3

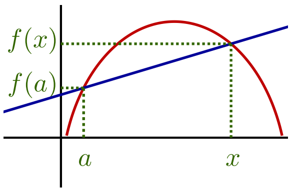
Derivación

3.1. La derivada

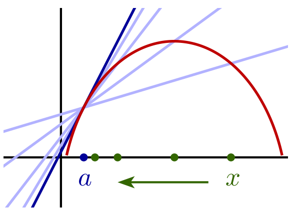
La derivada de una función en punto a de su dominio está dada por la fórmula

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

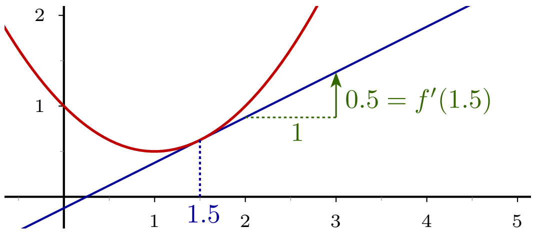
El cociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ es la pendiente de la recta secante a la función f en los puntos x y a.



Por tanto, al hacer tender x hacia a, la derivada $f'(a)$ resulta ser la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa a.



Ejemplo 3.1. Consideremos la función $f(x) = (x^2 - x + 2)/2$. Su derivada en el punto $a = 1.5$ toma el valor $f'(1.5) = 0.5$. Esta derivada es la pendiente de la recta tangente como ilustra la figura:



El límite que define la derivada puede no existir (en tal caso, decimos que la función no es derivable en ese punto). También podemos hablar de derivada por la derecha y derivada por la izquierda, considerando los correspondientes límites. Por ejemplo, la función valor absoluto $f(x) = |x|$ no es derivable en 0, su derivada por la izquierda vale -1 y por la derecha vale 1.

La función derivada de $f(x)$ se sule denotar también como $\frac{df}{dx}$ en lugar de $f'(x)$. La derivada de la función derivada se llama derivada segunda y se denota como $f''(x)$ o como $\frac{d^2f}{dx^2}$.

3.2. Cálculo de derivadas

Derivadas de las funciones elementales.

función	**derivada**
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$log(x)$	$\frac{1}{x}$
$sen(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sen(x)$
$arcsen(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Reglas de derivación

Operación	**función**	**derivada**
Suma	$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
Producto por constante	$af(x)$	$af'(x)$
Producto	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Cociente	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Composición (regla de la cadena)	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Función inversa	$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

De las propiedades anteriores las dos últimas son las más complicadas de manejar y dominar su utilización. A continuación vamos a dar algunas ideas que puedan aportar una mejor comprensión de las mismas.

La regla de la cadena

La derivada de la composición $f \circ g$ es casi el producto de las derivadas de f y g, sólo que f' debe evaluarse en $g(x)$; esto es lo que significa la igualdad

$$[f \circ g]'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

¿Cómo comprenderla bien para aplicarla con agilidad?

Podríamos en cada momento escribir la función a derivar como composición de dos o más funciones y, entonces, aplicar la regla de la cadena sistemáticamente, pero con un poco de experiencia esta tarea puede hacerse mentalmente sin problemas. Para hacernos una idea del proceso, optemos por introducir un símbolo: $\blacksquare$. Representa una "caja negra", cuyo contenido no nos interesa, en un cierto momento; pero que, más tarde, abriremos para derivar su contenido.

Comencemos con un ejemplo sencillo: derivar la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$. Obviamente se trata de la composición de la función seno con la función $S(x) = x^2$. Con la caja negra, podemos escribir:

$$f(x) = \operatorname{sen}(\blacksquare)$$

Entonces, para derivarla, basta derivar el seno y multiplicar por la derivada de la caja, sin abrir:

$$f'(x) = \cos(\blacksquare) \cdot \blacksquare'$$

Ahora abramos la caja, observamos que contiene: $\boxed{x^2}$, cuya derivada es $\boxed{x^2}' = 2x$, luego abriendo las cajas y derivando aquélla que debe derivarse, obtenemos:

$$f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Veamos un ejemplo más complicado: derivar $g(x) = \operatorname{sen}^2(x^2)$.

