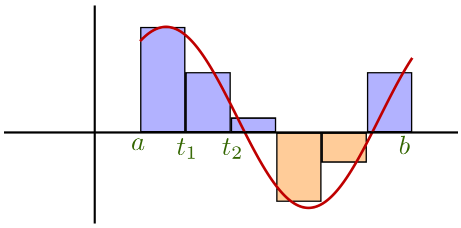
4

Integración

4.1. La integral

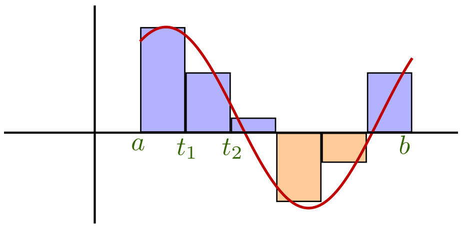
Dada una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si escogemos números $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, y números $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$, entonces la suma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$ corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos de la figura:

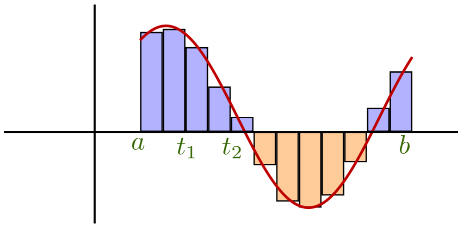


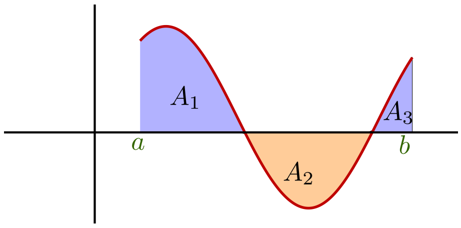
donde los rectángulos sobre el eje X (azules) se toman con signo positivo, mientras que los que quedan debajo (amarillos) restan. Cada rectángulo tiene base $t_i - t_{i-1}$ y altura $f(x_i)$.

La integral $\int_a^b f(x)dx$ es el límite de las sumas $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1})$ cuando la longitud de los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ tiende hacia 0,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}).$$







De esta forma, $\int_a^b f(x)dx$ es igual a la suma de las áreas de las regiones comprendidas entre el eje X y la gráfica de la función, donde las regiones que quedan por encima del eje X se toman con signo positivo y las quedan debajo del eje X con signo negativo. Es decir, en la gráfica de la figura anterior se tendría

$$\int_a^b f = area(A_1) - area(A_2) + area(A_3).$$

4.2. Regla de Barrow

Una primitiva de una función f es una función F cuya derivada es la función dada f

$$F' = f$$

Así por ejemplo, si $f(x) = x^2$, la función $F(x) = x^3/3$ es una primitiva de $f(x)$, puesto que $F'(x) = x^2$. La primitiva de una función no es única, puesto que sumar una constante no altera el valor de la derivada. Así, $G(x) = x^3/3 + 5$ también es una primitiva de $f(x) = x^2$. La primitiva de una función f se denota a veces como $\int f$, usando el símbolo integral sin indicar los extremos:

$$\int x^2 = x^3/3 + constante$$

La **Regla de Barrow** establece que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función, y $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

De esta forma, el cálculo de integrales se puede reducir al cálculo de primitivas. En el ejemplo considerado anteriormente tendríamos:

$$\int_1^4 x^2 = 4^3/3 - 1^3/3 = 64/3 - 1/3 = 21.$$

4.3. Cálculo de primitivas

Tabla de primitivas elementales.

función	**primitiva**
x^n, $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$log(x)$
$sen(x)$	$-cos(x)$
$cos(x)$	$sen(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsen(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arccos(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctan(x)$

Nota: En el caso de las funciones $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, ha de tenerse en cuenta que su dominio es el intervalo $(-1, 1)$.

Reglas para el cálculo de primitivas

Operación	**función**	**primitiva**
Suma	$f(x) + g(x)$	$\int f(x)dx + \int g(x)dx$
Producto por constante	$\int af(x)dx$	$a \int f(x)dx$
Producto	$f(x) \cdot g(x)$	No hay reglas

Fórmula de integración por partes.

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Fórmula del cambio de variable.

