos de $\mathscr{A}$ disjuntos dos a dos,

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty}A_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n).$$

En este caso, decimos que la terna $(E,\mathscr{A},\mu)$ es un espacio de medida.

Si $(A_n)_n$ es una sucesión creciente ($A_n \subset A_{n+1}$), entonces, definimos su límite como la unión de todos los A_n :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

Análogamente, si $(A_n)_n$ es una sucesión decreciente ($A_{n+1} \subset A_n$), entonces, definimos su límite como la intersección de todos los A_n :

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \cap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

Sin embargo, si $(A_n)_n$ es una sucesión arbitraria de conjuntos, podemos formar dos sucesiones monótonas de la siguiente manera:

$$B_n = \cap_{k=n}^{\infty}A_k,$$
$$C_n = \cup_{k=n}^{\infty}A_k,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $(B_n)_n$ es una creciente de conjuntos, entonces, tiene límite (que llamamos límite superior de la sucesión $(A_n)_n$, es decir,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \lim_{n\to\infty} B_n = \cap_{n=1}^{\infty}B_n = \cup_{n=1}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

Análogamente, $(C_n)_n$ por ser una sucesión decreciente de conjuntos, tiene límite (que llamamos límite superior de la sucesión $(A_n)_n$), es decir,

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \lim_{n\to\infty} C_n = \cup_{n=1}^{\infty}C_n = \cup_{n=1}^{\infty}\cap_{k=n}^{\infty}A_k.$$

Finalmente, denotaremos por $A\triangle B$ a la diferencia simétrica de A y B, es decir,

$$A\triangle B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A).$$

3.1.1. Medida e integral de lebesgue

EN esta sección, tenemos como objetivo hacer un repaso bastante general de los conceptos fundamentales de la integral de Lebesgue. La medida y la integral de Lebesgue se enseñan en la asignatura "funciones de varias variables *II* " de segundo curso del grado. Todos los resultados de esta sección están presentados sin demostración. La teoría de la integral de Lebesque se puede enfocar de muchas maneras distintas. En este trabajo solo desarrollamos una de estas maneras.

Denotaremos por $\mathscr{E}$ la clase de los subconjuntos de $\mathbb{R}$ que son uniones finitas de intervalos acotados. Además, recordemos que si $A \in \mathscr{E}$ y $A = I_1 \cup \cdots \cup I_n$ intervalos disjuntos dos a dos, denotamos

$$\ell(A) = \sum_{k=1}^{n} \ell(I_k).$$

Definición 3.1.1. *La medida exterior de Lebesgue sobre* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ *es una aplicación* $\lambda^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,\infty]$ *definida por*

$$\lambda^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(A_n) : A \subset \cup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ y } A_n \in \mathscr{E}\}.$$

A continuación, vamos a definir lo que entendemos por un conjunto medible utilizando la medida exterior de Lebesgue.

Definición 3.1.2. *Un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es medible si $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$, A_n es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y, además, existe una sucesión $(A_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathscr{E}$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n \triangle A_{n,m}) = 0.$$

Denotamos por $\mathbb{S}(\lambda)$ la familia de los conjuntos medibles en el sentido de la definición 3.1.2. Además, si $A \in \mathbb{S}(\lambda)$ decimos que A es medible en el sentido de Lebesgue.

Teorema 3.1.3. $\mathbb{S}(\lambda)$ *es una $\sigma-$álgebra y la función $\lambda : \mathscr{M}(\lambda) \longrightarrow [0,\infty[$ definida por*

$$\lambda(A) = \lambda^*(A)$$

es una medida que se llama medida de Lebesgue.

Observemos que la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ es una medida definida sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}$ y da sentido a la noción física de longitud. La medida exterior de lebesgue en $\mathbb{R}$ es, en realidad, una extensión de la medida de Lebesgue a una clase más amplia de subconjuntos de $\mathbb{R}$

Definición 3.1.4. *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si $f^{-1}(]c,\infty[) \in \mathbb{S}(\lambda)$ para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Cuando una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible en el sentido de la definición anterior, decimos que f es medible en el sentido de Lebesgue. Además, denotaremos por $\mathscr{M}(\lambda)$ a la clase de todas las funciones medible en el sentido de la definición 3.1.4. De la definición anterior, se puede ver, fácilmente, que si $f^{-1}(]c,\infty[) \in \mathbb{S}(\lambda)$ para todo $c \in \mathbb{R}$, entonces, $f^{-1}(I) \in \mathbb{S}(\lambda)$ para todo intervalo I.

Definición 3.1.5. *Una función $s \in \mathscr{M}(\lambda)$ se dice simple si toma un número finito de valores, es decir, f se puede escribir como*

$$s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k},$$

donde $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son números reales y $A_1, \cdots, A_n$ son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1.6. *Para toda función $f \in \mathscr{M}(\lambda)$, existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples que convergen puntualmente hacia f. Además,*

(I) *Si f es una función positiva (que toma valores no negativos), entonces, podemos elegir la sucesión $(s_n)_n$ de forma que sea creciente y cada término sea una función positiva.*

(II) *Si f es una función acotada, entonces, podemos elegir la sucesión $(s_n)_n$ de forma que converja uniformemente hacia f.*

3.1.2. Integral respecto de la medida de Lebesgue de funciones medibles

EN esta sección, vamos a definir la integral de Lebesgue de funciones medibles positivas. En primer lugar, definimos la integral de Lebesgue de las funciones simples positivas. Luego, extendemos esta definición a las funciones $f \in \mathscr{M}(\lambda)$ positivas, y posteriormente, a funciones $f \in \mathscr{M}(\lambda)$ de signo arbitrario. Finalmente, acabamos la sección enunciando los dos teoremas fundamentales de la integral de Lebesgue (teorema de la convergencia monótona y dominada) y el Lema de Borel-Cantelli.

Definición 3.1.7. *Para toda función s simple y positiva, llamamos integral de s respecto a λ al elemento $\int_{\mathbb{R}} s\, d\lambda$ de $[0,\infty]$ definido por*

$$\int_{\mathbb{R}} s\, d\lambda = \sum_{\alpha \in s(\mathbb{R})} \alpha \lambda(\{x : s(x) = \alpha\}),$$

con la convención $0 \cdot \infty = 0$.

La definición anterior no depende, afortunadamente, de la representación de s, ya que, siempre que $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$, tendremos que

$$\int_{\mathbb{R}} s\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \lambda(A_k).$$

Definición 3.1.8. *Para toda función $f \in \mathscr{M}(\lambda)$ positiva, llamamos integral de f respecto a λ al elemento definido por*

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}} s: \ \textit{función simple},\ 0 \leq s \leq f \right\} \in [0, \infty].$$

Si $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$, decimos que f es integrable.