Esta composición, utilizando como antes $S(x) = x^2$, se puede escribir de dos formas:

$$g(x) = (S \circ \operatorname{sen}) \circ S(x) = S \circ (\operatorname{sen} \circ S)(x)$$

Si pensamos un poco la segunda forma de verla es mucho más cómoda para su derivación, pues, podemos escribirla en la forma:

$$g(x) = S(\blacksquare) = \blacksquare^2$$

Entonces derivarla es muy sencillo:

$$g'(x) = \big(2 \cdot \blacksquare\big) \cdot \blacksquare'$$

Abramos la caja, vemos $\boxed{\operatorname{sen}(x^2)}$, que ya la hemos derivado antes; pero, que en todo caso se puede volver a obtener de forma inmediata:

$$\operatorname{sen}(x^2) = \operatorname{sen} \blacksquare \quad \text{luego} \quad \big(\operatorname{sen}(x^2)\big)' = \cos \blacksquare \cdot \blacksquare' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

Finalmente:

$$g'(x) = \big(2 \cdot \blacksquare\big) \cdot \blacksquare' = 2 \operatorname{sen}(x^2) \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

Veamos un tercer ejemplo, aún más complicado: derivar $h(x) = \operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}^2 x)$.

La forma de atacar esta función, composición de cuatro funciones, es, como antes, detectar la última función sencilla que se compone: en este caso podríamos escribir la función de varias formas, pero la más adecuada es:

$$h = S \circ (\operatorname{sen} \circ (S \circ \operatorname{sen}))$$

Entonces, vemos claramente que:

$$h(x) = \blacksquare^2$$

luego

$$h'(x) = 2 \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare'$$

Abramos la caja: $\boxed{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)}$ y recomenzamos:

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{sen}(\blacksquare) \quad \text{luego} \quad \big(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x)\big)' = \cos(\blacksquare) \cdot \blacksquare'$$

Dado que la última caja contiene $\boxed{\operatorname{sen}^2 x}$, tenemos:

$$\big(\operatorname{sen}^2 x\big)' = \big(\blacksquare^2\big)' = 2 \cdot \blacksquare \cdot \blacksquare' = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Finalmente

$$h'(x) = 2 \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^2 x) \cdot \cos(\operatorname{sen}^2 x) \cdot 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Ejercicio 1. Derive las siguientes funciones:

1. $f(x) = \operatorname{sen}\big((\operatorname{sen} x)^2\big)$
2. $f(x) = \big[\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\big]^2$
3. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$
4. $f(x) = \operatorname{sen}^2(x \operatorname{sen} x)$
5. $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x^2 \operatorname{sen} x)$

El procedimiento a seguir es siempre el mismo, además de tener en cuenta la forma de derivar productos, cocientes, etc. Veamos otro ejemplo: derivar la función $j(x) = x^{\operatorname{tg} x}$. Cuando la base y el exponente dependen de la variable, es decir, cuando se trata de derivar una función de la forma $f(x)^{g(x)}$, entonces debemos expresar la función mediante la exponencial, en nuestro ejemplo:

$$j(x) = x^{\operatorname{tg} x} = e^{(\operatorname{tg} x)\cdot \log(x)} = e^{\blacksquare}$$

Así pues:

$$j'(x) = e^{\blacksquare} \cdot \blacksquare'$$

Abramos la cajita: encontramos un producto $\boxed{(\operatorname{tg} x)\cdot \log(x)}$, luego:

$$\blacksquare' = \big((\operatorname{tg} x)\cdot \log(x)\big)' = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\cdot \log x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}$$

De donde:

$$j'(x) = e^{(\operatorname{tg} x)\cdot \log(x)} \cdot \left((1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot \log x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\operatorname{tg} x} \cdot \left((1+\operatorname{tg}^2 x)\cdot \log x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Ejercicio 2. Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

1. $\operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{\cos x}{x}}\right)$
2. $\dfrac{\operatorname{sen}(\cos x)}{x}$
3. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x^3}{\cos x^3}\right)$

4. $(((x^2+x)^3+x)^4+x)^5$
5. $\log(\log(\log(x)))$
6. $(\operatorname{sen} x)^{(\cos x)}$
7. $(x^4+\operatorname{sen} x)\cos\dfrac{1}{x^2}$
8. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{x-\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x-\operatorname{sen} x}\right)}\right)$

