1

Números y Funciones

1.1. Números

Los principales tipos de números son:

1. **Los números naturales** son aquellos que sirven para contar.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

2. **Los números enteros** incluyen a los naturales y a sus opuestos, y también al 0

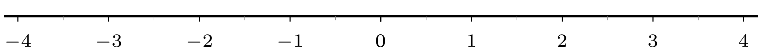
$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

3. **Los números racionales** son aquellos que se pueden expresar como fracción de dos números enteros

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{-7}{3}, \text{ etc.} \right\}$$

La representación de un número racional como fracción no es única, ya que la fracción no se altera multiplicando numerador y denominador por el mismo número.

4. **Los números reales** Son todos los números que se pueden representar en una recta continua



Además de los racionales, en $\mathbb{R}$ se incluyen otros números como π, e, $\sqrt{2}$, etc. que no se pueden representar como fracciones de enteros. Lo números reales que no son racionales se denominan **irracionales**. Cuando hablemos de *números* sin especificar en este texto, se entenderá que hablamos de números reales. Los intervalos de números reales los representaremos mediante corchetes y paréntesis, por ejemplo: $[2, \pi) = \{x : 2 \leq x < 5\}$, $(-1, +\infty) = \{x : -1 < x\}$.

Números complejos

Los números complejos son de la forma $a + bi$ donde a y b son números reales, e i es la *unidad imaginaria*, que cumple $i^2 = -1$.

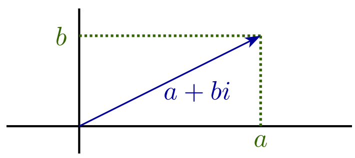
1. La suma, diferencia, producto y división de números complejos se hace siguiendo las mismas reglas que con números reales, simplemente teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

2. Dado el número complejo $z = a + bi$, el número $a = Re(z)$ se llama parte real de z y el número $b = Im(z)$ parte imaginaria. La expresión $a + bi$ es la forma binomial del número complejo.

3. Los números complejos aparecen como soluciones de algunas ecuaciones. Por ejemplo, la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$ tiene dos soluciones complejas: $1+2i$, $1-2i$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

4. Los números complejos se representan gráficamente como vectores del plano. El número $a + bi$ corresponde al vector (a, b).



5. El módulo de un número complejo $z = a + bi$ es la longitud de dicho vector, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6. El argumento de un número complejo es el angulo que forma el vector con el eje horizontal, medido en radianes (en realidad, el argumento no es único, ya que añadir un múltiplo entero de 2π no altera el ángulo).

7. El módulo de un producto es el producto de los módulos:

$$|z \cdot w| = |z||w|.$$

8. El argumento del producto es la suma de los argumentos:

$$arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w).$$

9. El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es el número $\overline{z} = a - bi$. Se cumple que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Esto es útil para simplificar fracciones, multiplicando por el conjugado del denominador:

$$\frac{5i}{2+i} = \frac{5i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{10i - 5i^2}{5} = 1 + 2i$$

10. La exponencial de un número complejo $z = e^{a+bi}$ es el número e^z cuyo módulo es e^a y cuyo argumento (en radianes) es b, es decir:

$$e^{a+bi} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

El número complejo de módulo M y argumento α se escribe pues como $z = Me^{i\alpha}$. Esta expresión es la forma polar de ese número complejo. La exponenciación de números complejos sigue las mismas normas aritméticas que la exponenciación real. Las funciones trigonométricas complejas se definen como

$$\begin{aligned} sen(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \end{aligned}$$

1.2. Funciones

Una función $f : A \longrightarrow B$ es una regla que permite asignar a cada elemento a del conjunto A un elemento $f(a)$ del conjunto B.

Ejemplo 1.1. Consideremos la función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por la fórmula

$$F(x) = x^2 - 3.$$

Esta función asigna al número 7 el número $F(7) = 7^2 - 3 = 38$, al número -1 el número $F(-1) = (-1)^2 - 3 = -2$, etc.