Teorema 3.1.9. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión creciente de elementos de $\mathscr{M}(\lambda)$ cuyos términos son funciones positivas, entonces, $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ es una función positiva que pertenece a $\mathscr{M}(\lambda)$ y*

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda.$$

Definición 3.1.10. *Sea $f \in \mathscr{M}(\lambda)$. Si las dos integrales $\int_{\mathbb{R}} f^+\, d\lambda$ y $\int_{\mathbb{R}} f^-\, d\lambda$ son finitas, es decir, $\int_{\mathbb{R}} |f|\, d\lambda < \infty$, entonces , decimos que f es λ-integrable y definimos la integral de f como el número real $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f^+\, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f^-\, d\lambda.$$

Denotaremos por $L^1(\lambda)$ al conjunto de todas las funciones integrables (cuya integral es un número real).

Teorema 3.1.11. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión de elementos de $L^1(\lambda)$ que converge puntualmente hacia una función f. Si $|f_n| \leq g$ con $g \in L^1(\lambda)$, entonces, $f \in L^1(\lambda)$ y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

Lema 3.1.1. *Sea $(A_n)_n$ una sucesión de elementos de $\mathbb{S}(\lambda)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) < \infty$, entonces,*

$$\lambda\left(\limsup_{n\to\infty} A_n \right) = 0.$$

Ahora, ya estamos en condición para demostrar la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de Daniell de funciones f reales de variable real.

3.2. Equivalencia de la integral de lebesgue y la de Daniell

EN esta sección, vamos a demostrar la coincidencia de construcciones de la integral de Lebesgue y la de Daniell. Básicamente, vamos a probar que los conjuntos medibles, funciones medibles, funciones integrables que se obtienen son los mimos utilizando el método de Daniell (sin teoría de la medida) o el de Lebesgue (con teoría de la medida). Recordamos que en el capítulo anterior $\mathbb{S}$, $\mathscr{M}$ y L^1 denotan la clase de los conjuntos medibles, de la funciones medibles y de las funciones integrables en el sentido de las definiciones 2.2.1, 2.2.3 y 1.3.13, respectivamente. Sin embargo, en este capítulo $\mathbb{S}(\lambda)$, $\mathscr{M}(\lambda)$ y $L^1(\lambda)$ denotan la clase de los conjuntos medibles, de la funciones medibles y de las funciones integrables en el sentido de las definiciones 3.1.2 y 3.1.4 y 3.1.10, respectivamente. Nuestro objetivo es probar que ambas construcciones coinciden, es decir, $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\lambda)$, $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\lambda)$ y, finalmente, $L^1 = L^1(\lambda)$.

El siguiente resultado es de suma importancia para probar la equivalencia de la integral de Lebesgue (usando teoría de la medida) y la de Daniell. La demostración que presentamos aquí la hemos sacado en el libro de Gordon [14].

Proposición 3.2.1. *$f \in \mathscr{M}$, si y solamente si, $f^{-1}(]c,\infty[) \in \mathbb{S}$.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathscr{M}$ y dado $c \in \mathbb{R}$, consideramos

$$E = \{x : f(x) > c\}$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$f_n = n\,[f - (f \wedge c)]\,.$$

Como $1 \in \mathscr{M}$ por la proposición 2.2.2, entonces, $c \in \mathscr{M}$. Por consiguiente, por la misma proposición citada anteriormente, es decir, por la proposición 2.2.2 se tiene que $f_n \in \mathscr{M}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la función

$$g_n = 1 \wedge f_n.$$

Claramente, $(g_n)_n$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{M}$. Además,
• si $x \in E$, entonces, $f_n(x) = n\,[f(x) - c]$, es decir, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$, luego, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$.
• si $x \notin E$, $f_n(x) = 0 = g_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Luego, se tiene que $\lim_{n\to\infty} g_n = \chi_E$. Por lo tanto, por la proposición 2.2.2 $\chi_E \in \mathscr{M}$, equivalentemente, $E \in \mathbb{S}$.
Recíprocamente, supongamos que $f^{-1}(]c,\infty[) \in \mathbb{S}$ para todo $c \in \mathbb{R}$. En particular, $f^{-1}(]a,b])$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$.
Supongamos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ [1]. Sea $\varepsilon > 1$ y consideramos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$E_k(\varepsilon) = \{x : \varepsilon^k < f(x) \leq \varepsilon^{k+1}\},$$

[1] en caso contrario, hacemos $f = f^+ - f^-$ y aplicamos el mismo razonamiento tanto a f^+ como a f^-.

$k \in \mathbb{Z}$ y
$$E = \{x : f(x) = 0\}.$$
Por hipótesis, cada uno de los conjuntos anteriores son elementos de $\mathscr{M}$. Además, por la proposición 2.2.2 $\left(\sum_{k=-n}^{k=n} \varepsilon^k \chi_{E_k}(\varepsilon)\right)_n$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{M}$ que converge puntualmente hacia la función dada por $f_\varepsilon := \sum_{-\infty}^{\infty} \varepsilon^n \chi_{E_n(\varepsilon)}$, luego,
$$f_\varepsilon \in \mathscr{M}, \text{ para todo } \varepsilon > 1.$$
En siguiente paso, consiste en elegir una sucesión $(\varepsilon_n)_n$ tal que $\varepsilon_n > 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 1$. Para este propósito, tomamos un $\delta > 1$ y definimos $\varepsilon_n = \delta^{\alpha_n}$, donde $\alpha_n = 2^{1-n}$.
Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $g_n = f_{\varepsilon_n}$. Por un lado, claramente, por el razonamiento anterior , $(g_n)_n$ es una sucesión de elementos de $\mathscr{M}$. Por otro lado, está claro (por construcción) que $g(x) = 0 = f(x)$ para todo $x \in E$. Además,
$$0 < f(x) - g_n(x) < \varepsilon_n^{k+1} - \varepsilon_n^k = \varepsilon_n^k(\varepsilon_n - 1) < f(x)(\varepsilon_n - 1),$$
siempre que, $0 < f(x) < \infty$. Por consiguiente, $(g_n)_n$ por ser una sucesión de elementos de $\mathscr{M}$ que converge puntualmente hacia f, se tiene que $f \in \mathscr{M}$ por el teorema 2.2.2. □

Proposición 3.2.2. *Si $f \in L^1$, entonces, $f \in L^1(\lambda)$ y*
$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int f.$$
Demostración. Por hipótesis, $f = g - h$, donde $g, h \in L$, decir, existen sucesiones crecientes $(g_n)_n$, $(h_n)_n$ de funciones escalonadas, tal que, $\lim_{n\to\infty} g_n = g$, $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ y $\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n < \infty$, $\int g = \lim_{n\to\infty} \int g_n < \infty$. Sin perdida de generalidad, supongamos que los términos de las sucesiones $(g_n)_n$ y $(h_n)_n$ son funciones positivas (en caso contrario aplicamos el mismo razonamiento a las sucesiones $(g_n - g_1)_n$ y $(h_n - h_1)_n$.
Como para cada $n \in \mathbb{N}$, g_n, h_n son funciones escalonadas, en particular, funciones simples, se tiene que $g_n, h_n \in L^1(\lambda)$, y claramente,
$$\int g_n = \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda.$$
Por el razonamiento anterior y 3.1.9 se tiene que
$$\int_{\mathbb{R}} g \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \int g < \infty.$$
Análogamente,
$$\int_{\mathbb{R}} h \, d\lambda = \int h < \infty.$$