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Primitivas casi inmediatas y cambio de variable

A partir de la tabla inicial de primitivas inmediatas, mediante el cambio de variable recuperamos una lista de primitivas casi inmediatas. He aquí algunos ejemplos:

$$\int e^{u(x)}u'(x)\,dx = e^{u(x)} \qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \log|u(x)|$$

$$\int \operatorname{sen}(u(x))u'(x)\,dx = -\cos(u(x))$$

$$\int \cos(u(x))u'(x)\,dx = \operatorname{sen}(u(x))$$

$$\int \frac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}\,dx = \operatorname{tg}(u(x)) \qquad \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}\,dx = \operatorname{arc\,tg}(u(x))$$

Obsérvese que para aplicar el cambio de variable es fundamental observar la función del integrando: debemos detectar en ella la composición de dos funciones $f(g(x))$ junto con la presencia de la derivada $g'(x)$. Quizás no aparezca exactamente $g'(x)$, puede faltar alguna constante, pero eso no es un problema. Una vez detectada la presencia de $f(g(x))$ y $g'(x)$, siempre podemos intentar el cambio de variable $y = g(x)$, pues de esa forma, $f(g(x))$ se reducirá a $f(y)$, y $g'(x)\,dx$ se reducirá a dy, con lo que el integrando se habrá simplificado.

He aquí algunos ejemplos.

- $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}\,dx$

  Se observa que $\cos x$ es la derivada de $\operatorname{sen} x$, por tanto el cambio adecuado es $t = \operatorname{sen} x$, lo que nos da $dt = \cos x\,dx$ y por tanto la primitiva se reduce al cálculo de
  $$\int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \operatorname{argsenh} t + C = \operatorname{argsenh}(\operatorname{sen} x) + C$$

- $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arc\,sen} x)^2}{2\sqrt{1-x^2}}$

  Como vemos aparece el factor $1/\sqrt{1-x^2}$ que es la derivada de $\operatorname{arc\,sen} x$, entonces haciendo el cambio $t = \operatorname{arc\,sen} x$ obtenemos la primitiva
  $$\frac{1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{6}(\operatorname{arc\,sen} x)^3 + C$$

Integración por partes

Para que una primitiva sea fácil de abordar por el método de integración por partes, su integrando debe venir dado (o poder ser transformado) como el producto de dos funciones, una de ellas debe ser una derivada; es decir, debe ser fácil calcular una primitiva de una de ellas. Esto se observa inmediatamente en la fórmula:
$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$
donde interviene $g'(x)$ en el miembro de la izquierda, pero también interviene $g(x)$ en el de la derecha, lo que nos dice que tenemos que calcular una primitiva del factor que vamos a tomar como $g'(x)$. Así el cálculo de la primitiva de ese factor no debería ser más complicado que la propia primitiva que deseamos calcular.

Ejemplos.

- $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x\,dx$

  Aquí los dos factores son sencillos, ambos tienen una primitiva fácil de calcular. Pero entre las dos elecciones posibles observamos que si calculamos una primitiva de x se obtiene x^2, es decir el grado de la parte polinómica sube, lo que indica que la otra opción debe ser más sencilla.

  Así, tomemos $u = x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$, luego $v = -\cos x$ y $du = 1$, entonces:
  $$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x$$

- $\displaystyle\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx$ Aquí, aparentemente no hay dos factores, pro siempre podemos tomar como segundo factor un 1, así la única elección posible es $u = \operatorname{arc\,tg} x$ y $1\cdot dx = dv$ (la opción contraria significaría tener que calcular precisamente una primitiva de $\operatorname{arc\,tg} x$ que es el problema propuesto). Entonces $v = x$ y
  $$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$
  donde la última primitiva es casi inmediata (mediante un cambio de variable, pues el numerador x es, salvo un factor 2, la derivada del denominador $1+x^2$).

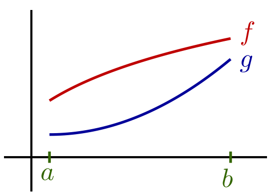
Ejercicio 5. Calcular las siguientes primitivas.

1. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{1+\cos x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\log^2(x)}}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}\,dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int \frac{\cos(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\,dx$
7. $\displaystyle\int x^2 \log x\,dx$
8. $\displaystyle\int \log^2 x\,dx$
9. $\displaystyle\int x \arcsen x\,dx$
10. $\displaystyle\int x^2 e^{3x}\,dx$
11. $\displaystyle\int x\cos 3x\,dx$
12. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx$
13. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\log x)\,dx$
14. $\displaystyle\int \cos^2 x, dx$

4.4. Longitudes, áreas y volúmenes

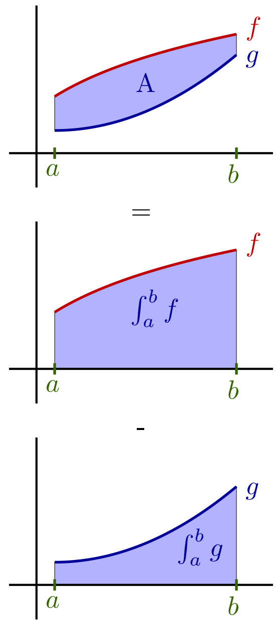
Cálculo de áreas

Supongamos que tenemos dos funciones f y g definidas en un intervalo $[a,b]$ de forma que $f(x) \leq g(x)$ para $x \in [a,b]$ (es decir, la gráfica de f queda por encima de la gráfica de g)