Ejemplo 1.2. Consideremos la función $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$G(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si} \quad t < 5 \\ t - 1 & \text{si} \quad t \geq 5 \end{cases}$$

En este caso, el valor de la función G en cada punto se calcula utilizando dos fórmulas distintas, según se tomen valores menores o mayores o iguales que 5. Así, $G(2) = 2^3 = 8$, $G(7) = 7 - 1 = 6$, $G(-1) = (-1)^3 = -1$, $G(5) = 5 - 1 = 4$, etc.

La funciones sirven para expresar la dependencia entre dos magnitudes en problemas físicos o de cualquier otra materia.

Dominio de una función

Dada un función $f : A \longrightarrow B$, el conjunto A donde la función está definida se denomina el **dominio** de la función. En los ejemplos anteriores el dominio es todo $\mathbb{R}$. Sin embargo, consideremos ahora las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} g(x) &= log(x) \\ h(x) &= \frac{1}{x - 2} \end{aligned}$$

El logaritmo sólo está definido para números positivos, por tanto la fórmla que define g sólo tiene sentido cuando $x > 0$. Así pues, el dominio de g es el intervalo[1]

[1] Utilizamos paréntesis cuando los extremos no están en el intervalo, y corchetes cuando sí están: $(0, +\infty) = \{x : 0 < x < +\infty\}$, $[1, 3) = \{x : 1 \leq x < 3\}$

$(0,+\infty)$ y podemos escribir $g:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$.

En el caso de la función h, la fórmula sólo tiene sentido cuando $x\neq 2$, pues no está permitido dividir por 0, así que el dominio es el conjunto[2] $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ y podemos escribir $g:\mathbb{R}\setminus\{2\}\longrightarrow\mathbb{R}$.

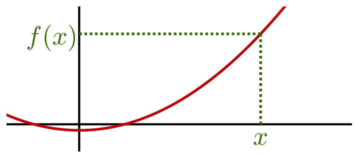
Finalmente, consideremos la función dada por la siguiente expresión:

$$K(x)=\begin{cases} x^3+x & \text{si} \quad 0\leq x\leq 1\\ x-7 & \text{si} \quad 1< x\leq 3\end{cases}$$

El dominio de esta función es el intervalo $[0,3]$ ya que sólo se nos da la definición de $K(x)$ en los intervalos $[0,1]$ y $(1,3]$. Fuera de esos intervalos no se nos dice qué fórmula debemos usar para calcular $K(x)$ así que el resto de la recta no está en el dominio. Escribiremos pues $K:[0,3]\longrightarrow\mathbb{R}$.

Gráfica de una función

La gráfica de una función es el conjunto de los puntos del plano de coordenadas $(x,f(x))$, donde x recorre el dominio de la función.



Operaciones con funciones

Las funciones pueden sumarse, multiplicarse, etc. para obtener nuevas funciones. Además, existe la operación de composición de funciones.

La **composición** $f\circ g$ de las funciones f y g es el resultado de aplicar primero g y después f. Por ejemplo, si $f(x)=x+6$, y $g(x)=x^2$, entonces

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(x^2)=x^2+6$$

El orden de la composición es importante, en este caso:

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(x+6)=(x+6)^2=x^2+12x+36$$

La **función inversa** de una función $f:A\longrightarrow B$ es una función $f^{-1}:B\longrightarrow A$ es la función que cumple $f^{-1}(f(x))=x$ para todo $x\in A$, y también $f(f^{-1}(y))=y$ para todo $y\in B$. No todas las funciones tienen una función inversa. Por ejemplo, si $f(x)=2x-6$, su función inversa es $f^{-1}(y)=(y+6)/2$.

[2] Por $A\setminus B$ denotamos el resultado de quitar al conjunto A los elementos del conjunto B, de forma que $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ es toda la recta real menos el punto 0.

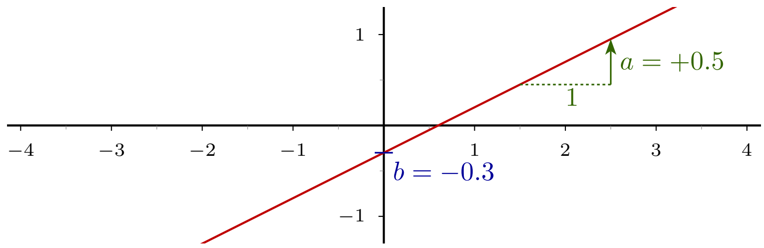
Funciones lineales

Las **funciones lineales** son funciones de la forma $f(x) = ax + b$ donde a y b son números reales.