Por consiguiente, $g,h \in L^1(\lambda)$, así que, $f \in L^1(\lambda)$ y

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} g\, d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = \int g - \int h = \int f.$$

□

Proposición 3.2.3. *La clase de los conjuntos medibles en el sentido de la definición 2.2.1 es igual a la de los conjuntos medibles en el sentido de la definición 3.1.4, es decir,*

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}(\lambda).$$

Demostración. Supongamos que $A \in \mathbb{S}(\lambda)$. por definición, existen una sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y una sucesión $(A_{n,m})_m$ de elementos de $\mathscr{M}$ tal que
$A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda^*(A_n \triangle A_{n,m}) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Extrayendo una subsucesión (si es necesario), podemos suponer que
$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_n \triangle A_{n,m}) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, afirmamos que $\lim_{m\to\infty} \chi_{An,m} = \chi_{A_n}$ $c.t.p.$ En efecto,

$$\begin{aligned}
\{x \in \mathbb{R} : \lim_{m\to\infty} \chi_{A_{n,m}}(x) \neq \chi_{A_n}\} &= \{x \in A_n : x \notin A_{n,m} \text{ para infinitos } m \in \mathbb{N}\} \\
&\quad \bigcup \{x \notin A_n^c : x \in A_{n,m} \text{ para infinitos } m \in \mathbb{N}\} \\
&= \{x \in A_n \triangle A_{n.m} : x \in A_{n,m} \text{ para infinitos } m \in \mathbb{N}\} \\
&= \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_n \triangle A_{n,k} \\
&= \limsup_{m\to\infty} A_n \triangle A_{n,m}.
\end{aligned}$$

Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_n \triangle A_{n,m}) < \infty$, entonces, por el lema de Borel−Cantelli (lema 3.1.1) se tiene que $\limsup_{m\to\infty} \lambda^*(A_{n,m} \triangle A_n) = 0$, y en particular,

$$\{x \in \mathbb{R} : \lim_{m\to\infty} \chi_{A_{n,m}}(x) \neq \chi_{A_n}(x)\}$$

es un conjunto nulo. Ahora, como $A_{n,m} \in \mathscr{M}$, entonces, $\chi_{A_{n,m}}$ es una función escalonada y por lo tanto está en $\mathscr{M}$. Así que, χ_{A_n} por ser límite de una sucesión $(\chi_{A_{n,m}})_m$ de elementos de $\mathscr{M}$ es un elemento de $\mathscr{M}$ por el teorema 2.2.2.
Pero, $\chi_{A_n} \in \mathscr{M}$ equivale a que $A_n \in \mathbb{S}$, por consiguiente, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{S}$ por la proposición 2.2.4.
Recíprocamente, supongamos que $A \in \mathbb{S}$. Entonces, $\chi_A \in \mathscr{M}$, y por lo tanto, $\chi_{A\cap[-n,n]} = \chi_A \wedge \chi_{[-n,n]} \in \mathscr{M}$ por la proposición 2.2.2, ya que, $\chi_{[-n,n]} \in \mathscr{M}$.
Así que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $0 \vee (\chi_A \wedge \chi_{[-n,n]}) = \chi_{A\cap[-n,n]} \in L^1$. Pero, como $L^1 \subset L^1(\lambda)$ por la proposición 3.2.2, se concluye que $\chi_{A\cap[-n,n]} \in \mathscr{M}(\lambda)$. Por ser $(\chi_A \cap [-n,n])_n$ una sucesión creciente de funciones positivas de elementos de $\mathscr{M}(\lambda)$ se tiene que su límite $\chi_A \in \mathscr{M}(\lambda)$ por el teorema 3.1.9, en particular, $A = \chi_A^{-1}(0,\infty) \in \mathbb{S}(\lambda)$. □

Corolario 3.2.1. *La clase de las funciones medibles en el sentido de la definición 2.2.3 es igual a la de los conjuntos medibles en el sentido de la definición 3.1.2, es decir,*

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}(\lambda).$$

Demostración. La prueba es una consecuencia inmediata de la proposición 3.2.1, proposición 3.2.3 y la definición de $\mathscr{M}(\lambda)$. □

Proposición 3.2.4. *Si $f \in L^1(\lambda)$, entonces, $f \in L^1$.*

Demostración. Como $f \in L^1(\lambda)$, entonces, $\int f^+ \, d\lambda < \infty$, $\int f^- \, d\lambda < \infty$ y por el corolario 3.2.1 $f \in \mathscr{M} = \mathscr{M}(\lambda)$. Ahora, $f \in \mathscr{M}$ implica que $f_n = 0 \vee (f \wedge \chi_{[-n,n]}) = f^+ \wedge \chi_{[-n,n]} \in L^1$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, $(f^+ \wedge \chi_{[-n,n]})_n$ es una sucesión de elementos de L^1 y, además, $\int f^+ \wedge \chi_{[-n,n]} = \int f^+ \wedge \chi_{[-n,n]} d\lambda < \int f^+ d\lambda < \infty$. Luego, por el teorema 2.1.2, $f^+ \in L^1$. Análogamente, $f^- \in L^1$. Por lo tanto, $f = f^+ - f^- \in L^1$. □

Corolario 3.2.2. *$f \in L^1(\lambda)$, si y solamente si, $f \in L^1$.*

Demostración. La prueba es una consecuencia inmediata de la proposición 3.2.2 y la proposición 3.2.4. □

El siguiente resultado resume lo probado en la proposición 3.2.3, los corolarios 3.2.1. y 3.2.2.

Teorema 3.2.5. *(Equivalencia de la integral de Daniell y la de Lebesgue).*
La integral de Daniell y la de Lebesgue son equivalentes en el sentido de que:
(a) $\mathbb{S} = \mathbb{S}(\lambda)$.
(b) $\mathscr{M} = \mathscr{M}(\lambda)$.
(c) $L^1 = L^1(\lambda)$ *y las integrales coinciden.*

Capítulo 4

Integral de McShane

El objetivo de este capítulo es exponer la integral de McShane. En en fondo, la integral de McShane es una generalización de la integral de Riemann. En la primera sección, presentamos la integral de McShane y estudiamos algunos de sus propiedades. En la segunda sección, adaptamos el clásico teorema de la convergencia monótona de la integral de Lebesgue a la integral de McShane. Finalmente, en la última sección probamos la equivalencia de la integral de McShane y la de Lebesgue sobre las funciones medibles sobre intervalos compactos de $\mathbb{R}$.

Para redactar este capitulo, hemos seguido, principalmente, los siguientes libros: [9] y [4].

