5

Ecuaciones diferenciales

5.1. Qué es una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es una ecuación en la que la incógnita a despejar no es un número sino una función. Las operaciones que intervienen en la ecuación incluyen la derivación, además de las operaciones habituales.

Ejemplo 5.1. Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = y - x$$

que también podemos escribir usando notación de Leibniz como

$$\frac{dy}{dx} = y - x$$

La incógnita a despejar en este caso es la y. Una solución de esta ecuación ha de ser una función $y(x)$ cuya derivada sea la propia función menos la variable x. En este caso la función $f(x) = e^x + x + 1$ es una tal solución ya que

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x + x + 1 \\ f'(x) &= e^x + 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = f(x) - x$$

En una ecuación diferencial, además de la función y y su derivada, pueden aparecer las derivadas segunda, tercera, etc. El orden de una ecuación diferencial es es el orden de la mayor derivada que aparece.

Las ecuaciones diferenciales son importantes porque rigen una gran variedad de procesos. Veamos algunos ejemplos.

El **movimiento de caída libre de un cuerpo en el vacío** está regido por la siguiente ecuación diferencial (segunda ley de Newton):

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g$$

donde y es la distancia vertical recorrida por el cuerpo en función del tiempo transcurrido, y g es una constante ($\approx 9.8m/s^2$). La derivada de la distancia recorrida $\frac{dy}{dt}$ se interpreta físicamente como la velocidad del cuerpo, y la derivada segunda $\frac{d^2y}{dt^2}$ como la aceleración.

El **movimiento de caída libre retardada por el rozamiento** está regido por la ecuación

$$\frac{d^2y}{dt} = g - a\frac{dy}{dt}$$

donde ahora a es una constante que depende del medio (aire, agua, etc.). En este caso el segundo término indica que la aceleración disminuye en una cantidad que es proporcional a la velocidad $\frac{dy}{dt}$ del cuerpo.

En una **reacción química de primer orden**, si llamamos x a la cantidad de una determinada sustancia en el instante t y esta sustancia se está descomponiendo por la reacción química, entonces se cumple la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{dx}{dt} = kx$$

donde k es una cierta constante. En este caso, la ecuación se interpreta como que la cantidad de sustancia x disminuye a una velocidad $\frac{dx}{dt}$ que es proporcional a x.

La **Ley de Enfriamiento de Newton** establece que si llamos $T(t)$ a la función que da la temperatura de un cuerpo en función del instante x, si la temperatura ambiente es A, entonces se cumple la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A)$$

donde k es una constante que depende del medio. En este caso, la ecuación expresa que la temperatura varía a una velocidad proporcional a la diferencia de temperatura con el medio.

Una ecuación diferencial puede venir acompañada de **condiciones iniciales**, que permitan determinar las constantes que aparecen al resolver la ecuación.

Ejemplo 5.2. Un termómetro se saca de una habitación a la terraza, donde la temperatura es de 10ºC. Un minuto más tarde, el termómetro marca 22ºC y otro minuto más tarde 16ºC ¿Cuál era la temperatura en la habitación?

Para resolver este problema, consideramos la función $T(t)$ que nos da la temperatura T en función del tiempo t. Mediremos el tiempo en minutos y consideraremos que el instante 0 es el momento en que sacamos el termómetro a la terraza. La Ley de Enfriamiento de Newton nos dice que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A)$$

En este caso, para resolver la ecuación, podemos pasar el término $T - A$ a la izquierda y tomar primitivas[1]

[1] La notación de Leibniz permite hacer estas cuentas de forma intuitiva manipulando dt y dT como si fuesen números. La expresión de la izquierda equivale a $\int \frac{T'(t)}{T(t)-A}dt$ y lo que se está haciendo es un cambio de variable.

$$\begin{aligned} \int \frac{dT}{T-A} &= \int k dt \\ log(T-A) &= kt+c \\ T-A &= e^{kt+c} \end{aligned}$$

Así que la función temperatura es de la forma $T(t) = A + e^{kt+c}$, donde sabemos que $A = 10$ mientras que k y c son constantes. Llamando $B = e^c$, podemos simplificar la expresión como

$$T(t) = 10 + Be^k$$

Las constantes B y k se determinan usando las *condiciones iniciales* que nos proporciona el problema: $T(1) = 22$, y $T(2) = 16$.

$$\begin{aligned} 22 &= 10 + Be^k \\ 16 &= 10 + Be^{2k} \end{aligned}$$

Así que $Be^k = 12$ y $Be^{2k} = 6$. Dividiendo ambas expresiones obtenemos que $e^k = 1/2$ y $B = 24$. La temperatura incial es $T(0) = 10 + 24e^0 = 34$.