Ejercicio 3. Hallar f' en términos de g':

1. $f(x) = g(x+g(a))$
2. $f(x) = g(x\cdot g(a))$
3. $f(x) = g(x+g(x))$
4. $f(x) = g(x)(x-a)$
5. $f(x) = g(a)(x-a)$
6. $f(x) = g(x^2)$

Derivada de la función inversa

La propiedad ya citada es:

$$[f^{-1}]'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Veamos cómo utilizar esta fórmula en el cálculo de la derivada de la función $\operatorname{arc\,sen}$, inversa del seno. Según la fórmula debemos calcular la derivada de $f(x) = \operatorname{sen} x$, pero luego evaluarla en $f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)$. Puesto que $f'(x) = \cos x$, tenemos:

$$(\operatorname{arc\,sen})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)}$$

y, en principio, ya hemos terminado. Ahora bien, utilizando la fórmula fundamental de la trigonometría, $\cos a = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}$. Es preciso aquí observar que la inversa del seno no existe en todo $\mathbb{R}$ y que el convenio que se adopta es definir su inversa, el arco seno, en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. En dicho intervalo el coseno es positivo, por lo que adoptamos el signo positivo de la raíz. Entonces:

$$(\operatorname{arc\,sen})'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\operatorname{arc\,sen} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

donde hemos utilizado que $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ pues ambas son funciones inversas.

Veamos otro ejemplo: el $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ es biyectivo sobre $[0,+\infty)$, tomando valores en el intervalo $[1,+\infty)$. Su inversa, el $\operatorname{argcosh} x$ es derivable sobre el intervalo $[1,+\infty)$. Calculemos su derivada. En primer lugar: $(\cosh)'x = \operatorname{senh}(x)$, entonces:

$$(\operatorname{argcosh})'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(\operatorname{argcosh} x)}$$

Pero recordemos que: $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, luego $\operatorname{senh} y = \pm\sqrt{\cosh^2 y - 1}$. Pero, puesto que $\operatorname{argcosh} x \geq 0$ y $\operatorname{senh}(y) \geq 0$ si $y \geq 0$, debemos optar por el signo positivo de la raíz, lo que nos da:

$$(\operatorname{argcosh})'(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(\operatorname{argcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{argcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

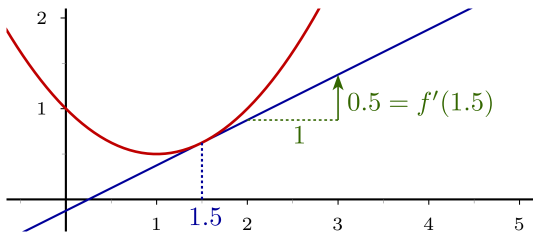
Ejercicio 4. Deduzca la fórmula de la derivada del arc cos y del arc tg.

3.3. Recta tangente y aproximación

La recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa a se representa mediante la siguiente función T:

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Ejemplo 3.2. Consideremos de nuevo el Ejemplo 3.1, $f(x) = (x^2 - x + 2)/2$.



En el punto $a = 1.5$ tenemos que $f(a) = 0.625$ y $f'(a) = 0.5$. Por tanto, la recta tangente que aparece de color azul en la figura viene dada por

$$T(x) = 0.625 + 0.5(x - 1.5)$$

Cuando x es un número cercano al número a, los valores de $f(x)$ son muy cercanos a los de $T(x)$ (cerca de a, la tangente está *muy pegada* a la función). Esto significa que se puede tomar $T(x)$ como una buena aproximación a la función $f(x)$.

$$f(x) \approx T(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

que también se suele escribir como

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a) \tag{3.1}$$

indicando que el incremento de la función f es aproximadamente igual al incremento de la variable multiplicado por la derivada.