4.1. Algunas observaciones previas

Recordemos que un conjunto dirigido es un par $(\mathscr{D},\preceq)$ en el que $\mathscr{D}$ es un conjunto y $\preceq$ es una relación en $\mathscr{D}$ que verifica las siguientes propiedades:

(I) Para cada $x\in\mathscr{D}$, $x\preceq x$ (propiedad reflexiva).
(II) Para cada $x,y,z\in\mathscr{D}$ tales que $x\preceq y$ e $y\preceq z$, entonces, $x\preceq z$ (propiedad transitiva).
(III) Para cada $x,y\in\mathscr{D}$, existe $z\in\mathscr{D}$ tal que $x\preceq y$ e $y\preceq z$.

Además, una red sobre $\mathbb{R}$ es una aplicación $r:(\mathscr{D},\preceq)\longrightarrow\mathbb{R}$.
Notemos que una sucesión es una red donde el conjunto dirigido es $\mathbb{N}$ con su orden usual. Además, diremos que una red $r:(\mathscr{D},\preceq)\longrightarrow\mathbb{R}$ converge a $r_0\in\mathbb{R}$ y escribimos $\lim r=r_0$ si para cada $\varepsilon>0$ existe un $x\in\mathscr{D}$ tal que $|r(y)-r_0|<\varepsilon$ si $x\leq y$.

Es fácil probar que r, s son redes sobre $\mathbb{R}$ con $\lim r=r_0$, $\lim s=s_0$, entonces, $\lim(\alpha r+\beta s)=\alpha\lim r+\beta\lim s$ para cada $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. El lector interesado puede consultar resultados sobre las aplicaciones de las redes en topología en los siguientes libros: [6], [8] o [2].
Finalmente, si $A\subset\mathbb{R}$ con $A\neq\emptyset$ y $x\in\mathbb{R}$, entonces, podemos definir la distancia de x al conjunto A de la siguiente manera:

$$\rho(x,A)=\inf\{|x-a|:a\in A\}.$$

4.2. Definición de la integral de McShane y algunas de sus propiedades

En esta sección, exponemos la integral de McShane y exploramos algunas de sus propiedades.

Definición 4.2.1. *Un calibre del intervalo* $[a,b]$ *es una función* $\delta : [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$*. Llamaremos partición de McShane del intervalo* $[a,b]$ *a una colección*

$$\mathscr{P} = \{([a_i,b_i],s_i) : i = 1,\cdots,n\}$$

donde

(I) $\{[a_i,b_i]\}_{i=1,\cdots,n}$ *es un conjunto de subintervalos que no se solapan y cuya unión es* $[a,b]$.

(II) $s_i \in [a,b]$ *para cada* $1 \leq i \leq n$*. Estos puntos se llaman puntos asociados de la partición* $\mathscr{P}$*. Cada* s_i *no está necesariamente en el subintervalo asociado* $[a_i,b_i]$.

La partición $\mathscr{P}$ *se dice subordinada a un calibre* δ *cuando*

$$[a_i,b_i] \subset [x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)]$$

para todo $i = 1,\cdots,n$*. En tal caso escribiremos abreviadamente P sub* δ.
Además, si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función, entonces, la suma de McShane de* f *asociada a* $\mathscr{P}$ *se define como*

$$f(\mathscr{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)(b_i - a_i).$$

Denotaremos el conjunto de particiones de McShane subordinadas a un calibre δ mediante $m\prod_\delta[a,b]$.

La existencia de suficientes particiones de McShane está garantizada por el siguiente lema.

Lema 4.2.1. *(Lema de Cousin).*
Dado un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$ *siempre existe una partición de McShane de* $[a,b]$ *subordinada a* δ.

Demostración. Consideramos el recubrimiento abierto $\{(s-\delta(s), s+\delta(s))\}_{s\in[a,b]}$ del compacto $[a,b]$. Podemos extraer un subcubrimiento finito

$$\{(s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i))\}_{i=1,\cdots,n}.$$

Sea $T = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ es el conjunto formado por a y b y los puntos $s_i - \delta(s_i)$ o $s_i + \delta(s_i)$ que están en $[a,b]$. Afirmamos que para cada $j \in \{1,\cdots,N\}$ existe un índice $i_j \in \{1,\cdots,n\}$ tal que $[t_{j-1},t_j] \subset [s_{i_j} - \delta(s_{i_j}), s_{i_j} + \delta(s_{i_j})]$. En efecto, fijado $j \in \{1,\cdots,\mathbb{N}\}$ existe un $i_j \in \{1,\cdots,n\}$ de modo que $t_{j-1} \in (s_{i_j} - \delta(s_{i_j}), s_{i_j} + \delta(s_{i_j}))$. De aquí y la definición de los t_j se sigue que $t_j \leq s_{i_j} + \delta(s_{i_j})$, de donde $[t_{j-1},t_j] \subset [s_{i_j} - \delta(s_{i_j}), s_{i_j} + \delta(s_{i_j})]$.
Como consecuencia,

$$\mathscr{P} = \{([t_{j-1},t_j], s_{i_j}) : j = 1,\cdots,N\}$$

es una partición de McShane de $[a,b]$ subordinada al calibre δ. □

Ahora, pasamos a ver la definición de una función integrable en el sentido de McShane.

Definición 4.2.2. *Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice integrable McShane en $[a,b]$ si existe $L \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe un calibre δ de modo que, para toda partición $\mathscr{P}$ subordinada al calibre δ se tiene que*

$$|f(\mathscr{P}) - L| < \varepsilon.$$

Como se puede observar, la definición anterior es una generalización de la integral de Riemann. Además, como ocurre en la integral de Riemann, se puede interpretar la integrabilidad de McShane de una función en término de redes. Para ello, definimos el conjunto

$$\mathscr{D} = \{(\mathscr{P},\delta) : \delta \quad \text{es un calibre y } \mathscr{P} \in m\textstyle\prod_\delta[a,b]\},$$

preordenado por la relación (reflexiva y transitiva)

$$(\mathscr{P},\delta) \preceq (\mathscr{P}',\delta'), \text{ si y solamente si, } \delta' \leq \delta.$$

$(\mathscr{D},\preceq)$ es un conjunto dirigido. Las propiedades reflexivas y transitivas son obvias. Veamos la tercera propiedad: dados $(\mathscr{P},\delta),(\mathscr{P}',\delta') \in \mathscr{D}$, podemos tomar el calibre $\delta'' = \text{mín}(\delta,\delta')$ y por el lema 4.2.1 existe una partición $\mathscr{P}''$ sub δ''. Evidentemente, $(\mathscr{P},\delta) \preceq (\mathscr{P}'',\delta'')$ y $(\mathscr{P}',\delta') \preceq (\mathscr{P}'',\delta'')$.
Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos asociarle una red $MS_f : \mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$MS_f(\mathscr{P},\delta) = f(\mathscr{P}).$$

Si $(\mathscr{P},\delta) \preceq (\mathscr{P}',\delta') \in \mathscr{D}$, entonces, $\mathscr{P}' \in m\prod_\delta[a,b]$ y, por lo tanto, son equivalentes:

(I) f es integrable McShane en $[a,b]$.

(II) La red MS_f es convergente.