Entonces, el área de la región A comprendida entre la gráfica de f y la gráfica de g viene dada por la fórmula

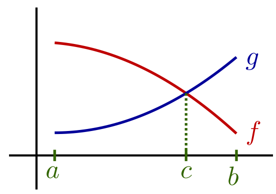
$$Area(A) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Ejemplo 4.1. Ejemplo de área $f \leq g$

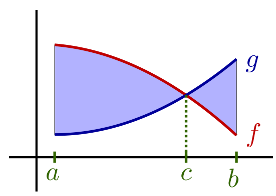
En el caso general, si no tenemos que $f \leq g$, habría que calcular en qué puntos se cortan las gráficas de f y g, y dividir el intervalo $[a, b]$ en subintervalos, en cada uno de los cuales una función esté por encima de la otra.

Ejemplo 4.2. Supongamos que f y g son funciones con las siguientes gráficas:



Entre a y c, la función f es mayor que g, pero entre c y b la función g es mayor que f. En este caso, el área comprendida entre las dos gráficas vendrá dada por:

$$Area(A) = \int_a^c (f(x) - g(x))dx + \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$



En cada intervalo, de entre las dos posiblidades $f - g$ o $g - f$, siempre se escoge la que es positiva. Esto permite escribir la siguiente fórmula general para calcular el área entre las gráficas de funciones integrables en un intervalo

$$Area = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Longitud de una curva

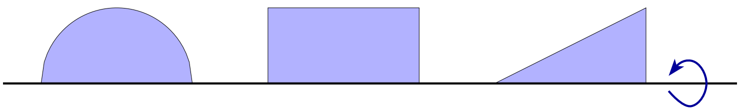
La longitud de la gráfica de una función derivable $f(x)$ entre los puntos de abscisa a y b viene dada por la fórmula

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$$

Volumen de un cuerpo de revolución

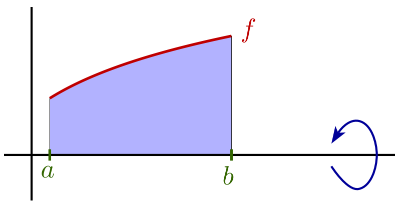
Si A es una región del plano XY, el cuerpo de revolución de la región A es el sólido del espacio tridimensional obtenido al hacer girar A alrededor del eje X.

Ejemplo 4.3. Los cuerpos de revolución de las siguientes regiones serían respectivamente, una esfera, un cilindro y un cono



Si A es la región comprendida entre el eje X y la gráfica de una función $f : [a, b] \longrightarrow [0, +\infty)$ no negativa, entonces el volumen del cuerpo de revolución de A viene dado por la siguiente fórmula:

$$Vol(R) = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$



4.5. Teorema Fundamental del cálculo

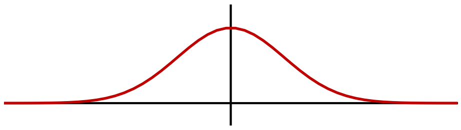
Si f es una función integrable y fijamos un punto a de su dominio, podemos considerar una función definida por una integral:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

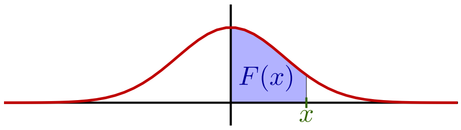
Si la función f es continua, entonces F es una función derivable y su derivada es f, es decir $F'(x) = f(x)$. En notación de Leibniz, esto se puede expresar como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Ejemplo 4.4. Consideremos la función $f(x) = e^{-x^2}$,



A partir de ella, podemos definir una nueva función integral $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Así por ejemplo, para $x > 0$, el valor de $F(x)$ es el área de la figura:



El teorema fundamental del cálculo nos dice que esta función es derivable y su derivada vale $F'(x) = e^{-x^2}$.

Ejemplo 4.5. La función $F(x) = \int_1^{cos(x)} e^{-t^2} dt$ es derivable y podemos calcular su derivada combinando el teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena. Efectivamente, puedo escribir $F(x) = G(cos(x))$ donde $G(y) = \int_1^y e^{-t^2} dt$, así que

$$F'(x) = -sen(x)G'(cos(x)) = -sen(x)e^{-x^2}$$