Ejemplo 3.3. Medimos el radio de una esfera y obtenemos que su longitud es de cinco metros. La fórmula del volumen de una esfera es $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, así que el volumen de nuestra esfera debería ser

$$V(5) = \frac{4}{3}\pi 5^3 = 523.598775598...m^3$$

Ahora bien ¿si la longitud del radio la hemos medido con un error de $\pm 1cm$, qué error podemos estar cometiendo al medir el volumen? Si llamamos R al radio exacto de la esfera, el error que hemos cometido al medir el radio será $R-5$. La fórmula de aproximación (3.1) aplicada a la función volumen y el punto $a=5$ establece que

$$V(R)-V(5)\approx V'(5)(R-5),$$

donde $V(R)-V(5)$ es el error cometido al medir el volumen: la diferencia entre el valor exacto $V(R)$ y el que nosotros hemos hallado $V(5)$.

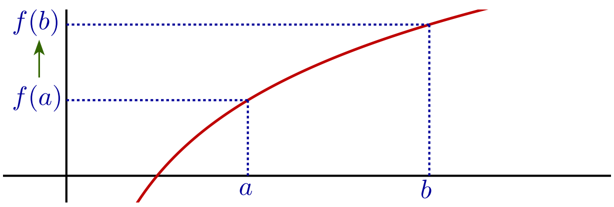
La derivada de la función $V(r)$ es igual a $V'(r)=4\pi r^2$, así que $V'(5)=100\pi=314.1592\ldots$. Concluimos que al medir el volumen, el error se multiplica aproximadamente por 314. Si medimos el radio con un error máximo de $\pm 1\ cm=\pm 0.01\ m$, el error al medir el volumen puede llegar a ser de $\pm 3.14\ m^3$.

Por tanto, lo que se debería afirmar prudentemente en un caso como este es que el volumen de la esfera vale entre 520.45 y 526.75 metros cúbicos.

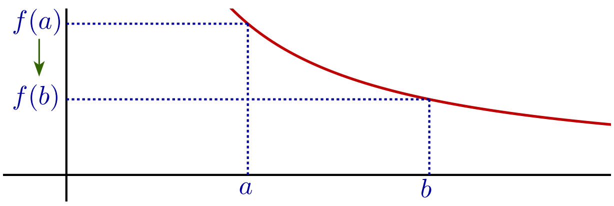
3.4. Crecimiento y extremos

Crecimiento y decrecimiento

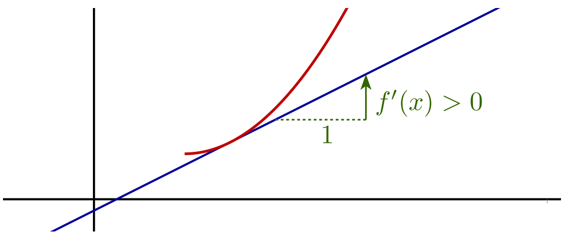
Una función f es creciente en el intervalo I si a mayor valor de la variable corresponde mayor valor de la función: es decir, si $a<b$ implica que $f(a)<f(b)$ cuando a y b varían en el intervalo I.



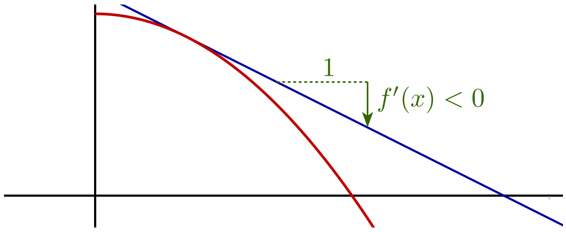
Una función f es decreciente en el intervalo I si a mayor valor de la variable corresponde menor valor de la función: es decir, si $a<b$ implica que $f(a)>f(b)$ cuando a y b varían en el intervalo I.



El crecimiento está relacionado con la derivada. Si una función es derivable en un intervalo y la derivada es siempre positiva, entonces la función es creciente.



En cambio si la derivada permanece negativa en un intervalo, entonces la función es decreciente en ese intervalo.



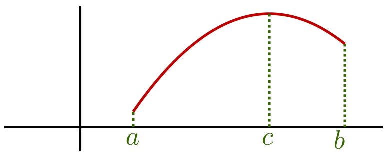
De hecho, la derivada mide cómo de rápido crece una función. Si la derivada toma valores positivos muy altos, eso indica que crece muy rápidamente, mientras que si toma valores positivos pequeños, crece lentamente. De igual forma, valores negativos próximos a cero indican que decrece lentamente, mientras que valores negativos de gran valor absoluto indican decrecimiento rápido.