En tal caso, el elemento $L \in \mathbb{R}$ que aparece en la definición 4.2.2 coincide con el límite de la red MS_f, y por lo tanto, es único. Se llama integral de McShane de f en $[a,b]$ y se le denota por $\int_a^b f$. Además, denotamos por $MS[a,b]$ al espacio de las funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ McShane integrables.

En un espacio métrico completo, una red es convergente, si y solamente si, se cumple la condición de Cauchy. Aplicando esto a la red anterior, tenemos el siguiente criterio de Cauchy

Proposición 4.2.3. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Son equivalentes:*

(I) *f es integrable McShane en $[a,b]$: $f \in MS[a,b]$.*

(II) *Para cada $\varepsilon > 0$ existe un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$ de manera que si $\mathscr{P}, \mathscr{P}' \in m\prod_\delta[a,b]$, entonces*
$$|f(\mathscr{P}) - f(\mathscr{P}')| < \varepsilon.$$

Ahora, vamos a ilustramos la definición 4.2.2 mediante el siguiente ejemplo que nos muestra que la función de Dirichlet mencionada en la introducción es McShane integrable.

Ejemplo 4.2.1. *Sea*
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \textit{ es racional} \\ 0 & \textit{si } x \textit{ es irracional}. \end{cases}$$
Entonces, f es McShane integrable y
$$\int_0^1 f = 0.$$

Demostración. Fijamos $\varepsilon > 0$ y elegimos una numeración $(r_n)_n$ de los números racionales contenidos en $[0,1]$. Definimos $\delta : [0,1] \longrightarrow]0,\infty[$ por
$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} & \text{si } x = r_n \\ 1 & \text{si } x \neq r_n. \end{cases}$$
Por el lema 4.2.1, sea $\mathscr{P} = \{(x_i,[a_i,b_i]) : i = 1,\cdots,s\} \in m\prod_\delta[0,1]$; en particular tenemos que $b_i - a_i \leq 2\delta(x_i)$ para cada $1 \leq i \leq s$.
Además, observamos que
$$0 \leq \sum_{i=1}^{s} f(x_n)(b_n - a_n) = \sum_{n=1, x_n\in\mathbb{Q}}^{m} (b_n - a_n) \leq \sum_{n=1,\ r_n\in\mathbb{Q}}^{\infty} 2\delta(r_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$$

con $m \leq s$, ya que, a la derecha de la primera igualdad en la expresión anterior, hemos eliminado los términos en los cuales x_n es irracional porque en dicho caso $f(x_n) = 0$. Además, hemos puesto $f(x_n) = 1$ para los x_n que pertenecen a $\mathbb{Q}$. Por consiguiente,

$$0 \leq \sum_{n=1}^{s} f(x_n)(b_n - a_n) \leq \varepsilon,$$

es decir, f es McShane integrable en $[0,1]$ y $\int_0^1 f = 0$. □

A continuación, pasamos a enunciar unas propiedades elementales de la integral de McShane.

Proposición 4.2.4. *Si f y g dos funciones McShane integrable en $[a,b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces, $\alpha f + \beta g$ es McShane integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

En otras palabras, el espacio $MS[a,b]$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y la integral es una forma lineal sobre él

Demostración. Sean $f, g \in MS[a,b]$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Las redes asociadas cumplen que $MS_{\alpha f} + MS_{\beta g} = \alpha MS_f + \beta MS_g$. Como f y g son McSahne integrables, entonces, tenemos garantizada la existencia de

$$\text{lím}(MS_{\alpha f} + MS_{\beta g}) = \alpha\, \text{lím} MS_f + \beta\, \text{lím} MS_g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$

que es lo que queríamos ver. □

Proposición 4.2.5. *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es McShane integrable y $J \subset [a,b]$ es un subintervalo cerrado, entonces, $f_{|J}$ es integrable McShane en J y la integral se denota por $\int_J f$.*

Demostración. Para ver que $f_{|J}$ es integrable McShane en J, vamos a aplicar el criterio de Cauchy dado en la proposición 4.2.3. Sea $\varepsilon > 0$ (fijo) y tomemos un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow]0, \infty[$ tal que

$$|f(\mathscr{P}) - f(\mathscr{P}')| < \varepsilon.$$

para todo $\mathscr{P}, \mathscr{P}' \in m\prod_{\delta}[a,b]$. Consideramos el calibre $\delta_J = \delta_{|J}$ y elegimos dos particiones $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \in m\prod_{\delta_J}(J)$. Claramente, $\overline{[a,b] \setminus J}$ es unión de uno (si un extremo de J es a o b) o dos subintervalos disjuntos I, H cerrados de tal manera que I, J, H no se solapan y su unión es $[a,b]$. Por el lema 4.2.1, podemos encontrar en I y H particiones $\mathscr{P}_I$ y $\mathscr{P}_H$ subordinadas por $\delta_{|I}$ y $\delta_{|H}$, respectivamente. Ahora, podemos construir dos particiones de McShane de $[a,b]$ subordinadas por δ de la siguiente manera:

(a) $\mathscr{P}$ formada por los subintervalos de $\mathscr{P}_I, \mathscr{P}_H$ y $\mathscr{P}_1$ con sus correspondientes puntos asociados.
(b) $\mathscr{P}'$ formada por los subintervalos de $\mathscr{P}_I, \mathscr{P}_H$ y $\mathscr{P}_2$.
Es obvio que $f(\mathscr{P}) - f(\mathscr{P}') = f(\mathscr{P}_1) - f(\mathscr{P}_2)$. Por consiguiente,

$$|f(\mathscr{P}) - f(\mathscr{P}')| = |f(\mathscr{P}_1) - f(\mathscr{P}_2)| < \varepsilon.$$

Como $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ eran particiones arbitrarias de J subordinadas por δ_J, entonces, por el criterio de Cauchy dado dado en la proposición 4.2.3 $f_{|J}$ es integrable McShane en J.

□

Proposición 4.2.6. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *McShane integrable en* $[a,b]$. *Si* $a < c < b$, *entonces,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Fijamos ε y tomamos un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$ tal que $\mathscr{P} \in m\prod_\delta[a,b]$, entonces,

$$|f(\mathscr{P}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por la proposición 4.2.5 $f_{|[a,c]}$ y $f_{|[c,b]}$ son integrables en $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente. Por consiguiente, existen particiones de McShane $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ de $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente, subordinadas por δ tal que

$$|f(\mathscr{P}_1) - \int_a^c f| < \frac{\varepsilon}{3} \quad y \quad |f(\mathscr{P}_2) - \int_c^b f| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