Su gráfica es una línea recta. El número b es la altura a la que la recta corta al eje Y, mientras que el número a es la *pendiente* de la recta: el incremento de la función cuando la variable aumenta una unidad (en las figuras que siguen, a es la longitud del vector vertical verde tomada positiva hacia arriba y negativa hacia abajo).

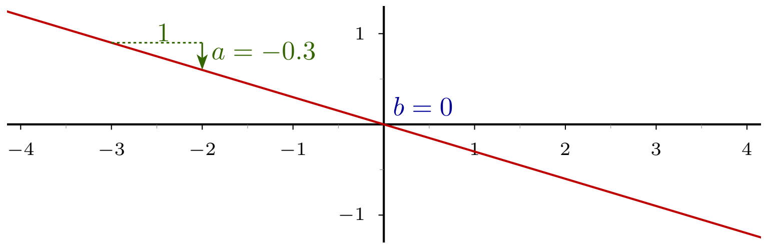
Ejemplo 1.3.

$$f(x) = 0.5x - 0.3$$



Ejemplo 1.4.

$$f(x) = -0.3x$$



La pendiente de una función lineal se puede calcular como el cociente entre el incremento de la función y el de la variable entre dos puntos cualesquiera,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 1.5. Para calcular la función cuya gráfica pasa por los puntos $(2, 11)$ y $(3, 16)$, podemos calcular en primer lugar la pendiente

$$a = \frac{16 - 11}{3 - 2} = 5$$

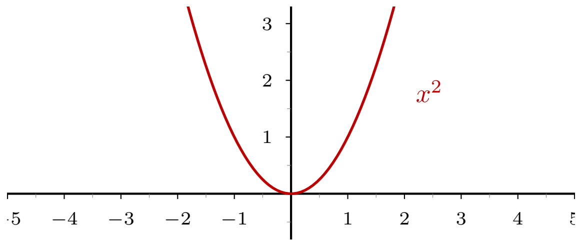
La función será de la forma $f(x) = 5x + b$. Puesto que $f(2) = 11$, tenemos que $10 + b = 11$, y por tanto $b = 1$. Así que la función es $f(x) = 5x + 1$.

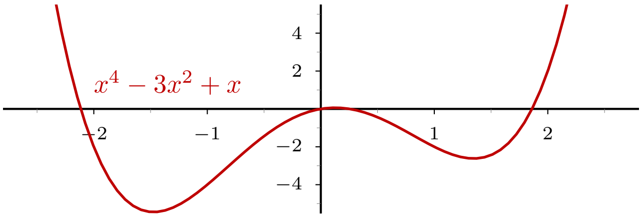
Polinomios y funciones racionales

Los **polinomios** son funciones de la forma

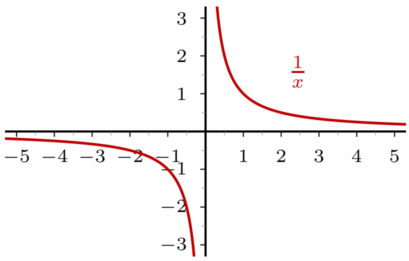
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

El grado de un polinomio es el número n (siempre que $a_n \neq 0$). La gráfica de un polinomio de grado 1 es una recta y la de un polinomio de grado 2 es una parábola. Conforme aumenta el grado, se obtienen curvas cada vez más complicadas.



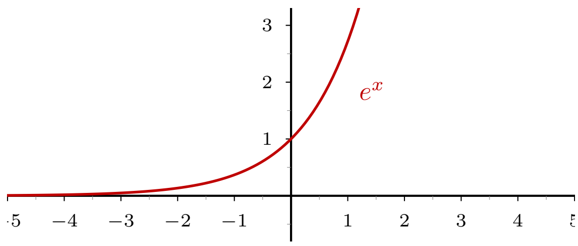


Las **funciones racionales** son las que se obtienen como cociente de dos polinomios. Su dominio es toda la recta real excepto algunos puntos donde se anule el denominador.