Puntos extremos: máximos y mínimos

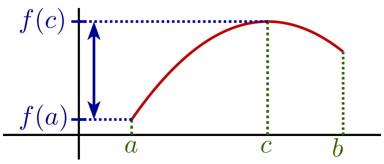
Una función f alcanza su **máximo absoluto** en un punto c de su dominio si $f(c)$ es el mayor valor posible de la función (es decir, si $f(c) \geq f(x)$ para cualquier x del dominio de f).

Una función f alcanza su **mínimo absoluto** en un punto a de su dominio si $f(c)$ es el menor valor posible de la función (es decir, si $f(c) \leq f(x)$ para cualquier x del dominio de f).

Ejemplo 3.4. Consideremos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente gráfica:



Esta función alcanza su mínimo en el punto a y su máximo en el punto c, ya que estos son los puntos donde el valor de la función es, respectivamente, menor y mayor.

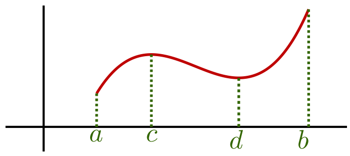


Nótese que una función puede alcanzar su máximo (o su mínimo) en varios puntos distintos. De hecho, por ejemplo, una función constante alcanza su máximo y su mínimo en todos los puntos.

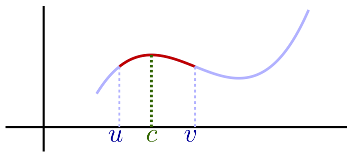
Una función f alcanza un **máximo relativo** en un punto c de su dominio si $f(c)$ es el mayor valor posible de la función en un entorno de c (es decir, si existen $u < c < v$ tales que $f(c) \geq f(x)$ para cualquier $x \in (u, v)$.)

Una función f alcanza un **mínimo relativo** en un punto c de su dominio si $f(c)$ es el menor valor posible de la función en un entorno de a (es decir, si existen $u < c < v$ tales que $f(c) \leq f(x)$ para cualquier $c \in (u, v)$).

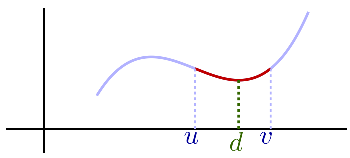
Ejemplo 3.5. Consideremos una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con la siguiente gráfica:



Esta función alcanza su máximo absoluto en el punto b y su mínimo absoluto en el punto a, ya que en estos puntos alcanza el mayor el menor valor respectivamente. Además, la función alcanza un máximo relativo en el punto c porque podemos encontrar un entorno (u, v) en el que la función alcanza su máximo en c:

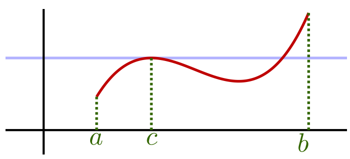


Por la misma razón, la función alcanza un mínimo relativo en el punto d.

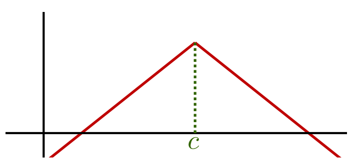


alcanza su mínimo absoluto en el punto a, y además un mínimo relativo en el punto d.

Si una función f es derivable en un punto c del interior de su dominio, y la función tiene en c un extremo relativo, entonces $f'(c) = 0$. Es decir, en los mínimos y máximos relativos, si existe recta tangente, ésta ha de ser horizontal.



Nótese que esto no se aplica a los puntos frontera del dominio: en la gráfica anterior, la función tiene en a y b un mínimo y un máximo respectivamente. Sin embargo, la tangente no es horizontal y por tanto no tenemos derivada nula. También puede ocurrir que tengamos extremos relativos en puntos donde la función no es derivable:



Análisis del crecimiento y los extremos

En primer lugar, tenemos que identificar aquellos puntos que son relevantes para el estudio del crecimiento de la función, que son

1. Los puntos problemáticos de la función: puntos donde la función no está definida, no es continua o no es derivable, y también los puntos frontera del dominio.