La partición de McShane $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ formada tomando los subintervalos de $\mathscr{P}_1$ y $\mathscr{P}_2$ con sus correspondientes puntos asociados verifica que
(a) está subordinada por δ.
(b) $f(\mathscr{P}_1) + f(\mathscr{P}_2) = f(\mathscr{P})$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
|\textstyle\int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f| &= |(\textstyle\int_a^b f - f(\mathscr{P})) + f(\mathscr{P}) - \int_a^c f - \int_c^b f| \\
&= |(\textstyle\int_a^b f - f(\mathscr{P})) + f(\mathscr{P}_1) + f(\mathscr{P}_2) - \int_a^c f - \int_c^b f| \\
&= |(\textstyle\int_a^b f - f(\mathscr{P})) + (f(\mathscr{P}_1) - \int_a^c f) + (f(\mathscr{P}_2) - \int_c^b f)| \\
&\leq |\textstyle\int_a^b f - f(\mathscr{P})| + |f(\mathscr{P}_1) - \int_a^c f| + |f(\mathscr{P}_2) - \int_c^b f| \\
&< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

por la elección del calibre δ. La validez de la desigualdad anterior para cualquier $\varepsilon > 0$ nos da la identidad buscada. □

4.3. Teorema de la convergencia monótona

En esta sección, vamos a enunciar y probar el teorema de la convergencia monótona para sucesiones de funciones $(f_n)_n$ McShane integrables. Este teorema, lo utilizaremos más tarde para la prueba de la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de McShane sobre funciones definidas sobre intervalos compactos que toman valores en $\mathbb{R}$.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable McShane. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta : [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$ un calibre tal que $|f(\mathscr{P}) - \int_a^b f| < \varepsilon$ para cada $f(\mathscr{P}) \in m\prod_\delta[a,b]$. Si

$$\mathscr{P} = \{([c_i,d_i],s_i) : i = 1,\cdots,n\} \in m\prod_\delta[a,b],$$

por la proposición 4.2.5 sabemos que $f_{|[a,x]}$ es McShane integrable para todo $x \in [a,b]$. Por lo tanto, podemos definir

$$F(x) = \int_a^x f$$

con $x \in [a,b]$. La función F verifica que

$$F(d_i) - F(c_i) = \int_{c_i}^{d_i} f.$$

Pero, por la proposición 4.2.6 se deduce que

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} f$$

Por consiguiente, si definimos $F(\mathscr{P}) := \sum_{i=1}^n (F(d_i) - F(c_i))$, entonces,

$$\int_a^b f = F(\mathscr{P}).$$

La notación $F(\mathscr{P})$ no debe confundirse con la introducida tras la definición 4.2.1.

Definición 4.3.1. *Dado un calibre $\delta : [a,b] \longrightarrow [0,\infty[$, una partición parcial de McShane subordinada a δ es una colección finita*

$$\mathscr{P} = \{([a_i,b_i],s_i) : i = 1,\cdots,n\}$$

donde
- $s_i \in [a,b]$ *para* $i = 1,\cdots,n$.
- $\{[a_i,b_i]\}_{1\leq i\leq n}$ *son subintervalos de* $[a,b]$ *que no se solapan.*
- $[a_i,b_i] \subset [s_i - \delta(s_i), s_i + \delta(s_i)]$ *para cada* $i = 1,\cdots,n$..

El siguiente resultado constituye una herramienta fundamental para la prueba del teorema de la convergencia monótona para sucesiones de funciones $(f_n)_n$ McShane integrables.

Lema 4.3.1. *(El lema de Saks−Henstock).*
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable McShane. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta : [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$ un calibre tal que $|f(\mathscr{P}_0) - F(\mathscr{P}_0)| < \varepsilon$ para cada $\mathscr{P}_0 \in m\prod_\delta[a,b]$, donde

$$F(x) = \int_a^x f$$

con $x \in [a,b]$. Si $\mathscr{P} = \{([c_i,d_i],s_i) : i = 1,\cdots,n\}$ es una partición parcial de McShane subordinada a δ, entonces,

$$|F(\mathscr{P}) - f(\mathscr{P})| \leq \varepsilon.$$

Demostración. Fijamos $J_1,\cdots,J_p$ subintervalos cerrados de $[a,b]$ que no se solapan entre sí, que no solapan con los de $\mathscr{P}$ y tales que

$$(\cup_{i=1}^p J_i) \cup (\cup_{i=1}^n [c_i,d_i]) = [a,b].$$

Como f es McShane integrable, por la proposición 4.2.5 para cada $i = 1,\cdots,p$ podemos encontrar una sucesión $(\mathscr{P}_{i,k})_k$ de elementos de $m\prod_\delta(J_i)$ tal que

$$\lim_k f(\mathscr{P}_{i,k}) = \int_{J_i} f. \tag{4.1}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la partición de McShane $\mathscr{P}_k \in m\prod_\delta[a,b]$ formada por los subintervalos de $\mathscr{P}$ más los de $\mathscr{P}_{i,k}$ $(1 \leq i \leq p)$, con sus correspondientes puntos asociados. Evidentemente, $\mathscr{P}_k$ está subordinada a δ y por la proposición 4.2.6

$$\begin{aligned}
|f(\mathscr{P}_k) - F(\mathscr{P}_k)| &= |\textstyle\sum_{i=1}^n f(s_i)(d_i - c_i) + \sum_{j=1}^p f(\mathscr{P}_{j,k}) - \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} f - \sum_{j=1}^p \int_{J_j} f| \\
&= \left|\left((\textstyle\sum_{i=1}^n f(s_i)d_i - c_i) - \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} f\right) + \sum_{j=1}^p \left(f(\mathscr{P}_{j,k}) - \int_{J_j} f\right)\right| \\
&= |f(\mathscr{P}) - F(\mathscr{P}) + \textstyle\sum_{j=1}^p (f(\mathscr{P}_{j,k}) - \int_{J_j} f)|
\end{aligned}$$

Como para cada $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_k \in m\prod_\delta[a,b]$, tenemos que

$$|f(\mathscr{P}_k) - F(\mathscr{P}_k)| < \varepsilon.$$

Como consecuencia,

$$|f(\mathscr{P}) - F(\mathscr{P}) + \sum_{j=1}^p (f(\mathscr{P}_{j,k}) - \int_{J_j} f)| < \varepsilon.$$

Por (4.1), tenemos que $k \to \infty$ implica que

$$|f(\mathscr{P}) - F(\mathscr{P})| \leq \varepsilon$$

que es lo que queríamos ver. □

Adaptamos a continuación el clásico teorema de la convergencia monótona de la integral de Lebesgue a la integral de McShane.
Antes de enunciar y probar el teorema de la convergencia monótona, veamos la siguiente lema:

Lema 4.3.2. *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ McShane integrables tales que $f \leq g$. Entonces,*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Demostración. En primer lugar, vamos a ver que si $h : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función McShane integrable tal que $h \geq 0$, entonces,

$$\int_a^b h \geq 0.$$

En efecto, como $h \in MS[a,b]$ y $h \geq 0$, entonces, la red asociada a h es positiva, es decir,

$$MS_h \geq 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_a^b h = \lim MS_h \geq 0.$$

Ahora, por la proposición 4.2.4 $g - f \in MS[a,b]$ y

$$\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f.$$

Además, como $g - f \geq 0$, tenemos que

$$\int_a^b (g-f) \geq 0.$$

Por consiguiente,

$$\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0.$$

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

De lo anterior, se deduce que

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

□

Ahora, pasamos al teorema de la convergencia monótona.