5.2. Resolución de algunas ecuaciones diferenciales

Ecuaciones de variables separables

Son ecuaciones en las que tenemos a un lado de la desigualdad la derivada y', y al otro lado de la desigualdad un producto de dos expresiones: una que sólo depende de y y otra que sólo depende de la variable x.

$$\frac{dy}{dx} = g(y)f(x)$$

Estas ecuaciones se resuelven pasando la expresión $g(y)$ al lado izquierdo, y tomando primitivas a ambos lados.

Ejemplo 5.3. La ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = (y^2 + 1)(x^2 - x)$ es una ecuación en variables separadas, ya que la derivada está igualada a un producto de un factor que sólo depende de y ($g(y) = y^2 + 1$) y otro que sólo depende de x ($f(x) = x^2 - x$). Para resolver, pasamos el término $(y^2 + 1)$ a la izquierda y tomamos primitivas.

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int (x^2 - x)dx$$

$$arctan(y) = x^3/3 - x^2/2 + c$$

Así pues, las soluciones de la ecuación diferencial son las funciones de la forma

$$y(x) = tan(x^3/3 - x^2/2 + c)$$

donde c es una constante.

Ecuaciones homogéneas

Son ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

donde la expresión de la derecha $f(x, y)$ tiene la propiedad de que si se multiplican x e y por el mismo número $t > 0$, la expresión no se altera

$$f(tx, ty) = f(x, y) \text{ para todo } t > 0$$

Por ejemplo, la ecuación $y' = y/x$ es homogénea, porque $ty/tx = y/x$ para todo $t > 0$. En cambio, la ecuación $y' = y^2/x$ no es homogénea, porque $y^2/x \neq (ty)^2/tx = ty^2/x$.

Las ecuaciones homogéneas se pueden resolver haciendo el cambio de variable $u = y/x$, transformándolas en ecuaciones en variables separables.

Ejemplo 5.4. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = f(x, y).$$

Se trata de una ecuación homogénea pues

$$f(tx, ty) = \frac{ty + \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}}{tx} = \frac{ty + t\sqrt{x^2 + y^2}}{tx} = f(x, y)$$

Haciendo el cambio de variable $u = y/x$, tenemos que $y = ux$ y aplicando la derivada del producto $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u$. Sustituimos en la ecuación:

$$u + \frac{du}{dx}x = \frac{ux + \sqrt{x^2 + u^2x^2}}{x} = u + \sqrt{1 + u^2}$$

lo que equivale a la ecuación en variables separables

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\sqrt{1 + u^2}$$

que resolvemos por el método descrito anteriormente (una primitiva de la función $\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$ es el arcoseno hiperbólico):

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow arcsenh(u) = \log(x) + C \Rightarrow u = senh(\log(x) + C)$$

Ecuaciones lineales de primer orden

Son ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones que sólo dependen de x y no de y. La solución general de una ecuación de este tipo es de la forma

$$y(x) = K(x)e^{-F(x)}$$

donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y $K(x)$ es una función que se determina sustituyendo en la ecuación.

Ejemplo 5.5. Hallar la solución particular de la ecuación $y' = e^x + y$ con $y(1) = 5e$.

La ecuación es lineal, pues podemos reescribirla como $y' - y = e^x$. En este caso, $f(x) = -1$ y $g(x) = e^x$. Una primitiva de $f(x)$ es $F(x) = -x$. La solución será pues de la forma $y(x) = K(x)e^x$. Derivando y sustituyendo en la ecuación se obtiene:

$$e^x = y' - y = K'(x)\,e^x + K(x)\,e^x - K(x)\,e^x = K'(x)\,e^x \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad K'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad K(x) = x + C$$

y por tanto la solución general es $y(x) = (x + C)\,e^x$. Sustituyendo ahora la condición inicial $5e = y(1) = (1 + C)\,e$ obtenemos $C = 4$, luego la solución pedida es $y(x) = (x + 4)\,e^x$.