2. Los puntos críticos de la función: los puntos a donde se anula la derivada, $f'(a) = 0$.

Estos puntos dividirán el dominio de la función en varios subintervalos. En cada uno de estos intervalos, la función será derivable con signo constante, y por tanto creciente (si la derivada es positiva) o decreciente (si la derivada es negativa). Para saber en cuáles de estos intervalos la función crece y en cuáles decrece podemos utilizar cualquiera de los siguientes criterios:

1. Observar la gráfica de la función

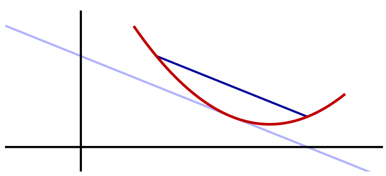
2. En los puntos críticos (donde la derivada existe y vale cero), podemos calcular la segunda derivada $f''(a)$. Si $f''(a) > 0$ entonces en a hay un mínimo relativo, y la función decrece a la izquierda y crece a la derecha de a. Si $f''(a) < 0$ entonces la función tiene un máximo relativo en el punto a, crece a la izquierda y decrece a la derecha de a. Si resulta que $f''(a) = 0$ entonces este método no nos proporciona ninguna información: podría haber mínimo, máximo y ninguna de las dos cosas.

3. Podemos escoger un punto u en el interior de cada uno de los subintervalos. Si $f'(u) > 0$ entonces la función es creciente. Si $f'(u) < 0$ entonces la función es decreciente.

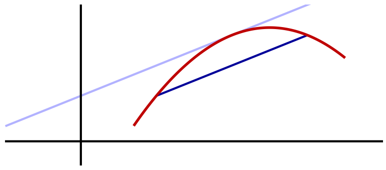
4. Podemos escoger dos puntos $u < v$ en cada uno de los subintervalos. Si $f(u) < f(v)$ la función es creciente en ese intervalo. Si $f(u) > f(v)$ entonces es decreciente en ese intervalo.

3.5. Convexidad y concavidad

Una función f es **convexa** en un intervalo $[a, b]$ de su dominio cuando los segmentos que unen dos puntos de su gráfica quedan siempre por encima de dicha gráfica. Cuando la función es derivable, esto equivale a decir que la recta tangente queda siempre por debajo de la gráfica de la función.



Una función f es **cóncava** en un intervalo $[a, b]$ de su dominio cuando los segmentos que unen dos puntos de su gráfica quedan siempre por debajo de dicha gráfica. Cuando la función es derivable, esto equivale a decir que la recta tangente queda siempre por encima de la gráfica de la función.



Cuando una función tiene segunda derivada, y esa segunda derivada es positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces la fúnción es convexa en ese intervalo. Si por contra la derivada segunda es negativa, entonces la función es cóncava en ese intervalo.

Para estudiar los intervalos en los que una función es concava o convexa se sigue un método similar al que usamos para el crecimiento y decrecimiento. En primer lugar, tenemos que identificar los puntos relevantes para ese estudio:

1. Los puntos problemáticos de la función: puntos donde la función no está definida, no es continua, no es derivable, o no tiene segunda derivada.
2. Los puntos a donde se anula la derivada segunda, $f''(a) = 0$.

Estos puntos dividirán el dominio de la función en varios subintervalos. En cada uno de estos intervalos, la función tendrá derivada segunda $f''(x)$ con signo constante, y por tanto será convexa (si f'' es positiva) o cóncava (si f'' es negativa). Para saber en cuáles de estos intervalos la función es convexa y en cuáles es cóncava podemos utilizar cualquiera de los siguientes criterios:

1. Observar la gráfica de la función.
2. Podemos escoger un punto u en el interior de cada uno de los subintervalos. Si $f''(u) > 0$ entonces la función es convexa. Si $f''(u) < 0$ entonces la función es cóncava.
3. Podemos escoger dos puntos $u < v$ en cada uno de los subintervalos. Si $f'(u) < f'(v)$ la función es convexa en ese intervalo. Si $f'(u) > f'(v)$ entonces es cóncava en ese intervalo.

Los puntos en los que la función pasa de ser cóncava a ser convexa o viceversa se denominan puntos de inflexión.

3.6. Regla de l'Hôpital

Cuando un límite presenta una indeterminación de tipo $0/0$ o ∞/∞, se puede calcular derivando numerador y denominador.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{cos(x)}{1} = cos(0) = 1$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{e^{3x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{3e^{3x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{9e^{3x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$