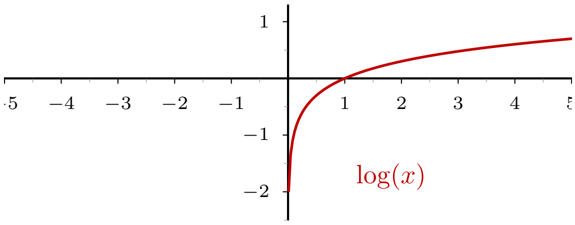


Funciones exponenciales y logarítmicas

La **función exponencial** es la función $f(x) = e^x$, donde el número e es una constante cuyo valor aproximado es 2.718.



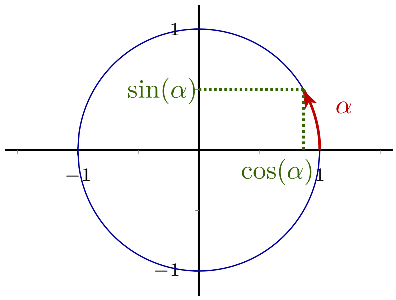
La **función logaritmo** logaritmo es la inversa de la función exponencial, $f(x) = log(x)$. El logaritmo se entiende que se toma siempre en base e. El dominio del logaritmo es el intervalo $(0, +\infty)$.



Funciones trigonométricas

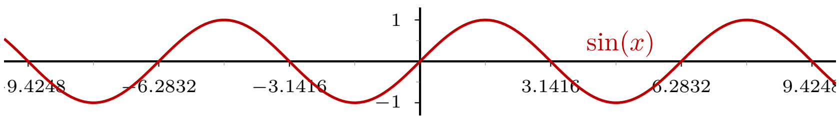
Las **funciones trigonométricas** se obtienen a partir de las relaciones entre ángulos y longitudes. Las dos funciones básicas son seno y coseno.Se definen de la siguiente forma:

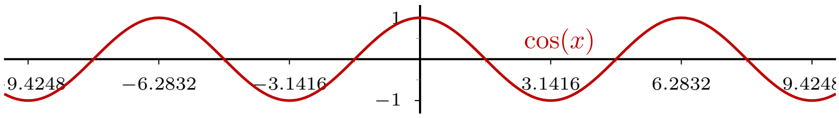
Dado un número α, el punto del plano $(cos(\alpha), sen(\alpha))$ es el obtenido al recorrer un arco de circunsferencia de radio 1 de longitud $|\alpha|$, partiendo del punto $(0, 1)$. El recorrido se hace en el sentido contrario a las agujas del reloj si $\alpha > 0$ y en el sentido de las agujas del reloj si $\alpha < 0$.

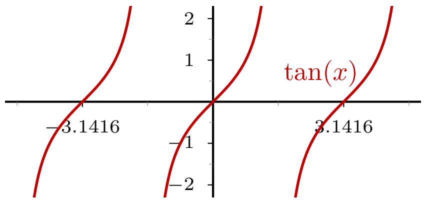


La función tangente es $tan(x) = \frac{sen(x)}{cos(x)}$. También son importantes las funciones inversas $arcsen(x) : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$, $arccos(x) : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$, $arctan(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$.

Las gráficas de las funciones trigonométricas tienen el siguiente aspecto:







Las funciones trigonométricas hiperbólicas, que guardan ciertas analogías con las funciones trigonométricas, se definen de la siguiente forma:

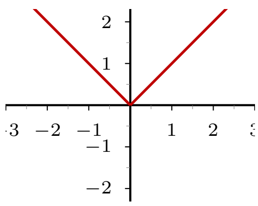
$$\begin{aligned} senh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ tanh(x) &= \frac{senh(x)}{cosh(x)} \end{aligned}$$

Otros ejemplos de funciones

El **valor absoluto** de un número x viene dado por

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Es decir, $|-3| = 3$, $|-2.1| = 2.1$, $|3| = 3$, $|2.1| = 2.1$, etc.



La **parte entera** de un número x es el mayor número entero n tal que $n \leq x < n+1$. Se denota como $[x]$. Así, $[2.43] = 2$, $[3.14] = 3$, $[-10.12] = -11$, $[-8.97] = -9$, etc.