Teorema 4.3.2. *Sea $(f_n)_n$ una sucesión monótona de funciones $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ McShane integrables que converge puntualmente hacia una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si la sucesión numérica $(\int_a^b f_n)_n$ está acotada, entonces, f es McShane integrable y*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Demostración. Sin perdida de generalidad, vamos a suponer que $(f_n)_n$ es una sucesión creciente de funciones positivas McShane integrables.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$F_n(x) = \int_a^x f_n$$

y, además, sea

$$L = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < L - \int_a^b f_n < \varepsilon \text{ para cada } n \geq N. \tag{4.2}$$

También, como $f_n(x) \to f(x)$(puntualmente), entonces, para cada $x \in [a,b]$, existe un $N_x \leq N$ tal que

$$0 < f(x) - f_{N_x}(x) < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, como f_n es McShane integrable, sea

$$\delta_n : [a,b] \longrightarrow]0,\infty[$$

un calibre tal que

$$|f_n(\mathscr{P}) - F_n(\mathscr{P})| < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{4.4}$$

para cada partición $\mathscr{P}$ subordinada a δ_n. Podemos tomar $\delta_n = \delta_1 \wedge \delta_2 \wedge \cdots \wedge \delta_n$ si fuese necesario, así que, vamos a suponer que $(\delta_n)_n$ es una sucesión decreciente de funciones positivas. Definimos el calibre $\delta(x) = \delta_{N_x}(x)$ para $x \in [a,b]$. Supongamos que

$$\mathscr{P} = \{([c_i,d_i],x_i) : i = 1,\cdots,q\}$$

es una partición de McShane de $[a,b]$ subordinada a δ. Deseamos mostrar que

$$|f(\mathscr{P})-L|<\varepsilon.$$

Sea $M=N_{x_1}\vee N_{x_2}\vee\cdots\vee N_{x_q}$ y para $N\le n\le M$, sea

$$\mathscr{P}_n=\{([c_i,d_i],x_i):N_{x_i}=n\}.$$

Claramente, $\mathscr{P}_n$ está subordinada a δ_n y

$$\lambda(\mathscr{P}_n)=\sum_{i:N_{x_i}=\,n}(d_i-c_i).$$

Como $(F_n)_n$ es una sucesión de funciones positivas (por su definición) y por el lema 4.3.2 es una sucesión creciente de funciones, entonces,

$$F_N(\mathscr{P}_n)\le F_n(\mathscr{P}_n)\le F_M(\mathscr{P}_n).$$

Además, si k satisface $N\le k\le M$, entonces, por la proposición 4.2.6 tenemos que

$$\int_a^b f_k=\sum_{i=1}^{q}\int_{c_i}^{d_i}f_k=\sum_{n=N}^{M}\sum_{i:N_{x_i}=\,n}\int_{c_i}^{d_i}f_k=\sum_{n=N}^{M}F_k(\mathscr{P}_n).$$

Por consiguiente,

$$\int_a^b f_N=\sum_{n=N}^{M}F_N(\mathscr{P}_n)\le\sum_{n=N}^{M}F_n(\mathscr{P}_n)\le\sum_{n=N}^{M}F_M(\mathscr{P}_n)=\int_a^b f_M$$

porque $N\le n\le M$. Como consecuencia de las desigualdades anteriores y por (4.2), se deduce que

$$\Big|\sum_{n=N}^{M}F_n(\mathscr{P}_n)-L\Big|<\varepsilon. \tag{4.5}$$

Como $N\le n\le M$, por (4.3), tenemos que

$$0<f(\mathscr{P}_n)-f_n(\mathscr{P}_n)=\sum_{i:N_{x_i}=\,n}(f(x_i)-f_n(x_i)(d_i-c_i)<\sum_{i:N_{x_i}=\,n}\varepsilon(d_i-c_i)=\varepsilon\lambda(\mathscr{P}_n).$$

En particular,

$$|f(\mathscr{P}_n)-f_n(\mathscr{P}_n)|<\varepsilon\lambda(\mathscr{P}_n). \tag{4.6}$$

Además, como $\mathscr{P}_n$ es una partición parcial de McShane subordinada a δ, entonces, teniendo en cuenta (4.4) y el lema de Saks$-$Henstock, es decir, el lema 4.3.1, tenemos que

$$|f_n(\mathscr{P}_n)-F_n(\mathscr{P}_n)|<\frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{4.7}$$

Finalmente, combinando (4.5), (4.6) y (4.7) tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(\mathscr{P})-L| &= |\textstyle\sum_{n=N}^{M}(f(\mathscr{P}_n)-f_n(\mathscr{P}_n))+\sum_{n=N}^{M}(f_n(\mathscr{P}_n)-F_n(\mathscr{P}_n))+\sum_{n=N}^{M}(F_n(\mathscr{P}_n)-L)| \\
&\leq \textstyle\sum_{n=N}^{M}|f(\mathscr{P}_n)-f_n(\mathscr{P}_n)|+\sum_{n=N}^{M}|f_n(\mathscr{P}_n)+F_n(\mathscr{P}_n)|+\sum_{n=N}^{M}|F_n(\mathscr{P}_n)-L| \\
&< \textstyle\sum_{n=N}^{M}\varepsilon\lambda(\mathscr{P}_n)+\sum_{n=N}^{M}\frac{\varepsilon}{2^n}+\varepsilon \\
&< \varepsilon(b-a)+\varepsilon+\varepsilon \\
&= (b-a+2)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que para cada partición de McShane $\mathscr{P}$ de $[a,b]$ subordinada al calibre δ se tiene que

$$|f(\mathscr{P})-L|<(b-a+2)\varepsilon.$$

La validez de la desigualdad anterior para todo $\varepsilon>0$ implica que f es integrable McShane con integral L, que es lo que se querría probar. □

4.4. La equivalencia de Lebesgue-McShane

EN esta sección, vamos a probar la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de McShane sobre funciones medibles definidas sobre intervalos compactos de $\mathbb{R}$ a valores reales. Procederemos de la siguiente manera: demostraremos que las dos integrales son equivalentes sobre el espacio de las funciones simples (medibles), luego, utilizaremos el teorema de la convergencia monótona para extender el resultados sobre el espacio de las funciones medibles.

Teorema 4.4.1. *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ una función simple (medible), entonces, f es McShane integrable y*

$$\int_a^b f=\int_{[a,b]} f\,d\lambda.$$

Demostración. Basta probar el teorema suponiendo que f es la función característica de un conjunto $E\subseteq[a,b]$ medible. En el caso en que f fuese una función simple, se utiliza la linealidad de la integral y se obtiene el resultado deseado.
Suponemos que $f=\chi_E$ con $E\subseteq[a,b]$ medible. Sea $E\subseteq[a,b]$ un subconjunto medible de $[a,b]$ y sea $I=[a,b]$ y $H=I\setminus E$ (también es medible por ser diferencia de dos conjuntos medibles).
Dado $\varepsilon>0$, sean A_1,A_2 dos conjuntos abiertos tal que

$$E\subseteq A_1 \quad y \quad H\subseteq A_2.$$

También, supongamos que

$$\lambda(A_1) < \lambda(E) + \varepsilon \quad y \quad \lambda(A_2) < \lambda(H) + \varepsilon \text{ [1]}. \tag{4.8}$$

Ahora sea $\delta : [a,b] :\longrightarrow]0,\infty[$ un calibre definida por

$$\delta(x) = \begin{cases} \rho(x, A_1^c) & \text{si } x \in E \\ \rho(x, A_2^c) & \text{si } x \in H. \end{cases}$$

y

$$\mathscr{P} = \{([c_i, d_i], x_i) : i = 1, \cdots, n\}$$

una partición de McShane del intervalo $[a,b]$ subordinada a δ. Evidentemente, por la definición de δ, si $[c_i, d_i] \subset E$ para algún $i \in \{1, \cdots, n\}$, entonces, $x_i \in E$. Sean $\mathscr{P}_E$ los elementos de $\mathscr{P}$ cuyos puntos asociados están en E y $\mathscr{P}_H = \mathscr{P} \setminus \mathscr{P}_E$. Entonces, por la definición de función característica y (4.8) se tiene que

$$\chi_E(\mathscr{P}) = \chi_E(\mathscr{P}_E) < \lambda(A_1) < \lambda(E) + \varepsilon; \tag{4.9}$$

$$\chi_H(\mathscr{P}) = \chi_H(\mathscr{P}_H) < \lambda(A_2) < \lambda(H) + \varepsilon. \tag{4.10}$$

Ahora, como $\chi_E = \chi_I - \chi_H$, entonces, se cumple que

$$\chi_E(\mathscr{P}) = \chi_I(\mathscr{P}) - \chi_H(\mathscr{P}) = \lambda(I) - \chi_H(\mathscr{P}).$$

Además, por (4.10), concluye que

$$\chi_E(\mathscr{P}) = \lambda(I) - \chi_H > \lambda(I) - \lambda(H) - \varepsilon = \lambda(E) - \varepsilon.$$

Por consiguiente,

$$\lambda(E) - \chi_E(\mathscr{P}) < \varepsilon. \tag{4.11}$$

Pero, por (4.9), tenemos que

$$-(\lambda(E) - \chi_E(\mathscr{P})) < \varepsilon. \tag{4.12}$$

Finalmente, por (4.11) y (4.12), se deduce que

$$|\lambda(E) - \chi_E(\mathscr{P})| < \varepsilon,$$

es decir, $f = \chi_E$ es McShane integrable en $[a,b]$ y su integral es $\lambda(E)$, que es lo que se querría ver. □

[1] Podemos suponer que los abiertos A_1, A_2 que contienen E y H, respectivamente, satisfacen $\lambda(A_1) < \lambda(E) + \varepsilon$ y $\lambda(A_2) < \lambda(H) + \varepsilon$ porque la medida de Lebesgue es regular. El lector interesado puede consultar lo anterior en el libro [10] de Rudín página 334.

A continuación, vamos a probar la equivalencia de la integral de Lebesgue y la de McShane sobre funciones medibles definidas sobre intervalos compactos de $\mathbb{R}$ a valores en $\mathbb{R}$.
El siguiente resultado está propuesto como ejercicio en el libro de Gordon [4].

Teorema 4.4.2. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función medible, entonces, f es McShane integrable y*

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f \, d\lambda.$$

Demostración. Supongamos que f es una función positiva [2]. Como f es medible, entonces, por el teorema 3.1.6 existe una sucesión $(s_n)_n$ de funciones simples medibles de manera que

(I) $s_n \geq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
(II) $s_n \leq s_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
(III) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ para cada $x \in [a,b]$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, por el teorema 4.4.1, s_n es McShane integrable y

$$\int_a^b s_n = \int_{[a,b]} s_n \, d\lambda.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n \, d\lambda. \tag{4.13}$$

Ahora, por el teorema 4.3.2, f es McShane integrable y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \int_a^b f. \tag{4.14}$$

Análogamente, por el teorema 3.1.9, f es medible y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f \, d\lambda. \tag{4.15}$$

Por (4.13), (4.14) y (4.15) se concluye que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} s_n \, d\lambda = \int_{[a,b]} f d\lambda.$$

[2] En caso contrario, escribimos $f = f^+ - f^-$ y aplicamos el mismo razonamiento a f^+ y f^-. Finalmente, usando la linealidad de la integral se obtiene el resultado deseado.

Por consiguiente,

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Teorema 4.4.3. *Sean $f \in MS[a,b]$ y $F(x) = \int_a^b f$ para cada $x \in [a,b]$. Entonces*

(a) F es continua en $[a,b]$.
(b) F es derivable en casi todo punto en $[a,b]$ y $F' = f$.
(c) f es medible.

La demostración del teorema anterior se basa en el lema 4.3.1 de Saks−Henstock, el lector interesado puede encontrar una prueba en el libro de Gordon [4] en la página 145. Además por los teoremas 4.4.2 y 4.4.3 se tiene el siguiente resultado

Teorema 4.4.4. *Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable de Lebesgue si y, solamente, si lo es en el sentido de McShane. Además el valor de la integral es el mismo en ambos sentidos.*

Bibliografía

[1] T. M. APOSTOL, *Calculus. Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*, Second edition, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[2] B.CASCALES AND S.TROYANSKI., *Fundamentos de análisis matemático*. Murcia, 2007.

[3] D. COHN, *Measure Theory*, Birkhäuser Boston, second ed., 1980.

[4] R. A. GORDON, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, vol. 4 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994.

[5] W. JOHNSTON, *The Lebesgue Integral for Undergraduates*, The mathematical Association of America, first ed., 2015.

[6] J. KELLEY, *Topología general*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1975.

[7] A. LAMBERT, *Theorie de la mesure et intégration*. `https://www.lpsm.paris//pageperso/levy/LM364_Integration-Lambert.pdf`, 2011-12.

[8] R. E. MEGGINSON, *An introduction to Banach space theory*, vol. 183, Springer Science & Business Media, 2012.

[9] J. RODRÍGUEZ RUIZ, *Integrales vectoriales de Riemann y Mcshane*. `http://www.um.es/beca/Tesinas/TesinaJoseR.pdf`, 2002.

[10] W. RUDIN, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third ed., 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[11] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, second ed., 1987.

[12] M. SPIVAK, *Calculus*, W.A. Benjamin, Inc., New York, second ed., 1967.

[13] G. STEPANIANTS, *The Lebesgue integral, Chebyshev's inequality, and the Weierstrass approximation theorem*. `https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_18/papers17/george.pdf`, 2006.

[14] A. E. TAYLOR, *General theory of functions and integration*, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co. New York-Toronto-London, 1965.

[15] E. M. WADSWORTH, *Daniell integral*. University of Montana, 1965.

[16] A. J. WEIR, *Lebesgue integration and measure*, Cambridge University Press, London-New York, 1973. Integration and measure, Vol. 1.